



TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS  
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

TPCM 2021

VII международная конференция  
**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**  
сборник научных трудов

VII International Conference on  
**TOPICAL  
PROBLEMS of  
CONTINUUM  
MECHANICS**

the proceeding

2021

TSAKHKADZOR, ARMENIA  
**4-8 ОКTOBER  
OCTOBER  
ОКТЯБРЯ  
ЦАХКАДЗОР, АРМЕНИЯ**

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

## **АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Материалы VII международной конференции  
04-08 октября 2021, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН  
Издательство «Гитутюн» НАН РА  
2021

УДК 531/534(082)

ББК 22.2 я43

А 437

**Институт механики НАН РА**

**Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН**

**Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении**

**Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике**

**Южный федеральный университет России**

**Национальный университет архитектуры и строительства Армении**

**Ереванский государственный университет**

Со-председатели оргкомитета: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян (Армения)

д.ф.-м.н. А.О.Ватулян (Россия)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения), д.ф.-м.н. М.А.Сумбатян (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения), к.ф.-м.н. Е.В.Мурашкин (Россия)

**Международный редакционный совет:**

Аветисян А.С., Агаловян Л.А., Айзикович С.М. (Россия), Акопян В.Н., Багдасарян Г.Е., Белубекян  
М.В., Ватулян А.О. (Россия), Вельмуруган Р. (Индия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г.  
(Россия), Зимин В.Н. (Россия), Кувыркин Г.Н. (Россия), Мхитарян С.М., Назайкинский В.Е. (Россия),  
Орелма Х. (Финляндия), Саакян А.В., Саркисян С.О., Северина Н.С. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия),  
Шавлакадзе Н.Н. (Грузия)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

Актуальные проблемы механики сплошной среды: Материалы VII международной  
A 437 конференции 04-08 октября 2021, Цахкадзор, Армения.– Ер.: «Гитутюн» НАН РА,  
2021.– 329 с.

В сборник включены доклады, представленные на VII-ую международную конференцию  
«Актуальные проблемы механики сплошной среды».

Сборник опубликован при финансовой поддержке **Национального университета**  
**архитектуры и строительства Армении**

УДК 531/534(082)

ББК 22.2 я43

ISBN 978-5-8080-1462-6

© НУАСА, 2021

© ИМ НАН РА, 2021

© ИПМех РАН, 2021

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍԻՏՈՒՏ

## ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

VII միջազգային գիտաժողովի նյութեր  
04-08 հոկտեմբերի 2021թ., Շաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ  
ՀՀ ԳԱԱ «Գիտություն» հրատարակչություն  
2021

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF REPUBLIC OF ARMENIA  
INSTITUTE OF MECHANICS

## **TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS**

Proceedings of VII International Conference  
04-08 October 2021, Tsaghkadzor, Armenia

YEREVAN – 2021

## Плоская контактная задача для составной области с симметричными трещинами между материалами

**Агабекян П.В., Арутюнян Л.А.**

Рассматриваются плоские задачи теории упругости для составного тела, состоящего из двух луночек с различными упругими характеристиками и существующими между ними конечными трещинами. При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат, через функции Бесселя, применяя преобразования Ханкеля, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Рассматривается ряд частных случаев, когда задачи решаются в замкнутом виде.

В данной работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано решение плоской контактной задачи теории упругости для двух областей с упругими характеристиками  $\mu_m, v_m$  ( $m=1,2$ ) (где  $\mu_m$ —модули сдвига материалов,  $v_m$ —коэффициенты Пуассона), образованных пересечением дуг окружностей с симметричной трещиной между материалами.

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат  $\alpha, \beta$ , которая связана с декартовыми координатами  $x, y$  соотношениями [1]

$$gx = \operatorname{sh} \alpha, \quad gy = \sin \beta, \quad ga = \operatorname{ch} \alpha + \cos \beta \quad (1)$$

$a$ —параметр биполярных координат.

Функция напряжений  $\phi(\alpha, \beta)$  удовлетворяет бигармоническому уравнению, которое в биполярной системе координат имеет вид [1]

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] [g\phi(\alpha, \beta)] = 0 \quad (2)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями:

$$\begin{aligned} a\sigma_\alpha(\alpha, \beta) &= \left[ (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] [g\phi(\alpha, \beta)] \\ a\sigma_\beta(\alpha, \beta) &= \left[ (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right] [g\phi(\alpha, \beta)] \\ a\tau_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) &= -(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} [g\phi(\alpha, \beta)] \\ u(\alpha, \beta) &= \frac{g}{2\mu} \left[ (1-v) \frac{\partial \phi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right] \\ v(\alpha, \beta) &= \frac{g}{2\mu} \left[ (1-v) \frac{\partial \phi(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

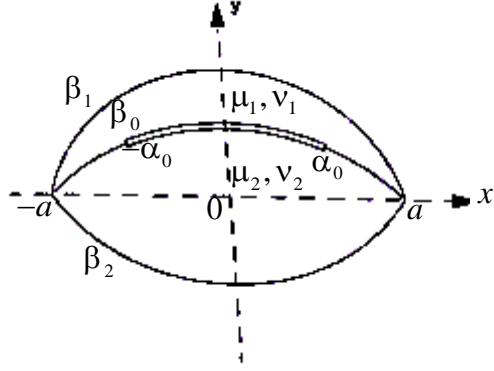
где  $\Psi(\alpha, \beta)$ —бигармоническая функция, связанная с  $\phi(\alpha, \beta)$  формулой

$$g\Psi(\alpha, \beta) = (1-v) \iint \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] [g\phi(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta \quad (4)$$

В биполярных координатах один из составляющих материалов, имеющий упругие характеристики  $\mu_1, v_1$ , занимает область  $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ , а второй, с упругими характеристиками  $\mu_2, v_2$ , — область  $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_0$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$  (фиг.1).

Границные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1,2]

$$\left[ g\phi_m(\alpha, \beta) \right]_{\beta=\beta_m} = \varphi_m(\alpha), \quad \left. \frac{\partial [g\phi_m(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_m} = \Psi_m(\alpha) \quad (m=1,2) \quad (5)$$



Фиг.1

Предполагается, что  $\varphi_m(\alpha)$  и  $\Psi_m(\alpha)$  ( $m=1,2$ ) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

На линии контакта и трещины имеем следующие условия

$$\frac{\partial [g\phi_m(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} = 0, \quad -\infty < \alpha < \infty \quad [g\phi_m(\alpha, \beta)] \Big|_{\beta=\beta_0} = 0 \quad |\alpha| < \alpha_0 \quad (6)$$

$$[g\phi_1(\alpha, \beta)] \Big|_{\beta=\beta_0} = [g\phi_2(\alpha, \beta)] \Big|_{\beta=\beta_0} \quad |\alpha| > \alpha_0 \quad v_1(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_0} = v_2(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_0} \quad |\alpha| > \alpha_0$$

Учитывая симметрию, бигармоническую функцию напряжений удобно представить интегралом Фурье в таком виде

$$g\phi_m(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_m(t, \beta) \cos t \alpha dt \quad (m=1,2) \quad (7)$$

где

$$f_m(t, \beta) = A_m(t) \operatorname{ch} t(\beta_m - \beta) \cos(\beta - \beta_0) + B_m(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \cos(\beta_m - \beta) + C_m(t) \operatorname{sh} t(\beta_m - \beta) \sin(\beta - \beta_0) + D_m(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \sin(\beta_m - \beta) \quad (8)$$

Удовлетворяя граничным условиям (5) и части контактных условий (6), получаем следующую систему уравнений для определения неизвестных интегрирования

$$\begin{aligned} A_m(t) \cos \gamma_m + B_m(t) \operatorname{ch} t \gamma_m &= \bar{\Phi}_m(t) \\ [tB_m(t) - D_m(t)] \operatorname{sh} t \gamma_m - [A_m(t) + tC_m(t)] \sin \gamma_m &= \bar{\Psi}_m(t) \\ [B_m(t) + tD_m(t)] \sin \gamma_m + [C_m(t) - tA_m(t)] \operatorname{sh} t \gamma_m &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_m(t) \operatorname{ch} t \gamma_m + B_m(t) \cos \gamma_m = X(t)$$

где  $\gamma_m = \beta_m - \beta_0$ , а величины  $\bar{\Phi}_m(t)$  и  $\bar{\Psi}_m(t)$  ( $m=1,2$ ) являются преобразованиями Фурье от функций  $\varphi_m(\alpha)$  и  $\Psi_m(\alpha)$

$$\bar{\Phi}_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_m(\alpha) \cos t \alpha d\alpha, \quad \bar{\Psi}_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Psi_m(\alpha) \cos t \alpha d\alpha \quad (10)$$

а  $X(t)$  – пока неизвестная функция, которая определяется позже. Разрешая систему (9), неизвестные  $A_m(t)$ ,  $B_m(t)$ ,  $C_m(t)$  и  $D_m(t)$  выразим через неизвестную  $X(t)$

$$\begin{aligned}
A_m(t) &= \frac{1}{\delta_m(t)} \left[ X(t) \operatorname{cht} \gamma_m - \bar{\Phi}_m(t) \cos \gamma_m \right] \\
B_m(t) &= \frac{1}{\delta_m(t)} \left[ \bar{\Phi}_m(t) \operatorname{cht} \gamma_m - X(t) \cos \gamma_m \right] \\
C_m(t) &= \frac{1}{2\delta_m(t)\Delta_m(t)} \left[ X(t) \left( 2t\delta_m(t) \operatorname{cht} \gamma_m + (t^2 + 1) \operatorname{sht} \gamma_m \sin 2\gamma_m \right) - \right. \\
&\quad \left. - \bar{\Phi}_m(t) \left( 2t\delta_m(t) \cos \gamma_m + (t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t\gamma_m \sin \gamma_m \right) + 2\bar{\Psi}_m(t) t\delta_m(t) \sin \gamma_m \right] \\
D_m(t) &= \frac{1}{2\delta_m(t)\Delta_m(t)} \left[ -X(t) \left( 2t\delta_m(t) \cos \gamma_m + (t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t\gamma_m \sin \gamma_m \right) + \right. \\
&\quad \left. + \bar{\Phi}_m(t) \left( 2t\delta_m(t) \operatorname{cht} \gamma_m + (t^2 + 1) \operatorname{sht} \gamma_m \sin 2\gamma_m \right) - 2\bar{\Psi}_m(t) \delta_m(t) \operatorname{sht} \gamma_m \right] \\
\delta_m(t) &= \operatorname{sh}^2 t\gamma_m + \sin^2 \gamma_m, \quad \Delta_m(t) = \operatorname{sh}^2 t\gamma_m - t^2 \sin^2 \gamma_m \quad (m=1,2)
\end{aligned} \tag{11}$$

Неизвестная функция  $X(t)$  определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которая получается из контактных условий (6)

$$\begin{cases} \int_0^\infty X(t) \cos t\alpha dt = 0 & |\alpha| < \alpha_0 \\ \int_0^\infty [M(t)X(t) + N(t)] \sin t\alpha dt = 0 & |\alpha| > \alpha_0 \end{cases} \tag{12}$$

$$\text{где } M(t) = \frac{\operatorname{sh} 2t\gamma_1 + t \sin 2\gamma_1}{2\Delta_1(t)} - \frac{h(\operatorname{sh} 2t\gamma_2 + t \sin 2\gamma_2)}{2\Delta_2(t)}$$

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{1}{\Delta_1(t)} \left[ -\bar{\varphi}_1(t) (\operatorname{tcht} \gamma_1 \sin \gamma_1 + \operatorname{sht} \gamma_1 \cos \gamma_1) + \bar{\Psi}_1(t) \operatorname{sht} \gamma_1 \sin \gamma_1 \right] - \\
&\quad - \frac{h}{\Delta_1(t)} \left[ -\bar{\varphi}_2(t) (\operatorname{tcht} \gamma_2 \sin \gamma_2 + \operatorname{sht} \gamma_2 \cos \gamma_2) + \bar{\Psi}_2(t) \operatorname{sht} \gamma_2 \sin \gamma_2 \right]
\end{aligned} \tag{13}$$

$$h = \frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)}$$

В частном случае, при  $\alpha_0 = \infty$  получим  $X(t) = 0$ , а при  $\alpha_0 = 0$  получим  $X(t) = -M(t)/N(t)$ . Оба случая задачи решаются в замкнутом виде.

Как видно из (13), при  $\varphi_2(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ ,  $\Psi_2(\alpha) = -\Psi_1(\alpha)$  и  $\gamma_2 = -\gamma_1$  получаем

$$\begin{aligned}
M(t) &= \frac{h+1}{2\Delta_1(t)} (\operatorname{sh} 2t\gamma_1 + t \sin 2\gamma_1) \\
N(t) &= \frac{h+1}{\Delta_1(t)} \left[ -\bar{\varphi}_1(t) (\operatorname{tcht} \gamma_1 \sin \gamma_1 + \operatorname{sht} \gamma_1 \cos \gamma_1) + \bar{\Psi}_1(t) \operatorname{sht} \gamma_1 \sin \gamma_1 \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

В этом частном случае решение поставленной задачи не зависит от упругих характеристик составляющих материалов. Аналогичные результаты для других областей были получены в работе [3]. Во всех случаях предполагали, что размеры области и внешние усилия одинаковы. В этой работе доказано, что размеры областей не обязательно должны быть одинаковыми, только необходимо выполнение условия  $\beta_1 + \beta_2 = 2\beta_0$ .

Учитывая интегральные представления функции Бесселя [3]

$$J_0(xt) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos t \alpha d\alpha}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \quad J_0(xt) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{\sin t \alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \quad (15)$$

Парные интегральные уравнения (12) можно представить в виде

$$\begin{cases} \int_0^\infty (t^2 + 1) X(t) J_0(xt) dt = 0 & \text{при } x < \alpha_0 \\ \int_0^\infty (t^2 + 1) [M(t) X(t) + N(t)] J_0(xt) dt = 0 & \text{при } x > \alpha_0 \end{cases} \quad (16)$$

Применяя преобразование Хенкеля, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$M(t)X(t) + N(t) = \frac{\alpha_0 t}{t^2 + 1} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) [M(\tau) - h - 1] X(\tau) + N(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (17)$$

или

$$X(t) = \frac{\alpha_0 t}{(h+1)(t^2 + 1)} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) u(\tau) K(t, \tau) d\tau - H(t) \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} u(\tau) &= (M(\tau) - h - 1) X(\tau) + N(\tau) \\ K(t, \tau) &= \frac{1}{t^2 - \tau^2} [t J_1(\alpha_0 t) J_0(\alpha_0 \tau) - \tau J_0(\alpha_0 t) J_1(\alpha_0 \tau)] \\ H(t) &= \frac{\alpha_0 t (M(t) - h - 1)}{(h+1)(t^2 + 1) M(t)} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) u(\tau) K(t, \tau) d\tau + \frac{N(t)}{M(t)} \end{aligned} \quad (19)$$

На линии контакта нормальное напряжение имеет вид

$$a\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [-t^2 (\cosh \alpha + \cos \beta_0) \cos t \alpha + t \sinh \alpha \sin t \alpha - \cos \beta_0 \cos t \alpha] X(t) dt \quad (20)$$

Выясним характер напряжений в точках  $\alpha = \alpha_0$  и  $\alpha = \infty$ . Из (20) после некоторых преобразований, получаем

$$a\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) = \frac{\sqrt{2}\alpha_0^2 (\cosh \alpha + \cos \beta_0)}{\sqrt{\pi(h+1)} \sqrt{\alpha^2 - \alpha_0^2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha_0^2}\right)} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) u(\tau) J_0(\alpha_0 \tau) d\tau + H_1(\alpha) \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}} H_1(\alpha) &= -\frac{\alpha_0 (\cosh \alpha + \cos \beta_0)}{(h+1)} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) u(\tau) J_0(\alpha_0 \tau) d\tau \int_0^\infty \frac{J_1(\alpha_0 t) \cos t \alpha}{t^2 + 1} dt - \\ &- \frac{\alpha_0 (\cosh \alpha + \cos \beta_0)}{(h+1)} \int_0^\infty \tau (\tau^2 + 1) u(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{t^2 (t J_1(\alpha_0 t) J_0(\alpha_0 \tau) - t J_0(\alpha_0 t) J_1(\alpha_0 \tau))}{(t^2 + 1)(t^2 - \tau^2)} \times \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &\times \cos t \alpha dt + \frac{\alpha_0}{(h+1)} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) u(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{t}{t^2 + 1} (t \sinh \alpha \sin t \alpha - \cos t \alpha \cos \beta_0) K(t, \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^\infty t^2 (\cosh \alpha + \cos \beta_0) \cos t \alpha - t \sinh \alpha \sin t \alpha + \cos \beta_0 \cos t \alpha \int_0^\infty H(t) dt \end{aligned}$$

При  $\alpha = \alpha_0$  на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка 1/2. В представленном виде (21) член, содержащий особенность в точке  $\alpha = \alpha_0$ , выделен, а  $H(\alpha) \rightarrow 0$  при  $\alpha = \alpha_0$ .

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта нормальное напряжение представим в виде

$$\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ t^2 (1 + e^{2\alpha} + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0) + it (1 - e^{-2\alpha}) + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0 \right] \frac{T(t) e^{\alpha(1+it)}}{\Delta(\Delta t)} dt \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= (\sinh 2t\gamma_1 + t \sin 2\gamma_1)(\sinh^2 t\gamma_2 - t^2 \sin^2 \gamma_2) - h(\sinh 2t\gamma_2 + t \sin 2\gamma_2)(\sinh^2 t\gamma_1 - t^2 \sin^2 \gamma_1) \\ T(t) &= \frac{\alpha_0 t \Delta_1(t) \Delta_2(t)}{t^2 + 1} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) K(t, \tau) d\tau - N(t) \Delta_1(t) \Delta_2(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Интеграл (23) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при  $x < 0$  или  $\alpha < 0$ ) или нижней (при  $x > 0$  или  $\alpha > 0$ ) полуокружности радиуса  $R \rightarrow \infty$  с центром в начале координат. Применяя теорему о вычетах, представим (23) в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) &= -i\sqrt{2\pi} \left[ t_1^2 (1 + e^{-2\alpha} + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0) + it_1 (1 - e^{-2\alpha}) + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0 \right] \times \\ &\times \frac{T(t_1)}{\Delta'(t_1)} e^{\alpha(1-\eta_1+i\xi_1)} - i\sqrt{2\pi} \sum_{K=2}^{\infty} \text{Выч} \left[ t_K^2 (1 + e^{-2\alpha} + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0) + it_K (1 - e^{-2\alpha}) \right] \times \\ &\times \left[ (1 - \eta_1 + i\xi_1) + 2e^{-\alpha} \cos \beta_0 \right] \frac{T(t_K)}{\Delta'(t_K)} e^{\alpha(1+it_K)} \end{aligned} \quad (25)$$

где  $t_K = \xi_K - i\eta_K$  – корни уравнения  $\Delta(t) = 0$  ( $\xi_K > 0, \eta_K > 0$ ).

Очевидно, характер напряженного состояния около края  $x = a$  ( $\alpha = \infty$ ) определяется величиной мнимой части первого простого корня  $t_1 = \xi_1 - i\eta_1$  уравнения  $\Delta(t) = 0$ . Если  $\eta_1 > 1$ , имеем нулевое напряженное состояние. Если  $\eta_1 < 1$  имеем концентрацию напряжений. В случае  $\eta_1 = 1$  напряжения на краю поверхности контакта конечны.

Укажем условие, из которого можно найти зону контакта. Для определения указанной зоны контакта используется условие равенства нулю коэффициентов интенсивности контактных напряжений на границах трещины:

$$\int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) J_0(\alpha_0 \tau) d\tau = 0 \quad (26)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград наука, 1968.
2. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1976. т.29, №1. С.51–66.
3. Мелконян М.Г., Мкртчян А.М. Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т.28, №3, 1975.

### Сведения об авторах:

**Арутюнян Левон Арсенович** – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении (374 99) 67 57 47  
**E-mail:** [arutyunyanlevon60@gmail.com](mailto:arutyunyanlevon60@gmail.com)

**Агабекян Пайкар Вараздатович** – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении (374 99) 24 85 47  
**E-mail:** [aghabekyan.payqar@gmail.com](mailto:aghabekyan.payqar@gmail.com)

## **Изгиб балки бесконечной длины на границе упругой полуплоскости**

**Агаян К.Л., Мартиросян А.В.**

Рассмотрена контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на границе упругой полуплоскости. При часто встречающихся в практических приложениях внешних изгибающих нагрузках, из общего решения задачи получено ее простое представление, легко поддающееся расчетам.

**1. Введение.** Задачи об изгибе тонкостенных элементов типа балок и плит на упругом основании представляют собой одну из актуальных, как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, областей теории смешанных и контактных задач теории упругости. Здесь, в рамках классической теории изгиба балок, рассматривается плоская контактная задача об изгибе балки бесконечной длины на границе упругого основания в виде упругой полуплоскости. Изгиб осуществляется употребляемыми в практических приложениях внешними нагрузками в виде сосредоточенных сил и моментов, а также распределенной нагрузкой. Задача в такой постановке, когда основание моделируется в виде упругого полупространства или полуплоскости, не новая. Она, в общем, относится к семейству контактных задач о передаче нагрузок от тонкостенных элементов к более массивным телам с различными конфигурациями и физическими моделями деформирования оснований.

Рассматриваемая здесь задача, с точки зрения построения формального решения, наиболее простая, по сравнению с родственными задачами для однородных и кусочно-однородных балок конечной или полубесконечной длины. Из таких работ отметим [1-7], которые более тесно связаны с рассматриваемой здесь задачей. Полученные в этих работах решения и их исследование связано с математическими трудностями. Простое и изящное решение рассматриваемой здесь задачи, когда для основания принимается известная физическая модель Винклера, представляется при помощи известных из курса сопротивления материалов функций Крылова [8].

Исходя из этих соображений, мы взялись рассмотреть эту задачу с целью получения более простого представления (подобно решению Крылова) ее решения, которым могли бы пользоваться также магистры и аспиранты строительных факультетов при выполнении расчетно-графических работ.

Этим способом можно получить аналогичное представление для решения задач с балками конечной и полубесконечной длины. Подобная постановка задачи и простое представление ее решения позволит поставить и решить новые, важные с практической точки зрения, задачи.

**2. Постановка задачи и решение.** Пусть на границе упругой полуплоскости, отнесенной к декартовой системе координат  $Oxy$ , расположена бесконечная балка прямоугольного поперечного сечения с постоянной изгибной жесткостью  $D_0$ . Изгиб балки осуществляется заданной внешней нагрузкой  $q^+(x)$  и неизвестной реакцией упругого основания  $q^-(x)$ . Предполагается, что в контактной зоне касательные напряжения отсутствуют и контактирование происходит без отрыва балки от края упругого основания [7], т.е. принимается модель двухсторонней связи между балкой и краем полуплоскости. При этих предположениях, в рамках классической теории изгиба балок, требуется определить закон распределения нормальных контактных давлений  $q^-(x)$ , возникающих под балкой, и основные механические параметры, характеризующие изгиб балки в общем.

Приступая к решению поставленной задачи, заметим, что, как обычно, определение напряженно-деформированного состояния рассмотренной конструкции решается методом

“сшивания”, рассматривая отдельно напряженное состояние балки и полуплоскости, используя при этом соответствующие условия контакта на границе.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки запишется в виде

$$\frac{d^3V_0}{dx^3} = \frac{1}{D_0} [q^+(x) - q^-(x)], \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

где  $V_0(x) = du_0(x)/dx$ ,  $u_0(x)$  - вертикальное перемещение (прогиб) балки,  $D_0 = E_0 J_0$  - жесткость балки на изгиб,  $E_0$  - ее модуль упругости,  $J_0 = b_0 h_0^3 / 12$  - момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Oz$ . В случае цилиндрического изгиба  $D_0 = E_0 h_0^3 / [12(1-v_0^2)]$  ( $h_0$  - толщина пластины,  $v_0$  - ее коэффициент Пуассона).

С другой стороны, для граничных точек полуплоскости, с учетом равенства нормальных контактных напряжений, будем иметь:

$$V(x) = \frac{du(x, +0)}{dx} = -\frac{1-v^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q^-(s) ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.2)$$

где  $u(x, +0)$  - вертикальное перемещение граничных точек полуплоскости,  $E$  - ее модуль упругости,  $v$  - коэффициент Пуассона.

Решение поставленной задачи будет точным при принятых допущениях, если установленный закон распределения контактных напряжений  $q^-(x)$  обеспечивает как выполнение условия равновесия балки (2.1), так и контактного условия, выражаемого равенством:

$$u_0(x) = -u(x, +0) \Rightarrow \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, +0)}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.3)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в (2.3), после действительного преобразования Фурье, придем к следующему уравнению:

$$\left[ 1 + \frac{2D_0(1-v^2)}{E} |\sigma|^3 \right] \bar{q}^-(\sigma) = \bar{q}^+(\sigma), \quad \bar{q}^+(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} q^+(x) e^{i\sigma x} dx \quad (2.4)$$

Откуда, после обратного преобразования, найдем

$$q^-(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^3}{\lambda^3 + |\sigma|^3} \bar{q}^+(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (2.5)$$

$$\lambda^3 = \begin{cases} \frac{E}{2(1-v^2)D_0}, & \text{при плоской деформации,} \\ \frac{E(1+v)^2}{2(1+2v)D_0}, & \text{при плоском напряженном состоянии} \end{cases} \quad (2.6)$$

(2.5) дает решение задачи в виде интегралов Фурье, при заданных внешних нагрузках.

**3. Исследование решения (2.5).** Для произвольно заданной внешней изгибающей нагрузки  $q^+(x)$ , удовлетворяющей необходимым условиям существования интегралов Фурье, входящих в (2.5), можно получить соответствующие асимптотические представления, характеризующие поведение контактных напряжений и изгибных параметров балки. Не останавливаясь на этих общих вопросах и желая получить более простое и доступное представление решения, предположим, что внешняя нагрузка представляется, как было указано выше, в следующем виде:

$$q^+(x) = \sum_{k=1}^{N_p} P_k \delta(x - x_k^{(P)}) + \sum_{k=1}^{N_M} M_k \delta'(x - x_k^{(M)}) + \sum_{k=1}^{N_q} [H(x - a_k) - H(x - b_k)] q_k(x) \quad (3.1)$$

где  $q_k(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  - полином конечной степени,  $H(x)$  - ступенчатая функция Хевисайда, а  $\delta(x)$  - известная дельта-функция Дирака, определяемые следующим образом [2]

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\alpha, \quad \frac{dH(x)}{dx} = \delta(x). \quad (3.2)$$

Обобщенные функции  $\delta(x)$ ,  $\delta'(x)$  и  $H(x)$  имеют определенные механические смыслы:  $\delta(x)$  - описывает сосредоточенные силы;  $\delta'(x)$  - сосредоточенные моменты;  $H(x)$  - распределенную нагрузку. Следовательно,  $q^+(x)$  из (3.1) представляется в виде суммы сосредоточенных сил  $P_k$ , приложенных в точках  $x_k^{(p)}$ ; сосредоточенных моментов  $M_k$ , приложенных в точках  $x_k^{(m)}$ ; распределенной нагрузки интенсивности  $q_k(x)$ , приложенной на интервале  $[a_k, b_k]$  ( $a_k < b_k$ ).

Вычислим преобразование Фурье  $\bar{q}^+(\sigma)$  из (3.1), принимая при этом  $q_k(x) = q_k = const$ , и подставим полученное в (2.5), получим:

$$q^-(x) = \sum_{k=1}^{N_p} P_k A_k^{(p)}(x, \lambda) + \sum_{k=1}^{N_m} M_k A_k^{(m)}(x, \lambda) + \sum_{k=1}^{N_q} q_k A_k^{(q)}(x, \lambda) \quad (3.3)$$

$$A_k^{(p)}(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda e^{i\sigma\lambda x_{kp}}}{1+|\sigma|^3} d\sigma; \quad A_k^{(m)}(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 \sigma e^{i\sigma\lambda x_{km}}}{1+|\sigma|^3} d\sigma \quad (3.4)_{1/2}$$

$$A_k^{(q)}(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|\sigma|^3} \frac{e^{i\sigma\lambda x_{kb}} - e^{i\sigma\lambda x_{ka}}}{\sigma} d\sigma \quad (3.4)_3$$

$$x_{kp} = x - x_k^{(p)}; \quad x_{km} = x - x_k^{(m)}; \quad x_{kb} = x - b_k; \quad x_{ka} = x - a_k \quad (3.5)$$

Полученной формулой (3.3) дается решение поставленной задачи. Имея  $q^-(x)$ , можно без труда определить остальные изгибные параметры балки. Решение (3.3), как видно из (3.4)<sub>1</sub> – (3.4)<sub>3</sub>, представляется суммой интегралов Фурье, не поддающихся прямому вычислению. Следовательно, для получения ожидаемого простого решения следует каким-то образом упростить их. Для этого рассмотрим интеграл

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + [\varphi(\alpha)]^3} d\alpha, \quad x > 0 \quad (3.5)$$

где  $\varphi(\alpha)$  аналитическое продолжение функции  $\varphi(\sigma) = |\sigma|$  на комплексную плоскость  $\alpha = \sigma + i\tau$ , разрезанную по положительной полуоси  $0\tau (\tau > 0)$ , а  $L^+$  контур интегрирования, показанный на рис.1.

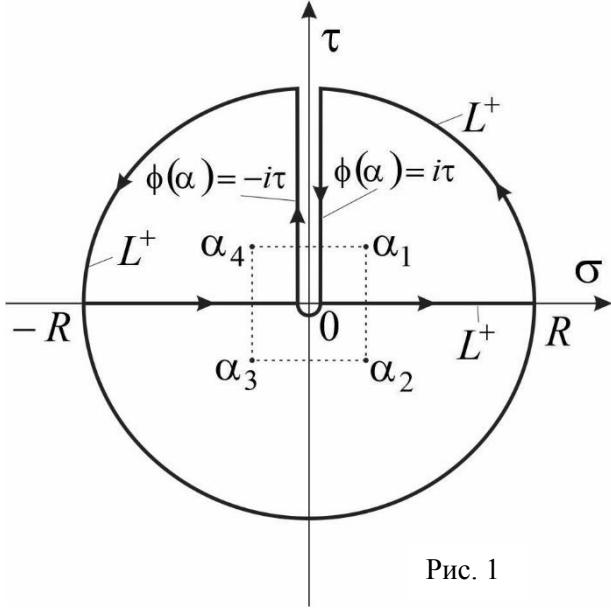


Рис. 1

Аналитическим продолжением функции  $\phi(\alpha) = |\alpha|$  в комплексную плоскость  $\alpha$  является

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ -\alpha, & \operatorname{Re} \alpha < 0 \end{cases}$$

Тогда, для подинтегральной функции будет иметь:

$$\frac{1}{1 + [\phi(\alpha)]^3} = \begin{cases} \left[ (\alpha + 1)(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \right]^{-1}, & \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ \left[ (\alpha - 1)(\alpha - \alpha_3)(\alpha - \alpha_4) \right]^{-1}, & \operatorname{Re} \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\text{где } \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha_{3,4} = -\frac{1}{2} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Внутри контура интегрирования  $L^+$  имеются два полюса первого порядка  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Тогда, по теореме о вычетах и по Лемме Жордана, получим значение интеграла из (3.5) при  $x > 0$ . Имея значение интеграла (3.5) и при  $x < 0$ , в конечном итоге, для функций из (3.4)<sub>1</sub> – (3.4)<sub>3</sub>, получим

$$A_k^{(p)}(x, \lambda) = \frac{\lambda}{3} e^{-\sqrt{3}Z_{kp}} \left[ \sqrt{3} \cos Z_{kp} + \sin |Z_{kp}| \right] - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^3 e^{-2\tau|Z_{kp}|}}{1 + \tau^6} d\tau$$

$$A_k^{(m)}(x, \lambda) = \frac{\lambda^2}{6} \left\{ -e^{-\sqrt{3}Z_{km}} \left[ \cos x_{km} + 3\sqrt{3} \sin |Z_{km}| \right] + \frac{\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^4 e^{-2\tau|Z_{km}|}}{1 + \tau^6} d\tau \right\} \operatorname{sgn}(Z_{km})$$

$$A_k^{(q)}(x, \lambda) =$$

$$= \left\{ \frac{2}{3} \left[ e^{-\sqrt{3}|Z_{kb}|} \cos Z_{kb} - e^{-\sqrt{3}|Z_{ka}|} \cos Z_{ka} \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{-2\tau|Z_{kb}|} - e^{-2\tau|Z_{ka}|} \right] \frac{\tau^2 d\tau}{1+\tau^6} \right\} [H(a_k - x) - H(x - b_k)] +$$

$$+ \left\{ \frac{2}{3} \left[ e^{-\sqrt{3}|Z_{ka}|} \cos Z_{ka} + e^{-\sqrt{3}|Z_{kb}|} \cos Z_{kb} \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{-2\tau|Z_{ka}|} + e^{-2\tau|Z_{kb}|} \right] \frac{\tau^2 d\tau}{1+\tau^6} - 1 \right\} [H(x - a_k) - H(x - b_k)]$$

$$z_{kp} = \lambda x_{kp} / 2; z_{kn} = \lambda x_{km} / 2; z_{ka} = \lambda x_{ka} / 2, z_{kb} = \lambda x_{kb} / 2$$

## Заключение

Конструкция на упругом основании находится под действием внешних нагрузок и реактивного отпора основания. Закон изменения реактивного отпора (контактных напряжений) и его определение существенно зависят от принятой модели основания. При линейно-деформируемом основании полученные решения представляются в довольно сложном виде. Здесь удалось решение рассматриваемой задачи представить в виде суммы элементарных функций и быстро сходящихся интегральных составляющих. Этим подходом полученные решения задач, с применением модели Винклера, более конструктивные.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином, ПММ, 1975, т.39, вып. 6, с. 1100-1109.
2. Попов Г.Я., Контактные задачи для линейно-деформируемого основания, Киев-Одесса, Выша школа, 1982, с. 182
3. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежаще на упругой полуплоскости, Изд. НАН Армении, Механика, 1992, т. 45, №1-2, с.11-26
4. Агаян К.Л., Манукян Э.А. Изгиб кусочно-однородной балки на упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2000, т. 33, №2, с. 3-9
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, Изд. НАН РА, Механика, 2008, т. 61, №4, с. 5-19
6. Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом, Изд. НАН РА, Механика, 2010, т. 63, №4, с.3-11.
7. Ефимов А.Б., Малый В.И., Толкачева Н.М. Контактная задача для упругого тела с тонким покрытием, МТТ, 1969, №1, с.166-171.
8. Варданян Г.С. и др., Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности, М. Изд. АСВ, 1995.

## Сведения об авторах:

**Агаян Каро Леренович** – д.ф.м.н., в.н.с., Институт механики НАН РА,  
E-mail: [karo.aghayan@gmail.com](mailto:karo.aghayan@gmail.com)

**Мартиросян Ангин Викторовна** - доцент, Национальный университет архитектуры и строительства Армении, E-mail:[angin84@mail.ru](mailto:angin84@mail.ru)

**Оссесимметрическая контактная задача для составного пространства  
с круговой дискообразной трещиной**

**Акопян В.Н., Амирджанян А.А.**

В работе построено точное решение задачи об осесимметричном напряжённом состоянии составного упругого пространства, состоящего из двух разнородных полупространств на плоскости стыка которых имеется круговая дискообразная трещина на одном берегу которой заданы напряжения, а на другой берег вдавливается гладкий штамп (шайба). Выведена определяющая система уравнений задачи, которая при помощи операторов вращения сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений и построено её точное решение. Получены простые формулы как для определения контактных напряжений под штампом, так и для коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений.

**Постановка задачи и вывод определяющих уравнений**

Пусть упругое составное пространство, состоящее из двух разнородных полупространств с коэффициентами Ламэ  $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$ , заполняет в цилиндрической системе координат соответственно верхнее ( $z \geq 0$ ) и нижнее ( $z \leq 0$ ) полупространства, на плоскости стыка которых ( $z = 0$ ) имеется монетообразная межфазная трещина с радиусом  $a$ , на нижний берег которой при помощи сосредоточенной нагрузки величины  $P_0$  вдавливается гладкий штамп с плоским основанием, а на верхнем берегу действуют распределённые напряжения интенсивности  $p_0(r)$  с той же равнодействующей.

Ставится задача: определить контактные напряжения, действующие как на стыке полупространств, так и на нижнем берегу трещины, а также их коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} u_1(r, 0) = u_2(r, 0); & w_1(r, 0) = w_2(r, 0); \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0); & \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) \end{cases} \quad (a < r < \infty) \quad (1.a)$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = -p_0(r); & \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0; \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0; & w_2(r, 0) = \delta; \end{cases} \quad (0 < r < a) \quad (1.b)$$

Здесь  $w_j(r, z)$  и  $u_j(r, z)$  ( $j=1, 2$ ) – нормальные и радиальные компоненты перемещений соответственно для верхнего и нижнего полупространств в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие каждая в своей области определения уравнениям Ламэ,  $\sigma_z^{(j)}(r, z)$  и  $\tau_{rz}^{(j)}(r, z)$  – нормальные и касательные компоненты напряжений, а  $\delta$  – нормальное жёсткое смещение штампа.

Чтобы построить решение граничной задачи (1) используем разрывные решения для составного пространства с монетообразной трещиной, полученные в [2].

Используя эти решения и удовлетворив условиям (1.b), приходим к определяющей системе уравнений относительно скачков нормальных напряжений, действующих на берегах трещины и компонентов дислокации смещений точек берегов трещины. Далее при помощи операторов вращений  $I$  и  $I_1$  [1–3] полученная система приводится к следующей системе из трёх сингулярных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi d_1}{2} \sigma_*(x) + \frac{\pi b_1}{2} u'_*(x) - \frac{b_0}{2} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt &= -\Delta \delta; \\ \frac{\pi b_3}{2} w'_*(x) + \frac{b_0}{2} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(t) dt}{t-x} + \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \frac{u'_*(t) dt}{t-x} &= -\Delta f(x); \quad (-a < x < a) \\ \frac{\pi b_1}{2} \sigma_*(x) + \frac{\pi b_3}{2} u'_*(x) - \frac{b_2}{2} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t) dt}{t-x} &= \Delta C_* \end{aligned} \quad (2)$$

при условиях

$$\int_{-a}^a u'_*(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a w'_*(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a \sigma_*(x) dx = 0 \quad (3)$$

Здесь, как и в [1]

$$\begin{aligned} w'_*(t) &= \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi w(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad \sigma_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_t^a \frac{\xi \sigma(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad u_*(t) = \frac{2t}{\pi} \int_t^a \frac{u(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) - \sigma_z^{(2)}(r, 0) &= \sigma(r); \quad u_1(r, 0) - u_2(r, 0) = u(r); \quad w_1(r, 0) - w_2(r, 0) = w(r) \quad (0 < r < a); \end{aligned}$$

$$f(x) = I[p_0(r)]; \quad C_* = \frac{\pi b_1}{2\Delta} \sigma_*(0) + \frac{\pi b_3}{2\Delta} u'_*(0) + \frac{b_2}{2\Delta} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t} dt.$$

Для решения системы (2) из первого и последнего уравнений определяется  $\sigma_*(x)$  через функцию  $u'_*(x)$  и подставляя полученное выражение для  $\sigma_*(x)$  в первое и во второе уравнения (2), для определения приведённых компонентов дислокаций смещений получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u'_*(x) - \frac{\alpha_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t)}{t-x} dt = A\delta; \\ w'_*(x) - \frac{\beta_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'_*(t)}{t-x} dt = Bf(x), \end{cases} \quad (4)$$

где  $\alpha_1 \neq 0, \beta_1, A$  и  $B$  – известные постоянные. В случае, когда  $\beta_1 \neq 0$ , вводя функции  $\varphi_j(x) = u'_*(x) + \lambda_j w'_*(x)$  ( $j = 1, 2$ ), решение системы уравнений (4) приводится к решению двух независимых сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = g_j(x) \quad (-a < x < a; \quad j = 1, 2) \quad (5)$$

$$\lambda_j = (-1)^j \sqrt{\alpha_1 / \beta_1} = (-1)^j \lambda; \quad q_j = (-1)^{j+1} \sqrt{\alpha_1 \beta_1} = (-1)^{j+1} q; \quad g_j(x) = A\delta + \lambda_j Bf(x).$$

при условиях

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (6)$$

Решение системы (5) при условиях (6) записывается в следующем виде [1–3]:

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[ g_j(x) + \frac{q_j X_j^+(x)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g_j(s) ds}{X_j^+(s)(s-x)} \right] \quad (-a < x < a; \quad j=1,2) \quad (7)$$

$$X_j(z) = \left( \frac{z+a}{z-a} \right)^{\gamma_j}; \quad X_j^+(x) = \sqrt{G_j} \left( \frac{a+x}{a-x} \right)^{\gamma_j} = \sqrt{G_j} \omega_j(x);$$

$$G_j = \frac{1 - (-1)^{j+1} iq}{1 + (-1)^{j+1} iq}; \quad \gamma_j = (-1)^{j+1} \gamma; \quad \gamma = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-q^2} & (q < 1) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2q}{1-q^2} & (q > 1) \end{cases};$$

Отметим, что ввиду энергетических соображений в тех концевых точках, где показатель особенности больше  $1/2$ , взято ограниченное решение .

Аналогичным образом построено замкнутое решение системы (4) также в случае  $\beta_1 = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
2. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. №3. С. 31–46.
3. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жёсткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве // Сб. трудов межд. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 95–летию со дня рожд. Акад. Н.Х.Арутюняна, Ереван–2007, с. 45–51.

### Сведения об авторах:

**Акопян Ваграм** – доктор физ.- мат. наук, проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (+37491)350–222,

**e-mail:** [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

**Амирджанян Арутюн** – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (+3741) 52-48-90,

**e-mail:** [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

## Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной

Акопян Л.В., Даштоян Л.Л.

Построено точное решение задачи о плоско-деформированном состоянии кусочно-однородной плоскости из двух разнородных полуплоскостей, расслабленной конечной межфазной трещиной, на один из берегов которой вдавливается абсолютно жёсткий гладкий штамп с плоским основанием. Получены простые формулы для определения важных физико-механических характеристик задачи каковыми являются контактные напряжения, действующие под штампом и коэффициенты разрушающих напряжений в концевых точках трещины.

**Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Рассмотрим плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ  $\mu_1, \lambda_1$  и  $\mu_2, \lambda_2$  соответственно, отнесённой к декартовой системе координат  $Oxy$ , ось абсцисс которой направлена по линии соединения разнородных полуплоскостей и содержащей на этой оси, на интервале  $(-a, a)$  межфазную трещину. Будем полагать, что кусочно-однородная плоскость деформируется при помощи абсолютно жёсткого гладкого штампа, вдавливаемого в один из берегов трещины под влиянием сосредоточенной нагрузки величины  $P_0$ , приложенной в центре штампа (Рис. 1).

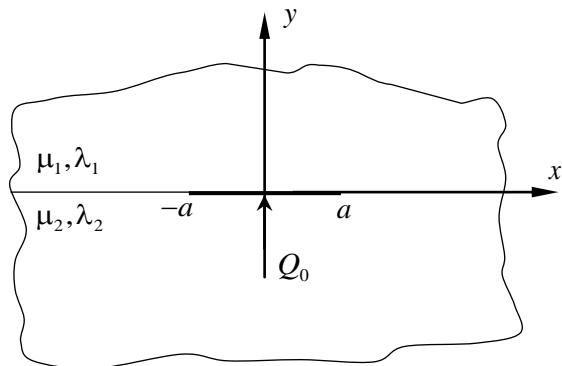


Рис. 1

Ставится задача: построить точное решение задачи в квадратурах.

Поставленная задача математически эквивалентна следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \\ u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0) \\ v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0) \end{cases} \quad |x| > a \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0 \\ \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0 \\ v^{(2)}(x, 0) = \delta \end{cases} \quad |x| < a \quad (1b)$$

где  $\delta$  – жёсткое смещение штампа.

Для решения поставленной задачи будем использовать разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости полученные в монографии [1]. Сохранив обозначения, введенные в [1] и учитывая, что в рассматриваемом случае  $\tau(x) = 0$ , для

напряжений на верхнем берегу трещины и нормальных смещений на нижнем берегах трещины получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{l_0}{\Delta} \sigma(x) + \frac{l_1}{\Delta} u'(x) - \frac{l_3}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds; \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, 0) &= -\frac{l_1}{\Delta} v'(x) - \frac{l_2}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_3}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds \quad (j=1, 2); \\ v'_2(x, 0) &= -\frac{l_0}{\Delta \vartheta_2^{(2)}} v'(x) - \frac{d_1}{\pi \Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{l_2}{\pi \Delta \vartheta_2^{(2)}} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds,\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) &= \sigma(x); \quad \vartheta_2^{(2)} [u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0)] = u(x); \\ \vartheta_2^{(2)} [v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0)] &= v(x).\end{aligned}$$

Далее, при помощи соотношений (2), удовлетворим условиям на берегах трещины (1.6) предварительно продифференцировав последнее из них. В итоге, для определения неизвестного контактного давления  $\sigma(x)$  и функций дислокации смещений  $u'(x)$  и  $v'(x)$  получим следующую определяющую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} l_0 \sigma(x) + l_1 u'(x) - \frac{l_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds = 0; \\ l_1 v'(x) + \frac{l_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{l_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0; \\ l_0 v'(x) + \frac{d_1 \vartheta_2^{(2)}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{l_2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds = 0. \end{cases}\quad (3)$$

Систему (3) нужно рассматривать при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P_0; \quad \int_{-a}^a v'(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a u'(x) dx = 0 \quad (4)$$

Для решения системы (3) при условиях (4) исключим из последних двух уравнений системы функцию  $v'(x)$ . Тогда, как и в [1], получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{M \sigma(s) + N u'(s)}{s-x} ds = 0, \quad (5)$$

где

$$M = \vartheta_2^{(2)} l_1 d_1 - l_2 l_0 = -\vartheta_1^{(1)} \vartheta_2^{(2)} \Delta; \quad N = l_1 l_2 - l_0 l_3 = 2 \left( (\vartheta_2^{(1)})^2 - (\vartheta_1^{(1)})^2 \right) \Delta.$$

Из (5), используя первое и последнее соотношения (4), найдем:

$$M\sigma(x) + Nu'(x) = \frac{MP_0}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (6)$$

Теперь, из (6) выразив функцию  $u'(x)$  через функцию  $\sigma(x)$  и подставляя полученное выражение в первые два уравнения (3), придём к системе из двух сингулярных интегральных уравнений для определения контактного давления и дислокации нормальных смещений:

$$\begin{cases} \frac{l_0N - l_1M}{N}\sigma(x) - \frac{l_3}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\nu'(s)ds}{s-x} = -\frac{l_1MP_0}{\pi N \sqrt{a^2 - x^2}} \\ l_1\nu'(x) - \frac{Ml_3 - Nl_2}{N} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)ds}{s-x} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы (7) при условиях (4).

Учитывая, что  $Ml_3 - Nl_2 = -\vartheta_2^{(1)}\vartheta_2^{(2)}l_1\Delta \neq 0$ , сначала рассмотрим случай, когда  $l_0N - l_1M = 0$ .

В этом случае система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\nu'(s)ds}{s-x} = \frac{A_0}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \nu'(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)ds}{s-x} = 0 \end{cases} \quad \left( A_0 = \frac{l_1MP_0}{Nl_3}; \beta = -\frac{\vartheta_2^{(1)}\vartheta_2^{(2)}}{2\left[\left(\vartheta_2^{(1)}\right)^2 - \left(\vartheta_1^{(1)}\right)^2\right]} < 0 \right) \quad (8)$$

Из первого уравнения (8) найдём

$$\nu'(x) = -\frac{A_0 \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a). \quad (9)$$

Отсюда

$$\nu(x) = -\frac{A_0}{\pi^2} \int_{-a}^x \frac{\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (-a < x < a). \quad (10)$$

Подставляя значение  $\nu'(x)$  из (9) во второе уравнение (8) для определения  $\sigma(x)$  получим сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)ds}{s-x} = -\frac{A_0 \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{\beta\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Решение полученного уравнения, удовлетворяющее условию равновесия штампа записывается следующим образом:

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \left\{ \frac{A_0}{2\pi^2\beta} \ln^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) + P_0 - A_0 / 2\beta \right\} \quad (-a < x < a). \quad (11)$$

Отметим, что при выводе формулы (10) было использовано соотношение [3]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\ln\left(\frac{a-s}{a+s}\right)}{s-x} ds = \ln^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) - \pi^2.$$

Тогда горизонтальная составляющая плотности дислокации определится формулой:

$$u'(x) = -\frac{MA_0}{2\pi N\beta\sqrt{a^2-x^2}} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \ln^2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) - 1 \right\}.$$

Теперь обратимся к случаю, когда механические характеристики разнородных полуплоскостей таковы, что  $l_0N - l_1M \neq 0$ . В этом случае систему (7) запишем в виде:

$$\begin{cases} \sigma(x) - \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)ds}{s-x} = \frac{A}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \\ v'(x) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)ds}{s-x} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{Nl_3}{l_0N - l_1M}; \quad A = -\frac{l_1MP_0}{l_0N - l_1M}.$$

Несложно заметить, что система (12) по структуре точностью совпадает с системой, полученной в [1] для кусочно-однородной плоскости с межфазным абсолютно жёстким включением, одна из длинных сторон которого склеена, а другая сторона гладко контактирует с матрицей. Разница лишь в том, что вместо скачка касательных напряжений здесь фигурирует скачок нормальных смещений. Исходя из этого и введя функции

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + \lambda_j^* v'(x); \quad (\lambda_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\alpha/\beta}; \quad j=1,2), \quad (13)$$

систему уравнений (12) напишем в виде двух независимых сингулярных интегральных уравнений

$$\varphi_j(x) + \frac{q_j}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi_j(s)ds}{s-x} = \frac{A}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}; \quad (-a < x < a, \quad q_j = (-1)^j \sqrt{\alpha\beta}, \quad j=1,2) \quad (14)$$

При этом,

$$\int_{-a}^a \varphi_j(x)dx = P_0 \quad (j=1,2) \quad (15)$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $q_j (j=1,2)$  – действительные числа, т.е. когда  $\alpha\beta > 0$ . Тогда решения уравнений (13), удовлетворяющие условиям (15) можем записать в следующем виде [1]:

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1+q_j^2} \left[ \frac{A}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{q_j A \omega((-1)^j x)}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{(a^2-s^2)^{1/2} ds}{\omega((-1)^j s)(s-x)} \right] + \frac{P_0 \sin \pi \gamma_j}{2\pi} \omega((-1)^j x) \quad (16)$$

$$\left( G_j = \frac{1-iq_j}{1+iq_j}; \quad |G_j| = 1; \quad 0 < \gamma_j = \frac{\arg G_j}{2\pi} < 1; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_1; \quad \omega(x) = (a+x)^{-\gamma_1} (a-x)^{\gamma_1-1} \right).$$

Определим контактное давление под штампом  $P(x) = -\sigma_2(x) = \sigma(x)$  и нормальную составляющую дислокации точек берегов трещины. Для этого рассмотрим (13) как систему и определим  $\sigma(x)$  и  $v'(x)$ . Далее, используя значение интеграла [3]

$$\int_a^b \left( \frac{x-a}{b-x} \right)^{\alpha-1} \frac{dx}{x-y} = \frac{-\pi}{\sin \pi \alpha} \left[ \cos \pi \alpha \left( \frac{y-a}{b-y} \right)^{\alpha-1} + 1 \right], \quad (0 < \operatorname{Re} \alpha < 2, \quad a < y < b)$$

окончательно найдем:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{K_I}{\sqrt{a^2 - x^2}} + K_{II} [\omega(x) + \omega(-x)]; \quad v'(x) = K_{III} [\omega(x) - \omega(-x)]; \\ K_I &= \frac{A}{\pi(1+q^2)} [1 + qtg \pi \gamma_1]; \quad K_{II} = \frac{P_0}{2\pi} \left[ \sin \pi \gamma_1 - \frac{qA}{P_0(1+q^2) \cos \pi \gamma_1} \right]; \\ K_{III} &= \frac{P_0}{2\pi \lambda^*} \left[ \sin \pi \gamma_1 - \frac{qA}{P_0(1+q^2) \cos \pi \gamma_1} \right]. \end{aligned}$$

Горизонтальную составляющую дислокации смещений можно определить из (7).

Теперь обратимся к случаю, когда  $\alpha \beta < 0$ , т.е. когда числа  $q_j$  ( $j=1,2$ ) – чисто мнимые. В этом случае решение уравнений (14) задаётся формулой (16), однако, в этом случае

$$\gamma_j = \frac{1}{2} + (-1)^j i \beta_1; \quad q_j = (-1)^j iq; \quad q = \sqrt{-\alpha \beta}; \quad \beta_1 = \frac{1}{2\pi} \ln |G_1|; \quad G_1 = \frac{1-q}{1+q} < 0 \quad (j=1,2).$$

## ЛИТЕРАТУРА

- Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентриаторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2014. 322с.
- Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738с.

### Сведения об авторах:

**Акопян Лусине** – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник института механики НАН РА, тел.: (+3741) 52-48-90,  
e-mail: [v.hakobyan@sci.am](mailto:v.hakobyan@sci.am)

**Даштоян Лилит** – кандидат физ.-мат. наук, ученый секретарь института механики НАН РА, тел.: (+3741) 56-81-89,

e-mail: [lilit.dashoyan@sci.am](mailto:lilit.dashoyan@sci.am)

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ПОЛУПЛОСКОСТЬ-СЛОЙ ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ СКОЛЬЖЕНИИ

**Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбиян А.З.**

Рассмотрена задача распространения поверхностных волн типа Рэля в системе полуплоскость-слой по линии их соединения при условии скользящего контакта между ними, когда слой движется с постоянной скоростью. Получены дисперсионное уравнение задачи и условия распространения поверхностных волн в зависимости от физических и геометрических характеристик полуплоскости и слоя когда внешняя поверхность свободна от напряжений.

**Введение.** Исследованию поверхностных волн типа Рэля в составной полуплоскости посвящено множество работ. Обзор публикаций по этой тематике можно найти в [2-8] В работе [3] исследовано существование упругих волн, локализованных у границы раздела двух упругих сред, которые экспоненциально затухают по мере удаления от границы. Здесь рассмотрена задача плоской деформации, при соприкосновении и взаимном скольжении двух материалов вдоль плоской границы с постоянной скоростью.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается задача распространения плоской поверхностной волны в системе полупространство-слой (рис.1).

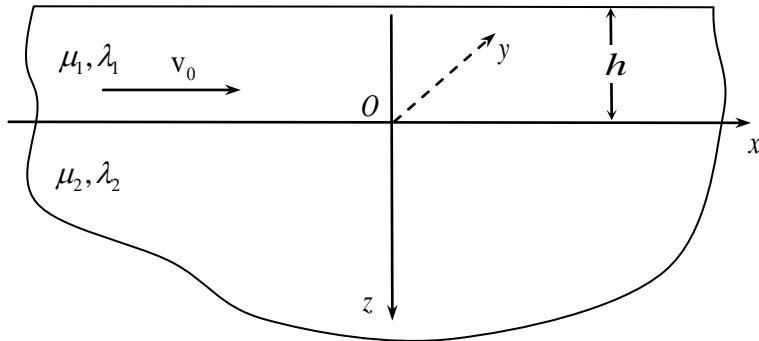


Рис. 1

Для компонент упругих перемещений имеем

$$u_1^{(j)} = u^{(j)}(x, z, t), \quad u_3^{(j)} = w^{(j)}(x, z, t), \quad u_2^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (1)$$

где  $j = 1$  относится к слою, а  $j = 2$  – к полуплоскости,  $t$  – времени.

Уравнения движения в перемещениях имеют вид [1]

$$\begin{aligned} c_{ij}^2 \Delta u^{(j)} + (c_{lj}^2 - c_{tj}^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial t^2} \\ c_{tj}^2 \Delta w^{(j)} + (c_{lj}^2 - c_{tj}^2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c_{lj}$ ,  $c_{tj}$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в соответствующих средах,  $\lambda_j$ ,  $\mu_j$  – коэффициенты Ламе слоя и полупространства соответственно.

На линии раздела материалов  $z = 0$  заданы условия скользящего контакта:

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{31}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} \quad (3)$$

а внешняя поверхность  $z = -h$  свободна от напряжений

$$\sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0 \quad (4)$$

Посредством скалярных потенциалов представим перемещения в виде [1]

$$u^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial z}, \quad w^{(j)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \quad (5)$$

Уравнения (2) сводятся к

$$\Delta \Phi_j = \frac{1}{c_{tj}^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi_j = \frac{1}{c_{tj}^2} \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial t^2}, \quad (6)$$

При этом для используемых в дальнейшем напряжений получаются следующие выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(j)} &= \lambda_j \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} - 2\mu_j \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z \partial x}, \\ \sigma_{31}^{(j)} &= \mu_j \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Введём обезразмеривающие обозначения

$$\eta_j = \frac{c_{tj}^2}{c_{lj}^2} = \frac{\mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j}; \quad \theta = \frac{c_{t2}^{-2}}{c_{t1}^{-2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad c = \frac{\omega}{k}; \quad \chi = \frac{v_0}{c_{t2}}; \quad \xi = \frac{c}{c_{t2}}$$

$$\beta_2 = 1 - \frac{\xi^2}{2}, \quad \beta_1 = 1 - \frac{(\xi - \chi)^2 \theta}{2}, \quad \mu_* = \mu_2 / \mu_1$$

$$\begin{aligned} v_{11} &= \sqrt{1 - (\xi - \chi)^2 \theta \eta_1}, \quad v_{12} = \sqrt{1 - (\xi - \chi)^2 \theta}, \\ v_{21} &= \sqrt{1 - \xi^2 \eta_2}, \quad v_{22} = \sqrt{1 - \xi^2}; \end{aligned}$$

Тогда решение уравнений (6) для слоя в подвижной системе координат связанной со слоем, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (A_1 \operatorname{sh}(kv_{11}z) + B_1 \operatorname{ch}(kv_{11}z)) \exp ik(\tilde{x} - \tilde{c}t) \\ \Psi_1 &= (A_2 \operatorname{ch}(kv_{12}z) + B_2 \operatorname{sh}(kv_{12}z)) \exp ik(\tilde{x} - \tilde{c}t) \end{aligned} \quad (8)$$

Переходя к новым переменным где

$$x = \tilde{x} - v_0 t; \quad c = \tilde{c} + v_0$$

Скалярные потенциалы будут

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (A_1 \operatorname{sh}(kv_{11}z) + B_1 \operatorname{ch}(kv_{11}z)) \exp ik(x - ct) \\ \Psi_1 &= (A_2 \operatorname{ch}(kv_{12}z) + B_2 \operatorname{sh}(kv_{12}z)) \exp ik(x - ct) \end{aligned}$$

Общие решения уравнений (6) для полуплоскости, удовлетворяющие условиям затухания:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Psi_2 = 0 \quad (9)$$

имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= A_3 e^{-kv_{21}z} \exp ik(x - ct) \\ \Psi_2 &= B_3 e^{-kt_{22}z} \exp ik(x - ct) \end{aligned} \quad (10)$$

$$0 < \xi < 1$$

Также будем использовать обозначение  $\xi_{Rj} = v_{Rj} / c_{t2}$ ,  $j = 1, 2$  где  $v_{Rj}$ ,  $j = 1, 2$  скорости распространения волн Релея в материалах полосы и полуплоскости соответственно.

## 2. Решение задачи

Подставляя выражения (8) и (10) в граничные условия (3) (4) получаем дисперсионное уравнение в виде

$$\begin{aligned} & \mu_* \xi^2 v_{2,1} \left( \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(sv_{1,1}) \operatorname{ch}(sv_{1,2})} \right) 2\beta_1^2 v_{1,1} v_{1,2} - \operatorname{th}(sv_{1,1}) \operatorname{th}(sv_{1,2}) (\beta_1^4 + v_{1,1}^2 v_{1,2}^2) \right) - \\ & - \theta(\xi - \chi)^2 v_{1,1} (\beta_2^2 - v_{2,1} v_{2,2}) (\operatorname{th}(sv_{1,2}) \beta_1^2 - \operatorname{th}(sv_{1,1}) v_{1,1} v_{1,2}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

где  $s = k h$ ;

При  $s \ll 1$ , т.е. когда длина волны намного больше толщины слоя, дисперсионное уравнение с точностью до  $s^2$  примет вид

$$-16\theta^2 s (\xi - \chi)^4 v_{1,1} v_{1,2} \left( (\beta_2^2 - v_{2,1} v_{2,2}) + \frac{\theta \mu_*}{4} \xi^2 (\xi - \chi)^2 v_{2,1} s \right) \left( \frac{(\xi - \chi)^2 \theta}{4} - (1 - \eta_1) \right) = 0 \quad (12)$$

Откуда, кроме тривиальных корней  $\xi = \chi$ ,  $\xi = \chi \pm 1/\theta$ ,  $\xi = \chi \pm 1/\theta \eta_1$  получаются,

$$\xi = \xi_{R2} - s \frac{\mu_* \theta \xi_{R2} (\xi_{R2} - \chi)^2 \sqrt{1 - \eta_2 \xi_{R2}^2} (2 - \xi_{R2}^2)^2}{4(12\xi_{R2}^2 - 8\eta_2 \xi_{R2}^2 - 6\xi_{R2}^4 + \xi_{R2}^6 - 4(1 - \eta_2))} + O(s^2) \quad (13)$$

и

$$\xi = \chi \pm 2 \sqrt{\frac{1 - \eta_1}{\theta}} + O(s^2) \quad (14)$$

Расчёты показывают что коэффициент  $s$  в (13) всегда положителен для всех возможных значений коэффициентов Пуассона  $v_i$ , следовательно всегда распространяется волна со скоростью  $\xi$ , меньшей скорости волн Релея в полуплоскости  $\xi_{R2}$

Из (14) следует, что при  $-1 < \chi \pm 2 \sqrt{\frac{1 - \eta_1}{\theta}} < 1$  появляется вторая поверхностная волна.

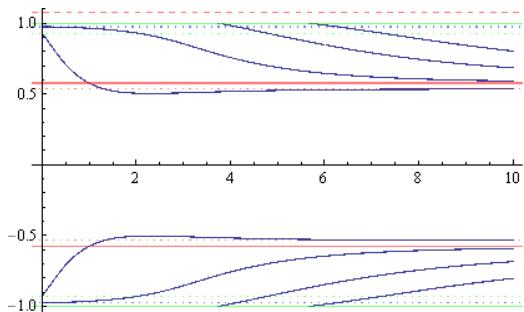


Рис 2а

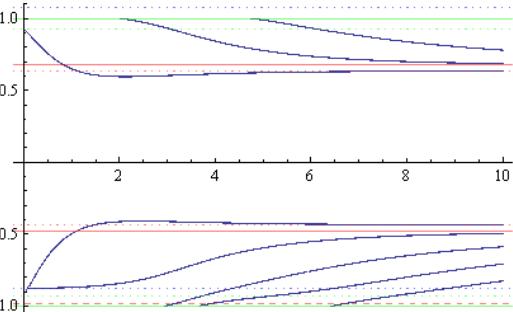


Рис 2б

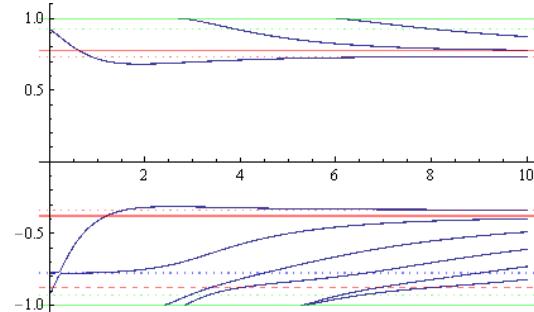


Рис 2в

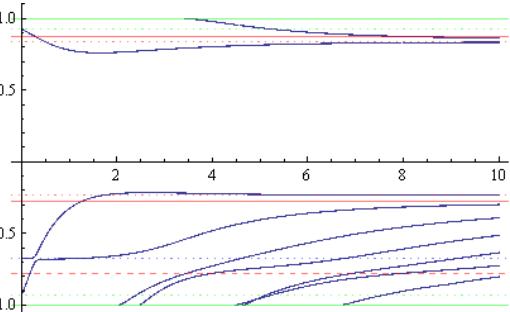


Рис 2г

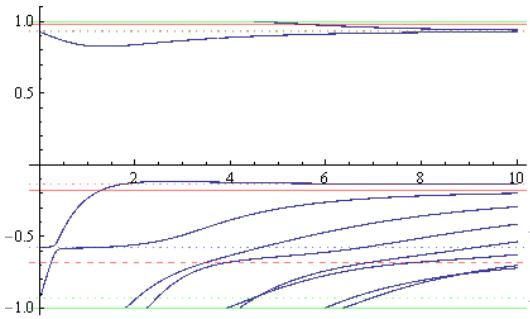


Рис 2д

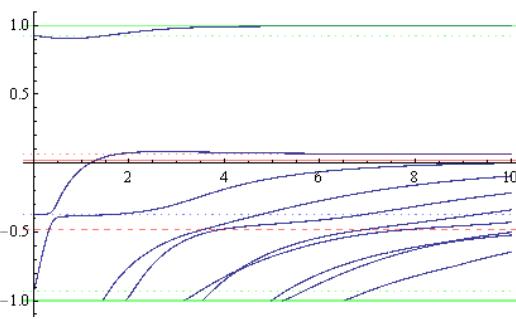


Рис 2е

На рисунках 2а-2е приведены графики фазовой скорости  $\xi$  в зависимости от волнового числа  $k$  в случае когда  $\mu_* = 1$ ,  $\theta = 3$ ,  $v_1 = v_2 = 0.3$  а  $\chi$  принимает значения  $(0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6)$

При приближении  $\chi$  к скорости распространения волн Релея в материале полосы ( $v_{R1}$ ), скорость некоторых мод поверхностных волн приближается к нулю Рис 2е.

При  $\chi = 0$  результаты совпадают с [9]. На рис. 2б-2е приведены  $\chi$  от 0.1 до 0.6 получаем рисунки 2б-2е которые показывают что в направлении движения полосы поверхностные волны исчезают а в обратном направлении появляются.

При  $s \gg 1$  т.е. когда длина волны намного меньше толщины слоя разделяются три случая  
I.)  $1 - (\xi - \chi)^2 \theta > 0 \Leftrightarrow \chi - \sqrt{1/\theta} < \xi < \chi + \sqrt{1/\theta}$

будем иметь

$$\operatorname{th}(sv_{1,1}) \sim \operatorname{th}(sv_{1,2}) \sim 1 \text{ откуда для (11) получаем}$$

$$-(\beta_1^2 - v_{1,1}v_{1,2})(\mu v_{2,1}\xi^2(\beta_1^2 - v_{1,1}v_{1,2}) + \theta v_{1,1}(\xi - \chi)^2(\beta_2^2 - v_{2,1}v_{2,2})) = 0 \quad (15)$$

Что совпадает с результатом полученным в [6].

Первый множитель совпадает с уравнением Релея для материала полосы и имеет решение  $\xi = \chi \pm \xi_{R,1}$ .

Приравнение к нулю второго множителя уравнения (15) показывает что появляются поверхностные волны в некоторых сочетаниях упругих и кинематических характеристик слоя и полупространства и скорости слоя.

II) при

$$1 - (\xi - \chi)^2 \theta < 0; 1 - (\xi - \chi)^2 \theta \eta_l > 0$$

$$\xi \in (\chi - 1/\sqrt{\theta}, \chi - 1/\sqrt{\theta \eta_l}) \cup (\chi + 1/\sqrt{\theta}, \chi + 1/\sqrt{\theta \eta_l})$$

$$\operatorname{th}(kh\sqrt{1-\xi\theta}) = i \operatorname{tg}(kh\sqrt{\xi\theta-1}); \quad \operatorname{th}(kh\sqrt{1-\xi\theta\eta_l}) \sim 1$$

Из (11) следует

$$\tan[s\sqrt{\xi\theta-1}] = \frac{\sqrt{\xi\theta-1}v_{1,1}(2\mu\beta_1^2v_{2,1} + \theta v_{1,1}(\beta_2^2 - v_{2,1}v_{2,2}))}{\mu(1+\beta_1^4)v_{2,1} + \mu\xi^2\theta^2\eta_l v_{2,1} + \theta(-\mu\xi(1+\eta_l)v_{2,1} + \beta_1^2v_{1,1}(\beta_2^2 - v_{2,1}v_{2,2}))}$$

Таким образом, как и в [9], получается бесконечное число мод поверхностных волн.

III) при

$$1 - (\xi - \chi)^2 \theta < 0; 1 - (\xi - \chi)^2 \theta \eta_l < 0$$

$$\xi \in (-1, \chi - 1/\sqrt{\theta \eta_l}) \cup (\chi + 1/\sqrt{\theta \eta_l}, 1)$$

не удается получить аналитическую формулу для фазовой скорости.

**Заключение:** При  $\chi = 0$  результаты совпадают с результатами в [9], расчёты показывают что с увеличением  $\chi$  в направлении движения полосы поверхностные волны исчезают а в обратном направлении появляются. В отличие от работы [5] не появляются поверхностные волны распространяющиеся со скоростями  $v_0/2$  и  $v_0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
2. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой-полупространство. Механика,58, №2, 2005. Ереван, Изд. НАН Армении. С.9-15.
3. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах // В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела." Ереван: Изд. НАН Армении 1997. С. 79-96.
4. Ардазишвили Р.В. Влияние закрепления лицевых поверхностей на демпфирование антисимметричных кромочных волн высшего порядка в пластинах. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике. Казань, 20-24 августа 2015г с 198-200
5. Заславский Ю.М., Дисперсия поверхностных волн, бегущих вдоль плоской границы встречно скользящих полупространства и слоя // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 6. С. 950 - 952.
6. Belubekyan M.V. Propagation of surface waves along a boundary between two halfspaces sliding against each other. // Acustical Physics Vol. 45 № 3 1999 pp 370-372.
7. Davtyan A.A. The surface waves of the rayleigh on the system of layer and semi-space under the relative sliding // Scientific proceedings XII international congress "Machines, technologies, materials" 2015
8. Sarkisyan S. V. Tridimensional waves at the interface of two elastic media on contact without friction// Proceedings of the Yerevan State University
9. Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З, Дарбинян А.З. Распространение поверхностных волн в системе полуплоскость-слой при условии скользящего контакта между ними. . Изв. НАН РА, Механика, 2021, т.74, №2, с. 18-32.

Сведения об авторах

**Амирджанян Арутюн Арменович** К.ф.-м.н., научный сотрудник . Института механики НАН РА. Тел.:(37410) 27-62-23. E-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

**Геворгян Гнун Завенович** К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА  
E-mail: [gnungev2002@yahoo.com](mailto:gnungev2002@yahoo.com)

**Дарбинян Артавазд Завенович** К.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА  
E-mail: [darbinyan\\_1954@mail.ru](mailto:darbinyan_1954@mail.ru)

# **Использование линейных упруго-вязких моделей для описания эффектов старения полимерных и композиционных материалов**

**Арутюнян А.Р., Евдокименко В.А.**

В работе были исследованы на ползучесть при комнатной температуре и постоянной растягивающей силе образцы различных полимерных и композиционных материалов (ударопрочного полистирола и полиуретана) без старения и после старения по различным программам. Для описания полученных экспериментальных кривых ползучести используются модифицированные варианты линейных упруго-вязких моделей, записанные в шкале эффективного времени. Наблюдается хорошее соответствие теоретических и экспериментальных кривых ползучести.

## **1. Введение**

В настоящее время создаётся все больше новых полимерных и композиционных материалов, которые внедряются практически во все сферы жизни, например, в машиностроении, авиационной и космической индустрии, в пищевой промышленности. Преимущества таких материалов по сравнению с металлами заключаются в легкости, теплостойкости, коррозионной стойкости и стойкости в агрессивных средах, например, таких как, щелочи или концентрированные кислоты. Но при этом полимерные материалы менее стабильны, чем металлы, поэтому процессы старения и разрушения в них протекают более интенсивно. Старение полимеров [1-6] исследуется порядка полувека, тогда как оптимизация свойств металлов изучается уже на протяжении долгого времени.

Механические характеристики полимеров напрямую зависят от их структуры. Также большое влияние на механические свойства полимерных и композитных материалов оказывают различные внешние воздействия: температура, давление, окружающая среда, длительность и частота нагружения и вид напряженного состояния. Особенностью этих характеристик полимеров является их удовлетворительная прочность, но малая жесткость по сравнению с металлами.

В данной работе проведены экспериментальные исследования деформационного и климатического старения полиуретана в опытах на ползучесть и эксперименты на длительное естественное старение ударопрочного полистирола в опытах на ползучесть. Для описания полученных экспериментальных результатов в работе рассматриваются модифицированные уравнения Максвелла и Фойхта, записанные в масштабе эффективного времени, а также проводится сравнение данных линейных вязкоупругих моделей.

## **2. Модификация линейных вязкоупругих моделей с использованием концепции обобщенного времени**

Для построения определяющего соотношения реологической среды при одноосных деформациях часто используют простейшие структурные элементы, наглядно представляющие качественное поведение материала. Эти элементы обладают линейными характеристиками, т.е. в определяющие соотношения напряжения и деформации входят линейно. Основными структурными элементами являются упругий элемент с определяющим соотношением в форме закона Гука:  $\sigma = E\varepsilon$  и вязкий элемент с определяющим соотношением ньютоновского типа:  $\dot{\varepsilon} = \sigma/\eta$ , где  $E$  – модуль Юнга,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

Основой такого описания свойств материала является идея о двух различных способах соединения элементов – последовательное и параллельное. Таким образом можно задать широкий спектр свойств материалу или математически описать наблюдаемые в экспериментах эффекты.

Для описания процессов деформационного старения будем использовать параметр  $\alpha$  [6]:

$$d\alpha = f_1(\alpha, \varepsilon, T, t)dt + f_2(\alpha, \varepsilon, T, t)d\varepsilon. \quad (1)$$

Параметр  $\alpha$  рассматривается как эффективное время, с помощью которого возможно описание эффектов деформационного старения, а также физико-химического старения. Согласно соотношению (1) при «мгновенных» нагрузлениях этот параметр соответствует «деформационному» времени  $\varepsilon$ , а в состоянии разгрузки и стабилизации параметр  $\alpha$  описывает кинетику химических процессов старения и сводится к обычному времени  $t$ . При такой постановке можно ввести понятие «химического» времени. Следовательно, параметр

эффективного времени в общем случае описывает взаимосвязанные деформационные и физико-химические процессы и учитывает их развитие в шкалах «деформационного» и «химического» времен. Это и отличает данный параметр  $\alpha$  от других известных температурно-временных параметров, используемых в механике полимеров [7-10].

Рассмотрим модификацию реологической модели, предложенной Максвеллом, записанную через эффективное время:

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2)$$

Далее уравнение (1) для обобщенного времени будем рассматривать в следующем виде:

$$d\alpha = k(\alpha_\infty - \alpha)t^m dt, \quad (3)$$

где  $k$ ,  $\alpha_\infty$ ,  $m$  – постоянные,  $\alpha$  – параметр, характеризующий степень деструкции ( $\alpha = N/N_0$ ,  $N_0$  – начальное число структурных связей, например, начальное число молекулярных связей,  $N$  – текущее число разрушенных молекулярных связей). Таким образом, уравнение (3) может описывать процесс химической деструкции полимеров.

Решение уравнения (3) при начальном условии  $t=0$ :  $\alpha=\alpha_0$  имеет вид:

$$\alpha = \alpha_\infty - (\alpha_\infty - \alpha_0)e^{-\frac{k}{m+1}t^{m+1}}. \quad (4)$$

Решая уравнение (2) при  $\sigma=const$ , начальных условиях  $t=0$ :  $\alpha=\alpha_0$ ,  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0}$  и подставляя его в выражение (4), получим:

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E_0} \left[ 1 + \frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\tau} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m+1}t^{m+1}} \right) \right], \quad (5)$$

где  $\tau = \eta/E$  – время релаксации.

Рассмотрим модифицированное уравнение модели Фойхта, записанное в масштабе эффективного времени:

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{d\alpha}, \\ d\alpha = k(\alpha_\infty - \alpha)t^m dt, \end{cases} \quad (6)$$

где все параметры аналогичны параметрам в уравнениях (2)-(3).

Решение первого дифференциального уравнения системы (5) с учетом начальных условий  $t=0$ :  $\alpha=\alpha_0$ ,  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0}$  запишется в виде:

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E_0} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\tau}} \right). \quad (7)$$

Подставим уравнение (5) в (7) и получим решение системы (6):

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E_0} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha_\infty - \alpha_0}{\tau}} e^{-\frac{k}{m+1}t^{m+1}} \right). \quad (8)$$

### 3. Экспериментальные исследования старения образцов из полиуретана в опытах на ползучесть

Для исследования старения образцов из полиуретана использовались образцы, вырезанные из круглого армированного полиуретанового ремня Continental Contitech с диаметром 4 мм. Опыты на ползучесть проводились на разрывной машине Shimadzu AGX-50 plus при постоянной комнатной температуре. Эксперименты на циклические испытания проводились на настольной сервогидравлической усталостной машине Si-Plan SH-B. Старение образцов из полиуретана проходило по следующей программе: циклические испытания при амплитуде изменения перемещения  $\Delta l=4$  мм и частоте нагружения 10 Гц до количества циклов  $N$ , равных 105 000; естественное старение в течение одного года в лабораторных условиях; повторение циклических испытаний при тех же параметрах нагружения; естественное старение в течение двух лет в лабораторных условиях; испытания на ползучесть при постоянной нагрузке. Часть образцов прошли дополнительное старение в течении одного года, а затем также были испытаны на ползучесть при тех же условиях. Экспериментальные данные показывают, что после одного года дополнительного старения образцы из полиуретана продолжают упрочняться. Для образцов после старения наблюдается увеличение времени ползучести для заданной деформации в 3 раза по сравнению с образцами без старения.

На рис. 1 показаны кривые податливости ( $D = \varepsilon/\sigma_0$ ) согласно решениям по модели Максвелла (4) и модели Фойхта (8) и экспериментальные данные по ползучести для образцов из

полиуретана без старения (кривые 1), со старением (кривые 2) и дополнительным старением (кривые 3) при нагрузках 70 и 80 Н. Из рис. 1 видно, что полученные экспериментальные кривые неплохо согласуются с соответствующими теоретическими кривыми по ползучести полиуретана. При расчетах приняты следующие значения коэффициентов:

При нагрузке 70 Н: модель Максвелла:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,4, k = 0,004 \text{ с}^{-1}$ , для образцов без старения  $\tau = 0,0107 \text{ с}, E_0 = 29 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,015 \text{ с}, E_0 = 26 \text{ МПа}$ ; для образцов после дополнительного старения  $\tau = 0,5 \text{ с}, E_0 = 0,73 \text{ МПа}$ ; модель Фойхта:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,4, k = 0,000023 \text{ с}^{-1}$  для образцов без старения  $\tau = 0,007 \text{ с}, E_0 = 0,3 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,02 \text{ с}, E_0 = 0,27 \text{ МПа}$ ; для образцов после дополнительного старения  $\tau = 0,005 \text{ с}, E_0 = 0,24 \text{ МПа}$ .

При нагрузке 80 Н: модель Максвелла:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,4, k = 0,004 \text{ с}^{-1}$ , для образцов без старения  $\tau = 0,0107 \text{ с}, E_0 = 8,5 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,015 \text{ с}, E_0 = 8 \text{ МПа}$ ; для образцов после дополнительного старения  $\tau = 0,5 \text{ с}, E_0 = 0,41 \text{ МПа}$ ; модель Фойхта:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,4, k = 0,000023 \text{ с}^{-1}$ , для образцов без старения  $\tau = 0,007 \text{ с}, E_0 = 0,087 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,02 \text{ с}, E_0 = 0,065 \text{ МПа}$ ; для образцов после дополнительного старения  $\tau = 0,005 \text{ с}, E_0 = 0,138 \text{ МПа}$ .

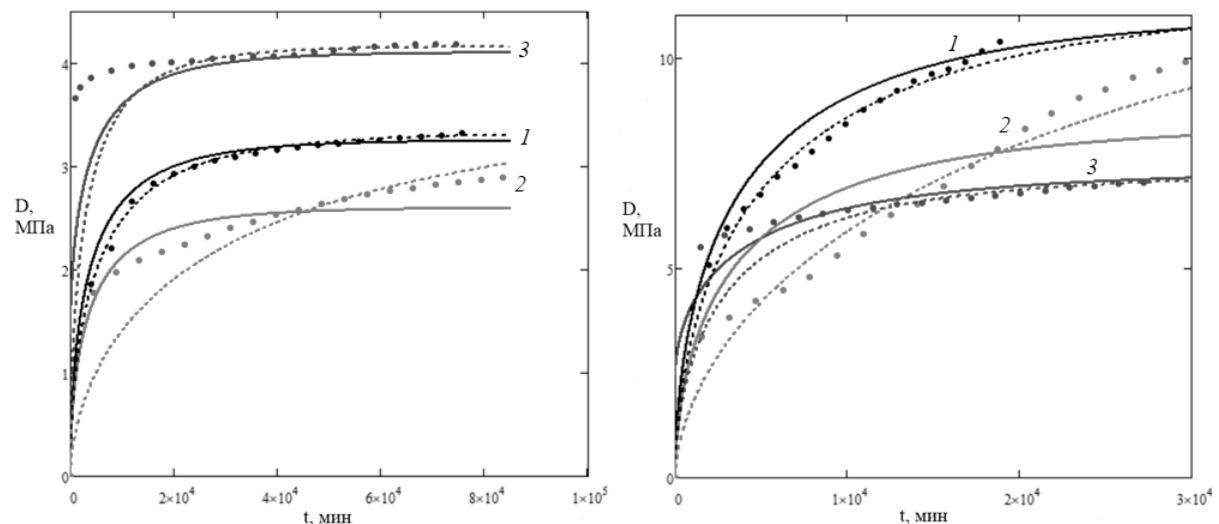


Рис. 1. Теоретические кривые податливости согласно уравнениям (5), (8) и экспериментальные точки для образцов полиуретана при нагрузке 70 Н (слева) и 80 Н (справа) без старения (кривые 1), со старением (кривые 2) и дополнительным старением (кривые 3). Сплошные кривые – решение по модели Максвелла, пунктирные кривые – решение по модели Фойхта.

#### 4. Исследование процесса старения ударопрочных полистиролов в опытах на ползучесть

Ударопрочные полистиролы (УПС) представляют собой полимер-полимерные матричные композиты с полистирольной матрицей, в которой присутствуют каучукообразные включения размером 0,5-5 мкм и объемной концентрацией в пределах 20-40%.

Для материала УПС 03Л были проведены испытания на ползучесть при постоянных растягивающих напряжениях, составляющих 0,8 и 0,9 от условного разрушающего напряжения. Испытания на ползучесть в 1979г. проводились в течение 30 дней. За такой промежуток времени при напряжении  $0,8\sigma_p$  ни один из образцов не достиг предельного состояния. В ходе ползучести при напряжении  $0,9\sigma_p$  образцы из данного материала разрушались к исходу 10-го часа. После сорокалетнего естественного старения в лабораторных условиях образцы вновь испытывались на ползучесть при тех же параметрах нагружения.

После многолетнего естественного старения наблюдается значительное уменьшение времени до разрушения: при напряжении  $0,8\sigma_p - t_p = 402 \text{ мин}$ , при напряжении  $0,9\sigma_p - t_p = 9,6 \text{ мин}$ . Также практически во всех случаях сильно уменьшается объем полученной деформации до 6,5 раз.

На рис. 2 и 3 показаны кривые податливости согласно решениям модели Максвелла (4) и модели Фойхта (8) и экспериментальные данные по ползучести для образцов марки УПС 03Л

без старения и со старением при нагрузках, составляющих 0,8 и 0,9 от условного разрушающего напряжения. При расчетах были приняты следующие значения коэффициентов:

- при напряжении  $0,8\sigma_p = 26,64 \text{ МПа}$ : Модель Максвелла:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,2, k = 0,00065 \text{ с}^{-1}$ , для образцов без старения  $\tau = 0,00625 \text{ с}, E_0 = 150 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,00085 \text{ с}, E_0 = 50 \text{ МПа}$ . Модель Фойхта:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,3, k = 0,000012 \text{ с}^{-1}$ , для образцов без старения  $\tau = 0,002 \text{ с}, E_0 = 1,1 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,0042 \text{ с}, E_0 = 0,1 \text{ МПа}$ .
- при напряжении  $0,9\sigma_p = 29,97 \text{ МПа}$ : Модель Максвелла:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,5, k = 0,0057 \text{ с}^{-1}$ , для образцов без старения  $\tau = 0,00625 \text{ с}, E_0 = 150 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,00085 \text{ с}, E_0 = 50 \text{ МПа}$ . Модель Фойхта:  $\alpha_0 = 0, \alpha_\infty = 1, m = -0,5, k = 0,000045 \text{ с}^{-1}$ , для образцов без старения  $\tau = 0,002 \text{ с}, E_0 = 1,1 \text{ МПа}$ ; для образцов после старения  $\tau = 0,0042 \text{ с}, E_0 = 0,1 \text{ МПа}$ .

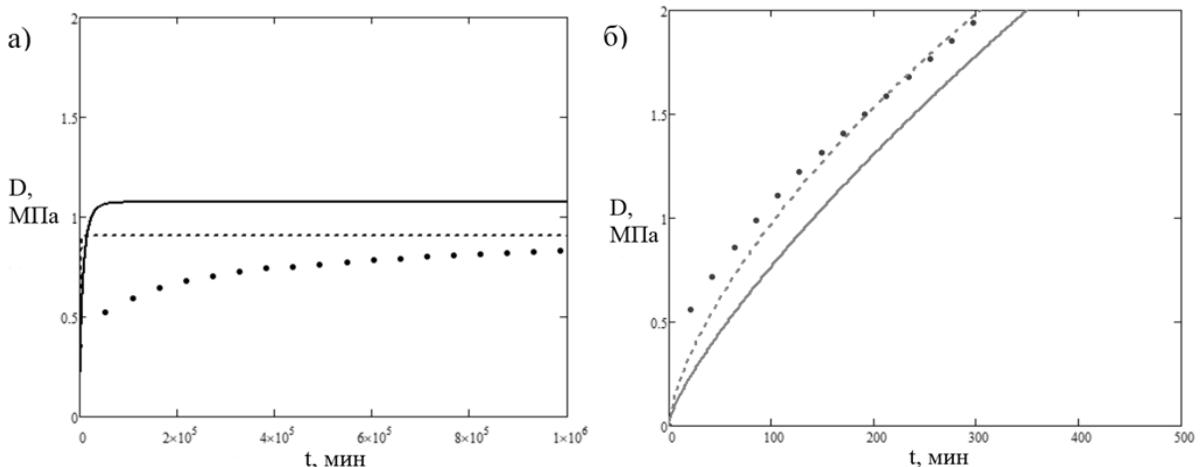


Рис. 2. Теоретические кривые податливости согласно уравнениям (5), (8) и экспериментальные точки для образцов УПС 03Л с постоянным растягивающим напряжением  $0,8\sigma_p = 26,64 \text{ МПа}$ .

(а) – без старения, (б) – после старения в течение 40 лет. Сплошные кривые – решение по модели Максвелла, пунктирные кривые – решение по модели Фойхта.

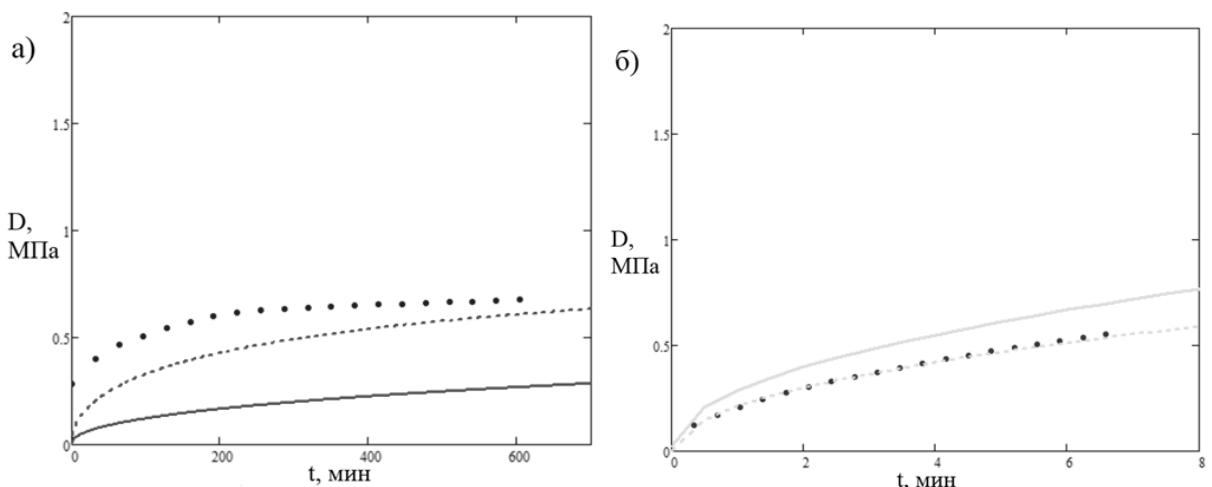


Рис. 3. Теоретические кривые податливости согласно уравнениям (5), (8) и экспериментальные точки для образцов УПС 03Л с постоянным растягивающим напряжением  $0,9\sigma_p = 29,97 \text{ МПа}$ .

(а) – без старения, (б) – после старения в течение 40 лет. Сплошные кривые – решение по модели Максвелла, пунктирные кривые – решение по модели Фойхта.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что использование линейной модели Фойхта позволяет описать экспериментальные результаты по ползучести ударопрочных полистиролов более точно по сравнению с линейной моделью Максвелла.

## **5. Выводы**

В данной работе были получены экспериментальные данные по старению образцов из полиуретана в опытах на ползучесть при чередовании циклических нагрузений и длительного (1-2 года) деформационного старения. Для образцов после старения наблюдается увеличение времени ползучести для заданной деформации в 3 раза по сравнению с образцами без старения. Также исследовано длительное естественное старение в течение 40 лет образцов ударопрочного полистирола УПС 03Л на ползучесть. После старения в испытании на ползучесть наблюдается уменьшение величины деформации почти в 6,5 раз и времени до разрушения больше чем в 24 раза, по сравнению с образцами без старения. Для описания экспериментальных кривых ползучести образцов из полиуретана и полистирола после старения и без старения используются модифицированные уравнения Максвелла и Фойхта, записанные в шкале эффективного времени. Дано сравнение полученных теоретических кривых ползучести с соответствующими экспериментальными результатами. Наблюдаются хорошее соответствие теоретических и экспериментальных кривых податливости. Использование линейной модели Фойхта позволяет описать экспериментальные результаты более точно по сравнению с линейной моделью Максвелла.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Struik L.C.E. Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Sci. Publ.Comp. 1978. 229p.
2. Nadai A. Theory of flow and fracture of solids. McGraw-Hill. New York. 1963. vol. 2. 321p.
3. Филатов И.С. Климатическая устойчивость полимерных материалов. М.: Наука. 1983. 215с.
4. Bruijn de J.C.M. The failure behavior of high density polyethylene with an embrittled surface layer due to weathering. Delft: Delft University press. 1992. 167p.
5. Бочкирев Р.Н., Филатов И.С. Старение материалов на основе поливинилхлорида в условиях холодного климата. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение. 1990. 115с.
6. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. М: Изд-во СПбГУ, 2004. 252 с.
7. Гуль В.Е. Структура и прочность полимеров. М.: Химия. 1971. 344с.
8. Бартенев Г.М., Зуев Ю.С. Сопротивление вязко-упругих материалов. М.-Л.: Химия. 1964. 387с.
9. Москвитин В.В. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов. М.: Наука. 1972. 327с.
10. Valanis K.C. On the foundation of the endochronic theory of viscoplasticity //Archiwum mechanici stosowanej. 1975. V. 27. P. 857-868.

## **Сведения об авторах**

**Арутюнян Александр Робертович** – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 4284164,

E-mail: [a.arutyunyan@spbu.ru](mailto:a.arutyunyan@spbu.ru)

**Евдокименко Валентина Алексеевна** – студент, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 4284164,

E-mail: [vasyawask@gmail.com](mailto:vasyawask@gmail.com)

# **Точные и приближенные решения системы взаимосвязанных уравнений теории ползучести и длительной прочности**

**Арутюнян А.Р., Сайтова Р.Р.**

Под действием относительно низких напряжений и высоких температур металлические материалы и сплавы становятся хрупкими и разрушаются с небольшой величиной остаточных деформаций. Эта проблема известна как проблема тепловой хрупкости металлов. Для решения данной проблемы в работе сформулированы взаимосвязанные кинетические уравнения для деформации ползучести и параметра поврежденности, учитывающие закон сохранения массы. В качестве параметра поврежденности рассматривается относительное изменение плотности материала. Результаты многочисленных исследований по изменению пористости и плотности различных металлов и сплавов вследствие образования и развития микропор и микротрещин в условиях высокотемпературной ползучести позволяют рассматривать плотность в качестве интегральной меры накопления структурных микродефектов. Получены аналитические и численные решения рассматриваемой системы кинетических уравнений. Показано, что характер кривых согласно различным решениям является идентичным и согласуется с соответствующими экспериментальными кривыми. Показано, что численное решение полностью совпадает со случаем чисто хрупкого разрушения и малых деформаций. Сформулирован критерий длительной прочности. Дано сравнение теоретических кривых ползучести и длительной прочности с экспериментальными результатами для 2.25Cr-1Mo стали. Наблюдается хорошее согласие соответствующих теоретических и экспериментальных кривых.

## **1. Введение**

Решается задача ползучести и длительной прочности металлических материалов и сплавов. Под действием относительно низких напряжений и высоких температур металлические материалы становятся хрупкими и разрушаются с небольшой величиной остаточных деформаций. Эта проблема известна как проблема тепловой хрупкости металлов. Данный эффект наблюдается в элементах многих важных инженерных объектов, поэтому проблема хрупких разрушений стала предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований.

Для решения этой проблемы в механике материалов в работах Л.М. Качанова [1], Ю.Н. Работнова [2] была введена концепция сплошности (поврежденности). Для описания хрупкой области экспериментальной кривой длительной прочности была предложена система простых кинетических уравнений для параметра поврежденности и деформации ползучести, а также был сформулирован критерий длительной прочности.

В работах Р.А. Арутюняна [3] предлагается модифицированный вариант системы кинетических уравнений Качанова-Работнова с учетом закона сохранения массы и конкретизации параметра поврежденности в виде относительного изменения плотности материала.

В научной литературе имеются многочисленные экспериментальные исследования по изменению пористости и плотности различных металлов и сплавов вследствие образования и развития микропор и микротрещин в условиях высокотемпературной ползучести [4-6]. Результаты этих исследований позволяют рассматривать плотность в качестве интегральной меры накопления структурных микродефектов, а параметр поврежденности задается как отношение текущей величины плотности к начальной.

## **2. Модифицированный вариант системы кинетических уравнений Качанова-Работнова**

Рассмотрим систему взаимосвязанных кинетических уравнений Р.А. Арутюняна для скорости ползучести и параметра поврежденности:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B\sigma_0^m \psi^{m-\beta} e^{m\varepsilon}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\sigma_0^n \psi^{n-\alpha} e^{n\varepsilon}, \quad (2.2)$$

где  $\psi = 1 - \omega = \rho / \rho_0$  – сплошность,  $\rho_0$  – начальная,  $\rho$  – текущая плотность образца,  $B$ ,  $A$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – постоянные.

Точное аналитическое решение предлагаемой системы кинетических уравнений (2.1)-(2.2) в виде зависимостей  $\psi(t)$  и  $\varepsilon(t)$  не предоставляется возможным. В связи с этим, было получено точное решение системы (2.1)-(2.2) в виде  $\psi(\varepsilon)$ :

$$\psi = \left[ 1 + \frac{A\sigma_0^{n-m}(1-n+\alpha+m-\beta)}{B(n-m)}(1-e^{(n-m)\varepsilon}) \right]^{\frac{1}{l-n+\alpha+m-\beta}} \quad (2.3)$$

Также были рассмотрены различные случаи приближенных решений системы (2.1)-(2.2). В работе [7] рассмотрен случай чисто хрупкого разрушения и малых деформаций, когда можно принять следующие приближения  $e^{m\varepsilon} \approx 1$ ,  $e^{n\varepsilon} \approx 1$ . В этом случае решение системы (2.1)-(2.2) при начальных условиях,  $t=0$ ,  $\varepsilon=0$ ,  $\psi=1$  для деформации ползучести и параметра поврежденности имеют вид:

$$\psi = \left[ 1 - (\alpha - n + 1)A\sigma_0^n t \right]^{\frac{1}{\alpha-n+1}} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon = \frac{B\sigma_0^{m-n}}{A(m-\beta+\alpha-n+1)} \left\{ 1 - \left[ 1 - (\alpha - n + 1)A\sigma_0^n t \right]^{\frac{m-\beta+1}{\alpha-n+1}} \right\} \quad (2.5)$$

Получено также решение системы (2.1)-(2.2) при  $e^{m\varepsilon} \approx 1$ ,  $e^{n\varepsilon} \approx 1$  в виде зависимости  $\psi(\varepsilon)$ :

$$\psi = \left[ -\frac{A}{B}(-n+m+\alpha-\beta+1)\sigma_0^{n-m}\varepsilon + 1 \right]^{\frac{1}{-n+m+\alpha-\beta+1}} \quad (2.6)$$

Был рассмотрен случай чисто хрупкого разрушения и малых деформаций, приближенное решение в виде  $e^{m\varepsilon} \approx 1+m \cdot \varepsilon$ ,  $e^{n\varepsilon} \approx 1+n \cdot \varepsilon$ :

$$\psi = \left[ 1 - \frac{A \cdot \sigma_0^{n-m} \cdot (1-n+\alpha+m-\beta) \cdot \left[ \frac{(m-n) \cdot \ln(\varepsilon \cdot m + 1)}{m^2} + \frac{\varepsilon \cdot n}{m} \right]}{B} \right]^{\frac{1}{l-n+\alpha+m-\beta}} \quad (2.7)$$

На рис. 1 представлены теоретические кривые изменения параметра сплошности согласно решениям (2.3), (2.6), (2.7) для различных значений параметра  $\alpha = 2, 4, 6$ . При расчетах приняты следующие значения коэффициентов:  $A = 10^{-12} [MPa]^{-2} \cdot [\varepsilon]^{-1}$ ,

$$B = 5 \cdot 10^{-17} [MPa]^{-4} \cdot [\varepsilon]^{-1}, \sigma = 100 MPa, n = 2, m = 4, \beta = 1.$$

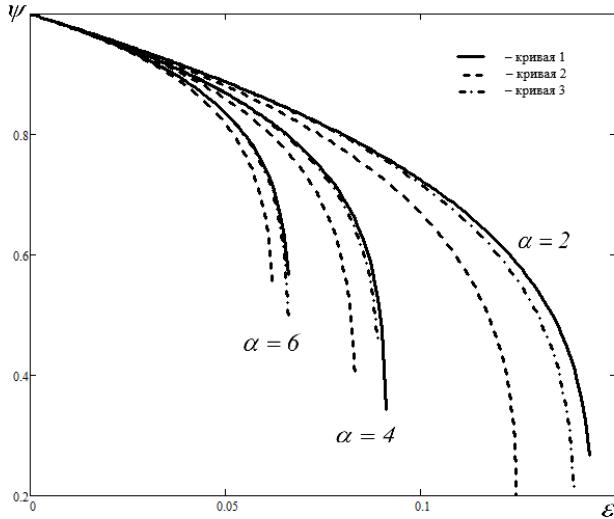


Рис. 1. Кривые  $\psi(\varepsilon)$  согласно решениям (2.3), (2.6) и (2.7) для различных значений  $\alpha$ : кривая 1 – (2.3), кривая 2 – (2.6), кривая 3 – (2.7).

Из рис. 1 видно, что решение при  $e^{m\varepsilon} \approx 1+m \cdot \varepsilon$ ,  $e^{n\varepsilon} \approx 1+n \cdot \varepsilon$  (кривая 3) располагается ближе к точному решению (кривая 1) и с увеличением параметра  $\alpha$  данные решения практически совпадают.

Также было получено точное решение системы кинетических уравнений (2.1)-(2.2) с использованием численных методов (Метод Рунге-Кутте четвертого порядка). Для этого были использованы возможности математического пакета Mathcad.

На рис. 2 представлены теоретические кривые изменения параметра сплошности согласно уравнению (2.4) (кривая 1) и согласно численному решению (кривая 2). При расчетах приняты следующие значения коэффициентов:  $A = 0.299 \cdot 10^{-10} [M\text{Pa}]^{-2} \cdot [\psi]^{-1}$ ,  $n = 2$ ,  $\sigma = 100 M\text{Pa}$ ,  $\alpha = 8.634$ . Как видно из рис. 2 данные решения совпадают.

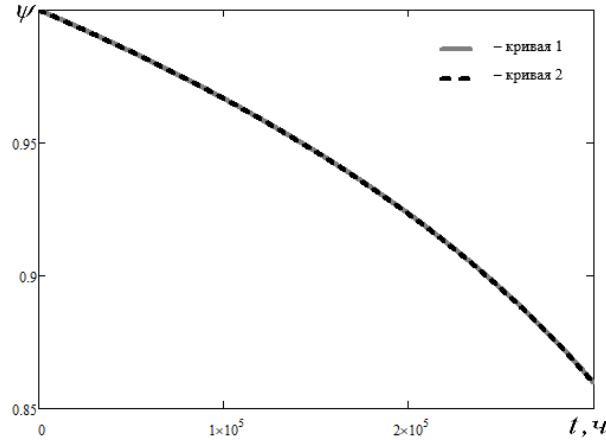


Рис. 2. Кривые  $\psi(t)$  согласно численному решению системы (кривая 2) и для случая хрупкого разрушения и малых деформаций (кривая 1).

Принимая условие разрушения  $t = t_f$ ,  $\psi = 0$ , из (2.4) получим критерий длительной прочности в виде:

$$t_f = \frac{I}{(\alpha - n + 1)A\sigma_0^n} \quad (2.8)$$

При  $\alpha = 2n$  критерий (2.8) совпадает с критерием Качанова-Работнова [1, 2].

### 3. Сравнение полученных решений с экспериментальными результатами

На рис. 3, 4 представлены теоретические кривые ползучести (соотношение (2.5)) и длительной прочности (соотношение (2.8)) и экспериментальные результаты для 2.25Cr-1Mo стали при  $500^{\circ}\text{C}$  согласно работе [8].

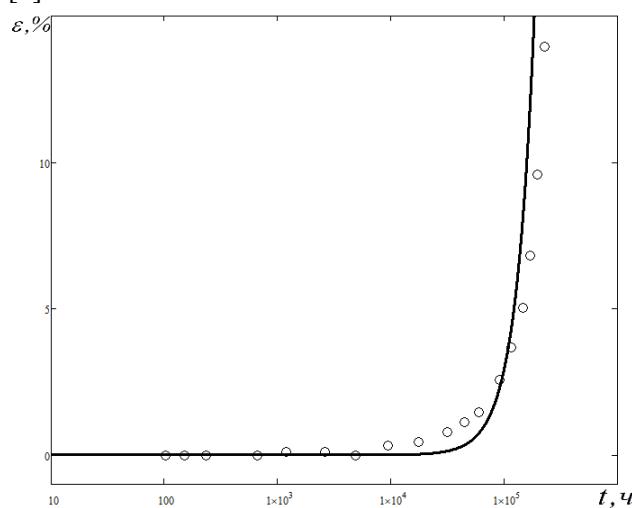


Рис. 3. Теоретическая кривая деформации ползучести согласно соотношению (2.5) и экспериментальным точкам [8].

При расчетах приняты следующие значения коэффициентов:  $A = 5.1 \cdot 10^{-14} [MPa]^{-2} \cdot [\psi]^{-1}$ ,  $B = 5 \cdot 10^{-17} [MPa]^{-4} \cdot [\psi]^{-2}$ ,  $\sigma = 98 MPa$ ,  $n = 4$ ,  $m = 6$ ,  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 1$ . Наблюдается хорошее согласие теоретических и экспериментальных кривых ползучести и длительной прочности.

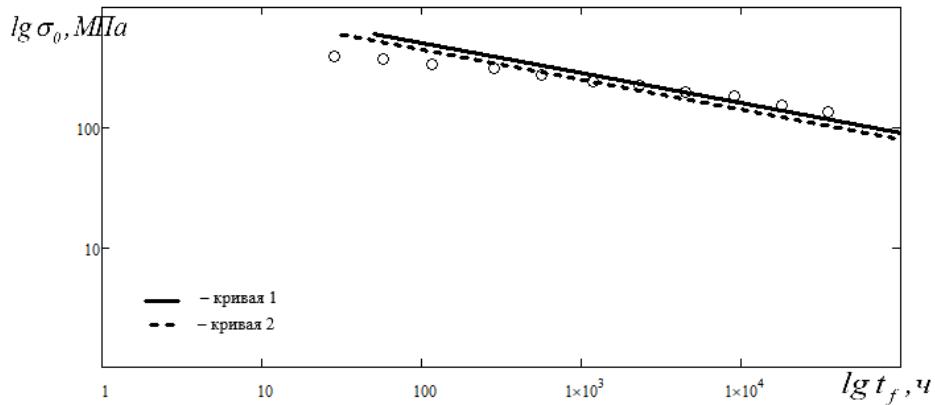


Рис. 4. Кривая длительной прочности согласно критерию (2.8) (кривая 1), критерию Качанова-Работнова (кривая 2) и экспериментальным точкам [8].

На рис. 5 при тех же значениях коэффициентов представлены кривые сплошности согласно формуле (2.4).

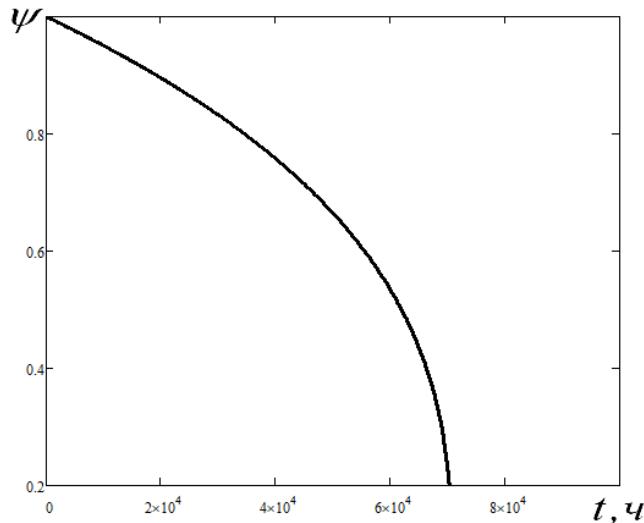


Рис. 5. Кривая сплошности согласно (2.4) при тех же значениях коэффициентов.

#### 4. Заключение

В условиях высокотемпературной ползучести происходит эволюция поврежденности металлических материалов. В данной работе для ее описания используется концепция поврежденности Р.А. Арутюняна. Параметр поврежденности определяется как относительное изменение плотности материала, которая является интегральной характеристикой поврежденности. С учетом этого параметра и закона сохранения массы сформулированы взаимосвязанные кинетические уравнения для деформации ползучести и параметра поврежденности. Получены аналитические и численное решения рассматриваемых уравнений. Для случая решений в виде  $\psi(\varepsilon)$  показано, что характер кривых согласно различным решениям является идентичным, согласуется с соответствующими экспериментальными кривыми и с ростом значения параметра  $\alpha$  данные решения располагаются ближе друг к другу. Показано, что численное решение полностью совпадает со случаем чисто хрупкого

разрушения и малых деформаций, когда  $e^{m\varepsilon} \approx 1 + m \cdot \varepsilon$ ,  $e^{n\varepsilon} \approx 1 + n \cdot \varepsilon$ . Сформулирован критерий длительной прочности. Дано сравнение теоретических кривых ползучести и длительной прочности с экспериментальными результатами для 2.25Cr-1Mo стали. Наблюдается хорошее согласие соответствующих теоретических и экспериментальных кривых.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. Изв. АН СССР. Отд. Техн. Наук, № 8, 1958. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
3. Arutyunyan R.A. The Problem of High-Temperature Creep and Long-Term Strength in the Mechanics of Materials. Doklady Physics, vol. 62. N 8. 2017. P. 384-386.
4. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении. Прикладная математика и механика, № 4. 1965. С. 681-689.
5. Betekhtin V.I., Porosity of solids, Trans. St.- Petersburg Acad. Sci. strength problems, vol.1, 1997, P. 201-210.
6. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. 506 с.
7. Arutyunyan A., Arutyunyan R., Saitova R. The Criterion of High-Temperature Creep of Metals Based on Relative Changes of Density. WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, 14. 2019. P. 140-144.
8. Hore S., Ghosh R.N. Computer simulation of the high temperature creep behavior of Cr-Mo steels. Materials Science and Engineering, A 528, 2011. P. 6095-6102.

### Сведения об авторах:

**Арутюнян Александр Робертович** – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет, +7 (812) 4284164,

E-mail [a.arutyunyan@spbu.ru](mailto:a.arutyunyan@spbu.ru)

**Сайтова Регина Ринатовна** – аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет, +7 (812) 4284164,

E-mail [rigastr@yandex.ru](mailto:rigastr@yandex.ru)

**Плоская контактная задача для неоднородной луночки  
с симметричными трещинами**

**Арутюнян Л.А., Агабекян П.В.**

Рассматриваются плоские задачи теории упругости для составного тела, состоящего из двух луночек с различными упругими характеристиками, образованных пересечением дуг окружностей, с симметричной трещиной между материалами, превращающая область в двухсвязную или односвязную область. При помощи интегралов Фурье и функции Бесселя, применяя преобразование Ханкеля, для определения неизвестных интегрирования, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

В данной работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано решение плоской контактной задачи теории упругости для двух областей, с упругими характеристиками  $\mu_m, v_m$  ( $m=1, 2$ ), где ( $\mu_m$  – модули сдвига материалов,  $v_m$  – коэффициенты Пуассона), образованных пересечением дуг окружностей, с симметричной трещиной между материалами, превращающей область в двухсвязную или односвязную области.

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат  $\alpha, \beta$ , которая связана с декартовыми координатами  $x, y$  соотношениями [1]:

$$gx = sha, \quad gy = \sin \beta, \quad ag = cha + \cos \beta \quad (1)$$

где  $a$  – параметр биполярных координат.

Каждая из функций напряжений  $\phi_m(\alpha, \beta)$  ( $m=1, 2$ ), в своей области определения, удовлетворяет бигармоническому уравнению, которое в биполярной системе координат имеет вид [1,2]:

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] [g\phi_m(\alpha, \beta)] = 0 \quad (2)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функции напряжений соотношениями.

$$\begin{aligned} a\sigma_{\alpha}^{(m)}(\alpha, \beta) &= \left[ (cha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - sha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + cha \right] [g\phi_m(\alpha, \beta)] \\ a\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) &= \left[ (cha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - sha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right] [g\phi_m(\alpha, \beta)] \\ a\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) &= -(cha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} [g\phi_m(\alpha, \beta)] \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m} \left[ (1 - 2v_m) \frac{\partial \phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]$$

$$v_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m} \left[ (1 - 2v_m) \frac{\partial \phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] \quad (m=1, 2)$$

где  $\Psi_m(\alpha, \beta)$  бигармоническая функция, связанная с  $\phi_m(\alpha, \beta)$  формулой

$$g\Psi_m(\alpha, \beta) = (1 - v_m) \iint \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] [g\phi_m(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta \quad (4)$$

В биполярных координатах один из составляющих материалов, имеющий упругие характеристики  $\mu_1, v_1$ , занимает область ( $-\beta_1 \leq \beta \leq -\beta_0$  и  $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ ), а второй, с упругими характеристиками  $\mu_2, v_2$ , – область ( $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ ).

Границные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1,2]

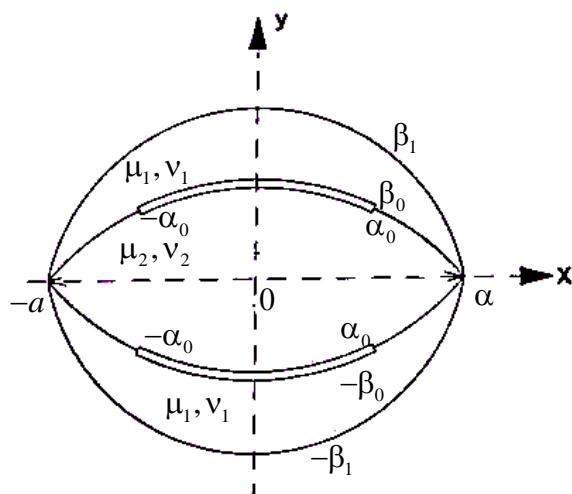
$$\left[ g\phi_1(\alpha, \beta) \right]_{\beta=\pm\beta_1} = \varphi(\alpha), \quad \left. \frac{\partial [g\phi_1(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} \right|_{\beta=\pm\beta_1} = \Psi(\alpha) \quad (5)$$

Предполагается, что  $\varphi(\alpha)$  и  $\Psi(\alpha)$  удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

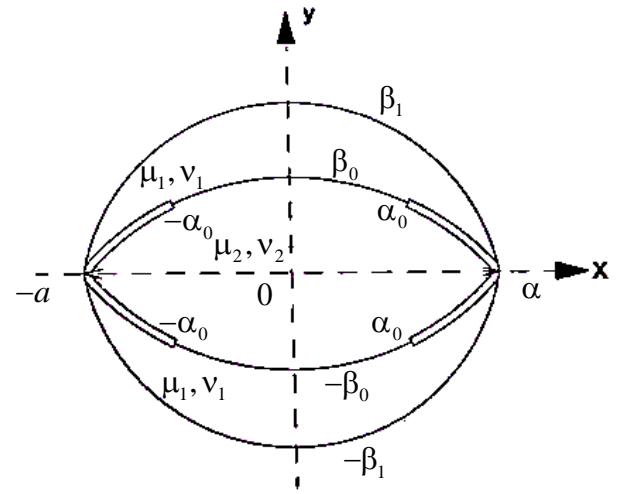
Условия симметрии

$$\left. \frac{\partial [g\phi_2(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0, \quad v_2(\alpha, 0) = 0 \quad (6)$$

I. Пусть трещина находится в промежутке  $|\alpha| < \alpha_0$  (фиг.1), на линии контакта имеем следующие условия



Фиг.1



Фиг. 2

$$\left. \frac{\partial [g\phi_m(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_m(\alpha, \beta_0) &= 0 & |\alpha| < \alpha_0 \\ v_1(\alpha, \beta_0) &= v_2(\alpha, \beta_0) & |\alpha| > \alpha_0 \\ \phi_1(\alpha, \beta_0) &= \phi_2(\alpha, \beta_0) & |\alpha| > \alpha_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая симметрию, бигармоническую функцию напряжений  $\phi_m(\alpha, \beta)$  ( $m=1, 2$ ) удобно представить интегралом Фурье такого вида

$$g\phi_m(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_m(t, \beta) \cos t\alpha dt \quad (m=1, 2) \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t, \beta) &= A_1(t) \operatorname{cht}(\beta_1 - \beta) \cos(\beta - \beta_0) + B_1(t) \operatorname{cht}(\beta - \beta_0) \cos(\beta_1 - \beta) + \\ &+ C_1(t) \operatorname{sht}(\beta_1 - \beta) \sin(\beta - \beta_0) + D_1(t) \operatorname{sht}(\beta - \beta_0) \sin(\beta_1 - \beta) \\ f_2(t, \beta) &= A_2(t) \operatorname{cht}(\beta_0 - \beta) \cos \beta + B_2(t) \operatorname{cht} \beta \cos(\beta_0 - \beta) + \\ &+ C_2(t) \operatorname{sht}(\beta_0 - \beta) \sin \beta + D_2(t) \operatorname{sht} \beta \sin(\beta_0 - \beta) \end{aligned} \quad (9)$$

Удовлетворяя граничным условиям (5) и части контактных условий (7) и условиям симметрии (6), получаем следующую систему уравнений для определения неизвестных интегрирования

$$\begin{aligned}
 A_1(t)\cos(\beta_1 - \beta_0) + B_1(t)\operatorname{cht}(\beta_1 - \beta_0) &= \bar{\varphi}(t) \\
 [tB_1(t) - D_1(t)]\operatorname{sht}(\beta_1 - \beta_0) - [A_1(t) + tC_1(t)]\sin(\beta_1 - \beta_0) &= \Psi(t) \\
 [C_2(t) - tA_2(t)]\operatorname{sht}\beta_0 + [B_2(t) + tD_2(t)]\sin\beta_0 &= 0 \\
 A_2(t)\operatorname{sht}\beta_0 - D_2(t)\sin\beta_0 &= 0 \\
 [B_1(t) + tD_1(t)]\sin(\beta_1 - \beta_0) + [C_1(t) - tA_1(t)]\operatorname{sht}(\beta_1 - \beta_0) &= 0 \\
 [A_2(t) + tC_2(t)]\sin\beta_0 + [D_2(t) - tB_2(t)]\operatorname{sht}\beta_0 &= 0 \\
 A_1(t)\operatorname{cht}(\beta_1 - \beta_0) + B_1(t)\cos(\beta_1 - \beta_0) &= A_2(t)\cos\beta_0 + B_2(t)\operatorname{cht}\beta_0 = X(t)
 \end{aligned} \tag{10}$$

где величины  $\bar{\varphi}(t)$  и  $\bar{\Psi}(t)$  является преобразованиями Фурье от функций  $\varphi(\alpha)$  и  $\Psi(\alpha)$

$$\bar{\varphi}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(\alpha) \cos t\alpha d\alpha, \quad \bar{\Psi}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \Psi(\alpha) \cos t\alpha d\alpha \tag{11}$$

а  $X(t)$  – пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (10), неизвестные  $A_m(t)$ ,  $B_m(t)$ ,  $C_m(t)$  и  $D_m(t)$  ( $m=1,2$ ) выразим через неизвестную  $X(t)$ .

$$\begin{aligned}
 \Delta_0(t)A_1(t) &= X(t)\operatorname{cht}\gamma_1 - \bar{\varphi}(t)\cos\gamma_1 \\
 \Delta_0(t)B_1(t) &= \bar{\varphi}(t)\operatorname{cht}\gamma_1 - X(t)\cos\gamma_1 \\
 \Delta_1(t)C_1(t) &= \left[ t\operatorname{cht}\gamma_1 + \frac{t^2+1}{2\Delta_0(t)}\operatorname{sht}\gamma_1 \sin 2\gamma_1 \right] X(t) - \\
 &\quad - \left[ t\cos\gamma_1 + \frac{t^2+1}{2\Delta_0(t)}\operatorname{sh}2t\gamma_1 \sin\gamma_1 \right] \bar{\varphi}(t) + \bar{\Psi}(t)\sin\gamma_1 \\
 \Delta_1(t)D_1(t) &= - \left[ t\cos\gamma_1 + \frac{t^2+1}{2\Delta_0(t)}\operatorname{sh}2t\gamma_1 \sin\gamma_1 \right] X(t) + \\
 &\quad + \left[ t\operatorname{cht}\gamma_1 + \frac{t^2+1}{2\Delta_0(t)}\operatorname{sht}\gamma_1 \sin 2\gamma_1 \right] \bar{\varphi}(t) - \bar{\Psi}(t)\operatorname{sht}\gamma_1 \\
 \Delta_2(t)A_2(t) &= 2tX(t)\sin\gamma_2, \quad \Delta_2(t)B_2(t) = 2X(t)\operatorname{sht}\gamma_2 \\
 tC_2(t) &= -A_2(t), \quad D_2(t) = tB_2(t)
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $\Delta_0(t) = \operatorname{sh}^2 t\gamma_1 + \sin^2\gamma_1$ ,  $\Delta_1(t) = \operatorname{sh}^2 t\gamma_1 - t^2 \sin^2\gamma_1$   
 $\Delta_2(t) = \operatorname{sh}2t\gamma_2 + t\sin 2\gamma_2$ ,  $\gamma_1 = \beta_1 - \beta_0$ ,  $\gamma_2 = \beta_0$  (13)

Неизвестная функция  $X(t)$  определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которая получается из контактных условий (7)

$$\begin{cases} \int_0^\infty X(t) \cos t\alpha dt = 0 & |\alpha| < \alpha_0 \\ \int_0^\infty [M(t)X(t) + N(t)] \sin t\alpha dt = 0 & |\alpha| > \alpha_0 \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1(t)N(t) &= -[t\operatorname{ch} t\gamma_1 \sin \gamma_1 + t\operatorname{sh} t\gamma_1 \cos \gamma_1] \bar{\Phi}(t) + \bar{\Psi}(t) \operatorname{sh} t\gamma_1 \sin \gamma_1 \\ \Delta(t) &= [\operatorname{sh} 2t\gamma_1 + t \sin 2\gamma_1] \Delta_2(t) + 4h[\operatorname{sh}^2 t\gamma_2 + \sin^2 \gamma_2] \Delta_1(t) \\ M(t) &= \frac{\Delta(t)}{2\Delta_1(t)\Delta_2(t)}, \quad h = \frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)}\end{aligned}\quad (15)$$

В частном случае при  $\alpha_0 = 0$  из (14) получаем  $X(t) = -N(t)/M(t)$ , а при  $\alpha_0 = \infty$  получаем  $X(t) = 0$ , обе задачи решаются в замкнутом виде.

Учитывая интегральные преобразования функции Бесселя [3]

$$J_0(xt) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\cos t\alpha}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} d\alpha, \quad J_0(xt) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{\sin t\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} d\alpha \quad (16)$$

можно парные интегральные уравнения (14) представить в виде

$$\begin{cases} \int_0^\infty (t^2 + 1) X(t) J_0(xt) dt = 0 & x < \alpha_0 \\ \int_0^\infty (t^2 + 1) [M(t)X(t) + N(t)] J_0(xt) dt = 0 & x > \alpha_0 \end{cases} \quad (17)$$

Применяя преобразования Ханкеля, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$M(t)X(t) + N(t) = \frac{\alpha_0 t}{t^2 + 1} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) [(M(\tau) - h - 1)X(\tau) + N(\tau)] K(t, \tau) d\tau \quad (18)$$

$$\text{где } K(t, \tau) = \frac{1}{t^2 - \tau^2} [t J_1(\alpha_0 t) J_0(\alpha_0 \tau) - \tau J_0(\alpha_0 t) J_1(\alpha_0 \tau)] \quad (19)$$

II. Пусть трещина находится в промежутках  $|\alpha| > \alpha_0$  (фиг.2).

Границные условия в этом случае совпадают с I, кроме контактных условий. На линии контакта имеем следующие условия:

$$\left. \frac{\partial [g\phi_m(\alpha, \beta)]}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = 0 \quad \phi_m(\alpha, \beta_0) = 0 \quad |\alpha| > \alpha_0 \quad (20)$$

$$v_1(\alpha, \beta_0) = v_2(\alpha, \beta_0) \quad |\alpha| < \alpha_0 \quad \phi_1(\alpha, \beta_0) = \phi_2(\alpha, \beta_0) \quad |\alpha| < \alpha_0$$

После удовлетворения граничным и контактным условиям для определения неизвестной  $X(t)$  получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$X(t) = \frac{\alpha_0 t}{t^2 + 1} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) [(M(\tau) - 1)X(\tau) + N(\tau)] K(t, \tau) d\tau \quad (21)$$

$$\text{где } K(t, \tau) = \frac{1}{t^2 - \tau^2} [t J_0(\alpha_0 t) J_1(\alpha_0 \tau) - \tau J_1(\alpha_0 t) J_0(\alpha_0 \tau)] \quad (22)$$

или

$$X(t) = \frac{\alpha_0 t}{t^2 + 1} \int_0^\infty (\tau^2 + 1) u(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (23)$$

где

$$u(\tau) = (M(\tau) - 1)X(\tau) + N(\tau) \quad (24)$$

На линии контакта нормальное напряжение имеет вид

$$a\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_0 \int_0^{\infty} \left\{ \left[ -t^2 (\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta_0) \cos t\alpha + t \operatorname{sh}\alpha \sin t\alpha - \cos\beta_0 \cos t\alpha \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{t^2+1} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) K(t, \tau) d\tau \right\} dt \quad (m=1, 2) \quad (25)$$

После некоторых упрощений для определения нормального напряжения на линии контакта получаем следующее выражение, где выделены члены, содержащие особенность:

$$a\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha_0 (\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta_0)}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) J_1(\alpha_0 \tau) d\tau + H(\alpha) \quad (26)$$

где

$$H(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_0 \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) J_1(\alpha_0 \tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha_0 t) \cos t\alpha dt}{t^2 + 1} - \\ - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_0 (\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta_0) \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) d\tau \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{t^2 (\tau J_0(\alpha_0 t) J_1(\alpha_0 \tau) - t J_1(\alpha_0 t) J_0(\alpha_0 \tau)) \cos t\alpha dt}{(t^2 + 1)(t^2 - \tau^2)} + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_0 \int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{t}{t^2 + 1} (t \operatorname{sh}\alpha \sin t\alpha - \cos t\alpha \cos\beta_0) K(t, \tau) dt \quad (27)$$

При  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка  $1/2$ .

Укажем условие, из которого можно найти зону контакта. Для определения указанной зоны контакта используется условие равенства нулю коэффициентов интенсивности контактных напряжений на концах трещины:

$$\int_0^{\infty} (\tau^2 + 1) u(\tau) J_1(\alpha_0 \tau) d\tau = 0$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград наука, 1968.
2. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН Арм ССР, Механика. 1976. Т.29. №1. С.51–66.
3. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М., изд. иностр. лит., 4.1, 1949.

### Сведения об авторах:

**Арутюнян Левон Арсенович** – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении (374 99) 67 57 47  
**E-mail:** [arutyunyanlevon60@gmail.com](mailto:arutyunyanlevon60@gmail.com)

**Агабекян Пайкар Вараздатович** – к.ф.м.н., Институт механики НАН Армении (374 99) 24 85 47  
**E-mail:** [aghabekyan.payqar@gmail.com](mailto:aghabekyan.payqar@gmail.com)

## Упруго-спиновые волны в составной ферромагнитной структуре

Атоян Л.А.

Связь между упругой системой и спиновой системой магнито-упорядоченной среды, в частности ферромагнетика, порождает взаимосвязанные магнитоупругие волны. Если скорости парциальных волн близки друг к другу, то может возникнуть эффект длительного взаимодействия, что иногда называют гибридизацией, а саму волну гибридной.

В предлагаемой работе ставится задача нахождения упруго-спиновых волновых полей в рассматриваемой составной конструкции - ферромагнитное полупространство и примыкающий к нему ферромагнитный слой, когда из бесконечности на поверхность полупространства падает магнитоупругая волна. Предполагается, что конструкция находится в постоянном внешнем магнитном поле.

Задача решается с использованием уравнений, учитывающих взаимосвязь спиновых (магнитных) и упругих возмущений с соответствующими граничными и контактными условиями [1-7]. Использованы упрощенные уравнения без учёта обменного взаимодействия, магнитной анизотропии. Такое приближение представляется приемлемым, в частности, для железо-иттриевого граната (ЖИГ), широко использующегося на практике.

**Постановка задачи.** Рассмотрим составную ферромагнитную конструкцию, состоящую из ферромагнитного слоя, примыкающего к ферромагнитному полупространству. Ферромагнитные параметры составляющих конструкции, предполагаются отличными друг от друга. При этом вся конструкция находится в постоянном внешнем магнитном поле. В выбранной декартовой системе координат  $Oxyz$  ферромагнитное полупространство заполняет область  $y > 0$ , а слой занимает область  $-h \leq y < 0$ , причем поверхность слоя  $y = -h$  закреплена. Оси легкого намагничивания составляющих параллельны и направлены по оси  $z$ . В первой области ( $y > 0$ ) из бесконечности по направлению оси  $0x$  распространяются заданные возбуждающие упруго-спиновые волны:

$$(u_{1\infty}, \mu_{1\infty}, v_{1\infty}) = (A_u, A_\mu, A_v) e^{i(px-qy)} e^{-i\omega t} \quad (1)$$

$A_u, A_\mu, A_v$  - постоянные,  $\mu_{1\infty}(x, y), v_{1\infty}(x, y)$  - компоненты вектора намагниченности,  $\omega$  - круговая частота,  $t$  - время,  $u_{1\infty}(x, y, t)$  - компонента упругого перемещения, соответствующая антиплоской деформации в направлении оси  $0z$ ,  $p, q$  - компоненты волнового вектора.

Здесь, и впредь, индекс единицы относится к величинам, характеризующим подложку, а индекс два - к слою. Очевидно, что (1) должно удовлетворять уравнениям движения плотности магнитного момента и уравнениям механического движения среды, которые представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= S^2 \Delta u + f \mu_0 (\mu_x + v_y) \\ \dot{\mu} &= \omega_M (\hat{b}v + f \mu_0 u_{2y}) \\ \dot{v} &= -\omega_M (\hat{b}\mu + f \mu_0 u_{2x}) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho$  - плотность материала среды,  $\hat{b}, f$  - пьезомагнитные коэффициенты,  $\mu_0$  - массовая плотность намагниченности насыщения,  $\omega_M = \gamma \rho \mu_0$ ,  $\gamma$  - гиромагнитное отношение,  $S$  - скорость упругих волн в среде.

Подставляя (1) в (2), и сокращая на экспоненту, получим систему для определения амплитуд волн:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A_u &= -S^2 (p^2 + q^2) A_u + \rho f \mu_0 (ipA_\mu - iqA_v) \\ -i\omega A_\mu &= \omega_M (\hat{b}A_v - f \mu_0 iqA_u) \\ i\omega A_v &= \omega_M (\hat{b}A_\mu + f \mu_0 ipA_u), \end{aligned} \quad (3)$$

Из условия существования ненулевых решений системы (3) следует характеристическое уравнение:

$$f^2 \mu_0^2 k^2 \hat{b} - (\omega^2 - k^2 S^2)(\tilde{\Omega}^2 - \hat{b}^2) = 0 \quad (4)$$

где  $k^2 = p^2 + q^2$ ,  $\tilde{\Omega} = \frac{\omega}{\omega_M}$ .

Из (3) находим связи между амплитудами:

$$A_\mu = \eta A_u, A_\nu = \delta A_u; \quad \eta = \frac{f \mu_0 (i\hat{b}p + \tilde{\Omega}q)}{\tilde{\Omega}^2 - \hat{b}^2}, \quad \delta = \frac{f \mu_0 (p\tilde{\Omega} - iq\hat{b})}{\tilde{\Omega}^2 - \hat{b}^2}. \quad (5)$$

Таким образом, падающая волна представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{1\infty}(x, y, t) &= A_u e^{i(px-qy)} e^{-i\omega t} \\ \mu_{1\infty}(x, y, t) &= \eta A_u e^{i(px-qy)} e^{-i\omega t} \\ \nu_{1\infty}(x, y, t) &= \delta A_u e^{i(px-qy)} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь, перейдем к нахождению общего решения системы (2), которое ищем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u^*(x, y) e^{-i\omega t} \\ \mu(x, y, t) &= \mu^*(x, y) e^{-i\omega t} \\ \nu(x, y, t) &= \nu^*(x, y) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив (7) в систему (2), получим:

$$\begin{aligned} -\omega^2 u^* &= S^2 \Delta u^* + \rho f \mu_0 \left( \frac{\partial \mu^*}{\partial x} + \frac{\partial \nu^*}{\partial y} \right) \\ -i\omega \mu^* &= \omega_M (\hat{b} \nu^* + f \mu_0 \frac{\partial u^*}{\partial y}) \\ i\omega \nu^* &= \omega_M (\hat{b} \mu^* + f \mu_0 \frac{\partial u^*}{\partial x}). \end{aligned} \quad (8)$$

Решения системы (8) должны представлять собой уходящие волны, т.е. должны совпадать с решениями  $u_{1\infty}, \mu_{1\infty}, \nu_{1\infty}$ , помимо этого они должны удовлетворять граничным условиям, которые мы приведем ниже. Таким образом, решения системы (8) в полупространстве ищем в виде:

$$\begin{aligned} u_1^*(x, y) &= U_{1\infty} e^{i(px-qy)} + U_1(x, y) \\ \mu_1^*(x, y) &= \eta U_{1\infty} e^{i(px-qy)} + M_1(x, y) \\ \nu_1^*(x, y) &= \delta U_{1\infty} e^{i(px-qy)} + N_1(x, y), \quad U_{1\infty} = A_u \end{aligned} \quad (9)$$

где  $U_1, M_1, N_1$  - неизвестные функции.

Подставим (9) в (8) и учтем, что функции  $(1, \eta, \delta) U_{1\infty} e^{i(px-qy)}$  удовлетворяют системе (8), получим:

$$\begin{aligned} -\omega^2 U_1 &= S_1^2 \Delta U_1 + \rho_1 B_1 (M_{1x} + N_{1y}) \\ -\Omega_1 M_1 &= \hat{b} N_1 + B_1 U_{1y} \\ \Omega_1 N_1 &= \hat{b} M_1 + B_1 U_{1x}. \end{aligned} \quad (10)$$

где  $B_1 = f_1 \mu_{01}$ ,  $\Omega_1 = \frac{i\omega}{\omega_{M1}}$ . Отсюда, исключив  $M_1, N_1$ , для нахождения  $U_1$  получим следующее

уравнение:

$$\Delta U_1 + \tau_1^2 U_1 = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } \tau_1^2 = \frac{\omega^2 \hat{\Omega}_1}{S_1^2 \hat{\Omega}_1 - \rho B_1^2 \hat{b}_1}, \quad \hat{\Omega}_1 = \Omega_1^2 + \hat{b}_1^2.$$

Выпишем теперь граничные и контактные условия, считая верхнюю поверхность слоя закрепленной:

$$\begin{aligned} [U_{1\infty} e^{i(px-qy)} + U_1(x, y)]_{y=+0} &= [U_2(x, y)]_{y=-0} \\ [U_2(x, y)]_{y=-h} &= 0 \\ \left\{ G_1(-iqU_{1\infty} e^{i(px-qy)} + \frac{\partial U_1}{\partial y}) + B_1[\delta U_{1\infty} e^{i(px-qy)} + \frac{B_1}{\hat{\Omega}_1}(\Omega_1 U_{1x} - \hat{b}_1 U_{1y})] \right\}_{y=+0} &= \\ = [G_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{B_2^2}{\hat{\Omega}_2}(\Omega_2 U_{2x} - \hat{b}_1 U_{2y})]_{y=-0} & \end{aligned} \quad (12)$$

где  $h$  -толщина слоя,  $G_{1,2}$  -модули сдвига.

Первое условие (12) - это равенство перемещений на границе, второе – условие закрепления верхней поверхности слоя, третье - это условие равенства напряжений.

Далее, к уравнению (11) и граничным условиям (12) применим преобразование Фурье по  $x$ , получим:

$$\bar{U}_{1yy} + \gamma_1^2 \bar{U}_1 = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} [U_{1\infty} \delta(p+\alpha) + \bar{U}_1(\alpha, y)]_{y=+0} &= [\bar{U}_2(\alpha, y)]_{y=-0} \\ [\bar{U}_2(\alpha, y)]_{y=-h} &= 0 \\ \left\{ G_1(-iqU_{1\infty} \delta(p+\alpha) + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial y}) + B_1[\delta U_{1\infty} \delta(p+\alpha) + \frac{B_1}{\hat{\Omega}_1}(-i\alpha \Omega_1 \bar{U}_1 - \hat{b}_1 \bar{U}_{1y})] \right\}_{y=+0} &= \\ = [G_2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial y} - \frac{B_2^2}{\hat{\Omega}_2}(i\alpha \Omega_2 \bar{U}_2 - \hat{b}_2 \bar{U}_{2y})]_{y=-0} & \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\gamma_1^2 = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{S_1^2 - \beta_1^2}$ ,  $\beta_1^2 = \frac{\rho_1 \hat{b}_1 B_1^2}{\hat{\Omega}_1}$ ,  $\alpha$  -параметр Фурье.

Аналогичное (13) уравнение верно и в слое:

$$\bar{U}_{2yy} + \gamma_2^2 \bar{U}_2 = 0, \quad (15)$$

$$\text{где } \gamma_2^2 = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{S_2^2 - \beta_2^2}, \beta_2^2 = \frac{\rho_2 \hat{b}_2 B_2^2}{\hat{\Omega}_2},$$

Решения уравнений (13) и (15), с учетом затухания волн в подложке, представляются в виде:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(\alpha, y) &= C_1 e^{-\gamma_1 y} \\ \bar{U}_2(\alpha, y) &= Q_1 c h \gamma_2 y + Q_2 s h \gamma_2 y \end{aligned} \quad (16)$$

где  $C_1, Q_1, Q_2$  - неизвестные постоянные. Подставим представления (16) в граничные условия (14), получим алгебраическую систему для определения этих постоянных:

$$U_{1\infty} \delta(p+\alpha) + C_1 = Q_1$$

$$Q_1 c h \gamma_2 h + Q_2 s h \gamma_2 h = 0$$

$$\begin{aligned} G_1[-iqU_{1\infty} \delta(p+\alpha) - \gamma_1 C_1] + B_1[\delta U_{1\infty} \delta(p+\alpha) + \frac{B_1}{\hat{\Omega}_1}(-i\alpha \Omega_1 C_1 + \hat{b}_1 \gamma_1 C_1)] &= \\ = G_2 \gamma_2 Q_2 - \frac{B_2^2}{\hat{\Omega}_2}(i\alpha \Omega_2 Q_1 + \hat{b}_2 \gamma_2 Q_2) & \end{aligned}$$

Откуда находим:

$$\begin{aligned} C_1 &= -U_{1\infty}\delta(p+\alpha) + Rth\gamma_2 h \\ Q_1 &= Rth\gamma_2 h \\ Q_2 &= R \end{aligned} \quad (17)$$

где:

$$\begin{aligned} R &= \frac{U_{1\infty}\delta(p+\alpha)(r_1\gamma_1+r_2)}{\gamma_2 r_3 - th\gamma_2 h(r_1\gamma_4+r_5)}, \quad r_1 = \frac{\hat{b}_1 B_1^2}{\hat{\Omega}_1} - G_1, \quad r_2 = iqG_1 - \delta B_1 - \frac{i\alpha B_1^2 \Omega_1}{\hat{\Omega}_1}, \quad r_3 = \frac{\hat{b}_2 B_2^2}{\hat{\Omega}_2} - G_2, \\ r_4 &= G_1 - \frac{\hat{b}_1 B_1^2}{\hat{\Omega}_1}, \quad r_5 = i\alpha(\frac{\Omega_1 B_1^2}{\hat{\Omega}_1} - \frac{\Omega_1 B_2^2}{\hat{\Omega}_2}), \quad \gamma_{1,2} = \alpha^2 - \frac{\omega^2}{S_{1,2}^2 + \beta_{1,2}^2} \end{aligned}$$

Далее, после обратного преобразования Фурье, найдем искомые функции  $U_1(x, y), U_2(x, y)$ . После чего необходимо воспользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\hat{b}B}{\hat{\Omega}} U_x - \frac{B\Omega}{\hat{\Omega}} U_y \\ N &= \frac{B}{\hat{\Omega}} (\Omega U_x - \hat{b} U_y), \end{aligned} \quad (18)$$

чтобы определить магнитные составляющие упруго-спиновых волновых полей в рассматриваемой структуре. Заметим, что соотношения (18) верны для всей рассматриваемой конструкции, т.е. как для подложки, так и для слоя, поскольку они следуют из системы (2).

Таким образом, можно утверждать, что общая картина волновых полей в изучаемой конструкции установлена.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А.И., Баръяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М., 1967, 368стр.
2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. 1991, с.560.
3. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. Москва, Наука, 1973, с.591.
4. Hasanyan D.J., Batra R.C. Antiplane shear waves in two contacting ferromagnetic half spaces. J.Elast (2011) 103: 189-203.
5. Агаян К.Л., Атоян Л.А., Терзян С.А. Распространение упруго-спиновых волн в магнитоупорядоченных двухслойных структурах. Изв.НАН РА “Механика”, т.72, 1, 2019, с.3-9.
6. Белубекян М.В., “О поверхностных волнах Лява в случае композиционного слоя”. Сбор. статей “Актуальные проблемы неоднородной механики”, Ереван, 1991 г., стр.25-29.
7. Нобл Р. Метод Винера-Хопфа. М. Мир, 1962, 294 с.

## Сведения об авторах:

**Атоян Л.А.** – к. ф.-м.н., ст. научный сотрудник Института механики НАН РА, тел. 091-508-290, E-mail: [levous@mail.ru](mailto:levous@mail.ru).

# Об оптимальном управлении колебаниями струны со смещениями на концах с заданными состояниями в промежуточные моменты времени

Барсегян В. Р.

Рассматривается задача оптимального граничного управления колебаниями струны со смещениями на концах с заданными начальными и конечными условиями, заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Используя метод разделения переменных и методы теории оптимального управления с многоточечными промежуточными условиями, для произвольного числа первых гармоник предложен конструктивный подход построения оптимального граничного управления колебаниями струны. В качестве приложения предложенного подхода построено граничное оптимальное управление с заданным значением функции прогиба и скоростей точек струны в разные промежуточные моменты времени.

**Введение.** Задачи управления и оптимального управления колебательными механическими системами имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение. Необходимость управления и оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями, является актуальной задачей, решению которой уделяют внимание многие исследователи [1-12]. На практике часто возникают задачи граничного управления и оптимального управления, в частности, когда нужно сгенерировать колебания с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами (формой прогиба, скоростью точек струны и т.д.). Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями являются активно развивающимся направлением в современной теории управления. Исследованию таких задач посвящены, в частности, работы [7-14].

Цель данной работы состоит в разработке конструктивного подхода построения функции оптимального граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными начальным, конечным условиями и с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени и с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Данная работа примыкает к работам [10-12].

**1. Постановка задачи.** Пусть колебательное состояние (малые поперечные колебания) натянутой струны, т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией  $Q(x,t)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ , которая подчиняется при  $0 < x < l$  и  $t > 0$  волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и граничными условиями

$$Q(0,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где функции  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$  - граничные управлени.

В уравнении (1)  $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ , где  $T_0$  - натяжение струны,  $\rho$  - плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ),

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

заданы промежуточные значения функции прогиба и значения скоростей точек струны

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}. \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}. \quad (5)$$

Здесь предполагается, что  $m$  четное число.

Значения функции прогиба (4) и значения скоростей точек струны (5) в заданные промежуточные моменты времени можно задавать в любой очередности.

Задача граничного оптимального управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек струны в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных (3) управлений  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , требуется найти оптимальные управление, переводящие систему из заданного начального состояния (2), удовлетворяя промежуточным условиям (4) и (5), в конечное состояние

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (6)$$

и минимизирующие функционал

$$\int_0^T (\mu^2(t) + \nu^2(t)) dt. \quad (7)$$

Предполагается, что функция  $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$ , где  $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [0, l], t \in [0, T]\}$ . Будем предполагать, что функции

$$\varphi_i(x) \in C^2[0, l], \quad i = 0, m+1, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

$$\psi_j(x) \in C^1[0, l], \quad j = 0, m+1, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования.

$$\mu(0) = \varphi_0(0), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(0), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot{\nu}(0) = \psi_0(l), \quad (8)$$

$$\mu(t_i) = \varphi_i(0), \quad \dot{\mu}(t_j) = \psi_j(0), \quad \nu(t_i) = \varphi_i(l), \quad \dot{\nu}(t_j) = \psi_j(l), \quad i = 2\alpha - 1, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (9)$$

$$\mu(T) = \varphi_T(0), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(0), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot{\nu}(T) = \psi_T(l). \quad (10)$$

Отметим, что так как в отдельные промежуточные моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) заданы или только значения функции прогиба (4) или только значения производной функции прогиба (5) струны, то использовать подход поэтапного решения задачи оптимального управления не целесообразно. Поэтому в работе предлагается такой подход решения рассмотренной задачи оптимального управления, в котором учитывается специфика промежуточных условий.

**2. О решении задачи.** Решение задачи неоднородными граничными условиями (3) сводится к задаче управления распределенными воздействиями

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t), \quad F(x, t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t)) \frac{x}{l} - \dot{\mu}(t) \quad (11)$$

где  $V(x, t)$  - неизвестная функция, подлежащая определению, с однородными граничными условиями  $V(0, t) = V(l, t) = 0$ .

В силу начальных, граничных, промежуточных и конечных условий (2)-(6), и с учетом условий согласования (8)-(10), функция  $V(x, t)$  должна удовлетворять следующим начальным, промежуточным и конечным условиям, соответственно:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) - (\varphi_0(l) - \varphi_0(0)) \frac{x}{l} - \varphi_0(0), \\ \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) - (\psi_0(l) - \psi_0(0)) \frac{x}{l} - \psi_0(0), \quad (12)$$

$$V(x, t_i) = \varphi_i(x) - (\varphi_i(l) - \varphi_i(0)) \frac{x}{l} - \varphi_i(0), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2},$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x) - (\psi_j(l) - \psi_j(0)) \frac{x}{l} - \psi_j(0), \quad j=2\alpha, \quad \alpha=1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (13)$$

$$V(x, T) = \varphi_T(x) - (\varphi_T(l) - \varphi_T(0)) \frac{x}{l} - \varphi_T(0),$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) - (\psi_T(l) - \psi_T(0)) \frac{x}{l} - \psi_T(0). \quad (14)$$

Используя метод разделения переменных для уравнения (11) и учитывая промежуточные (13) и конечные (14) условия, получим, что искомые функции управления  $\mu(t)$  и  $\nu(t)$   $0 \leq t \leq T$  для каждого  $k=1, 2, \dots$  должны удовлетворять некоторым интегральным соотношениям и доставлять минимум функционалу (7). В полученных интегральных соотношениях учитывается специфика промежуточных условий. Так как функционал (7) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, то полученную задачу определения оптимального управления целесообразно рассматривать как проблему моментов [13, 15]. На практике широко применяется модальный метод, на основе которого для произвольных чисел первых гармоник решается задача построения оптимального управления.

В работе на основе метода проблем моментов для произвольных чисел первых гармоник, построено аналитическое выражение для искомых граничных оптимальных управляемых воздействий.

Предложенный конструктивный подход построения граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданными значениями функции прогиба и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени, с использованием метода Фурье, допускает распространение на другие неодномерные колебательные системы. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного оптимального управления процессами колебаний в физических и технологических системах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 476 с.
2. Абдукаримов М.Ф. Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны. ДАН РТ, 2013. т. 56. №8. с. 612-618.
3. Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16). с. 5-10.
4. Гибкина Н.В., Сидоров М.В., Стадникова А.В. Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны. Радиоэлектроника и информатика. Научно-технический журнал ХНУРЭ. 2016. № 2. С. 3-11.
5. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. Успехи математических наук. 2005. т. 60. вып. 6 (366). с. 89-114.
6. Копец М.М. Задача оптимального управления процессом колебания струны. Теория оптимальных решений. Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2014. С. 32-38.
7. Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени. Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. 36–47.
8. Barseghyan V.R. About One Problem of Optimal Control of String Oscillations with Non-separated Multipoint Conditions at Intermediate Moments of Time. In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. 2020. pp. 13-25.
9. Barseghyan V.R. The Problem of Optimal Control of String Vibrations. International Applied Mechanics, Vol. 56.No. 4. 2020, pp. 471-480.
10. Barseghyan V.R. and Solodusha S.V. On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time. Journal of Physics: Conference Series, Volume 1847 (2021) 012016.
11. Barseghyan V., Solodusha S. Optimal Boundary Control of String Vibrations with Given Shape of

- Deflection at a Certain Moment of Time. In: Pardalos P., Khachay M., Kazakov A. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 12755. pp 299-313. Springer, Cham.
12. Барсегян В.Р., Солодуша С.В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени. Вестник российских университетов. Математика. Тамбов, 2020. Т. 25. № 130. с. 131-146.
  13. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука. 2016. 230 с.
  14. Корзюк В.И., Козловская И.С., Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. т. 19. № 1. с. 62–70.
  15. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

### **Сведения об авторе**

**Барсегян Вания Рафаэлович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор факультета математики и механики ЕГУ.

Тел.: (+374 91) 20 32 20;

E-mail: [barseghyan@sci.am](mailto:barseghyan@sci.am)

## Локализованная неустойчивость окрестности упруго–закрепленной стороны прямоугольной пластинки

**Белубекян В.М., Терзян С.А.**

Рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластинки, равномерно сжатая по двум противоположным шарнирно–закреплённым краям с одним упруго–закреплённым краем и четвертым либо закреплённым, либо шарнирно закреплённым. Устанавливаются ограничения на коэффициенты (характеристики) упругого закрепления, при которых возможна потеря устойчивости, локализованная в окрестности упругого края.

1. Известно, что равномерно сжатая прямоугольная пластинка может потерять устойчивость, локализованную в окрестности свободного края [1]. При других классических граничных условиях: скользящий контакт, шарнирные закрепления и, тем более, закрепленный край, не допускают локализованную, в окрестности этого края, неустойчивость. В настоящей статье предполагается, что одна из сторон прямоугольной пластинки упруго закреплена. Требуется определить характеристики упругого закрепления, приводящие к устраниению локализованной неустойчивости, в отличие от свободного края.

В прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$  упругая прямоугольная пластинка занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Пластинка предварительно равномерно сжата по сторонам  $y = 0$  и  $y = b$ . Уравнение устойчивости изотропной пластинки по теории Кирхгофа имеет вид [1-3]

$$D\Delta^2 w + p \frac{\partial^2 w}{\partial f^2} = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.1)$$

где  $w(x, y)$  – функция прогиба,  $D$  – жесткость пластинки на изгиб,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала пластинки.

Предполагается, что стороны пластинки  $y = 0$  и  $y = b$  шарнирно закреплены

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2)$$

На стороне  $x = 0$ , вместо условий свободного края [2], рассматривается два варианта граничных условий упругого закрепления [4,5]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ & D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \gamma_1 w = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

и

$$\begin{aligned} & D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

На четвертой стороне  $x = a$ , будут рассматриваться граничные условия либо жесткого закрепления, либо шарнирного закрепления.

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям шарнирного закрепления (1.2), представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi/b \quad (1.5)$$

Подстановка (1.5) в (1.1) приводит к последовательной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2 f_n'' + \lambda_n^4 (1 - \eta^2) f_n = 0, \quad \eta^2 = \frac{P}{D\lambda_n^2} \quad (1.6)$$

Общее решение уравнения (1.6) представляем в виде

$$f_n = A_n \operatorname{sh} p_1 \lambda_n x + B_n \operatorname{ch} p_1 \lambda_n x + C_n \operatorname{sh} p_2 \lambda_n x + D_n \operatorname{ch} p_2 \lambda_n x \quad (1.7)$$

где

$$p_1 = \sqrt{1+\eta}, \quad p_2 = \sqrt{1-\eta} \quad (1.8)$$

Требование, чтобы решение (1.5), с учетом (1.7), удовлетворяло граничным условиям первого варианта (1.3), после исключения произвольных постоянных  $A_n, B_n$ , приводит к новым выражениям для функции  $f_n$

$$\begin{aligned} f_n = & \left[ \operatorname{sh} p_2 \lambda_n x - \frac{p_2(p_2^2 - 2 + v)}{P_1(p_1^2 - 2 + v)} \operatorname{sh} p_1 \lambda_n x \right] C_n + \\ & + \left( \operatorname{ch} p_2 \lambda_n x - \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \operatorname{ch} p_1 \lambda_n x - \frac{\gamma_1}{p_1} \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{sh} p_1 \lambda_n x \right) D_n \end{aligned} \quad (1.9)$$

Аналогичным образом, в случае второго варианта граничных условий (1.4), для функций  $f_n$  получается

$$\begin{aligned} f_n = & \left[ \operatorname{sh} p_2 \lambda_n x - \frac{p_2(p_2^2 - 2 + v)}{p_1(p_1^2 - 2 + v)} \operatorname{sh} p_1 \lambda_n x + \frac{\gamma_2 p_2}{p_1^2 - v} \frac{p_1^2 - P_2^2}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{ch} p_1 \lambda_n x \right] C_n + \\ & + \left( \operatorname{ch} p_2 \lambda_n x - \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \operatorname{ch} p_1 \lambda_n x \right) D_n \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. Пусть край пластиинки  $x=a$  жестко закреплен

$$w=0, \quad \partial w / \partial x = 0 \text{ при } x=a \quad (2.1)$$

Подстановка решения (1.5), с учетом (1.9) для первого варианта граничных условий упругого закрепления, получается следующая система однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_n, D_n$

$$\begin{aligned} & \left[ \operatorname{sh} \zeta_2 - \frac{p_2(p_2^2 - 2 + v)}{p_1(p_1^2 - 2 + v)} \operatorname{sh} \zeta_1 \right] C_n + \left( \operatorname{ch} \zeta_2 - \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \operatorname{ch} \zeta_1 - \frac{\gamma_1}{p_1} \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{sh} \zeta_1 \right) D_n = 0 \\ & p_2 \left( \operatorname{ch} \zeta_2 - \frac{p_2^2 - 2 + v}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{ch} \zeta_1 \right) C_n + \left( p_2 \operatorname{sh} \zeta_2 - p_1 \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \operatorname{sh} \zeta_1 - \gamma_1 \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{ch} \zeta_1 \right) D_n = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где используется обозначение

$$\zeta_i = p_i \lambda_n a, \quad i=1,2 \quad (2.3)$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.2), после некоторых преобразований, приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & p_1 p_2 (p_1^2 - p_2^2) [p_1^2 + p_2^2 - 2(1-v)] + [p_1^2 (p_2^2 - v)(p_1^2 - 2 + v) + p_2^2 (p_1^2 - v)(p_2^2 - 2 + v)] \times \\ & \times \operatorname{sh} \zeta_1 \operatorname{sh} \zeta_2 - p_1 p_2 [(p_2^2 - v)(p_1^2 - 2 + v) + (p_1^2 - v)(p_2^2 - 2 + v)] \operatorname{ch} \zeta_1 \operatorname{ch} \zeta_2 - \gamma_1 (p_1^2 - v) \times \\ & \times (p_1^2 - p_2^2) (p_1 \operatorname{sh} \zeta_1 \operatorname{ch} \zeta_1 - p_2 \operatorname{sh} \zeta_1 \operatorname{ch} \zeta_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

В предельном случае  $a \rightarrow \infty$   $\zeta_i \rightarrow \infty$  полубесконечной пластины полосы уравнение (2.4), после разделения на  $p_1 - p_2$  приводится к виду

$$p_1 (p_2^2 - v) (p_1^2 - 2 + v) - p_2 (p_1^2 - v) (p_2^2 - 2 + v) + \gamma_1 (p_1^2 - p_2^2) (p_1^2 - v) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5), после некоторых преобразований, приводится к простому виду

$$K(\eta) \equiv (p_1 - p_2) \left[ p_1^2 p_2^2 + 2(1-v)p_1 p_2 - v^2 + \gamma_1(p_1 + p_2)(p_1 - v) \right] = 0 \quad (2.6)$$

Известно, что корень уравнения (2.6)  $\eta = 0$  ( $p_1 = p_2$ ) соответствует тривиальному решению [6,7]. Поэтому искомое уравнение, определяющее параметр критической нагрузки будет

$$K_1(\eta) \equiv p_1^2 p_2^2 + 2(1-v)p_1 p_2 - v^2 + \gamma_1(p_1 + p_2)(p_1^2 - v) = 0 \quad (2.7)$$

В частном случае свободного края  $\gamma_1 = 0$  из (2.7) получается уравнение задач локализованной неустойчивости и локализованных колебаний [4].

Функция  $K_1(\eta)$  обладает следующим свойством

$$\begin{aligned} K_1(0) &= (1-v)(3+v) + 2(1-v)\gamma_1 > 0 \\ K_1(1) &= -v^2 + \gamma_1\sqrt{2}(2-v) \end{aligned} \quad (2.8)$$

В случае свободно края  $\gamma_1 = 0$  из (2.8) следует, что локализованная неустойчивость имеет место всегда за исключением  $v = 0$ , т.е. уравнение (2.7) имеет корень, удовлетворяющий условию

$$0 < \eta < 1. \quad (2.9)$$

Следовательно, для упруго заделанного края уравнение (2.7) будет иметь решение, удовлетворяющее условию (2.9), если имеет место неравенство

$$-v^2 + \gamma_1\sqrt{2}(2-v) < 0. \quad (2.10)$$

Следовательно, при  $\gamma_1 \geq v^2 / (\sqrt{2}(2-v))$  локализованной неустойчивости не будет.

Уравнение (2.4) имеет корень  $\eta = 1$ . Очевидно, что этот корень разделяет решение удовлетворяющее условию (2.9) от решений, для которых  $\eta > 1$ , т.е. отделяет решение, имеющее локализованный характер неустойчивости, от решений общего типа. Иначе говоря, отделяет решение в виде гиперболических функций от решения, содержащего тригонометрические функции. Предельный переход  $\eta \rightarrow 1$  в уравнении (2.4) дает уравнение относительно  $\lambda_n a$

$$2\sqrt{2}v - v^2 \lambda_n a \operatorname{sh} \sqrt{2} \lambda_n a + 2\sqrt{2}(1-v) \operatorname{ch} \sqrt{2} \lambda_n a - \gamma_1(2-v) (\sqrt{2} \lambda_n a \operatorname{ch} \sqrt{2} \lambda_n a - \operatorname{sh} \sqrt{2} \lambda_n a) = 0 \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что если  $\lambda_n a$  больше корня уравнения (2.11), то имеет место локализованная неустойчивость. С учетом, что корни уравнения (2.11) для произвольных  $v$  будут намного больше единицы ( $\lambda_n a \gg 1$ ), получается приближенная формула

$$\lambda_n a \geq \frac{2\sqrt{2}(1-v)}{v^2 + 2(2-v)\gamma_1} \quad (2.12)$$

Пусть на крае пластинки  $x = a$  вместо условий жесткого закрепления заданы условия шарнирного закрепления

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ или } f_n = 0, \quad f_n'' = 0 \text{ при } x = a \quad (2.13)$$

Требование, чтобы решение (1.10) удовлетворяло граничным условиям (2.13), приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_n, D_n$

$$\begin{aligned} & \left[ \operatorname{sh}\zeta_2 - \frac{p_2(p_2^2 - 2 + v)}{p_1(p_1^2 - 2 + v)} \operatorname{sh}\zeta_1 \right] C_n + \left( \operatorname{ch}\zeta_2 - \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \operatorname{ch}\zeta_1 - \frac{\gamma_1}{p_1} \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{sh}\zeta_1 \right) D_n = 0 \\ & p_2 \left( p_2 \operatorname{sh}\zeta_2 - p_1 \frac{p_2^2 - 2 + v}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{sh}\zeta_1 \right) C_n + \\ & + \left( p_2^2 \operatorname{chy}_2 - p_1^2 \frac{p_2^2 - v}{p_1^2 - v} \operatorname{ch}\zeta_1 - \gamma_1 p_1 \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1^2 - 2 + v} \operatorname{sh}\zeta_1 \right) D_n = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.14), после некоторых преобразований и сокращения на  $p_1^2 - p_2^2$ , приводит к уравнению

$$p_1(p_2^2 - v)(p_1^2 - 2 + v) \operatorname{th}\zeta_2 - p_2(p_1^2 - v)(p_2^2 - 2 + v) \operatorname{th}\zeta_1 + \gamma_1(p_1^2 - p_2^2)(p_1^2 - v) \operatorname{th}\zeta_2 = 0 \quad (2.15)$$

Отсюда, в приближении  $\operatorname{th}\zeta_i \approx 1$  (или в пределе  $a \rightarrow \infty$ ) получается уравнение локализованной неустойчивости для полубесконечной пластинки-полосы

$$p_1^2 p_2^2 + 2(1-v)p_1 p_2 - v^2 + \gamma_1(p_1 + p_2)(p_1^2 - v) = 0 \quad (2.16)$$

Из (2.16), как и в предыдущем случае, для свободного края ( $\gamma_1 = 0$ ) получаются известные уравнения, а также условие существования локализованной неустойчивости в виде

$$-v^2 + \sqrt{2}(2-v)\gamma_1 < 0 \quad (2.17)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск, Наука 1982, 239с.
2. Аветисян А.С., Белубекян М.В. Об учете микровращений упругой среды по упрощенной теории Коссера при распространении электроупругих волн в пьезоэлектрике класса бим. Акустический журнал. 2019 Т. 65. 5, с.1-9.
3. Шакери Мобараке П., Гриченко В.Т., Солтанниа Б. Изгибные колебания биморфных пьезокерамических пластин некононической формы. Прикладная механика, 2019. Т.55 (65), 3. с.120-132.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М. Наука 1987. 360с.
5. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин учитывающих поперечные сдвиги. Сб. Науч. Тр. Проблемы механики точных деформируемых сред Ереван, Гитутюн НАН РА, 2002. с.67-88.
6. Коненков М.К. Об изгибных волнах типа Рэлея Акус. жур. 1966. Т.6, 1. с.124-126.
7. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. Прикладная механика НАН Украины, 1994. Т.30. 2. с.61-68.

## Сведения об авторах:

**Белубекян Вагаршак Мелсович** к.ф.м.н., н.с. Институт механики НАН Армении.  
E-mail: [ybelub@gmail.com](mailto:ybelub@gmail.com)

**Терзян Саркис Арутюнович** к.ф.м.н., н. с. Института механики НАН Армении.  
Тел: (+374 91) 340432. E-mail: [sat\\_and\\_21@yahoo.com](mailto:sat_and_21@yahoo.com)

# Изгибные колебания пьезоактивных упругих пластин из материала гексагональной симметрии поляризованной по толщине

Белубекян М.В., Хачатрян В.М.

Предлагается способ получения двумерных уравнений для пьезоэлектрических пластин из уравнений пространственной задачи электроупругости. Решаются задачи изгибных колебаний бесконечной пластинки с помощью гипотезы Кирхгофа, при различных граничных условиях относительно электрического поля на лицевых поверхностях пластинки. Устанавливаются соответствующие дисперсионные (частотные) уравнения. На основе полученных уравнений при помощи замен частоты на производную функции прогиба по времени и волнового числа на производную функции прогиба по координате, в каждом случае получается уравнение изгибных колебаний пластинки. Полученные таким образом двумерные уравнения считаются справедливыми для исследования электроупругих изгибных колебаний пластин конечных размеров.

## 1. Постановка задачи колебаний бесконечной пластинки.

Двухмерные краевые задачи магнитоупругости тонких пластин и оболочек, гипотетическим подходом были формулированы в [1]. Пользуясь гипотетическим подходом, двухмерная краевая задача плоской деформации (также антиплоской деформации) электроупругости в сагиттальной плоскости пьезоэлектриков приводится в работе [2].

Пусть, пьезоэлектрическая бесконечная пластинка из материала класса **6mm** гексагональной симметрии, занимает область  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $-h \leq z \leq h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . В пьезоэлектрической пластинке, квазистатические уравнения распространения электроупругих волн пишутся в общизвестном виде [3-5]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора упругих напряжений,  $U_j$  – компоненты вектора упругих перемещений,  $\rho$  – плотность материала слоя, индексы  $i, j = 1, 2, 3$  соответствуют обозначениям координат  $x, y, z$ ,  $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля,  $\varphi$  – функция потенциала электрического поля,  $\vec{D}$  – вектор индукции электрического поля.

Материалные уравнения (функциональные связи) при предварительной поляризации электрического поля по направлению координаты  $z$

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{13}E_3, \quad \sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} - e_{13}E_3 \quad (1.3)$$

$$\sigma_{33} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}E_3$$

$$\sigma_{12} = (c_{11} - c_{12})\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23} - e_{15}E_2, \quad \sigma_{31} = 2c_{44}\varepsilon_{13} - e_{15}E_1 \quad (1.4)$$

$$D_1 = 2e_{15}\varepsilon_{13} + \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = 2e_{15}\varepsilon_{23} + \varepsilon_1 E_2, \quad D_3 = e_{13}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + e_{33}\varepsilon_{33} + \varepsilon_3 E_3, \quad (1.5)$$

Где  $c_{ij}$ ,  $e_{15}$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3$  - физикомеханические постоянные материала, а  $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$  - линейные деформаций.

Уравнения для электрического потенциала вне пластинки принимаются в виде [3]

$$\Delta_3 \varphi_k = 0, \quad \vec{E}^{(k)} = -\operatorname{grad}\varphi_k, \quad \vec{D}^{(k)} = \varepsilon_0 \vec{E}^{(k)} \quad (1.6)$$

где индексы  $k = 1$  относится к области  $z \geq h$ , а  $k = 2$  к области  $z \leq -h$ .

В общем случае граничные условия на ограничивающих пластинки плоскостях  $z = \pm h$  соответственно будут

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \varphi = \varphi_k, \quad D_3 = D_3^{(k)} \quad (1.7)$$

При этом решения вне пластинки должны удовлетворять условиям затухания

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_1 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi_2 = 0, \quad (1.8)$$

В статье будут рассмотрены предельные варианты (более простые) поверхностных условий для электрического поля: – условия заземления поверхности пластиинки

$$\varphi = 0 \quad (1.9)$$

или условия равенства нулю нормальной составляющей индукции электрического поля

$$D_3 = 0 \quad (1.10)$$

## 2. Принимаются допущения гипотезы Кирхгофа.

В материальных уравнениях (1.3) принебрегается напряжение  $\sigma_{33}$  [6,7]. Из третьего уравнения определяется  $\varepsilon_{33}$  и подставляется во второе и третье уравнения, что дает

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= s_{11}(\varepsilon_{11} + s_{12}\varepsilon_{22}) - d_{13}E_3 \\ \sigma_{22} &= s_{11}(\varepsilon_{22} + s_{12}\varepsilon_{11}) - d_{13}E_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $s_{11} = \frac{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}{c_{33}}, \quad s_{12} = \frac{c_{12}c_{33}-c_{13}^2}{c_{11}c_{33}-c_{13}^2}, \quad d_{13} = e_{13} - \frac{e_{33}}{c_{33}}c_{13}$  (2.2)

Для перемещений принимается

$$u_1 = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2 = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_3 = w(x, y, t) \quad (2.3)$$

Третье допущение гипотезы Кирхгофа – усреднение уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 &= 0, \quad \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - N_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.3*)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h}^h z \sigma_{11} dz, \quad M_2 = \int_{-h}^h z \sigma_{22} dz, \quad H = \int_{-h}^h z \sigma_{12} dz \\ N_1 &= \int_{-h}^h \sigma_{13} dz, \quad N_2 = \int_{-h}^h \sigma_{23} dz \end{aligned} \quad (2.4)$$

усредненные крутящие моменты и поперечные усилия в пластинке соответственно.

С учетом (2.1) и (2.3) для моментов получаются следующие выражения

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + s_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + d_{13} [h(\varphi_+ + \varphi_-) - F] \\ M_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + s_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + d_{13} [h(\varphi_+ + \varphi_-) - F] \\ H &= -\frac{2h^3}{3} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad D = \frac{2h^3}{3} s_{11}, \quad F = \int_{-h}^h \varphi dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

Усилия  $N_1, N_2$  определяются из усредненных уравнений (2.3\*)

$$\begin{aligned} N_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + d_{13} \frac{\partial}{\partial x} [h(\varphi_+ + \varphi_-) - F] \\ N_2 &= -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + d_{13} \frac{\partial}{\partial y} [h(\varphi_+ + \varphi_-) - F], \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подстановка (2.6) в первое уравнение системы (2.3\*) дает уравнение узгубных колебаний пьезоактивной упругой пластиинки

$$D\Delta^2 w - d_{13}\Delta[h(\varphi_+ + \varphi_-) - F] + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

Уравнения электростатики (1.2), с учетом (1.5) и (2.3) преобразуются к виду

$$\varepsilon_* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \varepsilon_1 \Delta \varphi + d_{13} \Delta w = 0, \quad \varepsilon_* = \varepsilon_3 + \frac{e_{33}^2}{c_{33}} \quad (2.8)$$

## 3. Колебания бесконечной пластиинки.

Решения уравнений (2.7) и (2.8) представляются в виде

$$w = A \exp(i(\omega t - k_1 x - k_2 y)), \quad \varphi = f(z) \exp(i(\omega t - k_1 x - k_2 y)) \quad (3.1)$$

Подстановка (3.1) в (2.7) и (2.8) приводит к следующей гибридной системе уравнений

$$(Dr^4 - 2\rho h \omega^2)A + d_{13}r^2 \left[ h(f_+ + f_-) - \int_{-h}^h f dz \right] = 0, \quad f'' - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*} r^2 f = \frac{d_{13}}{\varepsilon_*} r^2 A \quad (3.2)$$

где

$$r^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad f_+ = f(h), \quad f_- = f(-h) \quad (3.3)$$

Общее решение второго уравнения из системы (3.2) представляется в виде

$$f = Bch\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}}rz\right) + Csh\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}}rz\right) - \frac{d_{13}}{\varepsilon_1}A \quad (3.4)$$

Рассмотрим наиболее простой вариант граничных условий для функции  $f$ , когда лицевые плоскости пластинки  $z = \pm h$  заземлены

$$\varphi = 0 \quad (3.5)$$

В этом случае для функции  $f$  из (3.4) получается

$$f = \frac{d_{13}}{\varepsilon_1} \left[ \left( ch\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}}rh\right) \right)^{-1} ch\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}}rz\right) - 1 \right] A \quad (3.6)$$

С учетом (3.6) из первого уравнения системы (3.2) получается уравнение определяющее частоты колебаний бесконечной пластиинки

$$Dr^4 - 2\rho h \omega^2 - 2\frac{d_{13}^2}{\varepsilon_1}r^2 \left[ \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_1}} th\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}}rh\right) - h \right] = 0 \quad (3.7)$$

Если для достаточно тонких пластин использовать разложение функции  $th(r_1 h)$  в ряд, то из (3.7) получится простое уравнение

$$(D + D_e)r^4 - 2\rho h \omega^2 = 0, \quad D_e = \frac{2}{3} \frac{d_{13}^2}{\varepsilon_*} h^3 \quad (3.8)$$

Очевидно, что дисперсионное уравнение (3.8) соответствует уравнению движения

$$(D + D_e)\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.9)$$

для бесконечной пластиинки. Естественно принять уравнение (3.9) справедливым и для пьезоактивных пластин конечных размеров с заземленными лицевыми поверхностями (3.5).

Отсюда следует, что наиболее простая модель задачи для колебания пьезоэлектрической пластины будет модель с уравнением изгибных колебаний (3.9), т. е. с заменой модуля жесткости на изгиб  $D$ , на суммарную жесткость  $D + D_e$ . Изменяются также выражения для изгибных моментов и поперечных усилий

$$\begin{aligned} M_1 &= -(D + D_e) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_2 &= -(D + D_e) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ N_1 &= -(D + D_e) \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad N_2 = -(D + D_e) \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \end{aligned} \quad (3.10)$$

Следовательно, задача изгибных колебаний конечной пластины, с заземленными лицевыми плоскостями приводится к решению общей задачи пластины с заменой жесткости изгиба на  $D + D_e$ .

Второй частный случай, когда на лицевых поверхностях  $z = \pm h$  равны нулью нормальные компоненты вектора индукции электрического поля  $D_3 = 0$

или

$$\frac{\varepsilon_*}{d_{13}} f'_+ - hr^2 A = 0, \quad \frac{\varepsilon_*}{d_{13}} f'_- + hr^2 A = 0 \quad (3.11)$$

Тогда, удовлетворяющее условиям (3.11) общее решение (3.4) запишется в виде

$$f = \frac{d_{13}}{\varepsilon_1} \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}} rh \left( sh \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}} rh \right) \right)^{-1} ch \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}} rz \right) - 1 \right] A \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в первое уравнение системы (3.2) приводит к уравнению, определяющей частоты колебаний

$$(Dr^4 - 2\rho h \omega^2) th \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}} rh \right) + 2hr^2 \frac{d_{13}}{\varepsilon_1} \left[ hr \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}} - th \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_*}} rh \right) \right] = 0 \quad (3.13)$$

Для достаточно тонких пластин, уравнение (3.13) упрощается при помощи разложения в ряд функции гиперболического тангенса

$$Dr^4 - 2\rho h \omega^2 + D_e r^4 = 0 \quad (3.14)$$

Как и в предидущем случае, частотному уравнению (3.14) будет соответствовать следующее уравнение изгибных колебаний тонкой пластины

$$(D + D_e) \Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.15)$$

Таким образом, для пьезоактивной пластины при условии равенства нулю нормальной компоненты электрической индукции на лицевых плоскостях, как и в случае заземленных плоскостей (3.9) задача приводится к исследованию классической задачи пластин с заменой коэффициента жесткости на изгиб на  $D + D_e$ . Отметим, что добавочные жесткости для приведенных двух случаев совпадают.

**Заключение.** Показывается, что в квазистатической постановке, задача изгибных колебаний пьезоактивной пластины приводится к исследованию классической задачи пластин с заменой коэффициента жесткости. Из выведенных уравнений дисперсии, полуобратным методом восстановлены двухмерные уравнения изгибных колебаний тонкой пластины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В., Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Avetisyan A.S. Two-dimensional problems of electroacoustics in homogeneous piezoelectric crystals. Mechanics - Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, vol. 72. №3. 2019. pp 56-79.
3. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск, Наука 1982, 239 с.
4. Аветисян А.С., Белубекян М.В. Об учете микровращений частиц упругой среды по упрощенной теории Коссера при распространении электроупругих волн в пьезоэлектрике класса бтм. Акустический журнал. 2019. том 65. №5. с. 579-587.
5. Шакери Мобараке П., Гринченко В.Т., Солтанниа Б.В. Изгибные колебания биморфных пьезокерамических пластин неканонической формы, Прикладная механика, 2019. Т. 55. № 3. С. 120-132.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987, 360 с.
7. Белубекян М. В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. Сб Науч. Тр. "Проблемы механики тонких деформируемых сред", Ереван: Гитутюн НАН РА. 2002. С. 67– 88.

## Сведения об авторе

**Хачатрян Вазген Мехакович** – к.ф.-м.н., н.с. Института механики НАН РА  
**E-mail:** khachvaz@gmail.com

# Прямая и обратная задача идентификации дефекта в ортотропном слое

Беляк О.А.

Рассмотрена плоская задача о колебаниях ортотропного слоя с цилиндрической полостью произвольного поперечного сечения под действием нагрузки, приложенной на поверхности слоя. Решение задачи произведено на основании метода граничных интегральных уравнений и сопоставлено с результатами, полученными в рамках конечно-элементного моделирования в Comsol. Рассмотрена обратная задача идентификации полости малого характерного размера кругового поперечного сечения на основе асимптотического подхода. Даны оценки области применимости асимптотического подхода при решении обратной задачи по сравнению с методом граничных интегральных уравнений.

**Введение.** С целью теоретического изучения динамической прочности элементов конструкций традиционно используются задачи о колебаниях упругих полуограниченных тел. Для изотропных однородных сред динамические процессы в таких структурах хорошо изучены [1, 2], а исследование волновых процессов для сред с более сложной структурой, например, для слоистых [3, 4], функционально-градиентных [5, 6], пористых [7] является весьма актуальным и в настоящее время. При этом один из важных классов динамических задач теории упругости представляют собой задачи о колебаниях упругих тел с локальными неоднородностями [8, 9], такими как, полости, включения, трещины. Изучение рассеяния упругих волн на неоднородностях разных типов и форм позволяет устанавливать факт наличия дефекта, и определить тип и положение повреждения в исследуемых объектах, в том числе в покрытиях.

В настоящей работе рассмотрены прямая и обратная задача о колебаниях ортотропного слоя, ослабленного цилиндрической полостью. Решение прямой задачи реализовано на основе метода граничных интегральных уравнений, сопоставлено с результатами, полученными в рамках конечно-элементной модели. Решение обратной задачи реализовано с использованием генетического алгоритма поиска минимума нелинейного функционала невязки, построенного в рамках позиционного зондирования.

## 1. Постановка и решение прямой и обратной задачи

Рассмотрен установившийся режим колебаний с частотой  $\omega$  ортотропного упругого слоя толщины  $h$  с цилиндрической полостью, не выходящей на его границы. Направляющая полости – гладкая замкнутая кривая  $l_0$  с образующей, параллельной оси  $Ox_2$  (рис. 1). Колебания в слое вызваны нагрузкой  $\mathbf{p}(x_1, t) = \text{Re}(\mathbf{p}(x_1)e^{-i\omega t})$ , приложенной к верхней части границы слоя.

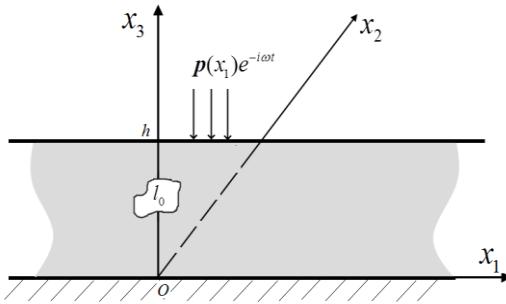


Рис. 1. Полосовой волновод с туннельной полостью с гладкой направляющей  $l_0$ .

Краевая задача после отделения временного множителя имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \quad i, j = 1, 3, \quad u_i |_{x_3=0} &= 0, \quad \sigma_{i3} |_{x_3=h} = p_i, \quad \sigma_{ij} n_j |_{l_0} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных материала, удовлетворяющие соотношениям симметрии и положительной определенности,  $n_j$  – компоненты единичного вектора нормали к кривой  $l_0$ , внешнего по отношению к области,

занятой упругой средой. Оси упругой симметрии материала совпадают с осями системы координат. Замыкает постановку задачи условие излучения волн на бесконечности, при формулировке которого использован принцип предельного поглощения [2].

Основным способом исследования задачи (1.1) является ее предварительное сведение к интегральному уравнению с нерегулярным ядром на основе идей теории потенциала. Решение краевой задачи (1.1) построено на основе функций Грина для слоя  $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $i, m = 1, 3$  и обобщенной теоремы взаимности [2], а индекс  $m$  указывает, что нагрузка приложена в направлении оси  $Ox_m$ ,  $m = 1, 3$ . Функция Грина для ортотропного слоя ввиду громоздкости не приводится [10].

Поля перемещений в слое под действием поверхностной нагрузки с носителем на отрезке  $[a, b]$  имеют вид:

$$\begin{aligned} u_m(\xi) &= u_m^*(\xi) - \int_{l_0} K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x}) dl_x, \quad i, j, m = 1, 2, 3, \\ u_m^*(\xi) &= \int_a^b p_i(x_1) U_i^{(m)}(x_1, h, \xi) dx_1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $K_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) = \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x})$  нерегулярное ядро [10], содержащее компоненты тензора напряжений, которые выраженные через функции Грина для слоя  $U_i^{(m)}(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $i = 1, 3$ .

Далее, решение задачи (1.1) сводится к построению систем граничных интегральных уравнений (ГИУ) по границе дефекта  $l_0$  и определение полей смещений на контуре полости  $l_0$  [10] с последующей дискретизацией на основании метода граничных элементов [11], который применим для контуров произвольной конфигурации. Однако такой подход связан со значительными вычислительными трудностями и большими временными затратами. Тогда как, в случае малого характерного размера полости с направляющей  $l_0$  – окружностью, на основании асимптотического подхода получены формулы [10, 12], описывающие поля смещений на контуре дефекта, минуя процедуру дискретизации систем ГИУ.

Приведем здесь выражения амплитуд  $A_p^{(m)}$  полей смещений на верхней границе слоя, полученные в рамках асимптотического анализа ГИУ.

$$\begin{aligned} u_m(\xi_1, h) &= u_m^*(\xi_1, h) - \sum_{p=1}^M A_p^{(m)}(\mathbf{x}_0, r) e^{-i\alpha_p^* \xi_1 \operatorname{sign}(x_{10} - \xi_1)} + O(e^{-\zeta \xi_1 \operatorname{sign}(x_{10} - \xi_1)}), \quad m = 1, 3, \\ A_p^{(m)}(\mathbf{x}_0, r) &= \frac{r^2 \pi i \exp(-i\alpha_{1p}^* x_{10})}{2\psi(\alpha_{1p}^*) h^2} \left[ \Phi_0^{(m)}(x_{30}) u_1^*(\mathbf{x}_0) + \Omega_0^{(m)}(x_{30}) u_3^*(\mathbf{x}_0) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_k^{(m)}(x_{30}) u_1^{(k)}(\mathbf{x}_0) + \Omega_k^{(m)}(x_{30}) u_3^{(k)}(\mathbf{x}_0) \right], \quad k = 1, 3, \quad m = 1, 3, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $r$  – радиус направляющей  $l_0$ , имеющей центр в точке  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{30})$ . В соотношениях (1.3) суммирование идет по повторяющемуся индексу  $k$ , выражения для  $\psi(\alpha_{1p}^*)$ ,  $\Phi_k^{(m)}(x_{30})$ ,  $\Omega_k^{(m)}(x_{30})$  не приводятся в виду их громоздкости, а  $u_s^{(k)}(\mathbf{x}_0) = u_{s,k}(\mathbf{x}_0)$ ,  $s, j = 1, 3$  определены формулами [10]. Полюсы подынтегральных мероморфных функций  $\alpha_p^*$  в соотношении (1.3) определяются дисперсионным уравнением:

$$\begin{aligned} K_1^+ ch((\lambda_1 + \lambda_2)h) + K_1^- ch((\lambda_1 - \lambda_2)h) + K_2 &= 0, \\ K_1^\pm &= \pm [\psi_1(\lambda_1)\psi_3(\lambda_2) \mp \psi_1(\lambda_2)\psi_3(\lambda_1)] [h_1(\lambda_2)h_3(\lambda_1) \mp h_1(\lambda_1)h_3(\lambda_2)] \\ K_2 &= 4 (\psi_1(\lambda_1)\psi_3(\lambda_1)h_1(\lambda_2)h_3(\lambda_2) + h_1(\lambda_1)\psi_1(\lambda_2)\psi_3(\lambda_2)h_3(\lambda_1)), \end{aligned}$$

где выражения для  $\lambda_i, \psi_j(\lambda_i), h_j(\lambda_i)$  зависят от механических характеристик материала слоя, частоты колебаний и не приводятся в виду громоздкости. Множество полюсов имеет счетное число  $M$  вещественных полюсов, которым соответствуют волны, распространяющиеся от источника колебаний без затухания. Остальные полюсы – комплексные, при этом их мнимая часть возрастет пропорционально их номеру  $\text{Im} \alpha_p^* \sim O(p)$ ,  $p \rightarrow \infty$ , а нормальные моды, отвечающие комплексным полюсам  $\alpha_q^*$ , имеют амплитуду, экспоненциально убывающую, при удалении от источника колебаний. Таким образом, соотношение (1.3) позволяет корректно описать волновое поле в ближней к источнику колебаний зоне только при учете всех бегущих волн, при этом, оставаясь в пределах заданной точности, учитывается счетное число комплексных полюсов.

Обратная задача идентификации дефекта в слое может быть сведена к решению системы нелинейных операторных уравнений относительно функции смещений на контуре и самого контура, которая имеет вид:

$$\begin{cases} f_m(\xi_1) = u_m^*(\xi_1) - \int_{l_0}^{(m)} \sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi_1) n_j(x) u_i(x) dl_x, \quad \xi_1 \in [c, d], \\ \frac{1}{2} u_m(y) = u_m^*(y) - Vp \int_{l_0}^{(m)} \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) n_j(x) u_i(x) dl_x, \quad m, i, j = 1, 3. \end{cases}$$

Здесь приведем решение обратной задачи реконструкции полости в ортотропном слое на основании информации о полях перемещений на поверхности слоя, в рамках метода регуляризации на конечномерных множествах. Было принято, что гладкий контур дефекта принадлежит классу эллипсов. Контур из этого класса однозначно определяют следующие пять характеристик: полуоси эллипса  $a$  и  $b$ , угол наклона  $\theta$  эллипса к одной из осей координат, заглубление и горизонтальная координата центра полости. В этом случае обратная задача сведена к поиску минимума нелинейного функционала невязки:

$$\Phi(\boldsymbol{\varsigma}) = \sum_m \sum_{k=1}^N |f_m(\xi_{1k}) - u_m(\boldsymbol{\varsigma}, \xi_{1k})|^2, \quad \xi_{1k} \in [c, d], \quad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\varsigma} = [a; b; \theta; x_{10}; x_{30}].$$

Функционал (1.4) построен в рамках позиционного зондирования, минимизация осуществлялась гибридным алгоритмом (генетический алгоритм, затем алгоритм Nelder-Mead [13]) в Matlab.

## 2. Результаты вычислительных экспериментов.

Вычисление волновых полей было осуществлено металлокерамического композиционного материала «А» [14], упругие постоянные материала (ГПа):  $C_{11} = 257$ ,  $C_{13} = 65$ ,  $C_{33} = 203$ ,  $C_{44} = 62$ ,  $C_{55} = 74$ ,  $C_{66} = 65$  и  $\rho = 3227 \text{ кг/м}^3$ .

На рис. 2 – 3 приведены действительные части волновых полей  $u_m(x_1, x_3)$ ,  $m = 1, 3$  в слое для безразмерного волнового числа  $\kappa = kh = 2.0$ ,  $p_0 = C_{55}$ , рассчитанные на основании соотношения (1.2), на рисунках, отмечены черным цветом, для цилиндрической полости, направляющая которой является окружностью с радиусом  $r = 0.05h$ , координаты центра  $x_{10} = x_{30} = h/2$ , точка приложения сосредоточенной нагрузки  $x_{10}^* = 0$ . Красной пунктирной линией изображены поля  $u_m(x_1, x_3)$ ,  $m = 1, 3$ , полученные в результате решения рассматриваемой задачи (1.1) численно. В этом случае, моделирование распространения бегущих волн в полуограниченной ортотропной среде с туннельной полостью применялся конечно-элементный комплекс Comsol Multiphysics с модулем Solid Mechanics в режиме Time Independent. Интерфейс Solid Mechanics основан на решении уравнений движения с учетом определяющей модели твердого материала и граничных условий (1.1).

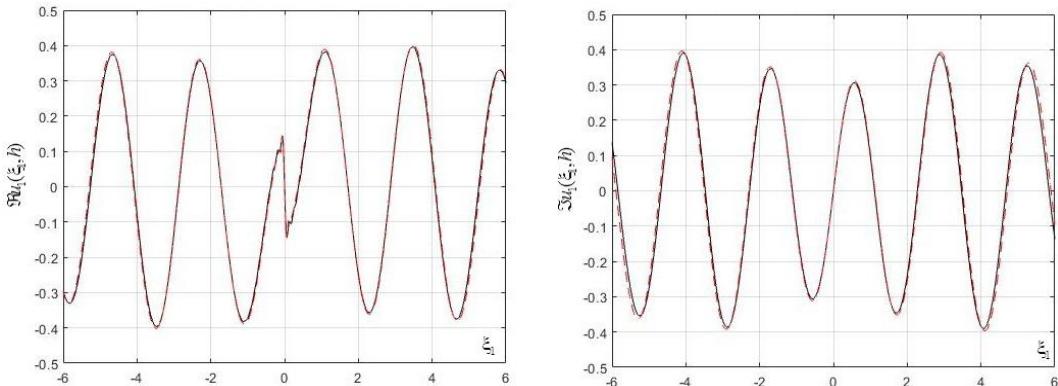


Рис. 2. Действительная и мнимая часть поля смещений  $u_1(\xi_1, h)$  на верхней границе слоя

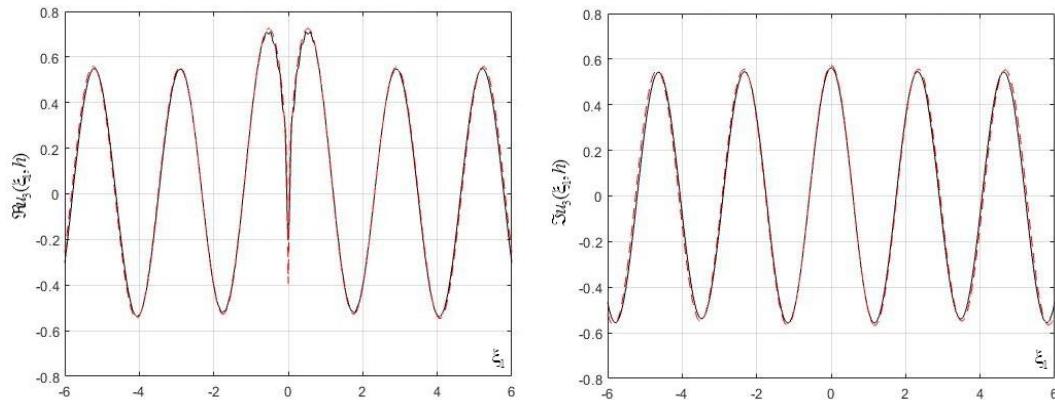


Рис. 3. Действительная и мнимая часть поля смещений  $u_3(\xi_1, h)$  на верхней границе слоя

Поиск минимума нелинейного функционала невязки (1.4), построенного в рамках позиционного зондирования осуществлялся на основании гибридной схемы, сначала применялся генетический алгоритм, затем полученный вектор решений  $\boldsymbol{\varsigma} = [a; b; \theta; x_{10}; x_{30}]$  уточнялся алгоритмом Нелдера - Мида. Отметим, что поля на верхней границе слоя  $u_m(\zeta, \xi_{lk})$  при этом были построены как в рамках асимптотического подхода, так и на основании решения системы интегральных уравнений. Результаты численного эксперимента представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты восстановления 5-ти параметров полости

Искомые параметры цилиндрической полости $[a; b; \theta; x_{10}; x_{30}]$ , $\kappa = kh = 3$	Восстановленные параметры полости				
	$\tilde{a} / \varepsilon_a$	$\tilde{b} / \varepsilon_b$	$\tilde{\theta} / \varepsilon_0$	$\tilde{x}_{10} / \varepsilon_{x_{10}}$	$\tilde{x}_{30} / \varepsilon_{x_{30}}$
$[0.2h; 0.1h; 0; 0; h/2]$	0.1851/7.4	0.0938/6.2	0.0613/1.95	0.008/8	0.459/4.1
$[0.2h; 0.1h; 1.177; h; h/2]$	0.1887/5.6	0.1039/3.9	1.210/1.03	1.038/3.8	0.5117/1.17
$[0.25h; 0.1h; 0; h; h/4]$	0.258/3.2	0.095/5	0.08/2.5	1.052/5.2	0.239/1.1

### 3. Выводы

Приведено решение прямой задачи о колебаниях слоя, ослабленного цилиндрической полостью на основе двух методов: метода граничных интегральных уравнений и метода конечного-элементного моделирования в Comsol. На основании решения прямой задачи сформулирована обратная задача восстановления параметров дефекта на основании метода регуляризации на конечномерных множествах. Неизвестные параметры дефекта определялись из условий

минимума нелинейного функционала невязки, построенного в рамках позиционного зондирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телаах. М.: Наука, 1981. 282 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
3. В. А. Бабешко, О. М. Бабешко, О. В. Евдокимова О колебаниях слоистых упругих сред с рельефной границей// ПММ. 2010. Т. 74. № 6. С. 890–894.
4. Lei Huang, Jianwen Liang, Chengqing Wu A three-dimensional indirect boundary integral equation method for modeling elastic wave scattering in a layered half-space//International Journal of Solids and Structures. 2019. V. 169. P. 81–94.
5. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естест. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 46–49.
6. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит. 2019. 272 с.
7. Суворова Т.В., Беляк О.А., Усошин С.А. Математическое моделирование деформации основания железнодорожного пути при встречном движении поездов// Вестник РГУПС, 2011. № 4. С. 155–161.
8. Ватульян А.О., Беляк О.А. О различных способах реконструкции полости в ортотропном слое// ПМТФ. 2009. Т. 50. №3 (295). С. 181–189.
9. S. Falletta, G. Monegato, L. ScuderiOn the discretization and application of two space-time boundary integral equations for 3D wave propagation problems in unbounded domains//Applied Numerical Mathematics. 2018.V. 124.P. 22–43.
10. Ватульян А.О., Беляк О.А. Асимптотический подход к расчету волновых полей в слое с дефектом малого характерного размера // Акустический журнал. 2020. Т. 66. № 3. С. 235–241.
11. Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
12. Ватульян А.О., Беляк О.А. Обратная задача идентификации малого дефекта на основе асимптотического метода // Дефектоскопия. 2020. № 7. С. 3–9.
13. Lagarias, J. C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions // SIAM Journal of Optimization. 1998. V. 9, N 1. P. 112–147.
14. Garces G., Bruno G., Wanner A. Load transfer in short fiber reinforced metal matrix composites // Acta Materialia. 2007. V. 55. P. 5389–5400.

### Сведения об авторах:

**Беляк Ольга Александровна** – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Теоретическая механика» Ростовского государственного университета путей сообщения, (863) 272-63-49;  
E-mail: [belyak.o.a@gmail.com](mailto:belyak.o.a@gmail.com)

# Об одной схеме идентификации механических характеристик и предварительного напряжения упругой полосы

Богачев И.В.

Рассмотрена модель колебаний неоднородной по толщине изотропной упругой полосы при наличии одноосного поля предварительных напряжений (ПН). Колебания в полосе вызываются приложением нормальной и касательной зондирующих нагрузок, нижняя грань полосы считалась жестко защемленной. Построена схема расчета амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) полосы на основе использования преобразования Фурье по продольной координате. Проведен анализ влияния уровня ПН на АЧХ. Обратная задача заключается в идентификации функций параметров Ламе и ПН с использованием дополнительной информации об АЧХ в заданном частотном диапазоне, измеренных на поверхности. Для решения обратной задачи разработана вычислительная схема, на первом этапе которой с помощью итерационного подхода с использованием регуляризационных методов последовательно определяются функции-параметры Ламе, а на втором этапе с помощью проекционного подхода определяется искомый параметр-уровень предварительного напряжения. Приведены результаты вычислительных экспериментов, обсуждены особенности выбора частот и частотных диапазонов.

**1. Введение.** Ввиду особенностей технологического процесса изготовления современных конструкционных функционально-градиентных материалов (ФГМ) со сложной структурой, при котором используется высокотемпературная термическая обработка, для таких материалов зачастую характерно наличие полей предварительных напряжений (ПН) [1] после остывания. Этот фактор во многих случаях закладывается специально при проектировании для увеличения некоторых эксплуатационных характеристик объектов. В связи с этим существенную важность представляет задача определения и диагностики механических характеристик и ПН в объектах, изготовленных из ФГМ, для чего требуется разработка эффективных неразрушающих методов. Они могут быть построены на основе метода акустического зондирования, хорошо зарекомендовавшего себя для решения задач диагностики. В данной работе рассмотрена обратная задача последовательной идентификации параметров Ламе и ПН упругой неоднородной по толщине полосы из ФГМ с использованием информации об акустическом отклике в различных режимах зондирования.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим установившиеся колебания с частотой  $\omega$  упругой изотропной неоднородной по толщине полосы в плоской постановке. Нижняя грань полосы жестко защемлена, на части верхней границы приложена нагрузка, определяемая вектором  $\mathbf{q}e^{-i\omega t}$ . Постановка задачи после отделения временного множителя записана в случае плоской деформации [1]:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i &= 0, \\ T_{11} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1} + \sigma^0 u_{1,1}, \quad T_{22} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2}, \\ T_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}), \quad T_{21} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma^0 u_{2,1}, \\ u_1|_{x_2=0} = u_2|_{x_2=0} &= 0, \\ T_{12}|_{x_2=H} &= q_1(x_1), \quad T_{22}|_{x_2=H} = q_2(x_1). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $\sigma_{ij}$  – компоненты симметричного тензора напряжений Кирхгофа,  $T_{ij}$  – компоненты несимметричного добавочного тензора напряжений Пиолы,  $\rho$  – плотность,  $\sigma^0$  – функция ПН.

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [2].

Обратная задача заключается в идентификации параметров Ламе  $\mu(x)$  и  $\lambda(x)$ , а также предварительного напряжения  $\sigma^0$  по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на поверхности слоя в заданном частотном диапазоне:

$$u_1|_{x_2=H} = f_1(x_1, \omega), \quad u_2|_{x_2=H} = f_2(x_1, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \tag{2.2}$$

В рассматриваемом случае плотность  $\rho$  считалась известной.

**3. Схема решения задачи.** К постановке задачи (2.1)-(2.2) применено преобразование Фурье по продольной координате  $x_1$ , затем задача записана относительно безразмерных параметров и переменных:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{12,2} &= \alpha i \lambda \tilde{T}_{22} / (\lambda + 2\mu) + \left( \alpha^2 \left( 4\mu(\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) - \sigma^0 \right) - \rho \kappa^2 \right) \tilde{U}_1, \\ \tilde{T}_{22,2} &= i \alpha \tilde{T}_{12} - \left( \rho \kappa^2 - \alpha^2 \sigma^0 \right) \tilde{U}_2, \\ \tilde{U}_{2,2} &= \tilde{T}_{22} / (\lambda + 2\mu) + i \alpha \lambda \tilde{U}_1 / (\lambda + 2\mu), \quad \tilde{U}_{1,2} = \tilde{T}_{12} / \mu + i \alpha \tilde{U}_2, \\ \tilde{U}_1 \Big|_{x_2=0} &= \tilde{U}_2 \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \tilde{T}_{12} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_1, \quad \tilde{T}_{22} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Для построения поэтапной методики решения задачи представим функции из (3.1) в виде разложений по параметру  $\alpha$ , общий вид которых записан ниже:

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}^{(0)} + \alpha \tilde{Z}^{(1)} + \alpha^2 \tilde{Z}^{(2)} + \dots\tag{3.3}$$

Затем, выписывая задачи при различных степенях  $\alpha$ , получим, что в задачи при  $\alpha^0$  не входит ПН  $\sigma^0$ , однако они являются несвязанными:

$\alpha^0$ :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{12,2}^{(0)} &= -\rho \omega^2 \tilde{U}_1^{(0)}, \quad \tilde{T}_{22,2}^{(0)} = -\rho \omega^2 \tilde{U}_2^{(0)}, \\ \tilde{U}_{1,2}^{(0)} &= \tilde{T}_{12}^{(0)} / \mu, \quad \tilde{U}_{2,2}^{(0)} = \tilde{T}_{22}^{(0)} / (\lambda + 2\mu), \\ \tilde{U}_1^{(0)} \Big|_{x_2=0} &= \tilde{U}_2^{(0)} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \tilde{T}_{12}^{(0)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_1^{(0)}, \quad \tilde{T}_{22}^{(0)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_2^{(0)}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

На основе постановок (3.4) может быть построена схема последовательного определения функций  $\mu(x)$  и  $\lambda(x)$ , как это сделано в [3].

Искомый параметр ПН  $\sigma^0$  входит в задачу при  $\alpha^2$ , в которую также входят  $\mu(x)$  и  $\lambda(x)$ :

$\alpha^2$ :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{12,2}^{(2)} &= \lambda \tilde{T}_{22}^{(1)} / (\lambda + 2\mu) + \left( 4\mu(\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) - \sigma^0 \right) \tilde{U}_1^{(0)} - \rho \kappa^2 \tilde{U}_1^{(2)}, \\ \tilde{T}_{22,2}^{(2)} &= -\tilde{T}_{12}^{(1)} + \sigma^0 \tilde{U}_2^{(0)} - \rho \kappa^2 \tilde{U}_2^{(2)}, \\ \tilde{U}_{1,2}^{(2)} &= \tilde{T}_{12}^{(2)} / \mu + \tilde{U}_2^{(1)}, \quad \tilde{U}_{2,2}^{(2)} = \tilde{T}_{22}^{(2)} / (\lambda + 2\mu) - \lambda \tilde{U}_1^{(1)} / (\lambda + 2\mu), \\ \tilde{U}_1^{(2)} \Big|_{x_2=0} &= \tilde{U}_2^{(2)} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \tilde{T}_{12}^{(2)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_1^{(2)}, \quad \tilde{T}_{22}^{(2)} \Big|_{x_2=1} = \tilde{P}_2^{(2)}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Таким образом, идентификация искомых параметров может проводиться в два этапа:

Этап 1. Последовательное определение функций  $\mu(x)$  и  $\lambda(x)$  из задач (3.4) с использованием двух видов точечной зондирующей нагрузки  $P_1(x_1) = P\delta(x_1)$ ,  $P_2(x_1) = 0$  и  $P_1(x_1) = 0$ ,  $P_2(x_1) = P\delta(x_1)$ , где  $\delta(x_1)$  – дельта-функция Дирака. В таком случае трансформанты функций  $P_i(x_1)$  не будут зависеть от параметра преобразования  $\alpha$ . Для решения обратных задач строится итерационный процесс на основе метода линеаризации. Процесс сочетает решение прямых задач методом пристрелки для текущих приближений искомых функций параметров Ламе и последующее решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно поправок к искомым функциям с помощью метода регуляризации Тихонова вида:

$$\int_0^1 \delta\mu(x) (\tilde{U}_i^{n-1}(x, \kappa))^2 dx = \tilde{U}_i^{n-1}(h, \kappa) - f_i(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2].\tag{3.5}$$

Подробное описание итерационного подхода для аналогичной задачи приведено в [3].

Этап 2. Определение параметра  $\sigma^0$  с использованием найденных функций  $\mu(x)$  и  $\lambda(x)$ . При этом удобно использовать случай симметричной относительно начала координат

распределенной зондирующей нагрузки вида  $P_1(x_1) = 0$ ,  $P_2(x_1) = \begin{cases} \text{const}, & x_1 \in [-c, c], \\ 0, & x_1 \notin [-c, c], \end{cases}$ , в

разложении трансформант которой вида (3.3) ненулевыми будут только коэффициенты при четных степенях  $\alpha$ . Для выбранного вида нагрузки с использованием найденных на первом этапе функций  $\mu(x)$  и  $\lambda(x)$  определяются соответствующие функции-трансформанты напряжений и перемещений в задаче (3.4). Затем для определения искомого параметра  $\sigma^0$  построен проекционный подход на основе использования слабой постановки вида:

$$\int_0^1 (\lambda + 2\mu) \tilde{U}_{2,2}^{(2)} V_{2,2} dx_2 - \kappa^2 \int_0^1 \tilde{U}_2^{(2)} V_2 dx_2 + \int_0^1 \sigma^0 \tilde{U}_2^{(0)} V_2 dx_2 - \tilde{P}_2^{(2)} V_2(1) = 0. \quad (3.6)$$

В его рамках функции трансформант перемещений постановки (3.5) представляются в виде разложений по системам линейно независимых функций, удовлетворяющих однородным граничным условиями, затем коэффициенты разложений, зависящие от  $\sigma^0$  и  $\kappa$ , определяются из систем линейных уравнений. Далее используется дополнительная информация обратной задачи (2.2) и искомый параметр  $\sigma^0$  может быть найден из решения соответствующего нелинейного уравнения. Общее описание проекционного подхода приведено в [4].

**4. Вычислительные эксперименты.** Далее представлены результаты численных экспериментов по идентификации функций параметров Ламе и последующей идентификации уровня ПН. Рассматривался случай монотонно возрастающих законов изменения неоднородных характеристик полосы  $\mu(x) = 1 + 2x^2$ ,  $\lambda(x) = 2 + 3x^2$ . Идентификация самих функций параметров Ламе проводилась в диапазоне между первым и вторым резонансами. Для восстановления функции  $\mu(x)$  потребовалось 5 итераций, погрешность не превосходила 2%, для функции  $\lambda(x)$  – 9 итераций, итоговая погрешность с учетом погрешности восстановления  $\mu(x)$  не превосходила 3,5%. Результаты идентификации представлены на рис.1, где графики искомых функций представлены сплошной линией, начальных приближений – пунктирной, графики восстановленных – точками.

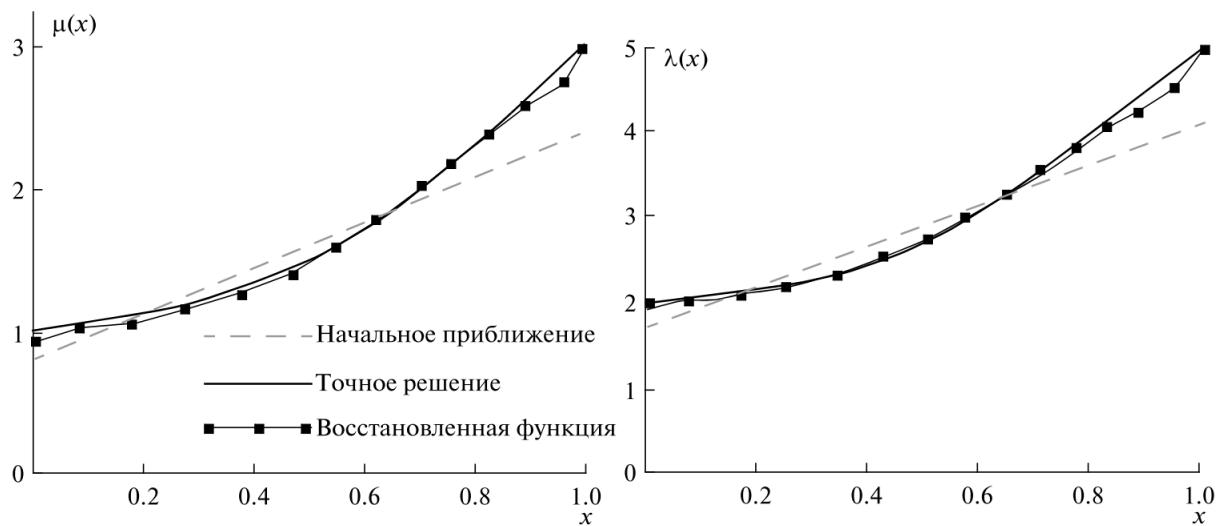


Рис. 1. Восстановление функций параметров Ламе.

На втором этапе, на основе полученных на первом этапе значений параметров Ламе, проводилась идентификация параметра  $\sigma^0$  для различных его значений, лежащих в диапазоне, наиболее распространенному в практике. Точность идентификации сравнивалась для двух различных выбранных частот, на которых в эксперименте снималась дополнительная информация (2.2): вдали от первого резонанса ( $\kappa = 2.1$ ) и возле него ( $\kappa = 3.6$ ). Результаты,

представленные в таблице 1, показывают, что точность идентификации существенно выше для частоты, близкой к резонансу. В скобках указана погрешность идентификации.

№	Точное $\sigma^0$	$\kappa = 2.1$ , (погреш.,%)	$\kappa = 3.6$ , (погреш.,%)
1	0.01	0,010337 (1,34%)	0,010026 (0,26%)
2	0.005	0,005135 (2,69%)	0,005014 (0,40%)
3	0.001	0,001135 (13,5%)	0,0010052 (0,52%)
4	0.0005	0,000635 (27,0%)	0,0005040 (0,8%)

**Таблица 1.** Идентификация параметра уровня ПН.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Монография, Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2015. 206 с.
2. Ворович И.И., Бабешко В.В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей, М.: Наука. 1989. 320 с.
3. Ватульян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 6. с. 723-730.
4. Vatulyan A.O., Bogachev I.V. The projection method for identification of the characteristics of inhomogeneous solid // Doklady Physics. 2018. vol. 63. № 2. P. 82–85.

## Information about authors

Bogachev Ivan Victorovich – Researcher, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, +7 (863) 2975 111.

E-mail [bogachev89@yandex.ru](mailto:bogachev89@yandex.ru)

# Прямые и обратные задачи для цилиндрического волновода с частотно зависимыми импедансными граничными условиями

Ватулян А.О., Юров В.О.

Изучены волны в неоднородном цилиндрическом волноводе с импедансными граничными условиями на внешней границе. Параметры в граничных условиях являются функциями частотного параметра или задаются постоянными. Построены компоненты дисперсионного множества при различных законах изменения параметров и различных законах неоднородности. Исследуется возможность реконструкции параметров по информации о компонентах дисперсионного множества.

**Введение.** Задачи о распространении волн в волноводах имеют приложения к трубам, контактирующим с внешней средой. В настоящей работе моделирование внешней среды осуществляется путем установки граничных условий импедансного типа на внешней границе волновода.

**Постановка задачи.** Рассмотрим свободные колебания с частотой  $\omega$  неоднородного изотропного цилиндрического волновода с кольцевым поперечным сечением ( $a \leq r \leq b$ ), свободной от напряжений внутренней границей и граничными условиями импедансного типа на внешней границе [1].  $\lambda, \mu, \rho$  – параметры Ламе и плотность, являются функциями радиальной координаты.

Введем следующие безразмерные параметры и переменные:

$$x = \frac{r}{b}, \quad \xi_0 = \frac{a}{b}, \quad \mu_0 = \mu(\xi_0), \quad \rho_0 = \rho(\xi_0), \quad X_1 = u_r b^{-1}, \quad X_2 = -iu_z b^{-1}, \quad X_3 = \sigma_r \mu_0^{-1}, \\ X_4 = -i\sigma_{rz} \mu_0^{-1}, \quad \kappa^2 = \rho \omega^2 b^2 / \mu_0, \quad g_1 = \lambda \mu_0^{-1}, \quad g_2 = \mu \mu_0^{-1}, \quad g_3 = \rho \rho_0^{-1}.$$

Разыскивая решение задачи об установившихся свободных колебаниях неоднородного волновода в виде бегущей волны, формируется векторное дифференциальное уравнение первого порядка относительно амплитуд компонент вектора смещений и напряжений, непрерывных по координате  $x$ :

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{A}_0 - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha \mathbf{A}_1 + \alpha^2 \mathbf{A}_2) \mathbf{X}, \text{ где } \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T \quad (1)$$

где  $(\alpha, \kappa)$  безразмерные волновое число и частотный параметр. Компоненты матриц-функций для уравнения (1) приводятся в работе [1].

Граничные условия принимают вид

$$X_3(\xi_0) = X_4(\xi_0) = 0, \quad X_3(1) + \beta_1(\kappa\tau) X_1(1) = X_4(1) + \beta_2(\kappa\tau) X_2(1) = 0 \quad (2)$$

где  $\operatorname{Re} \beta_j(\kappa\tau) \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \beta_j(0) = 0$ ,  $\operatorname{Im} \beta_j(\infty) = 0$ ,  $j = 1, 2$ .

Рассмотрим функции следующего вида

$$\beta_j(\kappa\tau) = \beta_j^\infty - (\beta_j^\infty - \beta_j^0) \frac{1+i\kappa\tau}{1+\kappa^2\tau^2}, \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

Функции (3) содержат 5 неотрицательных параметров:  $\beta_1^\infty, \beta_1^0, \beta_2^\infty, \beta_2^0, \tau$ .

Дисперсионным множеством задачи назовем множество пар  $(\kappa, \alpha)$ , при которых задача (1)-(2) имеет нетривиальное решение. Заметим, что  $\alpha$  принимает комплексные значения, а  $\kappa$  вещественные значения. Для построения нетривиальных решений краевой задачи воспользуемся методом пристрелки. В точках, принадлежащих дисперсионному множеству, определитель пристрелочной системы обращается в ноль. Учитывая аналитическую природу дисперсионного множества [2], можно показать, что для построения компонент дисперсионного множества достаточно использовать метод продолжения по параметру.

Метод пристрелки позволяет численно строить дисперсионные ветви для произвольных законов неоднородности и параметров в граничных условиях. Для получения явных закономерностей строения дисперсионного множества применим асимптотический анализ. Считая  $\tau$  малым параметром, оценим его влияние на дисперсионное множество. Для этого осуществим разложение задачи по  $\tau$

Пусть  $\kappa = \kappa_0$ ,  $\alpha = \alpha_0 + \tau\alpha_1 + \dots$ ,  $X_i(x) = X_{i0}(x) + \tau X_{i1}(x) + \dots$

Сформулируем задачи при одинаковых степенях малого параметра.

Задача 1 при  $\tau^0$

$$\tilde{\mathbf{X}}'_0 = (\mathbf{A}_0 - \kappa_0^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha_0 \mathbf{A}_1 + \alpha_0^2 \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}_0 \quad (4)$$

$$X_{30}(\xi_0) = X_{40}(\xi_0) = 0, \quad X_{30}(1) + \beta_1^0 X_{10}(1) = X_{40}(1) + \beta_2^0 X_{20}(1) = 0 \quad (5)$$

Задача 2 при  $\tau^1$

$$\tilde{\mathbf{X}}'_1 = (\mathbf{A}_0 - \kappa_0^2 \mathbf{A}_{01} + \alpha_0 \mathbf{A}_1 + \alpha_0^2 \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}_1 + \alpha_1 \mathbf{F} \quad (6)$$

$$X_{31}(\xi_0) = 0, \quad X_{31}(1) + \beta_1^0 X_{11}(1) + \frac{\partial \beta_1(\kappa_0 \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} X_{10}(1) = 0 \quad (7)$$

$$X_{41}(\xi_0) = 0, \quad X_{41}(1) + \beta_2^0 X_{21}(1) + \frac{\partial \beta_2(\kappa_0 \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} X_{20}(1) = 0$$

где  $\mathbf{F} = (\mathbf{A}_1 + 2\alpha_0 \mathbf{A}_2) \tilde{\mathbf{X}}_0$

Будем численно разыскивать нетривиальные решения задачи (4)-(5) (при этом строится дисперсионное множество задачи, отвечающей  $\tau = 0$ ), а для задачи (6)-(7) применим условие разрешимости. В результате при помощи метода возмущений получена формула, дающая поправки к ветвям дисперсионного множества в случае ненулевых значений параметра  $\tau$ , которая имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{i\kappa_0 ((\beta_1^\infty - \beta_1^0) X_{10}^2(1) + (\beta_2^\infty - \beta_2^0) X_{20}^2(1))}{\int_{\xi_0}^1 F(x) x dx} \quad (8)$$

где  $F = 2 \frac{g_1}{G} X_{30} X_{20} - 2 X_{10} X_{40} + 8 \frac{\alpha_0 g_2 (g_1 + g_2) x}{xG} X_{20}^2 + 4 \frac{g_1 g_2}{xG} X_{10} X_{20}$ ,  $G = g_1 + 2g_2$ .

**Численная реализация.** Выполним сравнение дисперсионных ветвей при различных значениях параметра  $\tau$  и проверим формулу (8). В расчетах примем  $\xi_0 = 0.75$ ,  $g_2(x) = 1 + 10(x - \xi_0)^2$ ,  $g_1(x) = 1.5 g_2(x)$ ,  $g_3(x) = 1$ ;  $\beta_1^\infty = 0.05$ ,  $\beta_1^0 = 0.005$ ;  $\beta_2^\infty = \beta_2^0 = 0$ ;

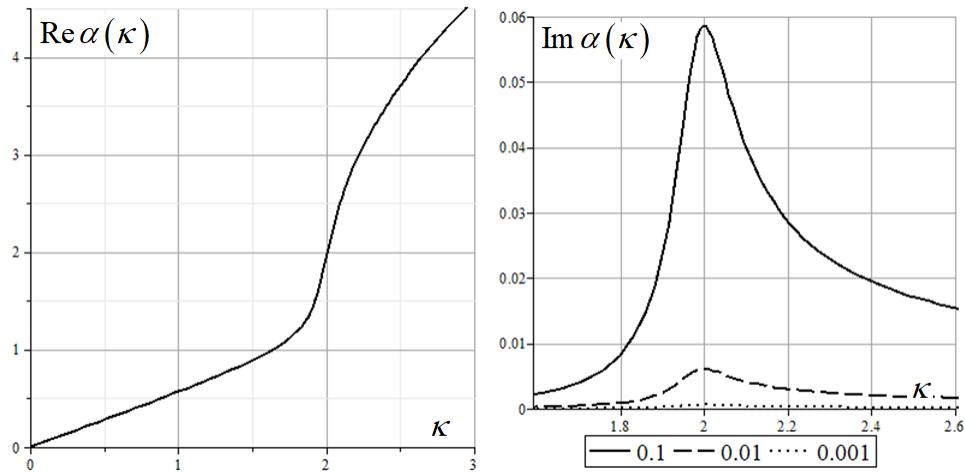


Рис. 1. Вещественная (слева) и мнимая (справа) части первой дисперсионной ветви.

На рис. 1 приведены вещественная и мнимая части первой дисперсионной ветви при  $\tau = 0.1, 0.01, 0.001$ . Вещественные части отличаются мало и поэтому приведен график, отвечающий  $\tau = 0.001$ .

При  $\tau = 0$  первая дисперсионная ветвь является вещественной. Применяя формулу (8) в точках первой кривой, получим  $\alpha_1(\kappa)$ . Нетрудно заметить, что  $\alpha_1(\kappa)$  является чисто мнимой функцией. Сравним с выше полученными результатами для мнимой части функции вида  $\tau\alpha_1(\kappa)$ :  $0.1\alpha_1(\kappa)$ ,  $0.01\alpha_1(\kappa)$ ,  $0.001\alpha_1(\kappa)$ . Наибольшее различие наблюдается для  $0.1\alpha_1(\kappa)$ , что отображено на рис. 2.

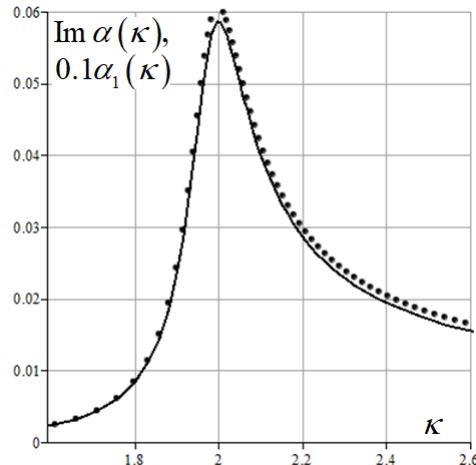


Рис. 2. Функция  $0.1\alpha_1(\kappa)$  (точки) и мнимая часть первой ветви при  $\tau = 0.1$  (сплошная).

Изобразим начальные участки второй и третьей ветви при  $\tau = 0.1$ . Дисперсионные кривые являются комплексными, вещественная часть отображена со знаком плюс, а мнимая со знаком минус.

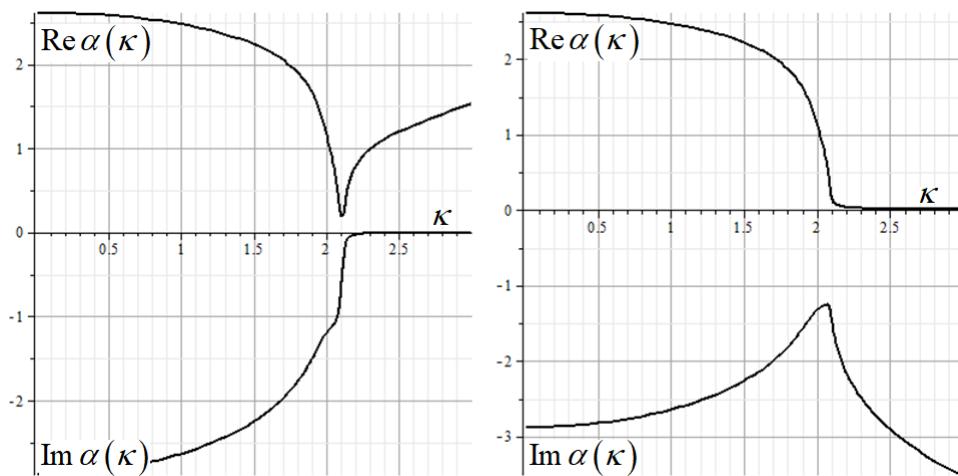


Рис. 3

В предельном случае  $\tau = 0$  комплексные ветви переходят вторая в вещественную, а третья в чисто мнимую (далее чисто мнимая ветвь переходит в вещественную). Рассмотрим эту область в более крупном масштабе.

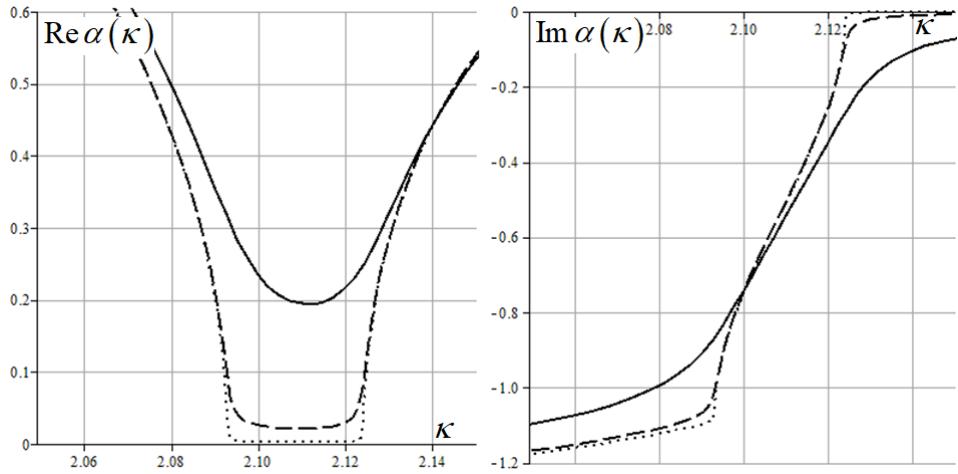


Рис. 4 Вещественная (слева) и мнимая (справа) части второй ветви.

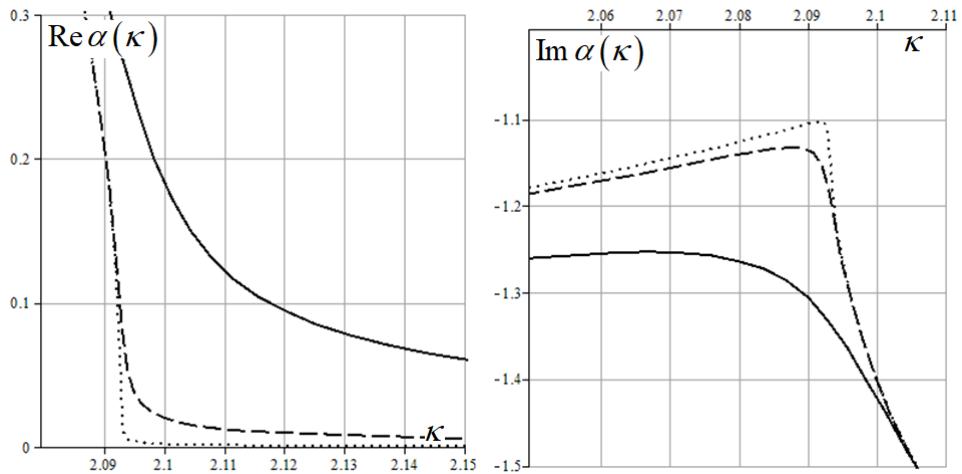


Рис. 5 Вещественная (слева) и мнимая (справа) части третьей ветви.

На рисунках 4 и 5 результаты для  $\tau = 0.1, 0.01, 0.001$  обозначены соответственно сплошной линией, пунктирной линией и точками. Рис. 4 соответствует второй ветви, а рис. 5 третьей.

Рассмотрен ряд обратных задач по реконструкции параметров  $\beta_1^\infty, \beta_1^0, \beta_2^\infty, \beta_2^0, \tau$ . Ранее в [3] рассматривалась задача о восстановлении двух параметров  $\beta_1, \beta_2$  по двум точкам дисперсионного множества. Дисперсионное множество имеет явную гиперболическую зависимость от параметров  $\beta_1, \beta_2$ . В случае  $\beta_2^\infty = \beta_2^0 = 0$  задача о восстановлении параметров  $\beta_1^\infty, \beta_1^0, \tau$  по двум точкам на первой ветви дисперсионного множества принимает вид

$$\begin{aligned} T_0(\kappa_1) + T_1(\kappa_1) \left( \beta_1^\infty - (\beta_1^\infty - \beta_1^0) \frac{1+i\kappa_1\tau}{1+\kappa_1^2\tau^2} \right) &= 0 \\ T_0(\kappa_2) + T_1(\kappa_2) \left( \beta_1^\infty - (\beta_1^\infty - \beta_1^0) \frac{1+i\kappa_2\tau}{1+\kappa_2^2\tau^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Для нахождения параметра  $\tau$  рассмотрим уравнение вида

$$(\beta_1^\infty - \beta_1^0) \tau = \operatorname{Im} \left( \frac{T_0(\kappa_1)}{T_1(\kappa_1)} \right) \frac{1 + \kappa_1^2 \tau^2}{\kappa_1} = \operatorname{Im} \left( \frac{T_0(\kappa_2)}{T_1(\kappa_2)} \right) \frac{1 + \kappa_2^2 \tau^2}{\kappa_2} \quad (10)$$

Подставляя найденное положительное значение  $\tau$  в (9) и отделяя вещественные части, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения  $\beta_1^\infty, \beta_1^0$ . В проведенных вычислительных экспериментах для трех параметров обеспечена точность восстановления в пять значащих цифр.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации (соглашение № 075-15-2019-1928).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А. О., Юров В. О. О свойствах дисперсионного множества для неоднородного цилиндрического волновода // Владикавк. мат. журн. 2018. Том 20. вып. 1. С. 50-60.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Ватульян А. О., Васильев Л. В., Юров В. О. Восстановление параметров в граничных условиях для неоднородного цилиндрического волновода // Владикавк. мат. журн. 2018. Том 20. вып. 2. С. 29-37.

### Сведения об авторах:

**Ватульян Александр Ованесович** – заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета 8(863)2 97 51 14

E-mail [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru)

**Юров Виктор Олегович** – младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Южного математического института - филиала ВНЦ РАН, 8(951)829 84 47

E-mail [vitja.jurov@yandex.ru](mailto:vitja.jurov@yandex.ru)

# **Численное моделирование течения воздуха в бронхах человека при лечении аэрозолями и термической гелий-кислородной смесью**

**Гафурова П.С., Медведев А.Е.**

Работа посвящена математическому моделированию течения воздуха в бронхиальном дереве человека. Приведены аналитические формулы для построения полного бронхиального дерева. Все поверхности бронхиального дерева сстыковываются со вторым порядком гладкости (не имеют острых углов и ребер). Геометрические характеристики бронхиального дерева человека при патологии моделируются “звездчатой” формой внутреннего строения бронха. Проведены расчеты ламинарного течения воздуха в бронхиальном дереве человека (от входного бронха до альвеол). Для расчета течения газа в легких и осаждения аэрозолей использовалась методика поэтапного расчета течения в бронхиальном дереве. Это позволило рассчитать течение воздуха и осаждения капель аэрозоли по всем бронхиальным ветвям вплоть до альвеол. Проведен расчет дыхания человека при использовании методики лечения COVID-19 термической гелий-кислородной смесью. Показано, что дыхание термической гелий-кислородной смесью требует от больного меньше усилий, по сравнению с дыханием воздухом. Показано, что выравнивание температуры нагретого вдыхаемого газа с температурой тела человека происходит в верхних отделах бронхов.

## **Введение**

Заболевания органов дыхания весьма распространенная группа патологий, которой страдают все возрастные категории людей, практически, круглогодично. Для лечения широкого спектра болезней человека в настоящее время все шире применяется ингаляционный (аэрозольный) способ введения лекарственных препаратов. Этот метод лечения имеет серьезные преимущества над другими способами введения лекарств, так как действует непосредственно в самом месте патологии (для лечения легочных заболеваний) или доставляет лекарство непосредственно в кровь, через легочные альвеолы. Знание о том, как и где капли или частицы лекарства осаждаются в дыхательной системе имеет основополагающее значение для правильной дозировки лекарственных средств.

Дыхательная система человека состоит из верхних (нос, носоглотка, гортань) и нижних (трахея, бронхиальное дерево и альвеолы) дыхательных путей. Нижняя часть – бронхиальное дерево имеет сложную древовидную структуру и насчитывает 24 генерации.

Уже многие десятилетия разрабатывают математические модели, описывающие морфологическое строение бронхиального дерева человека. Для построения бронхиального дерева в 1963 г. в своей работе [1] Вейбелль на основе морфометрии легких человека описал анатомическую модель нижних дыхательных путей. Им была предложена модель симметричной дихотомии бронхиального тракта, состоящая из 24 бифуркаций (деления) бронхов вплоть до альвеолярных мешков, указав параметры – длину и диаметр бронхов (угол деления бронхов в модели не конкретизировался). В модели Вейбеля трахея обозначена, как первый дыхательный путь (поколение 0). Данную статью считают базовой для построения бронхиального дерева.

С недавних пор стали использование метода моделирования в области вычислительной гидродинамики (CFD) и увеличение вычислительной мощности компьютеров облегчили моделирование и симуляцию воздушного потока во всех дыхательных путях. CFD можно использовать для моделирования бронхиального дерева. Однако до настоящего времени лишь в немногих исследованиях предпринимались попытки моделирования потока во всей дыхательной системе.

## **Осаждение капель аэрозолей в бронхиальном дереве человека**

Для проведения расчетов необходимо построить бронхиальное дерево человека с различными параметрами. На сегодняшний день в мире представлены различные модели, описывающие построение дерева, но при этом большая часть из них привязана к определенному пакету программ и не учитывает реальное сечение бронхов (настоящий бронх имеет в сечение далеко не окружность, он представлен звездообразной формой [2]).

Построена аналитическая модель трехмерного бронхиального дерева [3]. Возмущающая функция позволяет параметрически задать любую степень сужения (патологии) бронхиального дерева с сохранением гладкости поверхности всего бронхиального дерева. Аналитическое представление позволяет построить бронхиальное дерево вплоть до альвеол.

Предложена нестандартная методика расчета бронхиального дерева, которая дает возможность рассчитать каждую бифуркацию бронхиального дерева и состыковать ее со следующей.

Для расчета осаждения капель аэрозоли в бронхиальном дереве человека взят для примера типичный компрессорный небулайзер (ингалятор) марки NE-C24 фирмы “Omron”. Характеристики небулайзера следующие: размер капель 3 мкм, объемный расход аэрозоли 0.3 мл/мин. Типичный расход воздуха при вдохе аэрозоли через небулайзер взят равным 50 л/мин. Продолжительность вдоха варьировалась от 1 до 3 секунд.

Результаты расчета приведены на рис. 1. Видно, что с увеличением номера бифуркации (вниз по бронхиальному дереву) количество прошедших капель аэрозоля почти линейно падает. Времени вдоха 1 и 2 секунды не хватает для того, чтобы капли аэрозоли достигли альвеол. При вдохе длительностью 1 секунду капли аэрозоли достигают только 21-ой бифуркации. При вдохе длительностью 2 секунды капли аэрозоли достигают 22-ой бифуркации. И только при длительности вдоха в 3 секунду около 45% капель достигают альвеол. При расходе воздуха в 50 л/мин человек должен каждую секунду 0.83 литра воздуха. Максимально глубокий вдох человека составляет около 2 литров.

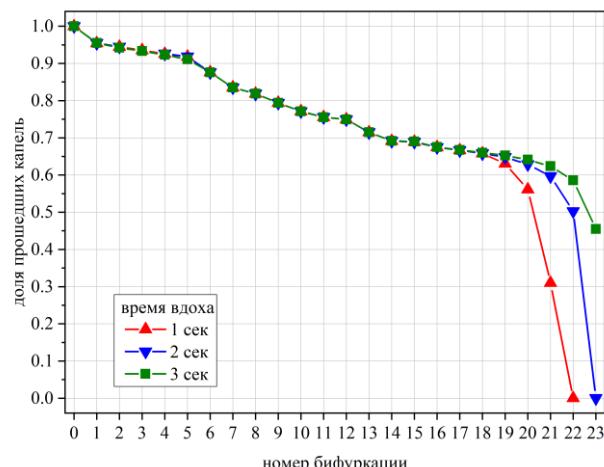


Рис. 1. Доля прошедших капель аэрозоли в зависимости от номера бифуркации. Показаны расчеты для трех длительностей вдоха: 1, 2 и 3 сек.

Видно, что для начальных бифуркаций характер оседания капель немонотонный. Начиная с 7-ой бифуркации характер оседания носит почти линейный характер. После 21-ой бифуркации капли не успевают за время вдоха долететь до альвеол. Для улучшения работы небулайзер необходимо увеличить время вдоха и/или уменьшить размер капель аэрозоля.

### Дыхание термической гелий-кислородной смесью

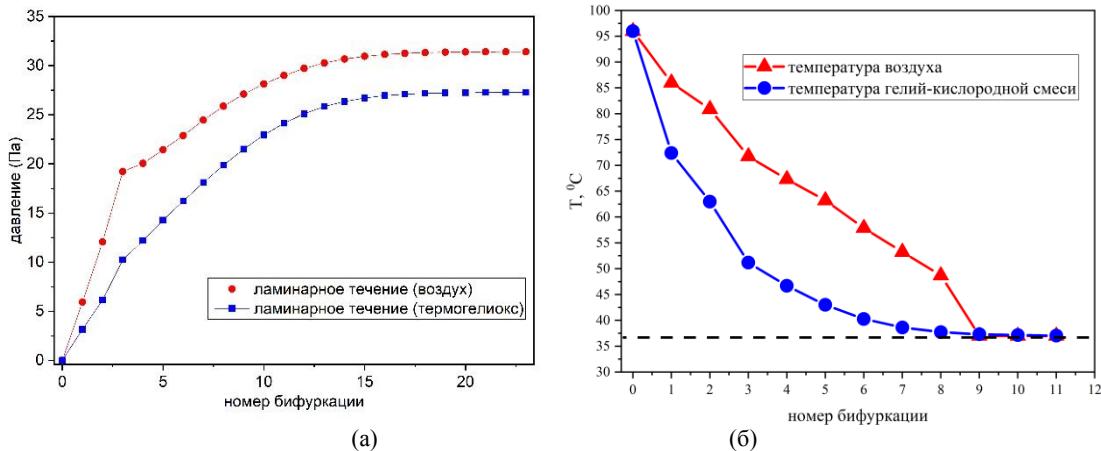
Вирус COVID-19 поражает органы дыхания человека и нет действенной методики лечения этой патологии. Новый способ лечения COVID-19 начали применять в российской клинике – Московском городском научно-исследовательском институте скорой помощи имени Н. В. Склифосовского. Для лечения тяжелобольных, находящихся на стадии вирусно-бактериальной пневмонии, применялась ингаляционная терапия нагретой до 75-96 С° гелий-кислородной смесью (термогелиокс). При этом продемонстрирован положительный эффект лечения у тяжелых больных COVID-19. Ингаляторная терапия термогелиоксом ранее применялась для лечения бронхиальной астмы. Для улучшения эффекта терапии термогелиоксом “требуются дальнейшее изучение проблемы и статистический анализ” [4].

Для проведения расчетов необходимо построить бронхиальное дерево человека с различными параметрами. На сегодняшний день в мире представлены различные модели, описывающие построение дерева, но при этом большая часть из них привязана к определенному пакету программ и не учитывает реальное сечение бронхов (настоящий бронх имеет в сечение далеко не окружность, он представлен звездообразной формой [2]).

Для численного исследования течения термогелиокса в легких человека использован алгоритм поэтапного расчета ламинарного течения в бронхах [5].

Были проведены расчеты течения воздуха и кислородно-гелиевой смеси в бронхиальном дереве человека при вдохе. На рис. 2(а) приведены результаты расчетов перепада давления в бронхиальном дереве человека в зависимости от номера бифуркации бронхов.

Гелий имеет, по сравнению с воздухом, большую в 4.5 раз тепло проводность (теплоемкость гелия в 2 раза больше теплоемкости воздуха). Поэтому при дыхании нагретой гелий-кислородной смесью не наблюдается ожог бронхов. Распределение температуры при дыхании нагретым до 95°C воздухом и гелий-кислородной смесью показано на рис. 2 (б).



**Рис. 2.** Сравнение дыхания воздухом и кислородно-гелиевой смесью термогелиокс: (а) перепад давления в легких при дыхании воздухом и термогелиоксом; (б) падение температуры в легких при дыхании воздухом и термогелиоксом.

Перепад давление при вдохе термогелиокса на 15% меньше, чем при вдохе воздухом, то есть больному требуется на 15% меньше тратить сил на дыхание термогелиоксом. Падение температуры в легких человека при дыхании гелий-кислородной смесью происходит значительно быстрее (по сравнению с воздухом) из-за малой теплоемкости гелия. Поэтому дыхание нагретым термогелиоксом не приводит к ожогам легких. Из расчетов видно, что падение температуры гелий-кислородной смеси происходит значительно быстрее, чем температуры нагретого воздуха. Охлаждение нагретых газов (воздуха и гелий-кислородной смеси) происходит в верхних отделах бронхов – после 9-ой бифуркации температура нагретых газов выравнивается с температурой тела человека. Таким образом, термических эффект нагретой гелий-кислородной смеси “работает” только в верхних участках бронхов и не достигает альвеол.

## Заключение

Проведены трехмерные численные расчеты течения воздуха, термической гелий-кислородной смеси и капель лекарственного аэрозоля в полном (вплоть до альвеол) бронхиальном дереве человека. Для расчета осаждения лекарственных аэрозолей необходим расчет до конечных альвеол легких человека, так как осаждение лекарственных аэрозолей происходит в основном до 21-ой или 22-ой бифуркации. Проведены расчеты дыхания нагретой гелий-кислородной смесью. Показано, что больному требуется на 15% меньше тратить сил на дыхание термической гелий-кислородной смесью (по сравнению с дыханием воздухом). Показано, что термический эффект (превышение температуры тела человека) нагретой гелий-кислородной смеси наблюдается только в верхнем отделе бронхов (до 9-ой бифуркации бронхов).

### **Список литературы**

1. Вейбель Э.Р. Морфометрия легких человека. М.: Медицина, 1970. 176 с. (Weibel E.R. Morphometry of the Human Lung. Berlin: Springer-Verlag. 1963.).)
2. Medvedev A.E., Gafurova P.S Analytical design of the human bronchial tree for healthy patients and patients with obstructive pulmonary diseases // Mathematical Biology and Bioinformatics. 2019. V. 14. No.2, P. 635–648
3. Medvedev A.E., Fomin V.M., Gafurova P.S. Simulation of the flow in the human bronchial tree // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2027. Issue 1. P. 040074-1 - 040074-11.
4. Шогенова Л.В., Варфоломеев С.Х. Влияние термической гелий-кислородной смеси на вирусную нагрузку при COVID-19 // Пульмонология, 2020. 30 (5). С 533-543.
5. Medvedev A.E., Fomin V.M., Gafurova P.S. Three-dimensional model of the human bronchial tree – modeling of the air flow in normal and pathological cases // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. Vol. 61. No. 1. P. 3–16.

### **Сведения об авторах:**

**Гафурова П.С.** – аспирант, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия. E-mail: [polina\\_g96@mail.ru](mailto:polina_g96@mail.ru)

**Медведев А.Е.** – д.ф.м.н., ведущий науч.сотр., Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия

# Высокоточное моделирование механизма шарнирного параллелограмма с упругим шатуном

Геворкян Г.А.

Недавние исследования некоторых общизвестных динамических систем, содержащих упругие звенья, выявили в режиме их реального функционирования периодичный характер во времени функций упругих перемещений. Это обстоятельство послужило побудительным мотивом к углубленному анализу деформированного состояния шатуна в процессе движения шарнирного параллелограмма. Специфической особенностью рассматриваемого случая движения является тот факт, что на этот раз малые упругие деформации сопровождаются не большими, а также малыми глобальными перемещениями жесткой совокупности механизма. Итоги численного моделирования подтверждают первоначально выдвинутую гипотезу о том, что при движении механизма по периодическому закону упругие перемещения составляющих его звеньев также носят периодический характер.

**1. Введение.** В последние десятилетия произошло интенсивное развитие динамического исследования механизмов с упругими звеньями [1 - 6]. Важным этапом прогресса в обсуждаемой области оказалось появление в динамике роботизированных систем классического метода Ньютона-Эйлера [1], или метода кинематического и динамического анализа без обращения матрицы масс, который впоследствии был распространен на случай упруго-деформируемых звеньев [2, 3]. Эта новая модификация метода Ньютона-Эйлера получила название *обобщенного метода Ньютона-Эйлера* [2 - 5].

Построению оптимальных смешанных стратегий исследования механизмов произвольной структурной топологии посвящаются актуальные исследования в области динамики упругих многозвездных систем. Статьей, резюмирующей теоретические наработки моделирования сложного класса упругих динамических систем, послужила публикация [6].

Здесь предполагается продолжить обсуждение поднятого в публикации [6] тезиса о том, что при анализе периодического движения механизмов, содержащих упругие звенья, функции упругих перемещений также являются периодическими функциями, только уже на примере не кривошино-ползунного, а четырехшарнирного механизма с упругим шатуном.

**2. Постановка задачи и первичное тестирование.** Рассматривается механизм шарнирного параллелограмма с упругим шатуном. Длины звеньев круглого поперечного сечения радиуса  $r = 3.0 \cdot 10^{-3}$  м принимаются равными:  $l_1 = l_3 = 0.1$  м и  $l_2 = 0.5$  м. Первое и третье звенья механизма полагаются абсолютно жесткими, а второе звено – линейно-упругим. Задаются также физико-механические характеристики звеньев:  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 7800 \text{ кг} / \text{м}^3$  и  $E_2 = 200 \text{ ГПа}$  [7].

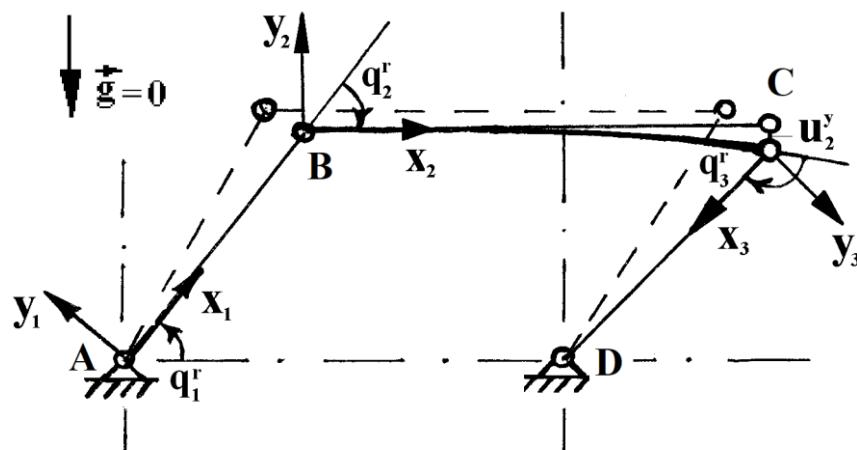


Рис. 1

Закон движения входного звена четырехшарнирника с упругим шатуном, показанного на рис. 1, задается следующей периодической функцией времени:

$$q_1^r(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{10} \sin 5t, \quad (1)$$

которая соответствует колебательному движению входного звена (кривошипа) относительно вертикальной оси в пределах малых угловых отклонений.

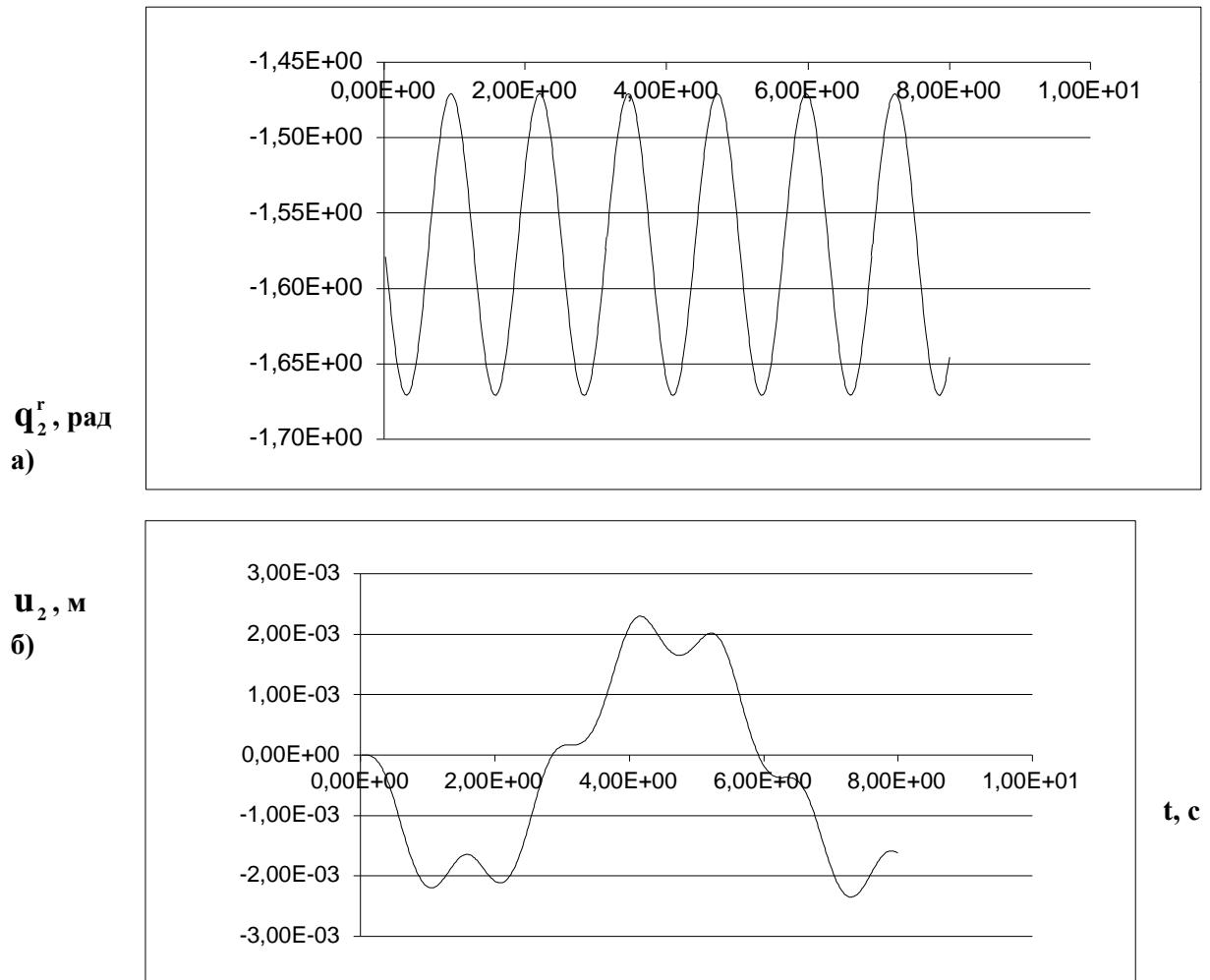


Рис. 2

Проведенное в публикации [7] тестирование с шагом численного интегрирования  $\Delta t = 10^{-3}$  с отражало весьма отдаленное изображение реальной зависимости упругого перемещения шатуна. Как видно из рис. 2 (а), высокоточное воспроизведение функций обобщенной координаты  $q_2^r$  и упругого перемещения  $u_2$  в интервале  $[0; 8]$  с при показателях численного интегрирования  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$  с и ТЕР=30мин показывает, что первая сохраняет период обращения обобщенной координаты (1), а именно:

$$T_q = \frac{2\pi}{5} = 1.256 \text{ с.} \quad (2)$$

В то же время, визуальная оценка повторяемости функции упругого перемещения на рис. 2, (б) сводится к тому, что

$$T_u \approx 6 \text{ с.} \quad (3)$$

**3. Вторичное тестирование задачи.** В целях более достоверного воспроизведения функции упругого перемещения шатуна осуществляется вторичное тестирование.

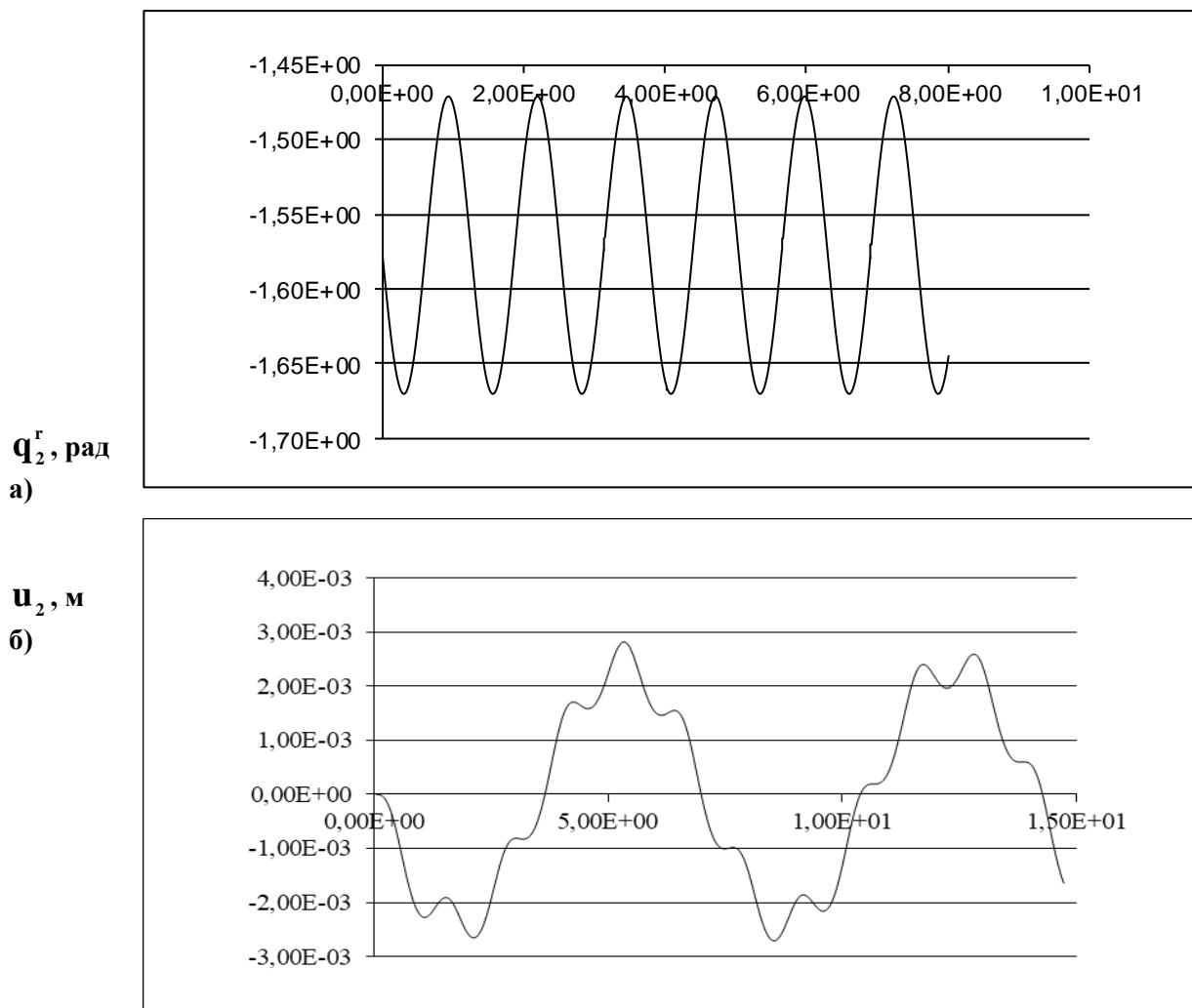


Рис. 3

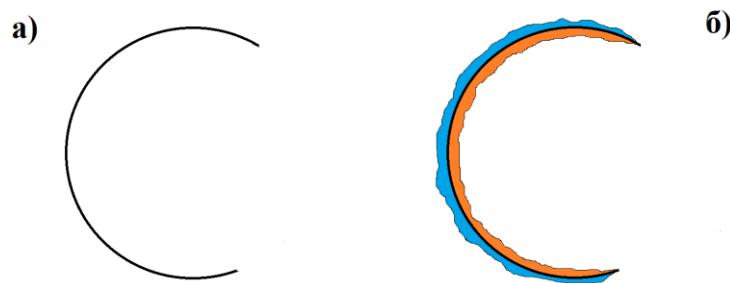


Рис. 4

На рис. 3 (а, б) показаны зависимости обобщенной координаты  $q_2^r$  и упругого перемещения  $u_2$  в интервале [0; 15 с] в результате тестирования той же задачи при шаге численного интегрирования  $\Delta t = 1.5 \cdot 10^{-4}$  с и при хронометрическом показании ТЕР=90мин. Как видно из графиков на рис. 3, с повышением точности и с увеличением интервала интегрирования нагляднее выявляется периодичность функции упругого перемещения с периодом

$$T_u = 5T_q = 6.28\text{с.} \quad (4)$$

**4. Обобщение понятия шатунной кривой к модели шатунного мениска.** При проектировании механизмов и машин важную роль играет понятие *шатунной кривой*, представляющей собой траекторию движения какой-либо точки шатуна исследуемого механизма. Так, например, в случае механизма шарнирного параллелограмма с недеформируемым шатуном (рис. 1) шатунная кривая точки С будет представлять собой дугу окружности радиуса  $R = CD$ . При значительном угле поворота кривошипа шатунная кривая принимает вид дуги окружности, показанной на рис. 4 (а). Когда же речь идет о том же механизме, только с упругим шатуном, то шатунная дуга обращается в *шатунный мениск*, представляющий собой не линию, а область, ограниченную контурами наибольших отклонений (рис. 4, б), вызванных деформациями, от принимаемой за нейтральную конфигурацию шатунной дуги вследствие  $k = T_u / T_q$  периодов обращения шарнирного параллелограмма.

**5. Заключение.** Проведенное прецизионное исследование периодического движения механизма шарнирного параллелограмма с упругим шатуном выявило периодичный характер функции упругого перемещения шатуна, причем период функции упругого перемещения кратен периоду обращения исследуемого механизма. Аналогичный результат был получен ранее при исследовании кривошипно-ползунного механизма с упругим шатуном. Полученные результаты позволили осуществить естественное обобщение понятия шатунной кривой к виду шатунного мениска.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Luh J.Y.S., Walker M.W. and Paul R. On –line computational sheme for mechanical manipulators // Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. –1980. – Vol. 74. – P. 251 – 269.
2. Boyer F. and Coiffet P. Generalization of Newton-Euler model for flexible manipulators // International Journal of Robotic Systems. – 1996. – Vol. 13, N1. – P. 11 – 24.
3. Boyer F. and Coiffet P. Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton-Euler model // International Journal Mechanism and Machine Theory. – 1996. – Vol. 31, N1. – P. 45 – 56.
4. Boyer F. and Khalil W. An effcient calculation of flexible manipulators inverse dynamics // International Journal of Robotics Research. – 1998. – Vol. 17, N3. – P. 282 – 293.
5. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.Т.Н. – 2004. – Т. 57, N1. – С. 3 – 10.
6. Геворкян Г.А. Моделирование упругих древовидных динамических систем при наличии внешних голономных связей // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2020. – N2 (89). – С. 4 – 24.
7. Геворкян Г.А. Динамическое моделирование механизма шарнирного четырехзвенника с упругим шатуном // Сб. тр. VIII межд. н. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 22 – 26, 2014, Горис – Степанакерт. – Ереван. – С. 143 – 147.

### Сведения об авторах:

**Геворкян Грант Ааратович,**  
научный сотрудник Института механики НАН РА, к.т.н,  
Ереван – 19, пр. Маршала Баграмяна 24Б, Институт Механики,  
тел. (374 10) 524 890 (раб.), (374 96) 390 315 (моб.),  
E -mail: [hrgevorkian@mail.ru](mailto:hrgevorkian@mail.ru)

# **Механика процесса разрываобразования Шоржинского землетрясения 05 февраля 2021г.**

**Геодакян Э.Г., Ли Ли, Карапетян Дж.К., Оганесян С.М., Саакян Б.В.**

На основе детального анализа инструментальных записей волновых картин распространения объемных сейсмических волн на сейсмических станциях, проведена оценка напряженно-деформационного состояния эпицентralной области, определено пространственное распределение действующих в очаге тектонических напряжений. Рассмотрена механика процесса разрываобразования, определены кинематические параметры и спектральные характеристики очагового излучения и, на их основе, разработана модель магистрального трещинообразования, представляющая собой одноактенный изолированный разрыв сплошности среды, с гладким скольжением берегов со сдвигом без отрыва. Определены динамические параметры этой модели. Согласно рассчитанному значению коэффициента Лоде-Нодай и ориентации нодальных плоскостей, а также главных осей сжимающих и растягивающих напряжений, выявлено, что в очаге подвижка по разрыву представляет собой правосторонний сдвиг. Полученные результаты позволили впервые построить наиболее реалистическую модель очага землетрясения и получить новую уточненную картину сейсмогенеза северо-восточной части территории Армении.

Возникающие в сейсмоактивных регионах сильные землетрясения дискретно отображают непрерывно протекающие в земной коре сложные геодинамические процессы, позволяют оценить напряженно-деформационное состояние и распределение тектонических напряжений в очаговых областях этих землетрясений.

К таким землетрясениям следует отнести также сильное землетрясение с магнитудой  $M = 5.0$ , произошедшее 05 февраля 2021г. на северо-восточном побережье озера Севан в дизюнктивном узле сочленения крупного регионального Памбак-Севан-Сюникского разлома, его юго-восточной Хонарасарской ветви и антикавказско направленного Аарат-Севанско глубинного разлома. Данное землетрясение является наиболее сильным после Спитакского землетрясения  $M_s = 7.0$  среди землетрясений, произошедших непосредственно на территории Армении. Это землетрясение было инструментально зарегистрировано более 148 сейсмическими станциями различных авторитетных мировых, региональных и республиканских сейсмологических агентств. Эпицентр землетрясения имеет географические координаты  $\phi = 40.52N^0$  северной широты,  $\lambda = 45.30E^0$  восточной долготы и расположен в непосредственной близости от населенного пункта Шоржа, в связи с чем получил название Шоржинского землетрясения.

В настоящей работе была поставлена цель, на основе анализа цифровых регистраций волновых картин распространения объемных сейсмических волн на более чем 40 сейсмических станциях, азимутально охватывающих со всех сторон очаг землетрясения, оценить напряженно-деформационное состояние очаговой области, определить кинематические, динамические характеристики спектрального излучения и, на их основе, выявить механическую модель разрываобразования очага.

Кинематические параметры разрываобразования были определены путем построения азимутального годографа распространения прямых продольных  $P$  волн, излучаемых из очага землетрясения [2]. На основе анализа волновых картин цифровых записей на каждом из этих сейсмических станций, окружающих эпицентр землетрясения, были выделены разности времен вступлений  $\tau = P_{max} - \bar{P}$  и построен график зависимости  $\Delta\tau$  от азимута (рис.1).

Анализ азимутального годографа показывает, что распространение  $P$  волн представляет собой одноактенный процесс с односторонней направленностью с юго-востока на северо-запад с азимутом  $310^0$  градусов и совпадает с ориентацией расположения Памбак-Севан-Сюникского глубинного разлома.

По количественным значениям азимутального годографа известными формулами (1) и (2)

$$l = \frac{v_p}{2} \cdot (\tau_{max} - \tau_{min}) \quad (1)$$

$$c = v_p \cdot \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{\tau_{max} + \tau_{min}} \quad (2)$$

были определены длина и скорость магистрального трещинообразования, численные значения которых приводятся таблице 1.

Спектральные характеристики очагового излучения, а также выделение их высокочастотных и низкочастотных составляющих, нами рассмотрены путем анализа волновых форм амплитудно-частотных спектров продольных  $P$  волн, зарегистрированных на сейсмических станциях “Кисловодск” и “Дигор”[1,5].

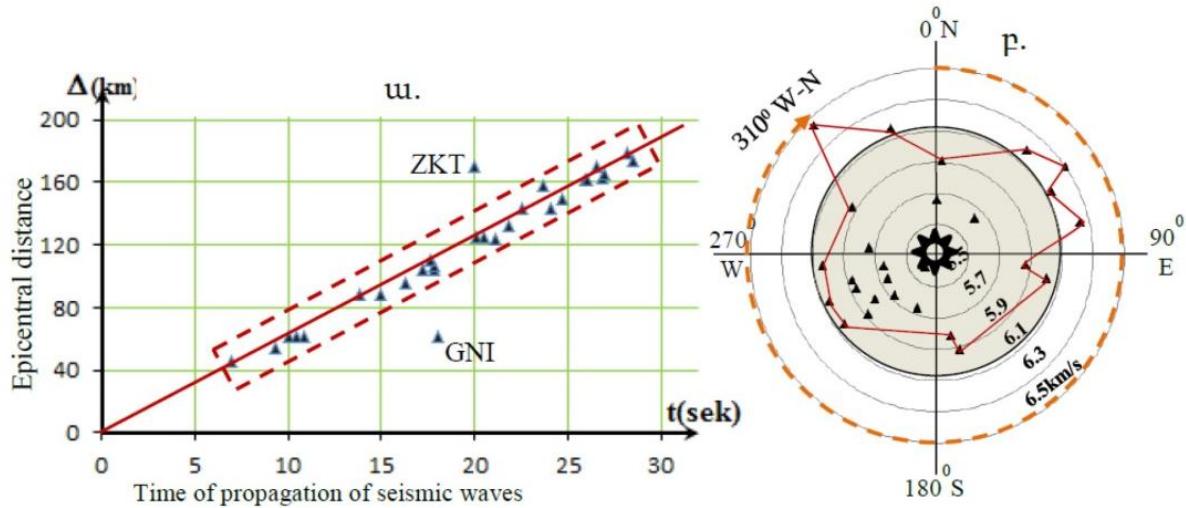


Рис.1 График азимутального годографа распространения сейсмических волн

Таблица 1

Кинематические параметры разрывообразования очага землетрясения

$v_p$ – скоростные интервалы распространения продольных волн	$6.1 \pm 0.5$ км/с
$\Phi_s$ – азимутальная ориентация разрывообразования	$\sim 310^0$
$\tau = \tau_{max} - \tau_{min}$ – длительность разрывообразования	$\sim 1.25$ с
$c$ – скорость разрывообразования	$\sim 4.2$ км/с
$l$ – длина магистрального разрыва	$\sim 5$ км

Выбор этих станций обусловлен теми обстоятельствами, что они азимутально расположены по направлению вытянутости скоростного годографа, а эпицентрические расстояния от очага землетрясения позволяют зарегистрировать весь состав спектра излучаемых объемных  $P$  волн (рис.2).

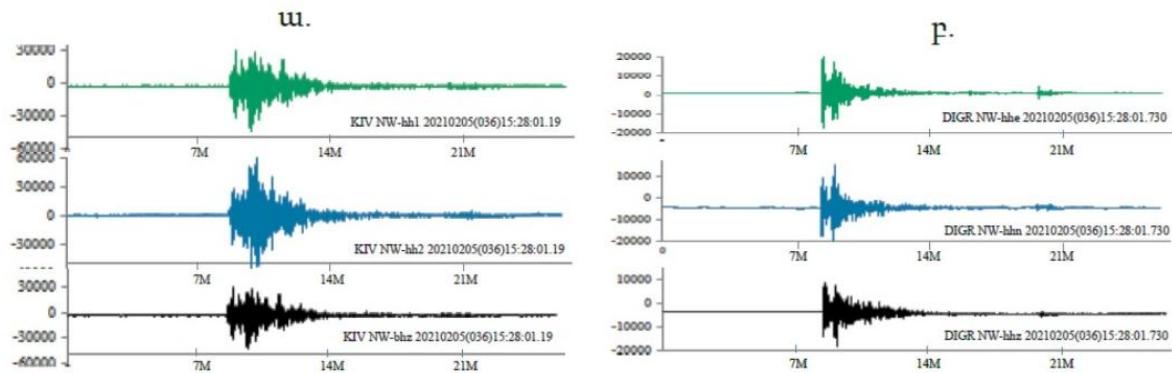


Рис.2 Цифровые записи Шоржинского землетрясения на станциях “Кисловодск” (KIV) и “Дигор” (DIGR)

Амплитудно-частотный спектр построен методом быстрого преобразования Фурье (БПФ) и представлен на рисунке 3. Анализ амплитудно-частотного спектра указывает, что угловая

частота  $f_0 = 1,2$  сек<sup>-1</sup>, четко разделяет высокочастотные и низкочастотные слагающие очагового излучения и аппроксимируется круговой дислокационной спектральной моделью очага Бруна [5]. Практический квазигоризонтальный амплитудный уровень длиннопериодного составляющего позволяет прямым способом определить значение скалярного сейсмического момента  $M_0 = 6,85 \cdot 10^{16}$  Н·м, и указывает, что в очаге имело место гладкое без зацепов скольжение берегов магистрального разрыва.

На основе кинематических и спектральных характеристик очаговых излучений разработана модель магистрального трещинообразования, представляющая собой одноактовый изолированный разрыв сплошности среды с гладким скольжением берегов со сдвигом без отрыва.

По расчетным формулам, приведенным в работах [3,5], количественно определены динамические параметры этой модели, численные значения которых представлены в таблице 2.

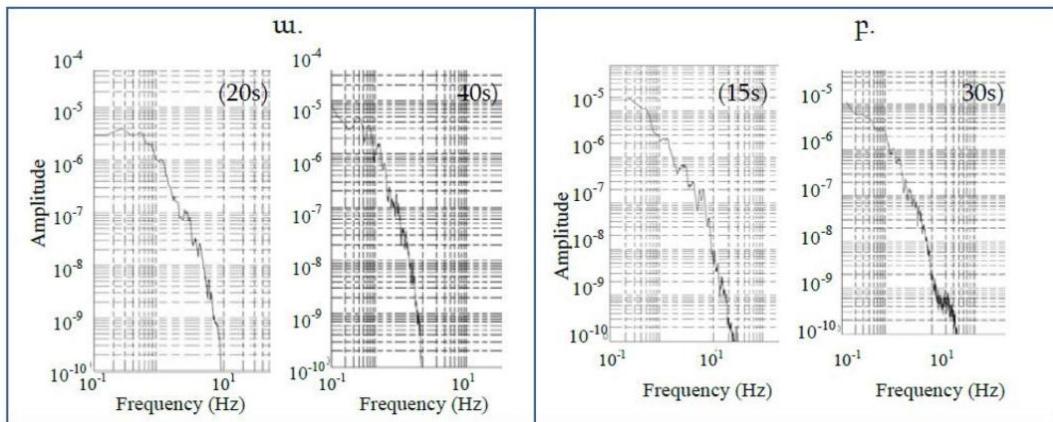


Рис.3 Спектры Фурье цифровых записей с/станций с продолжительностью  
а) KIV 20 и 40 сек., б) DIGOR 15 и 30 сек.

Таблица 2  
Динамические параметры разрываообразования очага землетрясения

$f_0$ (сек <sup>-1</sup> ) - пульсная угловая частота	$\Omega_0$ (см·сек) - спектральная плотность по ширине	$M_0(H\cdot m)$ - скалярный сейсмический момент	$L$ (км) - длина разрываообразования	$r_0$ (км) - референтный радиус	$\Delta\sigma$ (бар) - брошения напряжения	$\eta\bar{\sigma}$ (бар)-калибрация напряжения	$\bar{u}$ (см) - сейсмометрическая подвижка	$M_w$ - моментная магнитуда
1,2	$0,5 \cdot 10^{-6}$	$6,85 \cdot 10^{16}$	5,001	2,5	2,15	0,87	36	5,2

Оценка напряженно-деформационного состояния и действующих в очаге сжимающих и растягивающих тектонических напряжений произведена путем решения фокального механизма очага (рис.4). Определены действующие в очаге ориентации и углы падения двух нодальных плоскостей, а также ориентация главных осей сжимающих и растягивающих тектонических напряжений (таб.3).

Нодальные плоскости NP1 и NP2 соответственно совпадают с ориентациями Памбак-Севан-Сюникского и Арагат-Севанского глубинных разломов. В качестве реальной плоскости процесса формирования магистрального разрыва нами принята вторая нодальная плоскость NP2, которая совпадает как с направлением азимутального поля распространения скоростей сейсмических волн, так и с географическим положением Памбак-Севан-Сюникского разлома. Ориентации главных осей тектонических напряжений указывают, что в эпицентральной области действуют одноосно близгоризонтально направленные тектонические напряжения, а

сжимающие и растягивающие напряжения в очаге имеют соответственно близмеридиональное и близширотное распределение.

На основе тензорного анализа сейсмического момента определены главные диагональные составляющие  $M_1, M_2, M_3$  и по этим данным рассчитан коэффициент Лоде-Нодаи  $\mu_M = 0.15$ , указывающий, что в очаге подвижка по разрыву представляет собой правосторонний сдвиг[4].

**Таблица 3**

Основные параметры механизма очага землетрясения

	Осинаржжения( $^{\circ}$ )						Нодальныеплоскости( $^{\circ}$ )					
	Сжатие P		Нулевая N		Растяжение T		NP1			NP2		
	AZM	PL	AZM	PL	AZM	PL	STRK	DIP	SLIP	STRK	DIP	SLIP
IGES	160	10	50	65	250	35	205	70	15	295	80	165

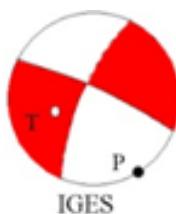


Рис.4 Стереограмма фокального механизма Шоржинского землетрясения

Полученные результаты позволили впервые построить наиболее реалистическую модель очага землетрясения и получить новую уточненную картину сейсмогенеза северо-восточной части территории Армении.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № АЧН-01/21.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянова В.Н. Энергетически-спектральный метод оценки сейсмической опасности. М.: Наука, 1985. 191с.
2. Горбунова И.В. Методика и некоторые результаты определения длины, скорости и направления распространения разрыва по волновой картине на сейсмограмме, АН СССР ИФЗ М., 1984, 98с.-Деп. в ВИНТИ 25.05.84 №3440-84.
3. Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. – М.: Наука, 1975. 176 с.
4. Юнга С.Л. Методы и результаты изучения сейсмотектонических деформаций. –М.:Наук, 1990.193с.
5. Brune J.N. Tectonic stress and the spectrum of Seismic shear waves from earthquake. J. Geophys.Res. 1970, 75, 26, p. 4997-5009.

### Сведения об авторах:

**Геодакян Эдуард Григорьевич** - к.ф.м.н., зав. лаб., Институт геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА (ИГИС НАН РА), (+37493) 51-31-23, geodakyan.e@mail.ru

**Карапетян Джон Костикович** - канд. геол. наук, директор и зав. лабораторией ИГИС НАН РА, (+374 94) 79-85-80, jon\_iges@mail.ru

**Оганесян Севада Мкртичевич** - член-корр. НАН РА, доктор физ-мат наук, сов. директора и зав. лабораторией ИГИС НАН РА, (+37493)42-04-43, iges@mail.ru

**Li Li** - Dr.; Professor, Deputy DG Institute of Geophysics, China Earthquake Administration (IGP, CEA), phone: + 86 138 1128 6306, Email: lilygrace@cea-igp.ac.cn;.

**Саакян Бабкен Вазгенович** - научный сотрудник ИГИС НАН РА, (+374 93) 62-66-53, sahakyan\_babken@mail.ru

# О методах численного расчета остаточных напряжений в функционально-градиентном материале

Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Стадник Н.Э.

Современное машиностроение и самолетостроения предъявляет повышенные требования к весу деталей и конструкций. Проблема облегчения деталей конструкций зачастую решается использованием функционально градиентных материалов (например, сплавов титана). С другой стороны возникают ситуации, когда необходимо быстро заменить детали таких конструкций. В этом случае, на помощь приходят методы аддитивного производства (лазерная печать расплавом металла, плазменное напыление). Современные методы аддитивного производства позволяют создавать изделия с большей экономической выгодой чем классические методы производства. Тем не менее, полученные аддитивным способом изделия и материалы, зачастую проявляют микроструктурные особенности и являются функционально градиентными материалами.

В работе предлагается реализация алгоритма расчета процесса необратимого деформирования материала в рамках теории температурных напряжений с учетом зависимости предела текучести от температуры в среде численного моделирования OpenFOAM. Рассмотрен пример решения трехмерной задачи о необратимом деформировании полого упругопластического цилиндра, подверженного нестационарному тепловому воздействию. Исследовано влияние скорости изменения теплового поля на формирование напряженно-деформированного состояния материала.

В настоящее время существует обширная литература по функционально-градиентным материалам, конструкциям и покрытиям, посвященная их свойствам, методам исследования и расчета, а также технологиям изготовления. Так из последних работ по функционально-градиентным материалам можно отметить статьи [1-5], где можно найти достаточно полные обзоры литературы. Различные аспекты изучения функционально-градиентных конструкций обсуждаются в работах [6-12], включая их механические свойства.

Рассмотрим алгоритм расчета компонент вектора перемещений и тензора температурных напряжений с учетом пластических свойств материала. Уравнения теории пластического течения и определяющие соотношения удобно использовать в скоростях искомых величин. С точки зрения численной реализации в среде OpenFOAM, скорости заменяются на приращения переменных — разницу между текущим значением, и значением, вычисленным на предыдущем временном. Здесь и далее символом  $\Delta$  будем обозначать приращение величины. Нижними индексами  $n$  и  $n-1$ , обозначаются значения, вычисляемые на текущем временном шаге и известные значения, вычисленные на предыдущем временном шаге соответственно. Алгоритм расчета представляется последовательностью следующих шагов:

1. В начале каждого  $n$ -цикла вычислений при помощи численного решения уравнения теплопроводности, записанного в приращениях, рассчитывается поле приращений температуры  $\Delta T_n$  и определяется распределение температуры на текущем временном шаге:  $T_n = \Delta T_n + T_{n-1}$ .

2. По известному полю приращений температуры производится расчет приращений вектора перемещений  $\Delta u_n$  и полных деформаций  $\Delta d_n$  путем решения системы уравнений равновесия, в которых значения приращений компонент тензора необратимых деформаций  $\Delta p_{n-1}$  — значения, вычисленные на предыдущем временном шаге:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \mu [\nabla \otimes (\Delta u_n) + (\Delta u_{n-1}) \otimes \nabla - 2\Delta p_{n-1}] + \\ & + \nabla \cdot \lambda \{ tr[\nabla \otimes (\Delta u_{n-1})] - tr(\Delta p_{n-1}) \} - \alpha(3\lambda + 2\mu) \nabla (\Delta T_n) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

3. Производится вычисление компонент вектора перемещений и тензора деформаций на текущем временном шаге:  $u_n = \Delta u_n + u_{n-1}$ ,  $d_n = \Delta d_n + d_{n-1}$ .

4. Производится расчет приращений возможных напряжений  $\Delta s^*$  в предположении отсутствия процесса необратимого деформирования. Здесь и далее индексом (\*) обозначается возможное значение искомой величины, которое в процессе реализация алгоритма используется в качестве промежуточного или конечного результата на текущем временном шаге:

$$\Delta s^* = 2\mu \Delta d_n + [\lambda tr(\Delta d_n) - \alpha(3\lambda + 2\mu) \Delta T_n] I \quad (2)$$

5. Вычисляются возможные напряжения  $s^* = \Delta s^* + s_{n-1}$ .

6. Выполняется проверка условия пластичности в каждой ячейке, соответствующей контрольному объему:

(а) Если  $F(s^*) < 0$  (отсутствие пластического течения в данной точке среды), то для соответствующих ячеек выполняется запись компонент напряжений и пластических деформаций

$$s_n = s^*, \quad \Delta p_n = 0, \quad p_n = p_{n-1} \quad (3)$$

(б) Если  $F(s^*) < 0$ , то для заданных ячеек реализуется алгоритм "радиального возврата" (radial return) вектора напряжений на поверхность текучести. Компоненты тензора напряжений вычисляются при помощи корректировки девиатора возможных напряжений, полученных на шаге 5. Умножение девиаторной части на корректирующий множитель  $m$  приводит к выполнению условия пластичности.

$$\sigma_n = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(s^*) I + m t^*, \quad m = \sqrt{\frac{3k^2(T_n)}{8(t^*:t^*)}} \quad (4)$$

(с) Последовательно вычисляются приращения напряжений, упругих и пластических деформаций.

$$\Delta s_n = s_n - s_{n-1}, \quad \Delta e_n = \frac{\operatorname{tr}(\Delta s_n) I}{3(3\lambda + 2\mu)} + \frac{1}{2\mu} \Delta t_n + \alpha \Delta T \quad (5)$$

$$\Delta p_n = \Delta d_n - \Delta e_n, \quad p_n = \Delta p_n + p_{n-1} \quad (6)$$

7. Значения  $\Delta p_n$  используются для вычисления вектора перемещений на следующем временном шаге.

#### 4. Границные условия

Границные условия в задачах термопластичности, как правило, бывают двух видов — заданные нулевые перемещения (условие фиксированной поверхности) и заданные нулевые напряжения (условие свободно расширяющейся поверхности). Чтобы исключить влияние внешнего воздействия на формирование напряженно-деформированного состояния материала при неравномерном тепловом расширении, будем полагать, что границы исследуемого объекта свободны от нагрузок и на внешних поверхностях граничных контрольных объемов заданы условия свободного теплового расширения:

$$ds \cdot N = 0 \quad (7)$$

где  $N$  — вектор нормали внешней поверхности граничного контрольного объема.

С точки зрения численной реализации, граничные условия (3) представляют из себя систему трех уравнений, содержащих приращения перемещений и их производных в каждой ячейке, соответствующей контрольному объему на границе тела. В среде OpenFOAM такие граничные условия реализованы при помощи задания градиента искомых величин на поверхности. Выражая градиент перемещений из условия (3), получим:

$$\nabla \Delta u_n \cdot N = (2\mu \Delta p_{n-1} - \lambda \operatorname{tr}(\Delta e_{n-1}) + \alpha(3\lambda + 2\mu) \Delta T_n) \cdot \frac{N}{2\mu} \quad (8)$$

Данные уравнения решаются на втором шаге алгоритма совместно с системой уравнений равновесия.

При численном исследовании задач важную роль играют искусственные граничные условия, которые связаны с симметрией напряженно деформированного состояния. Использование свойств симметрии постановки краевой задачи позволяет существенно уменьшить расчетную область и, очевидно, время расчета. Эти условия следуют из инвариантности системы уравнений относительно простых преобразований, переводящих искусственные границы (например, плоскости симметрии) в себя. Для цилиндра со свободными боковыми поверхностями, центр оси которого совпадает с центром декартовой системы координат, удобно рассчитывать его одну восьмую часть ( $X > 0, Y > 0, Z > 0$ ), полагая, что координатные плоскости служат плоскостями симметрии. В таком случае для проекций цилиндра на данные плоскости справедливы условия симметрии:

$$u \cdot M = 0, \quad (9)$$

где  $M$  — вектор нормали к плоскости симметрии.

В среде OpenFOAM данные условия являются стандартными и реализуются стандартной процедурой "SYMMETRY".

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации AAAA-A20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (19-51-60001, 20-01-00666).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Udupa G., Rao S.S., Gangadharan K.V. Functionally graded composite materials: An overview // Procedia Materials Science. 2014. Vol. 5. P. 1291–1299. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.07.442.
2. Naebe M. Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Applied Material Today. 2016. Vol. 5. 223–245. DOI: 10.1016/j.apmt.2016.10.001.
3. Mahmoud D., Elbestawi M.A. Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: A review // Journal of Manufacturing and Materials Processing. 2017. Vol. 1. Iss. 2. P. 13. DOI: 10.3390/jmmp1020013.
4. Bhavar V., Kattire P., Thakare S., Patil Sachin, Singh R.K.P. A review on functionally gradient materials (FGMs) and their applications // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 229. P. 012021.
5. Toudehdehghan A., Lim J.W., Foo K.E., Ma'arof M.I.N, Mathews J. A brief review of functionally graded materials // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 131. P. 03010. DOI: 10.1051/matecconf/201713103010.
6. Scheithauer U., Weingarten S., Johne R., Schwarzer E., Abel J., Richter H.J., Moritz T., Michaelis A. Ceramic-based 4D components: additive manufacturing (AM) of ceramic-based functionally graded materials (FGM) by thermoplastic 3D printing (T3DP) // Materials (Basel). 2017. Vol. 10. Iss. 12. E1368. DOI: 10.3390/ma10121368.
7. Burlayenko V.N., Altenbach H., Sadowski T., Dimitrova S.D., Bhaskar A. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements // Applied Mathematical Modelling. 2017. Vol. 45. P. 422–438. DOI: 10.1016/j.apm.2017.01.005.
8. Craveiro F., Bártoł H., Bártoł P.J. Functionally graded structures through building manufacturing // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 683. P. 775–778. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.683.775.
9. Tounsi A., Bedia E.A.A., Mahmoud S.R., Amziane S. Mathematical modeling and optimization of functionally graded structures // Mathematical Problems in Engineering. 2013. Vol. 2013. P. 536867. DOI: 10.1155/2013/536867.
10. Gupta A., Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Progress in Aerospace Sciences. 2015. Vol. 79. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.paerosci.2015.07.001.
11. Deng Q.-T., Yang Z.-C. Effect of poisson's ratio on functionally graded cellular structures // Materials Express. 2016. Vol. 6. Iss. 6. P. 461–472. DOI: 10.1166/mex.2016.1341.
12. Pang T., Kang H., Yan X., Sun G., Li Q. Crashworthiness design of functionally graded structures with variable diameters // International Journal of Crashworthiness. 2017. Vol. 22. Iss. 2. P. 148–162. DOI: 10.1080/13588265.2016.1242548.

### Information about authors

Дац Е. П. – к. ф.-м. н., доцент, Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток.

Мурашкин Е. В. – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва.

Стадник Н.Э. – младший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва.

## О задаче идентификации переменных свойств неоднородного цилиндра

Дударев В.В., Мнухин Р.М.

Рассмотрены две задачи об установившихся продольно-радиальных и крутильных колебаниях полого цилиндра, изготовленного из функционально-градиентного материала. Параметры Ламе и плотность являются переменными по радиальной координате. Решения обеих задач сведены к численному решению систем дифференциальных уравнений первого порядка. Сформулирована новая обратная коэффициентная задача об определении трех законов изменения переменных свойств цилиндра по данным об амплитудно-частотных характеристиках, измеренных на его поверхности. На основе общей слабой постановки для упругого неоднородного тела, используя метод линеаризации, получена система интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно трех неизвестных поправок. Численное решение обратной задачи построено с помощью трехэтапного итерационного процесса с использованием метода регуляризации Тихонова. Представлен пример реконструкции монотонных законов.

1. В качестве объекта исследования рассмотрим упругий функционально-градиентный полый цилиндр. Его свойства описываются переменными параметрами Ламе ( $\lambda, \mu$ ) и плотностью  $\rho$ , изменяющимися только по радиальной координате. На торцевых поверхностях реализованы условия скользящей заделки, на внешней боковой поверхности действует распределенная по четному закону нагрузка. Используя метод разделения переменных, решение прямой задачи можно построить в виде рядов и свести к численному решению систем дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} u'_0 = \frac{s_{10} - \tilde{\lambda} \left( \frac{u_0}{\xi} \right)}{\tilde{\lambda} + 2c^* \tilde{\mu}} \\ s'_{10} = - \left( \frac{s_{10} - s_{30}}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho} u_0 \right), \\ s_{10}(\xi_0) = 0 \\ s_{10}(1) = -p_0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'_k = \frac{s_{1k} - \tilde{\lambda} \left( \frac{u_k}{\xi} + \beta_k w_k \right)}{\tilde{\lambda} + 2c^* \tilde{\mu}} \\ w'_k = \frac{s_{2k}}{c^* \tilde{\mu}} + \beta_k u_k \\ s'_{1k} = - \left( \beta_k s_{2k} + \frac{s_{1k} - s_{3k}}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho} u_k \right), k = 1, 2, \dots \\ s'_{2k} = - \left( \beta_k s_{4k} + \frac{s_{2k}}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho} w_k \right) \\ s_{1k}(\xi_0) = 0, s_{2k}(\xi_0) = 0 \\ s_{1k}(1) = -p_k, s_{2k}(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $u_r(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_2 u_k(\xi) \cos(\nu_k z)$ ,  $u_z(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_2 w_k(\xi) \sin(\nu_k z)$  – ненулевые компоненты

вектора смещения,  $\nu_k = \pi k / h$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $p(z) = -p^0 q(z)$ ,  $p^0$  – амплитуда нагрузки,

$q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cos(\nu_k z)$  – представление для закона изменения нагрузки,  $P_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q(z) dz$ ,

$P_k = \frac{1}{h} \int_{-h}^h q(z) \cos(\nu_k z) dz$ ,  $\sigma_{rr}(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^* s_{1k}(\xi) \cos(\nu_k z)$ ,  $\sigma_{zz}(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^* s_{2k}(\xi) \sin(\nu_k z)$ ,

$\sigma_{\varphi\varphi}(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^* s_{3k}(\xi) \cos(\nu_k z)$ ,  $\sigma_{zz}(r, z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^* s_{4k}(\xi) \cos(\nu_k z)$  – ненулевые компоненты

тензора напряжений,  $r = r_2 \xi$ ,  $\xi \in [\xi_0, 1]$ ,  $\xi_0 = r_1 / r_2$ ,  $\beta_k = r_2 \nu_k$ ,  $p_k = p^0 P_k / \lambda^*$ ,

$\lambda(r) = \lambda^* \tilde{\lambda}(\xi)$ ,  $\mu(r) = \mu^* \tilde{\mu}(\xi)$ ,  $\rho(r) = \rho^* \tilde{\rho}(\xi)$ ,  $c^* = \mu^* / \lambda^*$ ,  $\kappa^2 = \rho^* \omega^2 r_2^2 / \lambda^*$ , функции

$s_{3k}(\xi)$  и  $s_{4k}(\xi)$  определяются по правилам

$$s_{3k} = \left( \tilde{\lambda} + 2c^* \tilde{\mu} \right) \frac{u_k}{\xi} + \tilde{\lambda} \beta_k w_k + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2c^* \tilde{\mu}} \left( s_{1k} - \tilde{\lambda} \left( \frac{u_k}{\xi} + \beta_k w_k \right) \right),$$

$$s_{4k} = - \left( \left( \tilde{\lambda} + 2c^* \tilde{\mu} \right) \beta_k w_k + \tilde{\lambda} \frac{u_k}{\xi} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2c^* \tilde{\mu}} \left( s_{1k} - \tilde{\lambda} \left( \frac{u_k}{\xi} + \beta_k w_k \right) \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Решение каждой из краевых задач (1.1) для функций  $u_k$ ,  $w_k$ ,  $s_{1k}$ ,  $s_{2k}$  может быть построено с помощью метода пристрелки. Основные преимущества этого численного решения и анализ влияния различных законов изменения параметров Ламе на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) описаны в работе [1].

Используя аналогичный подход, описанный в статье [2], решение прямой задачи о крутильных колебаниях функционально-градиентного цилиндра с переменными параметрами  $\mu$  и  $\rho$  может быть сведено к численному решению безразмерной системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} T'(\xi) = - \left( \frac{2T(\xi)}{\xi} + \kappa^2 \tilde{\rho}(\xi) u(\xi) \right), & u'(\xi) = \frac{T(\xi)}{c^* \tilde{\mu}(\xi)} + \frac{u(\xi)}{\xi}, \\ u(\xi_0) = 0, & T(1) = p^* \end{cases} \quad (1.2)$$

где введены обозначения  $u_\varphi(r) = r_2 u(\xi)$ ,  $\sigma_{r\varphi}(r) = \lambda^* T(\xi)$ ,  $p^* = \tilde{P}/\lambda^*$ . Решение этой задачи в общем случае переменности свойств цилиндра также может быть получено только численно, например, с помощью метода пристрелки.

2. Рассмотрим задачу об определении переменных параметров Ламе и плотности упругого полого изотропного функционально-градиентного цилиндра по данным об изменении АЧХ  $f(\omega)$ , измеренных на внешней поверхности  $S_\sigma$  в различных частотных диапазонах. Существенным отличием этой обратной коэффициентной задачи от прямой является ее нелинейность, т.к. неизвестными являются компоненты вектора смещения  $\underline{u}$ , параметры Ламе ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) и плотность  $\rho$ . Одним из эффективных методов решения таких задач является метод линеаризации.

Следуя подходу, описанному в работе [3], на основе общей слабой постановки задачи и, используя метод линеаризации, можно получить соотношение

$$\int_V \left[ \lambda^{(n)} \left[ \text{tr} \left( \underline{\underline{\varepsilon}} \left( \underline{\underline{u}}^{(n-1)} \right) \right) \right]^2 + 2\mu^{(n)} \left( \underline{\underline{\varepsilon}} \left( \underline{\underline{u}}^{(n-1)} \right) \right)^2 \right] dv - \omega^2 \int_V \rho^{(n)} \left( \underline{\underline{u}}^{(n-1)} \right)^2 dv =$$

$$= - \int_{S_\sigma} P \left( f - \underline{\underline{u}}^{(n-1)} \right) dS_\sigma, \quad \omega \in [\omega^-, \omega^+] \quad (2.1)$$

Оно устанавливает связь неизвестных поправок  $\lambda^{(n)}$ ,  $\mu^{(n)}$ ,  $\rho^{(n)}$  с соответствующими приближениями  $\lambda^{(n-1)}$ ,  $\mu^{(n-1)}$ ,  $\rho^{(n-1)}$  и заданным вектором  $f(\omega)$ . Вектор  $\underline{\underline{u}}^{(n-1)}$  определяется из решения прямой задачи, соответствующего этим приближениям. Соотношение (2.1) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно  $\lambda^{(n)}$ ,  $\mu^{(n)}$ ,  $-\rho^{(n)}$ . Из его структуры видно, что ядра этого уравнения являются неотрицательными. Следует отметить, что решение ИУФ 1-го рода является некорректной задачей, поэтому при построении обратного оператора необходимо использовать специальные методы, например, метод регуляризации Тихонова [4]. С помощью полученного соотношения можно построить итерационный процесс для нахождения искомых законов изменения  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  по данным об АЧХ  $f(\omega)$ , снимаемых на части поверхности  $S_\sigma$  в некоторых частотных диапазонах. Следует отметить, что для восстановления сразу трех неизвестных функций можно

рассмотреть задачи, отличающиеся режимом нагружения [3]. В этом случае будет получена система ИУФ 1-го рода с гладкими ядрами. В частности, для рассмотренной задачи о продольно-радиальных колебаниях цилиндра (1.1) соотношение (2.1) для введенных безразмерных величин примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^1 \left( \tilde{\lambda}^{(n)}(\xi) K_{10}(\xi, \kappa) + \tilde{\mu}^{(n)}(\xi) K_{20}(\xi, \kappa) - \tilde{\rho}^{(n)}(\xi) K_{30}(\xi, \kappa) \right) \xi d\xi = \\ &= p_0 \left( \tilde{f}_0(1, \kappa) - u_0^{(n-1)}(1, \kappa) \right), \kappa \in [\kappa_0^-, \kappa_0^+] \\ & \int_{\xi_0}^1 \left( \tilde{\lambda}^{(n)}(\xi) K_{1k}(\xi, \kappa) + \tilde{\mu}^{(n)}(\xi) K_{2k}(\xi, \kappa) - \tilde{\rho}^{(n)}(\xi) K_{3k}(\xi, \kappa) \right) \xi d\xi = \\ &= p_k \left( \tilde{f}_k(1, \kappa) - u_k^{(n-1)}(1, \kappa) \right), k = 1, 2, \dots, \kappa \in [\kappa_k^-, \kappa_k^+] \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\tilde{f}_k(1, \kappa) = f_k(r_2, \omega) / r_2 = u_k(1, \kappa)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  – данные об АЧХ,

$$\begin{aligned} K_{10}(\xi, \kappa) &= \left( u_0^{(n-1)\prime}(\xi, \kappa) + u_0^{(n-1)}(\xi, \kappa) / \xi \right)^2, \\ K_{20}(\xi, \kappa) &= 2c^* \left( \left( u_0^{(n-1)\prime}(\xi, \kappa) \right)^2 + \left( u_0^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2 / \xi^2 \right), K_{30}(\xi, \kappa) = \kappa^2 \left( u_0^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2, \\ K_{1k}(\xi, \kappa) &= \left( u_k^{(n-1)\prime}(\xi, \kappa) + u_k^{(n-1)}(\xi, \kappa) / \xi + \beta_k w_k^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2, \\ K_{2k}(\xi, \kappa) &= 2c^* \left( \left( u_k^{(n-1)\prime}(\xi, \kappa) \right)^2 + 0.5 \left( w_k^{(n-1)\prime}(\xi, \kappa) - \beta_k u_k^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( u_k^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2 / \xi^2 + \left( \beta_k w_k^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2 \right), \\ K_{3k}(\xi, \kappa) &= \kappa^2 \left( \left( u_k^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2 + \left( w_k^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для задачи о крутильных колебаниях цилиндра

$$\int_{\xi_0}^1 \left( \tilde{\mu}^{(n)}(\xi) G_1(\xi, \kappa) - \tilde{\rho}^{(n)}(\xi) G_2(\xi, \kappa) \right) \xi d\xi = p^* (\tilde{f}(1, \kappa) - u^{(n-1)}(1, \kappa)), \quad \kappa \in [\kappa^-, \kappa^+] \quad (2.4)$$

где  $\tilde{f}(1, \kappa) = f(r_2, \omega) / r_2 = u(1, \kappa)$  – данные об АЧХ,

$$G_1(\xi, \kappa) = c^* \left( u^{(n-1)\prime}(\xi, \kappa) - u^{(n-1)}(\xi, \kappa) / \xi \right)^2, G_2(\xi, \kappa) = \kappa^2 \left( u^{(n-1)}(\xi, \kappa) \right)^2 \quad (2.5)$$

Начальные приближения при реализации итерационного процесса можно задавать в классе линейных функций, коэффициенты которых определяются на основе данных о значениях свойств материала на внешней и внутренней границах. Следует отметить, что решение задачи об определении одновременно сразу трех поправок  $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$ ,  $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$  и  $\tilde{\rho}^{(n)}(\xi)$  может быть получено на основе любых трех интегральных уравнений из (2.2), (2.4). Однако, практическая реализация такой процедуры реконструкции осложнена в силу особенностей значений неотрицательных ядер (2.2). Расчеты показывают, что ядра при поправках  $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$  и  $\tilde{\rho}^{(n)}(\xi)$  значительно больше, чем при  $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$ , а значения коэффициентов  $p_k$ , стоящих в правых частях ИУФ (2.2), убывают для рассмотренного закона нагружения. Поэтому предлагается трехэтапный итерационный процесс реконструкции искомых законов. На первом этапе идентификации считалось, что поправки  $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$  и  $\tilde{\rho}^{(n)}(\xi)$  равны нулю, что означало равенство соответствующих

параметров материала выбранному начальному приближению. С учетом этого допущения на каждой итерации определяются поправки  $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$  как решение интегрального уравнения (2.4). На втором этапе фиксируется найденная функция  $\tilde{\mu}(\xi)$ , а поправки  $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$  и  $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$  принимаются равными нулю. Далее на каждой последующей итерации аналогично определяются поправки  $\tilde{\rho}^{(n)}(\xi)$  как решение первого из интегральных уравнений (2.2) (задача при  $k=0$ ). На последнем этапе фиксируются найденные ранее функции  $\tilde{\mu}(\xi)$  и  $\tilde{\rho}(\xi)$ , а поправки  $\tilde{\mu}^{(n)}(\xi)$  и  $\tilde{\rho}^{(n)}(\xi)$  принимаются равными нулю, и определяются поправки  $\tilde{\lambda}^{(n)}(\xi)$  из решения второго из интегральных уравнений (2.2) (задача при  $k=1$ ). На каждом этапе выход из итерационного процесса осуществляется по условию достижения максимального наперед заданного количества итераций  $N$  или малости правой части любого из интегральных уравнений (2.2) или (2.4).

3. В качестве конкретного примера рассмотрен функционально-градиентный цилиндр со следующими геометрическими характеристиками:  $h=0.5$  м,  $r_1=0.8$  м,  $r_2=1.0$  м ( $\xi_0=0.8$ ). Функция  $q(z)=1-(z/h)^2$ , параметр  $p^0=p^*=10^{11}$  Па. В качестве материала цилиндра рассмотрим медь-карбид вольфрама (Cu-WC). Внутренняя часть цилиндра ( $\xi=\xi_0$ ) изготовлена из меди: модуль Юнга меди  $E_{Cu}=1.1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона меди  $\nu_{Cu}=0.35$ . Внешняя часть ( $\xi=1$ ) изготовлена из карбида вольфрама: модуль Юнга карбида вольфрама  $E_{WC}=7.1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона карбида вольфрама  $\nu_{WC}=0.2$ . В качестве характерных значений параметров Ламе и плотности примем следующие  $\lambda^*=\mu^*=10^{11}$  Па,  $\rho^*=10^3$  кг/м<sup>3</sup>, тогда  $\tilde{\lambda}_{Cu}=0.95$ ,  $\tilde{\mu}_{Cu}=0.41$ ,  $\tilde{\rho}_{Cu}=0.89$  и, аналогично, для карбида вольфрама  $\tilde{\lambda}_{WC}=1.97$ ,  $\tilde{\mu}_{WC}=2.96$ ,  $\tilde{\rho}_{WC}=1.577$ . На рисунке 1 представлены графики начальных приближений  $\tilde{\lambda}_0(\xi)=5.11\xi-3.13$ ,  $\tilde{\mu}_0(\xi)=12.75\xi-9.8$ ,  $\tilde{\rho}_0(\xi)=3.43\xi-1.86$  (точки), точных монотонно возрастающих законов  $\tilde{\lambda}_e(\xi)=2-\exp(-18.15\xi+14.57)$ ,  $\tilde{\mu}_e(\xi)=2.96-63.77(\xi-1)^2$ ,  $\tilde{\rho}_e(\xi)=0.88+\exp(25\xi-25.36)$  (сплошные линии) и регуляризованных решений  $\tilde{\lambda}_*(\xi)$ ,  $\tilde{\mu}_*(\xi)$ ,  $\tilde{\rho}_*(\xi)$  (штрих-пунктирные линии), найденных согласно предложенному трехэтапному итерационному процессу. Точные законы выбраны так, чтобы они принимали значения безразмерных параметров меди ( $\tilde{\lambda}_{Cu}$ ,  $\tilde{\mu}_{Cu}$ ,  $\tilde{\rho}_{Cu}$ ) на внутренней границе и карбида вольфрама ( $\tilde{\lambda}_{WC}$ ,  $\tilde{\mu}_{WC}$ ,  $\tilde{\rho}_{WC}$ ) на внешней границе для возрастающих законов и, наоборот, для убывающих. Потребовалось 10 итераций. Максимальная относительная погрешность реконструкции  $\tilde{\lambda}(\xi)$  определяется по правилу

$$\delta(\xi_i)=\frac{|\tilde{\lambda}_*(\xi_i)-\tilde{\lambda}_e(\xi_i)|}{\max_{\xi \in [\xi_0,1]} \tilde{\lambda}_e(\xi)} \cdot 100\%, \quad \xi_i \in [\xi_0,1] \text{ и, аналогично, для других характеристик.}$$

Величина  $\delta$  не превышает 3.4% для функции  $\tilde{\lambda}(\xi)$ , 1.8% для функции  $\tilde{\mu}(\xi)$  и 3.2% для функции  $\tilde{\rho}(\xi)$ . Частотный диапазон для реконструкции  $\tilde{\lambda}(\xi)$  –  $\kappa \in [4.5, 18.5]$ , для реконструкции  $\tilde{\mu}(\xi)$  –  $\kappa \in [10, 21]$  и для реконструкции  $\tilde{\rho}(\xi)$  –  $\kappa \in [7.5, 30.5]$ .

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (соглашение № 075-15-2019-1928).

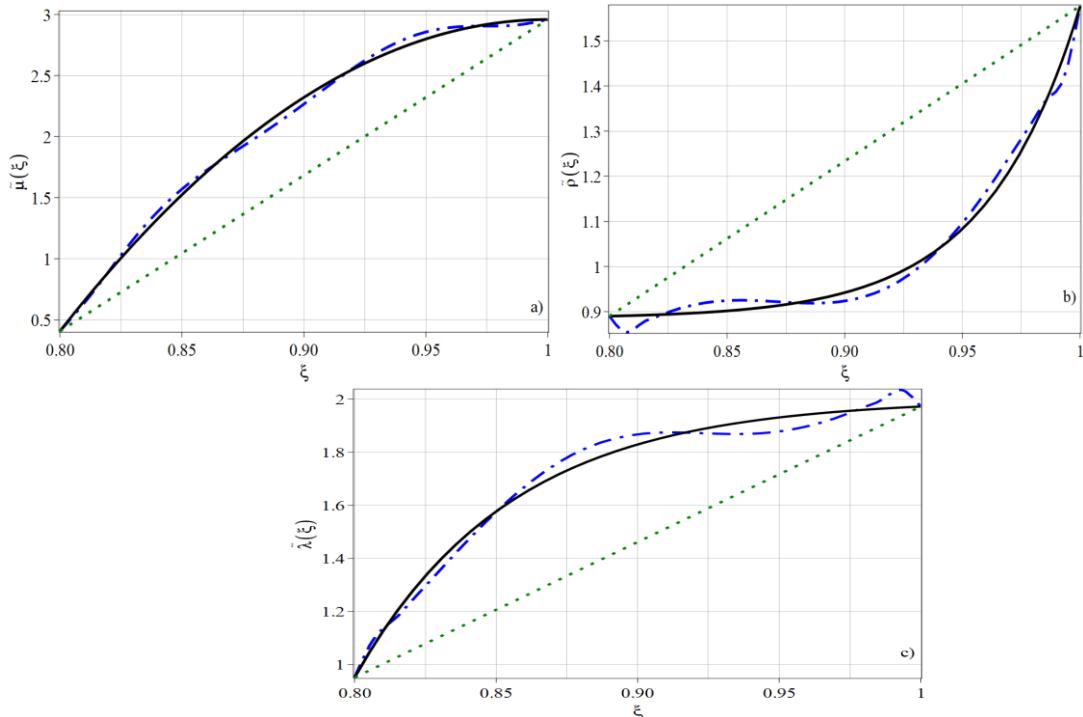


Рисунок 1 – Реконструкция монотонно возрастающих законов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // Appl. Math. Comput. 2020. V. 382. Article number 125333.
2. Bogachev I.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O., Yavruyan O.V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // Z. Angew. Math. Mech. 2017. V. 97. P. 358-364.
3. Vatul'yan A.O. The theory of inverse problems in the linear mechanics of a deformable solid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. V. 74. N 6. P. 648-653.
4. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solution of Ill-posed Problems. Washington: Winston & Sons, 1977, 270 p.
5. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // International Journal of Mechanics and Materials in Design. 2021. V. 17. P. 321-332.

### Сведения об авторах:

**Дударев Владимир Владимирович** – к.ф.-м.н., доцент кафедры теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровица +7 (863) 297 51 14 (доб. 110)  
**E-mail** [dudarev\\_vv@mail.ru](mailto:dudarev_vv@mail.ru)

**Мнухин Роман Михайлович** – ассистент, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровица +7 (863) 297 51 14 (доб. 110)  
**E-mail** [romamnuhin@yandex.ru](mailto:romamnuhin@yandex.ru)

## Солитоны деформации в безграничной среде с точечными дефектами, находящейся в нестационарном неоднородном температурном поле

**Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Чурдалев А.Д., Шекоян А.В.**

Изучается распространение плоских продольных волн в безграничной среде с точечными дефектами, находящейся в нестационарном неоднородном температурном поле. Задача рассматривается в самосогласованной постановке, учитывающей как влияние акустической волны на образование и перемещение дефектов, так и влияние дефектов на особенности распространения акустической волны. Определены условия, при которых исходная задача может быть сведена к классическому уравнению Кортевега–де Вриза, имеющему решения, описывающие солитоны деформации.

В работе [1] показано, что распространение вдоль координаты  $x_3$  плоской волны в нелинейной термоупругой среде с точечными дефектами описывается системой уравнений (1) – (3):

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \beta_N \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -\gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - d_j \frac{\partial n_j}{\partial x_3}, \quad (1)$$

$$c_\epsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = -\gamma T_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} - T_0 p_j \frac{\partial n_j}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_\epsilon \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + D_j \frac{\partial^2 n_j}{\partial x_3^2} - \beta_j n_j, \quad (3)$$

где  $u_3(x_3, t)$  – смещение частиц среды вдоль координаты  $x_3$ ,  $\theta(x_3, t)$  – перепад температуры,  $n_j(x_3, t)$  – объемная концентрация точечных дефектов  $j$ -го типа ( $j = V$  – для вакансий,  $j = i$  – для межузлий),  $a = \lambda + 2\mu$ ,  $c_\epsilon = \sqrt{a/\rho}$  – скорость распространения продольной волны в отсутствие дефектов,  $\rho$  – плотность материала,  $\beta_N$  – коэффициент нелинейности ( $\beta_N = 3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C$ ),  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ламе,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – константы Ландау третьего порядка,  $d_j = \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \Omega_j$  – коэффициенты, характеризующие взаимодействие упругой волны с дефектами,  $\Omega_j$  – дилатационный параметр, характеризующий изменение объема среды при образовании в нем одного точечного дефекта ( $\Omega_V < 0$ ,  $\Omega_i > 0$ ),  $T_0$  – начальная температура среды,  $\gamma$  – термический коэффициент,  $c_\epsilon$  – теплопроводность при постоянной деформации,  $\chi$  – коэффициент теплопроводности,  $p_j$  – теплоемкость дефекта типа  $j$ ,  $q_\epsilon$  – темп генерации точечных дефектов при наличии деформации,  $D_j$  – коэффициент диффузии дефекта типа  $j$ ,  $\beta_j$  – скорость рекомбинации на стоках дефекта  $j$ -го типа.

Системой уравнений (1)–(3) описывается распространение плоской продольной волны в среде, как с дефектами типа "вакансия" так и с дефектами типа "межузлие". Системы отличаются между собой знаками перед последним слагаемым первого уравнения системы. При дальнейшем анализе рассматриваются оба случая.

Пусть коэффициент теплопроводности является малой величиной ( $\chi = 0$ ), тогда из второго уравнения системы получаем выражение для температуры

$$\theta(x_3, t) = -\frac{T_0}{c_\epsilon} \left( \gamma \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p_j n_j \right). \quad (4)$$

С учетом (4) систему (1) - (3) сводим к одному уравнению относительно смещений частиц среды  $u_3$ , которое при введении безразмерных величин для продольного перемещения, координаты и времени соответственно  $U = u_3/u_0$ ,  $z = x_3/X$ ,  $\tau = t/T$ , принимает вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - a_3 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} \right) \right) + a_2 a_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (5)$$

где  $a_i$  – безразмерные комплексы параметров, имеют вид

$$a_1 = \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} \right) \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right) \right)^{-1},$$

$$a_2 = D_j \beta_j \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right) \right)^{-1},$$

$$a_3 = \frac{\beta_j \beta_N u_0}{\rho} \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right) \right)^{-3/2}.$$

В качестве характерных величин длины и времени приняты соответственно

$$X = \frac{1}{\beta_j} \sqrt{\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right)}, \quad T = \frac{1}{\beta_j}.$$

Перейдем в уравнении (5) в движущуюся систему координат  $\xi = z - c\tau$ ,  $\eta = \varepsilon\tau$ , где  $c$  – скорость волны, заранее неизвестна,  $\varepsilon$  – малый параметр ( $\varepsilon \ll 1$ ). Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью  $c$  вдоль оси  $z$ , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации. Считая, что в уравнении (5) все нелинейные и диссипативные слагаемые – малые величины порядка  $\varepsilon$ , получаем в первом приближении по  $\varepsilon$  эволюционное уравнение относительно функции продольной деформации  $W = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ :

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{(1-a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{a_2(1-a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{a_3}{2\varepsilon} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0. \quad (6)$$

Из нулевого приближения найдена скорость волны  $c = 1$  (измеряется в относительных единицах), которая учтена в (6).

Уравнение (6) содержит диссипативное, дисперсионное и два нелинейных слагаемых. Если диссипативное слагаемое мало по сравнению со всеми остальными слагаемыми уравнения, то им можно пренебречь и получим уравнение Кортевега – де Вриза с дополнительным нелинейным слагаемым

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{a_2(1-a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{a_3}{2\varepsilon} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0. \quad (7)$$

В статье [1] показано, что решением последнего уравнения является стационарная ударная волна, которая является результатом взаимодействия эффектов нелинейности и диссипации, несмотря на то, что уравнение содержит только дисперсионное и нелинейные слагаемые, а диссипативное слагаемое в уравнении отсутствует. Однако, линеаризация уравнения позволяет понять, что последнее слагаемое в уравнении (7) является диссипативно-нелинейным, т.е. наличие этого слагаемого и делает возможным существование решений в виде стационарных ударных волн.

Далее рассмотрим случай, когда диссипативными эффектами можно пренебречь, тогда уравнение (6) примет вид уравнения Кортевега – де Вриза:

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{a_2(1-a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{a_3}{2\varepsilon} W \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0. \quad (8)$$

Среди возможных решений уравнения (8) существенный интерес представляют решения из класса стационарных волн. Такие волны распространяются с постоянной скоростью и не меняют своей формы в процессе распространения. где  $W = W(\chi)$ ,  $\chi$  – бегущая координата:  $\chi = \xi - v\eta$ ,  $v$  – скорость стационарной волны бегущей в положительном направлении координатной оси.

Уравнение (8) в этом случае преобразуется в уравнение нелинейного осциллятора

$$m_1 \frac{d^2 W}{d\chi^2} - v W + \frac{m_2}{2} W^2 = 0, \quad (9)$$

где  $m_1 = \frac{a_2(1-a_1)}{2\varepsilon}$ ,  $m_2 = \frac{a_3}{2\varepsilon}$ , имеющее аналитическое решение

$$W = \frac{3v}{m_2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{3v\chi}{\sqrt{m_1 m_2}} \right), \quad (10)$$

описывающее солитон деформации, обладающий положительной полярностью.

На рис. 1 изображен солитон при различных значениях скорости его распространения  $v = 5; 7; 9; 20$  (последовательность кривых: снизу вверх). Видно, что с увеличением скорости увеличивается амплитуда солитона и уменьшается его ширина.

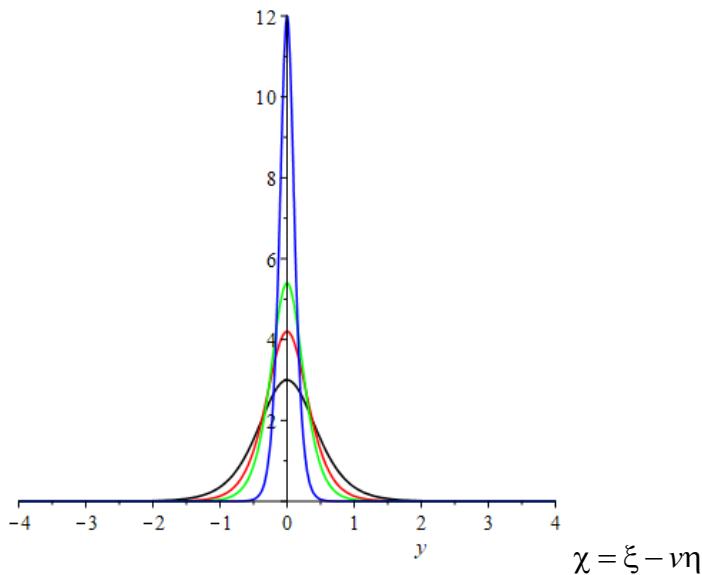


Рис. 1. Солитон при различных значениях скорости его распространения

На рис. 2 изображен солитон при различных значениях параметра, характеризующего дисперсию  $m_1 = 3; 6; 9; 15$  (последовательность кривых: снизу вверх). Видно, что с увеличением параметра, характеризующего дисперсию, ширина уединенной волны также увеличивается при неизменном значении амплитуды волны.

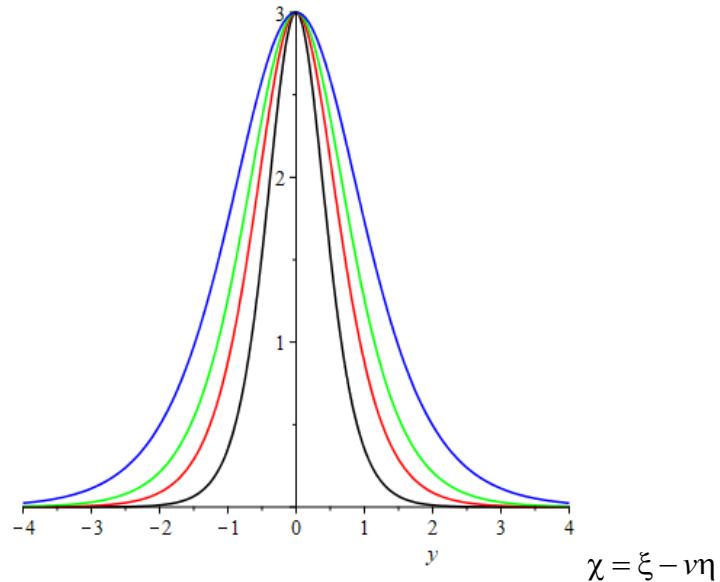


Рис. 2. Солитон при различных значениях параметра, характеризующего дисперсию.

На рис. 3 изображен солитон при различных значениях параметра, характеризующего нелинейность среды  $m_2 = 5; 7; 9; 15$  (последовательность кривых: сверху вниз). При увеличении параметра  $m_2$  наблюдается заметное уменьшение амплитуды уединенной волны. Солитон становится ниже, а его ширина увеличивается.

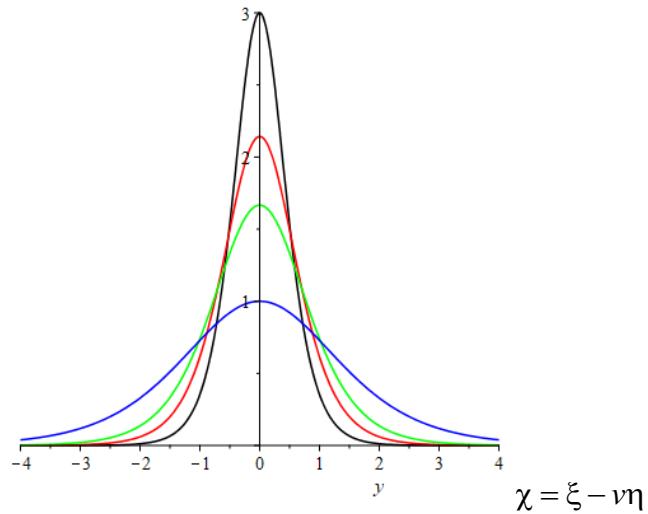


Рис.3. Солитон при различных значениях параметра, характеризующего нелинейность среды.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 18-29-10073-мк).

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Шекоян А.В. Ударные волны в термоупругой среде с точечными дефектами. Журнал технической физики. 2020. Т. 90. № 1. С.26-32.

### **Сведения об авторах:**

**Ерофеев Владимир Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт Проблем Машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», +7 (910) 3843528

**E-mail** [erof.vi@yandex.ru](mailto:erof.vi@yandex.ru)

**Леонтьева Анна Викторовна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт Проблем Машиностроения РАН – филиал ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», +7 (910) 8726915

**E-mail** [aleonav@mail.ru](mailto:aleonav@mail.ru)

**Чурдалев Артем Денисович** – студент, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**Шекоян Ашот Вазгенович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН РА

**E-mail** [ashotshek@mechins.sci.am](mailto:ashotshek@mechins.sci.am)

## Индентирование упругого материала с порами

Зеленцов В.Б., Загребнева А.Д., Лапина П.А.

В настоящем исследовании осуществляется механико-математическое моделирование процесса индентирования материалов при наличии микроструктуры в виде пор. Состояние упругого материала с порами при индентировании описывается с помощью линейной теории Коуина – Нунциато. Моделирование процесса индентирования сводится к решению статической контактной задачи о внедрении индентора в упругую полосу, сцепленную с жестким основанием. С помощью интегрального преобразования Фурье задача приводится к решению интегрального уравнения первого рода типа свертки с разностным ядром относительно контактных напряжений. Использованы асимптотические аналитические решения контактной задачи, позволяющие определить все основные характеристики контакта. Исследовано распределение функции относительного объема пор как на контакте, так и в полосе, а также её зависимость от параметров связности и жесткости пор в полосе с порами.

**1. Введение.** В фундаментальных отраслях индустрии таких как строительство, микроэлектроника, медтехника и во многих других всё больше используются материалы с микроструктурой. Как правило, для эффективного использования таких материалов в первую очередь необходимы сведения об их механических характеристиках, таких как модуль Юнга, коэффициент Пуассона, твёрдость, реакция микроструктуры на внешнее воздействие и другое. Определение упругих модулей материалов производится с помощью индентирования на микро- и нано- уровнях. Наличие математической модели процесса индентирования позволяет повысить эффективность экспериментальных исследований по определению упругих характеристик материалов. В данной работе осуществляется механико-математическое моделирование процесса индентирования материалов при наличии микроструктуры в виде пористости.

**2. Постановка задачи.** В настоящей работе представлена математическая модель процесса индентирования упругой среды с микроструктурой типа пористости. Состояние пористой полосы при индентировании описывается с помощью линейной теории дилатации, которая впервые была предложена в работе С. Коуина и Дж. Нунциато [1]

$$\begin{aligned} \mu \Delta u - (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0, \\ \mu \Delta w - (\lambda + \mu) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \\ \alpha \Delta \Phi - \xi \Phi - \beta \epsilon &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $u(x, z)$  и  $w(x, z)$  – вертикальные и горизонтальные смещения,  $\Phi(x, z)$  – относительный объем пор,  $\epsilon$  – объемная деформация  $\epsilon = \partial u / \partial x + \partial w / \partial z$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  – модули упругости Ламе,  $\beta$  – модуль связности,  $\alpha$  – параметр диффузии пустот,  $\xi$  – модуль жесткости пустот, удовлетворяющие условиям [2]

$$\alpha > 0, \xi > 0, (3\lambda + 2\mu)\xi > 3\beta^2. \quad (2.2)$$

Процесс индентирования заключается во внедрении индентора в образец материала с порами при контроле глубины и силы внедрения. В полосу толщины  $h$  ( $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq z \leq h$ ) жестко сцепленную с недеформируемым основанием ( $z = 0$ ) внедряется индентор ширины  $2a$  ( $-a < x < a$ ,  $z = h$ ) с плоской формой основания на глубину  $-\delta$  ( $\delta > 0$ ) с помощью силы  $P_0$ . Это приводит к необходимости выполнения граничного условия на вертикальное смещение  $w(x, z)$

$$w(x, h) = -\delta, \quad -a < x < a, \quad \delta > 0, \quad (2.3)$$

где  $\delta$  – осадка индентора в пороупругую полосу. Силы трения, сцепления как на контакте, так и вне его не учитываются

$$\sigma_{xz}(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.4)$$

На основании индентора в полосе возникают контактные напряжения  $\varphi_0(x)$  численно равные нормальным напряжениям

$$\sigma_{zz}(x, h) = -\varphi_0(x), \quad -a < x < a, \quad (2.5)$$

тогда как вне основания индентора

$$\sigma_{zz}(x, h) = 0, \quad a < |x| < \infty. \quad (2.6)$$

На нижней грани полосы ( $z = 0$ ) выполняются условия жёсткого сцепления с недеформируемым основанием

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad (2.7)$$

и на функцию  $\Phi(x, z)$ , описывающую распределение относительного объема пор накладываются следующие условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, h) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, 0) = 0. \quad (2.8)$$

Совокупность дифференциальных уравнений дилатационной теории упругости, описывающей поведение упругого материала с микроструктурой в виде пор (2.1) и смешанных граничных условий (2.3) – (2.8) составляют постановку контактной задачи об индентировании полосы из пороупрочного материала. Решением такой задачи являются неизвестные контактные напряжения  $\varphi_0(x)$  в области контакта  $-a < x < a$ , а также все основные характеристики контакта.

**3. Интегральное уравнение задачи и его решение.** С помощью интегрального преобразования Фурье задача (2.1), (2.3) - (2.8) сведена к решению интегрального уравнения первого рода типа свертки с разностным ядром относительно контактных напряжений. После перехода к безразмерным переменным с помощью замены  $x = ax$  и  $\varphi(x') = a\delta^{-1}\Delta^{-1}\varphi_0(ax')$ , опустив знак штриха в обозначениях, интегральное уравнение, соответствующее контактной задачи (2.1), (2.3) - (2.8) имеет вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi, \quad |x| < 1, \quad \Delta = \frac{E}{2(1-\nu^2)}, \quad \lambda = \frac{h}{a}, \quad (3.1)$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.2)$$

где

$$K(u) = \frac{l^2(l^2-1)(1+\kappa)}{\gamma_0} \frac{r}{u\Delta(u)} \left[ r\text{sh}(r) \left( 2\gamma_0 u + (\eta Hu^2 - \kappa\gamma_0) \text{sh}(2u) \right) - \right. \\ \left. - 2\eta Hu^3 \text{sh}(u) \text{ch}(r) \right], \quad (3.3)$$

$$\Delta(u) = r^2 \text{sh}(r) \left[ 2\kappa(l^2-1)(1-\kappa) \text{sh}^2(u) + \kappa^2 + 4l^2u^2 - 1 \right] \\ + \frac{\eta H}{\gamma_0} r \left[ 2u^3 \left( (1-\kappa + l^2(3\kappa-1)) \text{sh}(u) - 4l^2u \text{ch}(u) \right) \right. \\ \left. + r\text{sh}(r) \left( (2u^2(1-\kappa + l^2(3\kappa-1)) - 2\kappa\gamma_0) \text{sh}^2(u) - \gamma_0(1+\kappa) \right) \right. \\ \left. + 2u^3 \text{ch}(r) \left( -(1-\kappa + l^2(3\kappa-1)) \text{sh}(u) \text{ch}(u) + 4l^2u \right) \right] \\ + 2 \frac{\eta^2 H^2}{\gamma_0^2 h^4} u^2 \left[ (-r^2(4l^2u^2 - \gamma_0) + 2\gamma_0 l^2 u^2) \text{sh}(r) \text{sh}^2(u) \right. \\ \left. + ru(4l^2u^2 - \gamma_0) \text{sh}(u) (\text{ch}(r) \text{ch}(u) - 1) \right],$$

Здесь  $r = \sqrt{u^2 + \gamma_0}$ ,  $\gamma_0 = (\xi + \beta H)h^2/\alpha$ ,

$$H = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}, \quad l^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta = \frac{\beta(\kappa-1)}{\xi}, \quad \kappa = \frac{1+l^2-H\beta/\xi}{1-l^2-H\beta/\xi}. \quad (3.4)$$

Решение интегрального уравнения (3.1) получено в классе интегрируемых функций [3] и записывается в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x) \lambda^{-2k}, \quad \omega_k(x) \in C_{[-1,1]}, \quad (3.5)$$

которое имеет асимптотический вид с точностью до  $\lambda^{-4}$

$$\varphi(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[ 1 - \frac{2d_1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{2} - x^2 \right) - \frac{4d_2}{\lambda^4} \left( \frac{7}{8} - x^2 - x^4 \right) \right], \quad (3.6)$$

где

$$P = \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \pi \left[ \ln 2\lambda - d_0 - \frac{d_1}{\lambda^2} - \frac{d_1^2}{4\lambda^4} - \frac{9d_2}{4\lambda^4} \right]^{-1} \quad (3.7)$$

безразмерная сила, действующая на индентор, а коэффициенты  $d_k$  вычисляются по формулам

$$d_0 = \int_0^\infty (1 - \xi K(\xi) - e^{-\xi}) \xi^{-1} d\xi, \quad d_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^\infty (1 - \xi K(\xi)) \xi^{2k-1} d\xi. \quad (3.8)$$

Через найденные контактные напряжения  $\varphi(x)$  из (3.5), определяются другие параметры контакта смещения  $u$ ,  $w$ , напряжения  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{xz}$ , относительный объем пор  $\Phi(x, z)$ .

#### 4. Зависимость характеристик контакта от параметров связности $\beta$ и жесткости $\xi$ .

Полученное аналитическое решение контактной задачи  $\varphi(x)$  дилатационной теории упругости [4-8] об осадке жесткого индентора с плоской формой основания в слой из упругого материала с микроструктурой в виде пор позволило определить  $u(x, z)$ ,  $w(x, z)$ , напряжения  $\sigma_{xz}(x, z)$ ,  $\sigma_{xz}(x, z)$ , относительный объем пор  $\Phi(x, z)$ . На рис. 1 представлено распределение касательных  $\sigma_{xz}(x, z)$  и нормальных  $\sigma_{zz}(x, z)$  напряжений как в пороупругой полосе  $|x| < 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , так и на контакте  $|x| < 1$ ,  $z = 1$ . Ввиду нечетности касательные напряжения под серединой основания индентора меняют знак. Видно, что нормальные напряжения в краях основания индентора  $x = \pm 1$  имеют особенность корневого типа. Расчеты проведены для пороупругой среды с характеристиками: модуль Юнга  $E = 100 \text{ GPa}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$  и со следующими неклассическими параметрами: параметр связности  $\beta = 16 \text{ GPa}$ , жесткость пор  $\xi = 10 \text{ GPa}$ , параметр диффузии пустот, характеризующий расстояние между порами  $\alpha = 5 \text{ GPa} \cdot \text{m}^2$ ,  $\lambda = h/a = 4$ ,  $h = 1$ .

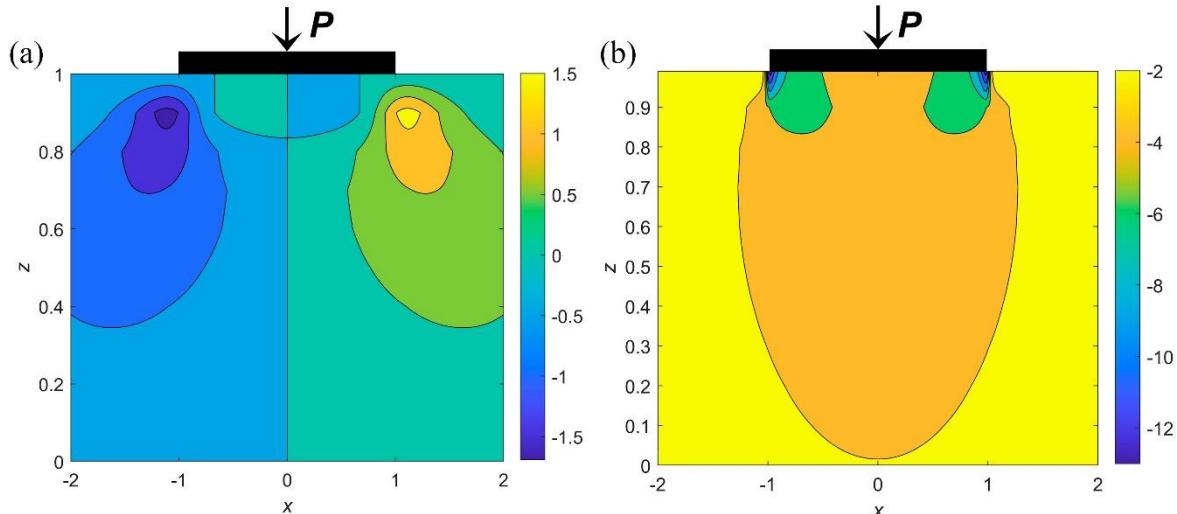


Рис. 1. Распределение касательных  $\sigma_{xz}(x, z)$  (а) и нормальных  $\sigma_{zz}(x, z)$  (б) напряжений в пороупругой полосе ( $|x| < 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ).

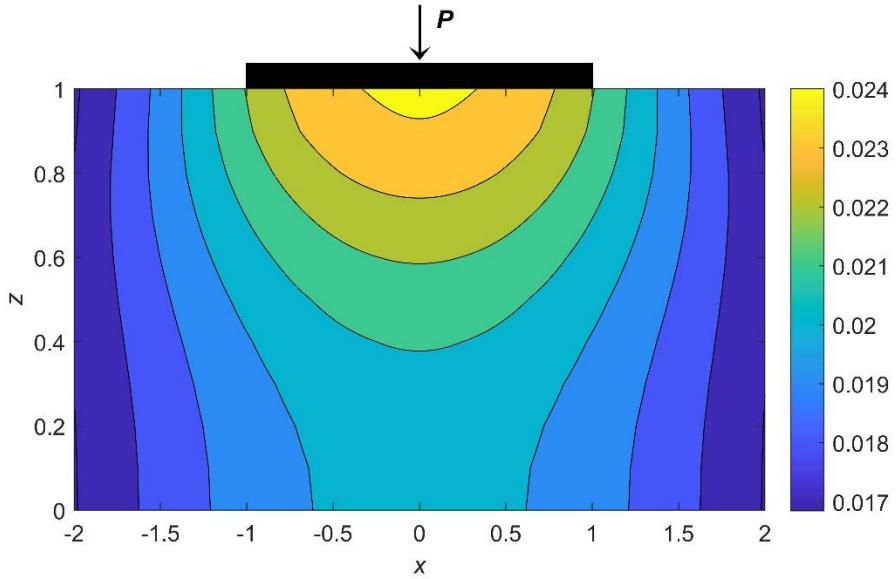


Рис. 2. Распределение относительного объема пор  $\Phi(x, z)$  в пороупругой полосе ( $|x| < 2, 0 \leq z \leq 1$ ).

На рис. 2 представлено распределение относительного объема пор  $\Phi(x, z)$  в пороупругой полосе с параметрами  $E = 100 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\alpha = 5 \text{ GPa} \cdot \text{m}^2$ ,  $\beta = 16 \text{ GPa}$ ,  $\xi = 10 \text{ GPa}$ . Функция  $\Phi(x, z)$  распределена симметрично относительно оси  $z$  и достигает максимума под серединой основания индентора, расположенного между точками  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$ , в точке  $(0, 1)$ . При переходе через эту точку касательные напряжения  $\sigma_{xz}(x, z)$  и горизонтальные смещения  $u(x, z)$  меняют знак (направление).

Механические и геометрические характеристики контакта при индентировании пороупругой среды существенно зависят от коэффициента связности  $\beta$  и коэффициента жесткости  $\xi$ . В работе исследовано влияние параметров  $\beta$  и  $\xi$  на различные характеристики контакта. На рис. 3, графики контактных напряжений  $\varphi(x)$  даны для разных значений  $\beta$  и  $\xi$  в  $\text{GPa}$  при осадке индентора в полосу на величину  $\delta = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  при  $\lambda = h/a = 4$ . Пороупругий материал полосы характеризуется модулем Юнга  $E = 100 \text{ GPa}$ , коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.2$ , параметром  $\alpha = 5 \text{ GPa} \cdot \text{m}^2$ , параметром жесткости пор  $\xi = 18 \text{ GPa}$  (рис. 3a) и параметром связности  $\beta = 18 \text{ GPa}$  (рис. 3b). С увеличением параметра  $\beta$  при  $\xi = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ , контактные напряжения и сила воздействия на индентор, а значит и на материал уменьшаются. С увеличением параметра  $\xi$  при  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$  значение  $\varphi(x)$  и нагрузка на индентор нарастают.

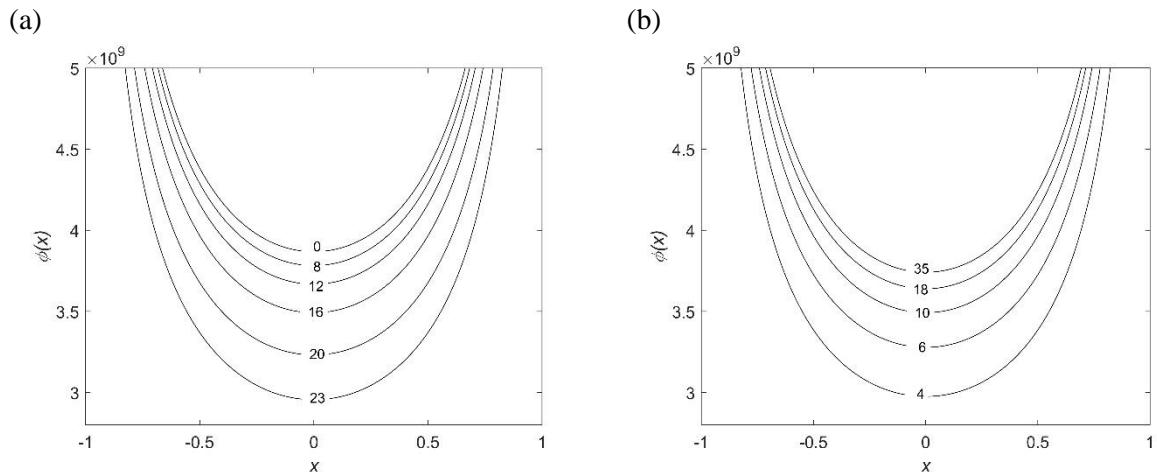


Рис. 3. Распределение контактных напряжений  $\varphi(x)$  при изменении параметра  $\beta$  (а) и параметра  $\xi$  (б). Значения параметров  $\beta$  и  $\xi$  в  $\text{GPa}$  указаны на линиях.

Проведённые исследования математической модели дилатационной теории упругости материала с микроструктурой состоящей из пор, подвергнутого индентированию, позволили установить взаимосвязи между классическими модулями упругости  $E$ ,  $v$ , неклассическими параметрами среды  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\xi$ , и такими характеристиками контакта как контактные напряжения, сила контактного воздействия, относительный объем пор, вертикальные и горизонтальные смещения свободной поверхности пороупрочного материала. Проведенные исследования позволяют повысить уровень экспериментальных исследований по индентированию материалов с порами.

## 5. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-07-01259-а и №20-07-00949-а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids J. Elast. vol.13 № 2. 1983. p. 125–147.
2. Puri P., Cowin S.C. Plane waves in linear elastic materials with voids J. Elast. vol. 15. № 2. 1985. p. 167–183.
3. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. Non-classical mixed problems of the theory of elasticity [in Russian] Science, Moscow. Moscow: Nauka. 1974. 456 p.
4. Lurie S.A., Kalamkarov A.L., Solyaev Y.O., Volkov A.V. Dilatation gradient elasticity theory. Eur. J. Mech. A/Solids. vol. 88. 2021. p. 104258.
5. Repka M., Sládek V., Sládek J. Numerical Analysis of Poroelastic Materials Described by the Microdilatation Theory. Procedia Eng. vol. 190. 2017. p. 248–254.
6. Iovane G., Nasedkin A. V. Finite element analysis of static problems for elastic media with voids. Comput. Struct. vol. 84. № 1–2. 2005. p. 19–24.
7. Scavia A., Sumbatyan M.A. Contact problem for porous elastic half-plane J. Elast. Springer. vol. 60, № 2. 2000. P. 91–102.
8. Lyapin A.A., Vatulyan A.O. On deformation of porous plates. ZAMM - J. Appl. Math. Mech. Zeitschrift für Angew. Math. und Mech. vol. 98. № 2. 2018. p. 330–340.

## Сведения об авторах

**Зеленцов Владимир Борисович** - к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Донской государственный университет, Ростов-на-Дону, Россия  
+79094237494

E-mail [vbzelen@gmail.com](mailto:vbzelen@gmail.com)

**Загребнева Анна Дмитриевна** - к.ф.-м.н., доцент, Донской государственный университет, Ростов-на-Дону, Россия  
+79185950361

E-mail [anna.zagrebneva@gmail.com](mailto:anna.zagrebneva@gmail.com)

**Лапина Полина Анатольевна** - к.ф.-м.н., научный сотрудник, Донской государственный университет, Ростов-на-Дону, Россия  
+79185605410

E-mail [polina\\_azarova86@mail.ru](mailto:polina_azarova86@mail.ru)

# **Механические свойства металломатричного композита, армированного карбидными структурами**

**Земцова Е.Г., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Смирнов В.М.**

Благодаря своим механическим свойствам, таким как легкость, прочность, высокая удельная жесткость и износостойкость, металломатричные композиты на основе алюминиевой матрицы, армированной керамическими частицами, находят широкое применение в качестве конструкционных материалов в аэрокосмической и автомобильной промышленности. Основными проблемами при изготовлении являются равномерность распределения частиц по объему, слабая адгезия керамических частиц с металлом матрицы, образование карбида алюминия на интерфейсах, приводящее к нежелательному охрупчиванию.

Авторами предложена новая методика изготовления металломатричных композитов, заключающаяся в создании композиционного материала, когда в объеме металлической (алюминиевой, железной) матрицы карбидныеnanoструктуры образовывают каркас, и позволяющая решить выше указанные проблемы.

Анализ механических свойств металломатричных композитов, созданных по предложенной методике, показывают существенное повышение пределов текучести и прочности по сравнению со свойствами как чистого алюминия, так и алюмоматричных композитов, армированных дисперсными (nano)-частицами карбида кремния.

Проведен анализ вклада следующих механизмов упрочнения: дисперсионное упрочнение (Орован-Эшби), за счет измельчения зерна (Холл-Петч), образования внутреннего термического напряжения из-за различных значений коэффициентов теплового расширения матрицы и армирующих частиц.

Построена конечно-элементная модель деформирования металломатричного композита, армированного карбидными структурами, учитывающая изменение предела текучести.

## **1. Введение**

Металломатричные композиты находят широкое применение в различных аэрокосмической, автомобильной и электронной отраслях благодаря своим высоким эксплуатационным свойствам, таким как высокая жесткость, удельная прочность, износостойкость.

Наиболее распространенными материалами матриц этих композитов являются алюминий и железо, а в качестве армирующих элементов используются керамические частицы или волокна, такие как карбид кремния ( $\text{SiC}$ ), карбид титана ( $\text{TiC}$ ), карбид бора ( $\text{B}_4\text{C}$ ) и оксид алюминия ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), а также интерметаллические армирующие элементы. Особый интерес для приложений представляет армирование алюминиевой матрицы как микрочастицами, так и наночастицами частицами карбида кремния, обеспечивающее значительное упрочнение металлокомпозита, величина которого зависит от концентрации армирующих частиц, их геометрии, размеров, адгезии между матрицей и условиями внесения армирующих частиц в матрицу.

Наблюдаемое упрочнение композитов с металлической матрицей является результатом взаимодействия нескольких механизмов упрочнения: за счет эффективной передачи нагрузки между матрицей и армирующими элементами, за счет образования внутренних термических напряжений, вызванных несоответствием коэффициентов теплового расширения между матрицей и частицами карбида, за счет измельчения зерна матрицы (закон Холла-Петча), из-за рассогласования упругих модулей материалов матрицы и включения, вызванного дисперсной фазой упрочнения по Оровану.

Какие из этих механизмов реализуются в каждом конкретном случае, определяется как геометрией частиц, размерами и их концентрацией, так и условиями внесения армирующих частиц в матрицу.

Хотя определенная степень повышения прочности может быть достигнута в металломатричных (nano)-композитах путем активации характерно значительное снижение способности поглощения энергии (например, пластичности, ударной вязкости или деформации до разрушения).

В [1] исследовано влияние геометрии армирующих включений карбида на величину упрочняющего эффекта волоконно-пластинчатого карбида кремния в матрице из алюминиевого сплава 6061. Показано, что армирование карбидом кремния в виде волокон или пластин приводит к увеличению степени упрочнения по сравнению с армированием частицами при одной и той же объемной концентрации включений.

Следует отметить, что в последние десятилетия значительное внимание уделяется исследованию свойств металломатричных композитов армированных наноразмерными карбидными частицами, т.к. армирование наночастицами приводит к более высокой величине упрочнения по сравнению с армированием микроразмерными частицами при одинаковых концентрациях включений.

В [2-3] проведен анализ влияния объемной доли и размеров армирующих частиц и размеров зерен металлической матрицы на механические свойства, включая предел текучести, предел прочности и деформацию до разрушения композитов, а также количественный анализ механизмов упрочнения металломатричного нанокомпозита на основе алюминия. Отмечено, что при перемешивании размер кристаллитов Al-матрицы уменьшается с увеличением объемной доли армирования и уменьшением размера наноразмерных армирующих частиц. Кроме того, наночастицы SiC замедляли рост зерна материала матрицы во время спекания, т.е. ультрамелкозернистая структура сохраняется и при сравнительно высокой температуре спекания. С увеличением содержания наночастиц SiC увеличивается прочность металломатричного композита. Исследован вклад различных механизмов упрочнения в повышение прочности металлокомпозита с наноразмерными армирующими частицами карбида кремния.

Несмотря на то, что в последние годы ведутся интенсивные исследования металломатричных (nano)композитов, по-прежнему, остается ряд проблем, которые приходится решать при производстве таких композитов: обеспечение равномерного распределения армирующих частиц, агломерация как армирующих частиц, так и зерен материала матрицы, плохая адгезия между материалом матрицы и частицами.

Авторами предложен новый метод введения карбида кремния в металлическую матрицу, позволяющий решить указанные выше проблемы изготовления металломатричного композита на основе алюминия, проведено исследование механических свойств полученного композита.

## 2. Описание новой методики создания металломатричного композита

Предложенный вторыми метод создания металломатричного композита можно разбить на следующие этапы.

На первом этапе на поверхности порошка алюминия, средний размер частиц которого 5-50 мкм, производится синтез нанослоев карбида кремния (SiC), осуществляется методом молекулярного наслаждания ("atomic layer deposition" (ML – ALD) [5-6]). Метод ML – ALD основан на проведении на поверхности чередующихся химических реакций низкомолекулярных реагентов. В результате каждого цикла поверхностных химических реакций, проводимого в строго контролируемых условиях на поверхности частиц алюминия, происходит наращивание новых структурных единиц (карбидов), химически связанных с исходной подложкой. Определяя определенное число таких реакций можно синтезировать нанослой вещества определенной толщины. Время синтеза одного цикла реакций на поверхности 30 минут. За один цикл реакций прирост составляет 5 ангстрема (0,5 нм). За 100 циклов прирост составил 50 нм.

Синтез нанослоев SiC проводили при температуре 200-500<sup>0</sup>С в реакторе проточного типа в токе осущененного инертного газа (гелий), который одновременно обеспечивал удаление из реактора газообразных продуктов реакции

Найдены оптимальные условия синтезаnanoструктур SiC на поверхности алюминиевой матрицы: температура – 450<sup>0</sup>С, скорость газового потока – 100 мл/мин.

Благодаря химической связи между нанослоями карбида и подложкой обеспечивается высокая степень адгезии карбида кремния с алюминием.

Чтобы избежать агломерации (укрупнения) полученных дисперсных частиц (Al – SiC) , на их поверхность наносят слой Fe.

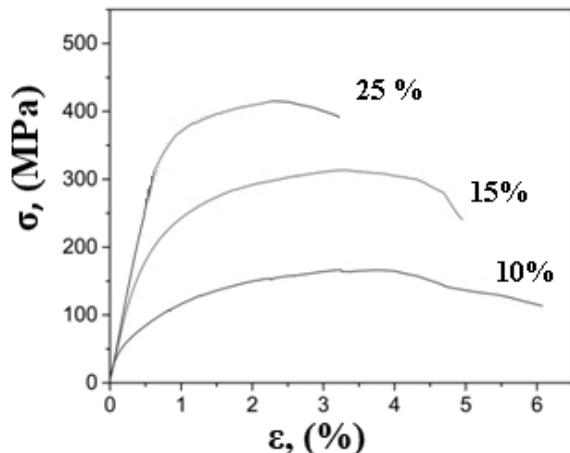
На втором этапе происходило смешивание синтезированных дисперсных упрочняющих частиц (Al – SiC/Fe) с порошком частиц алюминия и последующее прессование.

Для снижения пористости при температуре 600<sup>0</sup>С проводилось спекание образца, скомпактированного из дисперсных исходных материалов (алюминиевый порошок и дисперсные частицы (Al – SiC/Fe)), в единую структуру.

Отсутствие межфазных границ между частицами алюминия и наноструктурами карбидов позволило уменьшить внутреннюю пористость образца. Наличие нанослоя железа позволило равномерно перераспределить армирующие карбидные частицы ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ ) в объеме алюминиевой матрицы. Разработанная методика позволила получить алюмоматричные композиты с улучшенными механическими свойствами.

### 3. Исследование механических свойств металломатричного композита

Для исследования зависимости механических свойств алюмоматричного композита были изготовлены образцы с массовой концентрацией армирующих дисперсных частиц (1%, 3%, 10%, 15%, 25%) с толщиной карбидного нанослоя 50 нм и построены кривые деформирования  $\sigma - \varepsilon$  этих образцов (Рис.1).



**Рис. 1.** Кривые деформирования  $\sigma - \varepsilon$  для металлокомпозитов с дисперсными частицами, следующего состава: 90% Al + 10 % ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ ); 85% Al + 15 % ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ ); 75% Al + 25 % ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ )

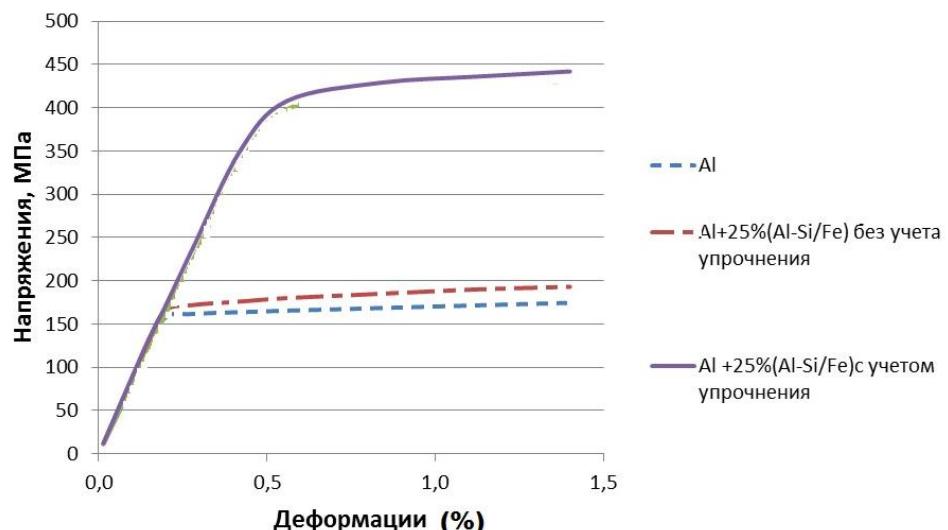
Показано, что армирование дисперсными частицами ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ ) приводит к заметному упрочнению алюмоматричного композита при массовой концентрации частиц более 10%. Содержание армирующей дисперсной фазы 1%, 2%, 3% практически не влияет на механические свойства композита. Для металломатричных композитов с массовой концентрацией дисперсионных частиц ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ ) 10%, 15% и 25% характерны не только высокая степень упрочнения, так и значительная пластическая деформация до разрушения. Зависимость предела прочности от концентрации дисперсных частиц приведена в табл.1. Заметим, что такое упрочнение не достигается при армировании алюминиевой матрицы дисперсными наночастицами карбида кремния при тех же весовых концентрациях [2,3], что объясняется слабой адгезией между наночастицами карбида кремния и алюминиевой матрицы, а также высокой пористостью при больших концентрациях включений, приводящей к охрупчиванию композита.

**Таблица 1.** Зависимость прочностных свойств, синтезированных композиционных материалов на основе алюминия с дисперсной фазой SiC, от концентрации дисперсных частиц

№ образца	Состав композита	Предел прочности $\sigma_b$ , МПа
1	99,7 % Al	75
2	99% Al + 1% ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ )	80
3	97% Al + 3% ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ )	95
4	90% Al + 10 % ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ )	165
5	85% Al + 15 % ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ )	310
6	75% Al + 25 % ( $\text{Al} - \text{SiC}/\text{Fe}$ )	430

При помощи метода конечных элементов осуществлено моделирование механических свойств синтезированного металломатричного композита, армированного дисперсными частицами Al – SiC /Fe . Проведено исследование влияния выбора представительного элемента, распределения в нем армирующих дисперсионных частиц.

При численном моделировании кривой деформирования  $\sigma$ - $\epsilon$  необходимо учитывать фактическое упрочнение матрицы и вводить соответствующие изменения в определяющие соотношения для материала матрицы [7- 9]. Эти значения можно определить либо из экспериментальных кривых напряжение - деформация либо из результатов микромеханического моделирования, учитывая вклады различных механизмов упрочнения в фактическое упрочнение металломатричного композита.



**Рис.2.** Кривые деформирования для Al, металлокомпозита 75% Al + 25 % (Al – SiC/Fe) без учета фактического упрочнения и с учетом.

На рис.2 приведены результаты конечно-элементного моделирования кривых деформирования напряжение – деформация деформирования для Al, для металлокомпозита следующего состава 75% Al + 25 % (Al – SiC/Fe) с толщиной карбидного нанослоя 50 нм без учета фактического упрочнения матрицы и с учетом. Заметим, что при моделировании деформирования металлокомпозита без учета фактического упрочнения матрицы принимается во внимание только механизм упрочнения за счет перераспределения за счет эффективного перераспределения нагрузки между матрицей и армирующими частицами карбида кремния. Учитывая малую концентрацию карбида кремния в композите, вклад от этого механизма упрочнения незначителен.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №20-11-20083.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Arsenault, R. J. The strengthening of aluminum alloy 6061 by fiber and platelet silicon carbide //Materials Science and Engineering, 1984. 64(2). 171–181. doi:10.1016/0025-5416(84)90101-0
2. Kamrani, S., Riedel, R., Seyed Reihani, S. M., & Kleebe, H. J. Effect of Reinforcement Volume Fraction on the Mechanical Properties of Al—SiC Nanocomposites Produced by Mechanical Alloying and Consolidation // Journal of Composite Materials, 2009. 44(3). 313–326. doi:10.1177/0021998309347570
3. Casati, R., Vedani, M. Metal Matrix Composites Reinforced by Nano-Particles—A Review //Metals, 2014. 4(1). 65–83. doi:10.3390/met4010065

4. Kim, C.-S., Cho, K., Manjili, M. H., Nezafati, M. Mechanical performance of particulate-reinforced Al metal-matrix composites (MMCs) and Al metal-matrix nano-composites (MMNCs) //Journal of Materials Science, 2017. 52(23). 13319–13349. doi:10.1007/s10853-017-1378-x
5. George, S.M. Atomic layer deposition: an overview //Chemical Reviews. 2010,110(1), 111–131. doi: 10.1021/cr900056b
6. Zemtsova, E.G., Yurchuk, D.V., Sidorov, Yu.V., Semenov, B.N., Morozov. N.F., Smirnov V.M. Synthesis of metallic composite based on iron matrix and SiC nanostructures and its strength properties // Materials Physics and Mechanics, 2020.46,1.122-131. doi:10.18149/MPM.4612020\_12
7. Ferguson, J. B., Thao, X., Rohatgi, P. K., Cho, K., Kim, C.-S. Computational and analytical prediction of the elastic modulus and yield stress in particulate-reinforced metal matrix composites.// Scripta Materialia, 2014. 83. 45–48. doi:10.1016/j.scriptamat.2014.04.004
8. Shi, N., Arsenault R. J. Plastic Flow in SiC/Al Composites-Strengthening and Ductility //Annual Review of Materials Science, 1994). 24(1). 321–357. doi:10.1146/annurev.ms.24.080194.001541
9. Zhang, J. F., Zhang, X. X., Wang, Q. Z., Xiao, B. L., Ma, Z. Y. Simulations of deformation and damage processes of SiCp/Al composites during tension // Journal of Materials Science & Technology, 2018. 34(4). 627–634. doi:10.1016/j.jmst.2017.09.005

### Сведения об авторах

**Земцова Елена Георгиевна** – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии (7 911 9421339)

**E-mail:** [ezimtsova@mail.ru](mailto:ezimtsova@mail.ru)

**Морозов Никита Федорович** – академик РАН, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет (7 9219405031)

**E-mail:** [n.morozov@spbu.ru](mailto:n.morozov@spbu.ru)

**Семенов Борис Николаевич** –доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет (7 921 9214965)

**E-mail:** [b.semenov@spbu.ru](mailto:b.semenov@spbu.ru)

**Смирнов Владимир Михайлович** - профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии (7 911 2729257)

**E-mail:** [vms11@yandex.ru](mailto:vms11@yandex.ru)

## **Разработка математической модели силового привода для раскрытия космической конструкции изменяемой конфигурации**

Зимин В. Н., Крылов А. В., Кувыркин Г. Н., Шахвердов А. О.

Перспективы развития радиоастрономии, солнечной энергетики, космической связи, исследования земной поверхности и других планет из космоса в настоящее время связаны с созданием принципиально новых крупногабаритных космических конструкций. При проектировании крупногабаритных систем, схема которых допускает автоматическое изменение конфигурации конструкции, необходимо учитывать ударные нагрузки. Они неизбежно возникают при фиксации рабочего состояния конструкции на орбите по завершению процесса её раскрытия. Для обеспечения плавного, надежного и безударного раскрытия крупногабаритных космических конструкций предполагается использовать силовые приводы с активными элементами, выполненными из материала никелида титана, обладающего эффектом памяти формы (ЭПФ). Проведены экспериментально-теоретические исследования, направленные на разработку математической модели функционирования активного элемента из никелида титана с ЭПФ для раскрытия космической конструкции изменяемой конфигурации.

К настоящему времени разработано много вариантов космических конструкций, имеющих разные конфигурации в транспортном и рабочем положениях на орбите [1]. Неизбежное усложнение конструктивных схем перспективных космических систем вследствие повышения их эксплуатационных функциональных возможностей приводит к необходимости создания больших космических конструкций. При этом большие крупногабаритные конструкции изменяемой конфигурации (трансформируемые) становятся ключевыми компонентами технологии современных космических систем, рис. 1.

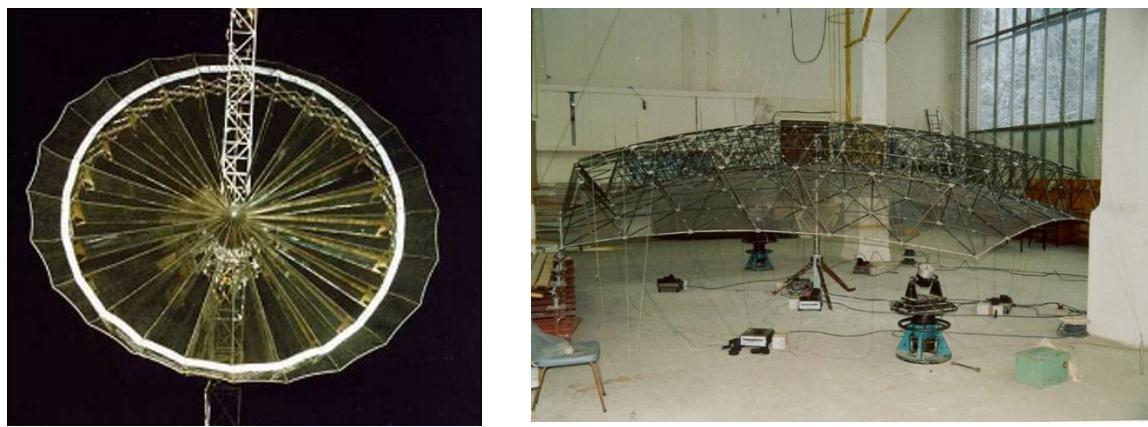


Рис. 1. Большие космические конструкции: а – рефлектор зонтичного типа; б – рефлектор ферменного типа

В практике создания космических конструкций значительную роль играет наземный эксперимент. Сложности, возникающие при моделировании в наземном эксперименте условий эксплуатации в космосе, требуют создания дорогостоящих стендов обезвешивания больших трансформируемых конструкций и уникальных по размерам вакуумных камер. Поэтому проектирование таких систем непосредственно связано с разработкой математической модели конструкции, адекватно описывающей ее механические свойства [2].

Работоспособность космических конструкций изменяемой конфигурации определяется, главным образом, тем, насколько велики возникающие в них усилия при развертывании, поэтому обеспечение надежного раскрытия связано с решением сложных задач механики. Процесс изменения конфигурации происходит под воздействием силовых приводов, в качестве которых могут быть использованы сжатые или растянутые пружины, электродвигатели и т. д. Исследования в области применения материалов с эффектом памяти формы (ЭПФ) для создания термомеханических силовых приводов для космических систем в настоящее время вызывает повышенный интерес учёных, инженеров и конструкторов [3-6]. Материал с ЭПФ можно использовать для создания силовых приводов благодаря его способности к восстановлению больших деформаций и созданию значительной силы [7-8]. Активный элемент

такого силового привода может быть выполнен в форме проволоки из материала с ЭПФ типа никелида титана [3,9]. Для успешного применения таких приводов для раскрытия космической конструкции изменяемой конфигурации необходимо определять как форму активного элемента, так и их функциональные возможности. Для определения основных характеристик активного элемента: развиваемое эксплуатационное усилие, время срабатывания, рабочий ход (максимальное перемещение), были проведены теоретические и экспериментальные исследования.

Математические сложности описания поведения материалов с ЭПФ, необходимость использования в математических моделях достаточно большого количества фактических экспериментальных данных не позволили пока разработать инженерные методики расчета силовых приводов для раскрытия космических конструкций изменяемой конфигурации. В рассматриваемом силовом приводе применен активный элемент, изготовленный из проволоки никелида титана диаметром 1,5 мм и длиной 160 мм (рис. 2), нагреваемый в процессе работы путем пропускания через него электрического тока.

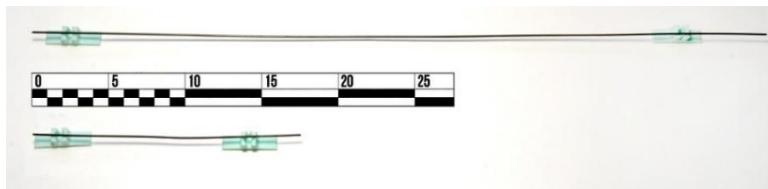


Рис. 2. Активные элементы из материала никелида титана силового привода с ЭПФ

Общая деформация проволоки из материала с ЭПФ складывается из упругой, температурной и фазовой деформаций:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(T)} + \varepsilon^{(\Phi)},$$

где  $\varepsilon^{(e)} = \sigma / E$  – упругая деформация;  $\sigma$  – напряжение в текущей точке поперечного сечения;  $E$  – модуль упругости;  $\varepsilon^{(T)} = \alpha_T \Delta T$  – температурная деформация;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного (температурного) расширения;  $\varepsilon^{(\Phi)}$  – фазовая деформация.

Чтобы использовать проволоку из сплава никелида титана в качестве активного элемента в приводах для раскрытия космических конструкций изменяемой конфигурации необходимо определить его длину. Длина проволоки определяется исходя из требуемой величины рабочего хода привода по величине восстанавливаемой (фазовой) деформации:

$$L = \frac{\Delta l}{\varepsilon^{(\Phi)}},$$

где  $\Delta l$  – требуемое перемещение активного элемента привода.

При проектировании активных элементов из материала с ЭПФ с использованием математического аппарата требуется зависимости, устанавливающие связь величины фазовой деформации с эксплуатационными нагрузками силового привода. Данные зависимости называются деформационно-силовыми и могут быть получены в результате эксперимента.

В процессе предварительных испытаний активные элементы подвергались различным видам температурной обработки. На этом этапе температура нагрева печи варьировалась от 450<sup>0</sup>С до 850<sup>0</sup>С. Время термообработки активных элементов варьировалось от 30 до 60 минут, при этом охлаждение происходило в печи. Термообработка проводилась с целью устранения возможных внутренних напряжений активных элементов. Далее к активному элементу прикладывалось растягивающее усилие, которое создавало в его сечениях растягивающее напряжение. Потом активный элемент нагревался. Температура активного элемента в момент начала сокращения им своей длины составляла 70<sup>0</sup>С. Для имитации рабочего усилия, развиваемого активным элементом в процессе экспериментальных исследований, использовался пружинный элемент с жесткостью 17 Н/мм. Предварительное натяжение, создаваемое пружинным элементом до начала процесса нагрева активного элемента, составляло 0,04 кН. Интенсивное сокращение активным элементом своей длины прекращалось при температуре 110<sup>0</sup>С. Испытания проводились на установке, представленной на рисунке 3.



Рис. 3. Экспериментальная установка для определения основных характеристик активного элемента

На рисунке 4 представлены результаты испытаний. Активный элемент длиной 160 мм за счет приложения растягивающего усилия деформировался до величины 176 мм. После снятия нагрузки длина активного элемента уменьшалась до 174 мм. При нагреве длина активного элемента уменьшалась до величины 167 мм. При этом рабочий ход составлял 4% от длины активного элемента перед нагревом. Таким образом, максимальное перемещение составляло 7 мм, а максимальное усилие – 0,177 кН.

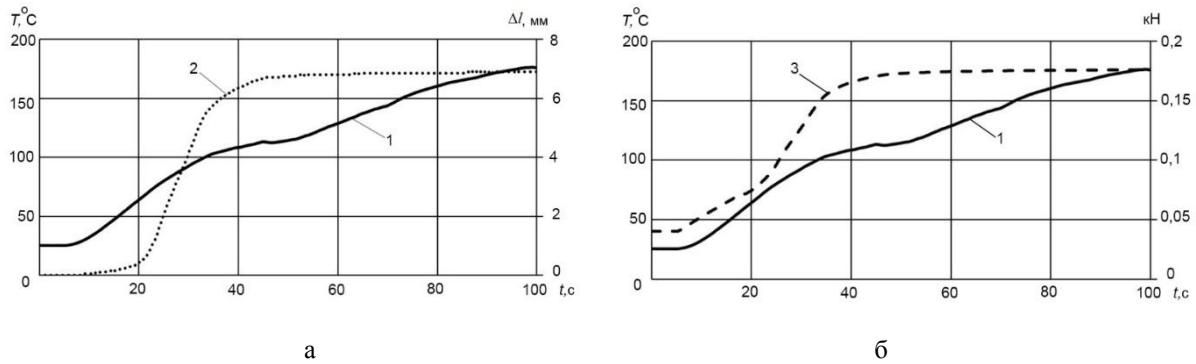


Рис. 4. Результаты испытаний: изменение температуры и относительного удлинения активного элемента; а – изменение температуры и относительного удлинения активного элемента; б – изменение температуры и усилия, развиваемого активным элементом:  
1 – температура; 2 – перемещение; 3 – усилие

В результате экспериментальных исследований получены деформационно-силовые зависимости активного элемента, работающего в условиях одноосного сжатия.

У активных элементов из материалов с ЭПФ управляющим воздействием может быть только температурное поле. При этом, наряду с задачей деформирования, возникает необходимость решать задачу теплопроводности. Для материалов с ЭПФ обе эти задачи являются нелинейными и связанными.

При наземных испытаниях в качестве первого приближения можно принять, что изменение тепловой энергии активного элемента из материала с ЭПФ равно теплу, поступившему за счет электрической энергии минус тепловые потери от естественной конвекции

$$cm \frac{dT}{dt} = RI^2 - \alpha S (T - T_c), \quad (1)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость;  $m$  – масса активного элемента;  $T$  – температура активного элемента;  $t$  – время;  $R$  – сопротивление активного элемента;  $I$  – сила тока;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена;  $S$  – площадь поверхности теплообмена;  $T_c$  – температура окружающей среды.

Следуя [6], решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$T(t) = \bar{T} - (\bar{T} - T_0) \exp(-t/\beta),$$

где  $T = T_0(t=0)$ ;  $\beta = \frac{cm}{\alpha S}$ ,  $\bar{T}$  – равновесная температура.

При расчете изменения температуры активных элементов проводился подбор коэффициента теплообмена. При этом в расчетах учитывалось изменение сопротивления и теплоемкости активных элементов в процессе нагрева. При проведении численного эксперимента полученные результаты хорошо коррелировались с результатами испытаний. Одной из важных характеристик привода раскрытия является время срабатывания. Для задания необходимого времени срабатывания активного элемента привода нужно выбрать подходящее напряжение, подводимое к активному элементу привода. При изменении подводимого к активному элементу напряжения в процессе проведения испытаний было выявлено, что время его срабатывания существенно изменялось. Также необходимо отметить, что несмотря на значительный разброс времени срабатывания активного элемента, его рабочий ход оставался постоянным, а процесс проходил плавно и безударно.

Активные элементы, для управления деформациями которых используется изменение температуры, могут обеспечить медленные (квазистатические) плавные безударные движения космических конструкций изменяемой конфигурации. Это обусловлено тем, что процесс нагрева активных элементов физически невозможно сделать быстрым.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (проект 0705-2020-0047).

## ЛИТЕРАТУРА

- Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (Часть 1) // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 2. С. 51-57.
- Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. Механика больших космических конструкций / М.: Изд-во «Факториал», 1997. 302 с.
- Likhachev, V. A., Razov, A. I., Cherniavsky, A. G., Kravchenko, Y., & Trusov, S. N. (1994, March). Truss mounting in space by shape memory alloys. In Proceedings of the First International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, California, USA (pp. 245-248).
- Karla S., Bhattacharya B. & Munjal, B.S. (2017). Design of shape memory alloy actuated intelligent parabolic antenna for space applications. Smart Materials and Structures, 26(9), 095015.
- Барвинок В. А., Богданович В. И., Грошев А. А. и др. Методика проектирования силовых приводов из материала с эффектом памяти формы для ракетно-космической техники / Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2013. Т. 15. № 6. С. 272-277.
- Zimin V. N., Krylov A. V., Shakhverdov A. O. Development of the mathematical model of the force actuator for deployment of large-sized space structures Journal of Physics: Conference Series 1902 (2021) 012115.
- Riad, A., Ainamany, A. & Benzohra, M. (2017). The shape memory alloy actuator controlled by the Sun's radiation. Materials Research Express, (4)(7), 075701.
- Liang, C. & Rogers, C.A. (1997). Design of shape memory alloy actuators. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 8(4), 303-313.
- Schiedeck F., Hemsel T., Wallaschek J. The use of shape memory alloy wires in actuators // Solid state Phenomena, 2006. Vol. 113. Pp. 195-198.

**Сведения об авторах:**

**Зимин Владимир Николаевич** – д.т.н., старший научн. сотр., заведующий кафедрой космических аппаратов и ракет-носителей МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1,  
**e-mail:** zimin@bmstu.ru)

**Крылов Алексей Владимирович** – к.т.н., доцент кафедры космических аппаратов и ракет-носителей МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1,  
**e-mail:** kav1982@bmstu.ru)

**Кувыркин Георгий Николаевич** – д.т.н., проф., заведующий кафедрой прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1,  
**e-mail:** gnk1914@mail.ru)

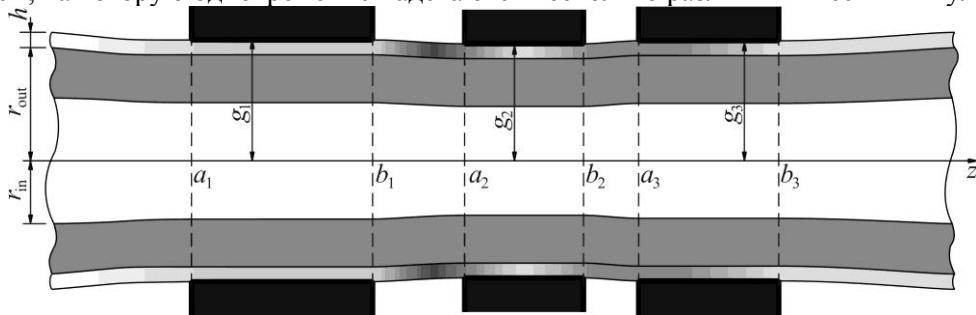
**Шахвердов Артур Олегович** – ассистент кафедры космических аппаратов и ракет-носителей МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1,  
**e-mail:** shah@bmstu.ru)

# О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТИ ВНЕШНЕГО ПОКРЫТИЯ ТРУБЫ НА КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПОД ЖЕСТКИМИ ВТУЛКАМИ

Казаков К.Е.

Работа посвящена постановке и построению аналитического решения задачи контактного взаимодействия системы жестких цилиндрических втулок и трубы с наружным неоднородным покрытием. В промышленности наличие таких покрытий требуется, например, для защиты основного слоя трубы от агрессивных внешних сред, для его электрической изоляции и т.п. В силу процессов производства оно может обладать неоднородностью. Учет подобных особенностей важен при анализе напряженно-деформированного состояния трубы, на которую надеты втулки, так как срок службы такого соединения отличен от срока службы соединения, в котором труба покрыта однородным слоем. В работе показано, что математической моделью вышеописанной задачи является система смешанных интегральных уравнений, содержащих как интегральные операторы с постоянными пределами интегрирования, так и операторы с переменными пределами интегрирования. Кроме того в полученную систему входят функции, описывающие упругие свойства покрытия под каждой из втулок. Примененный в работе подход позволил получить решение, при помощи которого можно производить эффективные вычисления даже в случаях, когда указанные неоднородности описываются сложными быстро изменяющимися или даже разрывными функциями. Это связано с тем, что в выражениях для контактных давлений под каждой из втулок функции, описывающие свойства покрытия, удалось выделить в виде отдельных сомножителей. Поэтому в реальных расчетах для достижения высокой точности достаточно ограничиться сравнительно небольшим количеством слагаемых в ряде, в виде которого представлено решение.

В промышленности, строительстве, машиностроении довольно часто используются многослойные трубы. Это объясняется тем, что конструкции, изготовленные из труб, могут подвергаться воздействию внешних агрессивных сред, должны отвечать требованиям безопасности, удовлетворять дополнительным требованиям и т.д. Часть слоев такой трубы может, например, обеспечивать жесткость конструкции, в то время как другие слои играют роль электрических или термических изоляторов. Для фиксации и соединения различных участков используют различные крепления: муфты, втулки, вставки и т.д. За счет такого взаимодействия напряженно-деформированное состояние трубы в области ее контакта с креплением изменяется. При длительном взаимодействии происходят процессы деформирования и поврежденности полимерных материалов [1], из которых может быть изготовлено покрытие, поэтому учет всех особенностей, влияющих на величины напряжений и деформаций, весьма важен. Некоторые контактные задачи для труб с покрытиями были решены ранее [2–5], однако в указанных работах предполагалось, что все слои однородны, а формы поверхностей креплений, контактирующих с трубой, описываются достаточно простыми функциями. Исследования контактных задач и задач износа для труб с внешними покрытиями и одиночных втулок в случае, когда покрытие может обладать неоднородностью, а формы контактирующих поверхностей описываются сложными функциями, освещены в работах [6–8]. В настоящей статье предложено решение задачи о трубе с неоднородным покрытием, на которую одновременно надеваются несколько различных жестких втулок.



На вязкоупругую стареющую трубу нанесено внешнее упругое покрытие постоянной толщины, свойства которого зависят от продольной координаты. Толщина покрытия значительно меньше внутреннего радиуса стареющей трубы и ее толщины. В некоторый момент времени  $\tau_0$  на такую трубу с натягом насаживаются  $n$  различных жестких втулок, внутренняя поверхность которых имеет постоянный диаметр (см. рисунок). Области контакта известны и их ширины совпадают с ширинами втулок (между втулками и трубой не остается зазора), которые значительно больше толщины покрытия. Также предполагается, что между

слоями трубы и между трубой и втулками осуществляется гладкий контакт. Необходимо определить распределение контактных давлений под каждой втулкой.

Обобщая результаты, полученные в [2, 4, 5], можно показать, что математической моделью поставленной задачи является следующая система интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu^2(z)}{E(z)} h q_i(x,t) + \frac{2(1-\nu_{\text{in}}^2)}{\pi} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{1}{E_{\text{in}}(t-\tau_{\text{in}})} \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{cyl}} \left( \frac{z-\xi}{r_{\text{in}}} \right) q_j(\xi, t) d\xi - \right. \\ \left. - \int_{\tau_0}^t \frac{1}{E_{\text{in}}(\tau-\tau_{\text{in}})} \int_{a_j}^{b_j} k_{\text{cyl}} \left( \frac{z-\xi}{r_{\text{in}}} \right) q_j(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] = r_{\text{out}} + h - g_i = \delta_i, \end{aligned} \quad (1)$$

$$z \in [a_i, b_i], \quad t \geq \tau_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $q_i(z, t)$  – контактные давления под  $i$ -й втулкой,  $E(z)$  и  $\nu(z)$  – модули упругости покрытия, зависящие от продольной координаты  $z$ ,  $E_{\text{in}}(t)$  – модуль упругомгновенной деформации вязкоупругого стареющего слоя,  $\nu_{\text{in}}$  – его коэффициент Пуассона,  $K_{\text{in}}(t, \tau)$  – известное ядро ползучести для материала внутреннего слоя ( $K_{\text{in}}(t, \tau) = E_{\text{in}}(\tau) \partial [E_{\text{in}}^{-1}(\tau) + C_{\text{in}}(t, \tau)] / \partial \tau$ ,  $C_{\text{in}}(t, \tau)$  – мера ползучести, см., например, [5, 9]),  $\tau_{\text{in}} \leq \tau_0$  – момент изготовления трубы,  $a_i$  и  $b_i$  – границы втулок, совпадающие с границами областей контакта,  $r_{\text{in}}$  и  $r_{\text{out}}$  – внутренний и внешний радиусы стареющей трубы в недеформированном состоянии,  $h$  – толщина покрытия,  $g_i$  – внутренний радиус  $i$ -й втулки,  $k_{\text{cyl}}(s)$  – известное ядро контактной задачи для цилиндрических тел, имеющее вид (здесь  $I_0(u)$ ,  $I_1(u)$ ,  $K_0(u)$ ,  $K_1(u)$  – функции Бесселя)

$$k_{\text{cyl}}(s) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(su) du, \quad L(u) = \frac{u[u^2 B_1^2(u) - f(1, u) D_1^2(u) - 1]}{S(u)},$$

$$S(u) = f(1, u) / k_r + f(k_r, u) + k_r u^4 A_1^2(u) - u^2 f(k_r, u) B_1^2(u) - k_r u^2 f(1, u) C_1^2(u) + f(1, u) f(k_r, u) D_1^2(u), \quad f(r, u) = 2(1 - \nu_{\text{in}}) / r + u^2 r, \quad k_r = r_{\text{out}} / r_{\text{in}},$$

$$A_1(u) = I_0(u) K_0(k_r u) - I_0(k_r u) K_0(u), \quad B_1(u) = I_0(u) K_1(k_r u) + I_1(k_r u) K_0(u),$$

$$C_1(u) = I_0(k_r u) K_1(u) + I_1(u) K_0(k_r u), \quad D_1(u) = I_1(u) K_1(k_r u) - I_1(k_r u) K_1(u).$$

Система уравнений (1) может быть приведена к операторному виду с безразмерными переменными и функциями

$$c^*(t^*) \mathbf{D}^*(z^*) \mathbf{q}^*(z^*, t^*) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}^*) \mathbf{F}^* \mathbf{q}^*(z^*, t^*) = \boldsymbol{\delta}^*, \quad z^* \in [-1, 1], \quad t^* \geq 1. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ )

$$\mathbf{q}^*(z^*, t^*) = (q^{1*}(z^*, t^*) \quad q^{2*}(z^*, t^*) \quad \cdots \quad q^{n*}(z^*, t^*))^T, \quad \boldsymbol{\delta}^* = (\delta^{1*} \quad \delta^{2*} \quad \cdots \quad \delta^{n*})^T,$$

$$\mathbf{D}^*(z^*) = \begin{pmatrix} m^1(z^*) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m^2(z^*) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m^n(z^*) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{11*} & \mathbf{F}^{12*} & \cdots & \mathbf{F}^{1n*} \\ \mathbf{F}^{21*} & \mathbf{F}^{22*} & \cdots & \mathbf{F}^{2n*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}^{n1*} & \mathbf{F}^{n2*} & \cdots & \mathbf{F}^{nn*} \end{pmatrix},$$

$$z^* = \frac{2(z - \eta_i)}{\bar{a}_i}, \quad \xi^* = \frac{2(\xi - \eta_j)}{\bar{a}_j}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_{\text{in}}^* = \frac{\tau_{\text{in}}}{\tau_0}, \quad \eta^{i*} = \frac{2\eta_i}{\bar{a}}, \quad \delta^{i*} = \frac{2\delta_i}{\bar{a}},$$

$$c^*(t^*) = \frac{E_{\text{in}}(t - \tau_{\text{in}})}{E_\circ}, \quad m^i(z^*) = \frac{[1 - \nu^2(z)] h E_\circ}{(1 - \nu_{\text{in}}^2) \bar{a}_i E(z)}, \quad q^{i*}(z^*, t^*) = \frac{2\bar{a}_i (1 - \nu_{\text{in}}^2) q_i(z, t)}{\bar{a} E_{\text{in}}(t - \tau_{\text{in}})},$$

$$\mathbf{F}^{ij*} f(z^*) = \int_{-1}^1 k^{ij}(z^*, \xi^*) f(\xi^*) d\xi^*, \quad \mathbf{V}^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*,$$

$$k^{ij}(z^*, \xi^*) = \frac{1}{\pi} k_{\text{cyl}} \left( \frac{z - \xi}{r_{\text{in}}} \right), \quad K^*(t^*, \tau^*) = K_{\text{in}}(t - \tau_{\text{in}}, \tau - \tau_{\text{in}}) \tau_0,$$

где  $\eta_i = 0.5(a_i + b_i)$  – рединная точка  $i$ -й втулки,  $\bar{a}_i = b_i - a_i$  – ее ширина,  $\bar{a} = \min_{i=1,2,\dots,n} \bar{a}_i$ , а  $E_\circ$  – размерный коэффициент (например,  $E_\circ = E_{\text{in}}(0)$ ).

Полученное операторное уравнение (2) практически идентично уранению (6) из [10]: оно является его частным случаем при  $\mathbf{a}(t) \equiv 0$ ,  $\mathbf{g}(x) \equiv 0$ ,  $\delta(t) = \text{const}$ . Более того, ядра интегральных уравнений имеют схожие свойства и асимптотики [8]. Поэтому подход к построению решения будет аналогичен изложенному в [10]. Кратко изложим основные его пункты.

Произведя замену переменных по формуле  $\mathbf{q}^*(z^*, t^*) = \mathbf{D}^{-1/2*}(z^*) \cdot \mathbf{Q}(z^*, t^*)$ , получим новое операторное уравнение, в котором матрица  $\mathbf{D}^*(z^*)$  отсутствует перед первым слагаемым, а ядро нового оператора Фредгольма  $\tilde{\mathbf{F}}$  обладает теми же свойствами, что и ядро исходного оператора  $\mathbf{F}$ :

$$c^*(t^*)\mathbf{Q}^*(z^*, t^*) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}^*)\tilde{\mathbf{F}}^*\mathbf{q}^*(z^*, t^*) = \mathbf{D}^{-1/2*}\delta^*, \quad z^* \in [-1, 1], \quad t^* \geq 1. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{D}^{-1/2*}(z^*)$  — диагональная матрица, на диагонали которой находятся функции  $1/\sqrt{m^1(z^*)}$ ,  $1/\sqrt{m^2(z^*)}$ , ...,  $1/\sqrt{m^n(z^*)}$ .

На основании ортогонализации системы линейно независимых вектор-функций

$$\mathbf{i}^1 / \sqrt{m^1(z^*)}, z^* \mathbf{i}^1 / \sqrt{m^1(z^*)}, (z^*)^2 \mathbf{i}^1 / \sqrt{m^1(z^*)}, \dots, \mathbf{i}^2 / \sqrt{m^2(z^*)}, z^* \mathbf{i}^2 / \sqrt{m^2(z^*)},$$

$$(z^*)^2 \mathbf{i}^2 / \sqrt{m^2(z^*)}, \dots, \mathbf{i}^n / \sqrt{m^n(z^*)}, z^* \mathbf{i}^n / \sqrt{m^n(z^*)}, (z^*)^2 \mathbf{i}^n / \sqrt{m^n(z^*)}, \dots,$$

где  $\mathbf{i}^i$  — единичные векторы с  $i$ -й единичной координатой, получим специальный ортонормированный базис, учитывающий наличие в уравнении функций  $m^i(z^*)$ , связанных заменой переменных с функцией неоднородности покрытия.

Построив указанный базис необходимо найти собственные вектор-функции  $\varphi_k(z^*)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) оператора Фредгольма  $\tilde{\mathbf{F}}$ , входящего в основное интегральное уравнение (3). Это позволяет привести результирующую систему уравнений для функциональных коэффициентов разложения решения к диагональному виду.

Можно показать, что применение указанного подхода позволяет получить решение в виде

$$q^{i*}(z^*, t^*) = \frac{1}{m^i(z^*)} \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t^*) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{km}^i p_m^{i*}(z^*), \quad z_k(t^*) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_k) \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{J_{0,i}} \psi_{k0}^i \delta^{i*}}{c^*(t^*) + \gamma_k},$$

$$\mathbf{W}_k f(t^*) = \int_1^{t^*} R_k^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*, \quad J_{k,i} = \int_{-1}^1 \frac{(\xi^*)^k}{m^i(\xi^*)} d\xi^*, \quad d_{-1,i} = 1,$$

$$p_k^{i*}(z^*) = \frac{1}{\sqrt{d_{k-1,i} d_{k,i}}} \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{k+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z^* & \cdots & (z^*)^k \end{vmatrix}, \quad d_{k,i} = \begin{vmatrix} J_{0,i} & J_{1,i} & \cdots & J_{k,i} \\ J_{1,i} & J_{2,i} & \cdots & J_{k+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{k,i} & J_{k+1,i} & \cdots & J_{2k,i} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z^* \in [-1, 1], \quad t^* \geq 1,$$

где  $R_k^*(t^*, \tau^*)$  — резольвенты ядер  $\gamma_k K^*(t^*, \tau^*)/[c^*(t^*) + \gamma_k]$ , а  $\gamma_k$  и  $\psi_{km}^i$  определяются из решения спектральной задачи

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{\infty} K_{ml}^{ij} \psi_{km}^j = \gamma_k \psi_{km}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots,$$

в которой  $K_{ml}^{ij}$  вычисляются по формуле

$$K_{ml}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_1^1 \frac{k^{ij}(z^*, \xi^*) p_m^{i*}(z^*) p_l^{j*}(\xi^*)}{m^i(z^*) m^j(\xi^*)} dz^* d\xi^*, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad m, l = 0, 1, 2, \dots$$

Сделав обратную замену переменных в (4) можно получить формулы для вычисления контактных давлений в размерном виде

$$\begin{aligned} q^i(z,t) &= \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{z}_k(t) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{km}^i p_m^{i\circ} \left( \frac{2z - (a_i + b_i)}{b_i - a_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \tilde{z}_k(t) &= \frac{\bar{a} E_{\text{in}}(t - \tau_{\text{in}})}{2hE_{\circ}} z_k \left( \frac{t}{\tau_0} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z \in [a_i, b_i], \quad t \geq \tau_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Следует заметить, что в выражении (4) для функций  $q^{i*}(z^*, t^*)$  и в выражении (5) для контактных давлений  $q_i(z, t)$  функции  $m^i(z^*)$  и отношение  $E(z)/[1 - \nu(z)]$ , соответственно, выделены отдельными сомножителями. Это позволяет в реальных расчетах для достижения высокой точности ограничиться сравнительно небольшим количеством слагаемых в ряде даже в случае, когда упругие характеристики покрытия описываются быстро изменяющимися и даже разрывными функциями. Следует отметить, что попытка построения решений с помощью классических подходов, которые не учитывают особенности входящих в систему уравнений функций (например, методом разложения в ряд по тригонометрическим или полиномиальным вектор-функциям), приводит к трудностям при расчетах, в которых исследователи вынуждены ограничиваться конечным, сравнительно небольшим, числом членов ряда. Использование небольшого количества слагаемых (порядка 30–50) объясняется тем, что при большем их числе начинает накапливаться вычислительная погрешность. Более того, даже если эти функции являются постоянными (то есть если покрытие однородно), то применение классических аналитических методов приведет к необходимости решать бесконечную систему уравнений Вольтерра, что вызывает существенные сложности.

Таким образом, в работе построено решение, позволяющее учитывать влияние неоднородности, реологических свойств трубы и близости втулок на распределение контактных давлений, что дает возможность производить точный анализ такого сопряжения при оценке долговечности и надежности конструкции в целом.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и частично поддержана грантом РФФИ №19-51-60001 ЮАР\_т.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А. Старение и разрушение сжимаемых упруго-вязких сред // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). №2. С. 258–265.
2. Манжиров А.В., Черныш В.А. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // Известия Академии Наук СССР. Механика твердого тела. 1988. №6. С. 112–118.
3. Манжиров А.В., Черныш В.А. Контактная задача для слоистого неоднородного стареющего цилиндра, подкрепленного жестким кольцом // Прикладная механика и техническая физика. 1990. №6. С. 101–109.
4. Манжиров А.В., Черныш В.А. Контактная задача дискретного наращивания неоднородного вязкоупругого стареющего цилиндра системой жестких втулок // Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. №6. С. 1018–1025.
5. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
6. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Wear of a high pressure layered pipe by a rough rigid bush // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. V. 904. Art. ID 012010.
7. Kazakov K.E. On the stresses under a bush on a cylindrical pipe with a nonuniform coating of variable thickness // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2315. Art. ID 020021.
8. Kazakov K.E. On the interaction of rigid bush and pipe with nonuniform coating // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2293. Art. ID 210012.
9. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

10. Kazakov K.E., Parshin D.A. On the indentation of a system of punches into a layered foundation // Engineering Letters. 2019. V. 27. Iss. 1. P. 251–255.

#### **Информация об авторах**

**Казаков Кирилл Евгеньевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

E-mail: [kazakov-ke@yandex.ru](mailto:kazakov-ke@yandex.ru)

# **Модель механики растущих тел для анализа напряженно-деформированного состояния намоточных композитов, армируемых тонкими однонаправленными волокнами**

**Казаков К.Е., Паршин Д.А.**

Разработана математическая модель механики растущих тел, позволяющая проследить эволюцию упругого напряженно-деформированного состояния цилиндрических композитов в процессе их медленного послойного изготовления методом силовой намотки элементарных слоев материала, армируемых достаточно тонкими волокнами в окружном направлении, при произвольной плотности их укладки и силе предварительного натяжения. Полученные аналитические зависимости дают возможность поставить задачи об управлении состоянием формируемого композитного слоя и характеристиками его контактного взаимодействия с используемой оправкой.

1. Композитные материалы находят широкое применение в разнообразных отраслях народного хозяйства. Во многом это объясняется тем, что их применение позволяет добиваться требуемых механических свойств при значительном выигрыше в массе и геометрических параметрах получаемых изделий. Между тем, можно указать и еще одну замечательную особенность композитов: разнообразные уже используемые на практике или же только потенциально мыслимые процессы их изготовления открывают принципиальные возможности для контролируемого или даже целенаправленного формирования требуемых характеристик технологического напряженно-деформированного состояния получаемых в результате композитных изделий. К таким процессам относятся, безусловно, всевозможные аддитивные — в самом общем смысле данного термина — процессы изготовления композитов, прежде всего послойного. Однако для того, чтобы воспользоваться этими возможностями, необходимо четко понимать механизмы, которые обуславливают возникновение и развитие механических напряжений в конкретных процессах изготовления композитов, а также разработать адекватное математическое описание этих механизмов.

Следует отметить, что традиционные подходы к изучению проблем механики, связанных с процессами аддитивного изготовления, оперируют стандартными категориями механики деформируемых твердых тел, дополняя их теми или иными поправками, призванными учесть изменяющиеся в процессе изготовления форму и свойства тела. Однако такие подходы не могут быть в полной мере адекватными ввиду совершенно особой кинематики процессов деформирования растущих тел — таких твердых тел, которые деформируются одновременно с пополнением их новыми материальными элементами. Для описания механического поведения подобных деформируемых твердых тел требуется разработка принципиально новых подходов, чему и посвящены научные работы сложившейся за последние двадцать с лишним лет под руководством профессора А.В. Манжирова научной школы по механике растущих тел (см., например, [1–15]). Именно на эти подходы опирается представляемое в настоящей работе исследование.

Одним из давно используемых методов послойного изготовления композитных материалов и изделий является метод многослойной намотки армируемого материала на оправку определенной формы. Предварительное натяжение наматываемых слоев обуславливает возникновение и дальнейшее развитие полей технологических напряжений во всем формируемом таким методом теле. Характер текущей и результирующей картины напряженно-деформированного состояния будет зависеть от множества конкретных параметров рассматриваемого технологического процесса. Настоящая работа посвящена построению и анализу одной из достаточно простых математических моделей механики растущих тел для описания технологического процесса изготовления цилиндрического изделия круговой формы методом многослойной силовой намотки композитного материала, армируемого однонаправленными волокнами.

2. В настоящей работе моделируется процесс последовательной укладки на поверхность изготавливаемого тела элементарных слоев материала относительно небольшой толщины. В каждом таком слое содержится в радиальном направлении один виток армирующего волокна, положение которого в толще связующего не является четко определенным. В продольном направлении витки располагаются последовательно друг за другом под прямым углом к продольной оси, но без жестко фиксированного шага и без какой-либо привязки к

расположению витков в уложенных ранее элементарных слоях. В описанной ситуации корректно считать, что эквивалентные механические свойства получаемого в результате намотки композита будут трансверсально изотропными в окружном направлении [16]. Действительно, в такой ситуации осевое сечение получаемого тела будет в окрестности произвольной точки пронизываться в нормальном (окружном) направлении большим количеством вполне хаотично распределенных волокон.

В процессе намотки допускается изменение толщины укладываемых элементарных слоев материала, которое происходит независимо от циклов оборачивания этих слоев вокруг формируемого цилиндрического композитного слоя. Будем считать, что при этом суммарная толщина  $h$  последнего в среднем остается одинаковой во всех осевых сечениях на протяжении всего процесса и, соответственно, данный процесс протекает как осесимметричный.

Ввиду оговоренной низкой скорости намотки, требуя также отсутствие быстрых изменений скорости намотки по ходу процесса, будем рассматривать задачу о деформировании послойно получаемого композитного тела в квазистатическом приближении. Поскольку это тело является достаточно протяженным в осевом направлении, будем изучать случай плоского деформированного состояния. Заметим, что квазистатическая постановка задачи о деформировании растущего тела вовсе не подразумевает стационарность его напряженно-деформированного состояния: это состояние будет изменяться с течением времени  $t$  в силу постоянного вовлечения в процесс деформирования элементов нового материала, находящихся в собственном, не связанном с состоянием уже сформированной части тела, напряженном состоянии и передающих вследствие этого дополнительную нагрузку на растущее тело. При малой скорости намотки и относительной малости толщины каждого отдельно накладываемого элементарного слоя дополнительного материала допустимы также следующие два упрощения. Во-первых, можно моделировать изучаемый процесс намотки как процесс непрерывного роста деформируемого твердого тела, в котором за каждый бесконечно малый промежуток времени к этому телу присоединяется бесконечно тонкий слой нового материала. Во-вторых, можно отказаться от учета эффектов, связанных с запаздыванием деформации в получаемом путем намотки материале, останавливаясь на анализе только упругих деформаций, поскольку, как показано в [17], влияние деформационного последействия на процесс развития напряжений в растущем теле нивелируются очень низкой скоростью его наращивания новым материалом.

Исследуем случай малой деформации рассматриваемого послойно изготавливаемого композитного тела. В этом случае функцию  $h(t)$ , описывающую закон изменения со временем  $t$  толщины растущего на используемой оправке композитного слоя материала, можно считать заданной в силу реализуемой программы намотки, причем строго возрастающей. Это обосновывается тем, что толщина растущего слоя в рассматриваемом процессе изменяется с течением времени, вообще говоря, в силу двух факторов — добавления к телу нового материала и деформирования этого тела. При малой деформации вторым фактором можно пренебречь по сравнению с первым.

В разрабатываемой математической модели не будем принимать во внимание податливость используемой оправки, считая ее принципиально более жесткой по сравнению с формируемым на ней слоем композитного материала. Это означает, что внутренний радиус  $a$  этого слоя, совпадающий с радиусом рабочей поверхности оправки, не будет изменяться с течением времени. Это предположение не является принципиальным в разрабатываемой модели, от него возможно отказаться ценой усложнения всех зависимостей, получаемых в результате решения соответствующей задачи механики.

3. Пусть далее  $\theta$  — окружная,  $z$  — продольная,  $r$  — радиальная координаты в системе отсчета, связанной с жесткой оправкой. Как указано выше, направление, локально задающее ось изотропии в данной точке, совпадает с направлением изменения криволинейной координаты  $\theta$ . При этом перпендикулярные ему направления изменения криволинейных координат  $z$  и  $r$  задают локальный ортогональный базис в плоскости изотропии, проходящей через данную точку.

Обозначим через  $V_\theta$ ,  $V_z$ ,  $V_r$  компоненты поля скоростей деформационного смещения точек растущего композитного слоя в рассматриваемой криволинейной системе координат. Условия

плоского деформированного состояния и осевой симметрии процесса накладывают следующие ограничения на поле скоростей:

$$V_\theta = V_\theta(r, t), \quad V_z \equiv 0, \quad V_r = V_r(r, t).$$

Пренебрегая деформационными смещениями точек формируемого твердого цилиндрического тела, соответствующими его закручиванию в рассматриваемой системе координат вокруг продольной оси, будем иметь дополнительно условие зеркальной симметрии поля скоростей:

$$V_\theta \equiv 0.$$

Удовлетворяющему указанным условиям полулю скоростей отвечает тензор скоростей деформации, имеющий только две отличные от нуля физические компоненты в рассматриваемой криволинейной ортогональной системе координат — соответствующие диагональные компоненты

$$\xi_\theta = \frac{V_r}{r}, \quad \xi_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}.$$

Эти компоненты необходимо связать уравнениями состояния со скоростями изменения нормальных компонент тензора напряжений — единственных ненулевых компонент этого тензора в рассматриваемой системе координат. Для соответствующего разрабатываемой модели случая эквивалентной трансверсальной изотропии получаемого намоткой упругого композитного материала (см. п. 2) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\theta\theta} & C_{\theta r} \\ C_{\theta r} & C_{zr} \\ C_{\theta r} & C_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\theta \\ \xi_r \end{pmatrix},$$

где  $C_{\theta\theta}$ ,  $C_{\theta r}$ ,  $C_{zr}$ ,  $C_{rr}$  — константы материала.

Стандартное уравнение равновесия в напряжениях остается, очевидно, справедливым и в разрабатываемой модели. Как его следствие можем записать следующее уравнение для скоростей изменения напряжений в рассматриваемой системе криволинейных координат:

$$\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} \right) = 0, \quad a < r < a + h(t).$$

Сцепление наматываемого композитного слоя с используемой жесткой оправкой обеспечивается граничным условием

$$V_r|_{r=a} = 0.$$

Внешняя поверхность формируемого слоя, на которую в процессе намотки накладываются дополнительные элементарные слои материала, в модели непрерывно растущего твердого тела должна двигаться в пространстве в нормальном к слою направлении со скоростью

$$v(t) = \frac{dh(t)}{dt},$$

которая определяется реализуемой программой намотки. Можно показать (см., например, [18]), что на внешней поверхности растущего тела рассматриваемой формы должно задаваться краевое условие, определяющее стартовую скорость изменения радиального напряжения в только что присоединившемся к этой поверхности и вошедшем в состав растущего сплошного твердого тела очередном элементарном слое нового материала:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} = -\frac{\sigma_0(t)v(t)}{a + h(t)}, \quad r = a + h(t),$$

где известная в силу реализуемой программы намотки функция  $\sigma_0(t)$  задает напряжение преднатяжения в окружном направлении накладываемого в момент времени  $t$  элементарного слоя материала:

$$\sigma_\theta|_{r=a+h(t)} = \sigma_0(t), \quad \sigma_z|_{r=a+h(t)} = \sigma_r|_{r=a+h(t)} = 0.$$

Формулировка условия на внешней поверхности растущего композитного слоя замыкает постановку краевой задачи для определения скоростей изменения характеристик напряженно-деформированного состояния этого слоя в моделируемом процессе его медленной силовой намотки. Оказывается возможным построить точное аналитическое решение поставленной

неклассической задачи механики, которое не приводится здесь ввиду ограниченности объема статьи. Соответствующие аналитические зависимости дают возможность сформулировать различные по постановке задачи о технологическом управлении этими характеристиками, в том числе, с целью минимизации риска разрушения композита как уже во время изготовления, так и в конкретных условиях дальнейшей работы [19]. Разработанная модель также позволяет определить эволюцию контактного давления со стороны наматываемого слоя композитного материала на используемую при его намотке оправку, что чрезвычайно актуально для анализа устойчивости и износа последней [20–23]. Кроме того, полученные зависимости позволяют решить задачу о нахождении остаточных напряжений в изготовленном композитном слое после его отделения от оправки. Подобные напряжения неизбежны в любом аддитивном процессе получения материалов: они обусловлены самой спецификой таких процессов и объясняются несовместностью деформирования различных материальных элементов, составляющих всякое аддитивно формируемое тело [24].

Исследование выполнено по тематике госзадания № АААА-А20-120011690132-4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Accretion of a viscoelastic ball in a centrally symmetric force field // Mechanics of Solids. 2006. Vol. 41, No. 1, P. 51-64.
2. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Modeling the accretion of cylindrical bodies on a rotating mandrel with centrifugal forces taken into account // Mechanics of Solids. 2006. Vol. 41, No. 6. P. 121-134.
3. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Arch structure erection by an additive manufacturing technology under the action of the gravity force // Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50, No. 5. P. 559-570.
4. Manzhirov A.V. Fundamentals of mechanical design and analysis for AM fabricated parts // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. P. 59-65.
5. Manzhirov A.V. Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies // Procedia Engineering. 2017. Vol. 173. P. 11-16.
6. Manzhirov A.V. Mechanical design of AM fabricated prismatic rods under torsion // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12002.
7. Parshin D.A. Analytic solution of the problem of additive formation of an inhomogeneous elastic spherical body in an arbitrary nonstationary central force field // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, No. 5. P. 530-540.
8. Manzhirov A.V. Mechanical analysis of an AM fabricated viscoelastic shaft under torsion by rigid disks // Proceedings of the World Congress on Engineering 2017. Vol. 2230 of Lecture Notes in Engineering and Computer Science. London, U.K, 2017. P. 856-860.
9. Manzhirov A.V. Theory of continuous additive growth for solids // IUTAM Symposium on Mechanical design and analysis for AM technologies 2018. Symposium materials / Eds. A.V. Manzhirov and E.V. Murashkin. Moscow: IPMech RAS, 2018. P. 27-29.
10. Manzhirov A.V. What is inside AM fabricated parts? the nature of residual stresses and shape distortion // International Journal of Advancements in Technology. 2018. Vol. 9. P. 38.
11. Manzhirov A.V., Parshin D.A. Analytical solution of the mechanical problem on additive thickening of aging viscoelastic tapers under nonstationary longitudinal end forces // Engineering Letters. 2018. Vol. 26, No. 2. P. 267-275.
12. Manzhirov A.V. Some problems in mechanics of growing solids with applications to AM technologies // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991. P. 012056.
13. Manzhirov A.V., Mikhin M.N. 2D problems of surface growth theory with applications to additive manufacturing // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991. P. 012057.
14. Parshin D.A. Solving a problem of theory of viscoelasticity for continuously accreted solids with the satisfaction of static boundary conditions in the integral sense // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1203. P. 012006.
15. Parshin D.A. Mathematical modelling of the process of internal technological stress fields development in cylindrical solids being layer-by-layer made of ageing viscoelastic materials // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479. P. 012145.

16. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. 2-е изд., перераб. и доп. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1980. 247 с.
17. Parshin D.A. Impact of the rate of the additive process of forming a heavy structure deforming in creep on the development of its technological stresses // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. P. 070029.
18. Parshin D.A. Technological controlling the contact pressure onto a cylindrical substrate from a coating being formed additively on its outer surface // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2340. P. 040005.
19. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Kazakov K.Ye. Axisymmetric stressed state of uniformly layered space with periodic systems of internal disc-shaped cracks and inclusions // Herald of the Bauman Moscow State Technical University: Natural Sciences Series. 2020. Vol. 89, No. 2. P. 25-40.
20. Kazakov K.E., Manzhirov A.V. Axisymmetric contact between an annular rough punch and a surface nonuniform foundation // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, No. 4. P. 444-451.
21. Kurdina S.P., Kazakov K.E. Axisymmetric contact problem for a punch and nonuniform foundation with rough surfaces // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2116. P. 380006.
22. Kazakov K.E. Wear of elastic tube with nonuniform coating by rigid bush // E3S Web of Conferences. 2020. Vol. 162. P. 02002.
23. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Contact problems for bodies with complex coatings // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43, No. 13. P. 7692-7705.
24. Bychkov P.S., Kozintsev V.M., Manzhirov A.V., Popov A.L. Determination of residual stresses in products in additive production by the layer-by-layer photopolymerization method // Mechanics of Solids. 2017. Vol. 52, No. 5. P. 524-529.

### Сведения об авторах

**Казаков Кирилл Евгеньевич** – старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела

E-mail: [kazakov-ke@yandex.ru](mailto:kazakov-ke@yandex.ru)

**Паршин Дмитрий Александрович** – старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела

E-mail: [parshin@ipmnet.ru](mailto:parshin@ipmnet.ru)

# **О коэффициенте рассеяния энергии стеклопластиковых трубчатых элементов с изначально нарушенной симметрией армирования относительно оси.**

**Карапетян К. А., Валесян С. Ш.**

Рассматривается вопрос влияния нарушения симметричности армирования относительно оси (разориентация армирования) на деформационное поведение и коэффициент рассеяния энергии тонкостенных стеклопластиковых труб, подверженных циклическому одноосному растяжению и простому кручению.

Было выявлено, что, в условиях циклического нагружения, у разориентированных трубчатых элементов, в отличие от неразориентированных, кроме циклических основных деформаций (зарегистрированных в направлении действия нагрузки) возникают и деформации, сопутствующие основным: сдвиговые при циклическом осевом растяжении и продольные, при циклическом кручении труб.

Выявлены доли каждой из деформаций в потере энергии стеклопластиковых труб с изначально нарушенной симметрией армирования относительно оси, подвергаемых циклическому нагружению указанными выше силовыми факторами.

Сформулированы практические рекомендации.

## **Введение**

Известно, что отклонение величины угла армирования от предусмотренного его значения (разориентация армирования) может существенным образом повлиять на характер деформационного поведения пространственных элементов из армированных пластиков при любых режимах нагружения [1,2]. В частности, нарушение симметричности направления армирования относительно оси стеклопластиковых тонкостенных трубчатых элементов, испытывающих циклическое одноосное растяжение, может явиться причиной возникновения существенных циклических сдвиговых деформаций, сопутствующих основным осевым (зарегистрированным в направлении действия внешней нагрузки) [2]. В случае циклического кручения таких труб это нарушение может привести к возникновению циклических осевых деформаций, сопутствующих основным сдвиговым деформациям [2].

Цель настоящей работы заключается в выявлении доли основных и сопутствующих основным деформаций в потере энергии стеклопластиковых трубчатых элементов с изначально нарушенной симметрией армирования относительно оси при повторно-статическом растяжении и простом кручении.

## **Методика проведения исследований**

Экспериментальная часть исследований была проведена с использованием трубчатых элементов- опытных образцов (с внутренним диаметром 38 мм, толщиной стенки 2.25 мм и длиной 285 мм), размеры которых соответствуют требованиям опробированных рекомендаций [3]. Трубы были изготовлены из пропитанной модифицированной эпоксидной смолой стеклоткани полотняного плетения с основным перекрытием [4] марки Т-23 (ТУ 6-11-231-76) с соотношением количества волокон вязки основы и утка 1.8:1.0. Величина коэффициента армирования стеклопластика составляет  $\mu=0.45$  ( $\mu_{\text{основа}}=0.29$ ,  $\mu_{\text{уток}}=0.16$ ).

Для испытания были изготовлены 2 партии стеклопластиковых трубчатых образцов. У одной партии опытных образцов величина угла между направлениями волокон основы стеклоткани и их оси составляла  $\varphi=0^\circ$ , а у другой партии -  $\varphi=6-8^\circ$  (образцы с нарушенной симметрией армирования).

До проведения экспериментов опытные образцы после изготовления в течении 9 лет хранились в лабораторном помещении при температуре  $20\pm6^\circ\text{C}$  и относительной влажности  $60\pm8\%$ .

На одной части из общего числа указанных выше обоих разновидностей изготовленных трубчатых образцов были определены пределы сопротивления разрушению при осевом растяжении  $\sigma_{zz}^{+B}$  и при простом кручении  $\tau_{\theta z}^B$ .

При проведении циклических испытаний труб на осевое растяжение (средняя скорость нагружения - 16.2 МПа/мин) и на простое кручение (средняя скорость нагружения - 6 МПа/мин) значение амплитудного напряжения составляло, соответственно,  $0.6 \sigma_{zz}^{+B}$  и  $0.3 \tau_{\theta z}^B$ .

Базовое значение числа циклов  $n$  испытаний труб было принято равным 12.

Для вычисления значений коэффициента относительного рассеяния за цикл энергии (энергии диссипации)  $\Psi$  была использована нижеприведенная формула [2]:

$$\Psi = 1 - \frac{\vec{b} \left[ -(\Gamma_{amn} - \Gamma_{ocm}) - \vec{X} \ln \left| 1 - \frac{1}{\vec{X}} (\vec{\Gamma} - \Gamma_{ocm}) \right| \right]}{\vec{b} \left[ \Gamma_{amn} - \vec{X} \ln \left( 1 + \frac{1}{\vec{X}} \Gamma_{amn} \right) \right]} \quad (1)$$

Формула (1) была получена на основе известной зависимости [5]  $\Psi = \Delta W / W$  (где,  $\Delta W$ - величина рассеянной за цикл энергии, а  $W$ -величина энергии деформирования) с использованием дробнолинейной функции, применяемой для аналитического описания экспериментально полученной связи между интенсивностями касательных напряжений  $T$  и деформаций сдвига  $\Gamma$  на участках восходящей ( $\rightarrow$ ) и нисходящей ( $\leftarrow$ ) ветвей петли гистерезиса.

В вышеприведенной формуле (1)  $\Gamma_{ost}$  и  $\Gamma_{amp}$  – величины интенсивностей остаточных и амплитудных деформаций сдвига цикла, соответственно, а  $\vec{X} = \vec{a} / \vec{b}$ , где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - параметры аппроксимации кривых петель гистерезиса.

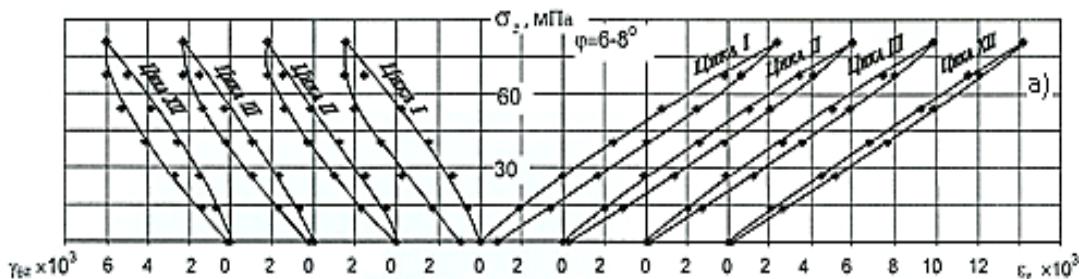
### Полученные результаты и их обсуждение

Отметим, что подробную информацию о деформационном поведении рассматриваемых здесь стеклопластиковых трубчатых элементов при повторно-статических нагрузлениях растягивающим усилием, а также крутящим моментом, можно получить из работы [2]. В настоящей работе приводятся отдельные данные из [2], которые необходимы для проведения сравнительного анализа представленных результатов и формулирования некоторых практических рекомендаций.

Было установлено, что предел сопротивляемости разрушению как при осевом растяжении  $\sigma_{zz}^{+B}$ , так и при простом кручении  $\tau_{\theta z}^B$  стеклопластиковых труб мало зависит от величины угла их армирования. Среднее значение этих характеристик можно принять равным  $\sigma_{zz}^{+B} = 142$  МПа,  $\tau_{\theta z}^B = 47$  МПа.

Установлено также, что значения модуля Юнга и модуля сдвига у тканевого стеклопластика при угле армирования  $\varphi = 6-8^\circ$  оказываются соответственно  $\approx 30\%$  и  $\approx 20\%$  меньшими, чем в случае  $\varphi = 0^\circ$ .

У стеклопластиковых труб с изначально нарушенной симметрией армирования относительно оси (трубы с  $\varphi = 6-8^\circ$ ), в отличии от элементов с ненарушенной симметрией армирования (трубы с  $\varphi = 0^\circ$ ), кроме циклических деформаций, наблюдавшихся в направлении действия внешней нагрузки (основные деформации), были зафиксированы и деформации, сопутствующие основным деформациям: сдвиговые- при циклическом осевом растяжении и продольные- при циклическом кручении труб (рис.1).



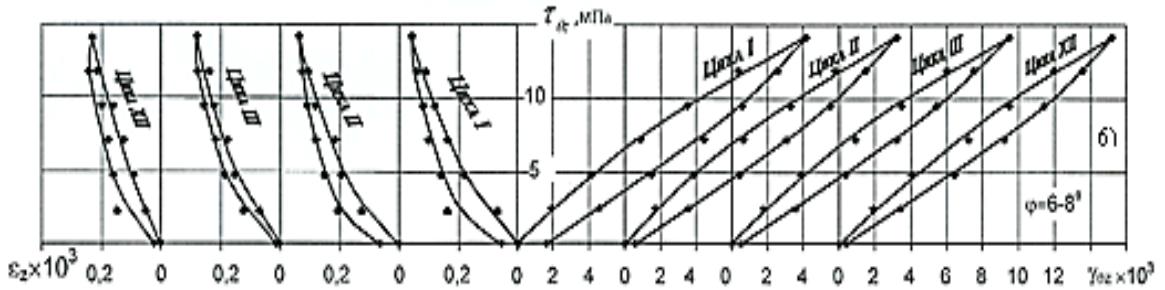


Рис.1. Диаграммы деформирования в пределах цикла в режиме нагружение-разгрузка в условиях осевого растяжения (а) и простого кручения (б) стеклопластиковых труб с углом армирования  $\phi=6-8^\circ$ .

Изменение величины коэффициента  $\Psi$  в зависимости от номера  $n$  циклического нагружения растяжением, а также кручением труб как с углом армирования  $\phi=0^\circ$ , так и при угле  $\phi=6-8^\circ$  (рис.2), носит практически один и тот же характер: с увеличением  $n$  значение коэффициента  $\Psi$  монотонно уменьшается с существенно затухающей скоростью.

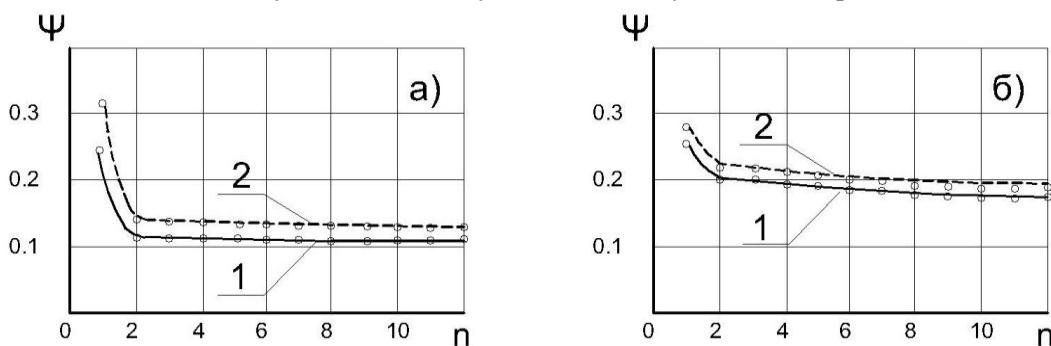


Рис. 2 Кривые изменения коэффициента рассеяния энергии  $\Psi$  стеклопластиковых трубчатых элементов с углом армирования  $\phi=0^\circ$  (кривая 1) и  $\phi=6-8^\circ$  (кривая 2), подвергнутых циклическому осевому растяжению (а) и простому кручению (б), в зависимости от номера цикла испытаний  $n$ .

При этом, отношение значений коэффициентов  $\Psi$ :

- полученных для I и XII циклов испытаний, практически не зависит от величины угла армирования  $\phi$  и составляет 2.2-2.3 при циклическом растяжении труб и примерно 1.5 – в случае их циклического кручения;
- рассчитанных для трубчатых элементов с углами армирования  $\phi=6-8^\circ$  и  $\phi=0^\circ$ , при одном и том же номере циклов испытаний, мало зависит от номера цикла испытаний  $n$  и составляет 1.22-1.27 при циклическом растяжении труб и 1.11-1.13 – при их циклическом кручении.

И так, в условиях циклического нагружения, у стеклопластиковых труб с  $\phi=6-8^\circ$ , кроме циклических основных деформаций (продольных  $\varepsilon_{zz}$  и сдвиговых  $\gamma_{\theta z}$  деформаций зарегистрированных, соответственно, при осевом растяжении и простом кручении труб) возникают и циклические деформации, сопутствующие основным деформациям: сдвиговые ( $\gamma_{\theta z}$ ) – в случае осевого растяжения труб и продольные ( $\varepsilon_{zz}$ ) – при их простом кручении.

Сказанное указывает на то, что рассчитанные согласно (1) значения коэффициента рассеяния энергии стеклопластиковых труб с  $\phi=6-8^\circ$  (в дальнейшем изложении текста они условно будут названы суммарными коэффициентами рассеяния энергии, наблюдаемыми при циклическом растяжении и простом кручении труб, и будут обозначены через  $\Psi_{p,sum}$  и  $\Psi_{k,sum}$ , соответственно) можно разбить на соответствующие слагаемые компоненты и представить в следующем виде:

$$\Psi_{p.cym} = \Psi_{p.zz} + \Psi_{p.\theta z}, \quad (2)$$

$$\Psi_{k.cym} = \Psi_{k.\theta z} + \Psi_{k.zz}, \quad (3)$$

где  $\Psi_{p.zz}$  и  $\Psi_{p.\theta z}$  – коэффициенты рассеяния энергии, возникающие от осевого удлинения и от сопутствующего кручения в случае циклического осевого растяжения труб, соответственно, а  $\Psi_{k.\theta z}$  и  $\Psi_{k.zz}$  – коэффициенты рассеяния энергии, возникающие от кручения и от сопутствующего удлинения при циклическом кручении труб, соответственно.

Кривые изменения суммарных коэффициентов энергии цикла и их соответствующих слагаемых компонентов в зависимости от номера цикла  $n$  нагружения-разгрузки стеклопластиковых труб с  $\phi=6-8^0$  приведены на рис.3.

Как замечаем из данных рис.3, кривые изменения как суммарных, так и слагаемых коэффициентов рассеяния энергии в зависимости от номера цикла  $n$  практически подобны в каждом из рассматриваемых здесь случаев циклического нагружения стеклопластиковых труб с  $\phi=6-8^0$ .

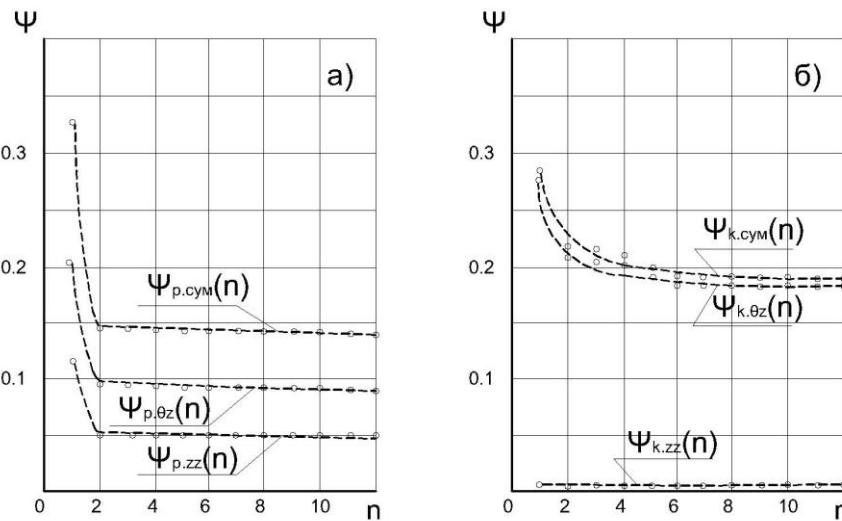


Рис.3 Кривые изменения суммарных коэффициентов энергии цикла и их слагаемых компонентов стеклопластиковых трубчатых элементов с  $\phi=6-8^0$ , подвергнутых циклическому осевому растяжению (а) и простому кручению (б) в зависимости от номера цикла испытания  $n$ .

Сравнение данных рис.3.а показывает, что величина отношений  $\Psi_{p.zz}/\Psi_{p.cym}$  и  $\Psi_{p.\theta z}/\Psi_{p.cym}$ , определенная при одном и том же номере цикла нагружения-разгрузки стеклопластиковых труб ( $\phi=6-8^0$ ) растягивающим усилием, мало зависит от номера цикла  $n$  испытаний и составляет 0.34-0.36 и 0.62-0.63, соответственно. Это означает, что независимо от номера цикла нагружения-разгрузки, величина потери энергии, обусловленной возникновением сдвиговых деформаций, сопутствующих основным осевым деформациям труб, оказывается на 72-85% большей по сравнению с потерей энергии, возникающей от осевого удлинения этих же труб.

Из сравнения данных рис.3.б следует, что в условиях циклического простого кручения стеклопластиковых трубчатых элементов ( $\phi=6-8^0$ ) величина потери энергии, возникающей от появления продольных деформаций, сопутствующих основным сдвиговым деформациям, оказывается весьма мала. В этом случае потеря энергии, главным образом, исходит от основных сдвиговых деформаций, и ее доля в общей сумме потери энергии составляет примерно 97% не зависимо от номера цикла нагружения-разгрузки труб крутящим моментом.

### Заключение

Таким образом, нарушение симметричности армирования относительно оси тонкостенных трубчатых элементов из армированных пластиков, испытывающих циклическое растяжение или

кручение, может являться причиной возникновения существенных циклических сдвиговых деформаций, сопутствующих основным осевым или циклическим осевым деформациям, сопутствующих основным сдвиговым деформациям. В указанных обоих случаях, матрица композита будет находиться в условиях циклически изменяющегося сложного напряженно-деформированного состояния. А как известно, в большинстве случаев именно разрушение матрицы или поверхности раздела между армирующим компонентом и матрицей, а не разрушение волокон арматуры является причиной преждевременного выхода из строя конструкции из композитов [6].

Считается, что одним из способов предотвращения влияния упомянутого выше отрицательного влияния на работу конструкций из армированных композитов может явиться конструктивный метод решения задачи (предусмотрение симметрично ориентированных ребер жесткости, создающих максимальное препятствие деформированию элементов в том или ином направлении) [7].

Предполагаем, что указанный выше метод может оказаться приемлемым и при проектировании композитных тонкостенных трубчатых элементов, обладающих наименьшими диссипативными характеристиками. При этом, в случае трубчатых элементов, эксплуатирующихся в условиях циклического осевого растяжения, ребра жесткости целесообразно ориентировать таким образом, чтобы они максимально препятствовали появлению и развитию циклических деформаций как осевых, так и сдвиговых. В случае же эксплуатации труб в условиях циклического кручения, ребра жесткости следует спроектировать исходя из того, что они должны максимально сопротивляться образованию только сдвиговых деформаций, так как величина компонента рассеяния энергии, обусловленного циклическим удлинением этих же труб оказывается незначительной.

### **Литература**

1. Карапетян К.А. Влияние начальной разориентации армирования на ползучесть стеклопластиковых труб при одноосном растяжении. Сб. Материалов “Годичная научная конференция Государственного Инженерного Университета Армении”. Ереван. Т.1. 2004. С.276-279.
2. Карапетян К.А. О прочности и деформативных свойствах стеклопластиковых труб при повторно-статическом нагружении в зависимости от отклонений ориентации армирования. Изв. НАН Армении. Механика. Т.54. 2001. N 2. С.70-79.
3. Pagano N.J., Whitney J.M. Geometric design of composite cylindrical characterisation specimens. J. Compos. Mater. July, 1970, P.360-378.
4. Мартынова А.А., Ятченко О.Ф., Васильев А.В. Технология изготовления тканей, М.: Академия, 2007. 304с.
5. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрациях. Журн.техн.физ. (ЖТФ). Т.8. 1938. Вып.6. С.483-499.
6. Hahn H.T. Note on Determination of the Shear Stress-Strain Response of Unidirectional Composites. J. Compos. Mater., N 7. 1973. P.383-386.
7. Карапетян К.А., Валесян С.Ш., Мурадян Н.С. Влияние технологической разориентации армирования на деформационное поведение и сопротивляемость разрушению стеклопластиковых труб при осевом растяжении и внутреннем гидростатическом давлении. Изв. НАН Армении, Механика. Т. 71. 2018. N3. С.36-43.

### **Сведения об авторах:**

**Карапетян Корюн Ашотович** д.т.н., зав. лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 524852  
**E-mail:** koryan@mechins.sci.am

**Валесян Сона Шантовна** кандидат техн.наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения,  
**E-mail:** [svalesyan@yahoo.com](mailto:svalesyan@yahoo.com)

## **Модель формирования состояния материала при гибридном аддитивном производстве металлического сегмента и ее экспериментальное подтверждение**

**Келлер И.Э., Казанцев А.В., Дудин Д.С., Пермяков Г.Л.**

Обсуждается формулировка численной модели, описывающей формирование микроструктуры, собственных напряжений и деформаций, а также прочности линейного металлического сегмента, формируемого гибридным аддитивным производством, а также методы экспериментального подтверждения результатов расчета. Подобная модель требуется для возможности выбирать рациональные режимы проковки наплавленного слоя, создающей необходимый наклеп металла, трансформирующий дендриты в мелкозернистую кристаллическую структуру при наплавлении последующих слоев.

1. Гибридные технологии послойного синтеза металлических изделий активно развиваются в мире. Компания WAAM (Cranfield University) добивается существенного улучшения характеристик прочности (статической и усталостной прочности, трещиностойкости и ударной вязкости) материала и корректировки остаточных напряжений и искажений геометрии при выращивании крупногабаритных сегментированных изделий технологией последовательной наплавки слоя и обкатки его роликом. Европейская коллаборация LASSIM разрабатывает технологию, объединяющую на одной платформе процессы аддитивного производства, послойного деформационного упрочнения, многокоординатной механической обработки, измерений и неразрушающего контроля. Лаборатория К.П. Карунакарана из Индийского института технологии Бомбея разрабатывает технологию гибридного послойного формирования изделий с послойной проковкой пневматическим молотком [1], в сотрудничестве с которой кафедра сварочного производства Пермского национального исследовательского политехнического университета создала установки для гибридного производства изделий из алюминиевых, титановых сплавов и нержавеющих сталей.

Изучение закономерностей формирования состояния материала и полей остаточных напряжений и собственных деформаций изделий для возможности подбора оптимальных технологических параметров привело к необходимости построения математической модели процесса. При этом важно определить характеристики этого состояния и предложить методику проведения эксперимента и их измерения, а также указать измеряемые параметры, по которым результаты расчета по модели могут быть сопоставлены с экспериментом.

2. С этой целью сформулирована модель механики деформируемого твердого тела, в рамках которой этап наплавки материала описывается присоединением слоя с собственными деформациями усадки за счет кристаллизации и охлаждения, которые явно не рассматриваются и изучены ранее [2,3]. Для возможности измерения характеристик состояния материала и собственных полей предложена и реализована методика проковки бруса прямоугольного сечения из сплошного проката изучаемого материала, закрепленного винтами на жесткой платформе. Изменения геометрии, профили микротвердости и остаточных напряжений тонких слоев, вырезанных вдоль и поперек образца для исследуемых материалов (АМг6, 12Х18Н10Т, ВТ6) в зависимости от режима проковки рассматриваются в качестве таких характеристик материала и образца, по которым могут быть сопоставлены расчет и эксперимент.

3. Численная модель проковки бруса была реализована в пакете LS-DYNA, подходящем для решения динамических, контактных, геометрически и физически нелинейных задач. В качестве материала рассматривался упругопластическая модель с функцией текучести Мизеса и изотропным деформационным и скоростным упрочнением, параметры которого определялись для всех исследуемых материалов из испытания на одноосное растяжение и экспериментов на разрезном стержне Гопкинсона – Кольского при трех различных скоростях. Динамические параметры проковки определялись по данным обработки сигналов тензометрированной и акселерометрированной мишени. Изменения геометрии поперечного сечения прокованного бруса измерялись с помощью цифрового оптического микроскопа Hirox KH-7700, профили микротвердости по Виккерсу в поперечном сечении образцов определялись с помощью микротвердомера Shimadzu HMV-G21, профили остаточных напряжений в поперечном и продольном сечениях образцов — рентгеновским дифрактометром XSTRESS-3000.

Установлено, что данная методика позволяет надежно определять искажения геометрии поперечного сечения бруса-образца и толщину погранслоя наклепанного материала, контрольные характеристики которых могут быть сопоставлены с данными расчета. В рамках упрощенной постановки в качестве внутренней переменной, характеризующей состояние материала и его распределение в погранслое, можно рассматривать накопленную пластическую деформацию. Достоверные распределения остаточных напряжений в сечениях образца с помощью данной методики пока получить не удалось.

Подобная методика эксперимента с бруском в качестве образца будет реализована для изучения влияния наплавки слоя и проковки совместно и по-отдельности.

В дальнейшем модель материала будет усовершенствована. Она должна отражать рекристаллизацию или перекристаллизацию наклепанного металла в процессе воздействия критических температур при наплавке последующего слоя, в ходе которых во всех исследуемых материалах образуется мелкозернистая кристаллическая микроструктура, обеспечивающая высокую прочность изделия, выращенного гибридным аддитивным производством. Для этого в численную модель будет включена задача теплопроводности с необходимыми источниками и модель рекристаллизации (Джонсона–Мела–Аврами–Колмогорова либо другой).

Работа выполнена по гранту N 21-19-00715 Российского научного фонда.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kapil S., Legesse F., Kulkarni P.M., Joshi P., Desai A., Karunakaran K.P. Hybrid Layered Manufacturing using Tungsten Inert Gas Cladding. Progress in Additive Manufacturing. 2016. Vol. 1. No. 1. P. 79-91.
2. Shchitsyn Y. D., Belinin D. S., Neulybin S. D., Terentev S. A., Plotnikova N. V. Development of Layered Growth Technology for a Workpiece of Highly Alloyed Steel by Plasma Surfacing. Metallurgist. 2017. Vol. 61. No. 5-6. P. 418-423.
3. Trushnikov D. N., Mladenov G. M. Numerical model of the plasma formation at electron beam welding. Journal of Applied Physics. 2015. Vol. 117, N1. P. 013301.

### Сведения об авторах:

**Келлер Илья Эрнестович** – профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин, +7 (342) 239 13 40, заведующий лабораторией, Институт механики сплошных сред УрО РАН, лаборатория нелинейной механики деформируемого твердого тела, +7 (342) 237 83 07

E-mail [kie@icmm.ru](mailto:kie@icmm.ru)

**Казанцев Александр Владимирович** – старший преподаватель, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин, +7 (342) 239 13 40

E-mail [alexkazancev@bk.ru](mailto:alexkazancev@bk.ru)

**Дудин Дмитрий Сергеевич** – аспирант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра динамики и прочности машин, +7 (342) 239 13 40, инженер, Институт механики сплошных сред УрО РАН, лаборатория нелинейной механики деформируемого твердого тела, +7 (342) 237 83 07

E-mail [dmitryovj@yandex.ru](mailto:dmitryovj@yandex.ru)

**Пермяков Глеб Львович** – старший научный сотрудник, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра сварочного производства, метрологии и технологий материалов, +7 (342) 219 84 63

E-mail [svarika@pstu.ru](mailto:svarika@pstu.ru)

# Примеры точных решений краевых задач теории упругости для усеченного клина

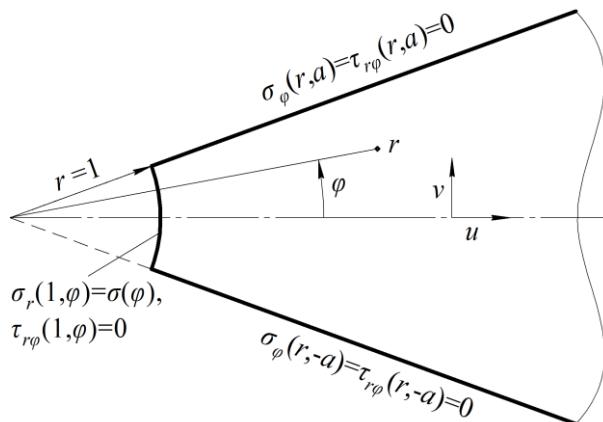
Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Yu G.

В статье приведены примеры точных решений краевых задач теории упругости для усеченного клина. Прямолинейные стороны клина свободны, а на его круговом «торце» заданы нормальные напряжения (касательные напряжения считаются равными нулю). Решения ищутся в виде разложений по собственным функциям Папковича–Фадля. Коэффициенты разложений определяются в простом явном виде.

**1. Введение.** В статьях [1–3] и других была построена теория разложений по собственным функциям Папковича–Фадля в декартовой системе координат, и на ее основе решены различные задачи для полуполосы и прямоугольника. В этих решениях напряжения и перемещения представляются рядами, коэффициенты которых определяются с помощью функций, биортогональных к функциям Папковича–Фадля, т.е. в простом явном виде, как в известных периодических решениях в тригонометрических рядах Фурье [4]. На торце полуполосы (прямоугольника) ряды по собственным функциям Папковича–Фадля сходятся так же, как и тригонометрические. Это связано с тем, что собственные функции Папковича–Фадля являются целыми функциями экспоненциального типа, а собственные числа – нулями целых функций экспоненциального типа [5], вид которых зависит от вида граничных условий на длинных сторонах полуполосы. Фактически эти два обстоятельства лежат в основе возможности построения точного решения бигармонической проблемы в декартовой системе координат.

Решения в полярной системе координат для усеченного клина или части кольца (круговой прямоугольник) также представляются рядами по собственным функциям Папковича–Фадля, которые обладают теми же свойствами, что и их аналоги в декартовой системе координат, т.е. собственные функции являются целыми функциями экспоненциального типа, а собственные числа – нулями целых функций экспоненциального типа, вид которых определяется тем, какие граничные условия заданы на прямолинейных сторонах клина. Поэтому принципиальная возможность построения теории, аналогичной теории в декартовой системе координат, существует, хотя математические средства, используемые при этом, могут иногда быть совсем другими.

**2. Постановка краевой задачи.** В полярной системе координат  $\{r \geq 1, |\varphi| \leq a \leq \pi\}$  рассмотрим четно-симметричную деформацию усеченного клина, схематично показанного на фиг. 1.



Фиг. 1. Усеченный клин

Длинные стороны клина свободны, т.е.

$$\sigma_\varphi(r, \pm a) = \tau_{r\varphi}(r, \pm a) = 0, \quad (2.1)$$

а на его «торце» при  $r = 1$  заданы нормальное и нулевое касательное напряжения

$$\sigma_r(1, \varphi) = \sigma(\varphi), \tau_{r\varphi}(1, \varphi) = 0. \quad (2.2)$$

Функция  $\sigma(\varphi)$  четна и самоуравновешена, т.е.

$$\int_{-a}^a \sigma(\varphi) d\varphi = 0. \quad (2.3)$$

Следуя [6], введем новую независимую переменную, связанную с переменной  $r$  формулами

$$r = e^s, \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{e^s}, \frac{\partial}{\partial s} = r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.4)$$

Тогда уравнения равновесия и уравнения закона Гука запишутся так:

$$\frac{\partial S(s, \varphi)}{\partial s} - \Phi(s, \varphi) + \frac{\partial R(s, \varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial R(s, \varphi)}{\partial s} + R(s, \varphi) + \frac{\partial \Phi(s, \varphi)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$S(s, \varphi) = \frac{2}{1-\nu} \left[ \frac{\partial U(s, \varphi)}{\partial s} + \nu \left( \frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial \varphi} + U(s, \varphi) \right) \right],$$

$$\Phi(s, \varphi) = \frac{2}{1-\nu} \left[ \frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial \varphi} + U(s, \varphi) + \nu \frac{\partial U(s, \varphi)}{\partial s} \right], \quad (2.6)$$

$$R(s, \varphi) = \left[ \frac{\partial U(s, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial V(s, \varphi)}{\partial s} - V(s, \varphi) \right].$$

В этих формулах введены такие обозначения:  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $U(s, \varphi)$ ,  $V(s, \varphi)$  – соответственно умноженные на модуль сдвига  $G$  перемещения вдоль координатных линий  $r$  и  $\varphi$ ;  $S(r, \varphi) = r\sigma_r(r, \varphi)$ ,  $\Phi(r, \varphi) = r\sigma_\varphi(r, \varphi)$ ,  $R(r, \varphi) = r\tau_{r\varphi}(r, \varphi)$ .

**3. Метод начальных функций и собственные функции Папковича–Фадля.** Решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) лучше всего искать символическим методом начальных функций в пространстве переменных  $(s, \varphi)$  [6]. В результате придет к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям бесконечного порядка с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных начальных функций, определенных при  $\varphi = 0$ . Решая его, получим характеристическое уравнение задачи

$$L(\lambda) = \sin 2\lambda a + \lambda \sin 2a = 0. \quad (3.1)$$

Целая функция экспоненциального типа (3.1) имеет два нулевых корня, которым отвечает элементарное решение задачи для бесконечного клина, и бесконечный набор комплексных корней  $\pm\lambda_k, \pm\bar{\lambda}_k$ . Функции, порождающие системы собственных функций при  $\lambda = \lambda_k$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} S(\lambda, \varphi) &= \frac{1+\nu}{2} \lambda \left[ (\lambda-1) \sin a(\lambda-1) \cos \varphi(\lambda+1) - (\lambda-3) \sin a(\lambda+1) \cos \varphi(\lambda-1) \right], \\ \Phi(\lambda, \varphi) &= \frac{1+\nu}{2} \lambda \left[ (\lambda+1) \sin a(\lambda+1) \cos \varphi(\lambda-1) - (\lambda-1) \sin a(\lambda-1) \cos \varphi(\lambda+1) \right], \\ R(\lambda, \varphi) &= -\frac{1+\nu}{2} \lambda(\lambda-1) \left[ \sin a(\lambda-1) \sin \varphi(\lambda+1) - \sin a(\lambda+1) \sin \varphi(\lambda-1) \right], \\ U(\lambda, \varphi) &= \frac{1+\nu}{4} (\lambda-1) \sin a(\lambda-1) \cos \varphi(\lambda+1) - \frac{\nu-3+\lambda(1+\nu)}{4} \sin a(\lambda+1) \cos \varphi(\lambda-1), \\ V(\lambda, \varphi) &= \left( \frac{1+\nu}{4} \lambda + \frac{3-\nu}{4} \right) \sin a(\lambda+1) \sin \varphi(\lambda-1) - \frac{1+\nu}{4} (\lambda-1) \sin a(\lambda-1) \sin \varphi(\lambda+1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

**4. Уравнения для определения биортогональных функций.** Приведем уравнения, необходимые для определения функций, биортогональных к собственным функциям Папковича–Фадля ( $\lambda$  – вещественный параметр):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S^+(\lambda, \varphi) S_k^+(\varphi) d\varphi &= \frac{\lambda L(\lambda)(\lambda^2 - 1)}{\lambda_k(\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda_k^2 - 1)}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} R^-(\lambda, \varphi) R_k^-(\varphi) d\varphi &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)(\lambda^2 - 1)}{\lambda_k^2(\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda_k^2 - 1)}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda, \varphi) \Phi_k(\varphi) d\varphi &= \frac{\lambda L(\lambda)(\lambda^2 - 1)^2}{\lambda_k(\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda_k^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В том случае, когда на круговом торце клина заданы лишь нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю, удобно ввести четную и нечетную по параметру  $\lambda$  функции  $S^+(\lambda, \varphi) = \frac{1}{2}[S(\lambda, \varphi) + S(-\lambda, \varphi)]$  и  $R^-(\lambda, \varphi) = \frac{1}{2}[R(\lambda, \varphi) - R(-\lambda, \varphi)]$ . Через  $S_k^+(\varphi)$ ,  $R_k^-(\varphi)$  обозначены неизвестные биортогональные функции (их существование и единственность вытекают из результатов статьи [1]). Правые части уравнений (4.1) выбираются из тех же соображений, что и в [1], и дополнительно с учетом того, что порождающие функции  $S^+(\lambda, \varphi)$ ,  $R^-(\lambda, \varphi)$  имеют нули первого порядка при  $\lambda = \pm 1$ . В этих же точках функция  $\Phi(\lambda, \varphi)$  имеет нули второго порядка. При  $\lambda = 0$  четные функции  $S^+(\lambda, \varphi)$ ,  $\Phi(\lambda, \varphi)$  имеют нули второго порядка, а нечетная относительно  $\lambda$  функция  $R^-(\lambda, \varphi)$  – нуль третьего порядка.

**5. Примеры решений краевых задач.** Окончательные формулы, дающие решение задачи для усеченного клина, независимо от того, какие граничные условия заданы на круговом торце, фактически будут эквивалентны соответствующим формулам для полуполосы. В частности, в том случае, когда на «торце» клина заданы только нормальные самоуравновешенные напряжения (2.2), они будут следующими (формулы для перемещений опущены):

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \varphi) &= -\frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ s_k \frac{S^+(\lambda_k, \varphi)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k r^{-\lambda_k})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\ \sigma_\varphi(r, \varphi) &= -\frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ s_k \frac{\Phi(\lambda_k, \varphi)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k r^{-\lambda_k})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\ \tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ s_k \frac{R^-(\lambda_k, \varphi)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\operatorname{Im}(r^{-\lambda_k})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $M_k = L'(\lambda_k) / 2\lambda_k$ ,  $\lambda_k M_k$ ,  $\lambda_k^2 M_k$  – нормирующие множители для соответствующих собственных функций, а  $s_k$  – коэффициент Лагранжа [1, 2],  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ .

Если в первом уравнении (4.1) перейти к пределу, когда  $\lambda \rightarrow 0$ , то под интегралом слева вместо  $S^+(\lambda, \varphi)$  получим раскладываемую функцию

$$\sigma(\varphi) = (1 + v) \frac{\varphi \sin \varphi \sin a - (\sin a - a \cos a) \cos \varphi}{2a + \sin 2a}, \quad (5.2)$$

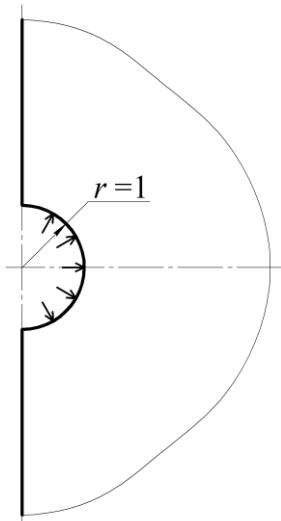
а справа выражение для коэффициента Лагранжа

$$s_k = \frac{1}{\lambda_k^3(\lambda_k^2 - 1)} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.3)$$

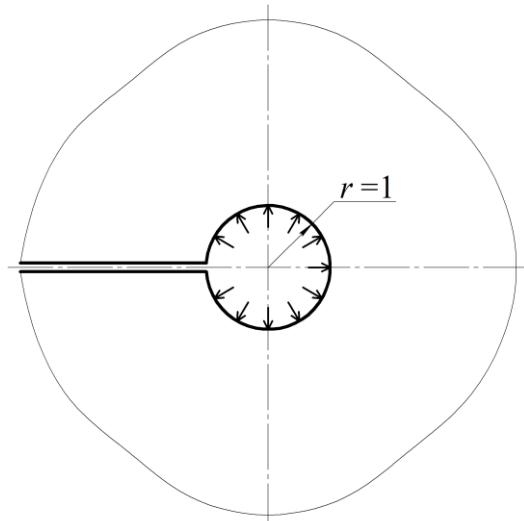
В работах, посвященных задачам для полуполосы, отмечалось, что таким путем можно получить формулы для коэффициентов Лагранжа для весьма широкого класса целых аналитических раскладываемых функций  $\sigma(\varphi)$ .

Расчеты выполнялись для трех значений угла полурастрова клина:  $a = \pi/3$ ,  $a = \pi/2$  – полуплоскость с круговой выточкой (фиг. 2) и  $a = \pi$  – бесконечная плоскость с полубесконечным разрезом, в вершине которого имеется круговое отверстие (фиг. 3). Коэффициент Пуассона  $\nu = 1/3$ .

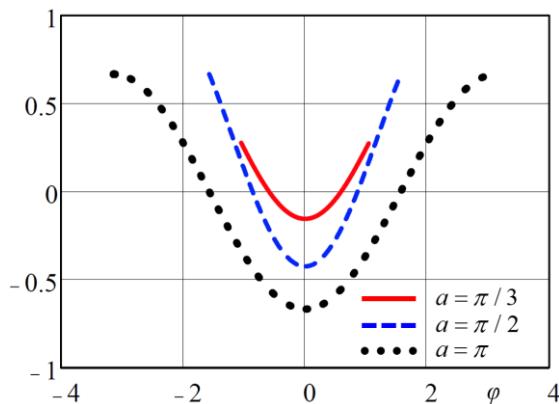
Ниже на фиг. 4–5 приведены графики для напряжений.



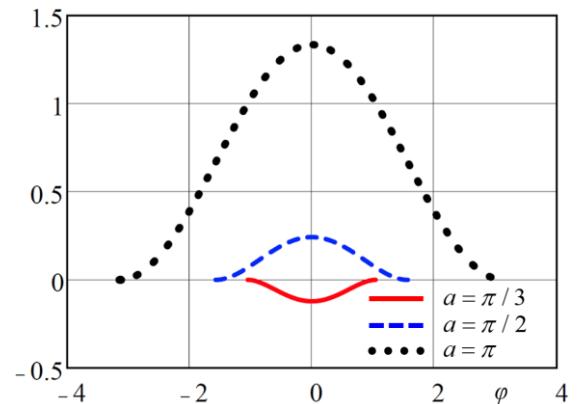
Фиг. 2. Полуплоскость с круговой выточкой



Фиг. 3. Плоскость с полубесконечным разрезом, в вершине которого имеется круговое отверстие



Фиг. 4. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_r(1, \phi)$



Фиг. 5. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_\phi(1, \phi)$

## 6. Заключение.

1. Решения для всех типов нагрузок можно получить только с использованием финитных частей биортогональных функций.

2. Если в формулах (5.1) считать  $r \in [0, 1]$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , то получим решения: а) для вершины клина ( $a = \pi/3$ ); б) для полукруга со свободной прямолинейной границей и заданными на дуге окружности нормальными напряжениями (5.2) ( $a = \pi/2$ ); с) для круга, разрезанного по радиусу ( $a = \pi$ ). Стороны разреза свободны, а по дуге окружности действуют нормальные напряжения (5.2).

3. Рассмотрим бесконечный клин с вершиной, на сторонах которого действуют нормальные и касательные напряжения. Эта задача решается стандартными средствами: в общем случае с помощью преобразования Фурье в  $(s, \varphi)$  координатах, а для степенных нагрузок еще проще [6]. Пусть, к примеру, на сторонах клина действуют только нормальные напряжения, равные 1. Построим решение задачи, удалим вершину и добавим к решению для клина с вершиной решение для усеченного клина, прямолинейные стороны которого свободны, а на круговом

торце действуют напряжения, равные по величине и обратные по знаку соответствующим напряжениям для клина с вершиной. В результате получим решения для трех областей при  $r \geq 1$  и для трех областей при  $r \leq 1$ , в которых дуговые границы свободны, а на прямолинейных действуют нормальные напряжения, равные 1.

Исследование М.Д. Коваленко, И.В. Меньшовой и А.П. Кержаева выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53021. The research of G. Yu was funded by the National Natural Science Foundation of China (No. 51674150) and NSFC-RFBR (No. 5191101589).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С.78–98.
2. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С.121–144.
3. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2020. V. 71. № 6. Art. 199. 20 p. DOI: 10.1007/s00033-020-01425-2.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
5. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с.
6. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М.: Стройиздат, 1975. 224 с.

### Сведения об авторах:

**Коваленко Михаил Денисович** – доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН) (Российская Федерация, 125040, Москва, Ленинградский проспект, д. 7)  
Моб. телефон: +7-965-228-54-98

E-mail: [kov08@inbox.ru](mailto:kov08@inbox.ru)

**Меньшова Ирина Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук (ИТПЗ РАН) (Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32), доцент кафедры высшей математики Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана) (Российская Федерация, 105505, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5/1)

Моб. телефон: +7-905-702-45-34

E-mail: [menshovairina@yandex.ru](mailto:menshovairina@yandex.ru)

**Кержаев Александр Петрович** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук (ИТПЗ РАН) (Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32)

Моб. телефон: +7-919-673-56-65

E-mail: [alex\\_kerg@mail.ru](mailto:alex_kerg@mail.ru)

**Guangming Yu** – Doctor, Professor, School of Civil Engineering, Qingdao University of Technology, 266033, Qingdao, China

Phone: 0532-85071135

E-mail: [yu-guangming@263.net](mailto:yu-guangming@263.net)

## Точное и балочное решения для узкого защемленного прямоугольника

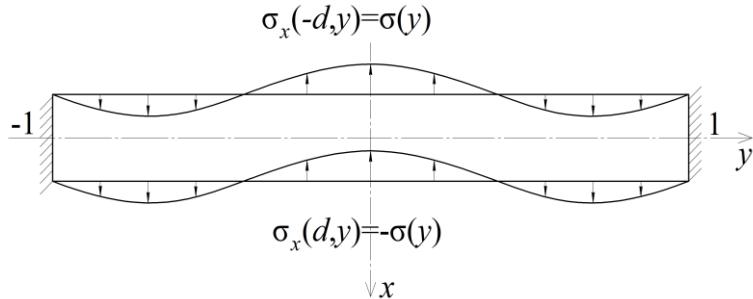
**Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Шуляковская Т.Д.**

В статье приводится точное решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника, две противоположные стороны которого жестко защемлены, а на двух других действует одинаковая, направленная в одну сторону нормальная нагрузка. Решение представляется рядами по собственным функциям Папковича–Фадля, коэффициенты которых определяются по простым замкнутым формулам. Даётся сравнение точного решения с балочным для узкого прямоугольника.

**1. Введение.** В статьях [1-2] было получено точное решение краевой задачи теории упругости для прямоугольника, у которого две противоположные стороны свободны, а на двух других действуют нормальная или касательная нагрузки. Были рассмотрены все случаи симметрий относительно центральных осей прямоугольника. Полученными в [1-2] формулами можно воспользоваться в рассматриваемой задаче для прямоугольника, у которого вертикальные стороны жестко защемлены, а к горизонтальным приложены нормальные напряжения (нечетно-симметрическая деформация относительно горизонтальной оси и четно-симметричная относительно вертикальной). При этом другими будут собственные числа, собственные функции Папковича–Фадля, нормирующие множители и коэффициенты Лагранжа. Для достаточно узкого прямоугольника полученное решение сравнивается с решением для балки с жестко защемленными концами.

**2. Решение краевой задачи.** Рассмотрим показанный на фиг. 1 прямоугольник  $\{P : |x| \leq d, |y| \leq 1\}$ , у которого вертикальные стороны  $y = \pm 1$  жестко защемлены, а на горизонтальных сторонах  $x = \pm d$  заданы напряжения

$$\sigma_x(\pm d, y) = \mp \sigma(y), \tau_{xy}(\pm d, y) = 0. \quad (2.1)$$



Фиг. 1. Схема краевой задачи

В силу симметрии деформации  $\sigma(y)$  – четная функция. Решение задачи описывается следующими формулами [1-2]:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -U^1(x, y) - \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left( \sigma_k \lambda_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k d)} \right\}, \\ V(x, y) &= V^1(x, y) + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left( \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= -\sigma_x^1(x, y) - \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left( \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= -\sigma_y^1(x, y) - \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left( \sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k d)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\tau_{xy}^1(x, y) - \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left( \sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\cosh \bar{\lambda}_k d \cosh \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \cosh \bar{\lambda}_k d \sinh \lambda_k d)} \right\}.$$

Здесь  $\lambda_k, \bar{\lambda}_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) – комплексно-сопряженные собственные числа, являющиеся корнями трансцендентного характеристического уравнения

$$L(\lambda) = \frac{(3-\nu) \sin 2\lambda}{8\lambda} - \frac{1+\nu}{4} = 0, \quad (2.3)$$

$\nu$  – коэффициент Пуассона (в вычислениях  $\nu = 1/3$ ). Через  $U(x, y), V(x, y)$  обозначены умноженные на модуль сдвига истинные перемещения вдоль вертикальной оси  $x$  и горизонтальной оси  $y$  соответственно. Собственные функции Папковича–Фадля имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_k, y) &= \left( \frac{3-\nu}{4\lambda_k} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{4} \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{4} y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= \frac{1+\nu}{4} (\cos \lambda_k \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y), \\ s_x(\lambda_k, y) &= \left( \frac{3+\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ s_y(\lambda_k, y) &= \left( \frac{\nu-1}{2} \sin \lambda_k + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \sin \lambda_k y, \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= \left( -\sin \lambda_k + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k \cos \lambda_k y. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Коэффициенты Лагранжа  $\sigma_k$  зависят от раскладываемой функции  $\sigma(y)$  и определяются по формулам:

$$M_k = \frac{L'(\lambda_k)}{2}, \quad \sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) dy, \quad x_k(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{4\lambda_k \sin \lambda_k}. \quad (2.5)$$

$x_k(y)$  – финитные части функций, биортогональных к  $s_x(\lambda_k, y)$ . Выражения вида  $M_k, \lambda_k M_k, \lambda_k^2 M_k$  в формулах (2.2) представляют собой нормирующие множители для соответствующих собственных функций.

Уравнение (2.3) помимо комплексных корней имеет также два вещественных корня  $\pm \lambda_1$ . Им отвечают слагаемые, стоящие перед суммами в (2.2). Эти слагаемые равны:

$$\begin{aligned} U^1(x, y) &= [-(\lambda_1 d \sinh \lambda_1 d + \cosh \lambda_1 d) \cosh \lambda_1 x + \lambda_1 x \sinh \lambda_1 x \cosh \lambda_1 d] \sigma_1 \lambda_1 \frac{\xi(\lambda_1, y)}{\lambda_1 M_1 \Delta}, \\ V^1(x, y) &= [-(\lambda_1 d \sinh \lambda_1 d + \cosh \lambda_1 d) \sinh \lambda_1 x + \lambda_1 x \cosh \lambda_1 x \cosh \lambda_1 d] \sigma_1 \frac{\chi(\lambda_1, y)}{M_1 \Delta}, \\ \sigma_x^1(x, y) &= [-(\lambda_1 d \sinh \lambda_1 d + \cosh \lambda_1 d) \sinh \lambda_1 x + \lambda_1 x \cosh \lambda_1 x \cosh \lambda_1 d] \sigma_1 \frac{s_x(\lambda_1, y)}{M_1 \Delta}, \\ \sigma_y^1(x, y) &= [-(\lambda_1 d \sinh \lambda_1 d - \cosh \lambda_1 d) \sinh \lambda_1 x + \lambda_1 x \cosh \lambda_1 x \cosh \lambda_1 d] \sigma_1 \lambda_1^2 \frac{s_y(\lambda_1, y)}{\lambda_1^2 M_1 \Delta}, \\ \tau_{xy}^1(x, y) &= [(-d \sinh \lambda_1 d \cosh \lambda_1 x + x \sinh \lambda_1 x \cosh \lambda_1 d)] \sigma_1 \lambda_1^2 \frac{t_{xy}(\lambda_1, y)}{\lambda_1 M_1 \Delta}, \\ \Delta &= \lambda_1 d - \cosh \lambda_1 d \sinh \lambda_1 d. \end{aligned} \quad (2.6)$$

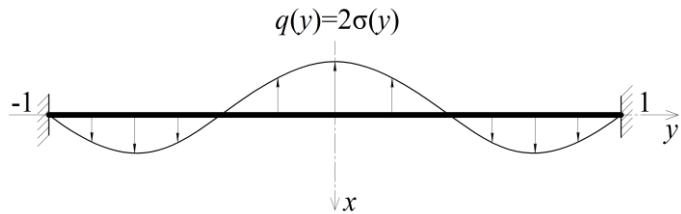
**3. Решение для узкого прямоугольника и его сравнение с балочным.** Рассмотрим достаточно узкий прямоугольник, считая  $d = 0.1$ . Примем

$$\sigma(y) = \frac{1}{2}(5y^4 - 6y^2 + 1) \quad (3.1)$$

и найдем решение задачи, воспользовавшись формулами (2.2).

Сравним это решение с решением для балки, показанной на фиг. 2, считая

$$q(y) = 2\sigma(y) = (5y^4 - 6y^2 + 1). \quad (3.2)$$



Фиг. 2. Зашемленная балка

Нормальные и касательные напряжения в балке определяются по формулам:

$$\sigma_b(x, y) = \frac{M(y)}{I} x, \tau_b(x, y) = \frac{6Q(y)}{b(2d)^3} (d^2 - x^2), I = \frac{b(2d)^3}{12}, \quad (3.3)$$

где  $I$  – момент инерции поперечного сечения балки,  $b = 1$  для балки и для пластины.

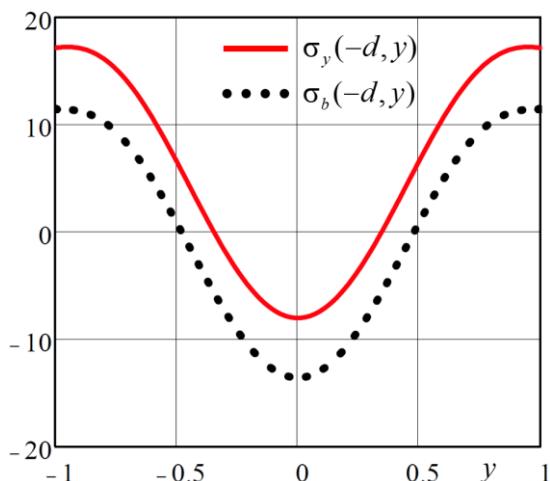
Изгибающий момент и поперечная сила соответственно равны:

$$M(y) = \frac{y^6}{6} - \frac{y^4}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{19}{210}, Q(y) = y^5 - 2y^3 + y. \quad (3.4)$$

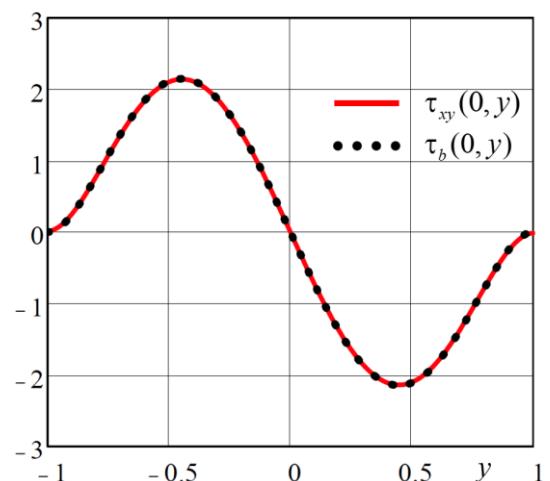
Прогиб балки, умноженный на модуль сдвига, равен

$$W(y) = \frac{(y^2 - 1)^2 (5y^4 - 18y^2 + 29)}{840} \frac{(1+\nu)}{I}. \quad (3.5)$$

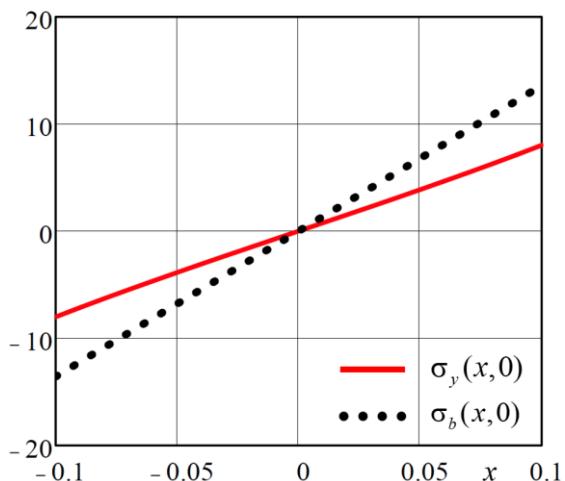
Ниже на фиг. 3–6 сплошным кривым отвечает решение для пластиинки, а точечным – для балки.



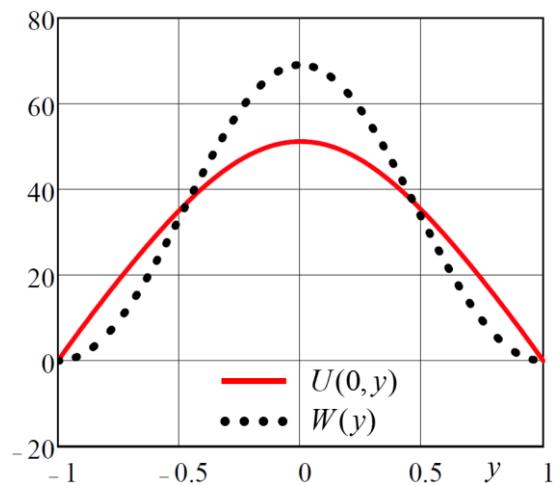
Фиг. 3. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y(-d, y)$  в пластинке и напряжений  $\sigma_b(-d, y)$  в балке



Фиг. 4. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}(0, y)$  в пластинке и напряжений  $\tau_b(0, y)$  в балке



Фиг. 5. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  в пластинке и напряжений  $\sigma_b(x, 0)$  в балке



Фиг. 6. Распределение перемещений  $U(0, y)$  осевой линии  $x=0$  пластиинки и прогиба  $W(y)$  балки

На фиг. 3 показаны изменения нормальных напряжений в пластине  $\sigma_y(-d, y)$  и напряжений  $\sigma_b(-d, y)$  в балке. Кривые повторяют друг друга, отличаясь на постоянную. Распределения касательных напряжений по длине балки при  $x=0$  (фиг. 4) практически неразличимы. На фиг. 5 показан линейный характер изменения нормальных напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  по ширине пластинки в сравнении с напряжениями  $\sigma_b(x, 0)$  в балке. Касательные напряжения  $\tau_{xy}(x, 0)$  в пластинке и  $\tau_b(x, 0)$  в балке практически неразличимы. На последней фиг. 6 показаны перемещения  $U(0, y)$  осевой линии  $x=0$  пластиинки и прогиб  $W(y)$  балки. Кривые существенно различаются. Это связано, в первую очередь, с тем, что, в отличие от балки, ни при каких значениях переменной  $x$  производная  $\frac{dU(x, y)}{dy} \neq 0$  при  $y=\pm 1$ , т.к. в

этих точках функции  $\frac{d\xi(\lambda_k, y)}{dy} \neq 0$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Для других нагрузок, например, для  $\sigma(y)=1$  характер отличий остается неизменным.

**4. Заключение.** Обычно решения на основе балочной теории сравниваются с соответствующими решениями теории изгиба тонких пластин [2], что вполне естественно. Показанные на графиках два решения позволяют наглядно оценить тот вклад, который вносят не учитываемые ни в балочной теории, ни в теории изгиба пластин нормальные напряжения  $\sigma_x(x, y)$  и перемещения  $V(x, y)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53021.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2020. Vol. 71, № 6, art. 199. DOI: 10.1007/s00033-020-01425-2.
2. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Шуляковская Т.Д. Некоторые решения теории упругости для прямоугольника // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. №3. С. 370-382. DOI: 10.31857/S0032823521030073.

3. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton: CRS Press, 2007. 620 p.

### **Сведения об авторах:**

**Коваленко Михаил Денисович** – доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Института прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН) (Российская Федерация, 125040, Москва, Ленинградский проспект, д.7)  
Моб. телефон: +7-965-228-54-98

**E-mail:** kov08@inbox.ru

**Меньшова Ирина Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук (ИТПЗ РАН) (Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32), доцент кафедры высшей математики Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана) (Российская Федерация, 105505, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5/1)

Моб. телефон: +7-905-702-45-34

**E-mail:** menshovairina@yandex.ru

**Кержаев Александр Петрович** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской академии наук (ИТПЗ РАН) (Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32)

Моб. телефон: +7-919-673-56-65

**E-mail:** alex\_kerg@mail.ru

**Шуляковская Татьяна Денисовна** – старший научный сотрудник лаборатории геоинформатики Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук (ИФЗ РАН) (Российская Федерация, 123242, г. Москва, Б. Грузинская ул., д. 10, стр. 1)

Моб. телефон: +7-916-509-57-39

**E-mail:** 5095739@mail.ru

## Динамическая контактная задача для гетерогенного основания

Колесников В.И., Беляк О.А., Суворова Т.В.

Рассмотрена динамическая контактная задача о колебаниях жесткого штампа на полуограниченном гетерогенном основании при учете трения в области контакта. Многофазная гетерогенная среда описывается моделью Био-Френкеля, а также в рамках концепции эффективной гомогенности, рассматривается эквивалентная ей однородная среда. Приведены численные результаты, иллюстрирующие влияние на контактные напряжения частоты колебаний, вязкости флюида и проницаемости гетерогенной среды.

**Введение.** Широкое распространение в последнее время для узлов и деталей триботехнического назначения получили маслонаполненные нанокомпозиты. С целью изучения закономерностей изменения напряженно-деформированного состояния композиционного материала в зависимости от его состава и условий динамического нагружения решается динамическая контактная задача при учете трения в области контакта для основания, обладающего микроструктурой. Для описания микроструктуры основания, состоящего из изотропной вязкоупругой матрицы и флюида наполнителя, обладающего свойствами вязкой аморфной жидкости, использованы уравнения гетерогенной среды Био [1]. Механические характеристики материала матрицы определяются экспериментально методом наноиндентирования. Изменение механических модулей среды при варьировании пористости изучено с помощью дифференциальной схемы метода самосогласования. Отметим, что контактные задачи в квазистатической постановке для однородных вязкоупругих сред, которые моделируют поверхностные явления в трибологии, рассмотрены в работах [2, 3], где показано, что свойства контактирующих поверхностей в значительной степени влияют на силу трения. Влияние микроструктуры основания на контактные напряжения представлено в работах [4–6], где рассмотрены контактные задачи в квазистатической и динамической постановках, а микроструктура гетерогенной среды описана в рамках модели Био-Френкеля. В настоящей работе представлен новый подход к изучению поверхностного взаимодействия в зоне контакта при учете гетерогенности основания в рамках модели двухфазной среды Био-Френкеля и динамического воздействия. Исследованы зависимости сил трения от микроструктуры композита, вязкости наполняющего поры флюида, степени взаимодействия фаз, проницаемости среды.

### 1. Постановка задачи и решение задачи.

Рассматривается контактная задача о колебаниях жесткого штампа с плоским основанием на поверхности гетерогенного полупространства под действием приложенной к нему силы, изменяющейся по гармоническому закону. Пусть двухфазная среда, состоящая из вязкоупругой пористой матрицы-скелета и флюида, заполняющего поры, занимает плоскую область  $|x_1| < \infty, x_2 \leq 0$ . На лицевой непроницаемой границе гетерогенной среды осциллирует с частотой  $\omega$  жесткий штамп шириной  $2a$  под действием силы, которая приложена к штампу так, чтобы обеспечить полный контакт с поверхностью. В области контакта  $|x_1| \leq a$  нормальные и касательные напряжения связаны законом Амонтона-Кулона. Для учета внутренней микроструктуры основания используем, как наиболее апробированную, модель, описываемую уравнениями гетерогенной двухфазной среды Био – Френкеля в перемещениях [1]:

$$\begin{aligned} A\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2N\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + Q\nabla \nabla \cdot \mathbf{v} &= \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right), \\ Q\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + R\nabla \nabla \cdot \mathbf{v} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - b \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $A, N, Q, R, \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  – механические характеристики двухфазной среды [4],  $e_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  – компоненты тензоров деформации, соответствующие векторам перемещений твердой фазы  $\mathbf{u}\{u_1, u_2\}$  и жидкой фазы  $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$ ,  $e = \nabla \cdot \mathbf{u}$ ,  $\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{v}$ ,  $b = m^2 \eta k_o^{-1}$ ,

а  $\eta$ ,  $k_o$  – динамическая вязкость флюида и проницаемость среды соответственно. Полный тензор напряжений, действующий в гетерогенной среде –  $\Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij}\sigma^f$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\sigma_{ij}^s = Ae\delta_{ij} + 2Ne_{ij} + Q\varepsilon\delta_{ij}$  – тензор напряжений, действующий на вязко-упругий скелет,  $\sigma^f = Qe + Re$  – давления, действующие на жидкость в порах. Вязкость матрицы композита учтена в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения, при этом модуль сдвига имеет вид  $N \sim N(1+i\beta)$ , где величина  $\beta$  пропорциональна коэффициенту потерь вязкоупругого материала. Вследствие этого присутствует малая комплексная составляющая в коэффициентах уравнения (1.1)  $N, A, Q, R$ .

Считаем, что режим колебаний установившийся, при этом отделим временной множитель и изложение будем вести для безразмерных амплитудных значений соответствующих функций, при этом линейные размеры отнесены к полуширине штампа, а напряжения – к модулю сдвига  $N$  матрицы. Границные условия при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} u_2(x_1, 0) &= v_2(x_1, 0), \quad \Gamma_{21}(x_1, 0) = \Gamma_{22}(x_1, 0) = 0, \quad |x_1| > 1, \\ \Gamma_{21}(x_1, 0) &= \mu_{tr}\Gamma_{22}(x_1, 0), \quad \Gamma_{22}(x_1, 0) = q_2(x_1), \quad u_2(x_1, 0) = \delta, \quad |x_1| \leq 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\delta$  – заданная осадка штампа,  $\mu_{tr}$  – коэффициент трения. Замыкают постановку краевой задачи (1.1) – (1.2) условие излучения волн на бесконечность. Определению подлежат контактные давления  $q_2(x_1)$ .

Решение представленной задачи осуществлено в два этапа. Сначала, на основе идей теории потенциала, были построены матрицы-функции Грина  $\mathbf{K}_u(\alpha, x_2)$ ,  $\mathbf{K}_v(\alpha, x_2)$  для перемещений скелета и перемещений флюида [6]. Далее, получена связь перемещений и напряжений на границе двухфазной среды:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}_u(\alpha, 0) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad \mathbf{v}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}_v(\alpha, 0) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \\ \mathbf{Q}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1, \quad \mathbf{q}(x_1) = \{\Gamma_{21}(x_1), \Gamma_{22}(x_1)\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) в соотношении (1.3) приходим к интегральному уравнению 1-го рода с разностным ядром относительно искомой функции:

$$\int_{-1}^1 K(x_1 - \xi) q_2(\xi) d\xi = \delta. \quad (1.4)$$

Ядро интегрального уравнения (1.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} K(x_1 - \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha) e^{i\alpha(x_1 - \xi)} d\alpha, \\ K(\alpha) &= \mu_{tr} K_{21}(\alpha) + K_{22}(\alpha), \\ K_{21}(\alpha) &= i\alpha(2g_0 + \gamma_{12}/\gamma_{22}g_1 + g_2)/D(\alpha), \\ K_{22}(\alpha) &= (m_1 - m_2)s_1s_2\theta_3^2/D(\alpha), \\ D(\alpha) &= 2(2g_0 + \gamma_{13}g_1)\alpha^2 + (\alpha^2 + s_3^2)(g_2 - g_1), \\ g_1 &= \begin{vmatrix} g_{01} & g_{02} \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \quad g_2 = \begin{vmatrix} g_{01} & g_{02} \\ m_1s_1 & m_2s_2 \end{vmatrix}, \quad g_3 = \begin{vmatrix} s_2 & s_1 \\ (1-m_1) & (1-m_2) \end{vmatrix}, \quad g_0 = (m_1 - m_2)s_1s_2s_3, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$g_{0i} = 2\alpha^2 - \theta_i^2 p_i, \quad i = 1, 2,$$

$$p_i = (A + Q + (Q + R)(1 - m_i)) / N;$$

$$\gamma_{13} = 1 + \gamma_{12} / \gamma_{22}; \quad s_k = \sqrt{\alpha^2 - \theta_k^2}; \quad k = 1, 2, 3.$$

где  $\alpha$  – параметр преобразования Фурье, функции в комплексной плоскости  $K_{ij}(\alpha)$ ,  $i, j = 1, 2$  являются элементами матрицы Грина для гетерогенного основания,  $\theta_k$  – приведенные частоты колебаний, соответствующие трем типам распространяющихся волн в гетерогенной среде [6]. Проведено асимптотическое исследование символа ядра интегрального уравнения  $K(\alpha)$  при малых и больших значениях параметра преобразования  $\alpha$ . Значения в нуле характеризуют среднее значение контактного давления, а поведение на бесконечности – структуру контактного давления у границ области контакта [7]:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_{ii}(\alpha) = d_{ii} / |\alpha|, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_{ij}(\alpha) = (-1)^i d_{ij} / \alpha, \quad i \neq j,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K(\alpha) = i(m_1 - m_2) / D,$$

$$D = \begin{vmatrix} \theta_1 p_1 & \theta_2 p_2 \\ 1 - m_1 & 1 - m_2 \end{vmatrix}.$$

В настоящей работе при реализации вычислительной схемы, сначала проводится регуляризация ядра интегрального уравнения (1.4) с использованием его асимптотического представления на бесконечности, затем, на основе метода граничных элементов решение интегрального уравнения сводится к решению конечной алгебраической системы относительно неизвестных узловых значений  $q_2(\xi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  искомой функции. Численно исследуется скорость сходимости приближенного алгоритма решения интегрального уравнения.

## 2. Результаты вычислительных экспериментов.

В соответствии с изложенным способом были определены нормальные и касательные контактные напряжения, горизонтальные смещения под штампом. Расчеты проводились для механических характеристик, соответствующих двухкомпонентному композиционному материалу с матрицей на основе ароматического полиамида фенилона, модифицированного наноразмерной добавкой  $TiN$  [9] и содержанием наполнителя – цилиндрового масла. Корректное определение механических характеристик  $A, R, Q, N$  среды Био для гетерогенного композита было реализовано на основе простой и дифференциальной схем метода самосогласования [10,11]. Было исследовано влияние пористости на модуль объемного сжатия пористой среды с незаполненными порами  $K_b$ . Сопоставлены результаты, полученные на основе дифференциальной и простой схемы метода самосогласования. При малой пористости ( $m < 0.2$ ), относительная погрешность двух способов расчета не превышала 3%. Таким образом, коэффициенты уравнений (1.1) по известным модулям объемного сжатия вязкоупругой матрицы  $K_s$ , пористой среды с незаполненными порами  $K_b$ , флюида  $K_f$ , пористости  $m$  вычислялись по формулам [12].

Расчеты проводились при следующих данных:  $K_s = 6.48$  ГПа,  $K_f = 2$  ГПа,  $N = 2.37$  ГПа,  $\rho_s = 1.3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_f = 0.93 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $K_b(m=0.05) = 5.48$  ГПа,  $K_b(m=0.1) = 4.50$  ГПа,  $K_b(m=0.15) = 3.51$  ГПа,  $K_b(m=0.2) = 2.52$  ГПа,  $\omega = 50$  Гц. Экспериментальное определение коэффициента взаимодействия фаз, проницаемости композита является весьма сложной и трудоемкой задачей. Будем опираться на известные данные для искусственных сред [13] коэффициент проницаемости находится в интервале  $10^{-14} < k_o < 10^{-10}$  м<sup>2</sup>, а извилистость поровых каналов соответствовала случаю частиц сферической формы. Особое внимание было удалено анализу влияния пористости на величину контактных напряжений. Распределение действительных частей нормальных контактных давлений  $Re q_2(x_l)$  при изменении

пористости  $m$  и флюидонасыщенности основания приведено на рис. 1) при значениях  $\mu_{tr} = 0.2, \delta_0 = 1, \beta = 0.05, b = 0$ , причем кривая, отмеченная маркером «о», соответствует нулевой пористости. Эта кривая получена на основании решения динамической задачи о колебаниях штампа в аналогичной постановке, но для случая описания гетерогенной среды эквивалентной гомогенной средой [10].

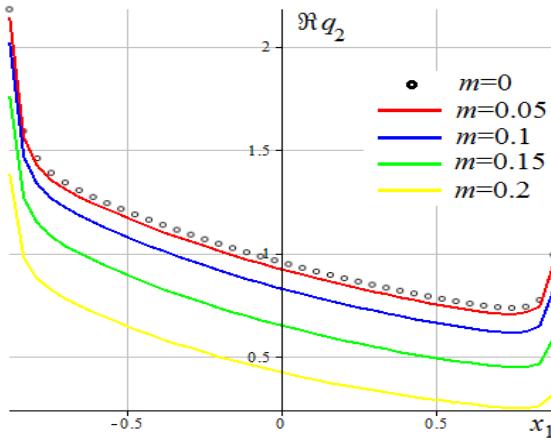


Рис. 1. Влияние пористости гетерогенного основания на распределение касательных контактных напряжений

Установлено, что зависимость нормальных и касательных контактных напряжений от пористости гетерогенного основания носит нелинейный характер. Отметим, что контактные нормальные и касательные напряжения в значительной мере зависят от пористости и массовой доли флюида-наполнителя. При этом, распределение напряжений по области контакта несимметрично, что характерно и для контактных задач теории упругости при учете сил трения, но для случая динамического нагружения влияние коэффициента трения на контактные давления более выражено, в задачах в квазистатической постановке [4].

Надо отметить, что параметр  $b = m^2 \eta / k_0$ , характеризующий взаимодействие фаз композита, имеет значительное влияние на контактные давления. С ростом вязкости флюида, заполняющего поры, и уменьшении коэффициента проницаемости пористоупругой среды изменяется распределение напряжений под штампом, это иллюстрируют рис. 2. На этом рисунке приведены распределения действительных частей нормальных давлений под штампом, рассчитанных при тех же входных данных при увеличении параметра  $\eta / k_0$ .

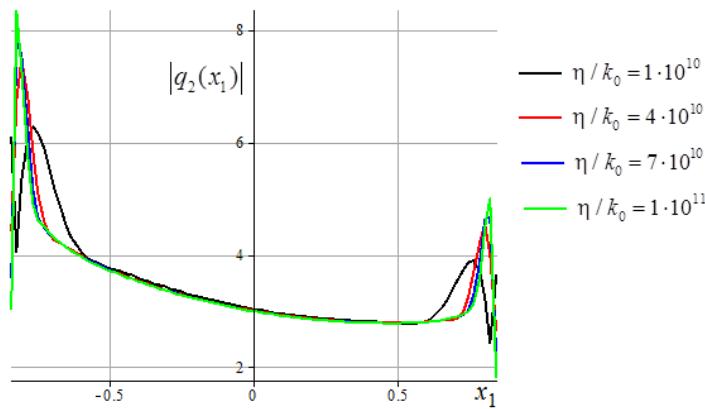


Рис.2. Влияние вязкости флюида и проницаемости основания на распределение действительной (слева) и мнимой (справа) частей нормальных контактных давлений

**3. Выводы.** Контактные напряжения и горизонтальные перемещения под штампом для гетерогенного основания зависят не только от коэффициента трения в области контакта, но и существенным образом зависят от частоты колебаний, пористости, проницаемости среды,

вязкости флюида. Изменение коэффициента трения при вибрации имеет значительно большее влияние на контактные напряжения, чем в квазистатической задаче при движении штампа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00614 и в форме гранта РГУПС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. В. 6. № 82. С. 103–134.
2. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю., Морозов А. В., Степанов Ф. И. Трение эластомеров. Моделирование и эксперимент. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020. 296 с.
3. Торская Е.В. Модели фрикционного взаимодействия тел с покрытиями. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 204 с.
4. Суворова Т.В., Беляк О.А. Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения // ПММ. 2020. Т. 84, № 4. С. 529 – 539.
5. Суворова Т.В., Беляк О.А. колебания штампа на поверхности гетерогенного слоя при учете трения в области контакта // ПММ. 2021. Т. 85. № 3. С. 321 – 331.
6. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A. Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation // Materials Physics and Mechanics. 2020. Vol. 46. No. 1. P. 139 – 148.
7. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. Kim J.O., Achenbach J.D., Mirkarimi P.B., Shinn M., Barnett S.A. Elastic constants of single-crystal transition-metal nitride films measured by line-focus acoustic microscopy // J. Appl. Phys. 72, 1992. P. 1805;
10. Belyak O.A., Suvorova T.V. Modeling Stress Deformed State Upon Contact with the Bodies of Two-Phase Microstructure // Solid State Phenomena. 2020. Vol. 299. P. 124 – 129.
11. Sevostianov I., Giraud A. Generalization of Maxwell homogenization scheme for elastic material containing inhomogeneities of diverse shape // International Journal of Engineering Science. Elsevier. 2013. Vol. 64. P. 23 – 36.
12. Колесников В.И., Беляк О.А., Колесников И.В. и др. О математической модели для прогнозирования трибологических свойств маслонаполненных композитов при вибрации // Доклады РАН. 2020. Т. 491. С. 44–47.
13. Borisov V.E., Zenchenko E.V., Kristsky B.V. et. al. Numerical Simulation of Laboratory Experiments on the Analysis of Filtration Flows in Poroeelastic Media // Herald of the Bauman Moscow state technical university. Series natural sciences. 2020. V.88. No.1. P. 16 – 31.

### Сведения об авторах:

**Колесников Владимир Иванович** – академик РАН, д.т.н., зав. кафедрой «Теоретическая механика» Ростовского государственного университета путей сообщения, (863) 2-454-929;  
E-mail: [kvi@rgups.ru](mailto:kvi@rgups.ru)

**Беляк Ольга Александровна** – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Теоретическая механика» Ростовского государственного университета путей сообщения, (863) 272-63-49;  
E-mail: [belyak.o.a@gmail.com](mailto:belyak.o.a@gmail.com)

**Суворова Татьяна Виссарионовна** – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая математика» Ростовского государственного университета путей сообщения, (863) 272-62-35;  
E-mail: [suvorova\\_tv111@mail.ru](mailto:suvorova_tv111@mail.ru)

# **Модификация метода диффузионной скорости для моделирования вязких несжимаемых течений методом вихревых петель**

## **Конур О.С.**

В работе рассматривается один подход к учету вязкости при моделировании вязких несжимаемых течений с помощью метода вихревых петель. Подход основан на обобщении известного метода диффузионной скорости, применяемого для моделирования двухмерных течений вихревыми методами. В работе показано, что при допущении об отсутствии спиральности завихренности в течении существует такое поле, при переносе вихревых трубок по которому они остаются вихревыми трубками и сохраняют свою интенсивность. Это допущение используется для построения модели вязкости для метода вихревых петель. Приведен пример моделирования движения эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости.

### **Введение**

Метод вихревых петель (МВП) является лагранжевым вихревым методом, предназначенным для моделирования нагрузок, действующих на тело, обтекаемое потоком несжимаемой жидкости. Особенность данного метода состоит в отсутствии необходимости использования сетки для дискретизации пространства, в отличие от известных сеточных методов (методы конечных объемов, конечных элементов и конечных разностей). Недостаток использования сеток проявляется при моделировании сопряженных задач, связанных с совершением телом перемещений в жидкости. Наличие подвижных границ приводит к необходимости тем или иным способом перестраивать сетку, отслеживая на каждом шаге новое положение границ обтекаемых тел.

До настоящего момента существенным ограничением МВП являлась возможность моделирования лишь невязких течений. Учет вязкости позволит более корректно моделировать вихревое движение жидкости вблизи границ поверхности, что будет способствовать более точному моделированию нагрузок, действующих на обтекаемое тело.

Сложность учета вязкости течения в МВП связана с нарушением условий теоремы Гельмгольца о вихревом движении, которая говорит о том, что в идеальной баротропной жидкости вихревые трубы перемещаются вместе с несущими их материальными частицами и при этом сохраняют свою интенсивность. В вязкой жидкости вихревые трубы (моделируемые замкнутыми кривыми — вихревыми петлями) уже не переносятся по полю скорости течения жидкости и могут перезамыкаться. Это приводит к необходимости разработки такого подхода к учету вязкости, при котором трубы сохраняли бы свою топологию.

### **Построение аналога диффузионной скорости для трехмерного течения**

Рассмотрим уравнение Навье — Стокса, записанное в форме уравнения эволюции завихренности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \Delta \omega, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор скорости течения,  $\omega$  — вектор завихренности.

Одним из известных подходов к учету вязкости, применяемых в классе двухмерных вихревых методов (расчет плоскопараллельных и осесимметричных течений без закрутки) является т.н. **метод диффузионной скорости**. Идея его состоит в моделировании диффузионного члена  $\nu \Delta \omega$  в уравнении (1) с помощью особого векторного поля  $\mathbf{V}_d$ , имеющего размерность скорости и называемого **диффузионной скоростью**.

Уравнение эволюции завихренности для плоскопараллельных течений имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \omega) = \nu \Delta \omega, \quad (2)$$

где  $\omega$  — компонента завихренности, перпендикулярная плоскости течения. Вводя поле диффузионной скорости вида

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\nabla \omega}{\omega},$$

уравнение (2) можно переписать в конвективном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{V} + \mathbf{V}_d) \omega) = 0.$$

Для его решения применим классический метод характеристик, который можно реализовать, например, с использованием метода вихревых частиц. Этот подход реализован в методе вязких вихревых доменов [1] и других методах на его основе.

Перенос данного подхода в класс трехмерных вязких течений связан с проблемой поиска такого поля скорости, перемещая вихревые трубки по которому, они оставались бы вихревыми трубками и сохраняли бы свою интенсивность. По теореме Фридмана [2] такие скорости (названные в работе [2] скоростями Фридмана) должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{U} + \omega (\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0.$$

Известно [2], что для элементарных вихревых трубок такое поле скорости существует, притом их бесконечно много. С другой стороны, практический поиск такой скорости затруднен в связи с существованием таких течений, для которых не существует локального способа вычисления диффузионной скорости, т.е. в виде формулы, выражающей связь между параметрами течения в сколь угодно малой области вокруг некоторой точки [3]. Тем не менее, можно получить удобное для применения на практике приближение скорости Фридмана, позволяющее учесть ряд эффектов вязкой диффузии завихренности.

Для элементарной вихревой трубки все возможные скорости Фридмана описываются формулой

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu \frac{\omega \times (\nabla \times \omega)}{|\omega|^2} + \frac{-\nabla f + \nabla W}{|\omega|^2} + \gamma \omega, \quad (3)$$

где поле  $f$  должно удовлетворять тождеству

$$\omega \cdot \nabla f = -\nu \omega \cdot (\nabla \times \omega),$$

поле  $W$  может быть задано произвольно, а поле  $\gamma$  так, чтобы его производная по направлению линий завихренности равнялась нулю.  $W$  и  $\gamma$  можно принять равными нулю, тогда как поиск поля  $f$  является нетривиальной задачей.

Выделим в формуле (3) первые два слагаемых и обозначим их сумму через  $\mathbf{U}_1$ :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{V}_d, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{V}_d = -\nu \frac{\omega \times (\nabla \times \omega)}{|\omega|^2}, \quad (5)$$

и назовем  $\mathbf{V}_d$  аналогом диффузионной скорости, а величину  $\mathbf{S} = \omega \times (\nabla \times \omega)$  — спиральностью завихренности. Далее перепишем уравнение эволюции завихренности в «квазифридмановском» виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{U}_1 + \omega (\nabla \cdot \mathbf{U}_1) = \mathbf{B},$$

где поле

$$\mathbf{B} = -\nu \nabla \times \left( \mathbf{S} \frac{\omega}{|\omega|^2} \right)$$

назовем остаточным членом. Видно, что в случае отсутствия спиральности завихренности ( $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ ) остаточный член равен нулю, и выражение (4) оказывается скоростью переноса вихревых трубок в вязкой жидкости (скоростью Фридмана) без каких-либо допущений. В этом случае численная реализация МВП для моделирования вязкой жидкости полностью сводится к невязкой постановке с тем отличием, что вместо поля скорости  $\mathbf{V}$  в выражениях фигурирует поле  $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$ , где добавка  $\mathbf{V}_d$  отвечает за диффузию завихренности вследствие вязкости.

В случае ненулевой спиральности завихренности это не так, однако в некоторых случаях, когда спиральность не играет существенной роли в динамике течения, можно ею пренебречь. Предлагаемый метод учета вязкости для МВП основан на допущении об отсутствии спиральности в течении, что позволяет распространить известный метод диффузионной скорости с двухмерных задач на трехмерные.

### Расчетная схема метода вихревых петель

Практическая реализация МВП состоит в представлении завихренности в виде набора замкнутых петель  $l_m$ , которые разбиваются на вихревые отрезки (рис. 1).

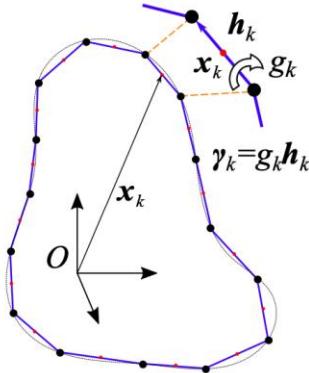


Рис. 1. Дискретизация вихревой петли с помощью отрезков

Каждый такой отрезок имеет три параметра:

- маркер  $\mathbf{x}_k$  — радиус-вектор центра отрезка,
- материальный вектор  $\mathbf{h}_k$ ,
- интенсивность  $\gamma_k = g_k \mathbf{h}_k$ , где  $g_k$  — циркуляция петли, одинаковая для всех отрезков одной петли.

Поле завихренности можно представить в виде суммы элементарных полей завихренности каждого из отрезков ( $k$  суммируется по всем отрезкам петли  $m$ ):

$$\boldsymbol{\omega}_m = \sum_k \gamma_k \int_{-1}^1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k - s\mathbf{h}_k) ds. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение эволюции завихренности (1), записанное для невязкой жидкости ( $\nu=0$ ) и опуская выкладки, можно записать следующие уравнения движения вихревых отрезков в идеальной несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}_k) \\ \frac{d\mathbf{h}_k}{dt} = \mathbf{h}_k \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}_k) \\ \frac{dg_k}{dt} = 0 \end{cases}$$

Предлагаемая модификация метода диффузионной скорости, основанная на допущении об отсутствии спиральности (закрученности) вихревых линий, позволяет учесть вязкость течения путем добавки к полю скорости  $\mathbf{V}$  поля  $\mathbf{V}_d$  — аналога диффузионной скорости (5):

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = (\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)(\mathbf{x}_k) \\ \frac{d\mathbf{h}_k}{dt} = \mathbf{h}_k \cdot \nabla (\mathbf{V} + \mathbf{V}_d)(\mathbf{x}_k) \\ \frac{dg_k}{dt} = 0 \end{cases}$$

## Моделирование эволюции эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости

Для демонстрации работы предлагаемой модели вязкости для МВП рассматривается задача о движении эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости. Особенность задачи состоит в наличии зон закрученности вихревых линий в областях эллипса, прилегающих к его вершинам, где вводимое допущение  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  не выполняется. Результаты расчета вихревым методом сравниваются с расчетом сеточным методом в программе OpenFOAM и с результатами физического эксперимента [4].

Параметры задачи и расчетной схемы приведены в таблице:

Физические параметры задачи	
Отношение полуосей $AR$	2
Большая полуось $a$	2
Циркуляция $\Gamma$	1
Число Рейнольдса $Re = \Gamma / \nu$	834
Начальный радиус ядра кольца $r_c$	0.1

Параметры расчетной модели	
Количество петель	49
Количество отрезков в петле	30
Расстояние между петлями	0.043
Схема интегрирования	RK2
Шаг интегрирования	0.05

Качественные результаты, демонстрирующие эволюцию формы кольца, показаны на рис. 2 и 3.

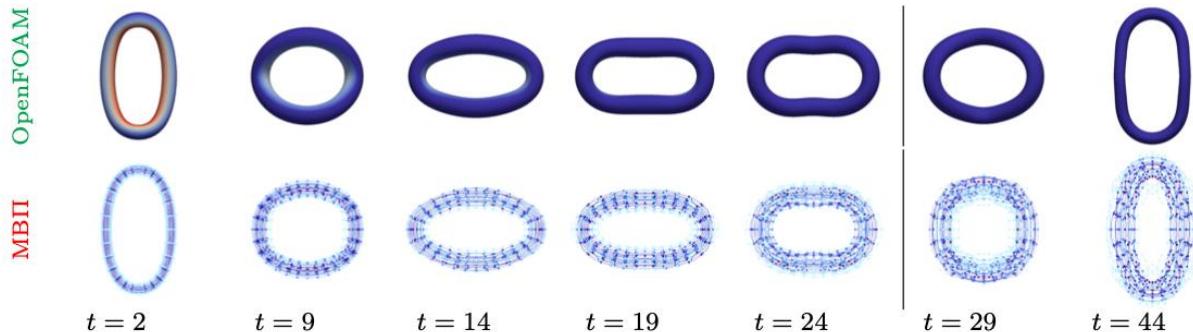


Рис. 2. Эволюция вихревого эллипса во фронтальной проекции (сверху — расчет в OpenFOAM, снизу — расчет МВП).

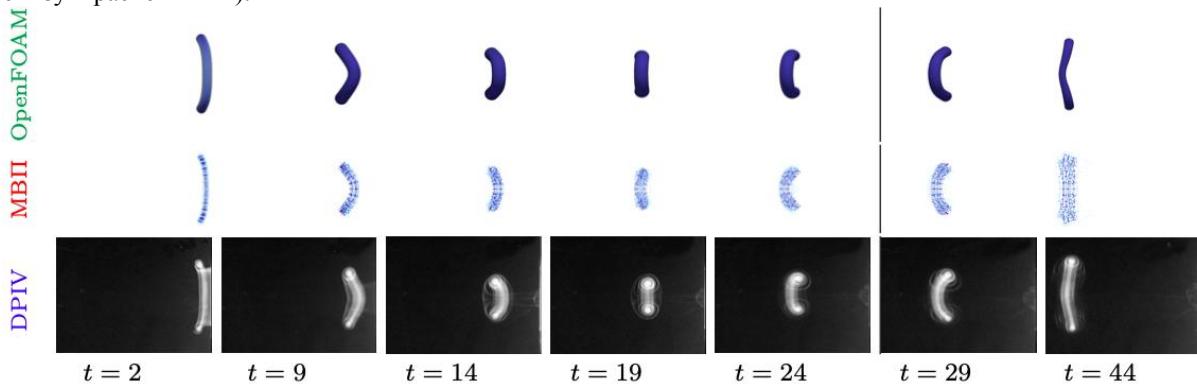


Рис. 3. Эволюция вихревого эллипса во фронтальной проекции (сверху — расчет в OpenFOAM, в центре — расчет МВП, снизу — эксперимент DPIV [4]).

Анализ рисунков показывает качественное соответствие профилей кольца в различные моменты времени для расчетов сеточным и вихревым методами и их соответствие экспериментальным результатам для кольца с теми же параметрами. Наблюдается увеличение

толщины трубы, характерное для вязкой диффузии. При моделировании идеальной жидкости такого эффекта не происходит.

На рис. 4 показан профиль завихренности в сечении эллипса, проходящем вдоль его большой полуоси, полученный вихревым методом (красный) в сравнении с расчетом в пакете OpenFOAM (зеленый). Также наблюдается качественное совпадение профилей. Отклонения связаны с нерегулярным расположением петель по ядру кольца, в связи с чем в процессе эволюции образуются области разрежения и кластеризации в различных зонах кольца.

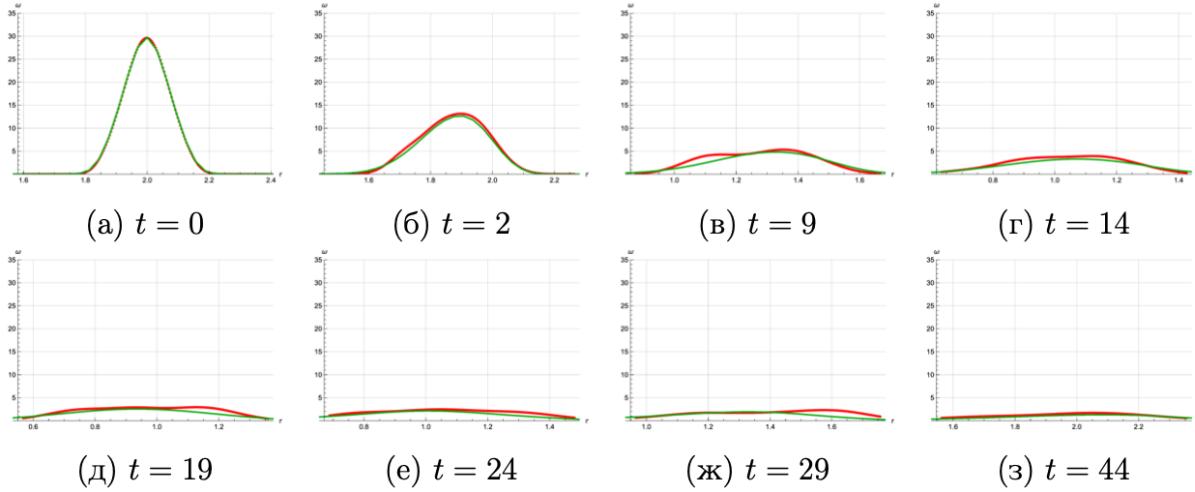


Рис. 4. Эволюция профиля завихренности эллиптического кольца (красный — МВП, зеленый — OpenFOAM)

### Заключение

Предложен метод учета вязкости жидкости для МВП. Метод основан на использовании идеи метода диффузионной скорости, применяемого для моделирования двухмерных течений. Допущением предлагаемого подхода является предположение об отсутствии спиральности завихренности. Моделирования эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости демонстрирует работоспособность предлагаемой модели в рамках конкретного примера течения с ненулевой спиральностью завихренности.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье — Стокса // Доклады Академии наук. 2004. Т. 399, № 1. С. 1–5.
2. Марков В.В., Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // Изв. РАН. МЖГ. 2015. Вып. 2, С. 8-15.
3. Коцур О.С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // Труды МФТИ. 2019. Т. 11. №1. С. 76-85.
4. Adhikari D. Some experimental studies on vortex ring formation and interaction. Master thesis, National University of Singapore, 2009. 209 p.

### Сведения об авторах:

**Коцур Олег Сергеевич** — старший преподаватель кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. +7 (499) 263-63-10

E-mail: oskotsur@gmail.com

## **Моделирование зоны реакции при термогазохимическом воздействии с применением бинарных смесей**

**Кравченко М.Н., Диева Н.Н., Малова А.Д, Лищук А.Н., Шестернина Н.В.**

Современное состояние выработанности ресурсов нефтегазового комплекса обуславливает актуальность и необходимость применения специальных методов для улучшения эффективности извлечения углеводородов (УВ) из недр. В значительной степени это касается низкопроницаемых месторождений высоковязкой нефти и керогеносодержащих пластов, в том числе находящихся на поздней стадии разработки. В работе проведен анализ пролонгированности эффекта термохимического воздействия на углеводородный коллектор при закачке непосредственно в призабойную зону пласта химически активного состава на основе нитрата аммония. Рассмотрены особенности описания в гидродинамической модели процессов, происходящих в зоне формирования экзотермических реакций разложения рабочего агента, и проведена оценка параметров в зоне реакции. Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ №19-07-00433 А.

**Введение.** История развития и становления технологии термогазохимического воздействия с применением бинарных смесей (ТГХВ БС) насчитывает уже более 20 лет, но в последнее десятилетие вышла на уровень опытно-промышленных испытаний на различных месторождениях, в том числе керогеносодержащих [1]. Метод ТГХВ БС относят к тепловым методам повышения нефтеотдачи (МУН) по принципу воздействия на насыщенный коллектор. При закачке непосредственно в пласт водного раствора бинарной смеси (аммиачной селитры с нитритом натрия), приводимой к состоянию полного разложения селитры, инициируется экзотермическая реакция, формирующая разноскоростные волны высокого давления и температуры, которые далее распространяются от зоны реакции в сторону скважины и на периферию дренируемой области [2]. За счет выделения в химической реакции разложения БС горячих газов практически мгновенно на некотором расстоянии от скважины (положение зоны реакции регулируется за счет объема продавочной жидкости) возникает высокотемпературная область повышенного давления. Датчики на забое скважины регистрируют повышение давления до 200-600 атм (уровень зависит от концентрации БС в водном растворе и объема продавочной воды). Выделяющееся в зоне реакции тепло в большой степени поглощается минеральной матрицей коллектора. Тепловая волна имеет на два порядка меньшую скорость распространения, а запас аккумулированной в матрице энергии и является основным фактором изменения характера нефедобычи в последующий период. Обычно, запуск скважины на добычу производится после 2-3 суток, необходимых для извлечения оборудования воздействия и перевода скважины в штатный режим добычи.

Прогрев насыщенного коллектора способствует снижению вязкости флюидов, соответственно увеличению его подвижности, а также расколбыванию призабойной зоны, то есть приведению в подвижное состояние ранее неподвижной (парафиновой, битуминозной) части УВ, осевшей в предыдущий период «холодной добычи» на поверхности капилляров. Также тепловой разогрев матрицы породы может приводить к изменению самой структуры порового пространства, образованию дополнительной трещиноватости и кавернозности, повышению связности проводящих каналов и изменению фильтрационно-емкостных свойств (ФЕС) насыщенных коллекторов. Для керогеносодержащих пород возникающие устойчивые температуры выше 350 градусов цельсия в близи зоны реакции способствуют выделению дополнительных УВ за счет их генерации из керогена [3].

**Промысловый эксперимент и постановка задачи.** В работах [3, 4] описаны особенности применения метода ТГХВ БС на керогеносодержащих пластах, и анализ эффективности технологии на Ромашкинском месторождении, где проведенные промысловые эксперименты привели к запуску на добычу «сухой» скважины с дебитом выше уровня добычи в предстартовый период. Длительность эффекта (более 1,5 лет) объясняется пролонгированностью теплового эффекта от разогрева матрицы. Было показано, что в пластовой системе происходит не только снижение вязкости флюида, но и включаются механизмы фазового преобразования различных углеводородных компонент, в том числе изначально входящих в матрицу породы, то есть повышается динамическая пористость насыщенной пористой системы. По протоколу опытно-промышленных испытаний (ОПИ) объем рабочего агента (БС) составил  $20 \text{ м}^3$  при расчетной концентрации раствора – 60%

(компоненты БС подаются по раздельным каналам и смешиваются непосредственно в зоне перфорации). Обрабатываемый насыщенный пласт представлен преимущественно карбонатными отложениями, отличается низкими показателями пористости и проницаемости, а также в составе своей твердой фазы содержит некоторое количество керогена, способного при определенных условиях переходить в жидкое состояние. Нефть, насыщающая породу, высокосмолистая, парафинистая и высокосернистая. Часть нефтяной фазы находится в твердом состоянии в призабойной зоне в период добычи при пластовых температурах порядка 20°C в виде парафина и битума и при повышении температуры может переходить в подвижную нефть. В ходе проведения воздействия на забое скважины велись замеры основных параметров пласта: расхода, давления и температуры.

Согласно гидродинамическим расчетам [3, 4] при закачке в скважину всех установленных регламентом технологии объемов жидкостей (рабочего агента – БС, буферной жидкости, инициатора реакции – кислоты и продавочной воды) расположение зоны реакции БС в призабойной зоне соответствует удаленности от забоя от 1,3 до 3,4 м по всей толщине пласта. Учет совместной фильтрации водного раствора БС с другими водосодержащими технологическими жидкостями, а также с пластовой водой, показал, что по мере фильтрационного движения за счет процессов смешения концентрация БС снижается практически до 50%.

При разложении БС продуктами реакции являются водорастворимая натриевая соль, свободная вода, газы азота, а также теплота 300 кДж/моль, что отражено в формуле (1):



Анализ лабораторного и промыслового опыта [5,6] показал, что при совместной фильтрации продуктов реакции и пластового флюида азот не растворяется в нефти. Оценка температур в зоне реакции [7] дает основание полагать, что вода находится в сверхкритическом состоянии, поэтому считать основным механизмом повышения нефтеотдачи при ТГХВ растворение в нефти газообразных продуктов и тем самым снижение вязкости пластового флюида не возможно.

**Расчет зоны реакции.** Эксперименты [7], на которые опираются авторы настоящей работы, проводились с использованием автоклава с контролем давления и температуры и состава продуктов реакции. Максимальное давление, достигнутое в экспериментах, составило 22,9 МПа. Была уточнена скорость реакции, и оценены уровни температур при разложении бинарной смеси на различных режимах, в том числе при давлениях, сопоставимых с пластовыми. Тепловыделение при разложении 1 кг селитры выше, чем у порохов [7] и измеряется величиной диапазона 4688 - 5060 кДж на 1 кг селитры. Уровень температуры, достигаемый в пористой среде при концентрации БС 50 %, равен 350 °C, именно такая температура закладывалась в качестве исходного параметра для продуктов реакции в более ранних гидродинамических расчетах авторов [4]. Основной задачей настоящего исследования является уточнение термобарических параметров в зоне разложения БС, учитывающего тепловыделение реакции и поглощение тепла матрицей. С учетом фазовых диаграмм всех составляющих продуктов реакции и их физических свойств, используя соответствующие уравнения состояния для сверхкритической воды и газообразного азота, можно рассчитать давления и температуры в зоне реакции.

Первоначально в математической модели предполагалось, что реакция разложения протекает фактически мгновенно, что соответствует экспериментам, описанным в работе [7], где зафиксирован самоускоряющийся эффект и быстрое развитие реакции разложения БС при повышении температуры: индукционный период нарастания температуры на 100°C оценивался 20 минутами, а время импульсного нарастания давления – 1 минутой. Гидродинамический расчет последовательной закачки рабочих жидкостей в пропласток, характеризующийся определенным значением пористости, позволяет определить положение зоны реакции и номинальное значение массы пористой матрицы. Для Ромашкинского месторождения данные для пласта отражены в работах [3,4].

Для уточнения параметров в зоне реакции необходимо более детально изучить свойства всех компонентов химической реакции. В расчетах, учитывая стехиометрические коэффициенты в

формуле (1), определялись соотношения между массами всех исходных веществ и продуктов реакции (Табл.1), а также по формуле (2) плотность раствора БС (с учетом массовых концентраций компонентов БС), равная 1558,6 кг/м<sup>3</sup>:

$$\rho_{\text{р-ра}} = \rho_{\text{воды}}(1 - c_{\text{БС}}) + \rho_{\text{NH}_4\text{NO}_3}c_{\text{NH}_4\text{NO}_3} + \rho_{\text{NaNO}_2}c_{\text{NaNO}_2}. \quad (2)$$

Таблица 1.

	$\text{NH}_4\text{NO}_3$	$\text{NaNO}_2$	$\text{N}_2$	$\text{NaNO}_3$	$2\text{H}_2\text{O}$
M, г/моль	80,04	68,99	28,01	84,99	36,03
m*, кг/кг	1	0,862	0,350	1,062	0,450
m, т	10	8,66	3,52	10,67	4,52

По объемам закачиваемых по регламенту жидкостей можно рассчитать массы выхода всех продуктов реакции. Для создания сбалансированной БС на 1 кг аммиачной селитры требуется 1,16 кг нитрита натрия ( $\text{NaNO}_2$ ). В таблице 1 приведены значения выхода продуктов реакции при разложении БС: в молярном выражении (M), в расчете на 1 кг селитры (m\*) и в пересчете на объем 20 м<sup>3</sup> аммиачной селитры, предусмотренный регламентом промыслового эксперимента (m). Как видно из таблицы на 1 кг селитры получается 350 грамм азота, 1 кг нитрата натрия и 450 грамм воды.

Чтобы рассчитать уровень температуры в зоне реакции, необходимо знать все тепловые характеристики продуктов реакции и порового скелета. Оценка параметров в зоне реакции свидетельствует о высоких уровнях давлений (выше 500 атм) и температур (выше 300°C), что с учетом фазовых диаграмм [8,9] позволяет говорить о наличии в продуктах реакции воды – в сверхкритическом состоянии, азота – в газообразном виде, и фильтрации пластового флюида совместно с возникающей водогазовой эмульсией (с учетом слабой растворимости азота в нефти), наблюдаемой на практике в первые сутки после проведения ТГХВ. Эффективность вытеснения нефти с помощью водогазовой эмульсии сейчас является одним из перспективных способов повышения нефтеотдачи [10], как и использование закачки в пласт сверхкритической воды [11]. С учетом слабой сжимаемости воды, опираясь на теорию взаимопроникающих континуумов, можно рассчитать плотность эмульсии с учетом изменения объемной доли азота при изменении давлений и температур, пренебрегая диффузионными скоростями внутри эмульсии. Принятые в расчете тепловые константы и свойства отражены в таблице 2

Таблица 2.

Вещество	Теплопроводность, Вт/(м*K)	Теплоемкость, Дж/(кг*K)	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Доля объема, д.ед.
Порода	1,65	855	2800	0,8
Нефть	0,1	1890	804	0,03
Вода	0,683	4200	1000	0,17

Рассчитанное тепловыделение в зоне реакции составило 41 915 МДж. Это количество тепла идет на разогрев продуктов реакции и пластовой системы, насыщенной флюидами. По исходному составу породы (из промысловых данных) с учетом теплоемкостей входящих фракций, подсчитывалась средняя плотность и теплопоглощающая способность минерального скелета. Далее по заданной пористости породы и полученной средней плотности оценивалась масса породы, вмещающей зону реакции. Параллельно проводился гидродинамический расчет закачки заданного объема БС и других жидкостей в изучаемый пропласток на установленном интервале перфорации. После этого сравнивалась суммарная внутренняя энергия системы до и после реакции разложения БС (без учета энергий фазового перехода). В результате было установлено, что повышение температуры матрицы от начального пластового значения в 27°C

в области химической реакции с БС (до начала оттока тепла на периферию от зоны реакции) составляет 349 °C . Это значение сопоставимо с результатами лабораторных исследований [7]. Оценка величины скачка давления в зоне реакции за счет расширения продуктов реакции, проводилась в предположении равенства давлений всех фазах и без учета индукционного периода нарастания температур, но с учетом уравнения состояния азота [10]. Величина давления, установившаяся в насыщенной пористой среде, будет в основном зависеть от того, какой объем займет газообразный азот с учетом теплового расширения пористого минерального каркаса после обработки. По величинам массы нитрата натрия ( $\text{NaNO}_3$ ) и воды, помещенной в пласт, было установлено полное растворение соли и подсчитана концентрация раствора (порядка 27 – 29%, в зависимости от начальной водонасыщенности пласта, распределенной по пропластку определенным образом). Зависимость плотности соляного раствора с установленной концентрацией от давления определялась путем аппроксимации лабораторных данных [12] до температур выше 300°C.

Без учета периода индукции реакции разложения БС и в предположении мгновенного образования эмульсии (многофазной смеси водно-солевого раствора и свободного газа) рассчитанное давление в зоне реакции значительно превышает 200 МПа и тогда расчетный «отклик» на датчике давления на забое скважины кратно превышает регистрируемое на практике значение (около 16,5Мпа). Однако, на практике в пластовых условиях нарастание температуры происходит постепенно (за счет индукционного периода), что приводит к «стравливанию» давления в окружающий зону реакции объем. Выделяющийся азот постепенно смешивается с жидкими фазами, осуществляя процесс вытеснения продавочной воды и нефти к стволу скважины и нефти на периферию пласта. Кроме того, на практике используются специальные замедлители реакции, увеличивающие время индукции (до 2-х часов) с целью снижения волновой нагрузки на скважину и предотвращение аварий [1].

**Заключение.** Анализ параметров всех веществ, участвующих в реакции разложения БС при промысловой реализации технологии ТГХВ показал, что величины температур в большей степени зависят от объема и свойств порового пространства, которое поглощает основную часть выделяющейся тепловой энергии. Величина давления в зоне реакции зависит как от кинетики химической реакции, интенсивности её протекания, длины индукционного периода (при использовании катализаторов или замедлителей реакции), так и фильтрационно-емкостных свойств пористой матрицы с учетом, в том числе, предела ее упругости и предела прочности. Решение прямой задачи теории фильтрации является более сложной с технической точки зрения задачей. Лабораторные эксперименты в «термобомбе» по разложению рабочего состава БС, не дают полного представления о термодинамическом поведении пластовой системы в зоне реакции при промысловом эксперименте, так как не учитывается влияние пористой матрицы, образование многофазной эмульсии, а также характера вытеснения эмульсией пластовых флюидов. Высокие значения давлений и температур требуют использования уравнений состояния всех фаз и компонент с учетом как упругой, так и тепловой составляющих, то есть уравнения в форме Ми-Грюнайзера. Характер вытеснения эмульсионным раствором также требует описания движения на основе обобщения уравнений фильтрации для вязкопластичного флюида с предельным градиентом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lishcuk A. N., Kravchenko M. N., Shesternina N. V., et al. The Results of Pilot and Industrial Application of Thermal-Gas-Chemical Well Treatment with Binary Mixtures and Development of Mathematical Models for Reservoir Processes in Source Oil Rock. Society of Petroleum Engineers, 2020, SPE-201812-MS [электронный ресурс: <https://www.onepetro.org/download/conference-paper/SPE-201812-RU?id=conference-paper%2FSPE-201812-RU>].
2. Dieva N. N., Kravchenko M. N., Muradov A. V., Lishchuk A. N., Evtyukhin A. V. Hydrodynamic analysis of the efficiency of thermochemical methods at deposits with complicated development conditions. Journal of Physics: Conference Series, 2019, V. 1359, 012027 [электронный ресурс: <https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1359/1>].

3. Kravchenko M.N., Dieva N.N., Fatykhov G.A. Hydrodynamic Analysis of Pyrolytic Studies for the Kerogen-Containing Rocks of Romashkinskoye Field. Processes in GeoMedia. 2021. V. III. pp. 273-284.
4. Кравченко М.Н., Диева Н.Н., Фатыхов Г.А. Гидродинамический анализ пиролитических исследований керогеносодержащих пород Ромашкинского месторождения. Сборник тезисов докладов V Всероссийской конференции «Теплофизика и физическая гидродинамика» (ТФГ2020) с элементами школы молодых ученых и научной молодежной школы «Теплофизика и физическая гидродинамика: современные вызовы», г. Ялта. Институт теплофизики СО РАН, 2020. 254 с. (с.71).
5. Игнатьев Н.А. Синцов И.А. Опыт и перспективы закачки азота в нефтегазовой промышленности. Журнал Фундаментальные исследования. 2015. № 11 (часть 4) с. 678-682.
6. Козырев О.Ю., Пинигин Е.Н., Вольф А.А., Хайруллин А.А. Особенности лабораторного моделирования процессов вытеснения нефти азотом при нестационарном режиме фильтрации. Академический журнал Западной Сибири. 2016. Т. 12. № 5 (66). С. 22-23.
7. Вершинин В.Е., Варавва А.И., Татосов А.В., Лищук А.Н. Оценка теплового эффекта обработки призабойной зоны пласта энерговыделяющими бинарными смесями. Нефтяное хозяйство, 2018. с. 122-126.
8. Псаров С.А. Тепловые эффекты окисления органических веществ в сверхкритической воде. Дис. на соиск. уч. ст. к.ф.-м. н. Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН. Новосибирск, 2006. 137 с.
9. Якуб Л.Н. Полимеризация в сильно сжатом азоте. Физика низких температур, 2016. Т. 42. №1. с. 3-22.
10. Земцов Ю. В. Перспективы дальнейшего развития применения мелкодисперсных водогазовых смесей в качестве нефтьвытесняющего агента. Нефть. Газ. Новации, 2017, №7, с. 34-38.
11. Гуйбер О., Чернов А.А. Способ добычи высокотехнологичной нефти и технологический комплекс для его осуществления. Патент на изобретение, RU 2704684 C1, 30.10.2019, Заявка № 2018142302 от 30.11.2018.
12. Кодиров М.М. Основные способы получения нитрита натрия. Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов, 2016. [Электронный ресурс: <http://jurnal.org/articles/2016/chem7.html>].

#### Сведения об авторах:

**Кравченко Марина Николаевна**, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры НГиПГ, факультет РНГМ, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, г. Москва, +7(499) 507-84-12  
**E-mail:** [kravchenko.m@gubkin.ru](mailto:kravchenko.m@gubkin.ru).

**Диева Нина Николаевна**, к.т.н., доцент кафедры НГиПГ, факультет РНГМ, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, г. Москва, +7(499) 507-84-12.  
**E-mail:** [ninadieva@bk.ru](mailto:ninadieva@bk.ru)

**Малова Александра Дмитриевна**, студент 5 курса, факультет РНГМ, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, г. Москва.  
**E-mail:** [malovaad@gmail.com](mailto:malovaad@gmail.com)

**Лищук Александр Николаевич**, ООО УК «Группа ГМС», г. Москва.

**Шестернина Наталья Викторовна**, ПАО «Татнефть» имени В.Д. Шашина, г. Альметьевск.

# Математическое моделирование температурных напряжений в нелокальной термовязкоупругой сплошной среде

Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю., Кувшинникова Д.А.

На сегодняшний день существует немало работ о применении нелокальной вязкоупругости, тогда как в реальности многие материалы проявляют вязкоупругие свойства, или даже нелокальные вязкоупругие свойства, например, твердое ракетное топливо, композиционные материалы и т.д. В последние годы такие материалы стали называть «структурно-чувствительные», а изучение их термомеханических характеристик стало возможным в рамках обобщенной механики сплошной среды. Математические модели, описывающие такие материалы, относятся к классу нелокальных моделей, предложенных А.К. Эрингеном. В работе рассмотрена математическая модель нелокальной термовязкоупругой сплошной среды. При помощи метода конечных элементов найдены распределения температурных напряжений при высоконапряженном импульсном нагреве нелокального полупространства, проанализировано влияние параметров нелокальности на полученные решения.

Материалы, создаваемые на основе нанотехнологий, обладают уникальными теплофизическими и физико-механическими свойствами [1–3]. Однако, образовался существенный разрыв между технологиями получения таких материалов и областью математического моделирования. Известно, что в силу особенностей структуры, к таким материалам не применима методология континуума. Общая математическая модель для таких материалов описана в работах [4 – 5].

При повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо выраженное явление вязкого течения. В этом случае поведение реального тела принято называть вязкоупругим, так как тело одновременно проявляет упругие и вязкоупругие свойства. Поэтому учет реологических эффектов имеет большое значение при проектировании элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур.

С повышением абсолютной температуры материал твердого тела может приобрести вязкие свойства, сохраняя и свойство упругости. Тогда, при нагружении тела возникает так называемая вязкоупругая деформация, которая изменяется во времени даже при постоянной нагрузке, а после снятия нагрузки постепенно исчезает. Свойства таких материалов, к которым можно отнести многие полимеры, описывают математические модели термовязкоупругой сплошной среды [6].

Запишем уравнение, описывающее распределение напряжений по глубине вязкоупругого слоя толщины  $L$  в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} R^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + R^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = & (1 - \xi) \left( p_1 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + p_2 \int_{z-r}^{z+r} \varphi(|z - z'|) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial (z')^2} dz' \right) + \\ & + \xi p_1 \int_0^t \exp \left( -\frac{t - t'}{D_\sigma^2} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right) dt' + \\ & + \xi p_2 \int_0^t \exp \left( -\frac{t - t'}{D_\sigma^2} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left( \int_{z-r}^{z+r} \varphi(|z - z'|) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial (z')^2} dz' \right) dt'. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma$  – безразмерное напряжение;  $R^2$  – безразмерный параметр, обратно пропорциональный квадрату скорости звука;  $\theta$  – безразмерная температура;  $z$  – пространственная координата;  $t$  – время;  $\xi$  – коэффициент отношения вязких и упругих механических свойств;  $D_\sigma^2$  – безразмерное время релаксации внутреннего параметра термодинамического состояния;  $r$  – радиус функции влияния.

Эффект нелокальности среды состоит в том, что физические характеристики элементов структурно-чувствительного материала подвержены влиянию прочих окружающих элементов структуры. В связи с этим в выражение (1) входят  $p_1$ ,  $p_2$  – веса нелокального влияния;  $p_1 + p_2 = 1$ ,  $\varphi(|x' - x|)$  – функция влияния нелокальности, причем:  $\int_V \varphi(|x' - x|) dx' = 1$ .

Функцию влияния нелокальности в данной работе примем в виде [7]:

$$\varphi(|z'-z|) = \frac{1}{2r} \exp\left(-\frac{|z'-z|}{r}\right), \quad |z'-z| < r. \quad (2)$$

Начальные и граничные условия для напряжений имею вид:

$$\begin{aligned} \sigma|_{t=0} &= 0, \quad \left.\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \\ \sigma|_{z=0} &= \sigma|_{z=L} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для нахождения распределения температуры в вязкоупругом слое воспользуемся уравнением теплопроводности [6]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{D_T^2}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) dt', \quad (4)$$

где  $D_T^2$  – безразмерное время релаксации плотности теплового потока.

Начальные и граничные условия для уравнения (4) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \theta(z, t)|_{t=0} &= 0; \\ z = 0: \quad -\frac{\partial \theta}{\partial z} + \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{D_T^2}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \theta}{\partial z} dt' &= Q_1; \\ z = L: \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{D_T^2}\right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial \theta}{\partial z} dt' &= Q_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $Q_1, Q_2$  – безразмерные плотности тепловых потоков.

Для нахождения температурных напряжений из уравнения (1), предварительно было найдено распределение температуры в слое. Решение уравнения (4) с граничными условиями второго рода, где на одном конце слоя было задано условие теплоизоляции, а на другом высокоинтенсивное импульсное воздействие, было найдено с помощью метода конечных элементов (МКЭ) на равномерной сетке [8]. На рис. 1 приведены распределения температуры в различные моменты времени в слое толщиной  $L=10$  при  $D_T^2=10$ .

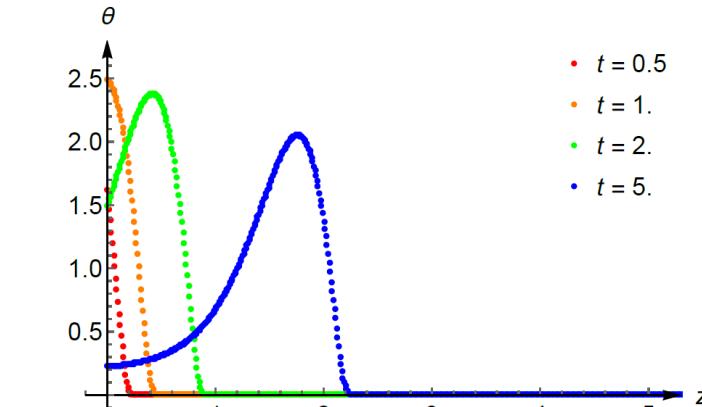


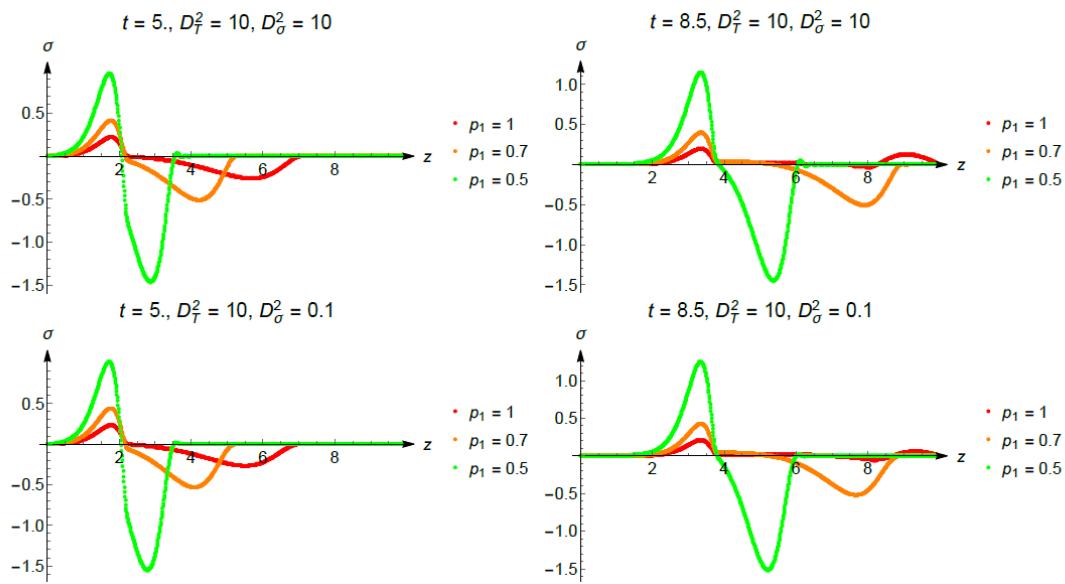
Рис.1 Решение гиперболического уравнения теплопроводности в различные моменты времени

На основе полученных распределений температуры при помощи МКЭ было найдено решение уравнения (1) с начальными и граничными условиями (3).

Рассмотрим влияние вклада локальной составляющей  $p_1$  и параметра  $D_\sigma^2$  на решение уравнения (1). Примем параметры  $R^2=1$ ,  $\xi=0.05$ ,  $r=3$ , получим графики распределения температурных напряжений в различные моменты времени (рис.2).

Видим, что уменьшение вклада локальной составляющей ведет к росту амплитуды волны напряжений и уменьшению глубины проникновения в слой материала, что говорит о

возможности использования таких материалов в качестве защитных покрытий при высокointенсивных нагружениях [9, 10].



*Рис. 2 Распределение нелокальных температурных напряжений в слое при различном вкладе локальной составляющей  $p_1$*

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 0705-2020-0032).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu., Kuvshinnikova D.A. Nonstationary heat conduction in a curvilinear plate with account of spatial nonlocality. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2019. Vol. 92. Issue 3. P. 608 - 613.
2. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu., Kuvshinnikova D.A. One mathematical model of thermal conductivity for materials with a granular structure. *Thermal Science*, 2019. Vol. 23. P. S1273 - S1280
3. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu., Kuvshinnikova D.A. Nonlocal dynamic temperature stress simulation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1902. Art.№ 012015.
4. Zarubin V. S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I. Yu. Mathematical model of nonlocal medium with internal state parameters. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2013. Vol. 86, Issue 4. P. 820 - 826
5. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Kuvshinnikova D.A. Mathematical model of the heat transfer process taking into account the consequences of nonlocality in structurally sensitive materials. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991(1). DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012050
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 511 с.
7. Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 393 pp.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М: Мир, 1979. 393 с.
9. Kuvyrkin G.N., Zhuravskii A. V., Savel'eva I. Yu. Mathematical Modeling of Chemical Vapor Deposition of Material on a Curvilinear Surface. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016. T. 89. N 6. P. 1374 - 1379.
10. Zarubin V. S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I. Yu. Mathematical Model of a Thermostating Coating with a Thermoelectric Module. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015 . Vol. 88. Issue 6. P. 1373 - 1380.

**Сведения об авторах:**

**Кувыркин Георгий Николаевич** (Москва) — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. (105005, Москва, Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д. 5, стр. 1,  
**E-mail:** fn2@bmstu.ru ).

**Савельева Инга Юрьевна** (Москва) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д. 5, стр. 1,

**E-mail:** [inga.savelyeva@gmail.com](mailto:inga.savelyeva@gmail.com) ).

**Кувшинникова Дарья Алексеевна** (Москва) — аспирант кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2 -я Бауманская ул., д.5, стр. 1,

**E-mail:** [kuvshinnikovadasha@gmail.com](mailto:kuvshinnikovadasha@gmail.com) ).

## **Самозалечивание микротрецин в процессе продольной электропластической прокатки**

**Кукуджанов К.В.**

На основе проведенного численного моделирования процесса прокатки тонких листов поликристаллического металла показано, что при определенных условиях микротрециины (микропоры) в очаге деформации могут частично самозалечиваться. При внешнем воздействии импульсом высокоэнергетического электромагнитного поля берега микротреций оказываются сваренными в вершинах расплавленным металлом, при этом длина и объем микротреций уменьшаются. Что согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

В литературе приводятся различные методы самовосстановления (самозалечивания) металлов, сплавов и композитных материалов [1-10].

В силу универсальности значительный интерес представляет метод самозалечивания микродефектов в проводящих материалах при воздействие на них короткими импульсами высокоэнергетического электромагнитного поля (далее – «ВЭМП») [5-10]. Метод базируется на хорошо известном эффекте концентрации электромагнитного поля на неоднородностях среды. Он широко используется на практике в высокотехнологических областях промышленности, например, при электропластическом деформировании металлов, сплавов, проводящих композитов и керамики, однако, не получил до недавнего времени должного теоретического обоснования из-за сложностей мультифизического моделирования воздействия ВЭМП на материал при пластическом деформировании.

Прокатка является основным подходом при обработке металлов давлением. Подавляющее большинство полуфабрикатов и изделий metallургической промышленности выпускается в виде проката. Причем, посредством продольной прокатки производится около 90% всей прокатываемой продукции. Электропластическая прокатка с воздействием ВЭМП представляет интерес при производстве тонкого проката из труднодеформируемых материалов, когда традиционные холодная и горячая прокатки приводят к образованию в листе множественных микротреций, образующихся при начальном захвате заготовки рабочими валками (этую зону также называют зоной входа в очаг деформации) и приводящих в последствие в негодность изделие. Эксперименты показывают, что микротрециины могут сливаться, образуя трещины, выходящие на поверхности тонкого листа. Тогда как обработка прокатываемого листа импульсным ВЭМП приводит к частичному самозалечиванию таких дефектов [6].

Настоящая работа направлена на теоретическое исследование механизма самозалечивания микротреций в процессе продольной электропластической прокатки тонкого металлического листа.

Моделирование процесса прокатки представляет известные трудности из-за интенсивного пластического течения материала в очаге деформации, находящимся между валками в каждый конкретный момент процесса прокатки. Воздействие на очаг деформации импульсным ВЭМП приводит к дополнительным существенным сложностям при исследовании процесса самозалечивания микродефектов в этой области. Однако численное моделирование можно значительно упростить, если принять во внимание различия во временных и пространственных масштабах протекающих процессов. А именно, что длительность импульсов ВЭМП составляет порядка 100мкс, тогда как время нахождение материала в очаге деформации составляет, по меньшей мере, 10мс (для больших скоростей движения прокатываемого листа), при том, что размеры микротреций 0,1-10мкм, в то время как размеры листа и очага деформации 1-10мм. В связи с чем, процессы макродеформирования листа и воздействия импульсом ВЭМП на микротрециины в очаге деформации можно рассматривать раздельно.

Таким образом, предлагается следующий численный метод решения поставленной задачи: на первом этапе определить макроскопическое напряженно-деформированное состояние в очаге деформации, решив упругопластическую задачу о плоской холодной продольной прокатке тонкого листа, на втором этапе, решить электротермическую задачу о воздействии ВЭМП на прокатываемый лист, на третьем этапе, учитывая поля напряжений, потенциала и температуры в очаге деформации, решить электротермоупругопластическую задачу о воздействии коротким импульсом ВЭМП на микротрециины, которые образовались в

очаге деформации за счет растягивающих напряжений, действовавших в направлении прокатки в зоне захвата. Для решения задачи на третьем этапе требуется знать только средние значения макроскопических полей напряжений, потенциала и температуры в очаге деформации за зоной захвата заготовки, что определяет выбор моделей на первых двух этапах.

Для исследования напряженного состояния тонких листов большое распространение получила одномерная модель прокатки, впервые предложенная Карманом, в которой предполагается, что величины компонент скорости в направлении прокатки и тензора нормальных напряжений зависят лишь от координаты вдоль направления прокатки и не зависят от координаты перпендикулярной направлению прокатки. В данной модели предполагается, что любое плоское на входе в очаг деформации сечение остается плоским в течение всего времени деформирования [11]. На первом этапе для получения средних макронапряжений в очаге деформации используется модифицированная модель Кармана, подробно описанная и исследованная в [11] и которая с хорошей точностью позволяет получить требуемые значения для тонких листов (когда  $L/H > 1.5$ , где  $L$  – размер очага деформации,  $H=(H_1+H_2)/2$  – средняя полутолщина прокатываемого листа).

Для расчета макроскопических полей потенциала и температуры в очаге деформации (второй этап) используется законы сохранения заряда и энергии. Рассматривается способ подведения тока в очаг деформации посредством двух скользящих контрактов, размещенных до и после очага деформации между валками. Этот способ является оптимальным с точки зрения простоты реализации при производстве и сохранности рабочих валков прокатного стана от преждевременного электрокоррозионного разрушения.

Микромодельный анализ механизмов самозалечивания микротрецин в очаге деформации проводится на основе разработанной микромеханической модели [12-15]. Эта модель позволяет, во-первых, рассчитывать физические поля на этапе воздействия кратковременным импульсным ВЭМП микротрециины и микропоры в токопроводящем термоупругопластическом материале с распределенными дефектами, во-вторых, рассчитывать поле температуры и напряженно-деформированное состояние в окрестности микротреций и микропор после окончания действия импульса ВЭМП (этап релаксации поля температуры).

Микромодель учитывает фазовые переходы (плавление-кристаллизацию и испарение) в металле, зависимость всех его физико-механических свойств от температуры, анизотропию реологических свойств зерен, двойников, включений, а также различные граничные и контактные условия на их границах раздела, в частности протекание электрического тока между свободными поверхностями микротреций и микропор посредством автоэлектронной эмиссии. Деформации предполагаются конечными. Уравнения, описывающие электрический, механический и термический процессы в материале полностью связаны и решаются численно совместно методом конечных элементов на подвижной сетке.

На основе проведенного моделирования процесса прокатки показано, что при определенных условиях микротрециины в очаге деформации могут частично самозалечиваться.

Механизм процесса самозалечивания следующий: при внешнем воздействии импульсом ВЭМП происходит сильная концентрация поля, экстремальный нагрев и плавление металла в вершинах микротреций в очаге деформации внутри образца. Что инициирует процесс самозалечивания, который протекает путем одновременного уменьшение длины микротрециины, выброса струи расплавленного металла из вершины внутрь трещины и смыкания ее берегов в окрестности вершины трещины. Таким образом, берега микротрециины в ее вершине оказываются заваренными расплавленным металлом. При этом длина и объем микротреций уменьшаются. Воздействие повторными импульсами ВЭМП может привести к дальнейшему залечиванию дефекта при прокатке.

Данный механизм самозалечивания микротреций подтверждается имеющимися экспериментальными данными [6].

Настоящее исследование выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда (проект № 19-19-00616).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hager, M. D., Greil, P., Leyens, C., Sybrand, V. D. Z. & Schubert, U. S. Self- healing materials. *Adv. Mater.* 22, 2010, P.5424–5430.
2. Ferguson, J. B., Schultz, B. F. & Rohatgi, P. K. Self-healing metals and metal matrix composites. *JOM*. 66, 2014, P.866–871.
3. White, S. R. et al. Autonomic healing of polymer composites. *Nature*. 409, 2001, P.794–797.
4. Toohey, K. S., Sottos, N. R., Lewis, J. A., Moore, J. S. & White, S. R. Self-healing materials with microvascular networks. *Nat. Mater.* 6, 2007, P.581–585.
5. Zheng, X. G., Shi, Y. N. & Lu, K. Electro-healing cracks in nickel. *Mater. Sci. Eng. A* 561, 2013, P.52–59.
6. Xiaoxin Ye, Xiaopei Li, Guolin Song, Guoyi Tang Effect of recovering damage and improving microstructure in the titanium alloy strip under high-energy electropulses. *Journal of Alloys and Compounds* v.616, 2014, P.173–183.
7. Беклемишев Н.Н., Корягин Н.И., Шapiro Г.С. Влияние локально-неоднородного электромагнитного поля на пластичность и прочность проводящих материалов. *Известия АН СССР, Металлы*. №. 4. 1984. С. 184-187.
8. Беклемишев Н.Н., Корягин Н.И., Шapiro Г.С. О процессе пластической деформации в импульсном электромагнитном поле некоторых проводящих материалов. *Известия АН СССР, Металлы* № 1. 1985. С. 159-167.
9. Беклемишев Н.Н., Кукуджанов В.Н., Порохов В.А. и др. Пластичность и прочность металлических материалов с учетом импульсного воздействия высокоэнергетического электромагнитного поля. Препринт № 372. ИПМ АН СССР. 1989. 56с.
10. Троицкий О.А. Баранов Ю.В., Аврамов Ю.С., Шляпин А.Д. Физические основы и технологии обработки современных материалов (теория, технология, структура и свойства). Т. 1. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 590 с.
11. Ковалев С.И., Корягин Н.И., Ширко И.В. Напряжения и деформации при плоской прокатке, М.: Металургия. 1982. 255с.
12. Кукуджанов К.В. Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. № 4. 2015. С. 138–158. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.09>
13. Кукуджанов К.В. О залечивании поврежденности металла высокоэнергетическим импульсным электромагнитным полем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. № 2. 2017. С. 99–124. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.06>
14. Kukudzhanov K.V., Levitin A.L. Modeling the Healing of Microcracks in Metal Stimulated by a Pulsed High-Energy Electromagnetic Field. Part I // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. Vol. 6. No 3. 2015. P. 233–249. <https://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v6.i3.60>
15. Kukudzhanov K. V., Levitin A. L // *Procedia IUTAM*. №23, 2017. P. 84-100 doi: 10.1016/j.piutam.2017.06.008

### Сведения об авторах:

**Konstantin VI. Kukudzhanov** Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101-1, Prospekt Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation. Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher ; +7 495 434-14-67, <http://orcid.org/0000-0001-9060-2838>,  
**E-mail:** kconstantin@mail.ru

# **Динамическое моделирование упругого двойного физического маятника на основе обобщенного метода Ньютона-Эйлера**

**Курдина С.П., Геворкян Г.А.**

Современные исследования в области динамического моделирования механизмов с упругими звеньями главным образом направлены на повышение эффективности существующих формализмов и алгоритмов динамического анализа. Вследствие указанной тенденции в последние десятилетия получил в научной литературе широкое распространение метод Ньютона-Эйлера. Изначально сформулированный и успешно примененный к многозвездным динамическим системам простой разомкнутой кинематической цепи с абсолютно жесткими звеньями, метод Ньютона-Эйлера был впоследствии обобщен на случай кинематических цепей, содержащих как недеформируемые, так и линейно-упругие звенья. Здесь предлагается ознакомиться с особенностями динамического моделирования упругих систем простой разомкнутой кинематической цепи на примере численного решения прямой задачи динамики упругого двойного физического маятника.

**1. Введение.** В последние годы прошлого столетия в публикациях появилось обобщение классического метода Ньютона-Эйлера [1] на случай упруго-деформируемых звеньев кинематической цепи многозвездных динамических систем. Эту новую модификацию метода Ньютона-Эйлера стало принято называть *обобщенным методом Ньютона-Эйлера* [2, 3]. Вслед за этим вышла в свет статья [4], в которой на основе сформулированного обобщенного метода Ньютона-Эйлера и нововведенных элементов символьного исчисления был наведен алгоритм численного решения обратной задачи динамики (*Inverse Dynamic Problem*) упругих манипуляторов.

Дальнейшее развитие обобщенного метода Ньютона-Эйлера привело к построению алгоритмов численного решения второй и смешанной задач динамики (*Direct and Mixt Dynamic Problems*) упругих манипуляторов, которые нашли отражение в публикациях [5, 7]. Кроме того, обобщенный метод Ньютона-Эйлера в контексте решения смешанной задачи динамики был распространен в публикации [6] на класс упругих древовидных динамических систем (*Arborescent Dynamic Systems*). Впоследствии было показано [8], что применение обобщенного метода Ньютона-Эйлера позволяет существенно сократить машинное время численного решения задач управления упругих манипуляторов по сравнению с методами, использующими процедуру обращения их матрицы масс. Обобщенный метод Ньютона-Эйлера нашел также успешное применение при аппроксимационном анализе упругих динамических систем произвольной структурной топологии [9].

Нелинейные задачи динамического и статического изгиба балок представляют в научной литературе особый интерес [10, 11]. В настоящей статье предлагаются результаты исследования двойного физического маятника с упруго-деформируемым вторым маятником в процессе значительных свободных колебаний, осуществленного на основе обобщенного метода Ньютона-Эйлера.

**2. Моделирование колебаний двойного физического маятника.** Рассмотрим численное решение прямой задачи динамики на примере изображенного на рис. 1 двойного физического маятника с упругим звеном, совершающим свободные колебания под действием сил тяжести. Звено  $C_1$  маятника полагается абсолютно жестким, звено  $C_2$  – линейно-упругим, опорная стойка  $C_0$  – неподвижной и недеформируемой, а  $u$  – стрела прогиба второго стержня.

Длины звеньев двойного маятника (рис. 1) принимаются равными:  $L_1 = L_2 = 1 \text{ м}$  при плотности  $\rho_1 = \rho_2 = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Звенья  $C_1$  и  $C_2$  принимаются сплошными, круглого поперечного сечения, а их массы равны:  $m_1 = m_2 = 0.3 \text{ кг}$ . Модуль Юнга упругого звена  $C_2$  полагается равным:  $E_2 = 200 \text{ ГПа}$ .

Прямая задача динамики двойного физического маятника, совершающего свободные колебания под действием собственного веса, формулируется при тождественно нулевых функциях приводных моментов, т.е.

$$\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t) \equiv 0, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

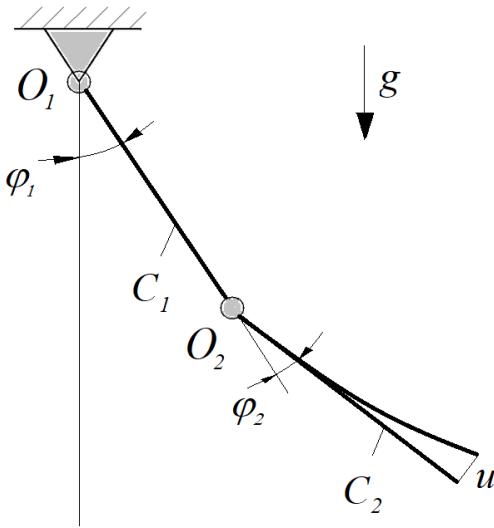


Рис. 1. Схема упругого двойного физического маятника

Задача формулируется при следующих начальных условиях:

а) в обобщенных координатах:

$$\begin{cases} q_1(0) = -\frac{\pi}{4}, \\ q_2(0) = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

б) в обобщенных скоростях:

$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0; \quad (4)$$

в) в упругой переменной:

$$u(0) = 0; \quad (5)$$

г) в скорости изменения упругой переменной:

$$\dot{u}(0) = 0. \quad (6)$$

Моделирование задачи проводится при одной-единственной координатной функции, участвующей в матрице функций Рэлея-Ритца  $\Phi_{d2}$ , которая выражается многочленом четвертой степени, т.е.

$$\Phi_{d2}(x) = k_1 x^4 + k_2 x^3 + k_3 x^2 + k_4 x + k_5. \quad (7)$$

Координатная функция (7) должна удовлетворять следующим геометрическим краевым условиям:

$$\Phi_{d2}(0) = \Phi'_{d2}(0) = 0 \quad (8)$$

и следующим динамическим франичным условиям, т.е.

$$\Phi''_{d2}(0) = \Phi'''_{d2}(0) = 0, \quad (9)$$

подчиняясь при этом также и условию нормализации

$$\Phi_{d2}(L) = 1. \quad (10)$$

Принимая во внимание условия (8) – (10), многочлен (7) записывается в окончательном виде

$$\Phi_{d2}(x) = \frac{1}{3} \left( \frac{x}{L} \right)^4 - \frac{4}{3} \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 2 \left( \frac{x}{L} \right)^2, \quad (11)$$

откуда получаем также и выражение для вращательных координатных функций:

$$\Phi_{r2}(x) = \frac{4}{3L} \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \frac{4}{L} \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{4}{L} \left( \frac{x}{L} \right). \quad (12)$$

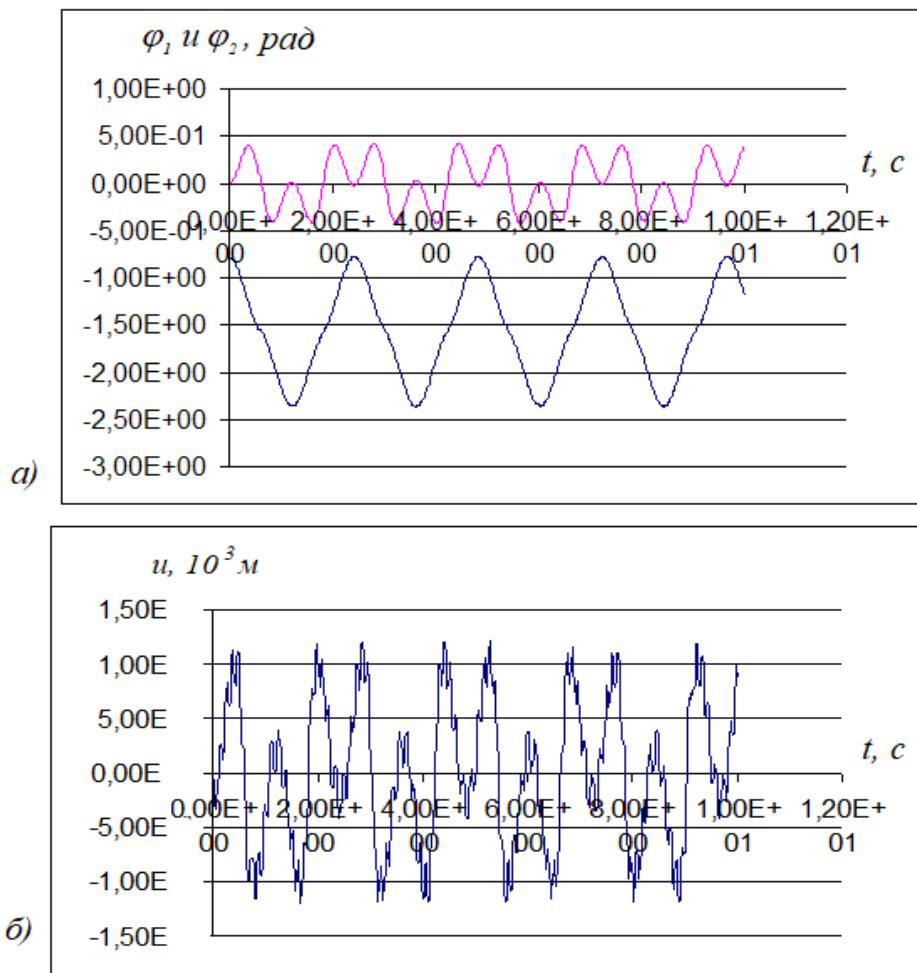
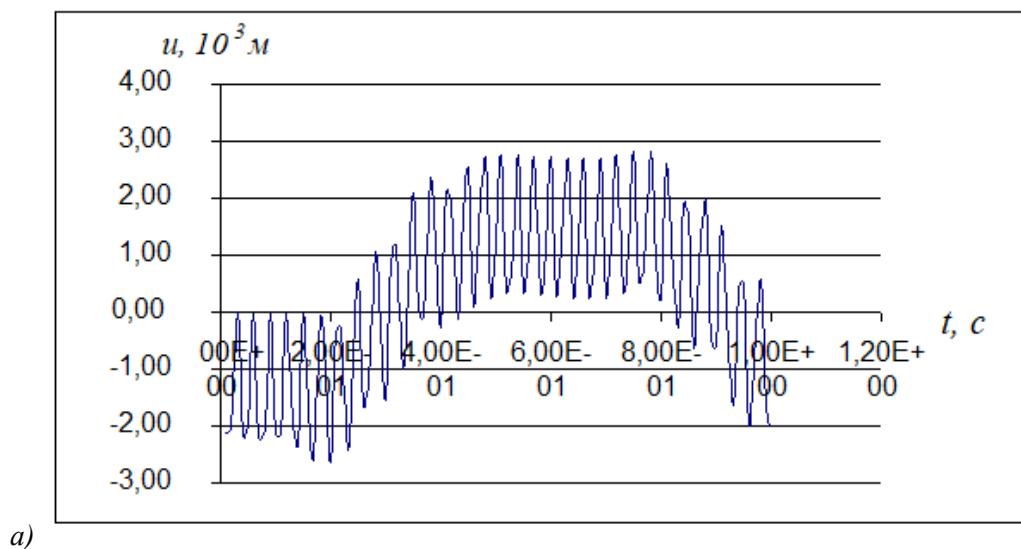
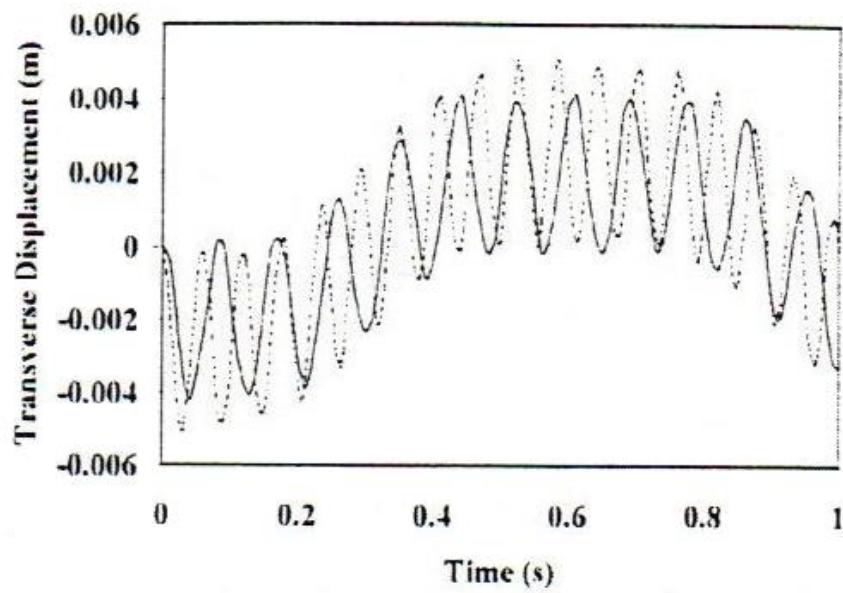


Рис. 2. Зависимости обобщенных координат (а) и упругого перемещения (б) во времени

На рис. 2 (а и б) представлены графики изменения обобщенных координат (а) и функции упругого перемещения (б) во времени в течение 10 с колебательного движения двойного физического маятника.





б)

Рис. 3. Функция упругого перемещения обычного физического маятника, полученная автором (а) и А. Шабаной (б)

В качестве контрольного теста [12] проведено моделирование свободного падения из горизонтального положения обычного (одинарного) упругого физического маятника со следующими характеристиками:  $L = 0.4 \text{ м}$  при плотности  $\rho = 5540 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  с площадью поперечного сечения и с модулем Юнга  $E = 1.0 \text{ ГПа}$ . Итоги воспроизведения функции упругого перемещения, показанные на рис. 3 (а), хорошо согласуются с результатами тестирования, проведенного автором публикации [12], как в этом можно убедиться из рис. 3 (б).

**3. Заключение.** В предлагаемой статье исследована новая задача свободных колебаний двойного упругого физического маятника. Правильность функционирования составленного алгоритма и расчетного кода подтверждается проведенным тестированием обычного упругого физического маятника. Задача моделирования движения упругих динамических систем в режиме реального времени является одним из важнейших приоритетов современных вычислительных технологий в области динамики сплошных сред, поэтому представленные в статье итоги симуляции движения упругого двойного маятника на основе развитого и усовершенствованного обобщенного формализма Ньютона-Эйлера и метода динамического анализа без обращения матрицы масс исследуемых систем, представляют безусловную практическую ценность.

### Литература

1. Luh J.Y.S., Walker M.W. and Paul R. On -line computational sheme for mechanical manipulators // Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1980. Vol. 74. P. 251 – 269.
2. Boyer F. and Coiffet P. Generalization of Newton-Euler model for flexible manipulators // International Journal of Robotic Systems. 1996. Vol. 13. N1. P. 11 – 24.
3. Boyer F. and Coiffet P. Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton-Euler model // International Journal Mechanism and Machine Theory. 1996. Vol. 31. N1. P. 45 – 56.
4. Boyer F. and Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics // International Journal of Robotics Research. 1998. Vol. 17. N3. P. 282 – 293.
5. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.Т.Н. 2004. Т. 57. N1. С. 3 – 10.

6. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.Т.Н. 2006. Т. 59, N1. С. 3 – 9.
7. Геворкян Г.А. Динамический анализ пространственных упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // Сб.Н.Т. межд. н.-т. конф., посв. 65-л. деп. "Машиностроение" ГИУА. 2010. С. 126-128.
8. Геворкян Г.А. Приложение обобщённого метода Ньютона-Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.Т.Н. 2010. Т. 63, N2. С. 133 – 138.
9. Геворкян Г.А. Моделирование упругих древовидных динамических систем при наличии внешних голономных связей. Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2020. N2. (89). С. 4 – 24.
10. Филиппенко Г.В. Изгибные волны в балке с периодически расположенными точечными массами // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т.8. N2. С. 153 – 163.
- 11.Карякин М.И., Пустовалова О.Г., Шубчинская Н.Ю. Большие деформации изгиба неоднородного бруса // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т.10. N1. С. 70 – 77.
12. Shabana A.A. Dynamics of multibody systems. – John Wiley & Sons. – 1989.

#### **Сведения об авторах**

**Курдина Светлана Павловна,**  
доцент МГТУ им. Баумана,  
Москва 105005, 2-я Бауманская ул., 5/1,

**E - mail:** kurdinasp@bmstu.ru

**Геворкян Грант Ааратович,**  
научный сотрудник Института механики НАН РА, к.т.н,  
Ереван – 19, пр. Маршала Баграмяна 24Б, Институт Механики,  
тел. (374 10) 524 890 (раб.), (374 96) 390 315 (моб.),  
**E -mail:** [hrgevorkian@mail.ru](mailto:hrgevorkian@mail.ru)

# **Исследование механических свойств и поверхности разрушения цилиндрических образцов Al-6101 при статическом растяжении.**

**Магомедова Д.К., Чуракова А.А., Гундеров Д.В.**

Представлены данные по исследованию механических свойств цилиндрических образцов для Al сплава 6101 при статическом растяжении при комнатной температуре. Также исследована поверхность изломов данных образцов на электронном микроскопе, проведён химический анализ элементов на поверхности изломов. Благодаря химическому анализу подтверждено, что повышение прочности в данном материале вызвано наличием/проявление частиц вторичных фаз при отжиге материала на этапе предподготовки к проведению механического нагружения.

## **1. Введение**

В современном мире алюминиевые сплавы широко применяются в различных областях, таких как лёгкая промышленность, электротехника, авиастроение. Данные материалы очень ценятся за высокие характеристики, такие как высокая проводимость, высокая удельная прочность, коррозионная стойкость, термоупрочняемость и др [1,8]. Дальнейшее повышение свойств алюминиевых сплавов является важным направлением современного материаловедения.

Один из самых применяемых сплавов – Al 6101. Данный сплав, вместе с сохранением достоинств алюминия, обладает значительно более высокой прочностью и повышенными эксплуатационно-технологическими характеристиками для авиапромышленности и производства электропроводов для линий электропередач.

Известно, что методы интенсивной пластической деформации (ИПД) [2], позволяют повысить свойства металлических материалов, в т.ч. за счёт измельчения зерна до наноструктурного состояния. Одним из методов ИПД является метод равноканального углового прессования (РКУП). Существует много работ, которые подтверждают повышение прочности и других свойств Al сплавов, включая 6101, при обработке методом РКУП.

Задачей исследования является исследование особенностей разрушения Al сплавов 6101 в различных состояниях – естественное старение (ЕС), искусственное старение (ИС) и РКУП. Разрушение таких сплавов, обработанных методом РКУП, ранее исследовалось мало [3,6,7].

## **2. Методики исследования.**

В качестве объекта исследования рассматривались цилиндрические образцы [4], изготовленные из прутков технического сплава Al-6101. В таблице 1 приведён химический состав данного сплава.

Марка	Предел	Si	Fe	Cu	Mg	Zn	B	Al	Ti+V+Cr+Mn
6101	Max	0,60	0,30	0,01	0,60	0,02	0,01	-	0,015

Таблица 1. Химический состав сплава Al 6101.

На рисунке 1 представлена геометрия исследуемых образцов:



Рисунок 1. Общий вид образца.

Данный сплав относится к категории термоупрочняемых, поэтому к нему применялись процедуры старения с целью увеличения характеристик прочности [5].

Для выявления зависимости характеристик прочности от структуры материала рассматривалось три вида обработки:

а) ЕС: образцы подвергались отжигу при температуре 550°C на 2 часа с последующей закалкой в воде комнатной температуры, далее на протяжении 6 суток материал естественно упрочнялся.. Обозначим данную структуру как К3 ЕС (крупнозернистый ЕС)

б) Искусственное старение: образцы подвергались отжигу при температуре 550°C на 2 часа с последующей закалкой в воде комнатной температуры, далее на протяжении 12 часов материал

подвергался старению путем отжига при температуре 170°C. Обозначим данную структуру как КЗ ИС (крупнозернистый ИС).

в) РКУП: отжиг 550° С на 2 часа, закалка в воде комнатной температуры, 4 цикла РКУП при КТ по маршруту Вс, угол сопряжения каналов 120°; исходные прутки преобразовывались в прутки с ультрамелкозернистой (УМЗ) структурой. Обозначим это состояние как РКУП.

Механические испытания на статическое растяжение с фиксированной скоростью растяжения, равной  $1,4 \times 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>, проводились на машине Shimadzu при комнатной температуре; изменение длины образцов регистрировалось с помощью видеоконстантометра. Исследование поверхности изломов проводилось на сканирующем электронном микроскопе (СЭМ) в режимах SEI и BSE.

### 3. Результаты

Ниже представлены диаграммы напряжение – деформация σ-ε, полученные при испытаниях. Растяжение проводилось до разрушения образцов.

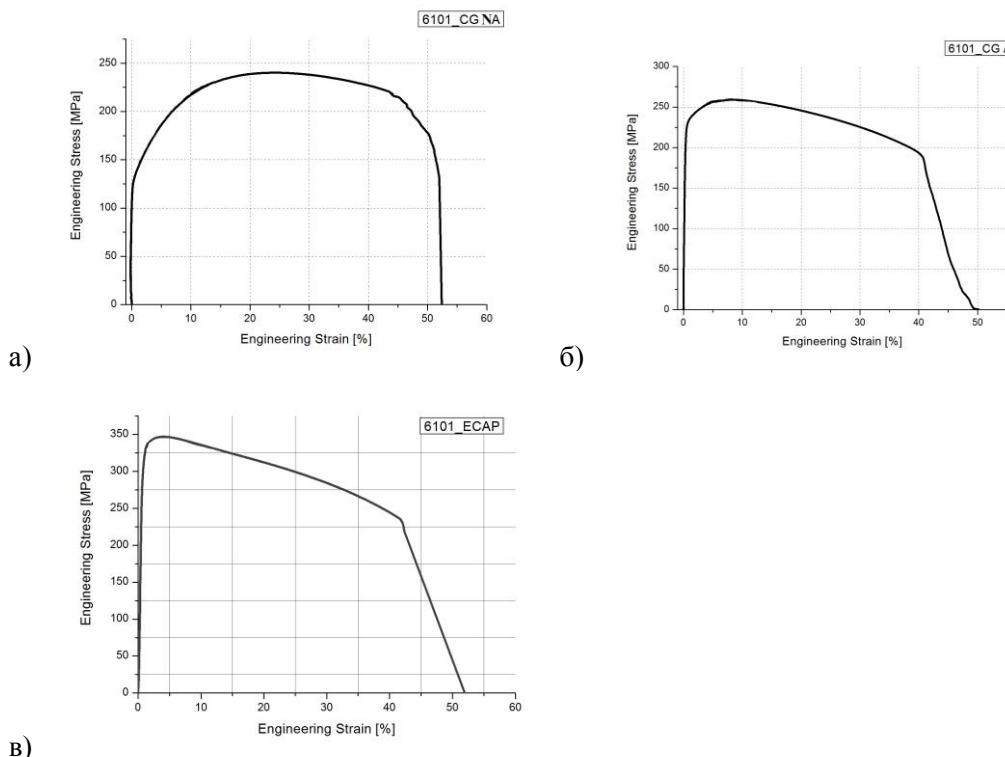
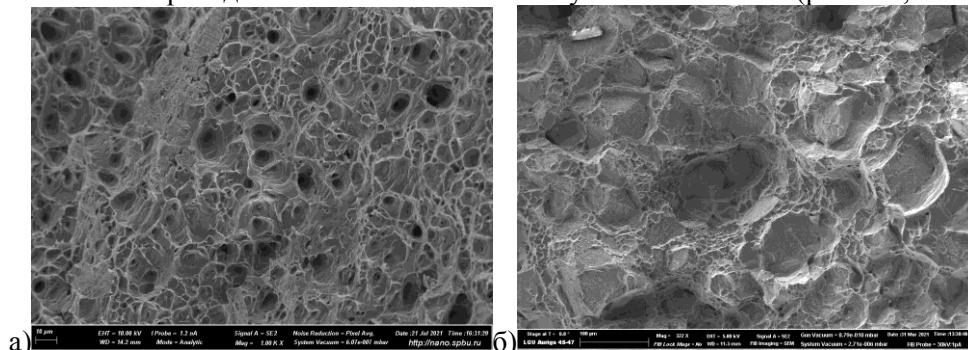


Рисунок 2. Диаграммы σ-ε для: а) КЗ ЕС, б) КЗ И , в) РКУП

Как видно из представленных диаграмм, более высокую прочность относительно состояния КЗ ЕС (210 МПа) показывают образцы КЗ ИС (260 МПа), еще большую прочность и предел текучести показывает состояние РКУП (350 МПа),.

Исследование поверхность изломов на сканирующем электронном микроскопе показало, что общая поверхность изломов характеризует упруго-пластическое разрушение. Изломы имеют в целом однородную структуру.

Также был проведен химический анализ полученных изломов (рис. 6-8, таб. 2-4).



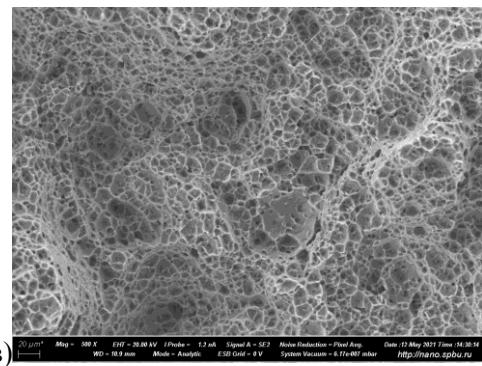


Рисунок 3. Снимок изображений поверхности изломов для: а) КЗ ЕС, б) КЗ ИС, в) РКУП.

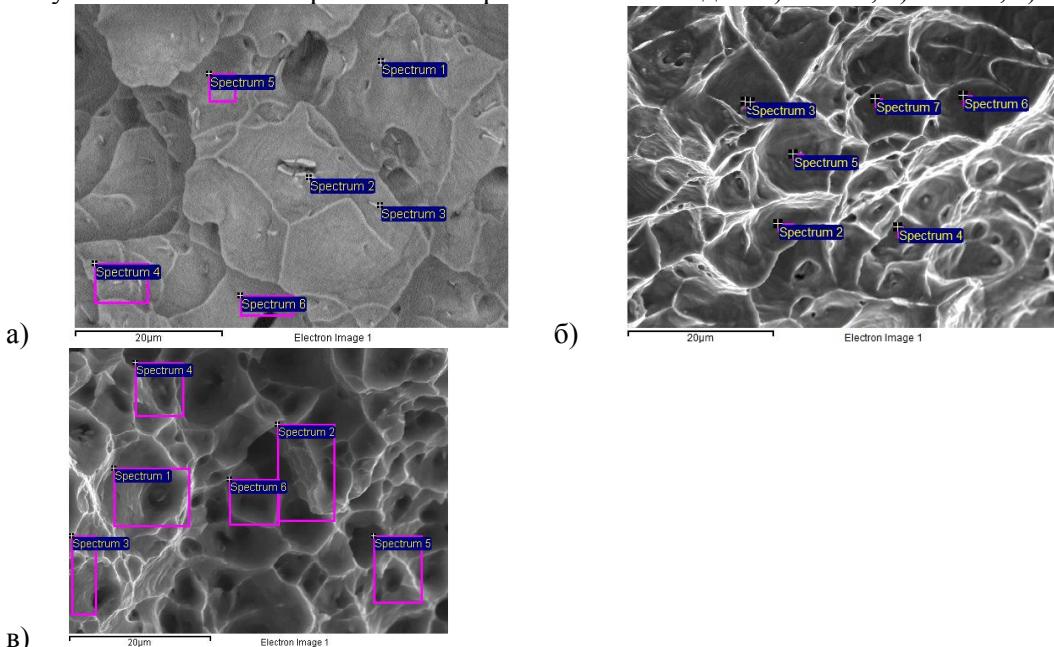


Рисунок 4. Снимок изображений со спектрами для: а) КЗ ЕС, б) КЗ ИС, в) РКУП.

Spectrum	Mg	Al	Si	Fe
Spectrum 1	4.69	74.64	1.01	2.08
Spectrum 2		64.23	13.12	22.66
Spectrum 3	1.04	91.47	1.94	3.70
Spectrum 4	0.94	96.11	0.97	
Spectrum 5	1.28	97.96	0.75	
Spectrum 6	1.04	98.96		
Max.	4.69	98.96	13.12	22.66
Min.	0.94	64.23	0.75	2.08

Таблица 2. Спектральный анализ по основным элементам поверхности излома, соответствующего рис.3.а.

Spectrum	Mg	Al	Si	Fe
Spectrum 1	0.46	77.97	4.84	16.73
Spectrum 2	0.62	91.75	2.23	5.40
Spectrum 3	0.39	64.85	7.79	26.96
Spectrum 4	0.42	77.05	5.25	17.28
Spectrum 5	0.56	82.28	4.34	12.82
Spectrum 6	0.57	84.97	3.28	11.18
Spectrum 7	0.56	85.60	3.14	10.71
Sum	0.59	98.18	0.46	0.78

Spectrum				
Mean	0.52	82.83	3.92	12.73
Std.	0.08	10.06	2.19	7.95
deviation				
Max.	0.62	98.18	7.79	26.96
Min.	0.39	64.85	0.46	0.78

Таблица 3. Спектральный анализ по основным элементам поверхности излома, соответствующего рис.3.б.

Spectrum	Mg	Al	Si	Fe
Spectrum 1	1.15	97.91	0.61	0.33
Spectrum 2	0.91	98.00	0.74	0.35
Spectrum 3	1.31	97.84		0.85
Spectrum 4	1.15	96.82	1.40	0.63
Spectrum 5		100.00		
Spectrum 6	1.03	98.43		0.54
Max.	1.31	100.00	1.40	0.85
Min.	0.91	96.82	0.61	0.33

Таблица 4. Спектральный анализ по основным элементам поверхности излома, соответствующего рис.3.в.

Основным механизмом упрочнения данных сплавов является выделение при старении нанодисперсионных частиц аллюминидов на основе легирующих элементов Mg и Si [9-12]. Формирование таких нанодисперсионных частиц аллюминидов размером порядка 5-10 нм в результате ЕС и ИС приводит к дисперсионному упрочнению сплава. Но, в результате ЕС, где режим старения подобран более оптимально, формируются более мелкие частицы с более однородным распределением в алюминиевой матрице - достигается более высокая прочность сплава. РКУП же приводит к достижению наиболее высокой прочности [9-12], поскольку в этом состоянии дисперсионное упрочнение складывается с упрочнением за счет измельчения зерна.

Анализ спектра поверхности разрушения показывает, что поверхность разрушения после ЕС и ИС содержит большой процент Fe. В большинстве точек измерений химического состава изломов образцов после ЕС и ИС повышенено содержание Fe. Fe в алюминиевой матрице не растворяется, это примесь, ее количество небольшое, но на основе Fe и формируются крупные выделения микронных размеров. Крупные (размером несколько мкм) частицы интерметаллидов Fe-Al, образовавшиеся еще на этапе литья, являются областями зарождения пор и последующего разрушения Al сплавов после ЕС и ИС при растяжении. Соответственно, эти интерметаллидные частицы в большом содержании находятся на поверхности разрушения в глубине ямок, и спектр изломов показывает повышенное содержание Fe, многократно превышающее среднее содержание Fe в сплаве. В то же время при анализе химсостава поверхности разрушения РКУП видно, что состояние заметно отличается от химсостава для ЕС и ИС: содержание Fe на поверхности излома РКУП заметно ниже. Предположительно это объясняется тем, что после РКУП меняется характер разрушения, т.к. областями зарождения пор и последующего разрушения могут являться другие элементы структуры, например, области более высокой плотности дислокаций, дефекты, сформированные при РКУП, и интерметаллиды железа уже не играют определяющую роль на формирование поверхности разрушения, либо они также несколько измельчаются при РКУП, что и приводит к их меньшему вкладу в разрушение.

#### 4. Заключение

На основе проведённого исследования можно сделать вывод, что сплав Al 6101 показывает более высокую прочность при предварительном измельчении зеренной структуры методом РКУП.

Анализ спектра поверхности разрушения показывает, что поверхность разрушения ЕС и ИС состояний содержит большой процент Fe, многократно превышающее среднее содержание Fe в сплаве. По-видимому, крупные частицы интерметаллидов Fe-Alявляются областями зарождения пор и последующего разрушения ЕС и ИС состояний при растяжении, и интерметаллидные частицы на основе Fe в большом содержании находятся на поверхности разрушения.

Содержание Fe на поверхности излома РКУП состояния заметно ниже. Предположительно это объясняется тем, что после РКУП меняется характер разрушения, т.к. областями зарождения пор и последующего разрушения, могут являться такие элементы структуры, как области более высокой плотности дислокаций, дефекты, сформированные при РКУП и интреметаллиды железа уже не играют определяющую роль на формирование поверхности разрушения,

Авторы выражают благодарность гранту РНФ 17-19-01311, а также Междисциплинарному ресурсному центру по направлению "Нанотехнологии" СПбГУ и Центру прикладной аэродинамики СПбГУ

## ЛИТЕРАТУРА

1. Karabay Sedat. Modification of AA-6201 alloy for manufacturing of high conductivity and extra high conductivity wires with property of high tensile stress after artificial aging heat treatment for all-aluminum alloy conductors // Mater. Design (2006)27,821–832
2. Sabirov, M. Murashkin, R.Z. Valiev Nanostructured aluminium alloys produced by severe plastic deformation: New horizons in development // Mater. Sci. Eng. A (2013) 560, 1-24
3. M.Yu. Murashkin, I. Sabirov, X. Sauvage, R.Z. Valiev Nanostructured Al and Cu alloys with superior strength and electrical conductivity // J. Mater. Sci. (2016) 51, 33–49
4. Argon A.S., Im J., Needleman A. Distribution of plastic strain and negative pressure in necked steel and copper bars. Metallurgical Transactions 824-volume 6A, April 1975
5. Валиев Р. З., Александров И. В. Наноструктурные материалы, полученные интенсивной пластической деформацией. Москва: Логос. 2000. 272с.
6. Magomedova D.K., Murashkin M.Yu. Influence of grain size and second phase particles on the process of void initiation IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018)
7. Magomedova D.K., Murashkin M. Yu. Efimov M.A. Technique development for conducting mechanical tests to study the pore formation process in case of material fracture. AIP Conference Proceedings (1959), 2018
8. Mondolfo L.F., Aluminum alloys: structure and properties (Butterworths, Boston, 1979)
9. M. Murashkin, A. Medvedev, V. Kazykhanov, A. Krokhin, G. Raab, N. Enikeev and R.Z. Valiev, Metals 5, 2148-2164 (2015)
10. ValievR. Z., AlexandrovI. V. Nanostructured materials produced by severe plastic deformation. Moscow, Logos Pub., 2000. p272
11. Vinogradov, A.Y.; Khasimoto, S. Fatigue in ultrafine-grained materials processed by equal-channel angular pressing. Russ. Metall. 2004, 1, 42–51
12. Markushev, M.V.; Bampton, C.C.; Murashkin, M.Y.; Hardwick, D.A. Structure and properties of ultra-fine grained Al alloys produced by severe plastic deformation. Mater. Sci. Eng. A 1997, 234–236, 927–931

## Сведения об авторах:

**Магомедова Д.К.** – младший научный сотрудник Исследовательской лаборатории механики массивных перспективных наноматериалов для инновационных инженерных приложений, Санкт-Петербургский Государственный Университет, (8 950) 014 92 54,

**E-mail:** [magmedva.dasha@mail.ru](mailto:magmedva.dasha@mail.ru)

**Чуракова А.А.** - научный сотрудник, к.ф.-м.н., Институт физики молекул и кристаллов, Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, г. Уфа,

**E-mail:** [churakovaa\\_a@mail.ru](mailto:churakovaa_a@mail.ru)

**Гундеров Дмитрий Валерьевич** – старший научный сотрудник, д.ф.-м.н., Институт физики молекул и кристаллов, Уфимский федеральный исследовательский центр РАН, г. Уфа,

**E-mail:** dimagun@mail.ru

**Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально  
нагруженной по двум направлениям**  
**Мартиросян С.Р.**

В статье, в линейной постановке, исследуется задача статической устойчивости прямоугольной пластинки, первоначально нагруженной по двум направлениям растягивающими и сжимающими усилиями, соответственно, по потоку газа и в направлении, перпендикулярном к скорости потока газа, в предположении, что поток газа набегает на её свободный край. Получено аналитическое решение задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат  $Oxyz$  область  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$ . Декартова система координат  $Oxyz$  выбирается так, что оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось  $Oz$  перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси  $Ox$  с невозмущённой скоростью  $V$ . Течение газа предполагается плоским и потенциальным.

Пусть край  $x=0$  пластинки свободен, а края  $x=a, y=0$  и  $y=b$  закреплены идеальными шарнирами.

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию растягивающих  $N_x = 2h\sigma_x$  и сжимающих  $N_y = 2h\sigma_y$  сил, равномерно распределённых, соответственно, по кромкам пластинки  $x=0, x=a$  и  $y=0, y=b$ , являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба  $w=w(x, y)$  [1, 2].

Прогиб пластинки  $w=w(x, y)$  вызовет избыточное давление  $\Delta p$  на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой “поршневой теории” [1, 2]:  $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $a_0$  – скорость звука в невозмущённой газовой среде,  $\rho_0$  – плотность невозмущённого потока газа. При этом предполагается, что прогибы  $w=w(x, y)$  малы относительно толщины пластинки  $2h$ .

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками  $\Delta p$  и первоначально приложенными к кромкам пластинки силами  $N_x, N_y$ .

Тогда, в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [1, 2]:

$$D\Delta^2 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$ ,  $\Delta$  – дифференциальный оператор Лапласа;  $D$  – цилиндрическая жёсткость.

Границные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-v) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0; \quad (1.2)$$

$$w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x=a \text{ и } w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y=0, y=b; \quad (1.3)$$

$v$  – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость  $V_{cr}$  – наименьшую скорость потока газа в сверхзвуковом и гиперзвуковом интервале скоростей [1, 2]:

$$V_{cr} \in (a_0 M_0, a_0 M_{2cosm.}), M_0 = \sqrt{2}, M_{2cosm.} \approx 33.85; \quad (1.4)$$

приводящую к потере статической устойчивости состояния равновесия системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{pr.}, \sigma_y < (\sigma_y)_{cr.}, \quad (1.5)$$

$(\sigma_x)_{pr.}$  – предельные напряжения, не превосходящие нижнюю границу текучести [1];  $(\sigma_y)_{cr.}$  – критические напряжения, которые могут привести выпучивание пластинки в отсутствии обтекания ( $V = 0$ ) [5].

Анализ устойчивости системы “пластинка–поток” (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба  $w(x, y)$  в интервале скоростей потока газа (1.4) при условии (1.5).

**2. Общее решение задачи устойчивости.** Для получения достаточного признака потери статической устойчивости системы «пластинка – поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде двойного ряда [1, 4]:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \exp(\mu_n r_k x) \cdot \sin(\mu_n y), \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

$C_{nk}$  – произвольные постоянные;  $n$  – число полуволн вдоль стороны  $b$  пластинки;  $r_k$  – корни характеристического уравнения

$$r^4 - 2 \cdot (1 + \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 - \beta_y^2) = 0, \quad (2.2)$$

которое в соответствии с методом решения Феррари можно представить в виде [4 – 6]:

$$\left( r^2 + \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q - \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) \cdot \left( r^2 - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \cdot r + q + \sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} \right) = 0, \quad (2.3)$$

$$q = q(V) – параметр скорости потока газа  $V$  – действительный корень кубического уравнения$$

$$8 \cdot (q+1+\beta_x^2)(q^2 - 1 + \beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \quad (2.4)$$

удовлетворяющий условию:

$$q \in (q_0, \infty), \quad (2.5)$$

$$q_0 = \left( -\left( 1 + \beta_x^2 \right) + 2 \sqrt{\left( 1 + \beta_x^2 \right)^2 + 3\left( 1 - \beta_y^2 \right)} \right) / 3, \text{ когда } \beta_y^2 \leq \left( 1 + \left( 1 + \beta_x^2 \right)^2 / 3 \right), \text{ и}$$

$$q_0 = 1, \text{ когда } \beta_y^2 > \left( 1 + \left( 1 + \beta_x^2 \right)^2 / 3 \right), \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}, \beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.}.$$

Здесь,

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in a_0^2 \rho_0 D^{-1} \mu_n^{-3} (M_0, M_{2cosm.}); \quad (2.6)$$

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{pr.} = h (\sigma_x)_{pr.} D^{-1} \mu_n^{-2};$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_y^2)_{cr.} = 2h (\sigma_y)_{cr.} D^{-1} \mu_n^{-2};$$

согласно ограничениям (1.4) и (1.5).

С помощью графоаналитических методов исследования можно показать, что характеристическое уравнение (2.2) в интервале (2.5) имеет два действительных корня  $r_{1,2}$  и пару комплексно сопряжённых корней  $r_{3,4} \in W$  – с положительной вещественной частью, которые легко находятся, как решения соответствующих квадратных уравнений (2.3):

$$r_{1,2} = -0.5 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad (2.7)$$

$$r_{3,4} = 0.5 \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pm i \sqrt{\sqrt{q^2 - 1 + \beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}. \quad (2.8)$$

При этом, очевидно

$$r_1 < 0, r_2 < 0 \text{ при всех } \beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.} < 1 \text{ и } \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{pr.}. \quad (2.9)$$

Условие (2.9) является необходимым признаком потери статической устойчивости невозмущённого равновесного состояния достаточно широкой пластиинки ( $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ ) в виде локализованной дивергенции;  $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(\beta_x^2, \beta_y^2, v)$  – предельное значение параметра отношения сторон прямоугольной пластиинки  $\gamma = ab^{-1}$ , разграничитывающее области дивергенции панели ( $\gamma < \gamma_{gr.}$ ) и локализованной дивергенции ( $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ ) в пространстве «существенных» параметров задачи устойчивости (1.1)–(1.3) [4–6].

Учитывая обозначения (2.6), из соотношения (2.4), находим явный вид зависимости скорости потока газа  $V$  от параметров системы «пластиинка–поток»:

$$V(q, n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2) \cdot (q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad \gamma = ab^{-1}, \quad (2.10)$$

для удлинённых и прямоугольных пластиинок умеренных размеров ( $\gamma < \gamma_{gr.}$ );

$$V(q, n, v, \beta_x^2, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2) \cdot (q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D(a_0 \rho_0 b^3)^{-1} \quad (2.11)$$

для достаточно широких пластиин ( $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ ).

**3. Достаточный признак потери статической устойчивости системы «пластиинка–поток».** Подставляя общее решение (2.1) дифференциального уравнения (1.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно постоянных  $C_{nk}$ . Приравненный нулю определитель этой системы приводит к дисперсионному уравнению дивергенции панели:

$$\begin{aligned} F(q, n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2) = & \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left( q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1) \cdot v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left( q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \right\} B_1 B_2 - \\ & - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \left\{ \left( q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1) \cdot v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left( q+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) \right\} B_1 B_2 \cdot \\ & \exp(-2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pi n \gamma) + 2 \left\{ [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - (2q^2-4q+1)(q+1) - \right. \\ & -(q-1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) \cdot \beta_y^2 + (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + 2q\beta_x^2) \beta_x^2 - \\ & - 2((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + q\beta_x^2) v + (q+1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_x^2) v^2] \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) + \\ & 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} (q+1+\beta_x^2) B_1 \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) \} B_2 \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pi n \gamma) + \\ & + 2 \left\{ -B_1 [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + (2q^2-4q+1)(q+1) + (q-1+\sqrt{q^2-1+\beta_y^2}) \beta_y^2 - \right. \\ & -(2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + 2q\beta_x^2) \beta_x^2 + 2((2q-1)(q+1) + q\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_y^2 + q\beta_x^2) v - \\ & -(q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + \beta_x^2) v^2] \cdot \operatorname{ch}(\pi n \gamma B_1) - \sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1+\beta_y^2)} \cdot \\ & \cdot (3(q^2-1) + 2\beta_y^2 - (2+\beta_x^2)\beta_x^2) \cdot \operatorname{sh}(\pi n \gamma B_1) \} \cdot \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)} \pi n \gamma) = 0; \\ B_1 = & \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} - 0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} + 0.5(q-1-\beta_x^2)}, \quad B_1 > 0, \quad B_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Можно показать, что для всех  $n$  справедливо:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{gr.}} (F(q, n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2) = 0) = (F_{loc.div.}(q, v, \beta_x^2, \beta_y^2) = 0), \quad \beta_y^2 < (\beta_y^2)_{cr.} < 1 \quad [5]; \quad (3.2)$$

$$F_{loc.div.} = \left( q+1-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right)^2 - 2(q+1)v - (1-v)^2 + 2\beta_x^2 \left( q-\sqrt{q^2-1+\beta_y^2} \right) = 0, \quad \gamma \geq \gamma_{gr.} \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) тождественно дисперсионному уравнению локализованной дивергенции полубесконечной пластины – полосы ( $\gamma = \infty$ ), полученному из условия затухания колебаний на крае  $x = a$  [3].

В пространстве «существенных» параметров системы «пластина–поток» для всех  $\gamma < \gamma_{gr}$ . гиперповерхность (3.1) при  $q = q_{crdiv}$  разграничивает области устойчивости ( $F > 0$ ) и дивергенции панели ( $F < 0$ ), а гиперповерхность (3.3) при  $q = q_{locdiv}$  разграничивает для всех  $\gamma \geq \gamma_{gr}$ . области устойчивости ( $F_{locdiv} > 0$ ) и локализованной дивергенции ( $F_{locdiv} < 0$ ). Здесь,  $q = q_{crdiv}$  – первый корень уравнения (3.1), а  $q = q_{locdiv}$  – решение уравнения (3.3). Подставляя значения  $q_{crdiv}$  и  $q_{locdiv}$ , соответственно, в выражения (2.10) и (2.11), получаем критические скорости дивергенции панели  $V_{cr.div.}$  и локализованной дивергенции  $V_{loc.div.}$ . При скоростях потока газа  $V \geq V_{cr.div.}$  прямоугольная пластинка ( $\gamma < \gamma_{gr.}$ ) теряет устойчивость в виде дивергенции панели, а при скоростях  $V \geq V_{loc.div.}$  достаточно широкая пластинка ( $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ ) теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции: в обоих случаях переходы из области устойчивости в область неустойчивости – «мягкие».

**4. Основные результаты и заключение.** С помощью численного анализа дисперсионных уравнений (3.1) и (3.3) строились семейства кривых  $\{q(n, \gamma, v, \beta_x^2, \beta_y^2)\}$  и  $\{q(v, \beta_x^2, \beta_y^2)\}$ , параметризованных надлежащим образом: выделены и исследованы наиболее представительные из этих семейств кривых.

Анализ численных результатов показал следующее.

Показано, что удлинённые пластинки относительной толщины  $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ , у которых  $\gamma < 0.33$ , будучи неустойчивыми вблизи  $a_0\sqrt{2}$  – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) [4–6], при  $\beta_x^2 > (\beta_x^2)_{min}$  становятся устойчивыми. Найдены значения функции  $(\beta_x^2)_{min}$ , зависящей от  $\gamma, v, \beta_y^2$ : функция  $(\beta_x^2)_{min}$  является монотонно возрастающей от  $v$  и  $\beta_y^2$ , а с ростом  $\gamma$  – убывает.

Найдены область определения и область значений функции  $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(\beta_x^2, \beta_y^2, v)$ . Как оказалось,  $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(\beta_x^2, \beta_y^2, v)$  является монотонно убывающей от  $\beta_x^2$ : в интервале  $\beta_x^2 \in [0, 13]$  убывает, примерно, 1.3 – 1.6 раз; а от  $v$  и  $\beta_y^2$  зависит неощутимо мало. Это означает, что с возрастанием  $\beta_x^2$  область дивергенции панели сужается, а область локализованной дивергенции, наоборот, расширяется.

При определённом соотношении усилий, растягивающих и сжимающих, наблюдается эффект их «взаимного обнуления», наиболее ярко проявленный в случае пластинок, у которых  $\gamma > 0.193$  (табл. 1).

Таблица 1.

$\gamma$	0.3	0.5	0.8	1.0	$\geq \gamma_{gr.}$
$(\tilde{\beta}_x^2; \tilde{\beta}_y^2)$ ,	(0.1; 0.7)	(0.1; 0.2)	(0.1; 0.16)	(0.1; 0.12)	$\tilde{\beta}_x^2 = \tilde{\beta}_y^2$

Как следует из данных таблицы 1, в случае достаточно широких пластин ( $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ ) отношение  $\tilde{\beta}_x^2 \cdot (\tilde{\beta}_y^2)^{-1} = 1$ : при равных значениях коэффициентов напряжений  $\tilde{\beta}_x^2, \tilde{\beta}_y^2 \in [0, 0.7]$  критические скорости локализованной дивергенции  $V_{loc.div.}$  в точности равны критическим

скоростям локализованной дивергенции панели с ненагруженными краями ( $\tilde{\beta}_x^2 = \tilde{\beta}_y^2 = 0$ ). А, с уменьшением  $\gamma$ , влияние растягивающих усилий  $\sigma_x$  на устойчивость – на критические скорости дивергенции панели становится более ощутимым, в сравнении с сжимающими усилиями  $\sigma_y$ .

В случае достаточно удлинённых пластин ( $\gamma \leq 0.001$ ) влияние сжимающих усилий  $\sigma_y$  на устойчивость системы (1.1)–(1.3) исчезающе мало, в сравнении с растягивающими усилиями  $\sigma_x$ , что вполне согласуется с результатами работ [4 – 6].

Таким образом, напряжённое состояние первоначально нагруженной панели в двух направлениях: растянутой по направлению скорости потока газа и сжатой по направлению, перпендикулярному к скорости потока газа, в зависимости от параметров системы оказывает на устойчивость её невозмущённой формы равновесия или стабилизирующее действие, или дестабилизирующее, или, вовсе, не оказывает никакого действия, в сравнении с обтекаемой панелью с ненагруженными краями [4 – 6]. Следовательно, при определённом соотношении параметров системы критические скорости дивергенции и локализованной дивергенции панели, нагруженной по двум направлениям, равны соответствующим критическим скоростям панели с ненагруженными краями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем, М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126.
4. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2014. т. 67. № 2. с. 12 – 42.
5. Белубекян М.В. Мартиросян С.Р. О дивергенции сжатой панели при набегании сверхзвукового потока газа на ее свободный край. // Изв. НАН Армении, Механика. 2017. т.70. № 4. с.12–34.
6. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, растянутой по направлению потока газа, набегающим на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2019. Т.72. № 2. с. 24–41.

### Сведения об авторах:

**Мартиросян Стелла Размиковна** – кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: [mechinsstella@mail.ru](mailto:mechinsstella@mail.ru)

# Краевые условия в процессах поверхностного наращивания материалов с микроструктурой

Мурашкин Е.В.

Физически приемлемые математические модели процессов процессов поверхностного наращивания получаются в результате аккуратного использования методов современной геометрии и механики сплошных сред. Более того, последовательное применение средств тензорного исчисления существенно упрощает математические представления систем дифференциальных уравнений, физических законов или геометрических свойств, а также позволяет простым способом конструировать тензорные функции, аргументами которых являются алгебраические инварианты. Развиваемый подход к формулировке краевых условий на поверхности наращивания обобщен на случай моделирования процессов формирования 3D материала, характеризующемся микроструктурными особенностями. Выведена общая форма тензорного соотношения на поверхности наращивания, при учете микроструктуры. Определена необходимая система независимых аргументов определяющей псевдотензорной функции на поверхности наращивания. Определен полный набор совместных рациональных псевдоинвариантов. Даны инвариантно-полная формулировка определяющих соотношений на поверхности наращивания.

Решение прикладной задачи механики роста твердого тела иногда является сложной и трудоемкой процедурой. Существенной особенностью постановки краевых задач в рамках механики роста является постановка граничных условий на границе раздела между исходным материалом и добавляемой частью [1-4].

Уравнение в эйлеровых координатах можно применять для описания поведения растущих твердых тел. Здесь мы используем обозначения и терминологию принятую в исследованиях [5-8], где получены дифференциальные связи для тензора силовых напряжений. Аналитически определим распространяющуюся растущую поверхность  $\Sigma$  в трехмерном пространстве уравнением

$$t = \tau(x^i). \quad (1)$$

Тогда единичный вектор нормали  $n_i$  на распространяющейся растущей поверхности  $\Sigma$  направленный в сторону ее распространения, связан с пространственным градиентом (1)

$$n_i = c \partial_i \tau, \quad c = |\nabla \tau|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (2)$$

где  $c$  — линейная скорость распространения растущей поверхности в нормальном направлении  $n_k$ .

Как показано ранее (см., например, [5]), преобразование уравнений равновесия используя формулу для актуальных компонент тензора силовых напряжений  $\sigma^{ij}$

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial_s \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + \mathcal{S}^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad \mathcal{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial_s \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (3)$$

позволяет вывести уравнение на движущейся растущей поверхности в виде следующих дифференциальных ограничений

$$c[\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial_s \sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau+0). \quad (5)$$

В уравнениях (3)–(5) мы используем обозначения, принятые в [1]:  $\mathcal{S}^{ji}$  — интеграл, связанный со скачком напряжений,  $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t) \Big|_{t=\tau(x^s)-0}$  — компоненты тензора напряже-

ний, соответственно, вычисленные в момент  $t = \tau(x^s) - 0$  прямо перед включением элемента в основное твердое тело,  $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t) \Big|_{t=\tau(x^s)+0}$ . Момент  $t = \tau(x^s) + 0$  соответствует моменту сразу после прикрепления элемента к растущей поверхности.

Формулы для компонент тензора парных напряжений по аналогии с уравнениями (3) можно принять в следующем виде

$$\mu_{\cdot k}^{[-1]^i} = \int_{\tau=0}^t [\partial_{\tau} \mu_{\cdot k}^{[-1]^i}(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_k + \mu_{\cdot k}^{[-1]^i}(x^s), \quad \mathcal{M}_k = \int_{\tau=0}^{\tau+0} [\partial_{\tau} \mu_{\cdot k}^{[-1]^i}(x^s, t')] dt', \quad (6)$$

где  $\mathcal{M}_k$  — интеграл, связанный со скачком моментных напряжений,  $\mu_{\cdot k}^{[-1]^i}(x^s) = \mu_{\cdot k}^{[-1]^i}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$  компоненты тензора моментных напряжений, вычисленные во время  $t = \tau(x^s) - 0$ .

Следуя процедуре, описанной в работах [5-8], для моментных напряжений получим

$$c[\nabla_i \mu_{\cdot k}^{[-1]^i}(x^s) + \nabla_i \mathcal{M}_k - 2 \tau_{\cdot k}^{[-1]} + Y_{\cdot k}^{[-1]}] - n_i \partial_{\tau} \mu_{\cdot k}^{[-1]^i}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau+0). \quad (8)$$

В общем случае силовые  $\sigma_{\cdot}^{ij}$  и моментные напряжения  $\mu_{\cdot k}^{[-1]^i}$  выражаются через актуальные напряжения и моменты на растущей поверхности с помощью тензорных материальных уравнений следующим образом

$$\sigma_{\cdot}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma_{\cdot}^{ij}, \mu_{\cdot j}, n_i, \dots), \quad \mu_{\cdot k}^{[-1]^i} = \mathfrak{Z}_{\cdot k}^{[-1]^i}(\sigma_{\cdot k}^{ik}, \mu_{\cdot k}, n_k, \dots), \quad (9)$$

Функции  $\mathfrak{F}_{ij}$  и  $\mathfrak{Z}_{\cdot k}^{[-1]^i}$  могут быть определены методом черного ящика, характеризующим параметры оценки во временном интервале  $\tau-0 \leq t \leq \tau+0$  прямо перед прикреплением элементов к растущему телу. "Черный ящик" может быть связан с различными физическими явлениями.

Как видно из обсуждения в предыдущем разделе, относительные тензоры, связанные с растущим твердым телом и распространяющейся растущей поверхностью, являются единичным вектором нормали, тензорами силы и связующих напряжений. Именно тензорные объекты определяют напряженно-деформированное состояние микрополярного материала, нарастающего на растущей поверхности. В дальнейшем разумно учесть единичный вектор нормали  $n_i$ , который определяет локальную геометрию растущей поверхности, и ввести базовые векторы локальной ортонормированной системы координат, включающие единичный вектор нормали  $n_i$  и два независимых касательных вектора  $\tau_{1i}$  и  $\tau_{2i}$  в касательной плоскости к растущей поверхности.

Полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов может быть разработана согласно списку инвариантов (10) за счет совместных внутренних произведений рассматриваемых векторов (11). Таким образом, рациональная система алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора  $\sigma_{\cdot}^{ij}$  и векторов  $n_k$  и  $\tau_{1i}$

$$t \cdot n = n \cdot s \cdot n, \quad t_2 \cdot n = n \cdot s^2 \cdot n, \quad t \cdot t, \quad t_{\perp} \cdot t_{\perp}, \quad t \cdot t_2, \quad t_{\perp} \cdot t_{2\perp}, \quad t_{2\perp} \cdot t_{2\perp}, \quad t_{2\perp} \cdot t_{\perp}. \quad (12)$$

Аналогичная система для тензора  $\mu_{\cdot k}^{[-1]^i}$  и векторов  $n_k$  и  $\tau_{1i}$  записывается в виде

$$\begin{aligned} m \cdot n &= n \cdot m \cdot n, \quad m_2 \cdot n = n \cdot m \cdot m \cdot n, \quad m \cdot m, \quad m_{\perp} \cdot m_{\perp}, \\ m \cdot m_2 &, \quad m_{\perp} \cdot m_{2\perp}, \quad m_2 \cdot m_2, \quad m_{2\perp} \cdot m_{2\perp}. \end{aligned} \quad (13)$$

Совместные инварианты тензоров  $\sigma_{\cdot}^{ij}$  и  $\mu_{\cdot k}^{[-1]^i}$  определяются согласно

$$t \cdot m, \quad t_{\perp} \cdot m_{\perp}, \quad t_{\perp} \cdot \overset{[-1]}{m}_2, \quad t_{\perp} \cdot \overset{[-2]}{m}_{2\perp}, \quad m \cdot \overset{[-1]}{t}_2, \quad m_{\perp} \cdot \overset{[-1]}{t}_{2\perp}, \quad t_2 \cdot \overset{[-2]}{m}_2, \quad t_{2\perp} \cdot \overset{[-2]}{m}_{2\perp}. \quad (14)$$

Как видим, система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов, представленная уравнениями (12)–(14) является полной, но приводимой. Инварианты не являются независимыми и могут быть исключены из рассмотрения в силу очевидных рациональных сизигий (например, по теореме Пифагора). Более того, совместные алгебраические рациональные относительные инварианты высшего порядка, включающие кубы и биквадраты силовых и моментных напряжений следует исключить из рассмотрения согласно теореме Гамильтона–Кэли.

Таким образом, неприводимая полная система совместных алгебраических рациональных относительных инвариантов тензора силовых напряжений, моментных напряжений и векторов  $n_k$  и  $t_{ki}$  может быть сведена к

$$\overset{[-1]}{t} \cdot n, \quad \overset{[-1]}{t} \cdot \overset{[-2]}{n}_2, \quad \overset{[-1]}{m} \cdot \overset{[-1]}{n}_2, \quad \overset{[-1]}{m} \cdot \overset{[-1]}{m}, \quad \overset{[-1]}{t} \cdot \overset{[-1]}{m}_2, \quad \overset{[-1]}{t}_{\perp} \cdot \overset{[-1]}{m}_{\perp}. \quad (15)$$

Такая система инвариантов будет нечувствительна к повороту локальной сети координат вокруг единичного вектора нормали  $n_i$  к распространяющейся поверхности наращивания  $\Sigma$ .

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (19-51-60001, 20-01-00666).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущихвязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987
2. Arutyunyan N. Kh. Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging // J. Appl. Math. Mech. 1984. Т. 48. С. 1–10.
3. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Динамическое наращиваниеупругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменнойскоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. №5. С. 6-24
4. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Динамическое наращиваниеупругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постояннойскоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. №6. С. 99-112
5. Murashkin E. V. Radaev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2019. Т. 23. С. 646–656.
6. Murashkin E. V. Radaev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. I.Ya. Yakovlev. Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2019. С. 11–29.
7. Murashkin E. V. Radaev Yu. N. On a Differential Constraint in Asymmetric Theories of the Mechanics of Growing Solids // Mechanics of Solids. 2019. Т. 54. С. 1157–1164.
8. Мурашкин Е. В. О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2021. № 1(47). С.114-121

## Сведения об авторе

**Мурашкин Е. В.** – к.ф-м.н., старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва.

# К моделированию колебаний предварительно напряженной решетчатой пластиинки глаза

Недин Р.Д.

Настоящая работа посвящена развитию теоретических основ для моделирования неоднородной решетчатой пластиинки склеры (*lamina cribrosa*) глазного яблока с учетом ее предварительно напряженного состояния. Предложена модель пластины с учетом сдвиговых деформаций и касательных напряжений в рамках гипотез деформирования Тимошенко-Миндлина, позволяющая учитывать в явном виде геометрические особенности решетчатых пластин глаза, неоднородность материальных характеристик и наличие полей остаточных напряжений. С помощью метода конечных элементов проведен анализ влияния параметров предварительного напряженного состояния решетчатой пластины на ее деформационные и динамические характеристики.

**1. Введение.** Настоящая работа посвящена развитию теоретических основ для моделирования неоднородной решетчатой пластиинки склеры (*lamina cribrosa*) глазного яблока с учетом ее предварительно напряженного состояния. Решетчатая пластиинка является существенно неоднородной слоистой структурой переменной толщины, ослабленной большим числом отверстий, сквозь которые проходят нервные волокна; эта структура испытывает механические нагрузки и деформации вследствие перепадов внутричерепного и внутриглазного давления и, быть может, находится в условиях предварительного напряженно-деформированного состояния [1,2]. Подобные факторы могут привести к атрофии нервных волокон и возникновению распространенного заболевания – глаукомы. Диагностика глаукомы как следствия чрезмерного деформирования решетчатой пластиинки склеры глаза является актуальной задачей биомеханики, особенно на ранних стадиях возникновения заболевания, когда атрофия нервных волокон еще обратима. Для объективной оценки физиологического состояния тканей и органов необходимы надежные методы реконструкции их свойств. При этом ввиду специфики исследования живых тканей, важным требованием является неинвазивность применяемых подходов. Этому требованию удовлетворяют акустические методы, которые являются достаточно точными и простыми в практической реализации и позволяют определять неизвестные характеристики тел по измеренным физическим полям в некоторых участках объектов. В свою очередь, для создания основ акустического мониторинга состояния решетчатой пластиинки склеры глаза требуется разработка и исследование моделей колебаний предварительно напряженных неоднородных тонких пластин при наличии сложной геометрии и отверстий и поля предварительных напряжений. Отметим, что зачастую моделирование деформаций решетчатой пластиинки основывается на модели сплошных круглых пластин переменной жесткости с использованием различных граничных условий, включая упругое опирание [3]. В настоящей работе предложена модель, учитывающая в явном виде геометрические особенности решетчатых пластин глаза, неоднородность материальных характеристик и наличие полей остаточных напряжений.

**2. Общая линеаризованная постановка задачи.** Рассмотрена линеаризованная модель предварительно напряженного неоднородного упругого тела при установившихся колебаниях с частотой  $\omega$  (в метрике начальной деформированной конфигурации) [4,5]:

$$\nabla \cdot (\sigma_0 \cdot \nabla u + \sigma) + \rho \omega^2 u = 0, \quad \nabla \cdot \sigma_0 = 0 \quad (2.1)$$

$$u_0|_{S_u^0} = f_0, \quad n \cdot \sigma_0|_{S_\sigma^0} = P_0 \quad (2.2)$$

$$u|_{S_u} = 0, \quad n \cdot (\sigma_0 \cdot \nabla u + \sigma)|_{S_\sigma} = P \quad (2.3)$$

где  $u$  и  $u_0$  – векторы начальных и малых добавочных перемещений,  $\sigma_0$  и  $\sigma$  – тензоры предварительных и инкрементальных напряжений,  $\rho$  – плотность тела. Уравнения (1) представляют собой линеаризованные уравнения движения (с учетом наложения малых деформаций на конечные) и уравнения равновесия для начальной конфигурации; (2)-(3) – главные и естественные граничные условия в начальной и текущей конфигурациях, соответственно.

Для исследования предварительно напряженной решетчатой пластины с учетом сдвиговых деформаций и касательных напряжений предложена модель упругой неоднородной пластины в рамках гипотез деформирования Тимошенко-Миндлина. Для этого, на основе общей линеаризованной модели (2.1)-(2.3), с помощью вариационного принципа построена постановка задачи об установившихся колебаниях решетчатой пластины, в которой учитывается поле предварительных напряжений, образованных в результате действия начальной нагрузки, вызванной внутрглазным давлением. Представим ниже полученную постановку.

### 3. Постановка задачи для тонкой преднапряженной пластины.

Рассматривается модель установившихся колебаний упругой изотропной неоднородной пластины толщиной  $h$  с плоским сечением срединной поверхности  $S$ , жестко закрепленной на части границы  $l_u$ , под действием произвольной периодически меняющейся нагрузки  $P_k e^{i\omega t}$  ( $\omega$  — частота установившихся колебаний,  $k = 1, 2, 3$ ), приложенной к части границы  $l_\sigma$ . Для общности будем считать, что все характеристики пластины:  $\rho$  — плотность,  $\lambda$  — параметр Ламе для плоского напряженного состояния,  $\mu$  — модуль сдвига, заданы в виде зависимостей от координат. Согласно теории пластин Тимошенко-Миндлина, соответствующие гипотезы с добавлением планарной составляющей перемещений будут иметь вид:

$$u_1 = \theta_1 x_3 + \zeta_1, \quad u_2 = \theta_2 x_3 + \zeta_2, \quad u_3 = w, \quad (3.1)$$

где  $\theta_\alpha = \theta_\alpha(x_\beta)$  — углы поворота нормали  $n$  относительно осей  $x_\alpha$ ,  $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x_\beta)$  — перемещения в срединной плоскости пластины,  $w = w(x_\beta)$  — прогиб пластины (здесь  $\alpha, \beta = 1, 2$ ). На основании вариационного принципа Лагранжа для предварительно напряженного упругого тела в рамках линеаризованной модели (2.1)-(2.3) и с учетом гипотез деформирования (3.1) постановка краевой задачи формулируется в виде:

$$\begin{aligned} T_{\alpha,a} + P_0 \omega^2 w &= 0, \\ R_{\alpha\beta,\beta} + \omega^2 (P_0 \zeta_\alpha + P_1 \theta_\alpha) &= 0, \\ Q_{\alpha\beta,\beta} - S_\alpha + \omega^2 (P_1 \zeta_\alpha + P_2 \theta_\alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= M_0(w_\alpha + \theta_\alpha) + \sum_{m=1}^M w_m, \quad Q_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}^2, \quad R_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}^1 \\ \Psi_{\alpha\beta}^\gamma &= \delta_{\alpha\beta} (\Lambda_\gamma \theta_{m,m} + \Lambda_{\gamma-1} \zeta_{m,m}) + M_\gamma (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + M_{\gamma-1} (\zeta_{\alpha,\beta} + \zeta_{\beta,\alpha}) + \sum_{m=1}^{\gamma-1} \theta_{\alpha,m} + \sum_{m=\gamma}^{\gamma-1} \zeta_{\alpha,m} + \sum_{m=\gamma}^{\gamma-1} \theta_\alpha, \\ S_\alpha &= M_0(w_\alpha + \theta_\alpha) + \sum_{m=1}^M \theta_{\alpha,m} + \sum_{m=1}^M \zeta_{\alpha,m} + \sum_{m=1}^M \theta_\alpha, \\ \Lambda_p &= \int_{-h/2}^{h/2} \lambda x_3^p dx_3, \quad M_p = \int_{-h/2}^{h/2} \mu x_3^p dx_3, \quad P_p = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3^p dx_3, \quad \Sigma_{\alpha\beta}^p = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}^0 x_3^p dx_3 \end{aligned}$$

Главные и естественные граничные условия в описанном случае имеют вид

$$\begin{aligned} w|_{l_u} &= 0, \quad \zeta_\alpha|_{l_u} = 0, \quad \theta_\alpha|_{l_u} = 0, \\ Q_{\alpha\beta} n_\beta|_{l_\sigma} &= 0, \quad R_{\alpha\beta} n_\beta|_{l_\sigma} = P_\alpha, \quad T_\alpha n_\alpha|_{l_\sigma} = P_3, \end{aligned}$$

Здесь  $P_\alpha$  — компоненты вектора нагрузки в плоскости  $S$  пластины,  $P_3$  — интенсивность изгибной нагрузки.

Отметим, что здесь рассматриваются совместные планарно-изгибающие колебания пластины, и задача в такой постановке может быть сведена к раздельным задачам о планарных и изгибающих колебаниях, но только при выполнении дополнительных условий симметрии, описанных в работе [6]. Для цельной пластины с постоянными характеристиками и

однородным полем ПН (по всем координатам) эти условия выполняются автоматически, и, следовательно, задачу для пластины можно решать по отдельности для каждого из режимов колебаний.

Обозначим буквами  $\Theta_\alpha, Z_\alpha, W$  пробные функции, удовлетворяющие тем же главным условиям, что и, соответственно, функции  $\theta_\alpha, \zeta_\alpha, w$ :  $\Theta_\alpha|_{S_u} = 0, Z_\alpha|_{S_u} = 0, W|_{S_u} = 0$ . Тогда, согласно гипотезам (3.1) и граничным условиям для пробных функций, слабая постановка сформулированной задачи примет вид:

$$\int_{l_\sigma} (P_\alpha Z_\alpha + P_3 W) dl - \int_S \left\{ Q_{\alpha\beta} \Theta_{\alpha,\beta} + R_{\alpha\beta} Z_{\alpha,\beta} + S_\alpha \Theta_\alpha + T_\alpha W,_\alpha - \omega^2 [P_2 \theta_\alpha \Theta_\alpha + P_1 (\theta_\alpha Z_\alpha + \zeta_\alpha \Theta_\alpha) + P_0 (\zeta_\alpha Z_\alpha + w W)] \right\} dS = 0. \quad (3.4)$$

Интегральные характеристики для предварительных напряжений, образованных в результате начального прогиба пластинки вследствие действия внутриглазного давления, имеют вид

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}^1 &= -\frac{h^3}{12} \left[ (\lambda^* + 2\mu) w_{,11}^0 + \lambda^* w_{,22}^0 \right], \quad \Sigma_{22}^1 = -\frac{h^3}{12} \left[ \lambda^* w_{,11}^0 + (\lambda^* + 2\mu) w_{,22}^0 \right] \\ \Sigma_{12}^1 &= -\frac{h^3}{6} \mu w_{,12}^0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $w^0 = w^0(x_1, x_2)$  – компонента начального прогиба.

Предложенная модель позволяет учитывать неоднородность материальных свойств пластины и задавать произвольные законы неоднородности для компонент тензора предварительных напряжений. Для описания поля предварительных напряжений отдельно решается задача статики о прогибе решетчатой пластины, защемленной по контуру, под действием распределенной нагрузки; на основе найденного решения рассчитываются интегральные характеристики (3.5) для компонент предварительных напряжений, входящие в состав уравнений установившихся колебаний.

**3. Вычислительные эксперименты.** Задача решена численно с помощью метода конечных элементов на основе полученной слабой постановки (3.4). Рассмотрены различные варианты описания геометрии решетчатой пластины с отверстиями; предложено несколько способов формирования отверстий, проведен их сравнительный анализ с точки зрения влияния на деформационные характеристики и на образование концентраторов напряжений. Проведен анализ влияния параметров предварительного напряженного состояния решетчатой пластины на ее деформационные и динамические характеристики (поля планарных и изгибных перемещений, углы поворота нормали вдоль осей в плоскости пластины, резонансные частоты, амплитудно-частотные характеристики). Для увеличения точности расчетов в зонах круговых отверстий использовано локальное сгущение конечно-элементной сетки. Проведен анализ влияния различных типов неоднородного предварительного напряженного состояния пластины на ее динамические характеристики. Важно, что предложенная модель позволяет задавать в пластине предварительное состояние произвольно: как в виде аналитических зависимостей, так и численно.

На рис. 1 представлены различные варианты построения геометрии и конечноэлементного разбиения решетчатой пластинки; при этом использовались полуавтоматические методики формирования геометрии с использованием генерации случайных чисел на основе реальных снимков.

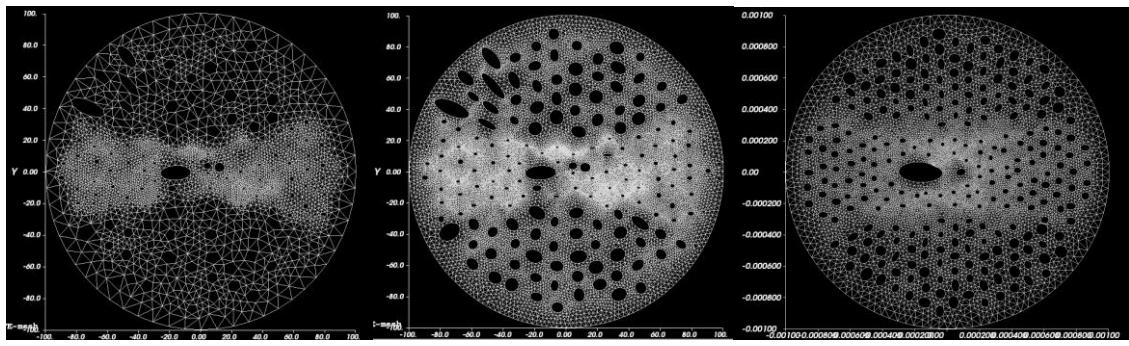
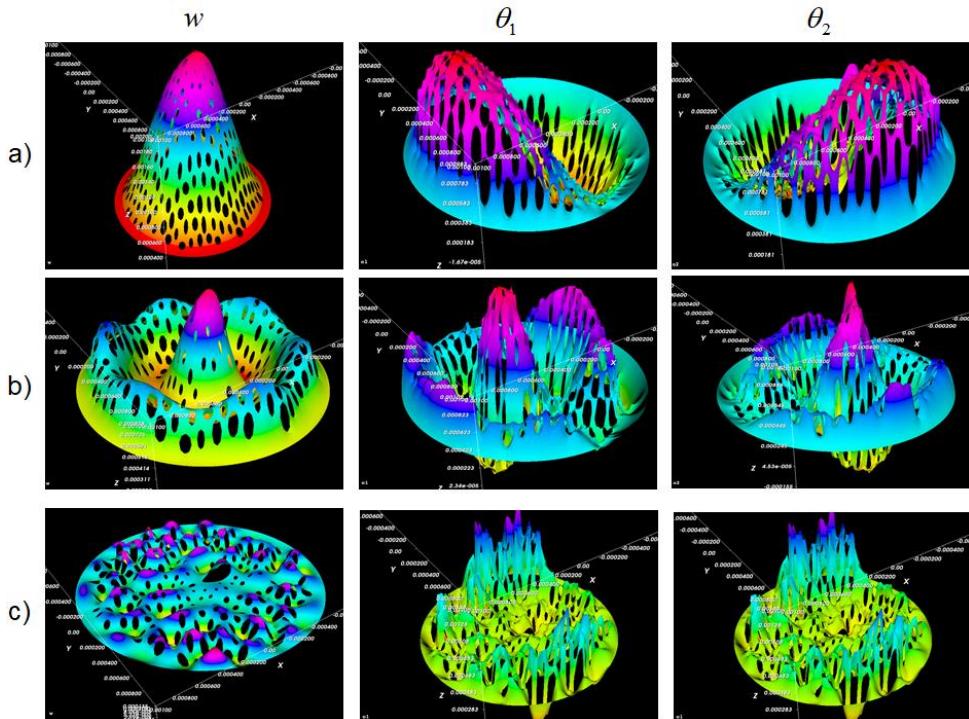


Рис. 1. Различные варианты геометрии и конечноэлементного разбиения пластины.

Для численных расчетов использованы значения, опубликованные в нескольких работах, включая статью [7]; при этом учтены реалистичные диапазоны изменения внутриглазного давления, считая, что 35 мм рт. ст. – повышенное давление. Параметры задачи:  $R = 1$  мм = 1000  $\mu\text{м}$  (радиус пластиинки),  $h = 0.25$  мм = 250  $\mu\text{м}$  (толщина пластиинки),  $H = h / 1.6$  – поправка на снижение жесткости вдоль толщины (при использовании модели изотропного материала,  $E = 1.43$  МПа,  $\nu = 0.45$  (коэффициент Пуассона),  $\rho = 1060 \text{ кг}/\text{м}^3$  (плотность),  $p_0 = 15$  мм рт. ст. – нормальное внутриглазное давление,  $p_0 = 35$  мм рт. ст. – повышенное внутриглазное давление).

На первом этапе решения задачи находится плоское начальное НДС, находятся интегральные характеристики для предварительных напряжений (3.5) в результате равномерно распределенной изгибной нагрузки, которая моделирует действие внутриглазное давления; для этого решается вспомогательная задача статики. Далее, на втором этапе, найденные характеристики подставляются в линеаризованные уравнения (2.2) (или в слабую постановку (3.4)), и решается задача о малых колебаниях преднатянутой структуры, под действием периодической распределенной изгибной нагрузки  $p$  (т.о., в (2.4.)  $P_\alpha = 0$ ,  $P_3 = p$ ). Проведен анализ влияния предварительных напряжений, которые выражаются линейно через внутриглазное давление, на АЧХ. На рис. 2 представлены некоторые формы колебаний для функции прогиба  $w$  и углов поворота  $\theta_\alpha$ .



**Рис. 2.** Формы колебаний пластины при различных частотах колебаний: а)  $f = 4$  кГц (между 1-ой и 2-ой резонансными частотами), б)  $f = 23$  кГц (между 2-ой и 3-ей резонансными частотами), в)  $f = 80$  кГц (между 3-ей и 4-ой резонансными частотами).

Предложенный подход к моделированию решетчатой пластиинки склеры глаза может быть полезен при разработке неинвазивных методик идентификации уровня внутриглазного давления на основе данных акустического мониторинга.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №18-71-10045 <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иомдина Е.Н., Бауэр С.М., Котляр К.Е. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения / под ред. В.В. Нероева. – М.: Реал Тайм, 2015. – 208 с.
2. Bauer S.M., Voronkova E.B. On the deformation of the lamina cribrosa under intraocular pressure // Russian Journal of Biomechanics. – 2001. – Vol. 5. No. 1. – P. 73–82.
3. Ватульян А.О., Потетюнко О.А. К оценке деформативности решетчатой пластиинки глаза // Российский журнал биомеханики. – 2017. – Т. 21, № 1. – С. 8–17.
4. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. 206 с.
5. Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. *Eng. Struct.*, 2017, vol. 151, pp. 391-405. [DOI](#)
6. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, pp. 1600-1618. [DOI](#)
7. Krakovskaya E.B. Об изменении деформации решетчатой пластиинки диска зрительного нерва после декомпрессионных операций // Российский журнал биомеханики, 2008, том 12, № 2 (40): 55–59

## Information about authors

**Nedin Rostislav Dmitrievich** – Associate Professor, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, +7 (863) 2975 111; Senior Researcher, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Southern Mathematical Institute, +7 8672 53-98-61

E-mail [rdn90@bk.ru](mailto:rdn90@bk.ru)

# О приведении в соответствие величин максимальных ускорений на картах сейсмического районирования

Оганесян С.М., Карапетян Дж.К., Геодакян Э.Г., Саакян Б.В.

Из разработанной новой гравитационно-вихревой теории сейсмостойкости следует, что в расчетных схемах на одномерных моделях имеется четырехкратный резерв (запас) по оценке сил и моментов в сечениях однородного стержня. Эти возможности позволяют повысить ускорения на картах сейсмического районирования как минимум в два раза и привести в соответствие ускорения, наблюдаемые при сильных и разрушительных землетрясениях, с ускорениями, используемыми в СНиП-ах.

Сильные и разрушительные землетрясения, как это не печально, являются одним из естественных экспериментов, в которых проверяется точность теории сейсмостойкости и могут быть получены новые данные о поведении зданий и сооружений.

Макросейсмические изучения последствий разрушительных землетрясений (Мексиканского 19 сентября 1985г., Спитакского 7 декабря 1988г., Нортриджского землетрясения 17 января 1994г., Японского 17 января 1995г. (особенно в городе Кобе), Тайваньского землетрясения 21 сентября 1999г. и Великого японского землетрясения 11 марта 2011г.) показали [1,2,6], что одной из основных проблем инженерной сейсмологии, сейсмического районирования (СР) и сейсмического микрорайонирования (СМР), сейсмостойкого строительства остается вопрос повышения на картах СР и СМР исходных величин сейсмических ускорений (ВСУ) до  $0.7 \div 0.8 \div 1.0 g$  ( $g$  – ускорение свободного падения) для средних грунтов. Увеличение ВСУ для средних грунтов до  $0.7 \div 0.8 \div 1.0 g$  на картах СР и СМР приводит к увеличению в два раза инерционных сейсмических сил, действующих, при землетрясении, на здания и сооружения. Как следствие этого при проектировании повышаются расчетные силы, что, в конечном счете, приводит к резкому повышению стоимости возводимых зданий и сооружений.

Поэтому возникает необходимость разработки таких расчетных схем колебаний зданий и сооружений (новой теории сейсмостойкости), в которых учитываются огромные величины сейсмических ускорений, наблюдаемые в действительности. Впервые этот вопрос был поднят в последней статье акад. А.Г. Назарова.

По мнению авторов это возможно по трем существенно различным направлениям: 1) переход от одномерных к двух – или трехмерным моделям сооружений; 2) учет влияния нелинейности, вертикальных сил, кручения, упруго-пластического деформирования; 3) нахождение неизвестных резервов в одномерных моделях.

Наибольший интерес для авторов представляет 3-е направление, исходя из возможностей новой модели массы (HMM) [5].

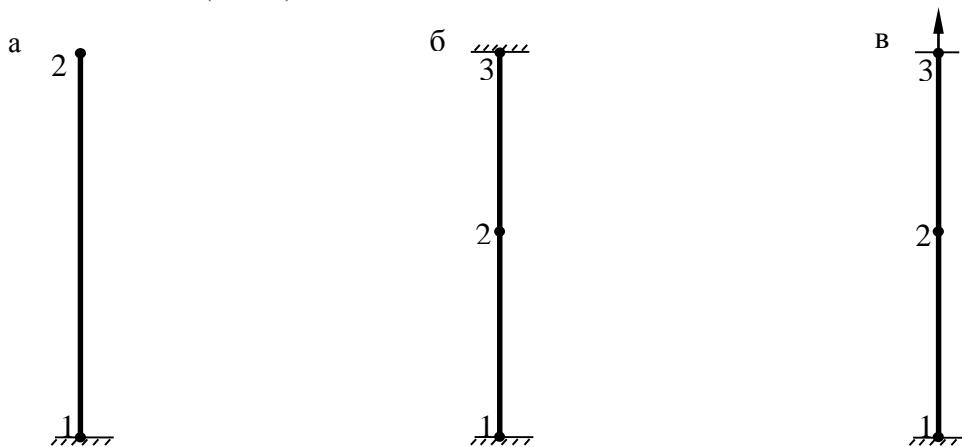


Рис.1. Задача 1-а, задача 2-б, задача 3-в

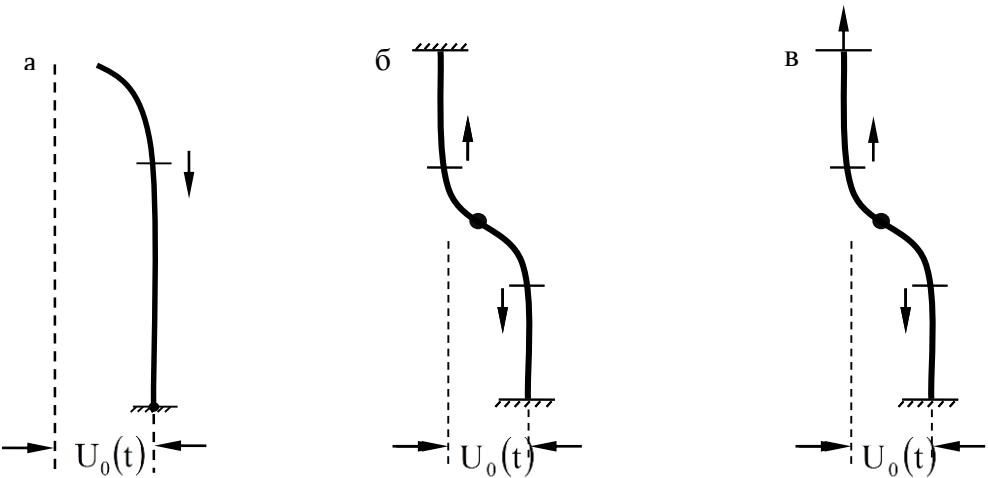


Рис.2 Расчетные схемы изгибно-сдвиговых и чисто изгибных колебаний для задач 1-3

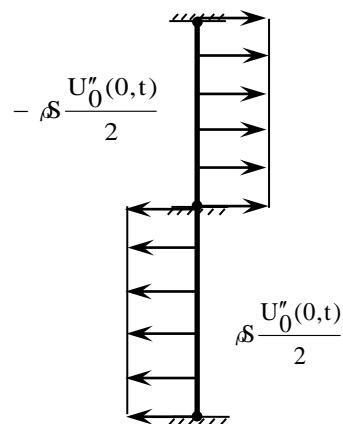


Рис.3 Расчетные схемы чисто сдвиговых колебаний для задачи 2 и 3

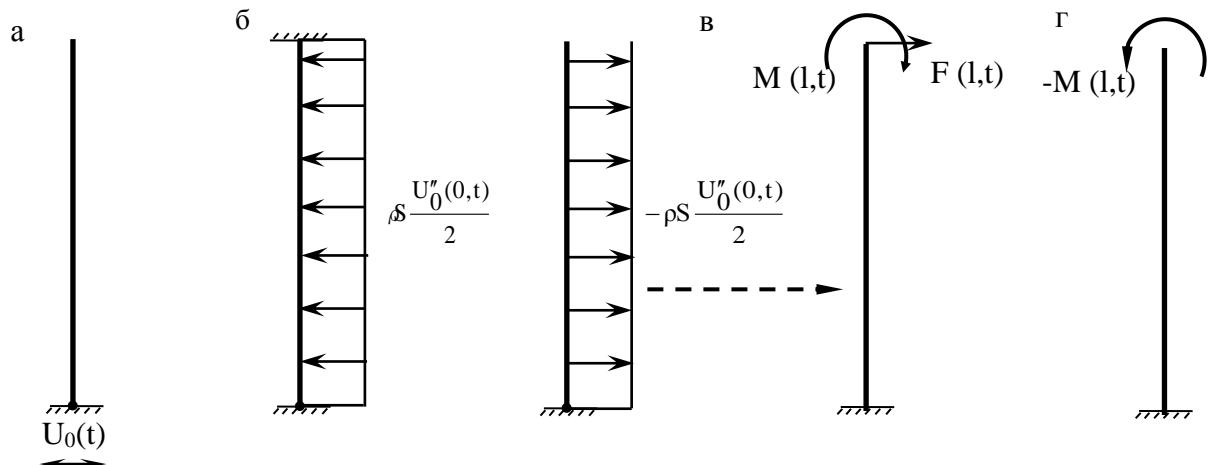


Рис.4 Расчетная схема чисто сдвиговых(б), изгибных(в) и чисто изгибных(г) колебаний для задачи 1.

В работе [5], в результате введения понятий мгновенного центра вращения (МЦВ), мгновенного момента инерции (ММИ) и приведенных длин, удалось впервые произвести декомпозицию постановку задачи о распространении упругой волны изгиба на две подзадачи и снизить порядок решаемых уравнений с четвертого до второго.

Полученные системы уравнений для подзадач I и II существенно отличаются от известных уравнений изгибных колебаний С.П. Тимошенко и Бернули-Эйлера.

Для начала подробно рассмотрим задачу 1, потому что она имеет ключевую роль для статьи. Задачи 2 и 3 в силу симметрии смещения  $U_1(x,t)$  относительно точки перегиба 2 сводятся к задаче 1 (см. рис.4а,б) [13]. В работе [5] даны постановки задачи о распространении волны чистого изгиба и изгиба при свободных колебаниях однородного консольного стержня постоянного поперечного сечения.

2. Для теории сейсмостойкости важное значение имеет решение задачи о вынужденных колебаниях однородного консольного стержня на изгиб (ВКОКСИ).

При рассмотрении задачи о вынужденных колебаниях однородного консольного стержня на изгиб оказалось, что при силовом внешнем воздействии в виде распределенной нагрузки  $f(x,t)$  истиной причиной изгибных колебаний является ее обобщенная частная производная по переменной  $x$ ,  $f'_x(x,t)$ .

Так как в момент времени  $t = +0$  фронт изгибной волны начинается со свободного конца стержня, то остается открытый вопрос – какие силы компенсируют внешнюю распределенную нагрузку  $f(x,t) = f(t)$ .

При этом в стержне возникают “внутренние” объемные силы  $f(x,t)$ , которые обязательно необходимо учитывать при уточненной формулировке постановки задачи о свободных и вынужденных колебаниях консольного стержня на изгиб.

Далее в работе [5] показано, что решение задачи ВКОКСИ подразделяется на стационарную и волновую подзадачи, которые принимают соответственно следующие виды:

$$q(x,t) - kGS \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial x^2} = f(x,t) \quad (1)$$

$$\rho S \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - kGS \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = f'_x(t) = -\frac{1}{2} f(t) \delta(x-l) \quad (2)$$

при нулевых начальных и граничных условиях

$$\phi_2(0,t) = \frac{\partial \phi_2(l,t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\phi_2(x,0) = \frac{\partial \phi_2(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \bar{\phi}_2(x,t) \quad (5)$$

$$U_2(0,t) = 0 \quad (6)$$

где  $\delta(\cdot)$  - дельта-функция Дирака,  $\bar{\phi}_2(x,t)$  - решение задачи (5)-(6),  $\rho$  - плотность стержня.

В [4] показано, что при колебании однородного консольного стержня длины  $l$  полное перемещение нейтральной линии  $U(x,t)$  представимо в виде  $U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t) + U_3(x,t)$ , где  $U_1(x,t)$  - чистый изгиб,  $U_2(x,t)$  - изгибо-сдвиг,  $U_3(x,t)$  - чистый сдвиг (см. рис.4).

Полученные по гравитационно-вихревой теории сейсмостойкости расчетные схемы показывают, что даже в одномерных моделях имеется четырехкратный резерв по оценке перерезывающих сил и моментов ( $2 \times 2$ ). Как видно из рисунков 1-4 сила инерции  $-\rho S \ddot{U}(t)$  при изгибе и сдвиге принимает участие с коэффициентом 0.5. Второй коэффициент 2 появляется, если

расчеты производим по задаче (модели) 3, так как в этом случае жесткость стержня увеличивается в два раза.

Данные расчетные схемы нами были модернизированы и привлечены при рассмотрении различных моделей подготовки тектонического землетрясения в коллизионных зонах и возникновения различных сейсмических волн в ближней зоне землетрясения [2,4,6].

В заключение отметим, что полученные в работе расчетные схемы соответственно для задачи 1 (рис. 2,а и 4,б) и задачи 3 (рис. 2,в и 3,а), по мнению авторов, должны стать основой новой теории сейсмостойкости.

Близкие расчетные схемы в теории сейсмостойкости рассматриваются в методе стоячих волн, разработанном группой под руководством А.Ф. Еманова [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № АСН-01/21.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аптикаев Ф.Ф. Проблемы создания шкалы сейсмической интенсивности нового поколения. – Вулканология и сейсмология, 1999, N4-5. С.23-28.
2. Гедакян Э.Г. О геодинамической модели очага Спитакского землетрясения 7 декабря 1988. // В кн.: Сб. научных трудов конф., посв. 60-летию основания НАН РА.- Гюмри: Изд."Гитутюн" НАН РА, 2004. С. 64-78.
3. Еманов А.Ф., Каргаполов А.А., Колесников Ю.И., Федин К.В. Диагностирование потери устойчивости опор трубопроводов по акустическим шумам: лабораторный эксперимент //Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, 2013, N4, 84-90с.
4. Карапетян Дж. К., Айрапетян О. Ю., Мхитарян Д. А. Анализ динамических характеристик здания комплексной конструкции // Геология и геофизика Юга России. 2019. Том 9 № 1. С. 110-121. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.26792.
5. Оганесян С.М. К вопросу о построении новой теории сейсмостойкости// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружения. 2013, № 5, с.26-29.
6. Саакян Б.В. Сейсмическое отражение сложных геодинамических процессов в орогенах Большого и Малого Кавказа. Геология и геофизика Юга России, № 2, 2018, с.90-98.

## Сведения об авторах:

**Оганесян Севада Мкртичевич** - член-корр. НАН РА Армения, доктор физ-мат наук, сов. директора и зав. лаборатории ИГИС НАН РА, (+37493)42-04-43, iges@mail.ru

**Карапетян Джон Костикович** - канд. геол. наук, директор и зав. лаборатории ИГИС НАН РА, (+37494)79-85-80, jon\_iges@mail.ru

**Геодакян Эдуард Григорьевич** - канд. физ.-мат. наук, зав. лаборатории Институт геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА (ИГИС НАН РА), (+37493)51-31-23, geodakyan.e@mail.ru

**Саакян Бабкен Вазгенович** - научный сотрудник ИГИС НАН РА, (+37493)62-66-53, sahakyan\_babken@mail.ru

## Особенности применения многолучевой голограммической интерферометрии в фотоупругости

Осипов М.Н., Сергеев Р.Н., Лимов М.Д.

В работе представлены результаты по применению трёхлучевых голограммических схем для определения напряжённо-деформированного состояния фазовых объектов. Показано, что при построении трёхлучевых голограммических схем, с пучками расположеными в одной плоскости, необходимо выполнить определенные требования по угловому расположению этих пучков относительно друг к другу для правильной интерпретации интерференционных картин. Использование предлагаемой оптической схемы позволяет получить с одной голограммы необходимое количество интерферограмм для раздельного определения величин главных напряжений в исследуемой плосконапряжённой фазовой модели.

1. В первых работах по применению голографии в фотоупругости [1-3] было показано, что данный метод записи интерференционных картин фазовых объектов позволяет регистрировать для оптически чувствительных моделей все интерференционные картины, которые могут быть получены в классической фотоупругости, что является огромным преимуществом по сравнению с поляризационно-оптическими методами исследования напряжённо-деформированного состояния фазовых объектов. По сравнению с классической интерферометрией голографический метод регистрации информации позволяет уменьшить требования к качеству оптических деталей, работать с реальными объектами и объединить схему полярископа и интерферометра относительно применения в классических поляризационно-оптических методах. В данных работах и в последствии в основном рассматривались двухлучевые оптические схемы, которые не позволяют получить необходимое количество интерферограмм для раздельного определения величин главных напряжений в исследуемых плосконапряжённых фазовых моделях. Для решения данной проблемы предложена трехлучевая оптическая схема. Однако применение данной схемы требует определённого расположения опорных и предметного пучков относительно друг друга.

2. Рассмотрим процесс записи и восстановления голограмм двухлучепреломляющих фазовых моделей в трехлучевой оптической схеме с линейной поляризацией в пучках, представленной на рисунке 1.

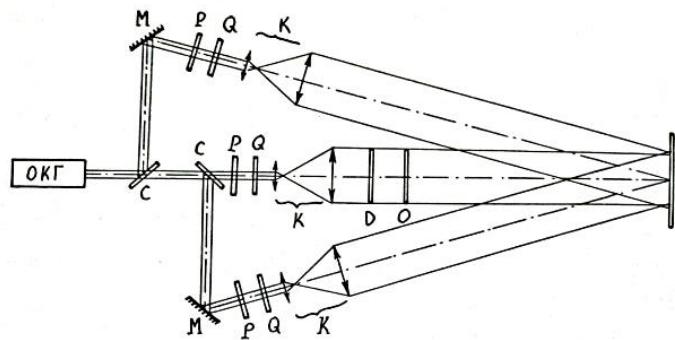


Рис. 1 – Трёхлучевая голограммическая схема.

ОКГ – лазер, С – светоделительная пластинка, М – зеркало, Р – поляризатор, Q – фазовая пластинка, К – коллиматор, D – диффузор, О – исследуемая фазовая модель

При расчётах примем, что направления векторов электрической напряженности в опорных пучках расположены по направлению  $x$ ,  $y$  осей, выбранной декартовой системы координат. В этом случае выражения для векторов Джонса [4] опорных пучков можно представить в следующем виде:

Вектор Джонса для первого опорного пучка:

$$\vec{E}_1 = A_1 \exp(-ink_1 \vec{r}_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Вектор Джонса для второго опорного пучка:

$$\vec{E}_2 = A_2 \exp(-in\vec{k}_2\vec{r}_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Вектор Джонса для предметной плоскополяризованной световой волны, падающей на исследуемую плоскую фазовую модель, представим в общем виде:

$$\vec{E}_m = A_m \exp(-in\vec{k}_m\vec{r}_m) \begin{bmatrix} \cos \vartheta_m \\ \sin \vartheta_m \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\vartheta$  – угол наклона плоскости поляризации предметной волны относительно оси  $x$ .

В данных выражениях:  $\vec{A}_j$  ( $j = 1, 2, m$ ) – амплитуды электрической напряженности волн в плечах трёхлучевой голограммической схемы;  $\vec{k}_j = 2\pi/\lambda$ , ( $\lambda$  – длина волны лазера) – волновой вектор указывающий направление распространения опорных и предметной волн;  $\vec{r}_j$  – длины плеч трёхлучевой голограммической схемы, по направлению совпадающие с соответствующими распространениями опорных и предметной волн;  $n$  – показатель преломления окружающей среды.

Амплитудное пропускание двухэкспозиционной голограммы (ненагруженная + нагруженная модель), используя уравнения (1) (2) и (3), запишем в следующем виде:

$$T = 2(t_1 + t_2) |\vec{E}_1|^2 + (t_1 + t_2) |\vec{E}_m^0|^2 + t_1 \vec{E}_1^\dagger \vec{E}_m^0 + t_2 \vec{E}_1^\dagger \vec{E}_m^s + + t_1 \vec{E}_2^\dagger \vec{E}_m^0 + t_2 \vec{E}_2^\dagger \vec{E}_m^s + t_1 \vec{E}_m^0 \vec{E}_1^\dagger + t_2 \vec{E}_m^s \vec{E}_1^\dagger + t_1 \vec{E}_m^0 \vec{E}_2^\dagger + t_2 \vec{E}_m^s \vec{E}_2^\dagger, \quad (4)$$

где  $\vec{E}_n^\dagger$  – комплексно сопряженный, транспонированный вектор Джонса  $\vec{E}_n$ ;  $t_1, t_2$  – время первой и второй экспозиции соответственно;  $\vec{E}_m^0, \vec{E}_m^s$  – вектора Джонса для ненагруженного и нагруженного состояний исследуемой фазовой модели соответственно.

При этом принято, что амплитуды опорных волн равны  $A_1 = A_2$ . Это необходимо для одинаковых условий записи голограммы с двумя опорными пучками, так как время экспозиции для записи голограмм в основном определяется интенсивностью опорной волны. Также принято условие:  $|\vec{E}_m^0|^2 = |\vec{E}_m^s|^2$ , то есть не учитываем изменение интенсивности предметной волны при прохождении через нагруженную и незагруженную модель. Данное предположение выполняется практически для всех экспериментальных исследований.

3. Рассмотрим процесс восстановления изображений с записанной голограммы по трехлучевой схеме, причем на стадии восстановления будем использовать только один из опорных пучков. При восстановлении первым опорным пучком комплексная амплитуда световой волны после прохождения голограммы (4) будет иметь вид:

$$\vec{E}_T = T \vec{E}_1 = \left( 2(t_1 + t_2) |\vec{E}_1|^2 + (t_1 + t_2) |\vec{E}_m^0|^2 \right) \vec{E}_1 + \left( t_1 \vec{E}_1^\dagger \vec{E}_m^0 + t_2 \vec{E}_1^\dagger \vec{E}_m^s \right) \vec{E}_1 + + \left( t_1 \vec{E}_2^\dagger \vec{E}_m^0 + t_2 \vec{E}_2^\dagger \vec{E}_m^s \right) \vec{E}_1 + \left( t_1 \vec{E}_m^0 \vec{E}_1^\dagger + t_2 \vec{E}_m^s \vec{E}_1^\dagger \right) \vec{E}_1 + \left( t_1 \vec{E}_m^0 \vec{E}_2^\dagger + t_2 \vec{E}_m^s \vec{E}_2^\dagger \right) \vec{E}_1. \quad (5)$$

Согласно выражению (5) за голограммой будут распространяться пять волновых фронтов. Первое слагаемое в скобках представляет не дифрагированную волну и не содержит информации о модели. Остальные слагаемые представляют дифрагированные волны, которые содержат информацию о модели. Второе слагаемое, используя выражения (1), (3) и (5), после преобразований можно записать в следующем виде:

$$\vec{E}_{I1}^2 = K \exp(-in\vec{k}_1\vec{r}_1) \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $K$  – амплитуда дифрагированной волны;  $F$  – описывает образование интерференционной картины в первом мнимом изображении.

Эта волна распространяется в том же направлении, что и предметная, образуя мнимое изображение.

Третье слагаемое даст волну с комплексной амплитудой:

$$\overrightarrow{E_{R1}^3} = K \exp(-in(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \vec{r}_2)) \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где  $G$  – описывает образование интерференционной картины во втором мнимом изображении. Данная волна распространяется в направлении  $(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \vec{r}_2)$  и является вторым мнимым изображением.

Четвертое слагаемое даст волну с комплексной амплитудой:

$$\overrightarrow{E_{R1}^4} = K \exp(in\overline{2\vec{k}_1 \vec{r}_1}) \begin{bmatrix} F^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где индекс \* – обозначает комплексное сопряжение.

Данная волна образует первое действительное изображение в направлении  $\overrightarrow{2\vec{k}_1 \vec{r}_1}$ .

Пятое слагаемое даст волну с комплексной амплитудой:

$$\overrightarrow{E_{R1}^5} = K \exp(in(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \vec{r}_2)) \begin{bmatrix} G^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Данная волна распространяется в направлении  $(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \vec{r}_2)$ , образуя второе действительное изображение.

Анализ выражений (6) – (9) показывает, что дифрагированные волны могут накладываться друг на друга, что приведет к искажению исследуемых интерференционных картин фотоупругости, и, следовательно, затруднит процесс расшифровки. Поэтому на оптическую схему с двумя опорными и предметным пучками, расположенными в одной плоскости, требуется наложить определенные условия.

Пусть исследуемая фазовая модель имеет пространственные частоты от  $-\xi_{\max}$  до  $+\xi_{\max}$ , и от  $-\eta_{\max}$  до  $+\eta_{\max}$  в пространстве  $x, y$  восстановленных изображений. В этом случае, при восстановлении одним опорным пучком, пространственный спектр изображений, полученный по трехлучевой схеме с опорными пучками, расположенными в одной плоскости с предметным, будет состоять из суперпозиции пространственных спектров пяти дифрагированных волн (6) – (9). На рисунке 2 представлен теоретический расчет (на основании работы [5]) пространственного спектра восстановленных изображений с голограммы, записанной по трёхлучевой оптической схеме, с условием минимального углового разделения дифрагированных волн. Плоскостью расположения пучков принята плоскость  $x, z$ .

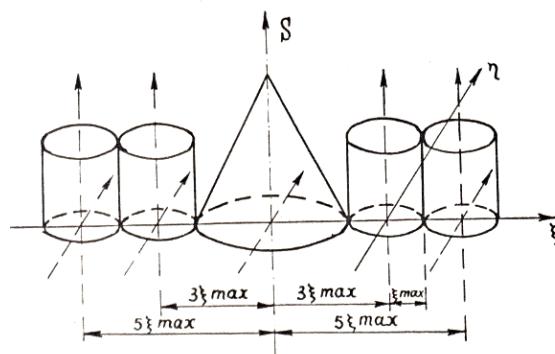


Рисунок 2 – Пространственный спектр восстановленных изображений

Из анализа пространственного спектра (Рисунок 2) ясно видно, что для выполнения условия разделения в пространстве восстанавливаемых изображений должны выполняться следующие соотношения:

$$\xi_1 + \xi_0 \geq 3\xi_{\max}, \text{ и } \xi_2 + \xi_0 \geq 5\xi_{\max}, \quad (10)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – пространственные частоты опорных пучков;  $\xi_0$  – центральная пространственная частота спектра фазовой модели;  $\xi_j = \sin \theta_j / \lambda$  ( $j = 0, 1, 2$ ;  $\theta_j$  – угол образованный опорными и предметным пучками относительно оси  $x$ ).

Выполнение данных условий позволяет избежать наложения интерференционных картин восстановленных с голограммы, записанной по трёхлучевой схеме, что позволит правильно расшифровать интерферограммы для определения напряжённо-деформированного состояния плоских фазовых моделей.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда – проект №21-1100346.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fourney M.E. Application of holography to photoelasticity. Experimental Mechanics, 1968, vol. 8, pp. 33-38.
2. Hovanesian J.D., Brčic V., Poweel R.L. Anew experimental Stress-Optic method<sup>^</sup> Stress-Holo-Interferometry. Experimental Mechanics, 1968, vol. 8, pp. 362-368.
3. Зайдель А.Н., Островский Ю.И. Интерференционно-голографический метод исследования распределения напряжений в прозрачных моделях. Журнал технической физики. 1969, т. 39, №12, С. 2225-2228.
4. Джеррард А., Вёрч Дж.М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 341 с.
5. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.

### Information about authors

**Osipov Michael** – associated professor, Samara National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics (846) 337 99 41, +7 927 26 35 777.

**E-mail:** osipov7@yandex.ru.

**Sergeev Roman** – post graduate student, Samara National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics (846) 337 99 41, +7 927 767 86 52.

**E-mail:** romansr@yandex.ru.

**Limov Michael** – post graduate student, Samara National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics (846) 337 99 41, +7 937 181 63 22.

**E-mail:** maiklim@mail.ru.

# О влиянии упругой пленки на затухание волн на горизонтальной поверхности раздела вязкой и движущейся над ней идеальной жидкостей

Очиров А.А., Белоножко Д.Ф.

Теоретически исследованы закономерности волнового движения на горизонтальной поверхности раздела вязкой и идеальной жидкостей, разграниченных плёнкой поверхностно-активного вещества. Установлена взаимосвязь между декрементом затухания капиллярно-гравитационных волн и характером перераспределения концентрации поверхностно-активного вещества в зависимости от упругости плёнки и скорости относительного перемещения жидкостей.

**1. Введение.** Поверхностно-активные вещества (ПАВ) довольно сложным образом влияют на волновое движение, как на свободной поверхности жидкости, так и на границе раздела двух жидких сред [1-8]. Недавно была обнаружена любопытная взаимосвязь между демпфирующим влиянием ПАВ на капиллярно-гравитационные волны и характером распределения поверхностной плотности ПАВ [9]. В настоящей работе эта взаимосвязь исследуется для пленки ПАВ распределенной по поверхности раздела двух сред, участвующих в относительном движении.

**2. Математическая формулировка задачи.** Рассмотрим систему из двух несжимаемых жидкостей: нижней – вязкой с плотностью  $\rho$  и кинематической вязкостью  $v$ , и верхней – идеальной, с плотностью  $\rho' < \rho$ . Будем использовать декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$  с осью  $Oz$ , направленной вертикально вверх против направления поля силы тяжести  $\vec{g}$ , и плоскостью  $Oxy$ , задающей положение поверхности раздела жидкостей в равновесном состоянии. Пусть по поверхности раздела сред распределена слабо растворимая плёнка ПАВ с равновесной поверхностной концентрацией  $\Gamma_0$ , уменьшающая коэффициент поверхностного натяжения до значения  $\gamma_0$ . Примем, что в положительном направлении оси  $Ox$  распространяется бегущая периодическая волна с волновым числом  $k$ , амплитудой  $\zeta$  и круговой частотой  $\omega$ , вызывающая изменения поверхностной концентрации  $\Gamma \equiv \Gamma_0 + \Gamma_1$ , где  $\Gamma_1 = \Gamma_1(x, t)$ . Будем считать, что поверхность жидкости и сама плёнка ПАВ всё время находятся в состоянии локального термодинамического равновесия: локальные изменения  $\Gamma$  мгновенно сказываются на локальных значениях коэффициента поверхностного натяжения  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 = \gamma_0 + \chi \Gamma_1$  [2]. В приближении волн малой амплитуды, упругие свойства плёнки ПАВ определяются тангенсом угла наклона  $\chi = (d\gamma/d\Gamma)_0$  (для ПАВ эта величина меньше нуля) касательной к изотерме  $\gamma = \gamma(\Gamma)$  в точке  $\Gamma = \Gamma_0$  [2,10]. Изменение коэффициента поверхностного натяжения вдоль возмущенной поверхности вызывает распределение поверхностных тангенциальных упругих сил, посредством которых плёнка ПАВ взаимодействует с жидкостью. Пусть верхняя жидкость поступательно движется относительно нижней в направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $U_0$ . В линейном по амплитуде волны приближении рассмотрим задачу расчета влияния относительного движения сред на поверхностное распределение ПАВ и на затухание капиллярно-гравитационных волн в зависимости от упругих свойств пленки ПАВ.

Математическая формулировка задачи имеет вид [9, 11]:

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \Delta \varphi' = 0; \quad z < 0: \quad \partial_t \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + v \Delta \vec{U}; \quad \nabla \cdot \vec{U} = 0; \\ z = 0: \quad \partial_t \xi = v; \quad \partial_t \xi + U_0 \partial_x \xi = \partial_z \varphi' \\ & -(\rho - \rho') + \rho' \partial_t \varphi' + \rho' U_0 \partial_x \varphi' + p - 2\rho v \partial_z v = -\gamma_0 \partial_{xx} \xi; \\ & -\rho v (\partial_z u + \partial_x v) + \chi \partial_x \Gamma_1 = 0; \quad \partial_t \Gamma_1 + \Gamma_0 \partial_x u = 0; \\ z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty: \quad \nabla \varphi' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\xi \equiv \xi(x, t)$  характеризует отклонение границы раздела жидкостей от равновесного положения  $z = 0$ ;  $v \equiv v(x, z, t)$  и  $u \equiv u(x, z, t)$  – вертикальная и горизонтальная компоненты

скорости нижней жидкости  $\vec{U} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_z$ ;  $\varphi' \equiv \varphi'(x, z, t)$  – потенциал течения, которое инициируется в верхней жидкости волновым возмущением границы раздела и накладывается на её однородный горизонтальный перенос со скоростью  $U_0$ ;  $p \equiv p(x, z, t)$  – динамическая добавка к гидростатическому давлению в нижней жидкости. Для простоты все функции считались независящими от второй горизонтальной координаты  $y$ .

**3. Решение задачи.** Решение задачи находится стандартными методами и представляет собой суперпозицию бегущих волн с различными волновыми числами  $k$ :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\zeta}{2} \exp(\theta) + \text{C.C.}; \quad \Gamma = \frac{\zeta}{2} i k \Gamma_0 \frac{A+B}{S} \exp(\theta) + \text{C.C.}; \\ u &= \frac{\zeta}{2} \left( A \exp(kz) + B \exp(qz) \right) \exp(\theta) + \text{C.C.}; \\ v &= \frac{\zeta}{2} i \left( A \exp(kz) + \frac{Bk}{q} \exp(qz) \right) \exp(\theta) + \text{C.C.}; \quad \varphi' = \frac{\zeta}{2} \left( i U_0 - \frac{S}{k} \right) \exp(-kz) \exp(\theta) + \text{C.C.}; \\ q &= \sqrt{k^2 + S/v}; \quad \theta = St - ikx; \\ A &= is \left( \frac{q}{k-q} - \frac{\rho v k S}{k^2 \Pi - (k+q)\rho v S} \right); \quad B = -\frac{ikqS(k\Pi - 2\rho v S)}{(k-q)(k^2 \Pi - (k+q)\rho v S)}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Символом С.С. обозначены комплексно сопряженные слагаемые. Комплексная частота волнового движения  $S$  определяется из дисперсионного уравнения:

$$\begin{aligned}(S + 2k^2 v)^2 + \omega_0^2 + \frac{k^3 \Pi \omega_0^2}{S^2 \rho} + (S - ikU_0)^2 \frac{\rho'(k^3 \Pi + S^2 \rho)}{S^2 \rho^2} + \frac{g k \rho'(k^3 \Pi - S^2 \rho)}{S^2 \rho^2} = \\ = q \left( 4k^3 v^2 + \frac{k^2 \Pi}{\rho} \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{S^2} \right) - \frac{k^2 \Pi \rho'(kg - (S - ikU_0)^2)}{S^2 \rho^2} \right); \quad \omega_0^2 = kg \left( 1 + k^2 \gamma_0 / (\rho g) \right)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Параметр  $\Pi = \Gamma_0 \chi$  имеет размерность поверхностного натяжения. Модуль  $|\Pi|$  принято называть дилатационным модулем упругости пленки ПАВ [10]. В отсутствии ПАВ величина параметра  $|\Pi|$  равна нулю, а при увеличении  $\Gamma_0$  возрастает до значений порядка  $|\Pi| \sim \gamma_0$ , достигаемых при наиболее высоких из указанных экспериментаторами значениях  $\Gamma_0$  (см. [11] и цитируемую там литературу). Регулировка значений  $\Gamma_0$ , фактически, сводится к изменению величины  $|\Pi|$ .

**4. Анализ решения.** Известно, что если на горизонтальную поверхность жидкости нанесена пленка поверхностно-активного вещества (ПАВ), то увеличивая равновесную концентрацию ПАВ, можно достичь значения упругости пленки, при котором эффект гашения этой пленкой капиллярно-гравитационных волн становится наиболее значительным. При этом максимумы концентрации ПАВ и положения волновых гребней чередуются строго определенным образом: на каждом пространственном периоде максимум концентрации ПАВ располагается в центре переднего (по направлению распространения) склона волны [9]. При анализе решения (3.1), (3.2) обнаружилось, что описанный эффект достаточно чувствителен к движению среды, располагающейся в области над покрытой пленкой ПАВ жидкостью.

Были рассмотрены зависимости действительной и мнимой частей комплексной частоты от упругости пленки ПАВ при различных значениях горизонтальной скорости верхней среды. При этом для комплексной частоты использовался корень дисперсионного уравнения (3.2), отвечающий капиллярно-гравитационным волнам. Исследовалось поведение декремента затухания капиллярно-гравитационных волн в зависимости от скорости верхней среды  $U_0$ . Скорость верхней среды варьировалась в диапазоне от нуля до значений, выше которых реализуется режим неустойчивости тангенциального разрыва поля скоростей [12]. Кроме того, были подробно проанализированы значения разности фаз между величинами  $\Gamma_1$  и  $\xi$  в зависимости от модуля упругости пленки ПАВ при различных значениях скорости  $U_0$ .

Выяснилось, что при значениях упругости пленки ПАВ, соответствующих максимальной эффективности гашения капиллярно-гравитационных волн, анализируемая разность фаз примерно равна четверти периода волнового движения. Это соответствует положению максимума поверхностной концентрации ПАВ на середине переднего склона волны, если волна бегущая, и на среднем уровне по обе стороны от пучности, если волна стоячая. Расчеты показали, что при увеличении горизонтальной скорости верхней жидкости (без выхода на запредельные в смысле начала неустойчивости тангенциального разрыва значения) эффект максимального гашения капиллярно-гравитационных волн заданной длины достигается при гораздо меньших значениях упругости пленки ПАВ, чем в случае отсутствия верхней среды. Значение декремента затухания оказывается в таких условиях несколько меньше, а максимум концентрации ПАВ, снова располагается на среднем уровне переднего склона волны, что в лабораторных исследованиях может служить индикатором достижения максимальной – для заданного типа ПАВ – эффективности в подавлении волнового движения.

**5. Заключение.** Как при наличии ветра, так и без него, по положению максимума концентрации ПАВ можно судить об эффективности использования пленки ПАВ, для демпфирования капиллярно-гравитационных волн. Если максимум концентрации ПАВ находится вблизи вершины волны, то эффект гашения можно усилить, увеличивая поверхностную концентрацию ПАВ. Если максимум концентрации находится вблизи среднего уровня волнового искажения, то максимальный эффект гашения для данного типа ПАВ уже достигнут и усилить его можно, только если заменить само ПАВ. Если же максимум концентрации ПАВ располагается ближе к впадине волны, то для усиления эффекта гашения волн необходимо уменьшить поверхностную концентрацию ПАВ. В присутствии ветра модуль упругости пленки ПАВ, обеспечивающий максимальное демпфирование капиллярно-гравитационных волн, оказывается в несколько раз меньше величины, необходимой для достижения такого же эффекта в отсутствии относительного движения контактирующих жидкостей. Эффективность гашения при этом тоже уменьшается, но не слишком сильно.

Работа выполнена в ИПМех РАН по государственному заданию (№ госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959. 669 с.
2. Lucassen-Reynders E.H., Lucassen J. // Adv. Colloid Interface Sci. 1969. V. 2. № 4. P. 347.
3. Ермаков С.А. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 2. С. 228
4. Авербух Е.Л., Куркин А.А., Степанянц Ю.А. // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 6. С. 109
5. Авербух Е.Л., Талипова Т.Г., Куркин А.А. // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 3. С. 148
6. Strickland S. L., Shearer M., Daniels K. E. // Journal of Fluid Mechanics. 2015. V. 777. P. 523
7. Mandal S., Ghosh U., Chakraborty S. // Journal of Fluid Mechanics. 2016. V. 803. P. 200
8. Elfring G. J., Leal L. G., Squires T. M. // Journal of Fluid Mechanics. 2016. V. 792. P. 712.
9. Белоножко Д.Ф., Очиров А.А. // Изв. РАН. Сер. физ. 2018. Т. 82. № 1. С. 47.
10. Ролдугин В. И. Физикохимия поверхности: Учебник-монография Долгопрудный: Издательский дом «Интелект». 2008. 568 с.
11. Zhou Z. H.,et al. // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. 2018. V. 538. P. 739
12. Фабер Т. Е. Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет., 2001. 560 с.

## Сведения об авторах

**Очиров Артем Александрович** – к.ф.-м.н., м.н.с. лаборатории механики жидкости, ИПМехРАН; доцент каф. инфокоммуникаций и радиофизики ЯрГУ им. П.Г. Демидова 8-920-119-30-80; 8-901-275-00-99

E-mail [otchirov@mail.ru](mailto:otchirov@mail.ru)

**Белоножко Дмитрий Федорович** – д.ф.-м.н., профессор каф. микроэлектроники и общей физики ЯрГУ им. П.Г. Демидова 8-906-636-47-55

E-mail [belonozhko@mail.ru](mailto:belonozhko@mail.ru)

# О волновом движении на поверхности вязкой стратифицированной жидкости

Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.

Рассмотрена задача о распространении гравитационных волн вдоль поверхности полубесконечной вязкой стратифицированной жидкости. Обнаружены волновые и связанные неволновые компоненты течения. Исследованы дисперсионные соотношения обнаруженных типов движения.

**1. Введение.** Ранее обсуждались вопросы построения решения задачи о распространении капиллярных волн и сопутствующих компонентов в вязкой жидкости [1]. Однако в реальных условиях и внутренняя энергия, и плотность, оказывающие влияние на развитие структуры капельных течений [2], распределены неравномерно. Неоднородность распределения плотности (стратификация) влияет на распространение волн [3]. Строгая методика построения точного решения линеаризованной задачи излучения внутренних волн в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости была развита в [4]. Однако ранее не обсуждалась задача о распространении гравитационных волн и сопутствующих тонких компонентов вдоль свободной поверхности вязкой непрерывно стратифицированной жидкости. Настоящее исследование посвящено этому вопросу.

**2. Математическая формулировка задачи.** Рассматривается плоская задача о течении полубесконечной неограниченной вязкой линейно стратифицированной жидкости. Ставится задача по определению волновых и неволновых компонент движения, возникающих в результате распространения гравитационных поверхностных волн. Задача рассматривается в декартовой системе координат  $Oxz$ , в которой ось  $Ox$  совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, а ось  $Oz$  направлена вертикально вверх против направления действия поля сил тяжести  $\mathbf{g}$ . Система уравнений движения и граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho(u'_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}) &= -\nabla p + \rho v \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad \rho'_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ (p - p_0)n_i - \sigma'_{ik}n_k \Big|_{z=\zeta} &= 0, \quad v - u\zeta'_x \Big|_{z=\zeta} = \zeta'_t \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $p$  – давление в жидкости,  $p_0$  – атмосферное давление;  $\mathbf{u} = ue_x + ve_z$  – вектор скорости;  $\sigma'_{ik} = \rho v(\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i)$  – тензор вязких напряжений в жидкости;  $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_z - e_x \zeta'_x) / \sqrt{1 + \zeta'^2_x}$  – единичная нормаль к поверхности  $z = \zeta(x, t)$ ,  $v$  – кинематическая вязкость жидкости, а  $\rho$  – плотность. Задание давления в жидкости в виде суммы атмосферного, гидростатического и волнового давлений

$$p = p_0 + g \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) d\xi + \tilde{p} \quad (2.2)$$

и введение функции тока  $\psi$  (которое возможно вследствие двумерности течения и несжимаемости жидкости), такой что  $u = \psi'_z$ ,  $v = -\psi'_x$  с использованием приближения Буссинеска в линейном приближении сводит систему (2.1) к

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - v \Delta \right) \Delta \psi'_t = g r'_z \psi''_{xx} \quad (2.3)$$

$$\psi'_x \Big|_{z=0} = -\zeta'_t, \quad \psi''_{zt} - v \Delta \psi'_z - 2v \psi'''_{xxz} + g \zeta'_x \Big|_{z=0} = 0, \quad \psi''_{zz} - \psi''_{xx} \Big|_{z=0} = 0$$

**3. Решение задачи.** В случае линейной стратификации с масштабом стратификации  $\Lambda$  для гармонических колебаний  $\psi(x, z, t) = \Psi(x, z) \exp(-i\omega t)$  для поверхностных волн ( $\omega > N = g/\Lambda$ ) решение (2.3) ищется в форме

$$\Psi = (\exp(k_z z) + \beta \exp(qz))(A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)) \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.3) получаем дисперсионные соотношения для  $k_z$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} ik^4 v \omega + k_z^2 (ik_z^2 v - \omega) \omega + k^2 (\omega^2 - N^2 - 2ik_z^2 v \omega) &= 0 \\ ik^4 v \omega + q^2 (iq^2 v - \omega) \omega + k^2 (\omega^2 - N^2 - 2iq^2 v \omega) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение которых дает выражения:

$$\begin{aligned} k_z^2 &= k^2 - \frac{i\omega}{2v} \left( 1 - \sqrt{1 + 4i \frac{vk^2 N^2}{\omega^3}} \right) \\ q^2 &= k^2 - \frac{i\omega}{2v} \left( 1 + \sqrt{1 + 4i \frac{vk^2 N^2}{\omega^3}} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для реальных жидкостей справедливо приближение  $v|k|^2/\omega \ll 1$ . В этом случае можно упростить выражения (3.3):

$$\begin{aligned} k_z^2 &\approx k^2 (1 - N_\omega^2) \\ q^2 &\approx k^2 (1 + N_\omega^2) - \frac{i\omega}{v} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$N_\omega = \frac{N}{\omega}$$

Динамические граничные условия в (2.3) приводят к соотношению, определяющему величину  $\beta$  и к дисперсионному уравнению относительно волнового числа  $k$ . С учетом (3.4) получаем:

$$\beta = -\frac{k_z^2 + k^2}{q^2 + k^2} \approx -\frac{k^2 (2 - N_\omega^2)}{k^2 (2 + N_\omega^2) - \frac{i\omega}{v}}, \quad (3.5)$$

$$i \left( \frac{k^2 g}{\omega} (1 + \beta) - \omega (k_z + \beta q) \right) - v (k_z (k_z^2 - k^2) + \beta q (q^2 - k^2)) = 0. \quad (3.6)$$

Анализ дисперсионного уравнения (3.6) показывает, что существуют регулярные и сингулярные решения. При отборе корней дисперсионных соотношений необходимо руководствоваться следующими правилами:  $\operatorname{Re}(k_z) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(q) > 0$ , обеспечивающими затухание движения на бесконечном удалении от свободной поверхности жидкости.

**4. Заключение.** Получены дисперсионные соотношения, описывающие регулярные (волновые) и сингулярные (неволновые) компоненты движения, имеющие смысл поверхностной гравитационной волны и присоединенного лигамента в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости. Полученное решение позволяет получить фазовые и групповые скорости отдельных составляющих, реализуемых при распространении волн вдоль свободной поверхности реальной жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00598).

## ЛИТЕРАТУРА

- Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Динамика гравитационно-капиллярных волн на поверхности неоднородно нагретой жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43. № 1. С. 109-116.
- Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 1(94). С. 73–92.
- Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир. 1981. 598 с.
- Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 6. С. 31 – 40.

## Сведения об авторах

**Чашечкин Юлий Дмитриевич** – д.ф.-м.н., профессор, зав. лабораторией механики жидкости, ИПМехРАН 8-495-434-01-92

E-mail [chakin@ipmnet.ru](mailto:chakin@ipmnet.ru)

**Очиров Артем Александрович** – к.ф.-м.н., м.н.с. лаборатории механики жидкости, ИПМехРАН; доцент каф. инфокоммуникаций и радиофизики ЯрГУ им. П.Г. Демидова 8-920-119-30-80; 8-901-275-00-99

E-mail [otchirov@mail.ru](mailto:otchirov@mail.ru)

## Система трещин под действием плоских упругих волн

**Попов В.Г.**

Решена задача определения двумерного дифракционного поля и напряженного состояния, возникающего при взаимодействии упругих волн с системой произвольно расположенных трещин. Трещины размещаются в неограниченной упругой среде, находящейся в состоянии плоской деформации. Метод решения базируется на использовании разрывных решений уравнений движения упругих сред и приведении исходной задачи к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Полученные системы решаются численно, методом механических квадратур.

**Введение.** Проблему определения дифракционного поля и напряженного состояния в окрестности одинокой трещины при взаимодействии с распространяющимися волнами на сегодняшний день можно считать полностью решенной. Ситуация значительно усложняется в случае, когда тело содержит систему произвольно расположенных трещин. Работы, содержащие решения подобных задач, появились сравнительно недавно и в первых из них рассмотрены случаи двух, чаще всего параллельных, трещин [1] – [7]. Значительное внимание также уделено задачам взаимодействия упругих волн с системами периодических и радиально расположенных трещин [8] – [11]. Решение динамических задач по определению полей перемещений и напряжений в тела с произвольными системами трещин методом граничных интегральных уравнений отражено в работах [12] – [14]. Следует отметить, что интегральные уравнения, к которым этим методом приводятся исходные задачи, имеют гиперсингулярные особенности, что усложняет их численное решение.

В данной работе предлагается решение задачи определения дифракционного поля и напряженного состояния при действии на систему трещин плоских продольных волн или волн поперечного сдвига. Особенностью предложенного метода решения является то, что для избегания гиперсингулярных интегралов предлагается решить систему интегро-дифференциальных уравнений относительно раскрытий трещин и их производных. Ранее этим методом решалась аналогичная задача в случае действия на систему дефектов волны продольного сдвига [15].

**1. Постановка задачи и сведение её к системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.** Рассмотрим изотропное неограниченное упругое тело, находящееся в условиях плоской деформации, в котором расположены  $N$  сквозных трещин. Эти трещины в плоскости  $Oxy$  (Рис.1) расположены на отрезках длины  $2d_k$  с центром в точках  $(a_k, b_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

С трещинами взаимодействуют продольные волны или волны поперечного сдвига, заданные потенциалами

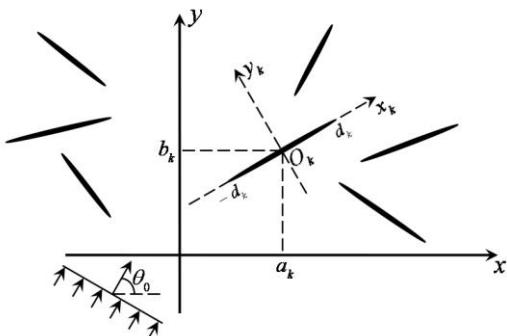


Рис.1

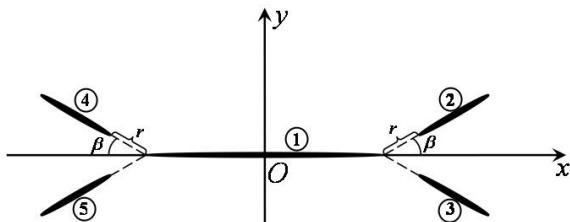


Рис.2

$$\varphi_0(x, y) = \frac{A}{\kappa_1} e_1(x, y), \psi_0(x, y) = \frac{B}{\kappa_2} e_2(x, y), e_j(x, y) = \exp(i\kappa_j(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)), \quad (1)$$

$j = 1, 2$ .

В формулах (1) обозначено:  $\kappa_j^2 = \frac{\omega^2}{c_j^2}$ ,  $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ ,  $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ ,

$\omega$  - частота колебаний,  $\lambda, \mu, \rho$  - коэффициенты Ламе и плотность тела,  $\theta_0$  - угол между направлением распространения волны и осью  $Ox$ . Зависимость от времени определяется множителем  $e^{-i\omega t}$ , который опускается.

Пусть  $u(x, y), v(x, y)$  - перемещения волнового поля, рассеянного трещинами. Тогда они удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения упругой среды при гармонических колебаниях в условиях плоской деформации:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta u = -\rho \omega^2 u, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta v = -\rho \omega^2 v, \quad (2)$$

где  $\Delta$  - двумерный оператор Лапласа.

Эти уравнения следует рассматривать с граничными условиями на трещинах, для формулировки которых с каждой из них связывается локальная система координат  $O_k x_k y_k$  (Рис.1).

Пусть  $u^k(x_k, y_k), v^k(x_k, y_k), \tau_{xy}^k(x_k, y_k), \sigma_y^k(x_k, y_k), \sigma_x^k(x_k, y_k)$  - перемещения и напряжения волнового поля в системе координат  $O_k x_k y_k$ , а  $u^{0k}(x_k, y_k), v^{0k}(x_k, y_k), \tau_{xy}^{0k}(x_k, y_k), \sigma_y^{0k}(x_k, y_k)$  - перемещения и напряжения, вызванные падающей волной. Тогда при свободных от напряжений поверхностях трещин должны

$$\sigma_y^k(x_k, 0) = -\sigma_y^{0k}(x_k, 0), \quad \tau_{yx}^k(x_k, 0) = -\tau_{xy}^{0k}(x_k, 0), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Также на поверхности каждой трещины являются разрывными перемещения  $u^k, v^k$ , скачки которых обозначим:

$$v^k(x_k, +0) - v^k(x_k, -0) = \chi_{3k}(x_k), \quad u^k(x_k, +0) - u^k(x_k, -0) = \chi_{4k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k. \quad (4)$$

При сформулированных условиях ставится задача определения перемещений и напряжений дифракционного поля в теле. С этой целью для каждой трещины в локальной системе координат  $O_l x_l y_l$  строится разрывное решение уравнений (2) со скачками (4) по формулам из [16]:

$$\begin{aligned} v^{dl}(x_l, y_l) &= \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) G_{33}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{4l}(\eta) G_{34}(\eta - x_l, y_l) d\eta, \\ u^{dl}(x_l, y_l) &= \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) G_{43}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{4l}(\eta) G_{44}(\eta - x_l, y_l) d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$G_{33} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y_l} \left[ \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_1 - 2 \frac{\partial^2 r_2}{\partial x_l^2} \right], \quad G_{34} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y_l} \left[ 2 \left( \kappa_1^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_1 - \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_2 \right],$$

$$G_{43} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y_l} \left[ \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_1 - 2 \left( \kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_2 \right], \quad G_{44} = \frac{1}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y_l} \left[ -2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x_l^2} + \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \right) r_2 \right],$$

$$r_j(\eta - x_l, y_l) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\beta^2 - x_j^2} |y_l|}}{2\sqrt{\beta^2 - x_j^2}} e^{i\beta(\eta - x_l)} d\beta = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( x_j \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right).$$

Соответствующие формулы для напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{dl}(x_l, y_l) &= \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{3l}(\eta) E_{03}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu (\kappa_2^2 - 2x_l^2) \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) r_1(\eta - x_l, y_l) d\eta + \\ &+ \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{4l}(\eta) E_{04}(\eta - x_l, y_l) d\eta, \\ \sigma_{yy}^{dl}(x_l, y_l) &= \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{3l}(\eta) E_{13}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{4l}(\eta) E_{14}(\eta - x_l, y_l) d\eta - \\ &- \mu \kappa_2^2 \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) r_1(\eta - x_l, y_l) d\eta. \\ \tau_{yx}^{dl}(x_l, y_l) &= \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{3l}(\eta) E_{23}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \int_{-d_l}^{d_l} \chi'_{4l}(\eta - x_l, y_l) d\eta + \mu \kappa_2^2 \int_{-d_l}^{d_l} \chi_{3l}(\eta) r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) для напряжений, с целью снижения порядка сингулярности интегралов так же, как и в [16], выполнено интегрирование по частям с учетом  $\chi_{3\ell}(\pm d_\ell) = \chi_{4\ell}(\pm d_\ell) = 0$ . Пусть  $u^{gl}(x, y), v^{gl}(x, y)$  - перемещения, полученные из (5) после перехода к глобальной системе координат  $Oxy$ . Тогда перемещения рассеянного волнового поля можно представить в виде

$$u(x, y) = \sum_{l=1}^N u^{gl}(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{l=1}^N v^{gl}(x, y). \quad (7)$$

Формулы (7) позволяют находить перемещения рассеянного волнового поля после определения неизвестных скачков (4). После реализации граничных условий (3) относительно них получена система  $2N$  сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Эта система после выделения сингулярной составляющей и ряда преобразований имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{3k}(\tau) \left[ -\frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\xi} + R_B^k(\tau-\xi) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3k}(\tau) \left[ \kappa_0^2 \gamma_k^2 \ln |\tau-\xi| + V_{13}^k(\tau-\xi) \right] d\tau + \\ &+ \sum_{l=1}^N \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{3l}(\tau) F_{kl}^{13}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{4k}(\tau) F_{kl}^{14}(\tau, \zeta) d\tau \right] + \\ &+ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3l}(\tau) U_{kl}^{13}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4k}(\tau) U_{kl}^{13}(\tau, \zeta) d\tau \right] = f_k(\zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{3k}(\tau) \left[ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + R_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4k}(\tau) \left[ \kappa_0^2 \gamma_k^2 \ln |\tau-\zeta| + V_{24}^k(\tau-\zeta) \right] d\tau + \\
& + \sum_{l=1}^N \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{3l}(\tau) F_{kl}^{23}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{4k}(\tau) F_{kl}^{24}(\tau, \zeta) d\tau \right] + \\
& + \sum_{l=1}^N \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{3l}(\tau) U_{kl}^{23}(\tau, \zeta) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{4k}(\tau) U_{kl}^{24}(\tau, \zeta) d\tau \right] = f_{2k}(\zeta), \quad k=1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{8}$$

В этой системе приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
\varphi_{jk}(\tau) &= \frac{\chi_{jk}(d_k \tau)}{d_k}, \quad j=3, 4, \quad \gamma_k = \frac{d_k}{d}, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad d = \max(d_1, d_2, \dots, d_N), \quad \kappa_0 = \kappa_2 d, \\
\xi^2 &= \frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad \nu - \text{коэффициент Пуассона упругого тела}.
\end{aligned}$$

Функции  $R_{13}^k, V_{13}^k, R_{24}^k, V_{24}^k, F_{kl}^{1j}, U_{kl}^{1j}, j=3, 4$  непрерывны при  $-1 \leq \zeta, \tau \leq 1$ , а функции  $f_{1k}(\zeta), f_{2k}(\zeta)$  определяются потенциалами падающей волны (1).

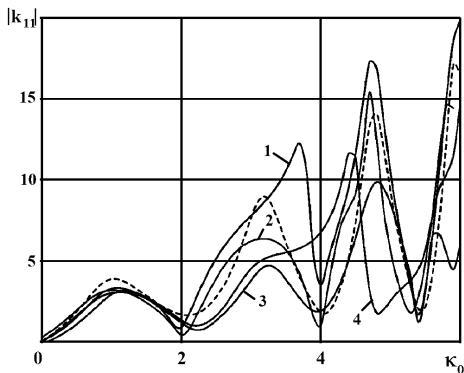


Рис.3

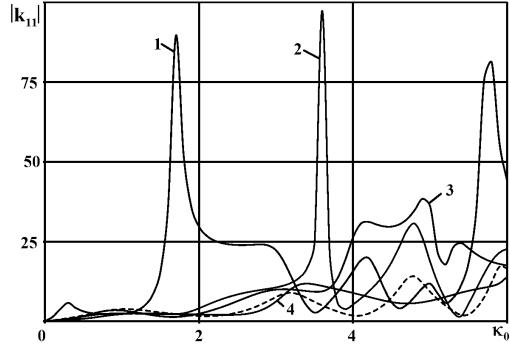


Рис.4

Для приближенного решения этой системы принят метод, детально изложенный в [16]. В результате получены простые приближения формулы для расчетов коэффициентов интенсивности напряжений.

**Результаты численных исследований.** В качестве примера рассмотрена система из 5 трещин, расположенных как показано на Рис.2. При расчетах приняты следующие соотношения между геометрическими размерами:  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 1/3, r_0 = r/d = 0.1, 0 < \beta < 180^\circ, \theta_0 = 90^\circ$ . Графики на Рис.3, Рис. 4 показывают зависимость безразмерных КИН нормальных напряжений первой трещины от безразмерного волнового числа  $\kappa_0$  при различных значениях угла  $\beta$ . Кривые 1-4 на Рис.3 соответствуют  $\beta = 45^\circ, \beta = 60^\circ, \beta = 90^\circ, \beta = 120^\circ$ , а на Рис.4  $\beta = 5^\circ, \beta = 30^\circ, \beta = 150^\circ, \beta = 175^\circ$ . Пунктиром изображен график, отвечающий одной трещине. Численный анализ показывает, что на значения КИН сильно влияет угол  $\beta$ , образованный трещинами. Взаимное влияние трещин проявляется в том, что наличие рядом трещин может привести к существенному (в несколько раз) увеличению значений КИН в сравнении с его значениями для отдельной трещины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Jain D.L., Kanval P.P. Diffraction of elastic waves by two coplanar Griffith cracks in an infinity elastic medium. Int. J. Solid and Struct. – 1972 – V. 8. № 7. P. 961 – 975.
2. Srivastava K.N., Palaiya R.M., Karaulin D.S.. Instruction of shear waves with two coplanar Griffiths crack situated in an infinity long elastic strip 11 Int. J. Fract., 1983 – V. 21 - № 1. P. 39-48.
3. Назаренко А.М., Фильшинский А.Г. Взаимодействие волн напряжений с периодической системой трещин продольного сдвига в полупространстве. Акустический журнал, 1983, - т. 29 - №3 – с. 183-186.
4. Бородачев Н.М., Кольцов В.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений у концов двух коллинеарных трещин поперечного сдвига при установившихся колебаниях. Прикладная механика – 1985.т. 21., вып.1, с. 102-108.
5. Бородачев Н.М., Кольцов В.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений у концов двух коллинеарных трещин нормального отрыва при установившихся колебаниях. // Изв АН СССР МГТ - 1984 . №3. с.119-126.
6. Фильшинский М.Л. Взаимодействие волн механических смещений с туннельными трещинами продольного сдвига в пьезокерамическом полупространстве. Изв. АН Арм. ССР. 1988. 35. с. 50-55.
7. Zhang C. Dynamic stress intensity factor of collinear antiplan cracks /J. Tonyji, Unice. 1990. V.118, №4, P. 445-451.
8. Попов В.Г. Взаимодействие волн продольного сдвига с радиально расположенными трещинами // Прикладная механика. – Т.34 - №2. 1998. с. 60-61.
9. Popov V.G.. Interaction of plane elastic waves with system of radial defects // Rossiyskaya Akademiya Nauk. Izvestiya. Mechanika Tverdogo Tela. 1999. №4. P. 118-129.
10. Scarpeta E.. In plane problem to wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks // Act. Mechanica, 2002, Vol. 154. №4. P.179-187.
11. Tovake G., Symbatyan M.F.. Periodic system of collinear cracks in an elastic porous medium // Mechanic of solids. 2009. – V. 4. №43 P. 400-407.
12. Slodek J., Sludek V. A boundary integral equation method for dynamic crack problems. Engineering Fracture Mechanics Volume 27. Issue 3. 1987. P. 269-277.
13. Gray L.I., Chang S.I. Hyper Singular integral formulation of elastic wave scattering. Engenering Analysis with Boundary Elements. 1992. V. 43 №2 P.337-343.
14. Yin-Bang Wang, Yu-Zhon Sun. A new boundary integral equation method for cracked 2-D anisotropic bodies. Engineering Fracture Mechanics Volume 72. Issue 13. 2005. P. 2128-2143.
15. Попов В.Г. Визначення дифракційного поля при взаємодії хвилі повз涓ного зсуву з системою дефектів. Вісник Дніпропетровського університету. 2013. Вип 17. том 2. с. 123-134.
16. Попов В.Г., Улановский А.Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // Изв. РАН МТТ – 1995 - №4. с. 99-109.

### Сведения об авторах:

**Vsevolod Popov** – Doctor of Science, Professor, National University “Odessa Maritime Academy”, Educational and Scientific Institute of Automation and Electromechanics +380674806557, +380487332312

E-mail [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)

**Определяющее уравнение смешанной задачи для упругой составной полосы, содержащей внутреннюю трещину, выходящую на линию раздела материалов**

Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С.

Рассматривается напряженное состояние кусочно-однородной упругой полосы, составленной из двух разнородных полос, в одной из которых содержится трещина конечной длины, перпендикулярно выходящая на линию раздела материалов. Предполагается, что составная полоса со стороны полосы, в которой имеется трещина, жестко защемлена, а другая сторона свободна от напряжений. Полоса деформируется под воздействием нормальной нагрузки, симметрично приложенной к берегам трещины. Выведено определяющее сингулярное интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши (неподвижная особенность).

**Постановка задачи.** Пусть упругая кусочно-однородная полоса, состоящая из двух разнородных бесконечных полос ширины  $h_1$  и  $h_2$ , содержит трещину конечной длины  $a$ , которая полностью находится во второй полосе и под прямым углом выходит на линию раздела материалов. Предполагается, что составная полоса по одной стороне жестко защемлена, другая ее сторона свободна от напряжений. Внешняя нагрузка в виде нормального давления  $p$  симметрично приложена к берегам трещины (рис. 1).

В прямоугольной координатной системе, ось абсцисс которой направлена вдоль линии соединения материалов, а ось ординат – по линии трещины, для составной полосы будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_2(x, h_2) &= 0, & v_2(x, h_2) &= 0, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, -h_1) &= 0, & \sigma_y^{(1)}(x, -h_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

На линии соединения полос имеем условия полного контакта:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0), & v_1(x, 0) &= v_2(x, 0), \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), & \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0), \end{aligned} \quad (2)$$

а на берегах трещины заданы напряжения:

$$\tau_{xy}^{(2)}(0, y) = 0; \quad \sigma_x^{(2)}(0, y) = -p \quad (0 < y < a) \quad (3)$$

В силу симметрии в постановке задачи будем рассматривать лишь правую половину составной полосы  $x \geq 0$ . Далее, индексом «1» будут отмечаться величины, относящиеся к нижней полосе ( $-h_1 \leq y \leq 0$ ), а индексом «2» – к полосе, содержащей трещину, ( $0 \leq y \leq h_2$ ).

**Вывод определяющего уравнения задачи.** Для вывода определяющего уравнения поставленной задачи воспользуемся бигармонической функцией Эри, которую в соответствующих областях представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \int_0^\infty (A_1 \operatorname{sh} \lambda y + B_1 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y (C_1 \operatorname{sh} \lambda y + D_1 \operatorname{ch} \lambda y)) \cos x \lambda d\lambda; \\ \Phi_2(x, y) &= \int_0^\infty (A_2 \operatorname{sh} \lambda y + B_2 \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y (C_2 \operatorname{sh} \lambda y + D_2 \operatorname{ch} \lambda y)) \cos x \lambda d\lambda + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + x b_k) e^{-\lambda_k x} \sin \lambda_k y; \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{h_2} \end{aligned} \quad (4)$$

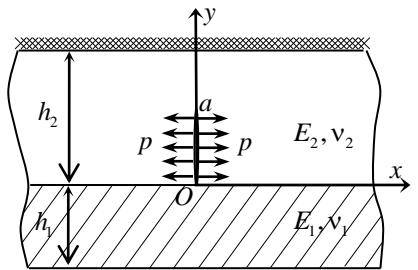


Рис. 1

Используя формулы, выражающие компоненты напряжений и перемещений через функцию напряжений [1], для компонентов напряжений и перемещений, необходимых для удовлетворения граничным условиям (1) на сторонах составной полосы, будем иметь:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_y^{(j)}(x, y) \\ \tau_{xy}^{(j)}(x, y) \\ u_j(x, y) \\ v_j(x, y) \end{Bmatrix} = \int_0^{\infty} \mathbf{T}(x, \lambda) \mathbf{S}_j(\lambda, y) \begin{Bmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{Bmatrix} d\lambda + \mathbf{V}_j(x, y, \lambda_k) \quad (j=1, 2) \quad (5)$$

где

$$\mathbf{T}_j(x, \lambda) = \begin{Bmatrix} \cos \lambda x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \lambda x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \lambda x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \lambda x \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_j(\lambda, y) = \begin{Bmatrix} -\lambda^2 \operatorname{sh} y\lambda & -\lambda^2 \operatorname{ch} y\lambda & -\lambda^3 y \operatorname{sh} y\lambda & -\lambda^3 y \operatorname{ch} y\lambda \\ \lambda^2 \operatorname{ch} y\lambda & \lambda^2 \operatorname{sh} y\lambda & \lambda^2 (y\lambda \operatorname{ch} y\lambda + \operatorname{sh} y\lambda) & \lambda^2 (\operatorname{ch} y\lambda + y\lambda \operatorname{sh} y\lambda) \\ \frac{\lambda \operatorname{sh} y\lambda}{2\mu_j} & \frac{\lambda \operatorname{ch} y\lambda}{2\mu_j} & \frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y \operatorname{sh} y\lambda + (\theta_j + 1) \operatorname{ch} y\lambda) & \frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y \operatorname{ch} y\lambda + (\theta_j + 1) \operatorname{sh} y\lambda) \\ -\frac{\lambda \operatorname{ch} y\lambda}{2\mu_j} & -\frac{\lambda \operatorname{sh} y\lambda}{2\mu_j} & -\frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y \operatorname{ch} y\lambda - \theta_j \operatorname{sh} y\lambda) & -\frac{\lambda}{2\mu_j} (\lambda y \operatorname{sh} y\lambda - \theta_j \operatorname{ch} y\lambda) \end{Bmatrix}; \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_1(x, y, \lambda_k) = 0; \quad \mathbf{V}_2(x, y, \lambda_k) = \begin{Bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x\lambda_k} \lambda_k [a_k \lambda_k + b_k (-2 + x\lambda_k)] \sin \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x\lambda_k} \lambda_k [a_k \lambda_k + b_k (-1 + x\lambda_k)] \cos \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x\lambda_k}}{2\mu_2} [a_k \lambda_k + b_k (\theta_2 + x\lambda_k)] \sin \lambda_k y \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-x\lambda_k}}{2\mu_2} [-a_k \lambda_k + b_k (1 + \theta_2 - x\lambda_k)] \cos \lambda_k y \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

$\mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}$  - модуль сдвига,  $E_j$  - модуль Юнга,  $\nu_j$  - коэффициент Пуассона,  $\theta_j = 1 - 2\nu_j$ .

Из симметричности постановки задачи первое условие в (3) можно распространить на всю толщину полосы и, тогда, нетрудно будет найти, что  $b_k = \lambda_k a_k$ , вследствие чего вектор  $\mathbf{V}_2(x, y, \lambda_k)$  несколько упростится.

На отрезке  $a < y < h_2$  оси ординат имеем также второе условие симметрии  $u_2(0, y) = 0$ . Учитывая, что на трещине  $0 < y < a$  горизонтальная компонента перемещения претерпевает скачок, на интервале  $0 < y < h_2$ , занимающем всю толщину верхней полосы, можем выписать следующие условия

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{x=0} = 0 \text{ при } a < y < h_2 \text{ и } \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{x=0} = w(y) \text{ при } 0 < y < a$$

где  $w(y)$  - искомая функция, представляющая собой производную перемещения берега трещины. Пользуясь представлениями (5), найдем

$$a_k = \frac{4\mu_2}{\lambda_k^2 h_2 (1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \cos \lambda_k \zeta d\zeta \quad (8)$$

Перейдем к удовлетворению граничных условий (1) и (2). Представляя компоненты левой части и второго слагаемого правой части равенства (5) в виде соответствующих косинус или синус интегралов Фурье, равенство (5) запишем в виде:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_y^{(j)}(\lambda, y) \\ \bar{\tau}_{xy}^{(j)}(\lambda, y) \\ \bar{u}_j(\lambda, y) \\ \bar{v}_j(\lambda, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_j(\lambda, y) \begin{Bmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{Bmatrix} + (j-1) \begin{Bmatrix} \delta_\sigma(\lambda, y) \\ \delta_\tau(\lambda, y) \\ \delta_u(\lambda, y) \\ \delta_v(\lambda, y) \end{Bmatrix} \quad (j=1,2) \quad (9)$$

где компоненты последнего столбца имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_\sigma(\lambda, y) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{2\lambda^2 \lambda_k}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda_k y; \quad \delta_\tau(\lambda, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{2\lambda \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda_k y; \\ \delta_u(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{\lambda^3 (1+\theta_2) + \lambda (3+\theta_2) \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \sin \lambda_k y \\ \delta_v(\lambda, y) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_k \frac{\lambda^2 (1+\theta_2) - (1-\theta_2) \lambda_k^2}{(\lambda_k^2 + \lambda^2)^2} \cos \lambda_k y \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя в (9)  $y=0$  и учитывая условия (2), восемь коэффициентов  $A_j, B_j, C_j, D_j$  ( $j=1,2$ ) выразим через значения  $\{\sigma_0, \tau_0, u_0, v_0\}$  трансформантов Фурье компонентов напряжений и перемещений на линии  $y=0$  и величин из (10), содержащих в себе основную искомую функцию  $w(\zeta)$ :

$$\begin{Bmatrix} A_j(\lambda) \\ B_j(\lambda) \\ C_j(\lambda) \\ D_j(\lambda) \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_j^{-1}(\lambda, 0) \begin{Bmatrix} \sigma_0 \\ \tau_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} - (j-1) \mathbf{S}_j^{-1}(\lambda, 0) \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta_\tau(\lambda, 0) \\ 0 \\ \delta_v(\lambda, 0) \end{Bmatrix}$$

Далее, подставляя полученные представления в (5) и удовлетворяя граничным условиям (1), выразим компоненты  $\{\sigma_0, \tau_0, u_0, v_0\}$ , а следовательно и все компоненты напряжений и перемещений, через функции  $\delta_\tau(\lambda, 0)$ ,  $\delta_v(\lambda, 0)$  и  $\delta_v(\lambda, h_2)$ , которые, с учетом (8), имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_\tau(\lambda, 0) &= \frac{4\mu_2}{\pi(1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left( \frac{\operatorname{ch} \lambda(h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} - \lambda \zeta \frac{\operatorname{sh} \lambda(h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} - \lambda h_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \zeta}{\operatorname{sh}^2 \lambda h_2} \right) d\zeta \\ \delta_v(\lambda, 0) &= \frac{4\mu_2}{\pi(1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left[ \zeta \frac{\operatorname{sh} \lambda(h_2 - \zeta)}{\operatorname{sh} \lambda h_2} + h_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda \zeta}{\operatorname{sh}^2 \lambda h_2} + \theta_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda(h_2 - \zeta)}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2} - \frac{1+\theta_2}{\lambda^2 h_2} \right] d\zeta \\ \delta_v(\lambda, h_2) &= \frac{4\mu_2}{\pi(1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left[ h_2 \frac{\operatorname{ch} \lambda(h_2 + \zeta)}{\operatorname{sh}^2 \lambda h_2} - (\zeta + h_2) \frac{\operatorname{sh} \lambda \zeta}{\operatorname{sh} \lambda h_2} + \frac{\theta_2 \operatorname{ch} \lambda \zeta}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2} - \frac{1+\theta_2}{\lambda^2 h_2} \right] d\zeta \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные представления не приводятся ввиду громоздкости, обусловленной, главным образом, многопараметровостью поставленной задачи. На примере компоненты  $\sigma_0$  представим общую структуру полученных выражений.

$$\sigma_0 = \frac{\cos x \xi}{\Delta(\lambda) \operatorname{ch} \lambda h_2} [G_1(\lambda) \delta_v(\lambda, h_2) + G_2(\lambda) \delta_v(\lambda, 0) + G_3(\lambda) \delta_v(\lambda, 0)]$$

Здесь

$$G_1(\lambda) = -\lambda(1+\theta_2) \left\{ \lambda h_1 \operatorname{sch}^2 \lambda h_1 \left[ -\mu(1+\theta_1)(1+\theta_2 + \lambda h_2 \operatorname{th} \lambda h_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda h_1 (\lambda h_2 (\mu-1) - (1+(2-\mu)\theta_2) \operatorname{th} \lambda h_2) \right] + \operatorname{th} \lambda h_1 [\mu(1+\theta_1)(1+\theta_2) + \right. \\ \left. + (1+2\theta_2 + \theta_1 \theta_2 \mu) \operatorname{th} \lambda h_1 \operatorname{th} \lambda h_2 + \lambda h_2 ((1+\theta_1 \mu) \operatorname{th} \lambda h_1 + (1+\theta_1) \mu \operatorname{th} \lambda h_2) \right] \right\},$$

$$G_2(\lambda) \text{ и } G_3(\lambda) \text{ имеют похожий вид, } \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$\Delta(\lambda) = \mu^2 \left( 1 + 2\theta_2 + (\lambda^2 h_2^2 + \theta_2^2) \operatorname{sch}^2 \lambda h_2 \right) \left( 1 + 2\theta_1 + (\lambda^2 h_1^2 + \theta_1^2) \operatorname{sch}^2 \lambda h_1 \right) + \\ (-\lambda^2 h_2^2 \operatorname{sch}^2 \lambda h_2 + (1+2\theta_2)^2 \operatorname{th}^2 \lambda h_2) \left( 1 - (1+\lambda^2 h_1^2) \operatorname{sch}^2 \lambda h_1 \right) + \\ 2\mu(1+\theta_1)(1+\theta_2) (\lambda^2 h_1 h_2 \operatorname{sch}^2 \lambda h_1 \operatorname{sch}^2 \lambda h_2 + (1+2\theta_2) \operatorname{th} \lambda h_1 \operatorname{th} \lambda h_2) + \\ 2\mu(-\lambda^2 h_2^2 \operatorname{sch}^2 \lambda h_2 + \theta_2(1+2\theta_2) \operatorname{th}^2 \lambda h_2) ((\lambda^2 h_1^2 - \theta_1) \operatorname{sch}^2 \lambda h_1 + \theta_1).$$

Очевидно, что аналитические представления для интегралов Фурье (9) будут достаточно громоздкими, но они легко реализуются при численных расчетах.

Из граничных условий (1)-(3) неудовлетворенным осталось только второе из условий (3). Выпавшее выражение напряжения  $\sigma_x^{(2)}(x, y)$  посредством функции Эри и просчитав сумму, образуемую после подстановки представления (8) и перестановки порядка интегрирования и суммирования, для компоненты  $\sigma_x^{(2)}$  на линии  $x=0$  будем иметь

$$\sigma_x^{(2)}(0, y) = \int_0^\infty \lambda^2 \left[ (B_2 + \lambda y D_2 + 2C_2) \operatorname{ch} \lambda y + (A_2 + 2D_2 + \lambda y C_2) \operatorname{sh} \lambda y \right] d\lambda - \\ - \frac{\mu_2}{h_2(1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) d\zeta \quad (12)$$

Подставляя в (12) полученные выше представления коэффициентов  $A_2, B_2, C_2$  и  $D_2$  через интегралы (11) и меняя порядок интегрирования, из второго из условий (3) получим определяющее уравнение поставленной задачи:

$$\frac{\mu_2}{\pi(1+\theta_2)} \int_0^a w(\zeta) \left[ Q(y, \zeta) - \frac{\pi}{2h_2} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) \right] d\zeta = -p \quad (13)$$

где функция  $Q(y, \zeta)$  является интегралом Фурье по лучу  $\lambda \in (0, \infty)$ . Детальное исследование поведения подынтегральной функции на бесконечности позволило выделить сингулярную часть ядра  $Q(y, \zeta)$ :

$$Q(y, \zeta) = \frac{c_1}{y+\zeta} + \frac{c_2 y}{(y+\zeta)^2} + \frac{c_3 y^2}{(y+\zeta)^3} + Q^*(y, \zeta) \quad (14)$$

Здесь  $Q^*(y, \zeta)$  – регулярная часть ядра, принимающая конечное значение при  $y, \zeta \rightarrow 0$ ,

$$c_1 = \frac{(3+3\mu\kappa_1 - \mu - \kappa_2)(1+\kappa_2)}{2(\mu+\kappa_2)(1+\mu\kappa_1)}, \quad c_2 = 6 \frac{\mu-1}{\mu+\kappa_2}, \quad c_3 = 4 \frac{1-\mu}{\mu+\kappa_2}, \quad \kappa_i = 3 - 4v_i.$$

Отметим, что указанное исследование проводилось при предположении, что такие параметры, как толщины полос и отношение модулей сдвига материалов полос, не достигают

критических значений:  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = a$  и  $\mu = 0, \infty$ , поскольку для этих значений ядро  $Q^*(y, \zeta)$  перестает быть регулярным и добавляет или убывает особые члены в (14).

Учитывая поведение гиперболического котангенса около нуля, гиперболические слагаемые в (13) представим в виде:

$$\frac{\pi}{2h_2} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) = \frac{1}{y-\zeta} + \frac{1}{y+\zeta} + Q_0(y, \zeta)$$

где регулярная функция  $Q_0(y, \zeta)$  определяется формулой:

$$Q_0(y, \zeta) = \frac{\pi}{2h_2} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi(y-\zeta)}{2h_2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(y+\zeta)}{2h_2} \right) - \frac{2y}{y^2 - \zeta^2}$$

В итоге, определяющее уравнение (13) можно переписать в виде сингулярного интегрального уравнения с обобщенным ядром Коши:

$$\int_0^a w(\zeta) \left[ \frac{1}{\zeta-y} + \frac{c_0}{y+\zeta} + \frac{c_2 y}{(y+\zeta)^2} + \frac{c_3 y^2}{(y+\zeta)^3} + R(y, \zeta) \right] d\zeta = -\frac{\pi(1+\theta_2)}{\mu_2} p \quad (15)$$

где

$$R(y, \zeta) = Q^*(y, \zeta) - Q_0(y, \zeta), \quad c_0 = c_1 - 1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3(\mu-1)}{\mu+\kappa_2} - \frac{1+\kappa_2}{1+\mu\kappa_1} \right]$$

Вместе с уравнением (15) необходимо также удовлетворить условию смыкания концов трещины

$$\int_0^a w(\zeta) d\zeta = 0 \quad (16)$$

Отметим, что сингулярная часть уравнения (15) полностью совпадает с ядром определяющего уравнения для составной плоскости ( $h_1 = h_2 = \infty$ ), которое получено в работе [2].

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения с обобщенным ядром Коши (неподвижной особенностью) (15) при условии (16), которое будет решено методом механических квадратур [3,4].

## ЛИТЕРАТУРА

- Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. –М.: Наука, 1966. 708с.
- Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. (1973) Numerical solution of singular integral equations. In: Sih G.C. (eds) Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of fracture, vol 1. Springer, Dordrecht
- Саакян А.В., Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Известия НАН Армении, Механика, 2000, т.53, №3, сс.12-19.
- A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070

### Сведения об авторах:

**Саакян Аветик Вараздатович** – д.ф.м.н., в.н.с., e-mail: [avetik.sahakyan@sci.am](mailto:avetik.sahakyan@sci.am)

**Саркисян Вардан Гарегинович** - к.т.н., с.н.с., e-mail: [yardsargsyan43@gmail.com](mailto:yardsargsyan43@gmail.com)

**Хачикян Альберт Серобович** – к.ф.м.н., в.н.с., e-mail: [khachikyanalbert39@gmail.com](mailto:khachikyanalbert39@gmail.com)

Институт механики НАН РА

# Влияние винглетов на подъёмную силу тонкой пластиинки: натурный и численный эксперимент

Самсонов И.К., Казаков Е.А.

В статье рассматривается влияние винглетов на подъёмную силу тонкой пластиинки. В статье представлены данные, полученные в результате натурного эксперимента по обдуву тонких пластиинок различных размеров как с наличием винглетов на концах, так и без них. Также приведены данные, полученные в результате расчётов обдува пластиинок идентичной конфигурации в среде ANSYS CFX. Проведено сравнение полученных результатов и сделаны выводы о степени влияния винглетов на подъёмную силу тонкой пластиинки в зависимости от размеров пластиинки.

## 1. Введение.

Положительное влияние винглетов на подъёмную силу летательных аппаратов уже давно известно. Но с теоретической точки зрения данный вопрос освещён, слабо и множество вопросов всё ещё находятся на стадии изучения [1, 2, 3]. Поэтому авторами было принято решение дать теоретическое описание влияния винглетов на подъёмную силу тонкой пластиинки на основе теории тонкого крыла. Принимается, что тонкое крыло имеет на своих концах ещё одно тонкое крыло, но гораздо меньших размеров и расположено под углом  $90^\circ$  к основному крылу (Рис. 1) [1].

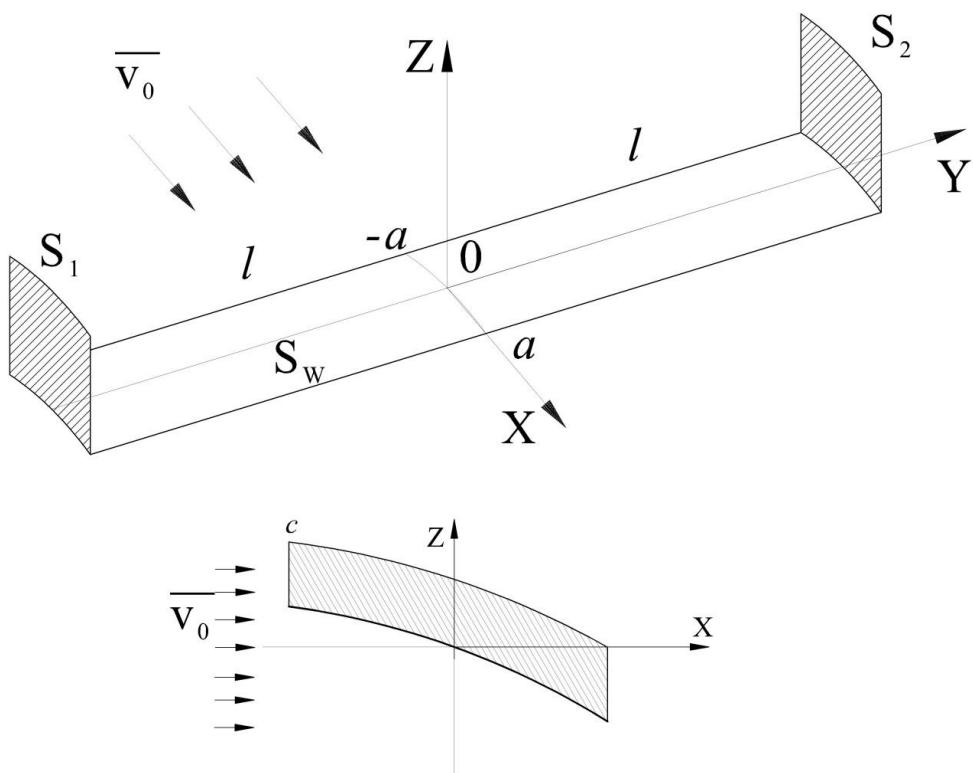


Рис. 1. Тонкое крыло с винглетами.

Для последующего сравнения с теоретическими данными, было решено провести натурный эксперимент по обдуву в аэродинамической трубе пластиинок без винглетов и пластиинок с винглетами различных размеров. Образцы без винглетов представляют собой металлические пластиинки толщиной 2 мм и габаритами 200x50, 200x100 и 250x150 мм. При этом пластиинки с винглетами имеют габариты 160x50, 200x50 и 200x100 мм и имеют по краям два вертикально расположенных винглета высотой 20 мм у каждого образца (Рис. 2).

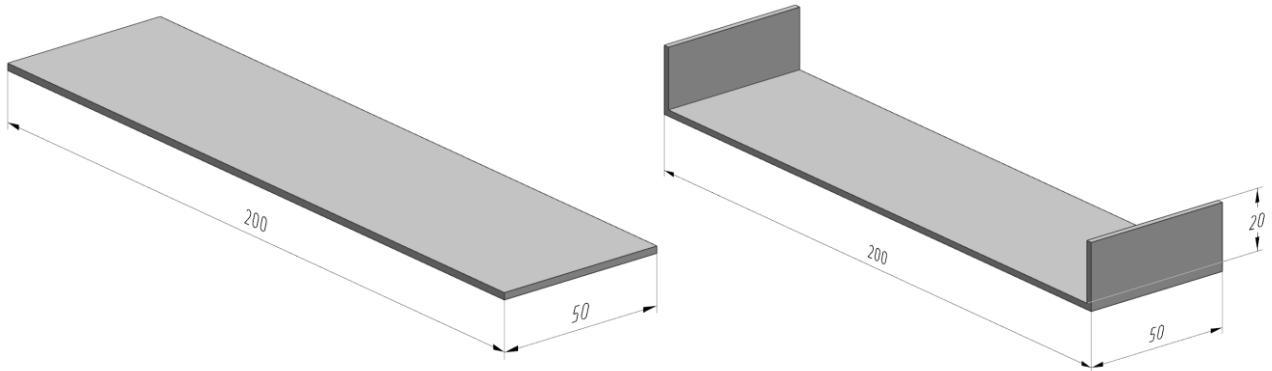


Рис. 2. Модели пластинок габаритами 200x50 мм без винглетов и с винглетами.

## 2. Порядок проведения эксперимента.

Обдув происходил в аэродинамической трубе (Рис. 3) со скоростью набегающего потока 10 м/с. Пластиинки закреплялись на специальной штанге, изменяющей угол атаки, и кронштейне, обеспечивающим жёсткость. Подъёмная сила «Рпод.» замерялась при помощи аэродинамических весов, скорость набегающего потока – при помощи трубок Пито-Прандтля. Угол атаки « $\alpha$ » изменялся от  $4^\circ$  до  $18^\circ$  с шагом  $2^\circ$ . Полученные данные выводились на ноутбук через специализированное программное обеспечение.



Рис. 3. Пластиинка с винглетами в камере аэродинамической трубы.

## 3. Порядок проведения расчёта в среде ANSYS CFX.

При вычислениях использовался стандартный для ANSYS CFX метод конечных объёмов на сетке метода конечных элементов. Исследуемый объём моделировал рабочую зону аэротрубы с помещённой в неё бесконечно тонкой пластиинкой в отсутствие технологических крепёжных элементов и представлял собой параллелепипед 300x300x600 мм. Объём разбивался на тетраэдры, характерный размер элемента – 10 мм, вблизи пластиинки сетка была измельчена до характерного размера элемента 0,5 мм, общее количество тетраэдров порядка 3,7 миллиона в каждом численном эксперименте серии. Кроме того, был применён подход разбивки на

субдомены (Рис. 4), один из которых представляет объём воздуха, заключённый между поверхностью пластиинки и соответствующей ей проекцией на горизонтальной грани рабочей зоны, а второй – весь остальной объём. Такой подход позволяет не только добиться моделирования пластиинки с нулевой толщиной, избегая появления дефектных элементов, но и рассматривать подъёмную силу, созданную ею верхней и нижней гранью, по раздельности.

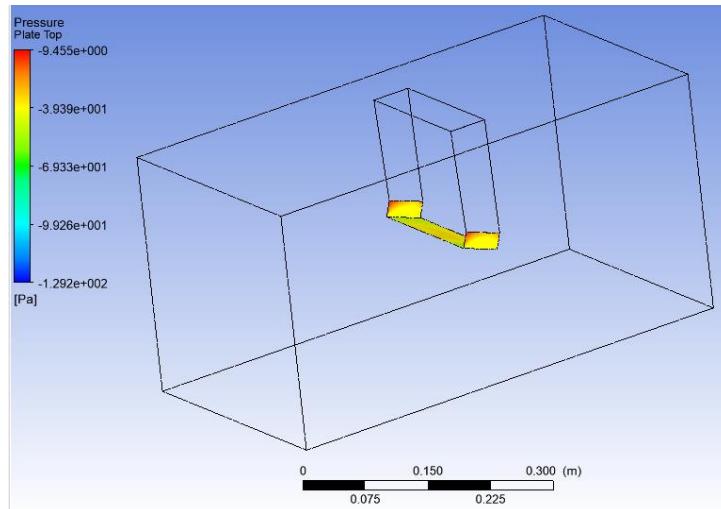


Рис. 4. Моделирование пластиинки с винглетами в камере аэродинамической трубы в среде ANSYS CFX. Отдельно обозначены границы субдоменов.

#### 4. Выводы.

Исходя из полученных данных (Таблица 1), можно сделать вывод, что, согласно натурному эксперименту, наибольший эффект винглеты имеют на углах до  $10^\circ$  (для пластиинок 200x50 мм) и до  $14^\circ$  (для пластиинок 200x100). Также стоит отметить, что на углах атаки до  $10^\circ$  подъёмная сила у пластиинки с винглетами 160x50 выше, чем у пластиинки 200x50 без винглетов. Что касается данных, полученных при численном эксперименте в среде ANSYS CFX (Таблица 2), то показатель подъёмной силы имеет стабильно меньшее абсолютное значение, сохраняя ту же динамику (Рис. 5, 6). Несмотря на удовлетворительный качественный результат, точность расчётов можно повысить, изменив модель газа, количество элементов и начальную турбулентность потока. На данном режиме обдува подтверждается закономерная эффективность винглетов на углах до  $10^\circ$ .

**Таблица 1. Полученные данные по натуральному эксперименту.**

$\alpha /$ град.	Натурный эксперимент					
	Рпод. / мН					
	Без винглетов			С винглетами		
	200x50	200x100	250x150	160x50	200x50	200x100
4	186	215	580	310	300	320
6	340	430	950	450	480	570
8	510	630	1420	580	680	810
10	650	890	1900	680	790	1060
12	760	1150	2480	730	880	1330
14	840	1420	2980	715	890	1610
16	870	1660	3500	690	880	1780
18	910	1880	3900	675	880	1860

**Таблица 2. Полученные данные по расчёту в среде ANSYS CFX.**

$\alpha$ / град.	Расчёт в среде ANSYS CFX						
	Рпод. / мН						
	Без винглетов				С винглетами		
	200x50	200x100	250x150	160x50	200x50	200x100	
4	197	298	630	158	221	345	
6	309	472	1021	244	339	530	
8	406	656	1439	323	444	717	
10	487	818	1813	403	526	892	
12	544	1005	2512	462	578	965	
14	569	1159	2568	453	584	1124	
16	556	1295	3829	462	560	1418	
18	581	1160	2931	428	549	1438	

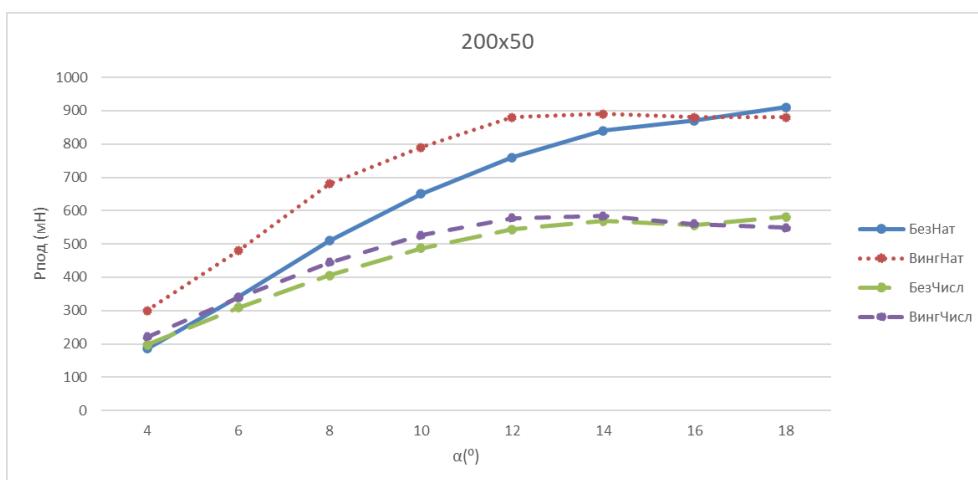


Рис. 5. Динамика подъёмной силы для пластины 200x50мм.

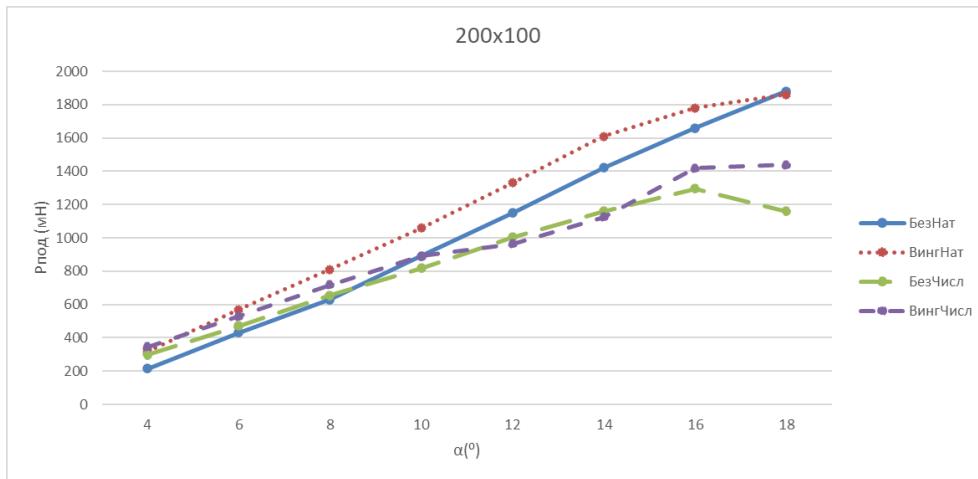


Рис. 6. Динамика подъёмной силы для пластины 200x100мм.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект № 19-29-06013.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Allen A., Breitsamter C. Transport aircraft wake influenced by a large winglet and winglet flaps, J. Aircraft, V. 45 (2) (2008). p. 686–699.
2. Ning A.S., Kroo I. Multidisciplinary considerations in the design of wings and wing tip devices, J. Aircraft, V. 47 (2) (2010). p. 534–543.
3. Takenaka K., Hatanaka K. Multidisciplinary design exploration for a winglet, J. Aircraft, V. 45 (5) (2008). p. 1601–1611.
4. Sumbatyan M.A., Samsonov I.K., On the theory of thin lifting surface with winglets. Mechanics Research Communications, 103519, V. 109 (2020).

### **Сведения об авторах:**

**Самсонов И. К.** – аспирант, Кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича, ул. Мильчакова 8а, г. Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: [ellias.samsonov@gmail.com](mailto:ellias.samsonov@gmail.com)

**Казаков Е. А.** – аспирант, Кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича, ул. Мильчакова 8а, г. Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: [Eugene.A.Kazakov@yandex.ru](mailto:Eugene.A.Kazakov@yandex.ru)

**Выделение особенностей в изгибающих моментах в прямоугольной свободно опертой пластине, нагруженной сосредоточенной силой**  
**Сейранян С.П.**

Рассматривается решение Леви в виде ряда для прогиба  $w(x, y)$  прямоугольной свободно опертой по краям пластины, нагруженной внутри прямоугольника плана пластины в точке  $(\xi, \eta)$  поперечной сосредоточенной силой  $P$  [1]. Показано, что вторые частные производные от  $w(x, y)$  по  $x$  и  $y$  в замкнутом прямоугольнике, кроме точки  $(\xi, \eta)$  вычисляются почленным дифференцированием ряда. Получены выражения для изгибающих моментов, которые предложенным автором применением классического метода А.Н.Крылова разлагаются на сумму сходящегося в прямоугольнике пластины ряда и конечного выражения, содержащего относительно радиуса  $R$  окрестности точки  $(\xi, \eta)$  логарифмическую особенность. Представленный результат в частном случае, когда точка  $(\xi, \eta)$  лежит на оси симметрии пластины, совпадает с прежде известным [1], [2].

Исследованию изгиба прямоугольных пластин силой  $P$  посвящено значительное число работ [1], [2] и др. Вопрос о поведении  $M_x, M_y$  в свободно опертой пластине вблизи  $(\xi, \eta)$  открыт.

**1.** Решение Леви для свободно опертой прямоугольной пластины, нагруженной силой  $P$  [1] мы приводим к виду

$$\begin{aligned} w(x, y) = & P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [1 + \lambda_m b \operatorname{cth} \lambda_m b - \lambda_m (b-y) \operatorname{cth} \lambda_m (b-y) - \lambda_m \eta \operatorname{cth} \lambda_m \eta] \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) \times \\ & \times \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) = P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} \{ \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) + \lambda_m b [\operatorname{ch} \lambda_m b \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) / \operatorname{sh} \lambda_m b - \\ & - \operatorname{ch} \lambda_m (b-y)] \operatorname{sh} \lambda_m \eta + \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) - \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) \} \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) = \\ = & P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) - b \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh} \lambda_m b + \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) - \lambda_m \eta \operatorname{ch} \lambda_m \eta \times \\ & \times \operatorname{sh} \lambda_m (b-y)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) \text{ при } 0 \leq x \leq a, \eta \leq y \leq b \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} w(x, y) = & P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) - b \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m \eta / \operatorname{sh} \lambda_m b + \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m (b-\eta) - \lambda_m y \operatorname{ch} \lambda_m y \times \\ & \times \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x / (\lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m b) \text{ при } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \eta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь формула (1.2) получена из формулы (1.1) перестановкой в ней величин  $y$  и  $\eta$ , что верно и в [1]. Величины  $a, b$  – стороны прямоугольника плана пластины,  $D$  и  $P$  – изгибная жесткость пластины и сосредоточенная сила,  $\xi$  и  $\eta$  – координаты точки приложения сосредоточенной силы, удовлетворяющие неравенствам  $0 < \xi < a, 0 < \eta < b, \lambda_m = mt/a$ .

Вычисляя формально вторые частные производные от  $w(x, y)$  почленным дифференцированием рядов (1.1), (1.2) по  $x$  и по  $y$  на множествах  $G^{(1)} = ([0, a] \times [\eta, b]) \setminus (\xi, \eta)$ ,  $G^{(2)} = ([0, a] \times [0, \eta]) \setminus (\xi, \eta)$ , мы полученные результаты представляем в виде

$$\begin{aligned} \partial^2 w(x, y) / \partial x^2 = & P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh}^2 \lambda_m b - \eta \operatorname{sh} \lambda_m (y+\eta-b) / \operatorname{sh} \lambda_m b - (y-\eta) \operatorname{sh} \lambda_m \eta \times \\ & \times \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) / \operatorname{sh} \lambda_m b - \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) / (\lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m b)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \text{ при } (x, y) \in G^{(1)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 w(x, y) / \partial x^2 = & P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh}^2 \lambda_m b - \eta \operatorname{sh} \lambda_m (y+\eta-b) / \operatorname{sh} \lambda_m b + (y-\eta) \operatorname{ch} \lambda_m y \times \\ & \times \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b - \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) / (\lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m b)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \text{ при } (x, y) \in G^{(2)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 w(x, y) / \partial y^2 = & P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh}^2 \lambda_m b + \eta \operatorname{sh} \lambda_m (y+\eta-b) / \operatorname{sh} \lambda_m b + (y-\eta) \operatorname{sh} \lambda_m \eta \times \\ & \times \operatorname{ch} \lambda_m (b-y) / \operatorname{sh} \lambda_m b - \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m (b-y) / (\lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m b)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \text{ при } (x, y) \in G^{(1)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 w(x, y) / \partial y^2 = & P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b \operatorname{sh} \lambda_m \eta \operatorname{sh} \lambda_m y / \operatorname{sh}^2 \lambda_m b + \eta \operatorname{sh} \lambda_m (y+\eta-b) / \operatorname{sh} \lambda_m b - (y-\eta) \operatorname{ch} \lambda_m y \times \\ & \times \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) / \operatorname{sh} \lambda_m b - \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m (b-\eta) / (\lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m b)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \text{ при } (x, y) \in G^{(2)} \end{aligned}$$

$$\times sh\lambda_m(b-\eta)/sh\lambda_mb-sh\lambda_my sh\lambda_m(b-\eta)/(\lambda_msh\lambda_mb)]\sin\lambda_m\xi \sin\lambda_mx \text{ при } (x,y) \in G^{(2)} \quad (1.6)$$

**1.1** Убедимся теперь, что формулы (1.3) – (1.6) верны.

a) Покажем прежде справедливость равенства (1.3) ((1.4)). Пусть  $(x,y) \in G_\delta^{(1)} = [0,a] \times [\eta+\delta,b]$  ( $G_\delta^{(2)} = [0,a] \times [0,\eta-\delta]$ ), где  $\delta - \forall$  фиксированное число, удовлетворяющее неравенствам  $0 < \delta < b - \eta$  ( $0 < \delta < \eta$ ). Заметим, что коэффициенты при произведении тригонометрических синусов в ряде (1.3) ((1.4)) при  $m \rightarrow \infty$  имеют порядок  $O(e^{-|y-\eta|\lambda_m})$  [3, 707, 708]. Но  $e^{-|y-\eta|\lambda_m} \leq e^{-\delta\lambda_m}$ . Значит, рассматриваемые ряды мажорируются бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем  $q = e^{-\delta\lambda_1}$  и первым членом, равным  $Cq$ , где  $C > 0$  – некоторая константа. Поэтому названные ряды сходятся равномерно относительно  $x \in [0, a]$  при любом фиксированном  $y = y_0 \in [\eta + \delta, b] ([0, \eta - \delta])$  [3, 430]. Далее члены данных рядов при  $y = y_0$  – непрерывные функции  $x$  на отрезке  $[0, a]$ . Кроме того, ряд (1.1) ((1.2)) почленно частно дифференцируется по  $x$  в  $G = [0, a] \times [0, b]$ , что приводит к сходящимся рядам, ибо то же имеет место и для повторного ряда решения Навье для прогиба [4], просуммированного в одинарный ряд (1.1) ((1.2)) [1]. Поэтому применяя теорему 7 [3, 435] при  $0 \leq x \leq a$ ,  $y_0 \in [\eta + \delta, b] ([0, \eta - \delta])$  к почленно частно продифференцированному по  $x$  ряду (1.1) ((1.2)), приходим к утверждению (1.3) ((1.4)) при  $0 \leq x \leq a$  и  $y = y_0$ . Но  $y_0$ , при принятых ограничениях,  $-\forall$ . Значит, то же верно и при всех  $(x, y) \in G_\delta^{(1)} (G_\delta^{(2)})$ . Заметим далее, что и  $\delta$ , удовлетворяющее отмеченным ограничениям,  $-\forall$ . Откуда утверждение (1.3) ((1.4)) справедливо и при  $(x, y) \in [0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ . Действительно, пусть  $(x^*, y^*) - \forall$  фиксированная пара, такая, что  $(x^*, y^*) \in [0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ . Положим  $\delta = \delta^* = y^* - \eta > 0$  ( $\eta - y^* > 0$ ). Тогда, по доказанному, (1.3) ((1.4)) справедливо при  $(x^*, y^*) \in G_{\delta^*}^{(1)} (G_{\delta^*}^{(2)})$ . Но  $(x^*, y^*)$ , по условию,  $-\forall$  из множества  $[0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ . Отсюда, (1.3) ((1.4)) выполняется при всех  $(x, y) \in [0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ .

Пусть теперь  $(x, y) \in ([0, \xi) \cup (\xi, a]) \times \{\eta\}$ . Тогда преобразованием

$$\begin{aligned} sh\alpha sh\beta / sh\gamma &= [ch(\alpha + \beta) - ch(\alpha - \beta)] / (2sh\gamma) = \{(e^{\alpha+\beta} + e^{-(\alpha+\beta)}) / [2(e^\gamma - e^{-\gamma})] - e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2\} + \\ &+ e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2 - ch(\alpha - \beta) / (2sh\gamma) = [e^{-(\alpha+\beta)} + e^{\alpha+\beta-2\gamma} - 2ch(\alpha - \beta)] / (4sh\gamma) + e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2 = [e^{-\gamma} ch(\gamma - \alpha - \beta) - \\ &- ch(\alpha - \beta)] / (2sh\gamma) + e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

при значениях  $\alpha = \lambda_m\eta$ ,  $\beta = \lambda_m(b - \eta)$ ,  $\gamma = \lambda_mb$  ряды в (1.3), (1.4) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} [b sh^2\lambda_m\eta / sh^2\lambda_mb - \eta sh\lambda_m(2\eta - b) / sh\lambda_mb - sh\lambda_m\eta sh\lambda_m(b - \eta) / (\lambda_msh\lambda_mb)] \sin\lambda_m\xi \times \\ \times \sin\lambda_mx = \sum_{m=1}^{\infty} [b sh^2\lambda_m\eta / sh^2\lambda_mb - \eta sh\lambda_m(2\eta - b) / sh\lambda_mb - [e^{-\lambda_mb} - ch\lambda_m(2\eta - b)] / \\ / (2\lambda_msh\lambda_mb)] \sin\lambda_m\xi \sin\lambda_mx + a / (4\pi) \sum_{m=1}^{\infty} 1/m \cos\lambda_m(x + \xi) - a / (4\pi) \sum_{m=1}^{\infty} 1/m \cos\lambda_m(x - \xi) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$0 \leq x \leq a, x \neq \xi$$

Здесь первый ряд в (1.8) содержит коэффициенты при произведении тригонометрических синусов, которые при  $m \rightarrow \infty$  имеют порядок  $O(e^{2(\eta-b)\lambda_m})$ . Но  $\eta < b$ . Тогда названный ряд мажорируется бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем  $e^{2(\eta-b)\lambda_1}$ . Значит, первый ряд в (1.8) сходится равномерно относительно  $x$  при  $0 \leq x \leq a, x \neq \xi$  [3, 430]. Второй же и третий ряды в (1.8) – косинусные ряды, аргументы которых  $\lambda_1(x + \xi)$  и  $\lambda_1(x - \xi)$  имеют множества изменения  $E^{(+)} = [\lambda_1\xi, \lambda_2\xi) \cup (\lambda_2\xi, \lambda_1(a + \xi)] \subset (0, 2\pi)$  и  $E^{(-)} = [-\lambda_1\xi, 0) \cup (0, \lambda_1(a - \xi)] \subset (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$ . Откуда  $\forall$  отрезок  $\Delta \subset [0, \xi) \cup (\xi, a]$  преобразованиями  $\lambda_1(x \pm \xi)$  переводится в отрезки  $\Delta^{(\pm)} \subset E^{(\pm)}$ , не содержащие точек  $\pm 2k\pi$ , где  $k = 0, 1, \dots$ . Отсюда, с учетом [3, 430] второй (третий) ряды на  $\Delta^{(+)}$  ( $\Delta^{(-)}$ ), а значит и при  $x \in \Delta$  сходятся равномерно. Но из равномерной сходимости первого ряда в (1.8) на  $[0, \xi) \cup (\xi, a]$  следует равномерная сходимость данного ряда и при  $x \in \Delta$ . Следователь-

но, равномерно сходится и исходный ряд в (1.8) при  $x \in \Delta$  как сумма конечного числа равномерно сходящихся на  $\Delta$  рядов. Далее ряд (1.1) ((1.2)), как отмечено выше, почленно частно дифференцируется по  $x$  в  $G$ , образуя сходящийся ряд. В частности, то же верно и при  $y = \eta$ . Таким образом, выполняются условия теоремы 7 [3, 435] для почленно частно продифференцированного по  $x$  ряда (1.1)((1.2)) при  $x \in \Delta$ ,  $y = \eta$ , что и приводит к равенству (1.3) ((1.4)) при тех же значениях  $x$  и  $y$ . Пусть далее  $\bar{x} \in [0, \xi] \cup [\xi, a] - \forall$  фиксированное значение  $x$ . Тогда  $\bar{x}$  принадлежит одному из промежутков  $[0, \xi], (\xi, a]$ . Полагая  $\bar{x} \in [0, \xi] ((\xi, a])$ , построим  $\Delta = \bar{\Delta} = [0, (\xi + \bar{x})/2]((\xi + \bar{x})/2, a])$ . Тогда отрезок  $\bar{\Delta} \in [0, \xi] \cup (\xi, a]$ . Имеем, по доказанному выше, что равенства (1.3) ((1.4)) при  $x \in \bar{\Delta}, y = \eta$  верны. Но  $\bar{x} \in \bar{\Delta}$ . Значит, то же верно и в точке  $(\bar{x}, \eta)$ . Далее, по условию,  $\bar{x}$ , при принятых ограничениях,  $- \forall$ . Отсюда, (1.3) ((1.4)) выполняются при всех  $x \in [0, \xi] ((\xi, a]), y = \eta$ . Следовательно, утверждение (1.3) ((1.4)) доказаны на множестве  $(x, y) \in [0, a] \times (\eta, b) \cup ([0, \xi] \cup (\xi, a]) \times \{\eta\} = [0, a] \times [\eta, b] \setminus (\xi, \eta) = G^{(1)} ([0, a] \times [0, \eta] \cup (\xi, a]) \times \{\eta\} = [0, a] \times [0, \eta] \setminus (\xi, \eta) = G^{(2)}$ . Что и требовалось доказать.

**b)** Перейдем теперь к обоснованию (1.5), ((1.6)). Предположим прежде, что  $(x, y) \in G_{\delta}^{(1)} (G_{\delta}^{(2)})$ , где  $\delta$  – по-прежнему  $\forall$  фиксированное число, удовлетворяющее неравенствам  $0 < \delta < b - \eta$  ( $0 < \delta < \eta$ ). Имеем, что коэффициенты при произведении тригонометрических синусов в ряде (1.5) ((1.6)) при  $m \rightarrow \infty$  имеют порядок  $O(e^{-|y-\eta|\lambda_m})$  [3, 707, 708]. Но  $e^{-|y-\eta|\lambda_m} \leq e^{-\delta\lambda_m}$ . Тогда данные ряды мажорируются бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем  $q_1 = e^{-\delta\lambda_1}$  и первым членом, равным  $C_1 q_1$ , где  $C_1 > 0$  – некоторая константа. Поэтому отмеченные ряды при  $\forall$  фиксированном  $x = x_0 \in [0, a]$  сходятся равномерно относительно  $y \in [\eta + \delta, b] ([0, \eta - \delta])$ . Далее члены названных рядов при  $x = x_0$  – непрерывные функции  $y$  на отрезке  $[\eta + \delta, b] ([0, \eta - \delta])$ . Кроме того, ряд (1.1) ((1.2)) почленно частно дифференцируется по  $y$  в  $G = [0, a] \times [0, b]$ , что приводит к сходящимся рядам, ибо то же имеет место и для повторного ряда решения Навье для прогиба [4], просуммированного в одинарные ряды (1.1) ((1.2)) [1]. Тогда фиксируя  $x = x_0$  и применяя теорему 7 [3, 435] при значениях  $y \in [\eta + \delta, b] ([0, \eta - \delta])$  к почленно частно продифференцированному по  $y$  ряду (1.1) ((1.2)), приходим к утверждению (1.5) ((1.6)) при  $x = x_0$  и  $y \in [\eta + \delta, b] ([0, \eta - \delta])$ . Но  $x_0$ , при принятых ограничениях,  $- \forall$ . Значит, то же справедливо и при всех  $(x, y) \in G_{\delta}^{(1)} (G_{\delta}^{(2)})$ . Заметим далее, что и  $\delta$ , удовлетворяющее отмеченным ограничениям,  $- \forall$ . Откуда утверждение (1.5) ((1.6)) верно и при  $(x, y) \in [0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ . Действительно, пусть  $(\hat{x}, \hat{y}) - \forall$  фиксированная пара, такая, что  $(\hat{x}, \hat{y}) \in [0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ . Положим  $\delta = \hat{\delta} = \hat{y} - \eta > 0$  ( $\eta - \hat{y} > 0$ ). Тогда, по доказанному, (1.5) ((1.6)) справедливо при значениях  $(\hat{x}, \hat{y}) \in G_{\hat{\delta}}^{(1)} (G_{\hat{\delta}}^{(2)})$ . Но  $(\hat{x}, \hat{y})$ , по условию,  $- \forall$  пара  $\in [0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ . Следовательно, (1.5) ((1.6)) выполняется при всех  $(x, y) \in [0, a] \times (\eta, b) ([0, a] \times [0, \eta])$ .

Перейдем к обоснованию (1.5) ((1.6)) при  $(x, y) \in ([0, \xi] \cup (\xi, a]) \times \{\eta\}$ . С учетом (1.7) имеем  $sh\alpha sh\beta / sh\gamma = \partial[sh\alpha sh\beta / sh\gamma] / \partial\beta = [sh(\alpha - \beta) - e^{-\gamma} sh(\gamma - \alpha - \beta)] / (2sh\gamma) + e^{\alpha+\beta-\gamma} / 2$  (1.9) Полагая  $(x, y) \in ([0, \xi] \cup (\xi, a]) \times (\eta, b) (([0, \xi] \cup (\xi, a]) \times [0, \eta])$ , приводим (1.5) ((1.6)) с применением (1.7), (1.9) к виду

$$\begin{aligned} \partial^2 w(x, y) / \partial y^2 &= P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b sh\lambda_m \eta sh\lambda_m y / sh^2 \lambda_m b + \eta sh\lambda_m (y + \eta - b) / sh\lambda_m b] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x + \\ &+ P/(Da) [I_1(y, \eta) - I_2(y, \eta)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$(\partial^2 w(x, y) / \partial y^2 = P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b sh\lambda_m \eta sh\lambda_m y / sh^2 \lambda_m b + \eta sh\lambda_m (y + \eta - b) / sh\lambda_m b] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x +$$

$$+ P/(Da)[I_1(\eta, y) - I_2(\eta, y)]) \quad (1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_1(y, \eta) = & (y - \eta) \sum_{m=1}^{\infty} sh \lambda_m \eta ch \lambda_m (b - y) / sh \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = (y - \eta) / 2 \sum_{m=1}^{\infty} [sh \lambda_m (\eta + y - b) - e^{-\lambda_m b} \times \\ & \times sh \lambda_m (y - \eta)] / sh \lambda_m b \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x + (y - \eta) / 4 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m |y - \eta|} \cos \lambda_m (\xi - x) - (y - \eta) / 4 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m |y - \eta|} \times \\ & \times \cos \lambda_m (\xi + x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} I_2(y, \eta) = & \sum_{m=1}^{\infty} sh \lambda_m \eta sh \lambda_m (b - y) / (\lambda_m sh \lambda_m b) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-\lambda_m b} ch \lambda_m (y - \eta) - \\ & - ch \lambda_m (\eta + y - b)] / (2 \lambda_m sh \lambda_m b) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x + \frac{1}{4 \lambda_1} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m |y - \eta|} / m \cos \lambda_m (\xi - x) - \frac{1}{4 \lambda_1} \times \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m |y - \eta|} / m \cos \lambda_m (\xi + x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отметим, что коэффициенты при произведении тригонометрических синусов в общих членах рядов в (1.10), (1.11) и в первых рядах справа в (1.12), (1.13) имеют порядок  $O(e^{(y+\eta-2b)\lambda_m})$ . Поэтому названные ряды мажорируются бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем  $e^{2(\eta-b)\lambda_1}$ . Заметим, что данное утверждение сохраняет силу в (1.12), (1.13) и при перестановке местами  $y$  и  $\eta$ . Тогда при  $\forall x \in [0, \xi] \cup (\xi, a]$  данные ряды сходятся равномерно относительно  $y$  [3, 430]. Но общие члены рассматриваемых рядов – непрерывные функции переменной  $y$ . Значит, в рядах (1.10), ((1.11)) и в первых рядах справа, содержащихся в функциях  $I_1(y, \eta), I_2(y, \eta)(I_1(\eta, y), I_2(\eta, y))$ , допустим почленный предельный переход при стремлении  $y \rightarrow \eta + (\eta -)$  [3, 433]. Покажем теперь, что тот же предельный переход допустим во втором и третьем рядах в  $I_2(y, \eta)(I_2(\eta, y))$ . Действительно, имеем  $e^{-|y-\eta|\lambda_1} < 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow \eta \pm} e^{-|y-\eta|\lambda_1} = 1$ . Кроме того, формальный почленный переход в названных рядах при  $y \rightarrow \eta + (\eta -)$  приводит на множество  $x \in ([0, \xi] \cup (\xi, a])$  к уже проанализированному в п.(а) сходящимся рядам. Итак, оказывается применимой теорема Абеля [3, 418], что и приводит к требуемому утверждению.

Проведем далее предельный переход во втором и в третьем рядах в  $I_1(y, \eta)$ , умноженных на  $\pm(y - \eta)/4$ . Имеем из п. (а), что  $\lambda_1(x \pm \xi)$  имеют множества изменения  $E^{(\pm)}$ , которые не содержат точек  $\pm 2k\pi$ , где  $k = 0, 1, \dots$ . Тогда подставляя в формулу (3) [3, 418]

$$I_c(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m\theta = \{(1 - r^2) / [(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \theta / 2] - 1\} / 2, \text{ где } 0 < r < 1, -\infty < \theta < \infty \quad (1.14)$$

значения  $r = e^{-|y-\eta|\lambda_1}, \theta = \lambda_1(\xi \mp x)$ , приходим при выбранных верхних (нижних) знаках к конечным суммам второго (третьего) ряда в  $I_1(y, \eta)$ . Умножая полученные суммы на  $\pm(y - \eta)/4$  и переходя к пределу при стремлении  $y \rightarrow \eta +$ , получаем

$$\lim_{y \rightarrow \eta^+} \pm(y - \eta)/4 I_c(e^{-|y-\eta|\lambda_1}, \lambda_1(\xi \mp x)) = \lim_{y \rightarrow \eta^+} \pm(y - \eta)/4 \lim_{y \rightarrow \eta^+} I_c(e^{-|y-\eta|\lambda_1}, \lambda_1(\xi \mp x)) = 0(-1/2) = 0 \quad (1.15)$$

Аналогично приходим к нулевым предельным значениям во втором и третьем рядах в  $I_1(\eta, y)$ , умноженных на  $\mp(y - \eta)/4$ , когда  $y \rightarrow \eta -$ . Выполняя в итоге предельный переход в равенствах (1.10), ((1.11)) при  $y \rightarrow \eta +$  ( $y \rightarrow \eta -$ ), приходим к одинаковым пределам

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \eta^+} \partial^2 w(x, y) / \partial y^2 = & \lim_{y \rightarrow \eta^-} \partial^2 w(x, y) / \partial y^2 = P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b sh^2 \lambda_m \eta / sh^2 \lambda_m b + \eta sh \lambda_m (2\eta - b) / sh \lambda_m b] \times \\ & \times \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x - P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [e^{-\lambda_m b} - ch \lambda_m (2\eta - b)] / (2 \lambda_m sh \lambda_m b) \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x + P/(4Da) [\sum_{m=1}^{\infty} \cos \lambda_m (\xi - x) / \lambda_m - \end{aligned}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \cos \lambda_m (\xi - x) / \lambda_m = P/(Da) \sum_{m=1}^{\infty} [-b sh^2 \lambda_m \eta / sh^2 \lambda_m b + \eta sh \lambda_m (2\eta - b) / sh \lambda_m b - sh \lambda_m \eta sh \lambda_m (b - \eta) / (\lambda_m sh \lambda_m b)] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x \text{ при } x \in [0, \xi) \cup (\xi, a] \quad (1.16)$$

Тогда с применением формулы Лагранжа [3, 112] при приращении  $\Delta y > 0$  или  $\Delta y < 0$  имеем

$$\lim_{\Delta y \rightarrow \pm 0} [\partial w(x, \eta + \Delta y) / \partial y - \partial w(x, \eta) / \partial y] / \Delta y = \lim_{\Delta y \rightarrow \pm 0} \partial^2 w(x, \eta + \theta^{(\pm)} \Delta y) / \partial y^2 = \lim_{y \rightarrow \eta \pm} \partial^2 w(x, y) / \partial y^2 = \partial^2 w(x, \eta) / \partial y^2 \text{ где } 0 < \theta^{(\pm)} < 1. \quad (1.17)$$

Следовательно, утверждения (1.5) и (1.6) на множествах  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  верны (см. конец п. (а)).

**2.** Приводится выделение особенностей в изгибающих моментах в рассматриваемой пластине. Подставляя (1.3) – (1.6) в выражения для изгибающих моментов [1, с.98], с использованием (1.7), (1.9) – (1.14), а также формулы [1, с.170]

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m |y-\eta|} / m \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x = 1/4 \ln [(ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x+\xi)) / (ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x-\xi))] \quad (2.1)$$

При  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b] \setminus (\xi, \eta)$  получаем

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = \frac{P}{a} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (v-1)[b sh \lambda_m \eta sh \lambda_m y / sh^2 \lambda_m b - \eta sh \lambda_m (y+\eta-b) / sh \lambda_m b - (y-\eta)[sh \lambda_m (\eta+y-b) - e^{-\lambda_m b} sh \lambda_m (y-\eta)] / (2sh \lambda_m b)] + (v+1)[e^{-\lambda_m b} ch \lambda_m (y-\eta) - ch \lambda_m (\eta+y-b)] / (2\lambda_m sh \lambda_m b) \right] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x - (v-1)/4 |y-\eta| [I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1 (\xi-x)) - I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1 (\xi+x))] + (v+1)a/(8\pi) \ln [(ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x+\xi)) / (ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x-\xi))] \right\}$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) = \frac{P}{a} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (1-v)[b sh \lambda_m \eta sh \lambda_m y / sh^2 \lambda_m b - \eta sh \lambda_m (y+\eta-b) / sh \lambda_m b - (y-\eta)[sh \lambda_m (\eta+y-b) - e^{-\lambda_m b} sh \lambda_m (y-\eta)] / (2sh \lambda_m b)] + (v+1)[e^{-\lambda_m b} ch \lambda_m (y-\eta) - ch \lambda_m (\eta+y-b)] / (2\lambda_m sh \lambda_m b) \right] \sin \lambda_m \xi \sin \lambda_m x - (1-v)/4 |y-\eta| [I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1 (\xi-x)) - I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1 (\xi+x))] + (v+1)a/(8\pi) \ln [(ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x+\xi)) / (ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x-\xi))] \right\} \quad (2.2)$$

Анализируя далее неисследованные члены в (2.2) в малой радиуса  $R$  окрестности точки  $(\xi, \eta)$ , приходим к логарифмической особенности в  $M_x, M_y$  относительно  $R$  (ср. с [1, с.171]).

$$-b \leq -|y-\eta|/2 \leq |y-\eta| I_c(e^{-\lambda_1 |y-\eta|}, \lambda_1 (\xi \pm x)) = |y-\eta| \{(1-e^{-2\lambda_1 |y-\eta|}) / [(1-e^{-\lambda_1 |y-\eta|})^2 + 4e^{-\lambda_1 |y-\eta|} \times \sin^2 \lambda_1 (\xi \pm x) / 2] - 1\} / 2 \leq |y-\eta| [(1+e^{-\lambda_1 |y-\eta|}) / (1-e^{-\lambda_1 |y-\eta|}) - 1] / 2 = |y-\eta| / (e^{\lambda_1 |y-\eta|} - 1) \leq 1/\lambda_1 \quad (2.3)$$

$$\ln \frac{ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x+\xi)}{ch \lambda_1 (y-\eta) - \cos \lambda_1 (x-\xi)} \approx 2 \ln \frac{2 \sin \lambda_1 \xi}{\lambda_1 R}, \text{ где } R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad (2.4)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластиинки и оболочки.– Пер. с англ. М.: Физ-матгиз, 1963, 635с.
2. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках.– М.: Мир, 1982, 542 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Физматлит, т. I, 2007, 680 с.; т. II, 2003, 864 с.; т. III, 2008, 728 с.
4. Сейранян С.П. О предельном переходе от локально распределенной равномерной нагрузки к сосредоточенной в выражениях для компонент градиента прогиба прямоугольной свободно опертоой пластины // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Тр. II межд. конф., г. Дилижан, Армения, 4 – 8 октября. Т 2, 2010, с. 146 – 150.

### Сведения об авторе:

Сейранян Сурен Паруйрович – к. ф.-м. н., с.н.с. Института механики НАН РА.

Тел.:(+37455) 542838; E-mail: [seysuren@yandex.ru](mailto:seysuren@yandex.ru).

# **Идентификация упруго-вязко-пластической модели материала полимерного покрытия по результатам индентирования**

**Смирнов С.В., Мясникова М.В., Коновалов Д.А.**

Разработана вычислительная модель, позволяющая провести моделирование напряженно-деформированного состояния полимерного покрытия при испытаниях на внедрение индентора с выдержкой при постоянной нагрузке в режиме ползучести. Численная реализация модели выполнена в конечно-элементном комплексе ANSYS применительно к покрытию на основе коммерческой эпоксидной смолы ЭД-20 с полиэтиленполиаминовым отвердителем. Реология материала покрытия описана комбинированной моделью изотропной упруго-вязко-пластической среды. Идентификация модели осуществлена путем сравнения экспериментальных и расчетных диаграмм индентирования.

## **Введение**

При длительном внешнем воздействии механическое поведение всех реальных материалов отличается от поведения упруго-пластического тела. Это отличие проявляется в том, что под действием постоянных нагрузок имеет место более или менее интенсивное накопление деформации в материале. Этот процесс развивается во времени за счет присущих материалу вязкостных свойств и проявляется в ползучести материала. Данное явление способно, в частности, изменить эксплуатационные характеристики и лимитировать долговечность тонких покрытий и kleевых соединений на основе полимерных материалов. Поэтому актуальность имеют исследования таких материалов, направленные на установление соотношений, связывающих напряжения и деформации с учетом фактора времени.

Как показала практика хорошую результативность при описании закономерностей механического поведения материала практически при любом внешнем воздействии дает применение комбинированного подхода, сочетающего в себе экспериментальные методы исследований и численное моделирование условий проведения эксперимента [1-2]. При этом, когда в качестве исследуемых материалов используются тонкие покрытия и kleевые соединения необходимо учитывать масштабный фактор при выборе метода испытаний. В этом смысле наиболее подходящим является метод инструментального индентирования. Но с точки зрения изучения ползучести применение метода индентирования дает возможность лишь косвенно судить о вязкостных свойствах материала по относительному изменению глубины внедрения индентора при выдержке в режиме ползучести. Построение диаграмм ползучести, представляющих собой зависимость степени деформации (или скорости деформации) ползучести материала от времени, непосредственно по результатам испытаний на индентирование невозможно вследствие неравномерности напряженно-деформированного состояния материала в очаге деформации. Вместе с тем, необходимые данные об особенностях напряженно-деформированного состояния и его изменения во времени в очаге деформации в области под индентором могут быть получены путем численного моделирования, воспроизводящего условия проведения эксперимента. Эта идея реализована в настоящей работе для тонкого полимерного покрытия, что позволило провести процедуру идентификации модели материала покрытия при выдержке в режиме ползучести.

## **Материал и методика исследования**

В качестве модельного материала использовали полимерное покрытие на основе коммерческой эпоксидной смолы ЭД-20 с полиэтиленполиаминовым отвердителем. Толщина покрытия составила 150 мкм. Испытание осуществляли методом инструментального индентирования в соответствии с ISO 14577-1-2002 с использованием универсальной системы для наномеханических испытаний NanoTribotestor TI 950<sup>1</sup>. Прибор позволяет осуществлять индентирование с заданной скоростью и глубиной внедрения индентора, с заданным временем выдержки при постоянной нагрузке или максимальной глубине внедрения, а также с постоянной скоростью разгрузки при обратном ходе индентора. В качестве индентора использовали алмазную трехгранную пирамиду Берковича. Процесс индентирования осуществляли в два

<sup>1</sup> Экспериментальные исследования проведены на оборудовании Центра коллективного пользования «Пластометрия» ИМАШ УрО РАН

этапа. Первый этап соответствовал стадии внедрения, при котором вертикальное усилие на индентор  $P$  линейно возрастало от 0 до своего максимального значения, равного 10 мН за 5 сек. Второй этап соответствовал стадии выдержки, которая осуществлялась в течении 100 сек при постоянном значении  $P = 10$  мН. Нагружение выполняли при температуре  $22 \pm 1^\circ\text{C}$ . В процессе испытания непрерывно регистрировали нагрузку на индентор и глубину его погружения в материал. В результате получили диаграмму индентирования, представляющую собой зависимость усилия  $P$  от глубины внедрения индентора  $h$ . Эту диаграмму использовали в качестве истинного отклика материала покрытия, формирующегося в результате установления определенных соотношений между напряжениями и деформациями. Глубина внедрения индентора в заданных условиях нагружения не превышала 1,5 мкм.

Данные об особенностях изменения напряженно-деформированного состояния в очаге деформации при индентировании получили по результатам конечно-элементного моделирования. С целью упрощения разработки методики моделирования при создании вычислительной модели пирамидальный индентор Берковича, примененный в эксперименте, был заменен эквивалентным коническим индентором с углом конусности при вершине  $140,6^\circ$ . Данный индентор обеспечивает получение диаграммы индентирования совпадающей с диаграммой, фиксируемой при вдавливании индентора Берковича. Такой прием широко применяется при моделировании процесса вдавливания пирамидальных инденторов [3-4]. Подобная замена позволила провести моделирование в осесимметричной постановке с использованием 2D вычислительной модели, адекватно условиям проведения эксперимента на внедрение индентора Берковича. Ввиду того, что внедрение индентора осуществляется на глубину, не превышающую 10 % толщины покрытия, влияние подложки на результаты моделирования исключается. Поэтому вычислительная модель состояла из двух компонентов: пластины, имитирующей полимерное покрытие, и конического индентора (рис.1). Ширина пластины была выбрана достаточной, чтобы исключить влияние граничных эффектов на результаты моделирования и составляла  $7R$ , где  $R$  – радиус экспериментального отпечатка индентора. С учетом симметрии процесса деформации спроектирована  $\frac{1}{2}$  часть композиции. При этом ось симметрии у закреплена от перемещений в горизонтальном направлении  $x$ . Для того чтобы обеспечить неподвижность пластины ее нижнюю грань фиксировали от перемещений по всем направлениям. Для конечно-элементной дискретизации использовали 8-узловые конечные элементы типа PLANE183 с опцией осесимметричного поведения элемента. Также этот тип элемента позволяет осуществлять анализ ползучести материала с использованием неявного метода интегрирования по времени. Численная реализация вычислительной модели выполнена в программной среде ANSYS на супервычислителе кластерного типа URAN в Центре коллективного пользования Института математики и механики УрО РАН.

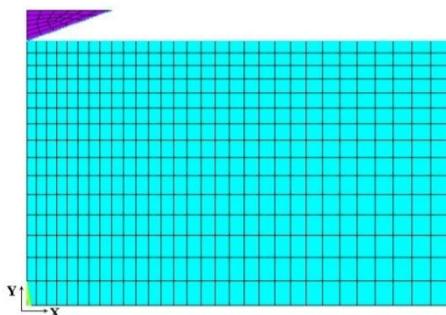


Рис. 1. Конечно-элементная модель внедрения конического индентора в покрытие

Процесс индентирования осуществляли в динамической постановке, накладывая на индентор силовые граничные условия, представляющие собой зависимость вертикального усилия на индентор  $P$  от времени  $t$ , в два этапа согласно условиям проведения эксперимента. Материал индентора полагали изотропным и линейно-упругим, присваивая ему упругие константы – модуль Юнга  $E = 1,14$  ГПА и коэффициент Пуассона  $v = 0,07$ , соответствующие значениям этих упругих характеристик для алмаза. Реологическую модель материала покрытия представляли как комбинацию упругой, пластической и вязкой составляющих и задавали в виде стандартных моделей из перечня ANSYS. Особенности упругопластического поведения материала,

установленные при испытаниях на осадку цилиндрических образцов, описывали двумя константами модели линейной упругости – модулем Юнга  $E = 4,4$  ГПа, коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,35$  [5] и моделью пластически несжимаемой среды с изотропным полилинейным деформационным упрочнением, воспроизводящей соответствующую экспериментальную зависимость (рис. 2).

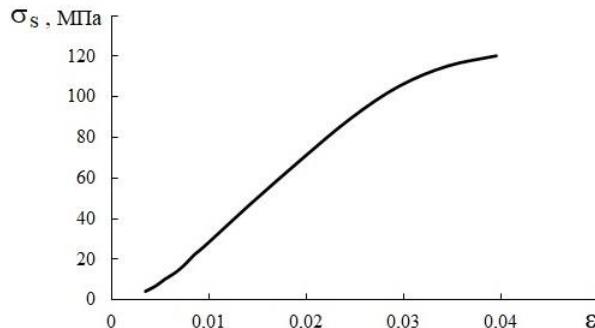


Рис. 2. Кривая деформационного упрочнения исследуемой эпоксидной композиции, представляющая собой зависимость напряжения течения  $\sigma_s$  от степени деформации  $\epsilon$

Полагали, что вязкостные свойства материала покрытия могут быть адекватно описаны моделью ползучести, представляющей собой эмпирическую зависимость скорости эквивалентной деформации ползучести  $\dot{\varepsilon}_{cr}$  от эквивалентного напряжения  $\sigma$ , времени нагружения  $t$  и абсолютной температуры  $T$ :

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} t^{C_3} e^{-C_4/T} \quad (1)$$

где  $C_1 - C_4$  – эмпирические константы, определяемые в результате идентификации модели.

Данная зависимость (1) реализована в ANSYS как Time-Hardening Creep Model с использованием неявного метода интегрирования по времени. Учитывая, что влияние температуры на динамику процесса ползучести в настоящей работе не рассматривается, поскольку индентирование осуществляется в изотермическом режиме, формула (1) может быть заменена следующим выражением:

$$\dot{\varepsilon}_{cr} = C_1^* \sigma^{C_2} t^{C_3}, \quad (2)$$

где  $C_1^* = C_1 e^{-C_4/T}$ .

Таким образом, получили, что Time-Hardening Creep Model, описывающая ползучесть при постоянной температуре, содержит три эмпирических константы  $C_1^*$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Варьируя значения этих констант, можно управлять скоростью деформации ползучести, а следовательно, для одних и тех же силовых условий нагружения получать разные значения глубины внедрения индентора, и связанные с ней значения параметров напряженно-деформированного состояния поверхностного слоя покрытия в очаге деформации. Этот факт позволил провести процедуру идентификации комбинированной упруго-вязко-пластической модели материала покрытия, которая в общем виде описывается уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E}, \text{ где } \sigma < \sigma_0 = E\varepsilon_0 \\ \varepsilon_{pl} = \frac{1}{E_T} (\sigma - \sigma_0), \text{ где } \sigma \geq \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon}_{cr} = C_1^* \sigma^{C_2} t^{C_3} \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{el}$ ,  $\varepsilon_{pl}$  – эквивалентная упругая и пластическая деформации соответственно;  $E_T$  – модуль деформационного упрочнения.

Полагали, что составленная таким образом комбинированная реологическая модель изотропной упруго-вязко-пластической среды (3), может воспроизвести связанную со скоростью

физическую нелинейность рассматриваемой полимерной композиции при той или иной температуре и соответствующих оптимальных значениях неизвестных констант  $C_1^*$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , определенных в результате идентификации модели. Варьирование констант осуществляли методом Хука-Джива [6]. Таким образом осуществляли процедуру поиска минимума функции невязки  $\delta$  между экспериментальными и расчетными значениями глубины внедрения индентора:

$$\delta = \sum_{i=1}^2 \left| \frac{h_{ex_i} - h_i}{h_{ex_i}} \right| \rightarrow \min , \quad (4)$$

где  $h_{ex_i}$ ,  $h_i$  – экспериментальное и расчетное значения глубины внедрения индентора в конце  $i$ -го этапа нагружения.

Идентифицированную таким образом упруго-вязко-пластическую модель материала покрытия (3) использовали для построения расчетной диаграммы индентирования. Адекватность проведенной процедуры идентификации модели материала покрытия оценивали путем сравнения расчетной диаграммы индентирования с соответствующей экспериментальной зависимостью.

### Полученные результаты и их обсуждение

По результатам испытания получена диаграмма индентирования в координатах «вертикальное усилие  $P$  – глубина внедрения индентора  $h$ » (рис. 2, кривая 1). Криволинейный участок диаграммы соответствует этапу внедрения индентора в течение 5 с; горизонтальный участок соответствует этапу выдержки в течение 100 с.

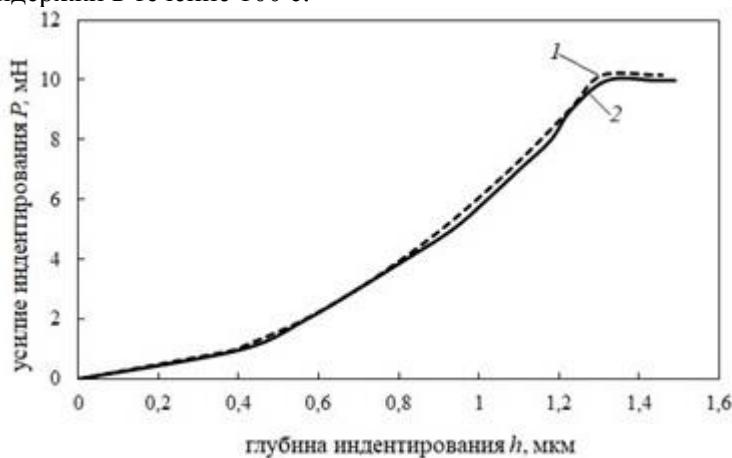


Рис. 2. Диаграмма индентирования: 1 – экспериментальная кривая;  
2 – расчетная кривая

Результаты численного моделирования позволили получить выборку значений расчетной глубины внедрения индентора на каждом этапе для одних и тех же условий нагружения. Сравнение экспериментальных и расчетных значений глубины внедрения индентора по величине функции невязки  $\delta$  (4) позволило подобрать константы модели ползучести (3), обеспечивающие минимум функции невязки одновременно для двух этапов нагружения – внедрения индентора и выдержки при постоянной нагрузке:  $C_1^* = 0,12 \cdot 10^{-7}$ ;  $C_2 = 0,6$ ;  $C_3 = 0,4$ .

Идентифицированная таким образом упруго-вязко-пластическая модель материала покрытия использована для восстановления диаграммы индентирования, полученной в эксперименте (рис. 2, кривая 2).

### Заключение

На основе численного моделирования разработан подход для идентификации модели материала тонкого полимерного покрытия при испытаниях на внедрение индентора с выдержкой при постоянной нагрузке в режиме ползучести. Реология материала покрытия задана

комбинированной моделью изотропной упруго-вязко-пластической среды. При этом вязкостные свойства материала описаны эмпирической зависимостью скорости эквивалентной деформации ползучести от эквивалентного напряжения, времени нагружения и температуры. Процедура идентификации модели среды материала покрытия выполнена путем сравнения экспериментальных и расчетных данных в заданных условиях нагружения. Адекватность проведенной процедуры подтверждена путем восстановления экспериментальной диаграммы индентирования. Результаты работы методологически могут быть использованы для исследования вязкостных свойств, описания моделей и построения диаграмм ползучести тонких полимерных покрытий разных составов.

*Авторы выражают благодарность заведующему отделом системного обеспечения Центра коллективного пользования ИММ УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН» Игумнову Александру Станиславовичу за помощь в проведении численных расчетов.*

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-19-00571 в части разработки подхода для идентификации модели полимерного материала при выдержке в режиме ползучести в условиях индентирования и по плану исследований темы AAAA-A18-118020790145-0 в части исследования поведения эпоксидных покрытий при локальных механических воздействиях.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Jun Wang, Xuanchang Ren, Yingjie Xu, Weihong Zhang, Jihong Zhu, Bin Lie. Thermodynamic behavior of NiTi shape memory alloy against low-velocity impact: experiment and simulation. International Journal of Impact Engineering 139 (2020) 103532.
2. Smirnov S.V., Myasnikova M.V., Pugacheva N.B.. Hierarchical simulation of plastic deformation and fracture of complexly alloyed brass. International Journal of Damage Mechanics. 2016. Vol. 25(2). pp. 251-265.
3. Cheng Y. T., Cheng C. M. Scaling, dimensional analysis, and indentation measurements, Materials Science and Engineering: R-Reports. 2004. Vol. 44. iss. 4-5, pp. 91–149.
4. J. Qin, Y.Huang, K.C. Hwang, J. Song, G.M. Pharr. The effect of indenter angle on the microindentation hardness. Acta Materialia, 2007. vol. 55. iss. 18. pp. 6127-6132.
5. Smirnov S.V., Veretennikova I.A., Fomin V.M., Filippov A.A., Brusentseva T.A. Studying the viscoelastic properties of an epoxy resin strengthened with silicon dioxide nanoparticles by instrumented microindentation. Mechanics of composite materials, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 1 – 18.
6. Hooke R., Jeeves T.A. Direct Search. Solution of Numerical and Statistical Problems. Journal of the ACM, 1961, vol. 8, pp. 212–229.

## Информация об авторах

**Смирнов Сергей Витальевич** – г.н.с., Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория микромеханики материалов, д.т.н., тел.: (343) 3744076, e-mail: [svs@imach.uran.ru](mailto:svs@imach.uran.ru))

**Мясникова Марина Валерьевна** – с.н.с., Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория микромеханики материалов, к.т.н., тел.: (343) 3623027, e-mail: [marina@imach.uran.ru](mailto:marina@imach.uran.ru))

**Коновалов Дмитрий Анатольевич** – н.с., Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, лаборатория микромеханики материалов, к.т.н., тел.: (343) 3623027, e-mail: [satterkein@yandex.ru](mailto:satterkein@yandex.ru))

**Влияние текстуры металлов и скорости нагружения на тепловыделение при  
квазистатическом растяжении**  
**Судьенков Ю.В., Смирнов И.В., Зимин Б.А.**

В работе представлены результаты исследований влияния исходной структуры металлов на процессы тепловыделения при квазистатическом растяжении и циклических испытаниях. Приводятся данные о изменении доли накапленной энергии в зависимости от анизотропии исходной структуры и ее характерных масштабов в поликристаллических образцах меди М1, дуралюминия Д16, титана ВТ6, магниевого сплава AZ31B. Показано, что термодинамика процесса пластического деформирования существенно зависит как от строение решетки, так и от анизотропии и мезомасштабов исходной структуры металлов. Работа поддержана грантом РНФ № 21-19-00563.

**Введение.** При пластическом деформировании процессы на микроуровне, описываемые классической теорией дислокаций, предшествуют коллективным процессам взаимодействия дислокаций на мезоуровне, формированию межзеренного и ротационного механизмов в поликристаллах. При этом, считается, что как на распределение, так и на плотность дислокаций влияют границы зерен, а накапленная энергия деформации считается функцией плотности дислокаций [1-5]. Поэтому очень важное значение имеет скорость деформирования и состояние материала перед деформацией, поскольку оно может определять не только степень развития дислокационных процессов, но и механизмы деформации на мезо и макро масштабах.

Одной из возможностей изучения влияния условий внешнего воздействия и параметров структуры металлов на характер изменения энергетического баланса, определяющегося равенством работы деформации ( $W$ ) сумме выделяющегося тепла ( $Q$ ) и скрытой, латентной энергии ( $L$ ), является измерение тепловыделения в ходе деформирования[6,7]. Вклад тепловыделения в энергетический баланс традиционно характеризуется коэффициентом Тейлора-Квинни  $\beta=Q/W$  [ 8,9].

В настоящей работе представлены результаты исследований влияния исходной структуры и скорости деформирования металлов на процессы тепловыделения.

**Методика и результаты.** Квазистатическое растяжение стандартных образцов в виде лопаток с размерами рабочей части  $50 \times 5 \times 2$  мм проводилось на универсальной испытательной машине SHIMADZU AG-50kNX при комнатной температуре. Изменение температуры образцов определялось по инфракрасному излучению, регистрировавшемуся тепловизионной камерой ThermaCAM SC 3000 с частотой съемки 50Гц [6]. температуры образцов определялось по инфракрасному излучению, регистрировавшемуся тепловизионной камерой ThermaCAM SC 3000 с частотой съемки 50Гц [6].

Исследовались образцы, вырезанные из листового материала (меди М1, титан ВТ6, дуралюминий Д16) вдоль и поперек прокатки. Также были изготовлены образцы из стержней исходного материала (меди М1, магниевый сплав AZ31B), и стержней обработанных по технологии равноканального углового прессования (РКУП).

На рис.1 приведены результаты испытаний на одноосное растяжение образцов меди M1, вырезанных вдоль и поперек направления проката исходного листа.

На рис.1а,б представлены зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  и  $T(\varepsilon)$ , вырезанных вдоль (сплошные линии) и поперек (пунктирные линии) направления проката,. На рис.1с приведены зависимости коэффициентов Тейлора  $\beta(\varepsilon)$ , полученным по данным представленным на рис.1а,б.

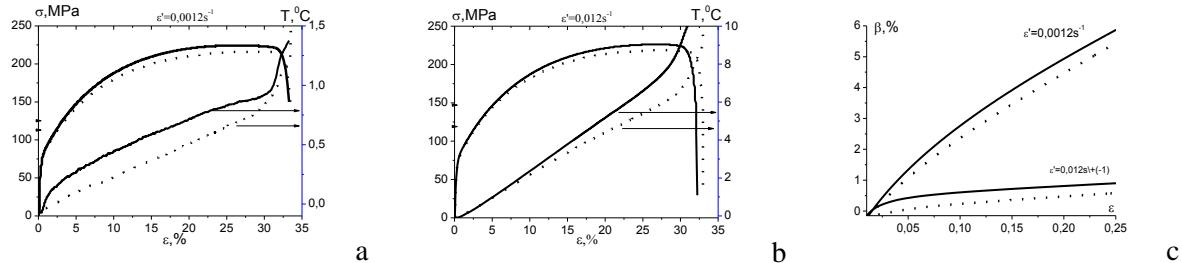


Рис.1 Зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  и  $T(\varepsilon)$  для образцов меди M1, при скоростях деформации  $\varepsilon_t^{\dot{=}} 0,0012 \text{ s}^{-1}$ -а; и  $\varepsilon_t^{\dot{=}} 0,012 \text{ s}^{-1}$ -б; зависимости коэффициентов Тейлора  $\beta(\varepsilon)$ -в. (— вдоль проката, ..... поперек проката).

Как видно, на интенсивность тепловыделения и величину его вклада в энергетический баланс влияют не только скорости деформации, но и анизотропия свойств, обусловленная текстурой, наведенной при прокатке [1,4].

На рис.2 представлены результаты циклических испытаний образцов из титана BT6, вырезанных из листа вдоль и поперек направления проката. Циклические испытания образцов проводились на машине Instron ElectroPuls E3000 с частотой нагружения  $f=10 \text{ Гц}$  и амплитудой цикла  $F=2000 \text{ Н}$ . Приведены зависимости удлинения образцов ( $u(t)$ ), изменения температуры  $T(t)$  в процессе испытаний и рассчитанные коэффициенты Тейлора  $\beta(t)$ .

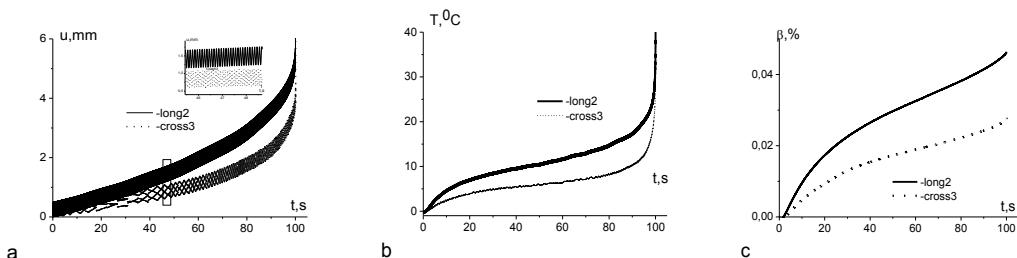


Рис2 Зависимости удлинения образцов  $u(t)$ -а, изменения температуры  $T(t)$  - б и коэффициенты Тейлора  $\beta(t)$  – с.

В дальнейшем были проведены исследования влияния размера зерна на характер процессов тепловыделения при одноосном квазистатическом растяжении. Исходные стержни меди M1 и магниевого сплава AZ31B обрабатывались по технологии равноканального углового прессования(РКУП). Образцы меди M1 имели средний размер зерен  $d \approx 45 \mu\text{m}$  и  $d \approx 0,8 \mu\text{m}$ , а в образцах сплава AZ31B  $d \approx 14 \mu\text{m}$  и  $d \approx 1,7 \mu\text{m}$ .

На рис.3 приведены результаты, полученные при одноосном растяжении меди с разным размером зерна. Сплошные кривые соответствуют результатам испытаний крупнозернистых

образцов, пунктирные –мелкозернистых. Цифры 1и 3 на рис.3с соответствуют зависимостям при  $\dot{\varepsilon}_t \approx 0,001\text{s}^{-1}$ , а цифры 2 и 4 при  $\dot{\varepsilon}_t \approx 0,01\text{s}^{-1}$ .

Результаты на рис.3а,б демонстрируют известный факт упрочнения образцов после РКУП [14], а также значительную зависимость температуры как от скорости деформирования, так и характерного масштаба структуры.

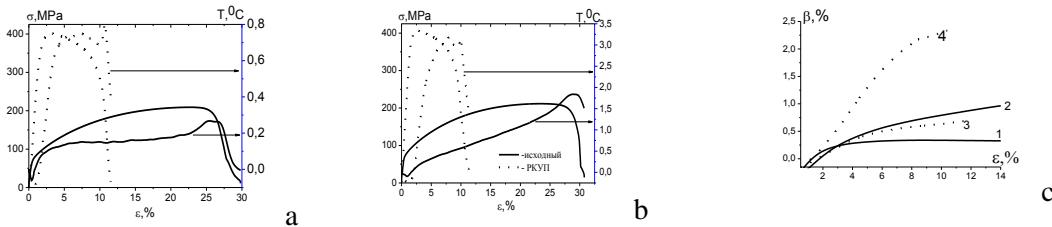
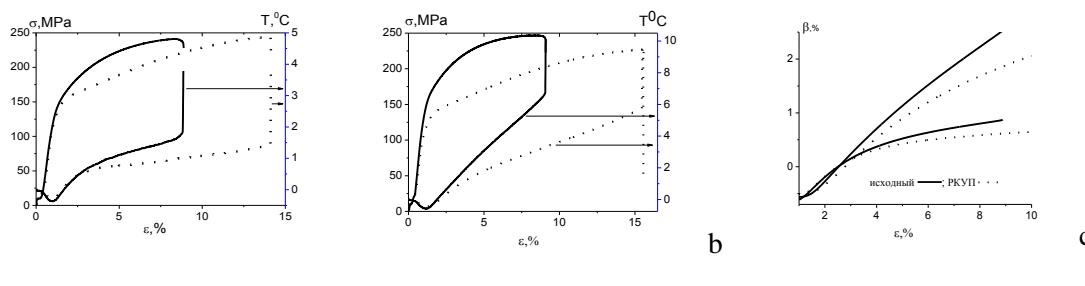


Рис.3 Зависимости  $\sigma(\varepsilon)$ ,  $T(\varepsilon)$  и  $\beta(\varepsilon)$  при одноосном растяжении медных образцов со скоростями деформирования  $\dot{\varepsilon}_t \approx 0,001\text{s}^{-1}$  - а; и  $\dot{\varepsilon}_t \approx 0,01\text{s}^{-1}$  - б; зависимости  $\beta(\varepsilon)$  - с.

(—  $d \approx 45\mu\text{m}$ , ····  $d \approx 0,8\mu\text{m}$ ; 1,3 -  $\dot{\varepsilon}_t \approx 0,001\text{s}^{-1}$ , 2,4 -  $\dot{\varepsilon}_t \approx 0,01\text{s}^{-1}$ ).

Зависимости коэффициента Тейлора  $\beta(\varepsilon)$ , приведенные на рис.3с, иллюстрируют рост тепловыделения с уменьшением размера зерна и, следовательно, ростом плотности межзеренных границ, а также с увеличением скорости деформации. Рост  $\beta(\varepsilon)$  характеризует снижение доли латентной энергии образцов в процессе деформирования, то есть уменьшение доли внутренней энергии, обусловленной дефектами структуры. При этом, чем выше скорость деформирования, тем значительнее уменьшение доли накопленной энергии  $L/W$ .

На рис.4 а,б,с приведены результаты испытаний, полученные при одноосном растяжении образцов из магниевого сплава AZ31B с размерами зерна  $d \approx 14\mu\text{m}$  и  $d \approx 1,7\mu\text{m}$ . Зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  сплава при растяжении, в отличие от испытаний меди и других ГЦК металлов, демонстрируют наличие значительного линейного участка упрочнения после стадии упругого отклика. То есть, многотемпературная технология РКУП позволяет существенно увеличить пластичность магниевого сплава. При этом отметим, что наблюдается снижение тепловыделения в образцах в процессе деформирования (рис.4с) по сравнению с результатами испытаний сплава в состоянии поставки. То есть, доля латентной энергии при деформировании магниевого сплава возрастает, в отличие от процесса накопления латентной энергии в ГЦК металлах (рис.3).



а

Рис.4 Зависимости  $\sigma(\varepsilon)$ ,  $T(\varepsilon)$  и  $\beta(\varepsilon)$  при одноосном растяжении образцов сплава AZ31B со скоростями деформирования  $\dot{\varepsilon}_t \cong 0,001 s^{-1}$ -а; и  $\dot{\varepsilon}_t \cong 0,01 s^{-1}$ -б. Зависимости  $\beta(\varepsilon)$ -с. (—  $d \approx 14 \mu m$ , .....  $d \approx 1,7 \mu m$ ).

В работах [12,13] было показано, что особенности изменения свойств магниевого сплава AZ31B после многотемпературных циклов РКУП обусловлены различием процессов динамической перекристаллизации, отличающейся от процессов в ГЦК металлах, а также существенным вкладом механизма двойникования в процессы деформирования металлов с ГПУ решеткой. Обнаруженное в экспериментах, отличие процесса накопления скрытой энергии в металлах с ГПУ и ГЦК решетками, показывает, что характер термодинамических процессов при деформировании в значительной мере контролируются процессами на микроуровне.

**Заключение.** Представленные результаты исследований показывают, что на термодинамику процесса деформирования поликристаллических металлов весьма существенно влияют строение решетки, анизотропия, например обусловленная текстурой, размер зерен и плотность межзеренных границ.

Существующие попытки теоритического описания, использующие уравнения баланса энергии при пластическом деформировании не представили на сегодняшний день модели, позволяющей учесть многообразие, взаимосвязь и иерархию механизмов пластического течения в поликристаллических металлах [14,15].

Работа поддержана грантом РНФ № 21-19-00563.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Трефилов, В. Ф. Моисеев, Э. П. Печковский Деформационное упрочнение и разрушение поликристаллических металлов, Наукова думка, К. (1987).236 с.
2. Наймарк О.Б. Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения // Физическая мезомеханика 2003. Т. 6. № 4. С. 45-72
3. Т.Е. Константинова Эволюция дислокационной структуры металлических систем в условиях высоких давлений//Физика и техника высоких давлений 2009. том 19. № 1.с.7-28
4. Козлов Э.В., Конева Н.А., Попова Н.А. Влияние размера зерен на структуру и механизмы деформации поликристаллов микро- и мезоуровня//Письма о материалах т.3 (2013) 113-117
5. Г.А.Малыгин Пластичность и прочность микро- и нанокристаллических материалов//Физика твердого тела, 2007. т.48, в.6. с.961-982
6. Б.А. Зимин, В.Е. Свентицкая, И.В. Смирнов, Ю.В. Судьенков Влияние скорости деформации на тепловыделение при квазистатическом растяжении металлов. Эксперимент//Физика твердого тела, 2018. том 60. вып. 4.с. 754-759
7. Ю.В. Судьенков Влияние ангармонизма на тепловыделение и упрочнение металлов при квазистатическом растяжении//Физика твердого тела, 2020. том 62. вып. 1.с.125-130
8. G.I. Taylor and H. Quinney. Proceedings of the Royal Society of London A 143, 307, 1934
9. Oliferuk W., Maj M., Raniecki B. Experimental analysis of energy storage rate components during tensile deformation of polycrystals // Materials science and engineering A. 2004. V. 374. P. 77-81
10. Сегал В.М., Резников В.И., Копылов В.И. Процессы пластического структурообразования металлов, Минск: Наука и техника, 1994. 232 с.

11. Р.З. Валиев, И.В.Александров Наноструктурные материалы, полученные интенсивной пластической деформацией, Логос, М.,2000. с.2172
12. R. B. Figueiredo, T. G. Langdon Grain refinement and mechanical behavior of a magnesium alloy processed by ECAP// J Mater Sci (2010) 45:4827–4836
13. P. Molnár, A. Jäger Multi-temperature equal channel angular pressing of Mg-3 wt% Al-1 wt% Zn alloy// Philosophical Magazine, 2013. Vol. 93. No. 27. 3612–3626.
14. Benzerga, A.A.; Brechet, Y.; Needleman, A.; van der Giessen, E. The stored energy of cold work// Acta Materialia 53 (2005) 4765–4779
15. Костина А.А., Баяндин Ю.В., Плехов О.А. Моделирование процесса накопления и диссипации энергии при пластическом деформировании металлов//Физическая мезомеханика, Т.17. 2014. с.43-49

**Сведения об авторах:**

**Судченков Юрий Васильевич** - ведущий научный сотрудник, доктор физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет

**e-mail:** y.sudenkov@yandex.ru

**Смирнов Иван Валерьевич**-старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет

**Зимин Борис Александрович** - доцент, кандидат физико-математических наук, Балтийский государственный технический университет "Военмех"

## Интегральное уравнение в аэродинамике вращающейся лопасти

Сумбатян М.А., Казаков Е.А.

В работе рассматривается применение классической теории малых возмущений к тонкой вращающейся лопасти. Рассмотрены несколько вариантов аппроксимации, получено двумерное интегральное уравнение, позволяющее получить распределение функции скачка давления на лопасти. Для решения двумерного интегрального уравнения используется численный метод дискретных вихрей. Применяемый численный алгоритм позволяет учесть особенности ядра и получить решение, которое автоматически удовлетворяет требуемым физическим свойствам задачи.

Рассмотрим тонкую слaboизогнутую лопасть, вращающуюся вокруг оси  $x_1$  с угловой скоростью  $\omega$ , так что в текущий момент времени ось лопасти проходит через ось  $x_2$ . Рабочая поверхность лопасти описывается уравнением  $x_1 = f(x_2, x_3)$ . Принимается линеаризованная аэродинамическая теория по малым возмущениям. Соответственно, предполагается, что угол атаки  $\alpha_b$  мал, а также мала закрученность лопасти. Таким образом, поверхность лопасти в каждой своей точке располагается близко к плоскости вращения  $x_2x_3$ , и угол между вектором нормали к поверхности лопасти и осью  $x_1$  также мал (см. рис. 1). Как следствие, граничное условие непроницаемости поверхности лопасти может быть перенесено на соответствующую ей проекцию  $S$  в плоскости вращения  $x_2x_3$ . Принятые предположения физически корректны при больших угловых скоростях для всех точек  $S$ . Кроме того, все перечисленные допущения в большой степени применимы к лопастям реальных воздушных винтов летательных аппаратов, длина и ширина которых существенно превосходят толщину, а большая часть рабочей поверхности отклоняется от плоскости незначительно. В особенности данным тенденциям соответствуют современные лёгкие мультикоптеры.

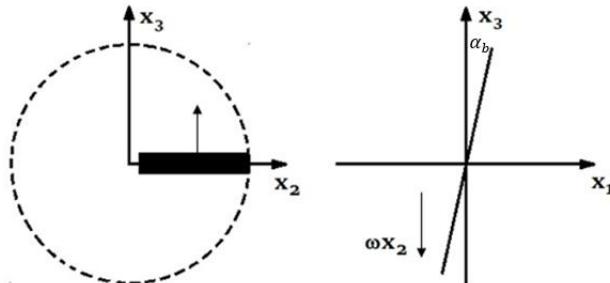


Рис. 1. Привязка координатных осей к модели тонкой лопасти

Предположим, что течение жидкости безвихревое везде, за исключением вихревой пелены, срывающейся с задней кромки лопасти. Тогда существует потенциал скорости, что после подстановки в условие неразрывности в случае несжимаемой жидкости приводит к уравнению Лапласа для потенциала [1]:

$$U = \nabla \varphi, \quad \nabla \cdot U = 0, \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad (1)$$

для всего пространства, кроме вихревой пелены и собственно поверхности лопасти  $S$ .

Из предположения, что задача является стационарной во вращающейся системе координат, связанной с лопастью, в неподвижной системе координат получаем соотношение [2]:

$$\varphi(x_1, r, \omega t + \theta, t) = \varphi(x_1, r, \theta, 0); \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

где  $(r, \theta, x_1)$  – цилиндрическая система координат для точки  $x$ .

В итоге линеаризованный интеграл Коши-Лагранжа для данной задачи имеет следующий вид ( $p'$  – возмущение давления на фоне атмосферного  $p_0$ ):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho}; \Rightarrow \frac{p'}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p'}{\rho} - \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

Также необходимо добавить граничное условие непроницаемости для обеих сторон тонкой лопасти, как для  $x_1 = +0$ , так и для  $x_1 = -0$ , в линеаризованном виде:

$$v'_1 = \omega x_2 \alpha_b \quad (4)$$

Стандартные методы теории потенциала [3] дают соотношение

$$\frac{\partial \varphi'(x)}{\partial \theta} = \iint_S \gamma(y) \frac{\partial G(y, x)}{\partial y_1} dy_2 dy_3 \quad (5)$$

где функция  $\gamma(y)$  связана со скачком аэродинамического давления на лопасти,  $G(y, x)$  – функция Грина  $G(\bar{r}, \bar{R}) = \frac{1}{4\pi|\bar{r}-\bar{R}|}$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – произвольная фиксированная точка в жидкости,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  – точка, по которой происходит интегрирование по поверхности. Равенство (5) основано на том, что аэродинамическое давление, с которым по формуле (3) связана функция (5), является регулярной функцией во всем пространстве вне поверхности  $S$ .

Продифференцировав (5) по  $x_1$  и положив  $x_1 = 0$ , имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi'(x_1 = 0)}{\partial x_1 \partial \theta} = \iint_S \gamma(y_2, y_3) \frac{dy_2 dy_3}{[(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{3/2}} \quad (6)$$

После этого проинтегрируем (6) по  $\theta$ . Данное интегрирование удобно вести от текущей точки до точек вверх по потоку на бесконечности, где нет возмущений. При этом для любого фиксированного  $x_2$  имеет место соотношение:

$$d\theta = \frac{x_2}{x_2^2 + x_3^2} dx_3 \quad (7)$$

Следовательно, представление (6) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi'(x_1 = 0)}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{x_2}{x_2^2 + x_3^2} \iint_S \gamma(y_2, y_3) \frac{dy_2 dy_3}{[(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]^{3/2}} \quad (8)$$

Таким образом, возвращаясь к условию (4), задача сводится к двумерному интегральному уравнению по поверхности лопасти  $S$ :

$$\iint_S K(x_2, x_3, y_2, y_3) \gamma(y_2, y_3) dy_2 dy_3 = \omega \alpha_b(x_2, x_3), \quad (x_2, x_3) \in S \quad (9)$$

в котором неизвестная функция  $\gamma(y_2, y_3)$  определяет распределение аэродинамического давления на лопасти,  $\alpha_b(x_2, x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_3}$  – угол атаки, равный углу между нормалью к лопасти и осью  $x_3$ . Заметим, что выбор функции  $f(x_2, x_3)$  позволяет рассматривать в рамках данной задачи произвольно закрученную лопасть любой формы. В интегральном уравнении ядро  $K$  имеет вид

$$K(x_2, x_3, y_2, y_3) = \int_{x_3}^{\infty} \frac{dz}{(x_2^2 + z^2)[(x_2 - y_2)^2 + (z - y_3)^2]^{3/2}} \quad (10)$$

и может быть выражено через элементарные функции. Применим к ядру (10) интегрирование по частям, причём

$$u = \frac{1}{z^2 + x_2^2}; \quad du = -\frac{2z}{(z^2 + x_2^2)^2} dz \quad (11)$$

$$dv = \frac{dz}{[(z - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{3/2}}; \quad v = \frac{z - y_3}{(x_2 - y_2)^2 \sqrt{(z - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2}}$$

В результате этого абсолютно точного действия из подынтегрального выражения выходит член, содержащий все интересующие нас особенности и с точностью до множителя совпадающий с главным членом уравнения классической теории тонкого крыла:

$$K = -\frac{x_3 - y_3}{(x_3^2 + x_2^2)(x_2 - y_2)^2 \sqrt{(x_3 - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2}} + \quad (12)$$

$$+ \frac{2}{(x_2 - y_2)^2} \int_{x_3}^{\infty} \frac{z(z - y_3) dz}{(z^2 + x_2^2)^2 \sqrt{(z - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2}}$$

Оставшийся интеграл  $I$  представим в виде суммы  $I_0$  и регулярного выражения  $R$ :

$$\int_{x_3}^{\infty} \frac{z(z - y_3) dz}{(z^2 + x_2^2)^2 \sqrt{(z - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2}} = I \quad (13)$$

$$I = 2 \int_{x_3}^{\infty} \frac{z \operatorname{sign}(z - y_3) dz}{(z^2 + x_2^2)^2} + R = I_0 + R \quad (14)$$

$$I_0 = \frac{\operatorname{sign}(x_3 - y_3)}{x_3^2 + x_2^2} + \frac{\operatorname{sign}(y_3 - x_3) + 1}{y_3^2 + x_2^2} \quad (15)$$

Можно показать, что при малых значениях  $x_3$  и  $y_3$

$$I_0 \approx \frac{1}{x_2^2} \quad (16)$$

Далее воспользуемся тем, что размер лопасти вдоль хорды намного меньше её размера вдоль размаха. Это позволяет принять следующее приближение, заметно упрощающее все формулы:  $z - y_3 \approx z; x_3 \approx 0$ :

$$R = \frac{2}{(x_2 - y_2)^2} \int_{x_3}^{\infty} \frac{z}{(z^2 + x_2^2)^2} \left[ \frac{z - y_3}{\sqrt{(z - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2}} - \operatorname{sign}(z - y_3) \right] dz \quad (17)$$

$$R \approx \frac{2}{(x_2 - y_2)^2} \int_0^{\infty} \frac{z}{(z^2 + x_2^2)^2} \left[ \frac{z}{\sqrt{z^2 + (x_2 - y_2)^2}} - 1 \right] dz \quad (18)$$

Значение последнего интеграла зависит от знака величины  $x_2^2 - (x_2 - y_2)^2$ . Если  $x_2^2 - (x_2 - y_2)^2 > 0$ , тогда

$$\begin{aligned} R = & \frac{2}{(x_2 - y_2)^2} \left\langle \frac{z \sqrt{z^2 + (x_2 - y_2)^2}}{2[x_2^2 - (x_2 - y_2)^2](z^2 + x_2^2)} + \right. \\ & + \frac{1}{x_2 \sqrt{x_2^2 - (x_2 - y_2)^2}} \left\{ 1 + \frac{(x_2 - y_2)^2 - 2x_2^2}{2[x_2^2 - (x_2 - y_2)^2]} \right\} \times \\ & \times \ln \left. \frac{z \sqrt{x_2^2 - (x_2 - y_2)^2} + x_2 \sqrt{z^2 + (x_2 - y_2)^2}}{\sqrt{z^2 + x_2^2}} \right|_{z=0} - \frac{1}{2x_2^2} \left. \right\rangle \end{aligned} \quad (19)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} R = & \frac{2}{(x_2 - y_2)^2} \left\langle \frac{1}{2[x_2^2 - (x_2 - y_2)^2]} - \frac{1}{2x_2^2} + \right. \\ & + \frac{1}{x_2 \sqrt{x_2^2 - (x_2 - y_2)^2}} \times \frac{-(x_2 - y_2)^2}{2[x_2^2 - (x_2 - y_2)^2]} \left( \ln \left( x_2 + \sqrt{x_2^2 - (x_2 - y_2)^2} \right) - \ln |x_2 - y_2| \right) \left. \right\rangle = \end{aligned} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{x_2^2 [x_2^2 - (x_2 - y_2)^2]} \left[ 1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - (x_2 - y_2)^2}} \ln \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 + \sqrt{x_2^2 - (x_2 + y_2)^2}} \right] \quad (21)$$

В итоге

$$K(x_2, x_3, y_2, y_3) \approx \frac{y_3 - x_3}{x_2^2 (x_2 - y_2)^2 \sqrt{(y_3 - x_3)^2 + (x_2 - y_2)^2}} + \frac{1}{x_2^2 (x_2 - y_2)^2} + \quad (22)$$

$$+ \frac{1}{x_2^2 [x_2^2 - (x_2 - y_2)^2]} \left[ 1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - (x_2 - y_2)^2}} \ln \frac{|x_2 - y_2|}{x_2 + \sqrt{x_2^2 - (x_2 + y_2)^2}} \right]; \text{ если } x_2 > |x_2 - y_2|$$

Физически этот случай реализуется равномерно по всей площади лопасти, если её рабочая плоскость целиком удалена на достаточно большое расстояние от оси вращения. Ясно, что с практической точки зрения подобная геометрия лопасти встречается крайне редко. Большее практическое значение имеют лопасти, для которых подобное условие выполняется лишь в некоторой части лопасти, а в оставшейся части наоборот

выполняется условие  $x_2 < |x_2 - y_2|$ . В этом случае вторая строка формулы (22) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_2^2[x_2^2 - (x_2 - y_2)^2]} \left[ 1 + \frac{x_2}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 - x_2^2}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{(x_2 - y_2)^2 - x_2^2}}{x_2\sqrt{z^2 + (x_2 - y_2)^2}} \right]_{z=0}^{\infty} = \\ & = \frac{1}{x_2^2[x_2^2 - (x_2 - y_2)^2]} \left[ 1 + \frac{x_2}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 - x_2^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 - x_2^2}}{x_2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

В сравнении с классической теорией тонкого крыла появляется член, содержащий компонент с логарифмом либо с арктангенсом.

Уравнение (9) решается в классе функций, удовлетворяющих условию Кутта-Жуковского, т.е. решение должно быть ограниченным на задней кромке лопасти и неограниченным на передней. Кроме того, решение должно быть ограниченным на боковых кромках – с физической точки зрения это соответствует переходу давления воздуха через законцовку лопасти.

Для решения двумерного интегрального уравнения используется численный метод дискретных вихрей [4]. На рис.2 показано, что в рассмотренном примере область лопасти в проекции является прямоугольной:  $(-b, b) \times (l, L)$ , хотя данный алгоритм применим к произвольной геометрии лопасти.

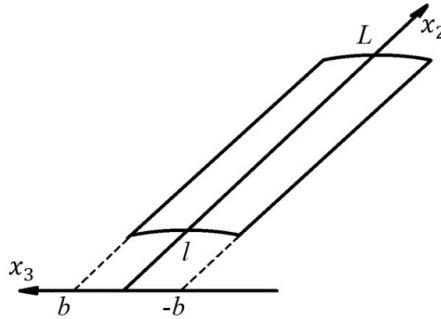


Рис. 2. Привязка координатных осей к модели тонкой лопасти

Стандартные методы дискретизации позволяют построить системы узлов по каждой из осей  $x_2, x_3$ , причём узлы для реальных координат и переменных интегрирования располагаются в одной и той же системе, причём шаг между такими узлами составляет ровно половину от шага между узлами реальных координат. Такой подход является основой метода дискретных вихрей, а также позволяет избежать при вычислении особенностей, приводящих к возникновению неопределённостей.

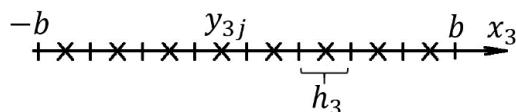


Рис. 3. Построение системы узлов по хорде лопасти

По аналогии с [5] квадратурная формула может быть применена к переменной  $y_2$ , чтобы построить соответствующую дискретную схему ( $x_2 = x_{2i}$ ), ( $i = 1, \dots, N_{x_2}$ ) для левой части интегрального уравнения (9), в которой мы ограничиваемся случаем  $x_2 > |x_2 - y_2|$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_{x_2}} \gamma(x_{2j}, y_3) \int_{x_{2j} + \frac{h_2}{2}}^{x_{2j} + \frac{h_2}{2}} \left( \frac{y_3 - x_3}{x_3^2(x_{2i} - y_2)^2 \sqrt{(y_3 - x_3)^2 + (x_{2i} - y_2)^2}} + \frac{1}{x_{2i}^2(x_{2i} - y_2)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{x_{2i}^2[x_{2i}^2 - (x_{2i} - y_2)^2]} \left[ 1 + \frac{x_{2i}}{\sqrt{x_{2i}^2 - (x_{2i} - y_2)^2}} \ln \frac{|x_{2i} - y_2|}{x_{2i} + \sqrt{x_{2i}^2 - (x_{2i} - y_2)^2}} \right] \right) dy_2 \end{aligned} \quad (24)$$

где  $N_{x_2}$  – размер сетки по переменной  $x_2$ ,  $h_2 = \frac{L-l}{N_{x_2}}$  – шаг сетки с узлами  $x_{2i} = l + \left(i - \frac{1}{2}\right) h_2$ .

Формула, аналогичная (24), легко выписывается также и для случая  $x_2 < |x_2 - y_2|$ . После интегрирования в уравнении (24) одномерное ядро по переменной  $x_3 \in (-b, b)$  содержит стандартные особенности типа Коши. При этом особенности, заключённые во второй строке (22) и соответствующие компоненты квадратурной формулы являются интегрируемыми и поэтому, в отличие от сингулярных и гиперсингулярных особенностей первых двух слагаемых, слагаемое во второй строке может быть вынесено за знак интеграла при интегрировании по малым интервалам. Применяемый численный алгоритм позволяет учесть главные особенности ядра и получить решение, которое автоматически удовлетворяет требуемым физическим свойствам задачи. После дискретизации задача сводится к некоторой линейной алгебраической системе большой размерности. Для ее решения используется метод LSQR [6], приводящий к устойчивому алгоритму.

Работа выполнена при финансовой поддержке правительства Российской Федерации, проект № 075-15-2019-1928.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 4-е издание, 1973.
2. Mescheryakov K., Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A. A boundary integral equation over the thin rotating blade of a wind turbine. Engineering Analysis with Boundary Elements. v.71. 2016. pp.20–26.
3. Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A., Mescheryakov K.I. An efficient numerical algorithm in the classical 3d theory of thin lifting surface in a flow of non-viscous incompressible fluid. Mechanics Research Communications. v.89. 2018. pp.18–22.
4. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985.
5. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. Method of discrete vortices. – CRC Press, 1992.
6. Paige C.C., Saunders M.A.. LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. ACM Trans. Math. Soft., v.8(1), 1982. pp.43–71.

### Сведения об авторах:

**Сумбатян М.А.** – профессор, Кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича, ул. Мильчакова 8а, г. Ростов-на-Дону, Россия (344090).

E-mail: [masumbatyan@sfedu.ru](mailto:masumbatyan@sfedu.ru)

**Казаков Е.А.** – аспирант, Кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича, ул. Мильчакова 8а, г. Ростов-на-Дону, Россия (344090).

E-mail: [Eugene.A.KazakoV@yandex.ru](mailto:Eugene.A.KazakoV@yandex.ru)

## Дифракция звука на узком теле в однородном набегающем потоке

Сумбатян М. А., Мусатова Н.К.

Рассматривается двумерная задача теории дифракции – дифракция звука на узкой области с острым углом в однородном безвихревом набегающем потоке с граничными условиями Неймана. Источник звука располагается произвольным образом внутри акустической среды. Задача решается в рамках метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), который сводит её к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода вдоль контура области. Квадратурная формула прямоугольников при дискретизации сводит ГИУ к СЛАУ, для решения которой используется метод наименьших квадратов. Для оптимизации решения в окрестности угла применяется более густая сетка. Результаты расчетов приводятся в графиках и таблицах.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача дифракции акустической волны на узком теле в набегающем потоке. Похожие задачи гидродинамики несжимаемой жидкости с движущейся средой для областей в виде конечного клина рассматривались в работах [1,2,3]. В статье авторов [4] рассматривался простейший случай узкого тела в акустической среде без набегающего потока. В другой работе авторов [5] сравниваются три способа решения данной задачи – полуаналитический метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), физический метод – теория дифракции Кирхгофа, и геометрическая теория, – для дифракции в неподвижной акустической среде. Это исследование показало, что наиболее точным и эффективным методом решения задачи дифракции на замкнутой области является метод ГИУ, который и используется в настоящей работе. Цель данной работы – дополнить полученные в [4,5] результаты для случая дифракции, в условиях набегающего однородного равномерного потока. Для решения задачи применяется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [6,7], который сводит задачу к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Выведем уравнение линейной акустики для двумерной задачи с движущейся средой. Пусть скорость набегающего потока равна  $u_0$ , угол раствора клина равен  $2\theta$  (рис.1). Тогда полная скорость будет состоять из суммы двух компонент  $\bar{V} = \bar{u}_0 + \bar{V}'$ . Зададим набегающий поток однородным и одномерным (см. рис.1). Следовательно, проекции скорости на оси будут равны  $V_x = u_0 + V_x'$ ,  $V_y = V_y'$ . Найдём фундаментальное решение для задачи дифракции в однородном набегающем потоке. С этой целью воспользуемся уравнениями Эйлера, неразрывности и состояния, предварительно подставив в них проекции скорости. Считая возмущенные величины со штрихами малыми, в линейном приближении получим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \bar{V}'}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial \bar{V}'}{\partial x} + \nabla p' = 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \operatorname{div}(\bar{V}') = 0 \\ p' = \rho' c^2 \end{cases} \quad (1)$$

Применим к первому уравнению системы дивергенцию и выразим её из второго. Подставим второе уравнение в первое; учтём, что  $\rho' = p'/c^2$ ; обозначим  $\gamma = u_0/c$ . И в итоге приходим к уравнению

$$(1 - \gamma^2) \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{2\gamma}{c} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} = 0 \quad (2)$$

которое совпадает с [8], полученным другим способом. В гармоническом режиме зависимость физических величин от времени выражается множителем вида  $\exp(-i\omega t)$ . Следовательно,  $p' = e^{-i\omega t} p$ . Из уравнения (2) выведем выражение для функции Грина в двумерном случае. В трёхмерном случае функция Грина получена в [8]. Имеем

$$(1 - \gamma^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p + 2ik\gamma \frac{\partial p}{\partial x} = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (3)$$

где  $k = \omega/c$  – волновое число. Для решения (3) применим преобразование Фурье по  $x$  и по  $y$ , тогда для образа Фурье акустического давления справедливо следующее выражение:

$$P(\alpha, \beta) = \frac{e^{i(\alpha x_0 + \beta y_0)}}{\alpha^2(1-\gamma^2) + \beta^2 - k^2 - 2k\gamma\alpha} \quad (4)$$

Воспользуемся обратным преобразованием Фурье:

$$p(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0))}}{\alpha^2(1-\gamma^2) + \beta^2 - k^2 - 2k\gamma\alpha} d\alpha d\beta \quad (5)$$

После некоторых нетривиальных вычислений интегралов получим, что функцией Грина для задачи дифракции с набегающим однородным безвихревым потоком является функция

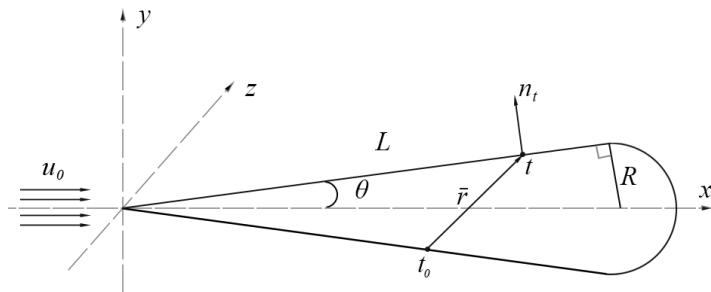
$$G(x, y) = \frac{i}{4\sqrt{1-\gamma^2}} e^{\frac{ik\gamma(x_0-x)}{1-\gamma^2}} H_0^{(1)}\left(\frac{k}{1-\gamma^2} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \quad (6)$$

Очевидно, что в случае без потока, то есть при  $\gamma=0$ , формула (6) переходит в известную [4,5]. В рамках метода ГИУ задача дифракции сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$p(t_0) - 2 \int_l \frac{\partial G(t, t_0)}{\partial n_t} p(t) dl = 2p^{\text{inc}}(t_0), \quad t_0 \in l \quad (7)$$

Здесь  $p(t_0)$  – акустическое давление на границе;  $l$  – контур области; «внутренняя» точка  $t$ , по которой происходит интегрирование, и «внешняя» точка  $t_0$  – двумерные точки на границе;  $G$  – функция Грина;  $n_t$  – нормаль к контуру;  $p^{\text{inc}}$  – акустическое давление падающей волны.

## 2. Численное решение основного ГИУ



**Рис.1.** Двумерное узкое тело с углом раствора  $2\theta$ , находящееся в однородном набегающем потоке со скоростью  $u_0$

С целью тестирования разработанного алгоритма был выбрана область, которая представляет собой две прямолинейные грани длиной  $L$ , симметрично расположенные относительно горизонтальной оси  $x$ , которые замыкает сектор круга радиусом  $R = L \operatorname{tg} \theta$  (рис.1). Точечный источник звука  $S = (x^0, y^0)$  располагается произвольным образом в непосредственной близости к острому углу области. Для дальнейшего численного решения дискретизируем граничный контур. Разобьём прямолинейные участки каждый на  $N$  элементарных отрезков, а криволинейные – на  $M$ . В сумме количество разбиений на контуре равно  $K = 2(N+M)$ . Индекс  $m$  соответствует «внешней» переменной, то есть точка  $t_0$  в декартовой системе имеет координаты  $t_0 = (x_m, y_m)$ ; индекс  $j$  соответствует «внутренней» переменной:  $t = (x_j, y_j)$ . В таких терминах производная функции Грина вычисляется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_t} &= (\nabla G \cdot \bar{n}_t) = \frac{\partial G}{\partial x} n_x + \frac{\partial G}{\partial y} n_y = \\ &= -\frac{ik}{4(1-\gamma^2)^{3/2}} e^{\frac{ik\gamma}{1-\gamma^2}(x_m-x_j)} \left( \left[ i\gamma H_0^{(1)}\left(\frac{k}{1-\gamma^2} r_{mj}\right) + \frac{(x_j-x_m)}{r_{mj}} H_1^{(1)}\left(\frac{k}{1-\gamma^2} r_{mj}\right) \right] n_x + \frac{(y_j-y_m)}{r_{mj}} H_1^{(1)}\left(\frac{k}{1-\gamma^2} r_{mj}\right) n_y \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $r_{mj} = \sqrt{(x_j - x_m)^2 + (y_j - y_m)^2}$  – расстояние между «внутренней» и «внешней» точками;

нормаль к контуру имеет координаты  $n_t = \left[ \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{h_j}; -\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{h_j} \right]$ ,  $h_j$  – расстояние между  $j-1$

и  $j+1$  элементарными отрезками. Падающая волна равна  $p^{\text{inc}} = \frac{i}{4\sqrt{1-\gamma^2}} e^{\frac{ik\gamma(x_m-x^0)}{1-\gamma^2}} H_0^{(1)}\left(\frac{kr_0}{1-\gamma^2}\right)$ ,

$r_0 = \sqrt{(x_m - x^0)^2 + (y_m - y^0)^2}$  – расстояние от точки источника звука до «внешней» точки.

Дальнейшее численное интегрирование производится квадратурной формулой прямоугольников [9]. В результате дискретизация приводит основное интегральное уравнение к СЛАУ размера  $K \times K$  относительно  $K$  неизвестных. Система решается методом наименьших квадратов LSQR [10]. Для численной реализации использовался пакет MATLAB.

Перейдем к анализу полученных результатов. Сравним полное акустическое давление в зависимости от скорости набегающего потока, то есть от параметра  $\gamma$  (рис. 2). Горизонтальная ось соответствует номеру узла на контуре. Количество разбиений для прямолинейных и криволинейных участков равно  $N = M = 1000$ . Случай  $\gamma = 0$  соответствует ситуации с акустической средой без потока и совпадает с [4]. Можно сделать вывод, что при большей скорости потока акустическое давление менее интенсивно. Вспомним, что решение было построено для произвольного расположения источника звука и воспользуемся этим – сместим источник вверх вдоль вертикальной положительной оси  $S = (-1, -1)$  и рассмотрим достаточно острый угол  $\theta = \pi/18$  (рис. 3). Сетка дискретизации контура области была выбрана таким образом, чтобы ни один узел не попадал в вершину угла. Следовательно, повышения точности вычислений мы добиваемся лишь увеличением количества разбиений, однако для достаточно острых углов этой точности недостаточно – на рисунке 3 в узлах, соответствующих окрестности вершины угла, видны всплески. Рассмотрим способ устранения этих особенностей. Он основан на введении более густой сетки в небольшой окрестности угла, в то время как на остальном контуре области можно сетку сделать менее густой. Сравнивая рисунки 3 и 4, можно сделать вывод, что при меньшей размерности матрицы –  $4000 \times 4000$  против  $6000 \times 6000$  – такой способ задания сетки более эффективен, нежели равномерный.

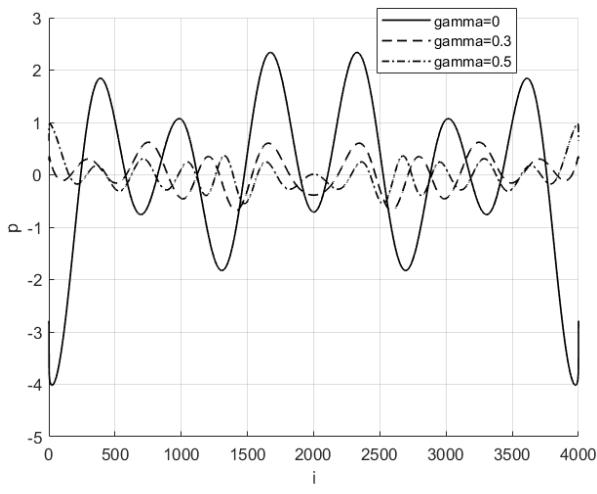


Рис. 2

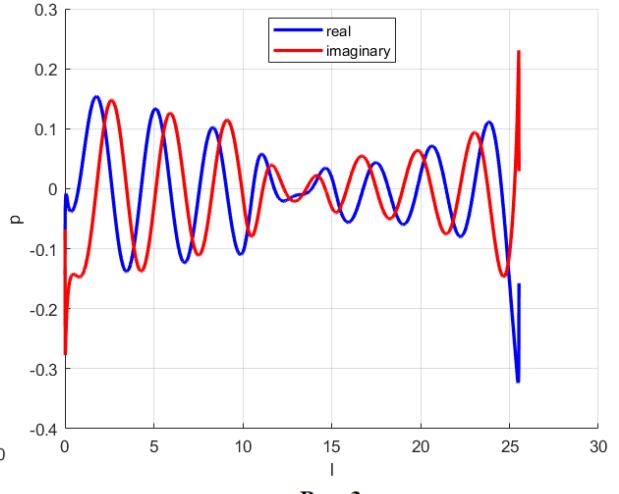


Рис. 3

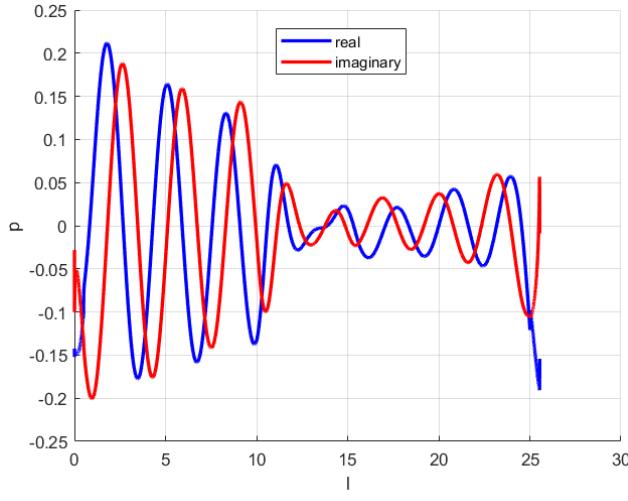


Рис. 4

**Рис. 2.** Вещественная часть акустического давления при фиксированных параметрах  $k=1$ ,  $\theta=\pi/6$ ,  $S=(-1,0)$ ,  $L=10$  и переменной  $\gamma$ .

**Рис. 3.** Сравнение вещественной и мнимой частей давления при остром угле  $\theta=\pi/18$  и несимметричном расположении источника звука  $S=(-1,1)$ . По вертикали отложено давление  $p$ , по горизонтали – длина контура  $l$  (обход контура по часовой стрелке начиная с вершины угла). Остальные параметры:  $k=1$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $L=10$ ,  $N=2000$ ,  $M=1000$ .

**Рис. 4.** Вещественная и мнимая части давления. Более густая сетка  $N_1=1000$  в окрестности острого угла размером  $L/20$  и более разреженная сетка на остальном контуре  $N_2=500$ ,  $M=500$ . По вертикали отложено давление  $p$ , по горизонтали – длина контура  $l$ . Остальные параметры:  $\theta=\pi/18$ ,  $S=(-1,1)$ ,  $k=1$ ,  $\gamma=0.5$ ,  $L=10$ .

### Заключение

- 1) Исследована задача дифракции звука на узком теле с острым углом в акустической среде с набегающим однородным потоком. В работе обобщаются результаты, полученные в [4,5], для случая набегающего потока.
- 2) Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) был выбран как самый подходящий к данной задаче. Благодаря применению функции Грина он сводит краевую задачу по замкнутой области к задаче по контуру, что значительно упрощает дальнейшие вычисления. В итоге задача свелась к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (7), которое было решено численно.
- 3) Выведено уравнение линейной акустики для двумерной задачи движущейся среды. С этой целью мы воспользовались уравнениями Эйлера, неразрывности и состояния. Полученное уравнение совпало с [4], полученным другим способом. Далее из уравнения движущейся среды с помощью прямого и обратного преобразований Фурье было найдено фундаментальное решение задачи линейной акустики – функция Грина, которая использовалась в основном ГИУ.
- 4) Для численного исследования задачи контур области был дискретизирован таким образом, чтобы узлы не попадали в вершину острого угла, дабы избежать сингулярности решения. Численное интегрирование проводилось методом прямоугольников. Основное интегральное уравнение свелось к СЛАУ с квадратной матрицей, которое было решено методом наименьших квадратов [10]. Все численные результаты были получены в среде MATLAB.

5) Графическое сравнение давлений при различных скоростях среды показало, что чем больше скорость набегающего потока, тем меньше интенсивность акустического давления (рис.2). Случай  $\gamma=0$  соответствует ситуации с акустической средой без потока.

6) Пример более острого угла  $\theta=\pi/18$  показал, что точности в окрестности вершины угла недостаточно – у соответствующих элементов решения (рис.3) заметны значительные всплески. Поэтому был предложен способ устранения этих особенностей, который основан на сгущении сетки в окрестности вершины угла. Прямолинейный участок контура разбивается на две части – небольшой участок в окрестности вершины угла с большой плотностью разбиений и остальная часть отрезка с плотностью поменьше. Этот метод при меньшей размерности матрицы позволил уменьшить всплески и тем самым повысить эффективность численного решения, уменьшив время работы процессора.

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность правительству Российской Федерации за поддержку проекта № 075-15-2019-1928.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости, М.: Наука, 1986.
2. Бетяев С.К. Обтекание вершины клина идеальной несжимаемой жидкостью, Прикладная механика и теоретическая физика, 2007. №48. с.57-65.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1, М.: Физматлит, 1963.
4. Сумбатян М.А., Мусатова Н.К. Метод граничных интегральных уравнений в задаче дифракции на узком препятствии с острой задней кромкой, Известия Национальной академии наук Армении. 2020. №3 (73). с. 62-70.
5. Сумбатян М.А., Мусатова Н.К. Излучение звука точечным источником вблизи поверхности летательного аппарата, Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2020. №1. с. 17-25.
6. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: пер с англ. М.: Мир, 1984.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов, М.: Мир, 1987.
8. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды, М.: Наука, 1981.
9. Форсайт Дж., Мальcolm M., Молер К. Машины методы математических вычислений: пер с англ. М.: Мир, 1980.
10. C.C.Paige, M.A. Saunders, LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares, ACM Trans. Math. Software, 1982. V. 8(1), p. 43-71.

### Сведения об авторах:

**Сумбатян Межлум Альбертович** – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, Россия  
**E-mail:** masumbatyan@sfedu.ru

**Мусатова Наталья Кристиановна** – аспирант, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, Россия  
**E-mail:** musatova.nataliasfedu.ru@gmail.com

## Об уравнениях Максвелла

Хачикян А. С.

Приводятся некоторые соображения автора о представлении этих уравнений, а также некоторые соотношения с этими уравнениями механической модели электрона автора .

Почти все современные исследования и практические расчеты по электродинамике основаны на уравнениях Максвелла, которые было бы справедливым называть уравнениями Максвелла – Фарадея. Существуют и предложения по развитию этих уравнений [1]. Здесь приводятся некоторые соображения по представлениям этих уравнений.

Современные представления уравнений Максвелла – Фарадея в векторном виде следующие

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}; & \text{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}; & \text{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь применены общепринятые обозначения [2].

В случае электротока в проводящей среде  $\rho = 0$ . Фактически нет свободных зарядов.

Эти уравнения основаны на двух основных непреложных экспериментальных фактах:

1. Два параллельных провода, по которым текут постоянные односторонние электрические токи, взаимно притягиваются.
2. Во всяком замкнутом проводящем контуре, при изменении магнитной индукции, проходящей через площадку ограниченную этим контуром, возникает электрический ток.

Первое из этих фактов напоминает гидродинамический процесс взаимного притягивания двух кораблей, плавающих параллельно в океане.

В первой группе этих систем уравнений отражено только генерирование постоянным током так называемого магнитного поля напряжений согласно формуле Био – Савара – Лапласа

$$\Delta \mathbf{H} = k' \frac{I[\Delta L \times \mathbf{r}]}{r^3}, \tag{2}$$

которое создает силу взаимного притягивания токопроводящих проводов.

Однако общеизвестно, что постоянный ток создает в среде также электрическое поле напряжений. Не совсем ясно, считают ли авторы этих многочисленных работ это поле вторым самостоятельным силовым воздействием электрического постоянного тока или просто другим выражением упомянутого выше магнитного поля.

Экспериментально известно также, что две одноименно заряженные электрические частицы, в частности электроны, в статическом состоянии взаимно отталкиваются известными кулоновскими силами.

Совместно с первой экспериментальной основой рассматриваемых уравнений этот факт создает определенные трудности при построении модели электрона. Поэтому рассмотрим этот вопрос в отношении нашей модели электрона [3].

В нашей модели электрон представляет из себя механический агрегат (катапульта), который существуя в эфире, отстреливает частицы. Поэтому, естественно и очевидно, что электроны в этом квазистатическом состоянии будут взаимно отталкиваться.

Постоянный электрический ток представляет собой несколько обособленную струю электронов (в этой модели, как и в действительности), которая обтекается эфиром или движется в эфире, в котором есть давление, поэтому и естественно и очевидно ожидать, что два постоянных однонаправленных тока будут взаимно притягиваться, как два корабля, плавающие параллельно в океане.

Однако у нас нет достоверных количественных оценок процесса и мы не можем оценить вклад в это явление электродинамических воздействий, если они имеют место.

Естественно, что величина сил этих двух взаимодействий будет зависеть в первом случае от величин скорости и массы отстреливаемых частиц и их количества, а во втором случае от скорости движения электронов в электрическом токе, от геометрии струи электронов и от свойств эфирной среды.

В принципе может преобладать, по величине, любая из этих двух сил, что возможно, в принципе, экспериментально наблюдать, изучив движение двух электронных параллельных лучей изменением скоростей движения электронов.

Таким образом наша модель электрона, возможно, обеспечивает эти два, противоречивых, свойства электрона, привлекая разные механические процессы.

Проблемы обтекания тел в жидкости или в газе описываются в гидромеханике [4].

Так как в уравнениях Максвелла – Фарадея явно не участвуют статические взаимодействия участвующих в токе электрических зарядов, то в первом уравнении (1), может быть, следует добавить статический член, зависящий от кулоновских сил. Однако, этот вопрос требует дополнительного изучения вследствие известной статической уравновешенности в проводящей среде положительных и отрицательных электрических зарядов. Протекание электрического постоянного тока в виде струи электронов может внести некоторую турбулентность в их уравновешенное состояние. Хотя и мы можем сейчас временно не учитывать этот факт, помня о небольшой глубине соответствующих потенциальных ямок и об относительной легкоподвижности внешних электронов, участвующих в электрическом токе в модели ядра атома. Это можно, по крайней мере, когда в электрическом токе электроны не изолированы от положительных зарядов.

Отсутствие современных исследований эфира затрудняет более подробное описание этого процесса. Эфир [5] очень сложная среда\* и таит в себе много тайн и неизвестных нам явлений, задающих или нет о себе знак с древних времен, как электричество и магнетизм, но не менее интересных и важных. Хотя Ациковский В. А. [6] пользуется представлениями газодинамики как с уравнениями эфира, но это не всегда корректно обосновано, что косвенно признает и сам автор.

---

\* Для человека с (1-2)м отличными, как ему кажется, размерами окружающий мир с  $10^{50}$  раз большими размерами есть необъятный космос. Подобным образом для частицы с  $10^{-100}$ м размерами, его окружающий мир с большей чем его собственные размеры в  $10^{50}$  раз представляется как необъятный космос, хотя этот мир меньше электрона в неописуемое число раз.

Уравнения Максвелла – Фарадея, наверное, составят если не существенную, то, по крайней мере, важную часть общих уравнений эфира, которые еще не написаны

Вторая группа систем уравнений (1) констатирует создание электродвижущей силы (ЭД) при изменении магнитного потока в контуре, обнаруженной Фарадеем.

Отметим, что это физическое явление кажется целиком и полностью тем же явлением, но обратным по протеканию во времени к явлению, описанному в первой системе уравнений, и обратны так же и в том же направлении и возможные сторонние силы, что можно просмотреть и в самих уравнениях (1), и отметим также, что Фарадей понимал это и целенаправленно искал и нашел ее. Отличие этих двух явлений состоит в приложении сторонних сил: в первом уравнении это граничное внешнее электрическое напряжение, во втором случае это распределенное влияние на электроны проводящего контура со стороны внешнего магнитного поля.

Все рассмотренные и участвующие в (1) функции желательно и могут быть выражены как функции от электрического напряжения « $E$ », так как во всех процессах изначально существует только единственное поле сторонних электрических напряжений, тем самым констатируя этот факт.

Автор выражает благодарность своему коллеге А. А. Амирджаняну за полезное обсуждение работы.

#### Литература

1. Белубекян М. В. О возможных обобщениях материальных уравнений электродинамики. 2020г. (не опубликованная пока работа),
2. Фриш С. Е., Тиморева А. В. Курс общей физики, т. 2, М 1957г.,
3. Хачикян А.С. Гипотеза о механической модели электрона. В сб: VI международная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван 2019. С. 345-347,
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2, 1973.
5. Хачикян А.С., Новая Старая Физика, Тайна Электрона, Ереван, Изд. Наапет, 2019 .
6. Ацюковский В. А. Общая эфиродинамика Моделирование структур вещества и полей на основе представлений о газоподобном эфире, Издание 2-е, Москва, ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ, 2003, 584 стр.

#### Сведения об авторе

**Хачикян Альберт Серобович** - к.ф.м.н., ведущий науч. сотр., Институт механики НАН РА,  
e-mail: [khachikyanalbert39@gmail.com](mailto:khachikyanalbert39@gmail.com)

## Частотный анализ корпуса вращающейся электрической машины

Шекян Г.Г., Геворкян А.В.

Задача о колебаниях корпуса электрической машины (ЭМ) идентична с колебанием кругового кольца, которое встречается при исследованиях частот колебаний различного рода кольцевых рам. Рассматриваются несколько простых задач о колебаниях кругового кольца постоянного поперечного сечения в предположении, что размеры сечений малы по сравнению с радиусом осевой окружности и что каждое поперечное сечение имеет ось симметрии, расположенную в плоскости кольца.

Во многих рассуждениях по поводу собственных частот приняты во внимание центробежные силы вращающихся масс. При определенных условиях существенное значение имеют не только эти силы, но и силы инерции, возникающие вследствие угловых перемещений осей вращающихся масс.

Если принять, что прогиб ротора при колебаниях весьма мал и что центр тяжести ротора совпадает с осью О (рис. 1), то положение диска ротора будет полностью определяться координатами его центра и углами поворота вала.

В электрических машинах корпус статора представляет собой ребристое круговое кольцо, к которой прикреплены установочные "лапы", а внутри корпуса наложен статор.

Рассматриваются радиальные и крутильные колебания корпуса статора, как свободное круговое кольцо.

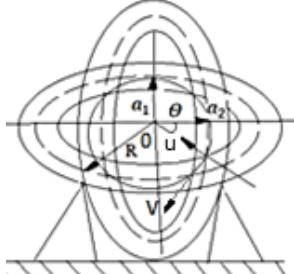


рис. 1 Колебание корпуса статора ЭМ при вращении ротора

При чисто радиальном колебании кольца, средняя осевая линия представляет из себя окружность с периодически изменяющимся радиусом [1].

Каждое поперечное сечение кольца имеет ось симметрии и каждое поперечное сечение движется в радиальном направлении деформируется без поворота.

Предполагается, что размеры поперечных сечений кольца (корпуса статора) малы по сравнению с окружностью и что

каждое поперечное радиусом сечение имеет ось симметрии, расположенную в осевой плоскости кольца.

**Постановка задачи.** Пусть ротор ЭМ вращается в корпусе с радиальным перемещением по направлении к центру статора. Тогда относительное удлинение корпуса кольца в окружном направлении будет,  $u/R$ . Здесь:

$R$  – радиус осевой линии недеформированного корпуса (кольца),  
 $u$  – радиальное перемещение по направлению к центру (что одинаковое для всех поперечных сечений), (см. рис. 1).

Потенциальная энергия деформации, состоящая из энергии растяжения, определится выражением [1- 4]:

$$\Pi = \frac{SEu^2}{2R^2} 2\pi R. \quad (1)$$

Кинетическая энергия колебания будет:

$$T = \frac{S\gamma + m_1 g}{2g} 2\pi R \dot{u}^2, \quad (2)$$

$m_1$  - масса единицы длины кольца,  $\gamma$  - удельный вес,  $S$  - площадь поперечного сечения.

Из (1) и (2) получим

$$\ddot{u} + \frac{Eg}{\gamma} \frac{1}{R^2} u = 0$$

Откуда

$$u = C_1 \cos ft + C_2 \sin ft$$

Тогда частота чисто радиальных колебаний будет

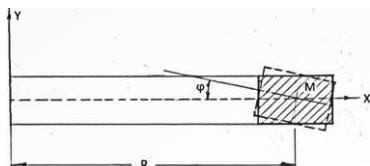
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma R^2}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma R^2}} \quad (3)$$

С учетом дополнительной нагрузки от установочных лап с весом  $Q$ , необходимо в (1) и (2) заменить на  $S\gamma + Q$  [5], где  $Q$  – вес установочных лап.

Корпус как круговое кольцо обладает также формами колебаний, аналогичными продольным колебаниям призматических стержней. Если обозначить число волн по окружности через  $n$ , то частоты высших форм колебаний растяжения корпуса (кольца) определяется выражением [6,7]:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma R^2}} \sqrt{1+n^2} \quad (4)$$

Рассмотрим теперь простейший вид крутильных колебаний. Вследствие поворота сечения корпуса на угол  $\phi$  (см. рис.2) при котором осевая линия кольца остается недеформированной а все поперечные сечения поворачиваются на один и тот же угол (рис.2). Вследствие этого поворота точка  $M$ , удаленная на расстояние “ $y$ ” от середины плоскости кольца, получит радиальное перемещение  $u\phi$  и соответствующее удлинение по окружности можно принять приблизительно равным  $u\phi/R$  [8-10]. Тогда потенциальная энергия деформации



кольца можно определить выражением:

$$P = 2\pi R \int_s \frac{E}{2} \left( \frac{yu}{R} \right)^2 ds = \frac{\pi EI_x \phi^2}{R} \quad (5)$$

где  $I_x$  - момент инерции поперечного кольца относительно оси X.

Рис.2 Поворот сечения кольца на угол  $\phi$

Кинетическая энергия колебаний будет [9,10]:

$$T = 2\pi R \frac{I_p \gamma}{2g} \dot{\phi}^2; \quad (6)$$

Здесь  $I_p$  - полярный момент инерции поперечного сечения кольца.

Из (5) и (6) имеем:

$$\ddot{\phi} + \frac{EgI_x}{\gamma R^2 I_p} \phi = 0 ,$$

Откуда будем иметь:

$$\phi = C_1' \cos \omega t + C_2' \sin \omega t ,$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\frac{EgI_x}{\gamma R^2 I_p}} .$$

Тогда частота крутильных колебаний будет:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EgI_x}{\gamma R^2 I_p}} \quad (7)$$

Для случая кругового поперечного сечения корпуса частоты высших форм крутильных колебаний определится формулой [10]:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{2\gamma R^2}} \sqrt{1+i^2}, \quad (8)$$

здесь  $i$  - число волн по окружности.

При рассмотрении изгибных колебаний в плоскости кольца (*рис.1*) принимаем, что  $\theta$  – угол, определяющий положение точки осевой линии,  $u$  – радиальное перемещение, принимаемое положительное по направлению к центру,  $v$  –касательное перемещение в направлении возрастания угла  $\theta$ ,  $I$  - момент инерции поперечного сечения относительно главной оси, перпендикулярной к плоскости кольца.

Относительное удлинение осевой линии кольца в любой точке, вызванное перемещениями, "u" и "v" будет [10,11]:

$$e = -\frac{u}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \theta}. \quad (9)$$

Тогда изменение кривизны можно представить уравнением [2]:

$$\frac{1}{R+\Delta R} - \frac{1}{R} = \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{u}{R^2} \quad (10)$$

а в общем случае изгибные колебания можно представить в виде тригонометрического ряда (здесь постоянный член ряда, соответствующий чисто радиальным колебаниям, опущен).

$$v = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots, \quad (11)$$

где  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  коэффициенты зависящие от времени.

Изгибные колебания, несопровождаемые растяжением оси кольца, из (9) будем иметь;

$$u = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (12)$$

откуда  $u = a_1 \sin \theta + \frac{1}{2} a_2 \sin 2\theta + \dots - b_1 \cos \theta - \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta - \dots,$  (13)

(здесь постоянная интегрирования, представляющая поворот кольца в его плоскости – опущена).

Тогда изгибающий момент в любом поперечном сечении кольца будет:

$$M = \frac{EI}{R^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) \quad (14)$$

и потенциальная энергия изгиба кольца можем представить в виде:

$$P = \frac{EI}{2R^4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right)^2 R d\theta, \quad (14a)$$

Подставляя ряд (12) вместо "u" и пользуясь выражениями:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0; \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = 0 \text{ при } m \neq n,$$

и

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin n\theta d\theta = 0; \int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\theta d\theta = \pi,$$

получим значение потенциальной энергии в виде [8]

$$P = \frac{EI\pi}{2R^3} \sum_{i=1}^{\infty} (1-i^2)^2 (a_i^2 + b_i^2), \quad (15)$$

Тогда кинетическая энергия колеблющего кольца будет:

$$T = \frac{S\gamma}{2g} \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) R d\theta, \quad (15a)$$

подставляя (11) и (13) в (15a) получим:

$$T = \frac{\pi RS\gamma}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) (\dot{a}_i^2 + \dot{b}_i^2) \quad (16)$$

Рассматривая внутреннее виртуальное перемещение кольца, как и в случае прямой балки  $\delta u = \delta a_i \cos i\theta, \delta v = \frac{\delta a_i}{i} \sin i\theta$ , получим дифференциальное уравнение для любой формы колебания:

$$\frac{\pi RS\gamma}{g} \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \ddot{a}_i + \frac{EI\pi}{R^3} (1-i^2)^2 a_i = 0$$

или

$$\ddot{u}_i + \frac{Eg}{\gamma} \frac{I}{SR^4} \frac{i^2 (1-i^2)^2}{1+i^2} a_i = 0$$

Тогда частота любой формы колебаний корпуса определяется выражением:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \frac{I}{SR^4} \frac{i^2 (1-i^2)^2}{1+i^2}} \quad (17)$$

При  $i=1, f=0, a=a_1 \cos \theta, u=a_1 \sin \theta$  кольцо движется как твердое тело, причем  $a_1$ -перемещение в отрицательном направлении оси X (*рис.1*). При  $i=2$  кольцо совершает изгибные колебания, соответствующие основной форме. Крайнее положение деформированного кольца показано штрихами (*рис.1*).

Частоты главных форм в случае изгибных колебаний корпуса можно определить выражением:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \frac{I}{SR^4} \frac{i^2 (1-i^2)^2}{1+i^2}}. \quad (18)$$

При  $i=1, f=0$ . Сравнивая выражения (17) и (18) можно заключить, что при низших формах колебаний ( $i=2$ ) частоты обоих типов изгибных колебаний мало отличаются друг от друга.

**Выводы и заключения.** Полученные до сих пор результаты вычислений являются приближенными и их можно применить только в случае, когда длина дуги мала по сравнению с радиусом кривизны кольца. В таких случаях эти результаты показывают, что собственные частоты несколько меньше собственных частот прямого стержня из такого же материала, такой

же длины и поперечного сечения. Так как в общем случае точное решение задачи весьма сложно, то до сих пор получены только приближенные значения собственных частот.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григоренко Я.М. Китайгородский А.Б. и др. Расчет ортотропных слоистых оболочек вращения с переменными параметрами на ЕС ЭВМ. АН Укр. ССР, институт механики, Киев "Наукова дума" 1980. 64с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М. Физматгиз. 1961. 584с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М. Наука, 1982, 360с.
4. Шекян Г.Г. Принципиальные вопросы вибрационной диагностики асинхронных двигателей. Вестник НПУА, Механика, машиноведение, машиноведение. №1. 2019, с 29-41.
5. Геворкян А.В., Шекян Г.Г. К вопросу вынужденных колебаний в системе с нелинейно-восстанавливающей силой, Вестник НПУА, Механика, машиноведение, машиноведение. №1. 2018. с. 27-37.
6. Шекян Г.Г., Геворкян А.В. О пространственных колебаниях ротора на упругих опорах. Вестник НПУА, Механика, машиноведение, машиноведение №2. 2019. с 41-50.
7. Геворкян А.В., Шекян Г.Г. Субгармонические колебания ротора на нелинейных опорах. Вестник НПУА, Механика, машиноведение, машиноведение. №2. 2016. с 53-60.
8. Шекян Г.Г., Динамика роторных машин. Ереван, изд. "Гитутюн" НАН РА. 2004. 330с.
9. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: 1935 г. 674 с.
10. Тимошенко С. П., Устойчивость стержней, пластин и оболочек, изд. "Наука" М. Физматгиз. 1971. 807с.
11. Черных К.Ф., Литейные теории оболочек, изд. ЛГУ, 1962. 4.1, 274 с. 1964, 4.2, 395 с.

### Сведения об авторах:

**Шекян Гамлет Гургенович** – д.т.н., профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН РА

Тел.- 010 56 15 23 (служ.), 010 35 11 17 (дом.), 077 17 11 35 (моб.)

E-mail: - [hamlet@mechins.sci.am](mailto:hamlet@mechins.sci.am)

**Геворкян Арамаис Викторович** – к.т.н., директор, ЗАО «Электромаш ГАМ» НП ТЦ

Тел.- 060 44 04 06 (служ.), 010 36 27 37 (дом.), 094 88 58 98 (моб.)

E-mail: - [elektramash@mail.ru](mailto:elektramash@mail.ru)

## Об особенностях исследования прямой и обратной задач о колебаниях слоистой среды с дефектом

### Явруян О.В.

Рассмотрены прямая и обратная геометрическая задачи о колебаниях слоя с трещиной различной конфигурации (прямолинейные, криволинейные, расслоения горизонтальные и вертикальные). Рассмотрены антиплюсская и плоская задачи для однородной ортотропной полосы. Получены системы граничных интегральных уравнений (ГИУ) относительно компонент функций раскрытия трещин. Проведен анализ полученных (ГИУ). Построены выражения для полей смещений, в частности, на верхней границе полосы. Решена обратная задача об идентификации трещины по граничным полям смещений, измеренным на части верхней границы полосы. Предложен асимптотический подход к исследованию прямой и обратной задачи для трещин малого относительного размера. Проведен вычислительный эксперимент по восстановлению параметров дефекта

Прямые и обратные задачи для тел с дефектами являются объектом исследования многих ученых ввиду актуальности и важности прикладных задач на расчет прочности и устойчивости конструкций [1-4]. При этом наличие трещин в телах может существенно изменить поведение объекта исследования и оказать негативное влияние на эксплуатационную способность самой конструкции. Поэтому своевременное обнаружение дефектов позволит спрогнозировать и избежать катастрофических последствий, связанных с их наличием.

Класс прямых задач о колебаниях тел с трещинами связан с построением механических полей (смещений, напряжений) при известных входных данных - данные о характере и месте приложения внешней нагрузки, о местоположении и размерах дефекта, механических свойствах рассматриваемой среды.

Класс обратных геометрических задач, направлен на обнаружение и определение геометрических параметров внутренних дефектов (полостей, трещин, включений) в слоистых средах, которые могут быть провокаторами дальнейших разрушений. Реконструкция дефекта осуществляется по полям смещений, измеренным на доступной части объекта исследования.

В работе рассмотрены динамические задачи для однородного ортотропного слоя, ослабленного внутренней тунNELьной трещиной. Колебания вызываются нагрузкой, приложенной к части верхней границы слоя. Обратная задача решена по данным о полях смещений, измеренных на части верхней границы слоя в режиме частотного или позиционного зондирования.

**Постановка и решение прямой задачи.** Рассмотрим слой толщины  $h$  с защемленной нижней гранью и ослабленного внутренней трещиной с невзаимодействующими берегами  $l_0^\pm$ . Действие трещины в рамках теории дислокаций заменяется действием фиктивных массовых сил  $f_i$ , которые выражаются через компоненты функции раскрытия  $\chi_j$ .

Краевая задача с учетом установившегося режима колебаний имеет следующий вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \quad (1)$$

$$u_i|_{S_1} = 0; \quad \sigma_{i3}|_{S_\sigma} = p_i, \quad \sigma_{i3} = 0, \quad x \in S_2 \setminus S_\sigma \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} n_j^\pm|_{l_0^\pm} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

где  $\rho$  - плотность материала,  $C_{ijkl}$  - упругие модули,  $\omega$  - частота колебания,  $S_1$ ,  $S_2$  - нижняя и верхняя границы слоя соответственно,  $S_\sigma \in S_2$  - область приложения нагрузки интенсивности  $p_i$ . Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечности, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [5].

При исследовании прямых и обратных задач для слоя с трещиной выделяются три основных параметра задачи:  $\varepsilon_1 = l/h$ ,  $\varepsilon_2 = \omega h/c$ ,  $\varepsilon_3 = \omega l/c = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ , где  $l$ ,  $c$  - длина трещины и характерная скорость волны в среде. В настоящем исследовании решения прямых и обратных задач осуществляются в области изменения параметров  $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_*$ , ( $\varepsilon_*$  - критическая частота).

Рассмотрены антиплюсская ( $i=2, j=1,3$ ) и плоская задачи ( $i,j=1,3$ ) теории упругости.

Построено волновое поле смещений в слое  $S$ , которое представлено в виде суммы эталонного поля и поля, обусловленного наличием трещины

$$u_m(x) = u_m^{sm}(x) + \int_{l^+} \sigma_{ij}^{(m)}(\xi, x) n_i(\xi) \chi_j(\xi) dl_\xi, \quad x \in S \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}^{(m)}(\xi, x)$  - компоненты тензора напряжений (сингулярные решения), которые определяются на основе фундаментальных решений для слоя и закона Гука [6]. Стоит отметить, что в случае областей, содержащих бесконечно удаленную точку, фундаментальные решения не могут быть представлены через элементарные или специальные функции и записываются только в виде интегральных представлений.

Для определения компонент функции раскрытия получена система ГИУ с гиперсингулярными ядрами

$$\int_{l^+} K_{ij}(\xi, x) \chi_j(\xi) dl_\xi = F_i(x), \quad x \in l^+ \quad (5)$$

Процедура решения систем ГИУ достаточно сложна и требует значительной вычислительной работы. Выделены главные члены асимптотики ядер ГИУ на бесконечности, и ядра интегральных операторов представлены в виде суммы нерегулярной и регулярной частей. Для трещин, допускающих параметризацию

$$x_j = q_j(t), \quad y_j = q_j(\tau), \quad t, \tau \in [-1, 1]$$

$$q_1(t), q_3(t) \in C^1[-1, 1], \quad g(t) = \sqrt{q_1'^2(t) + q_3'^2(t)} \neq 0$$

системы ГИУ можно записать в виде:

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{R_{ji}(t, \tau)}{(t - \tau)^2} + \tilde{K}_{ji}^{(1)}(t, \tau) \right] \tilde{\chi}_j(\tau) q(\tau) d\tau = \tilde{F}_i(\tau), \quad \tau \in [-1, 1] \quad (6)$$

Система ГИУ (6) может быть решена при помощи метода граничных элементов, метода коллокаций, квадратурных формул для сингулярных интегралов, которые понимаются в смысле конечного значения по Адамару. Далее на основе найденных узловых значений  $\chi_j$  могут быть построены волновые поля в слое по выражению (4).

Проведен анализ зависимости волновых полей перемещений на верхней границе слоя от конфигурации трещины, ее заглубления и частоты колебания, который может быть полезен при исследовании благоприятных с точки зрения задачи идентификации областей.

**Асимптотический подход.** Исследование прямых задач для тел с трещинами значительно упрощается при учете малости относительного размера трещины по сравнению с размерами тела  $\varepsilon_1 \ll 1$ , в случае полосы, в качестве эталонного размера рассматривается толщина слоя  $h$ .

Для трещин, допускающих параметризацию конечным числом параметров  $\theta_i, i = 1..N$ , одним из которых является характерная длина трещины  $l$ , например,  $\theta_1 = l$ , асимптотический анализ интегральных уравнений (6) при  $l \rightarrow 0$  приводит к системе интегральных уравнений с постоянной правой частью

$$\int_{-1}^1 \frac{G_{ji}(\theta_m, \omega)}{(t - \tau)^2} \chi_j^*(t) dt = F_i^*(\theta_m, \omega), \quad \tau \in [-1, 1], \quad i, j = 1, 2, 3, \quad m = 2..N \quad (7)$$

$$\chi_j^*(t) = l^{-1} \chi_j(t), \quad F_i^*(\theta_m, \omega) = \lim_{l_0 \rightarrow 0} F_i(\tau, \omega)$$

Система интегральных уравнений (7) имеет решения в классе ограниченных функций вида

$$\chi_j(t) = \sqrt{1 - t^2} W_{0j}(\theta_m), \quad j = 1, 2, 3, \quad m = 2..N, \quad (8)$$

Т.о. получено простое полуаналитическое выражение для нахождения функции раскрытия трещины.

Вычисляя контурный интеграл в выражении (4) по теории вычетов и выделяя амплитуды поля перемещения на верхней границе ( $x_1 > 0$ ) в дальней зоне, получим удобную

для вычислений формулу для расчета волнового поля, которую далее можно эффективно использовать при решении обратной задачи

$$u_m(x_1, h) = u_m^{(m)}(x_1, h) + \sum_{n=1}^N A_{mn} e^{i\alpha_n x_1} + O(e^{-\alpha_1}), \quad \varepsilon > 0 \quad (9)$$

$$A_{mn} = (-1)^{n+1} l_0^2 P_m(L, d_0, \theta) [\gamma_{1nm}(d_0, \theta) - i\gamma_{2nm}(d_0, \theta)], \quad P_m(L, d_0, \theta) = \pi W_{0m}/(2h)$$

**Обратная задача идентификации трещины.** Обратная задача идентификации трещины состоит в определении конфигурации трещины по измеренному на части верхней границы слоя  $S_u$  полю смещений

$$u_i|_{S_u} = g_i(x_1), \quad S_u = \{x_1 \in [a, b], x_3 = h\}, \quad (10)$$

Задача идентификации значительно упрощается в случае трещины, допускающей параметризацию конечным числом параметром. В этом случае решение обратной задачи сводится к нахождению этих параметров. Наиболее эффективной схемой их определения является минимизация неквадратичного функционала невязки, в результате которой определяются параметры трещины

$$\Phi(\theta_k) = \sum_{m=1}^N |u_i(x_1^{(m)}, \omega, \theta_k) - g_i(x_1^{(m)}, \omega)|^2 \rightarrow \min_{\theta_k}, \quad x_1^{(m)} \in [a, b]. \quad (11)$$

В случае трещин малого относительного размера, удается существенно упростить решение обратной задачи, сведя ее к последовательному определению параметров трещины из простых трансцендентных уравнений. Восстановление параметров осуществляется из анализа амплитудных значений полей смещений, измеренных в комбинированном эксперименте (частотное и позиционное зондирование).

Предлагаемый асимптотический подход к решению обратной задачи реализован численно для прямолинейной внутренней трещины, расслоения от нижней границы полосы, вертикальной трещины, расположенной на стыке двух полуслоев и криволинейной трещины. Приведем результаты для плоской задачи в случае криволинейной трещины (дуги окружности в разрезе), параметрическое уравнение которой имеет вид

$$x_1 = R \cos(\theta_1 t + \theta_2) + x_{1c}, \quad x_3 = R \sin(\theta_1 t + \theta_2) + x_{3c}, \quad t \in [-1, 1] \quad (12)$$

В качестве характерных параметров выбраны следующие характеристики:  $R, x_c = (x_{1c}, x_{3c})$  – радиус окружности и координаты ее центра, определяющие местоположение дефекта относительно точки приложения нагрузки (глубина залегания дефекта и его удаленность);  $\theta_1, \theta_2$  – «угловые» параметры дефекта, определяющие угол дуги сегмента окружности и угол наклона прямой, соединяющей центр окружности и середину дуги, относительно нижней границы полосы. Если обозначить углы, ограничивающие рассматриваемую дугу окружности через  $t_1, t_2$ , то  $\theta_1 = (t_2 - t_1)/2, \theta_2 = (t_2 + t_1)/2$ .

Основным параметром асимптотического анализа служит относительная длина дефекта, в случае дефекта вида дуги окружности подобным параметром является отношение полудлины дуги к толщине слоя  $\varepsilon = \varepsilon_1/h, \varepsilon_1 = R\theta_1$ . В результате вычислительного эксперимента, определены рабочие диапазоны предлагаемого подхода относительно геометрических параметров дефекта и свойств зондируемого сигнала. Результаты восстановления параметров трещины для полосы из аустенитной стали в зависимости от относительного размера дефекта и от глубины залегания трещины приведены в табл. 1 для криволинейной трещины в случае антиплюской задачи, при  $k = 6.0$

Асимптотический подход позволяет с точностью 1-5% восстанавливать параметры трещины, зная всего лишь амплитудные значения двух бегущих волн.

Результаты численных экспериментов подтверждают эффективность предлагаемого асимптотического подхода для решения обратной задачи идентификации параметров прямолинейной и криволинейной трещин, в рамках установленного диапазона применимости  $l \leq 0.1h$ .

**Таблица 1. Результаты восстановления параметров дефекта при  $k = 6.0$ ,  $R=0.1$ .**

$t_1(^{\circ})$	$t_2 = t_1 + 2\theta_1, (^{\circ})$	$\xi_{1c}$		$\xi_{3c}$		$\theta_2(10^{-3})$		$\varepsilon_1 = R\theta_1(10^{-4})$	
ex	ex	ex	id.	ex	id	ex	id	ex	id
<b>ЗАГЛУБЛЕННАЯ</b>									
$\pi/4$	0.01	1.2	1.199	0.1	0.1	0.79	0.79	4.999	4.99
<b>СРЕДНЕЕ ЗАГЛУБЛЕНИЕ</b>									
$\pi/4$	0.01	1.2	1.2	0.6	0.6	0.79	0.79	4.99	5.31
0			1.199		0.599	0.005	0.0056	4.99	5.01
$\pi/3$			1.2		0.599	1.052	1.052	4.99	5
			1.2		0.599	1.057	1.057	9.99	10
$5\pi/6$	0.01	1.2	1.2	0.6	0.599	2.623	2.623	4.99	4.99
	0.03		1.2	0.6	0.6	2.633	2.633	14.99	14.99
<b>ПРИПОВЕРХНОСТНАЯ</b>									
$2\pi/3$	0.01	1.2	1.2	0.85	0.89	2.099	1.816	4.99	11.1
$\pi/3$	0.01	1.2	1.21	0.85	0.86	1.052	1.115	4.99	5.33

\* ex - точные значения, id - восстановленные,  $\varepsilon_{\theta_m}$  - погрешность реконструкции параметра  $\theta_m$  (%)

### ЛИТЕРАТУРА

1. Fomenko S.I., Golub M.V., Bui T.Q., Zhang Ch., Wang Y.-S. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals // International Journal of Solids and Structures. 2014. V. 51. Issue 13. pp. 7444-7456.
2. Соловьев А.Н., Соболь Б.В., Краснощеков А.А. Идентификация и исследование критического состояния поперечной трещины в полосе с накладкой на основе искусственных нейронных сетей // Дефектоскопия. 2014. № 8. С. 23-35
3. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. Hypersingular shape sensitivity boundary integral equation for crack identification under harmonic elastodynamic excitation // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2007. V.196. pp. 2596-2618
4. Shifrin E.I. Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // Mechanical Systems and Signal Processing V. 70–71. 2016. pp. 613–624
5. Ворович И.И., Бабешко В.В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей - М.: Наука, 1989. 320 с
6. Ватулян А.О., Явруян О.В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ.2006. №4. С. 714-724
7. Vatul'yan A.O., Yavruyan O.V. An Asymptotic Method for Solving the Problem of Identifying a Curvilinear Crack in an Elastic Layer // Russian Journal of Nondestructive Testing, 2020. Vol. 56. No. 10. pp. 810–819.

### Сведения об авторах:

**Явруян Оксана Вячеславовна** - к.ф.-м.н., старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Южного математического института ВНЦ РАН, доцент кафедры теории упругости ЮФУ+7(908)5155826  
**E-mail:** yavruyan@mil.ru

# Periodic waves in a layer with inertial masses in the boundaries

Aleksanyan H.N., Avetisyan L.V., Sarkisyan S.V.

within memory of prof. S.V. Sarkisyan

The influence of concentrated masses distributed over the surfaces of the elastic layer on the characteristics of the elastic waveguide is investigated. To determine the phase velocities of propagation of symmetric and anti-symmetric vibrations, dispersion equations are obtained. The influence of concentrated surface masses on the surface wave velocity is shown. The conditions are established between the length of the induced wave and the values of inertial masses distributed at the boundaries of the elastic layer, under which the surface wave cannot exist.

## Introduction

In the process of studying the wave propagation in elastic bodies, the choice of boundary conditions plays a special role. Numerous studies have been devoted to the propagation of surface waves with non-classical boundary conditions [1-4] etc.

In paper [2] instead of the boundary conditions of the free surface for an elastic isotropic half-space two ways of complicated boundary conditions were considered. The conditions under which the surface wave cannot exist were established. The periodic waves in an elastic layer, when normal and tangential stresses are constrained at the layer boundaries, were studied in [4], where the influence of the constraint coefficient on the phase velocity of symmetric and antisymmetric oscillations of the layer is shown.

In this paper influence of concentrated masses distributed over the surfaces of the elastic layer on the characteristics of the elastic waveguide is investigated.

## 1. Problem statement

Let us consider plane-stressed condition of an elastic isotropic layer with thickness  $2h$ , with a displacement vector  $\bar{u}(u(x, z, t), 0, w(x, z, t))$ . The layer in a rectangular Cartesian coordinate system occupies the following region  $L = \{(x, y, z); x, y \in (-\infty, \infty), z \in [-h, h]\}$ .

The choice of boundary conditions plays an important role in mathematical modelling of physical phenomena. When studying wave propagation process in elastic bodies, is accepted one of the following assumptions: the boundaries of the body are rigidly fixed (Dirichlet conditions) or the boundaries of the body are free (Neumann conditions).

Here, we assume that on surfaces  $z = \pm h$ , the following boundary conditions are set:

$$\sigma_{zz}(x, z, t) = \mp m_2 \frac{\partial^2 w(x, z, t)}{\partial t^2}, \quad \sigma_{zx}(x, z, t) = \mp m_1 \frac{\partial^2 u(x, z, t)}{\partial t^2} \quad (0.1)$$

where  $m_1, m_2 > 0$  are concentrated (inertial) masses. The boundary conditions (1.1) can appear due to either the presence of a thin layer of a material with a different characteristics from the material of the layer [5], or the presence of a concentrated mass, distributed over the planes  $z = \pm h$ .

In absence of inertial masses, the boundary conditions (1.1) match to the case of free boundaries. If at the same time inertial masses tend to infinity, we have rigidly fixed boundaries of the body, and in case of individual extremely great values of the inertial masses, we get mixed boundary conditions.

After transformations [6]

$$u(x, z, t) = \frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x, z, t)}{\partial z}, \quad w(x, z, t) = \frac{\partial \varphi(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \psi(x, z, t)}{\partial x} \quad (0.2)$$

to dynamic equations of elasticity theory for potentials  $\varphi(x, z, t)$  and  $\psi(x, z, t)$  we get two dimensional autonomous wave equations.

Using Hooke's law boundary conditions (1.1) at the surfaces and the transformations (1.2), the elasticity's equations are lead to the following form:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \pm m_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \pm \frac{m_1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (0.3)$$

In an elastic isotropic layer, the periodic wave propagates with phase velocity  $c$ .

## 2. Solution

Let us assume the following problem. The problem is to find the solution of two-dimensional wave equations satisfying the boundary conditions (1.3).

The solutions of the wave equations are represented in the form [6]

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= (A \operatorname{sh}(v_1 z) + B \operatorname{ch}(v_1 z)) \exp[ik(x - ct)] \\ \psi(x, z, t) &= (C \operatorname{sh}(v_2 z) + D \operatorname{ch}(v_2 z)) \exp[ik(x - ct)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

where  $A, B, C$  and  $D$  are arbitrary constants,  $\lambda$  and  $\mu$ -elastic constants,  $v_1^2 = k^2(1 - \eta\theta)$ ,  $v_2^2 = k^2(1 - \eta)$ ,  $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $c_2^2 = \mu/\rho$ ,  $\theta = c_2^2/c_1^2$ ,  $\eta = \omega^2/(k^2 c_2^2) = c^2/c_2^2$ .

Any solution for  $u(x, z, t)$  and  $w(x, z, t)$  can be represented as a linear combination of four integrals, associated with the roots of the characteristic equation  $v_i (i = \overline{1, 4})$ .

Since the displacement component  $u(x, z, t)$  and the stress component  $\sigma_{zz}(x, z, t)$  are symmetric, and the displacement component  $w(x, z, t)$  and the stress component  $\sigma_{zx}(x, z, t)$  are anti-symmetric relatively to surface  $z = 0$ .

From boundary conditions (1.3) for the symmetric modes and the anti-symmetric oscillations following dispersion equations for dimensionless characteristics of square of phase velocity  $\eta(\omega, k)$  are obtained

$$\begin{aligned} (2 - \eta)^2 \operatorname{th}(H \sqrt{1 - \eta}) - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \eta\theta)} \operatorname{th}(H \sqrt{1 - \eta\theta}) + \frac{\alpha_1}{H} \eta \sqrt{1 - \eta} + \\ + \frac{\alpha_2}{H} \eta \sqrt{1 - \theta\eta} \operatorname{th}(H \sqrt{1 - \eta}) \operatorname{th}(H \sqrt{1 - \eta\theta}) - \\ - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{H^2} \left( \operatorname{th}(H \sqrt{1 - \eta}) - \operatorname{th}(H \sqrt{1 - \eta\theta}) \sqrt{(1 - \eta)(1 - \eta\theta)} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} (2 - \eta)^2 \operatorname{cth}(H \sqrt{1 - \eta}) - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \eta\theta)} \operatorname{cth}(H \sqrt{1 - \eta\theta}) + \\ + \frac{\alpha_2}{H} \eta \sqrt{1 - \theta\eta} \operatorname{cth}(H \sqrt{1 - \eta}) \operatorname{cth}(H \sqrt{1 - \eta\theta}) + \frac{\alpha_1}{H} \eta \sqrt{1 - \eta} - \\ - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{H^2} \left( \operatorname{cth}(H \sqrt{1 - \eta}) - \operatorname{cth}(H \sqrt{1 - \eta\theta}) \sqrt{(1 - \eta)(1 - \eta\theta)} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Here the  $H = kh$ ,  $\alpha_1 = m_1 \omega^2 h \mu^{-1}$  and  $\alpha_2 = m_2 \omega^2 h \mu^{-1}$  are dimensionless wave parameters.

In the case, when  $m_i = 0$ , from (2.1) and (2.2) equations, we have Rayleigh-Lamb dispersion equation [6]. From these characteristic equations for given values of material parameters  $\rho, \mu, \lambda, c_i, m_i$  ( $i = 1, 2$ ) and frequency  $\omega$ , the phase velocity  $c(\omega)$  can be found.

## 3. Analysis of dispersion equation

Here the analysis for dispersion equation (2.1) is carried out (symmetrical mode).

Let us consider limiting.

a) In the case, when the wavelength  $l = 2\pi/k$  is greater compared to the layer thickness  $2h$ , the finite values of  $c(\omega)$   $H\sqrt{1-\eta\theta}$  и  $H\sqrt{1-\eta}$  would be smaller. Therefore, from (2.1) it is obtained [6,24]

$$c(\omega) = \frac{2c_2}{\sqrt{1-\alpha_2\theta}} \sqrt{1-\theta - 0.25(\alpha_1 H^{-2} + \alpha_2) + 0.25\alpha_1\alpha_2\theta H^{-2}} \quad (2.1)$$

When  $\mu = \lambda$  and  $\nu = 1/4$ , for  $c_1^2 = 3c_2^2$  and from formula (3.1) it is obtained

$$c(\omega) = c_{psh} \equiv c_2 \sqrt{\frac{8 - 3(\alpha_1 H^{-2} + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 H^{-2}}{3 - \alpha_2}} \quad (2.2)$$

b) Wavelength is smaller compared to the layer thickness  $2h$ . From equation (2.1) it is obtained

$$L(\eta) \equiv R(\eta) + \eta H^{-1} (\alpha_1 \sqrt{1-\eta} + \alpha_2 \sqrt{1-\eta\theta}) - \alpha_1\alpha_2 H^{-2} (1 - \sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}) = 0 \quad (2.3)$$

Where  $R(\eta) \equiv (2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\eta\theta)}$  is Rayleigh function.

Equation (3.3) when  $m_i = 0$  is match with classic equation of Rayleigh [8]. This is dispersion equation, the phase velocity  $\eta$  of which is depends on the wave number  $k$ . Note that similar dispersion equation was obtained for the Rayleigh problem when the boundary of half space is elastically constrained either along to the normal direction or tangential direction in [4]. In the work [4] also established the conditions, under which the surface wave cannot exist and the conditions for existence of a surface wave, depending on the coefficient characterizing constraint, and wavelength.

Equation (3.3) has a root  $\eta = 0$ , which consider with trivial solution. Following to the paper [4], excluding  $\eta = 0$  root, the equation (3.3) will be presented in the following form

$$X(\eta) \equiv \eta - \frac{4(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta} + \sqrt{1-\theta\eta}} + \frac{1}{H} (\alpha_1 \sqrt{1-\eta} + \alpha_2 \sqrt{1-\eta\theta}) - \frac{\alpha_1\alpha_2}{H^2} \frac{(1-\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta} + \sqrt{1-\theta\eta}} = 0 \quad (2.4)$$

Function  $X(\eta)$  when  $\eta = 0$  and  $\eta = 1$  takes following values correspondingly

$$X(0) = -2(1-\theta) + H^{-1}(\alpha_1 + \alpha_2) - 0.5\alpha_1\alpha_2 H^{-2}(1-\theta)$$

$$X(1) = 1 + \alpha_2 H^{-1} \sqrt{1-\theta}.$$

$X(1) > 0$  for every physical-geometrical parameters and (3.4) equation will have solution in  $\eta \in (0,1)$  interval, if  $X(0) < 0$  and in this case will be the only one. Choosing the values  $\alpha_i$  and  $H$  satisfying  $X(0) < 0$  condition, values of phase velocity of surface wave can be obtained. In absence of concentrated masses and at  $\nu = 0.25$  for the phase velocity of the surface wave, we have  $c_R \approx 0.9194c_2$ . In presence of concentrated masses for the layer with given thickness can lead to disappearance of the surface wave. In the general case of symmetrical oscillations, the phase velocity  $c$  must be determined from complete dispersion equation (2.1). From discussion of boundary cases, that for first form of symmetric oscillations of phase velocity lies in  $c_{psh} \geq c \geq c_{Rs}$  interval where  $c_{Rs}$  – is root of dispersion equation (3.3). Note that, for the first form of antisymmetric oscillations, when wavelength greater than the thickness of the layer, it is possible to determine the phase velocity of dispersive banding wave. Numerical results.

In the tables 1-3 are shown the numerical results according to the equation (3.4) for  $\eta$  parameter, characterizing square of phase velocity of the surface wave in dependence of  $\alpha_i$  parameters and  $H = kh$  when  $\theta=1/3$ .

Table 1

$\alpha_1 H^{-1}$	0	0	0	0	0	0
$\alpha_2 H^{-1}$	0	0.03	0.3	0.7	1	1.1
$\eta$	0.8453	0.8358	0.7332	0.5177	0.3008	0.2173

Pic.1 shows the actions of  $X(\eta)$  function for various values of  $\alpha_i / H$ . Numerical analysis shows influence of concentrated masses on surface wave velocity. By increasing values of concentrated masses, distributed over the surface  $z = \pm h$  of body, leads to the fact that velocity of surface wave, at the given values of thickness of the layer are decreasing. Decrease is getting greater if concentrated masses is basically distributed along to the normal direction to the layer.

Table 2

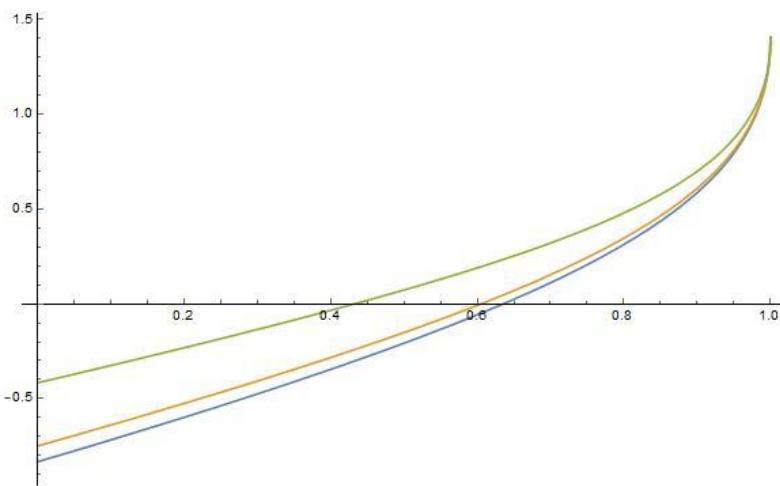
$\alpha_1 H^{-1}$	0.03	0.3	0.7	1	1.1
$\alpha_2 H^{-1}$	0	0	0	0	0
$\eta$	0.8409	0.7904	0.6536	0.4464	0.3421

The variations of inertial masses values can lead to disappearance of the surface wave. Let us consider that inertial mass is distributed only along to tangential direction to the layer.

Table 3

$\alpha_1 H^{-1}$	0.05	0.25	0.25	0.5	0.5	1
$\alpha_2 H^{-1}$	0.25	0.05	0.25	0.05	0.25	0.05
$\eta$	0.7437	0.7818	0.6917	0.7101	0.5994	0.4065

In this case surface wave exists and at  $\alpha_1 H^{-1} = 1/3$  value of the square of phase velocity is  $\eta = 0.7843$ . Now, if the inertial mass is distributed at the boundary of the layer in the normal direction to it, then this distribution leads to the disappearance of the surface wave (at  $\alpha_2 H^{-1} = 1.25$ ).



Pic.1 Behaviours of  $X(\eta)$  function at  $\alpha_2 / H = 0.5$ ,  $\alpha_1 / H = 0, 0.1, 0.5$ .

#### **4. Conclusion.**

In this paper shown the impact of concentrated masses, distributed over the plane of the elastic layer, on characteristics of elastic waveguide. In order to determine phase velocity of symmetric and antisymmetric oscillations the dispersion equations are obtained. It has been established, that an increase of the values of the concentrated masses, distributed over the plane of the layer  $z = \pm h$ , leads to decreasing the speed of the surface wave at the given values of the layer thickness. Moreover, decrease becomes greater if the concentrated (inertial) mass is mainly distributed along to the normal direction to the layer. The variations of inertial masses values can lead to disappearance of the surface wave.

#### **References**

- [1] Vilde M. V., Kaplunov Yu. D., Kossovich L. Yu., Boundary and interface resonance phenomena in elastic bodies. Fizmatlit. Moscow. 2010. [in Russian].
- [2] Belubekyan M.V. The Rayleigh waves in the case of the elastically restrained boundary. //Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 2011.V.64. №4.P.3–6, [in Russian].
- [3] Achenbach J. D., Wave propagation in elastic solids. North-Holland. 1984. 425 p.,  
<https://doi.org/10.1002/zamm.19750550329>
- [4] Belubekyan V.M., Belubekyan M.V. Three-dimensional Problem of Reyleight Wave Propagation. NAS RA Repors. 2005. v.105. №4. p.362-369. [in Russian].
- [5] Sarkisyan A.S., Sarkisyan S.V. Waves in an elastic layer with inertial mass on the border. Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 72 (1).2019. pp. 65-72. ISSN 0002-3051, [in Russian]. <http://doi.org/10.33018/72.1.6>
- [6] Kossovich L.Y., Mukhomodyarov R.R., Parfenova Y.A., Wave propagation in an elastically restrained isotropic layer. Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Mechanics. 2008. no. 8/2 (67). pp. 78–89. [in Russian], <https://journals.ssau.ru/est/issue/view/478>

#### **Information about authors**

Aleksanyan Hasmik – Master of Mechanics, Faculty of Mathematics and Mechanics, YSU, Yerevan.  
E-mail: [hasmik.aleqsanyan17@gmail.com](mailto:hasmik.aleqsanyan17@gmail.com)

Avetisyan Levon – Ph.D. student, NAS RA, Yerevan, Armenia +374(93)454778  
E-mail: [levon.avetisyan97@gmail.com](mailto:levon.avetisyan97@gmail.com)

# **Updating Reservoir Properties for High-Viscosity Oil Fields at the Late Stage of Production**

**Aminev D.A., Badertdinova E.R., Kravchenko M.N.**

Problem of determining current layer parameters is especially actual for hard-to-recover oil fields at the late production stage. Layer parameters controlling is important due to existence high molecular weight hydrocarbons in oil and non-Newtonian properties lead to reducing near well bore zone permeability. Based on the multiphase nonisothermal non-Newtonian model for porous medium it is supposed that fluid movement occurs in zone where the pressure gradient is more than limiting gradient point. The survey results interpretation problem of a well with non-linear fluid rheology may be solved by creating computational mathematical codes. Own original numerical code is able to solve as direct as inverse filtration theory problems that consider non-linear flow character influence, changing filtration-capacitance parameters of the porous matrix, the well influence and Joule-Thompson effect. Carried out the calculation for real high-viscosity oil field demonstrated that in the bottom-hole zone of the well temperature and pressure curve were more sensitive to changing permeability and Joule-Thompson coefficients.

The work was supported by the grant: РФФИ №19-07-00433 А.

**Introduction.** Selection of oil production technology for each field should be carried out accounting layer generation conditions, reservoir type and current state. Hydrodynamic modelling allows to estimate probable efficiency of impacting on the reservoir method application. Changing all filtration parameters should be considered at the model creating stage taking into account EOR methods at the previous periods (oil fields at the late production stage). Mathematical model has to be adopted to production history and program code is verified for finite-difference solving task applying laboratory data for fluid and rock properties, actual production information, GIS results. There are two ways for mathematical model adaptation describing physical, chemical and structural reservoir features. The first one is based on direct filtration theory task solution, when the multiphase flow problem is solved according to known characteristics within certain limiting assumptions. The obtained production characteristics are compared with the field data as a result initial parameters are corrected and missing parameters values unknown at the current moment of well operation are selected (for example, the skin factor, the filtration and capacitance parameters distribution, etc.). The second method of solving inverse problem is relied on control GIS devices readings and iterative current reservoir characteristics calculation corresponding to the production process. The most effective in adequacy terms model is a combination of solving direct and inverse problems.

**Hydrodynamic task.** Mathematical models describing reservoir fluid filtration are relied on keeping mass and energy laws, fluid flow equation usually is the linear Darcy filtration law. However, flows in porous media feature is the "anomalous" reservoir fluid behavior, which is classified as a Newtonian fluid in laboratory conditions, but under layer conditions shows non-Newtonian properties, especially for high viscosity oil fields [1]. Nonlinear properties manifestation process moving in porous media may be explained by the liquid presence on capillaries surface in porous matrix, where the hydrodynamic forces (pressure gradient) and viscous friction forces ratio determines the possible fluid movement in the reservoir. In laboratory experiments on cores, it was found that at small pressure gradients (below  $5 \cdot 10^5$  Pa/m), the flow nonlinearity is also manifested for Newtonian liquids, while with pressure gradient increasing, the nonlinear law turns into a linear one [2]. The separate question is the maximum pressure gradient determination corresponding to the movement beginning of stagnant oil zones in experiments on cores for a specific reservoir type, taking into account its structure and filtration direction. The problem complexity lies on the fact that the fluid does not exhibit abnormal properties outside the pore space, so it is impossible to determine this value in a standard way on a rotary viscometer. In addition, the limiting gradient value during filtration depends on several factors: pore channels radius, porous matrix structure and thermal condition. Therefore, core experiments, the field investigations and simulation modeling results can give an answer to this question. Paper [1] suggested the method based on two types experiments-stationary and non-stationary: the slope angle of linear filtration rate and pressure gradient (high values) dependence is determined from the stationary filtration experiments; at the second series, non-stationary filtration experiment with pressure gradient decreasing is used to measure the filtration rate at low pressure gradients to establish a limit value - the point corresponding to deviation with the linear dependence. (Below on Fig.1 the experimental data on the cores [1] are presented in accordance with this work authors calculations). Invention authors [1] proposed to solve the inverse task of experiment results interpretation with low-pressure gradient for

determining the experimental cores permeability. Obtained results for determining the limiting pressure gradients may be used to identify the stagnant zone position in real layer applying permeability map and pressure distribution in the reservoir. If laboratory data is not known, the stagnant zone position should be found as a result of GIS interpretation. In paper [3] pressure curves are analyzed in stopped well, it's curtailed that changing the limiting gradient from 0.01 to 0.1 MPa/m impact on the pressure drop curve shape significantly. GIS interpretation task [3] is solved numerically using sequential changing of stationary states method and the other paper [4] applied this method to analyze nonlinear filtration law influence on production parameters.

Generalized flow model accounting phase compressibility (liquid and solid), rheology phase properties and thermal effects influence for anisotropic reservoir is created by current paper authors for interpretation field and laboratory data. Paper [5] shows that nonzero filtration rate  $w_i$  for anisotropic media implements with exceeding the limit pressure gradient typical for certain direction:

$$w_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left( \delta_{ij} - \frac{G_{ij}}{|\nabla p|} \right) \nabla_i p, \text{ если } |\vec{\nabla} p| > G_{ij} n_i n_j, \quad (i = 1,2,3) \quad (1)$$

where  $k_{ij}$  – tensor permeability components characterizing the anisotropy type;  $|\vec{\nabla} p|$  – pressure gradient module,  $\nabla_i p = |\nabla p| n_i$  – pressure gradient projection on the corresponding axis,  $n_i$  – pressure gradient vector guiding cosines,  $\delta_{ij}$  – Kronecker tensor components ( $i, j = 1,2,3$ );  $\mu$  – fluid viscosity. Condition for start fluid movement in isotropic media is determined by pressure gradient exceeding the some limiting point  $G$ , and for anisotropic media pressure gradient projection should be controlled in certain direction, in general tensor components ( $k_{ij}$ ) and ( $G_{ij}$ ) have to be defined. These experiments methodology was created for different types of filtration-capacitance properties [5,6].

In order to clarify the input parameters influence obtained from GIS results on the flow characteristics, the authors solved the direct and inverse non-isothermal filtration problems accounting the well influence [7] and Joule-Thompson effect. Account Joule-Thompson effect in GIS results interpretation may impact on finish oil and gas condensate well parameters [8]. The paper [8] also presents the experiments results to determine the dependence over the Joule-Thomson coefficients at different oil temperatures.

To simulate field experiments and determine the final results sensitivity changing all input data, the model was simplified for the case with single-phase high-viscosity fluid flow in an isotropic porous reservoir, taking into account the nonlinear filtration law, thermal expansion/compression in a cylindrical formulation, but inhomogeneity flow influence near the wellbore was considered. The mathematical formulation includes the keeping for compressible oil mass law (2), the oil filtration with a limiting gradient equation (3) and the thermal conductivity equation (4):

$$\frac{\partial(\rho_l m)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_l * w_r) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{cases} w_r = -\frac{k}{\mu} \left( 1 - \frac{G}{|\frac{\partial p}{\partial r}|} \right) \frac{\partial p}{\partial r}, & \text{если } \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| > G; \\ w_r = -\frac{k}{\mu} \varepsilon \frac{\partial p}{\partial r}, & \text{если } \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \leq G; \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m \rho_l c_{Vl} T + (1-m) \rho_s c_{Vs} T) + \rho_l c_{Vl} w_r \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r (\lambda_l + \lambda_s) \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \rho_l c_{Vl} w_r \left( \varepsilon_D \frac{\partial P}{\partial r} \right). \quad (4)$$

where:  $\rho_o$  – fluid density (oil),  $\rho_s$  – rock density,  $m$  – rock porosity,  $k$  – porous media permeability coefficient,  $w_r$  – relative rate (filtration rate  $w_r = m v_r$ ,  $v_r$  – liquid phase rate),  $G$  – the limiting pressure gradient value in the porous media. The conductivity equation for filled porous media (4) is sum of internal liquid and solid phase energies equations. It's supposed that thermodynamic equilibrium condition between the liquid (oil – index  $l$ ) and solid (skeleton - index  $s$ ) phases ( $T_l = T_s = T$ ) is implemented, taking into account convective transport in the liquid phase, provided the mass flow rate is constant  $Q = 2\pi H(r\rho_l w_r) = 2\pi H q = const$ . Also it's proposed, viscous-friction forces work is far less than internal forces under elastic compression/tension work, which is accounted by throttling effect in the form on the right with Joule-Thompson coefficient  $\varepsilon$  corresponding to the experimental data [8]. In this formulation, the equation also takes into account that the internal energy of both the liquid and solid

phases is determined only by thermal components with constant heat capacity coefficients ( $c_{Vl}$  и  $c_{Vs}$ ), while taking into account the thermal conductivity of the filtrate  $\lambda_l$  and the mineral matrix  $\lambda_s$ . To close the system (2)-(4), we use the oil state equation.

$$\rho_l = \rho_{l0}(1 + \beta_l(p - p_0)), \quad (5)$$

( $\beta_l$  – oil compressibility coefficients), and the compressibility skeleton equation corresponding permeability recalculation by a modified Kozeni-Karman formula:

$$m = m_0 + \beta_s(p - p_0), \quad k = \frac{B*m^3}{(1-m)^2}. \quad (6)$$

( $\beta_s$  – matrix (skeleton) compressibility coefficients); if it's assumed the structural characteristics remain unchanged, then it will be able to introduce a complex "field" coefficient  $B$ , which characterizes a specific reservoir.

The system (4)-(6) can be solved numerically with given initial and boundary conditions accounting well influence coefficient  $C$  in boundary conditions on the well ( $r = r_c$ ). Well is started under constant residual mass production (per unit inflow area  $q = r_c \rho_l w_r$ ) in the thickness layer  $H$ : while  $t=0$  and  $r_c \leq r < R_k$ :  $p = p_k$ ,  $T = T_k$ ,  $m = m_0$ ,  $k = k_0$ ,  $w_r = 0$ ; while  $t > 0$  on the well  $r = r_c$  :  $2\pi r H \frac{k}{\mu} \left( (1 + \varepsilon) \frac{\partial P}{\partial r} - G \right) = q + C \frac{\partial P}{\partial t}$ , external boundary  $r = R_k$ :  $p(R_k) = p_k$ ,  $T(R_k) = T_k$ .

In mathematical modeling, of course, the question arises how determine the boundary positions of areas where the fluid move according to linear or nonlinear Darcy laws, and where the pressure gradient is insufficient to push the stagnant oil zone in motion. Papers [3,4] suggested to apply the sequential changing of stationary states method by analogy with the classical "elastic" reservoir problem solution. The work authors [9] use a variational approach to determine motion zones, stationary oil state and the zone with the linear law. Solving the non-stationary task numerically even at the initial stage leads to solve task with unknown moving boundary. The instability problems of the numerical solution (including solution using variational methods) can be avoided by changing the filtration law with limiting gradients, introducing the so-called regularization parameter  $\varepsilon \ll 1$ , which allows to abandon the "stagnant" zone in the region of non-zero coefficients  $\varepsilon$ , but assuming the movement is very slow at small pressure gradients [7, 9,10].

**Solution results.** The initial data correspond to the real well drainage area one of the high-viscosity Tatarstan oil fields, where the formation is characterized by:  $c_{Vl}=1800$  Joule/(kg\*K),  $c_{Vs}=800$  Joule/(kg\*K),  $\rho_l=800$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_s=2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $m=0.2$ ,  $\lambda_l=0.1385$  W/(m\*K),  $\lambda_s=2.42$  W/(m\*K),  $\varepsilon_D=0.4$  K/MPa,  $P_0=P_k=10$  MPa,  $T_0=T_k=300$  K,  $k=0.05$   $\mu\text{m}^2$ ;  $\mu=25$  mPa\*sec,  $r_c=0.1$  m,  $R_k=100$  m,  $H=10$  m,  $C=0.7$  m<sup>3</sup>/MPa,  $Q=5$  m<sup>3</sup>/day,  $\varepsilon=0.01$ , experimental time=10 days.

Several codes were written for the numerical solution of the non-stationary initial-boundary problem including for the cylindrical symmetry case with an uneven grid compacting to the well (the coordinate transformation is used  $u = \ln r$ ). To construct a finite-difference scheme, the integro-interpolation method is applied. At the initial moment, the formation is considered undisturbed, then production begins with a constant flow rate. The code verification is carried out by comparing the numerical solution with the classical filtration theory and thermal conductivity problems solutions, which can be obtained by simplifying the original system by zeroing the coefficients  $C$ ,  $G$  and  $\varepsilon_D$ . At the first stage, a direct filtration theory problem is solved: the oil viscous flow nature, which exhibits its nonlinear properties at given production characteristics, is evaluated (a direct problem). This stage allows to adapt the model to development conditions by solving a non-stationary nonlinear filtration problem for a specific well. At this stage, the stability of the solution was studied for various regularization parameters ( $\varepsilon=0.01 \div 0.1$ ), and sensitivity to changes the well influence parameters ( $C=0 \div 0.9$  MPa/m) and permeability ( $k=0.03 \div 0.07$   $\mu\text{m}^2$ ). This is necessary to take into account the GIS data error variance in the inverse problem. The program code showed the solution stability at all parameter intervals within the real GIS data measurement error variance.

Fig.1 shows calculated filtration rate dependence for different pressure gradients and regularization parameters permitting to carry out calculation for any pressure gradient values (direct problem solution). The curve break corresponds to the transition from filtration law with a "conditionally limiting gradient" (due to the regularization coefficient) to the linear Darcy law. Also experimental work data [1] are given at the fig.1, where it's controlled transition from "stagnant oil state" to Darcy linear flow in non-stationary filtration experiments.

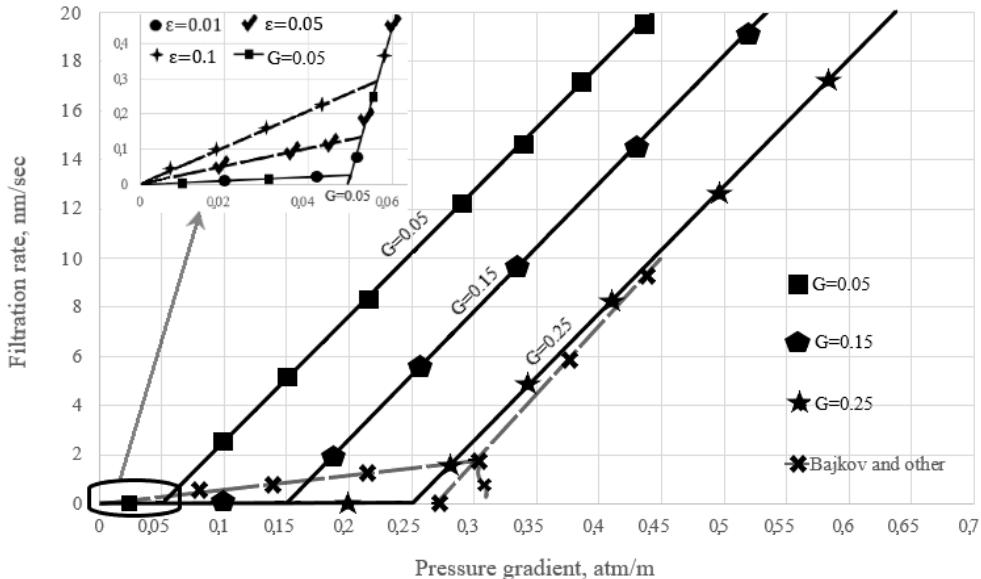


Fig.1. The filtration rate dependence on the pressure gradient.

Figure 2 shows the inverse task solution compared with GIS data obtained for the reservoir with the properties described above. Calculated pressure drop curve and increasing temperature curve at the wellbore are in good agreement with the depth sensors readings on a real well. Numerical graphs are constructed with the selected problem parameters values:  $m = 0.2$ ,  $k = 4.89 \mu \text{ m}^2$ ,  $G = 0.053 \text{ MPa/m}$ ,  $C = 0.66 \text{ m}^3/\text{MPa}$  and  $\varepsilon = 0.01$ .

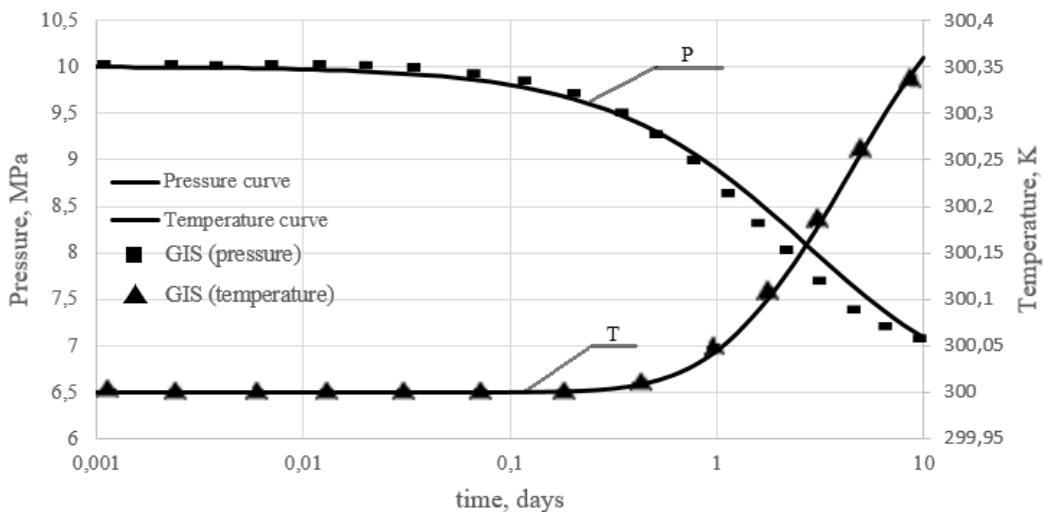


Fig.2. Bottom hole pressure and temperature changing over time

**Conclusions:** The direct problem solution allowed to identify the solution sensitivity to changes input parameters (porosity, penetrability, limiting gradient, the well influence and the regularization parameter). The most sensitive parameter to changing parameters within the measurement real GIS error is limiting pressure gradient, when this parameter was varied by 5%, the indicators deviation to the controlled measurement 10 days period was 3%. The regularization parameter at the given interval does not actually lead to well characteristic "distortion".

## REFERENCE

1. Bajkov V.A., Kolonskikh A.V., Evseev O.V. and other. Determination of dead and slightly drained oil zones in heterogeneous reservoirs, Invention RU2524719 C1, 10.08.2014. Application № 2013118611/03, 23.04.2013
2. Q. Lei, W. Xiong, J. Yuan, S. Gao, and Y. Wu. Behavior of flow through low-permeability reservoirs. SPE, 2008. Pp. 1–10.
3. Dudareva O.V. Identification of nonlinear effects of filtration in low-permeable collectors by curves of ross-formation of pressure. Actual problems of science and education in a modern university, 2019. Pp. 59-63.
4. Shagapov B.S., Belova O.V., Davletbaev A.Y. Features of filtration in low-permeability traps with a limiting gradient. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. vol. 87. 2014. Pp. 1269-1281.
5. Dmitriev N.M., Maksimov V.M., Mamedov M.T. Laws of flow with a limiting gradient in anisotropic porous media. Fluid Dynamics, vol. 45, 2010. Pp. 64-71.
6. Dmitriev N.M., Kravchenko M.N., Dmitriev M.N., Tsybulsky S. P. Complex research of reservoir properties on cores from Achimov deposits. Exploration and production technical conference and exhibition. SPE, 2014. Pp. 9.
7. Khairullin R.M., Khasanova E.L., Badertdinova E.R. Numerically solving the inverse coefficient problem of non-linear filtration. Bulletin of the Technological University, vol. 22, 2019. Pp. 153-155.
8. Sultanova M.V., Gafurov A. I., Sharafutdinov R. F. Thermohydrodynamic effects in multyphase environment. Bulatov readings, vol. 1, 2017. Pp. 164-167.
9. Badriev I.B., Singatullin M.T., Chebakov Y.V. Numerical investigation of the steady underground filtration problem of high viscous fluids in the presence wells. Bulletin of TSU, vol. 20. 2015. Pp. 237-239.
10. Slabnov V.D., Sultanov R.A. Numerical simulation of high viscosity oil displacement by water following non-linear filtration law. Uchenye zapiski kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki. vol.158. 2016. Pp. 276-286.

### **Information about authors**

**Aminev Damir** – student, Gubkin State University, Faculty of Reservoir Engineering  
+7(977) 4591013

**E-mail** [aminevdom@yandex.ru](mailto:aminevdom@yandex.ru)

**Badertdinova Elena** – professor, Kazan National Research Technological University, Faculty Informatics and Applied Mathematics  
+7(927)6747848

**E-mail** [badertdinova@yandex.ru](mailto:badertdinova@yandex.ru)

**Kravchenko Marina** – associate professor, Gubkin State University, Faculty of Reservoir Engineering  
+7(499) 507-84-12  
**E-mail** [kravchenko.m@gubkin.ru](mailto:kravchenko.m@gubkin.ru)

# The influence of discontinuities in reservoirs on the character of the fluid flow to the production wells

Astafev V.I., Bulgakov S.A.

Modeling of fluid flow through the fracture receives the more and more attention in applied geosciences from oil and gas industry. The fracture may be either artificial, in case of well simulation, or natural, and it may have different permeability. The steady-state flow process of incompressible fluid to the production well in horizontal reservoir of constant height and permeability is considered in this paper. There is a thin area in the reservoir with constant permeability  $k_f$ , which may be highly permeable cracks or low permeability barrier. The characteristic of filtration process is studied for various  $k_f$  value. The nature of fluid flow to the wellbore at different locations of the crack and the well for different values of the fracture conductivity  $F_{CD}$  is analyzed.

## 1 Introduction

In spite of the most oil fields are on the final stage of the field development, there are a lot of ways to maintain and to increase the production. The modern level of science and technology allows extracting oil more efficiently, taking into account the individual characteristics of reservoir and the behavior of fluids. A part of oil reserves are concentrated in fractured reservoirs [1]. A characteristic feature of the development process of such reservoirs has the deviation in well productivity and rock permeability, significant dependence of IPR curves on the pressure, etc. For fractured reservoirs the main flow of oil to the well occurs through the fracture [2].

Modelling of the filtration of oil in fractured reservoirs is also of interest from the point of view of application of hydraulic fracturing. Hydraulic fracturing is currently one of the most effective methods to increase oil production [3]. Therefore these days especially relevant to study of the filtration process in the reservoir with various faults, hydraulic fractures (HF) and impermeable boundaries.

This paper discusses the modelling of the fluid flow process to a well in the presence of cracks (inclusions) of varying permeability, studies the impact of such inclusions on the nature of the fluid flow process to the production well. The task is modified by the representation of cracks in the section view of zero thickness but finite conductivity and by the difference of pressure above and below the section.

## 2 Problem Formulation

Let us consider a plane stationary flow of incompressible fluid to the vertical production well in an isotropic porous medium. This process in the plane  $(x,y)$  is described by the equation of incompressibility and the Darcy's law of filtration [1]:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \quad \mathbf{V} = -(k/\mu) \operatorname{grad} p, \quad (1)$$

where  $\mathbf{V}(x,y)$  is the velocity vector of fluid filtration,  $p(x,y)$  is the pressure in the liquid,  $\mu$  is the fluid viscosity and  $k$  is the permeability of oil reservoir by thickness  $h$ .

In the works of other authors the high permeable area is usually represented by ellipse [3]. In the reservoir with the external boundary of radius  $R_c$  at the point  $M(x,y)$  is placed the production well of radius  $r_w$  with a flow rate  $Q$ . Inside the external boundary there is a crack with length  $2l$  and thickness  $2\delta$  ( $\delta \ll l$ ) and permeability  $k_f$ . Let us consider the crack is oriented along the axis  $x$ , and its center coincides with the origin plane  $(x,y)$ .

In the paper, published early by Astafev and Fedorchenko (2007) [4], the problem was solved with assuming that the pressure is the same on the upper and lower banks of the crack. In this paper we consider the case with the difference of pressure.

## 3 Problem Solution

Suppose the crack is oriented along the  $x$ -axis, and its center coincides with the origin of the plane  $(x,y)$ . Next we assume the borehole at the point  $z_0$ , well flow rate  $Q$ , the radius of the drainage area  $R_c$  and well radius  $r_w$ .

Then, the flow potential can be represented in the form:

$$\Phi(z) = \frac{2\pi kh}{Q\mu} \varphi(z) = \ln(z - z_0) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}. \quad (2)$$

where  $c_n$  is unknown coefficients in the expansion in a Laurent series of the disturbance caused by the presence of reservoir heterogeneity and decaying at infinity.

Because of  $\delta < l$ , it was proposed [5] to replace the ellipse with semi-axes  $l$  and  $\delta$  by straight-line section of zero thickness ( $-l \leq \xi = x/l \leq l$ ). Then the fluid flow in the fracture can be modeled as the following additional boundary conditions on the cut:

$$\begin{cases} \alpha_0 \sqrt{1-\xi^2} \frac{d}{d\xi} \operatorname{Re}(\Phi^+ - \Phi^-) = \operatorname{Im}(\Phi^+ - \Phi^-), \\ \beta_0 \sqrt{1-\xi^2} \frac{d}{d\xi} \operatorname{Im}(\Phi^+ + \Phi^-) = -\operatorname{Re}(\Phi^+ - \Phi^-); \end{cases} \quad (3)$$

where  $\alpha_0 = (\delta k_f)/(lk)$  and  $\beta_0 = (\delta k)/(lk_f)$ .

We will look the function  $\Phi(z)$  in the form, as  $\Phi(z) = \Phi_I(z) + \Phi_2(z)$ , such that  $\operatorname{Re}\Phi_I^+(z) = \operatorname{Re}\Phi_I^-(z)$ ;  $\operatorname{Im}\Phi_I^+(z) = -\operatorname{Im}\Phi_I^-(z)$ ;  $\operatorname{Re}\Phi_2^+(z) = -\operatorname{Re}\Phi_2^-(z)$ ;  $\operatorname{Im}\Phi_2^+(z) = \operatorname{Im}\Phi_2^-(z)$ . Then the conditions (3) will be as:

$$\begin{cases} \alpha_0 \sqrt{1-\xi^2} \frac{d}{d\xi} \operatorname{Re}(\Phi_1^+) = \operatorname{Im}(\Phi_1^+), \\ \beta_0 \sqrt{1-\xi^2} \frac{d}{d\xi} \operatorname{Im}(\Phi_2^+) = -\operatorname{Re}(\Phi_2^+); \end{cases} \quad (4)$$

Then, inserting function Zhukovsky  $z = l(v+v'^{-1})/2$ , exterior of the section ( $-l < x < l$ ,  $y=0$ ) maps on the exterior of a unit circle  $|v|=1$ , the potential (2) in a new variable  $v$  can be written as:

$$\Phi(v) = \ln(v - v_0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^{-n}. \quad (5)$$

where  $lv(z) = z + \sqrt{z^2 - l^2}$ ,  $lv(z_0) = z_0 + \sqrt{z_0^2 - l^2}$ ,  $|v| > 1$ ,  $a_n$  is new unknown coefficients in the expansion in a Laurent series of the disturbance in a variable  $v$  caused by the presence of reservoir heterogeneity and decaying at infinity.

Consider that  $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}z$ , and  $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}z$ , the system (4) can be rewritten in the form:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(\alpha_0 v \frac{d\Phi_1^+}{dv} - \Phi_1^+\right) = 0, \\ \operatorname{Re}\left(\beta_0 v \frac{d\Phi_2^+}{dv} - \Phi_2^+\right) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

It remains to split  $\Phi(v)$  into even and odd functions, that is, to find  $\Phi_1(v)$  and  $\Phi_2(v)$ . Let us consider a special case  $\operatorname{Re}\Phi^+ = \operatorname{Re}\Phi^-$  and  $\operatorname{Im}\Phi^+ = -\operatorname{Im}\Phi^-$ . So, if  $v = e^{i\theta}$ , we can rewrite (4) in the form:

$$\Phi(\theta) = \ln(-v_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (v_0)^{-n} (\cos n\theta + i \sin n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\cos n\theta - i \sin n\theta), \quad (7)$$

$$\Phi(-\theta) = \ln(-v_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (v_0)^{-n} (\cos n\theta - i \sin n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (8)$$

For general case, when  $v_0 = \rho_0 \cdot e^{i\theta}$  and  $a_n = a_n^{(\alpha)} + ia_n^{(\beta)}$ , the potential flow in will be as:

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \pm i\pi + \ln \rho_0 + i\theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rho_0^{-n} e^{-in\varphi} v^n + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(\alpha)} + ia_n^{(\beta)}) v^{-n} = \\ &= \left[ \ln \rho_0 + i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta_0}{n \rho_0^n} v^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\alpha)} v^{-n} \right] + i \left[ \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta_0}{n \rho_0^n} v^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\beta)} v^{-n} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

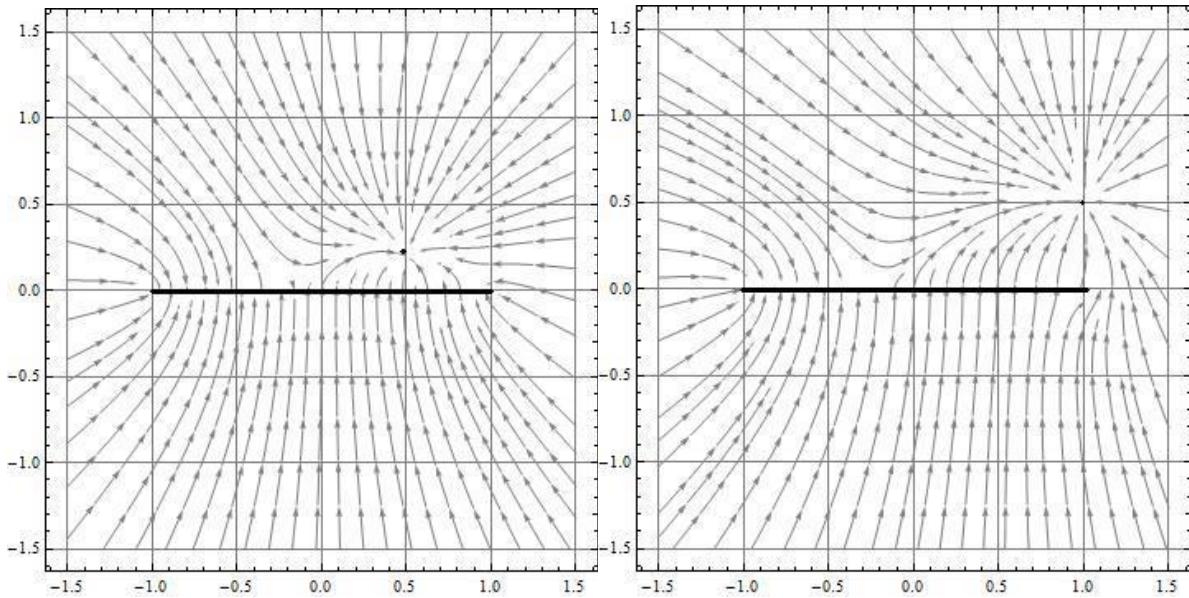
Let find  $a_n^{(\alpha)}$  and  $a_n^{(\beta)}$  from the condition (6):

$$a_n^{(\alpha)} = \frac{n \cdot a_0 - 1}{n \cdot a_0 + 1} \frac{\cos n\theta}{n \rho_0^n}; \quad a_n^{(\beta)} = \frac{n \cdot \beta_0 - 1}{n \cdot \beta_0 + 1} \frac{\sin n\theta}{n \rho_0^n}. \quad (10)$$

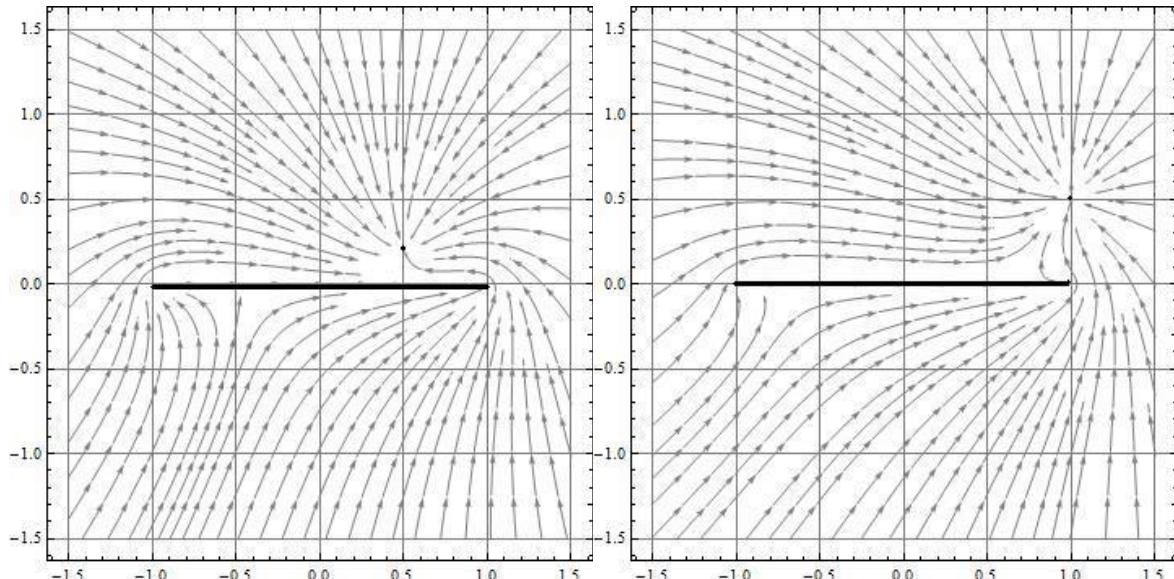
If we substitute (10) in the equation (2), we will find:

$$\Phi(v) = \ln(v - v_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{n \cdot a_0 - 1}{n \cdot a_0 + 1} \frac{\cos n\theta}{n \rho_0^n} - i \frac{n \cdot \beta_0 - 1}{n \cdot \beta_0 + 1} \frac{\sin n\theta}{n \rho_0^n} \right] v^{-n}. \quad (11)$$

The nature of fluid flow to the wellbore at different locations of the crack and the well for different values of the fracture conductivity  $F_{CD} = \alpha_0$  are shown in Fig. 1 and Fig. 2 [6].



**Fig. 1** Streamlines of the fluid flow to the well,  
located at the points  $(0.2, 0.5)$  and  $(0.5, 1)$  for the value of  $F_{cd}=\infty$ .



**Fig. 2** Streamlines of the fluid flow to the well,  
located at points  $(0.2, 0.5)$  and  $(0.5, 1)$  for the value of  $F_{cd}=0$ .

#### 4 Conclusion

In this work the formulation and solution of the problem of fluid flow to the well at the presence of a crack of different conductivity  $F_{CD}$  has been done. More general boundary conditions were considered taking into account pressure difference above and below the section. For different values of  $F_{CD}$  and various well-crack locations the nature of the fluid flow to a well has been analyzed.

#### REFERENCE

1. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media. Michigan, 1946.
2. Economides M., Oligney R., Valko P. Unified fracture design. Bridging the gap between theory and practice. Alvin, TX, Orsa Press, 2002.
3. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М.: Недра, 1999.

4. Астафьев В.И., Федорченко Г.Д. Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта. Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки, 2007, № 2(15), с. 128-132.
5. Astafev V, Andriyanova E., Kasatkin A. The influence of discontinuities on water flooding process. WSEAS Transactions on fluid mechanics, vol. 11, 2016, pp. 134-142.
6. Астафьев В.И., Андриянова Е.В., Булгаков С.А. Математическое моделирование процесса фильтрации при наличии несплошностей в нефтяном пласте. Самара: СНЦ РАН, 2021.

#### **Information about authors**

**Vladimir Astafev** – professor, Samara State Technical University, Faculty of Oil Technology (+7 964) 991 10 36

E-mail [Vladimir.astafev@mail.ru](mailto:Vladimir.astafev@mail.ru)

**Sergey Bulgakov** - chief project engineer, SamaraNIPIneft, Rosneft (+7 846) 205 87 22

E-mail [Bulgakovsa@samnipi.rosneft.ru](mailto:Bulgakovsa@samnipi.rosneft.ru)

# Formation of a Hybrid of Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites

## Avetisyan Ara S., Mkrtchyan M.H.

Taking into account the possibility of excitation and propagation of electroactive elastic shear and plane deformation waves in individual piezoelectric crystals, a discussion of possible layered composites schemes allowing the formation of a hybrid of these acoustic waves is proposed.

The report explores:

- i) Formation of a hybrid of unidirectional electroactive elastic waves along the interface between layers in a piezoelectric composite,
- ii) Formation of a hybrid of unidirectional electroactive elastic waves in a periodically transversely inhomogeneous, layered piezoelectric composite,
- iii) Formation of a wave hybrid of electro-acoustic waves when a simple electro-acoustic wave passes through a surface without acoustic contact between two different piezoelectrics.

The conditions for the possible formation of a hybrid and the characteristics of their propagation in the layered composites of piezoelectrics of the  $6mm$  class and  $\bar{6}m2$  class of hexagonal symmetry are discussed.

**Introduction** Layered-inhomogeneous piezoelectric composite waveguides are widely used in modern high-precision technologies, as transducers, filters or resonators of electroacoustic wave signals. When an electroacoustic wave of one of these types propagates in a layered piezoelectric composite, with a non-acoustic contact between adjacent layers, part of the wave energy through the accompanying oscillations of the electric field seep into the adjacent layer, exciting an electroacoustic wave of another type in it.

It was shown in [1] that, depending on the crystallographic symmetry of piezoelectrics in their sagittal planes, it is possible to excite separated from each other a two-component electroactive pure shear wave, or a three-component electroactive plane deformation wave. Studies show that joint (simultaneous) propagation of these separated waves (hybrid) is possible in layered-inhomogeneous piezoelectric composites, with non-acoustic contact between adjacent layers [2–4]. In the formulation of the problems of investigating the issue of joint propagation in a piezoelectric composite of separated two-component electroactive waves of pure shear and three-component electroactive waves of plane deformation, allowing the formation of separated fields of antiplane and plane elastic deformations, the sagittal planes of piezoelectric materials of the layers are combined as a common coordinate plane.

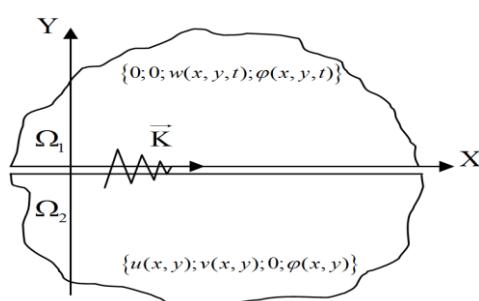
Basic equations, boundary conditions and material ratios of the linear theory electroelasticity are recorded in [1].

### 1. Propagation of a hybrid of electroactive unidirectional elastic waves in a piezoelectric composite [4]

We consider the propagation of high-frequency electroelastic waves in a two-layer piezoelectric body assigned to the Cartesian coordinate system  $Oxyz$ . The crystallographic sections and orientations of the

crystallographic axes of the strip materials are compared with the Cartesian coordinate system  $Oxyz$  so that in the coordinate plane  $x0y$  of the adjacent layers  $\Omega_1(x, y, z)$  and  $\Omega_2(x, y, z)$  there are separate electroactive waves of antiplane and plane deformations, respectively (fig.1).

Due to the conjugation of the electric field on the surfaces of the crack the oscillations of the electric field, accompanying the wave signal of one type in the first medium, leak through the vacuum gap into another



**Fig. 1** Propagation pattern of a normal electroelastic wave signal in adjacent piezoelectric half-spaces without acoustic contact

piezoelectric medium. In the second medium, another type of electroelastic wave is also generated (and vice versa)  $\{0; 0; w_1(x, y, t); \varphi_1(x, y, t)\} \square \{u_2(x, y, t); v_2(x, y, t); 0; \varphi_2(x, y, t)\}$ .

In the case of the propagation of high-frequency electromechanical waves, for which the wavelength is much less than the thicknesses of adjacent layers, when  $\lambda \ll \min\{h_1; h_2\}$ , the equations of electroelasticity, together with the boundary conditions on the mechanically free surface  $y = 0$ , as well

as with the damping conditions deep into thick layers from the common surface of non-acoustic contact constitute the complete boundary-value problem of the two-layer piezoelectric composite. From the formulating mixed boundary-value problem, it is obvious that the unidirectional elastic waves of an electroactive shear in the layer  $\Omega_{10}(x, y)$  and plane deformation in the layer  $\Omega_{20}(x, y)$  as solutions of the system of quasistatic equations of the electroelasticity can by presents in the form

$$w_1(x, y, t) = A_1 \exp(-k\alpha_{1w}(\omega, k) \cdot y) \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.1)$$

$$\varphi_1(x, y, t) = [C_1 \exp(-ky) + (e_{15}^{(1)} / \varepsilon_{11}^{(1)}) A_1 \exp(-k\alpha_{1w}(\omega, k) \cdot y)] \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.1)$$

$$u_2(x, y, t) = [A_u \exp[kq_{2u}(\omega, k) \cdot y] + a_{u\varphi} C_\varphi \exp[kq_{2\varphi}(\omega, k) \cdot y]] \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.2)$$

$$v_2(x, y, t) = [B_v \exp[kq_{2v}(\omega, k) \cdot y] + b_{vu} A_u \exp[kq_{2u}(\omega, k) \cdot y] + b_{v\varphi} C_\varphi \exp[kq_{2\varphi}(\omega, k) \cdot y]] \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.2)$$

$$\varphi_2(x, y, t) = [C_\varphi \exp[kq_{2\varphi}(\omega, k) \cdot y] + c_{\varphi u} A_u \exp[kq_{2u}(\omega, k) \cdot y]] \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.2)$$

The permissible values of the phase velocity, as in the case of Gulyaev-Bluestein wave, have the form  $\eta(\omega, k) = \omega/k < \tilde{C}_{1t}$ .

From the solutions (1.2) it is obvious that the components of the induced electroelastic wave in the second piezoelectric are damped along the depth of the second thick layer in the zone of permissible phase velocities, when

$$\eta(\omega, k) < \min \left\{ C_{2t} / \sqrt{\mathcal{G}_3}; \tilde{C}_{1t}; C_{2l^*} \cdot \sqrt{1 - \chi_2^2 (1 + \mathcal{G}_2) \mathcal{G}_4} \right\} \quad \text{if } (c_{33}^{(2)} - \mathcal{G}_1 c_{13}^{(2)}) > 0 \quad (1.3)$$

$$\text{or } C_{2t} \sqrt{1 - \mathcal{G}_3} < \eta(\omega, k) < C_{2l^*} \cdot \sqrt{1 - \chi_2^2 (1 + \mathcal{G}_2) \mathcal{G}_4} \quad \text{if } (c_{33}^{(2)} - \mathcal{G}_1 c_{13}^{(2)}) < 0 \quad (1.4)$$

From the conditions for the existence of electroactive waves of the Rayleigh type (1.2) it follows that such waves in a medium can exist only in the case of a small value of the piezoelectric effect  $\chi_2^2 < (c_{11}^{(2)} c_{13}^{(2)} - c_{12}^{(2)} (c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})) / c_{44}^{(2)} (c_{13}^{(2)} + (c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)}))$ .

Substituting the decaying solutions (1.1) and (1.2) into the boundary conditions, we obtain the dispersion equation of electroelastic hybrid of **R&GB** waves in the following form

$$\frac{\alpha_{1w} - \tilde{\chi}_1^2}{\alpha_{1w} (\varepsilon_{11}^{(1)} / \varepsilon_{33}^{(2)})} = - \left( \begin{array}{cc} c_{\varphi u} & 1 \\ (\mathcal{G}_5 + e_{11}^{(2)} c_{\varphi u}) & (e_{11}^{(2)} + \mathcal{G}_5 a_{u\varphi}) \end{array} \right) \left/ \left( \begin{array}{cc} q_{2u} c_{\varphi u} & q_{2\varphi} \\ (\mathcal{G}_5 + e_{11}^{(2)} c_{\varphi u}) & (e_{11}^{(2)} + \mathcal{G}_5 a_{u\varphi}) \end{array} \right) \right. \quad (1.5)$$

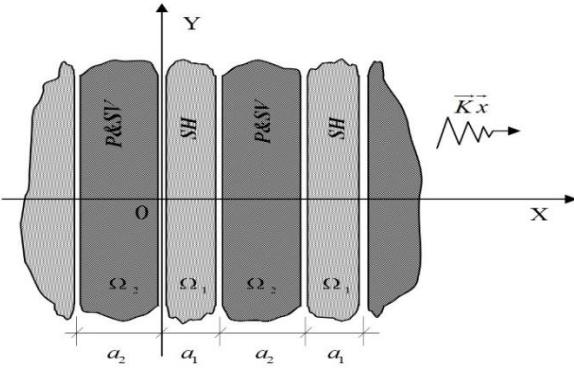
From the form of dispersion equation (1.5) it follows that it has a solution in the case of permissible wave signal frequencies at which the dispersion function in the second piezoelectric takes on values

$$\left( \begin{array}{cc} c_{\varphi u} & 1 \\ (\mathcal{G}_5 + e_{11}^{(2)} c_{\varphi u}) & (e_{11}^{(2)} + \mathcal{G}_5 a_{u\varphi}) \end{array} \right) \left/ \left( \begin{array}{cc} q_{2u} c_{\varphi u} & q_{2\varphi} \\ (\mathcal{G}_5 + e_{11}^{(2)} c_{\varphi u}) & (e_{11}^{(2)} + \mathcal{G}_5 a_{u\varphi}) \end{array} \right) \right. \leq \left( \varepsilon_{33}^{(2)} / \varepsilon_{11}^{(1)} \right) \left( 1 - \tilde{\chi}_1^2 \right) \quad (1.6)$$

## 2. Propagation of a hybrid of electroactive unidirectional elastic waves in a transversally inhomogeneous periodic piezoelectric composite [3]

Let us consider the propagation of electroelastic 1D normal waves in transversally inhomogeneous periodic piezoelectric medium, which consists of alternating infinite plates  $\Omega_{1n}(x, y, z)$  and  $\Omega_{2n}(x, y, z)$  made of piezoelectric crystals. (Fig. 2). The medium Linear sizes of these plates towards  $Oy$  and  $Oz$  are much larger than the wavelength of the propagating high-frequency wave. Above,  $n \in \mathbb{N}^+$  is the number of the repeating cell of two sub-layers with section  $\Omega_0(x, y) = \Omega_{20}(x, y) \cup \Omega_{10}(x, y)$  in  $xOy$  plane, where

$$\Omega_{10}(x, y) \square \{x \in [0, a_1]; y \in (-\infty, +\infty)\}; \quad \Omega_{20}(x, y) \square \{x \in [-a_2, 0]; y \in (-\infty, +\infty)\}. \quad (2.1)$$



**Fig. 2** Transversally inhomogeneous periodic composite waveguide with non-acoustic contact between sub-layers

waves' hybrid the system of one-dimensional quasi-static deformation will be solved

$$\partial^2 \mathbf{W}_1^{(1)} / \partial x^2 = -\omega^2 \tilde{C}_{1t}^{-2} \cdot \mathbf{W}_1^{(1)}, \quad \partial^2 \Phi_1^{(1)} / \partial x^2 = (e_{15}^{(1)} / \varepsilon_{11}^{(1)}) \cdot \partial^2 \mathbf{W}_1^{(1)} / \partial x^2 \quad (2.2)$$

And, in the layer with section  $\Omega_{20}(x, y)$ , the system of one-dimensional quasi-static equations of plane electroactive deformation will be solved

$$\begin{aligned} \left( \partial^2 \mathbf{U}_2 / \partial x^2 \right) &= \left( -\omega^2 / C_{2t}^2 \right) \mathbf{U}_2; & \left( \partial^2 \mathbf{V}_2 / \partial x^2 \right) &= \left( -\omega^2 / C_{2t}^2 \right) \mathbf{V}_2; \\ \left( \partial^2 \Phi_2 / \partial x^2 \right) &= \left( e_{11}^{(2)} / \varepsilon_{11}^{(2)} \right) \left( \partial^2 \mathbf{U}_2 / \partial x^2 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Here,  $C_{2t}^2 = (1 - g_{12}(c_{13}^{(2)} / c_{11}^{(2)}) - \chi_2^2(1 + g_{12})) (c_{11}^{(2)} / \rho_2)$  is the speed of longitudinal electroactive wave,  $C_{2t}^2 = c_{44}^{(2)} / \rho_2$  is the speed of transverse elastic wave in the piezoelectric in  $\bar{6}m2$  class. It is evident from the expression of the longitudinal electroactive wave speed  $C_{2t}^2$  that for values of the electromechanical connection coefficient satisfying  $\chi_2^2 > 1 - [(c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})(c_{11}^{(2)} + c_{13}^{(2)})] / [c_{11}^{(2)}(c_{12}^{(2)} + c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})]$ , the extension stiffness becomes negative. This is possible in case of relation  $c_{11}^{(2)} c_{12}^{(2)} > c_{13}^{(2)} (c_{13}^{(2)} + c_{44}^{(2)})$ , because then,  $0 < \chi_2^2 < 1$  always holds.

In non-acoustic contact surfaces free of mechanical stresses the electric field conjugacy conditions are satisfied:

$$\Phi_1(0, y, t) = \Phi_2(0, y, t), \quad \Phi_1(a_1, y, t) = \mu \times \Phi_2(-a_2, y, t) \quad (2.4)$$

$$e_{15}^{(1)} \frac{d\mathbf{W}_1(0, y, t)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(0, y, t)}{dx} = e_{11}^{(2)} \frac{d\mathbf{U}_2(0, y, t)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(0, y, t)}{dx}, \quad (2.5)$$

$$e_{15}^{(1)} \frac{d\mathbf{W}_1(a_1, y, t)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(1)} \frac{d\Phi_1(a_1, y, t)}{dx} = \mu \cdot \left( e_{11}^{(2)} \frac{d\mathbf{U}_2(-a_2, y, t)}{dx} - \varepsilon_{11}^{(2)} \frac{d\Phi_2(-a_2, y, t)}{dx} \right) \quad (2.6)$$

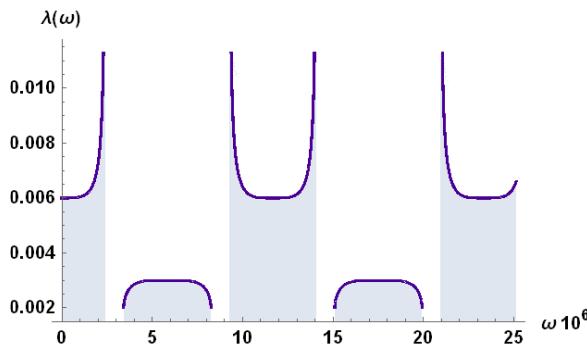
The following eigen lengths of vibrations correspond to wave forms in sublayers  $\Omega_{10}(x, y)$  and  $\Omega_{20}(x, y)$ :  $k(\omega)_{nw} = n\pi/a_1$  and  $k(\omega)_{nu} = k(\omega)_{nv} = n\pi/a_2$ .

The dispersion equation solution of propagation (frequency filtration) of hybrid of electroacoustic waves can be represented as

$$k(\omega) = \frac{1}{(a_1 + a_2)} \cdot \arccos \left[ \frac{\left[ 1 - \cos(\omega a_2 / C_{2t}^*) \right]^2 + \left[ 1 - \cos(\omega a_1 / C_{1t}) \right]^2}{2 \left[ 1 - \cos(\omega a_1 / C_{1t}) \right] \cdot \left[ 1 - \cos(\omega a_2 / C_{2t}^*) \right]} \right] \quad (2.7)$$

For the sake of definiteness, we assume that in  $x0y$  plane, the material of layers with sections  $\Omega_{10}(x, y)$  allows separate excitation and propagation of electroactive elastic shear, while the material of layers with sections  $\Omega_{20}(x, y)$  allows separate excitation and propagation of electroactive plane stress-strain state.

In the layer with section  $\Omega_{10}(x, y)$ , for an electroactive unidirectional elastic equations of anti-plane electroactive



**Fig. 3** Zones of allowed (and forbidden) lengths  $\lambda(\omega)$  of electroelastic shear wave

In the particular case when the propagation of electroactive **SH**-waves in piezoelectric medium with system of infinite cracks is considered, the dispersion equation for determination of phase velocity has a simpler form

$$\cos(a_1 k) = \frac{(1 + \cos^2(\omega a_1 / \tilde{C}_{lt}))}{2 \cos(\omega a_1 / \tilde{C}_{lt})}.$$

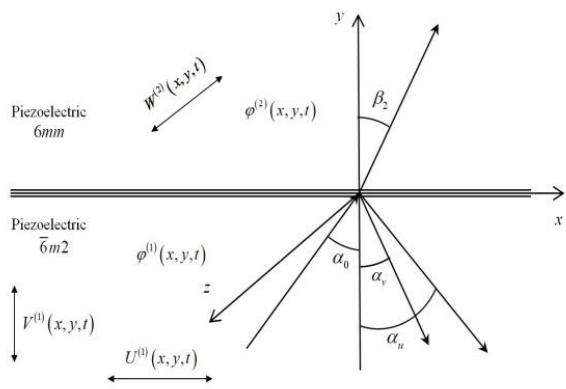
It follows from this equation that electroactive **SH**-wave can propagate in this case as well. The solution of this dispersion equation for wavelengths is obtained as

$$\lambda(\omega) = 2\pi a_1 \cdot \left[ \arccos \left[ \left( 1 + \cos^2(\omega a_1 / \tilde{C}_{lt}) \right) / \left( 2 \cos(\omega a_1 / \tilde{C}_{lt}) \right) \right] \right]^{-1} \quad (2.8)$$

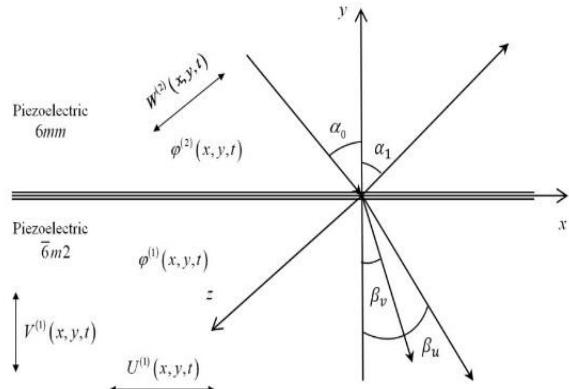
Despite the case of homogeneous space (when space without periodic cracks), in this case zones of forbidden frequencies occur (use Figure 3).

### 3. The emergence of a wave hybrid of electroacoustic waves when they pass through a surface without acoustic contact between two different piezoelectrics [2, 5]

The transformation of the electro-acoustic wave signal at non-acoustic contact interface  $y=0$  between



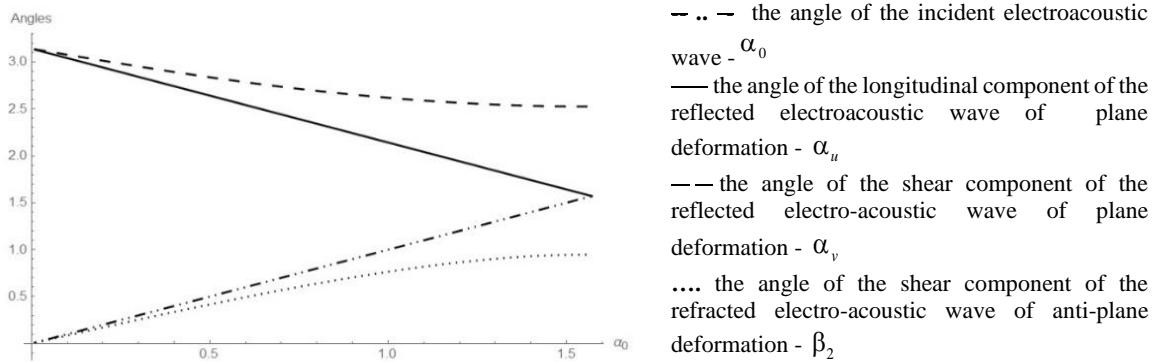
**Fig.4** The scheme of the reflection and refraction of an electroelastic **P** wave at the interface of two piezoelectrics with non-acoustic contact



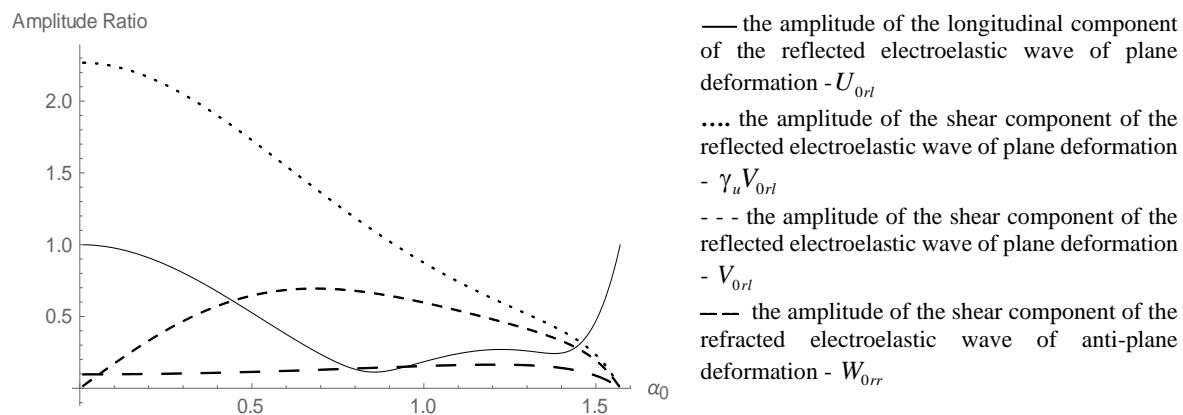
**Fig.5** The scheme of the reflection and refraction of an electroelastic **SH** wave on the surface of two piezoelectrics with non-acoustic contact

the piezoelectric half-space of the symmetry class  $\bar{6}m2$  ( $y < 0$ ) and the different piezoelectric half-space of the symmetry class  $6mm$  ( $y > 0$ ) is considered as shown in **Fig.4** and **Fig. 5**. The polarization axes of the both piezoelectric crystals are chosen so that they are parallel to the coordinate axis  $0z$ . From given schemes of reflection and refraction of electroacoustic wave signals at the non-acoustic contact of the interface of two piezoelectric media (**Fig. 4** and **Fig. 5**) it is obvious that formations of qualitatively different packets of wave components are possible.

- i- In one case, we can have the reflection and transmission of a **P** type electroelastic wave at the non-acoustic surface between the piezoelectrics of the symmetry classes  $6mm$  and  $\bar{6}m2$  (**Fig. 4**).
- ii- In another case, we can have the reflection and transmission of an electroelastic **SH** wave at the non-acoustic surface between the piezoelectrics of the symmetry classes  $6mm$  and  $\bar{6}m2$  (**Fig. 5**).



**Fig.6.** Behavior of the angles of the reflected (types P and SV) electro-elastic waves and the refracted electroelastic SH wave in case of an incident plane P wave at the interface between two piezoelectrics with non-acoustic contact.



**Fig. 7.** The behavior of some amplitudes of the reflected and refracted electroelastic waves in case of a plane P wave incident upon the interface between two piezoelectrics with the non-acoustic contact.

### Reference

1. Avetisyan Ara S. // Two-Dimensional Problems of Electro Acoustics in Homogeneous Piezoelectric Crystals, / Proceed. of NAS RA, Mechanics, (2019), vol. 72, №3, pp. 56-79, <http://doi.org/10.33018/72.3.4>.
2. Avetisyan Ara S., Khachatryan V.M., Galichyan T.A.// Reflection and Transmission of Electro-Elastic Waves at Plane Non-Acoustic Contact Interface of Two Different Piezoelectric Half-Spaces / Proc. of Sci. Pract. Conf. "Multiferroics: obtaining, properties, application" Vitebsk, (2019), edit. by Corresp. Member Rubanik.V., pp.92-95, <http://doi.org/10.26201/ISSP.2019.45.557/MFerro.37>,
3. Avetisyan Ara S., Khachatryan V.M.// Propagation of Hybrid Electroelastic Waves in Transversally Inhomogeneous Periodic Piezoelectric Structure / Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2020), vol. 73, №1, pp. 6-22, <http://doi.org/10.33018/73.1.1>,
4. Avetisyan Ara S., Jilavyan H.S.// Hybrid of Rayleigh and Gulyaev-Bluestein Electro-Acoustic Waves Near the Inner Surface of a Layered Piezoelectric Composite / Proc. of NAS of Armenia, Mechanics, (2020), vol. 73, №2, pp. 3-21, <http://doi.org/10.33018/73.2.1>,
5. Avetisyan Ara S., Khachatryan V.M.// Reflection and Transmission of Electro-Elastic Waves at Plane Non-Acoustic Contact Interface of Two Different Piezoelectric Half-Spaces // Actual Issues of Mechanical Engineering/ (2019), Issue. 8, №1, p. 6-10,

### Information about authors

**Аветисян Ара С.** - Отдел Динамики Деформируемых Систем и Связанных Полей, Институт Механики НАН РА, E: mail - [ara.serg.avetisyan@gmail.com](mailto:ara.serg.avetisyan@gmail.com),

**Мкртчян Манук Грайорович**, к.т.н., н.с., Институт Механики НАН РА,

# **Effect of deformation-heat treatment on the mechanical behavior of the graphene-nickel composite**

**Baimova J.A.\*<sup>,</sup> Safina L.R., Krylova K.A.**

The effect of deformation-heat treatment on the mechanical properties of the graphene-nickel composite has been studied using the molecular dynamics method. Crumpled graphene is considered as a matrix for a composite material, and nickel nanoparticles - as a filler. It was found, that results, obtained at different temperatures from 1000 K to 2000 K during deformation-heat treatment does not significantly differ. Thus, 1000 K is enough for fabrication of the composite. All structures have approximately the same mechanical properties after hydrostatic compression at different temperatures. The rupture of the structure of crumpled graphene containing nickel nanoparticles occurs much later than that of pure crumpled graphene. It is shown that metal atoms increase the strength properties of the composite.

## **1. Introduction**

Currently, the development of nanotechnology poses a new challenge to obtain nanoscale structures with improved electronic, thermal and mechanical properties, for example, composite materials.

One of the promising areas of research in the field of obtaining new composite structures with improved mechanical properties is the creation of composites based on carbon material and metals [1-3]. It was shown that some metals, such as Ni, Pt, Pd and Ti, can easily attach to carbon polymorphs and form a single structure [4-5]. Metal nanoparticles, which themselves are of great interest [6-8], can be covered with graphene flakes or enclosed in short nanotubes [9], and then form a three-dimensional composite structure.

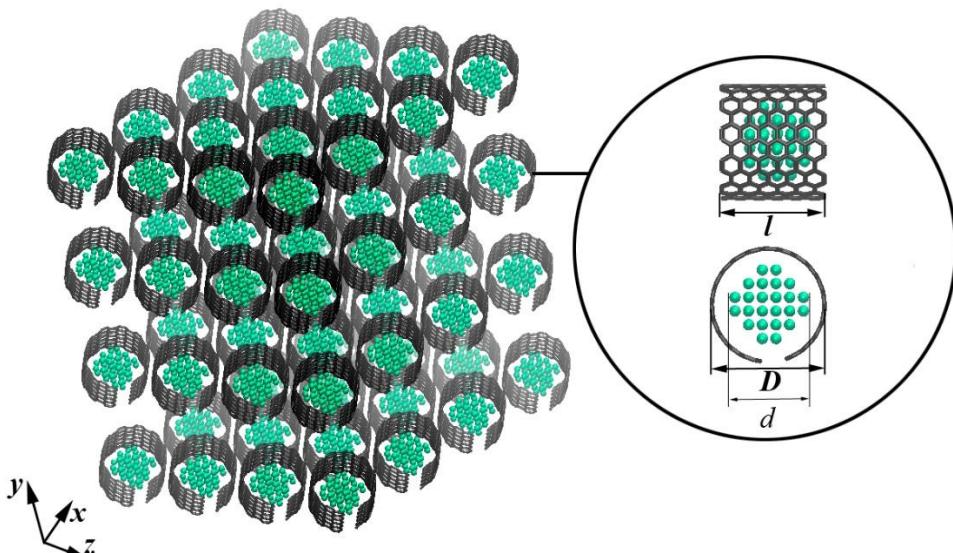
In particular, a large number of works are devoted to the study of composites based on Ni and graphene [10-15], since the addition of graphene to a nickel matrix can significantly improve the properties of the resulting material. For example, Ni improves the mechanical properties of carbon nanotubes [5]. It is shown that the addition of graphene increases the Young's modulus of the material [10] and its strength [11]; improves corrosion resistance [12] and tribological characteristics of the material [13]. Besides the mechanical characteristics, the addition of graphene also has a good effect on other physical properties. The work [15] shows the possibility of obtaining better quality supercapacitors by combining Ni and carbon structures.

In this work, the effect of deformation-heat treatment on the mechanical properties of the graphene-nickel composite is studied using the molecular dynamics method. To identify the effect of deformation-heat treatment, three temperatures (1000, 1500 and 2000 K) are considered.

## **2. Simulation details**

In order to obtain a composite material, the structure of crumpled graphene is considered as the matrix of the composite, and nickel nanoparticles as the filler. Fig. 1 shows the initial structure of crumpled graphene containing nickel nanoparticles. Such a structure is created from a short carbon nanotube (11, 11) by removing a part of atoms along the  $z$  axis. Next, the resulting folded graphene flake (Fig. 1, shown on the right), with the length  $l = 13 \text{ \AA}$  and diameter  $D = 14 \text{ \AA}$ , is filled with nickel nanoparticle of a diameter  $d = 9 \text{ \AA}$ . The graphene structure filled with nickel nanoparticles is arbitrarily rotated and repeated four times along the  $x$ ,  $y$ , and  $z$  directions, respectively. The bulk structure consists of 19196 atoms, of which 16138 are carbon atoms and 3008 are nickel atoms. All the simulations are conducted using LAMMPS package with the AIREBO interatomic potential for the description of interaction between carbon atoms. For Ni-Ni and Ni-C interaction, simple pair Morse interatomic potential is used with the parameters for Ni-Ni proposed in [15] and for Ni-C proposed in [16, 17]. Equations of motion for the atoms were integrated numerically using the fourth-order Verlet method with the time step of 0.1~fs. The Nose-Hoover thermostat is used to control the system temperature.

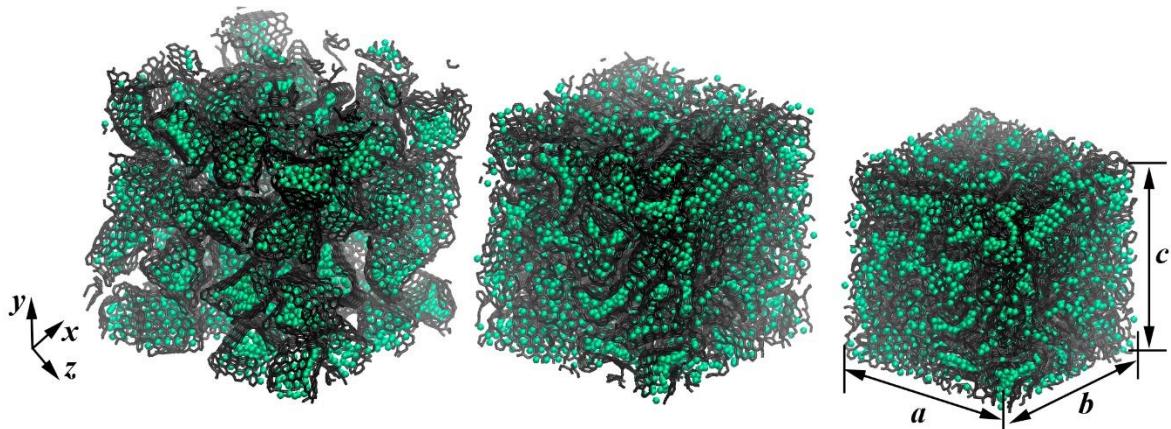
Annealing at 300 K is applied to the initial structure. Further, the strain-controlled hydrostatic compression,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$ , is applied to the computational cells at temperatures 1000, 1500, and 2000 K with the strain rate  $\dot{\varepsilon} = 0.01 \text{ ps}^{-1}$ . To study the mechanical properties of the obtained composite, uniaxial tension is applied with the  $\dot{\varepsilon} = 0.005 \text{ ps}^{-1}$ .



**Fig. 1.** Initial view of the structure of crumpled graphene containing nickel nanoparticles (left), and a single element of crumpled graphene containing metal nanoparticles - rolled graphene flake (right).

### 3. Results and discussion

In work [19], it was shown that to create a homogeneous composite material it is better to use annealing of the initial structure before compression, since with an insufficient angle of rotation of individual elements, the structure has anisotropic properties, which is not very desirable for a composite material. Thus, the original structure is kept at 300 K for 20 ps before compression. This procedure is conducted to avoid the occurrence of anisotropy of the material. In structure at the end of exposure, single graphene flakes resemble capsules with metal nanoparticles. Then instant pressure is applied to eliminate large voids. The next step is hydrostatic compression at different temperatures ( $T = 1000, 1500$ , and  $2000$  K), which should activate the formation of new chemical bonds between graphene flakes. In addition, at this temperature, nickel nanoparticles will melt, since the melting point of a nanoparticle is about 1360 K [20]. It should be noted that this temperature range is rather far from the melting point of graphene (about 5000 K) [21,22]. This will lead to a better distribution of Ni atoms in the composite structure. As was established earlier [2], at zero temperature, hydrostatic compression does not lead to the formation of a composite. Despite the high density of the compressed material, in the process of stretching, the graphene flakes return to their original state.



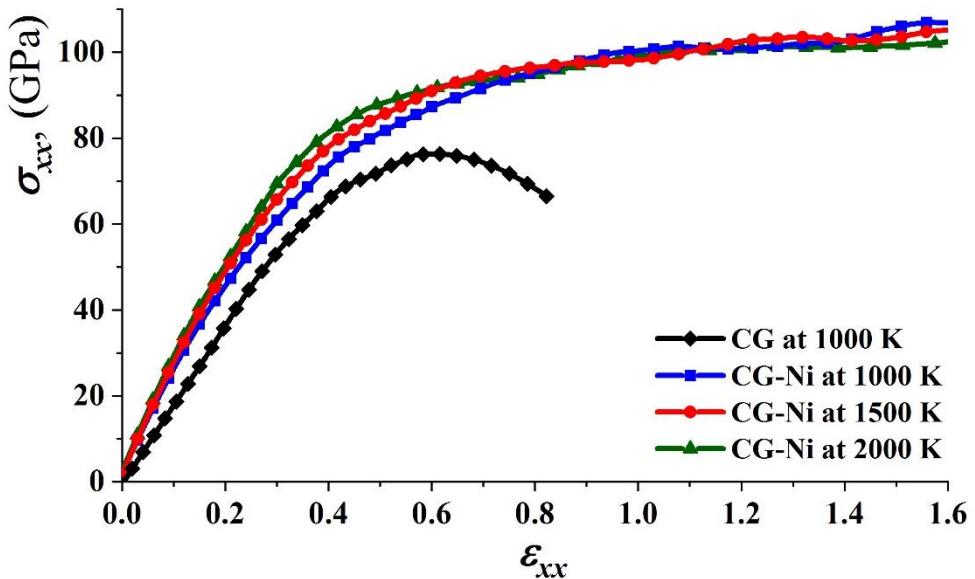
**Fig. 2.** Structure of crumpled graphene containing nickel nanoparticles in pores during hydrostatic compression.

As an example, Fig. 2 shows the structural changes under hydrostatic compression at  $T = 1000$  K. As can be seen from the figure, before hydrostatic compression, graphene capsules with nickel look more rounded, but under the action of temperature and pressure they become

flatter, as a result, metal nanoparticles are evenly distributed over the graphene sheet. The structure after hydrostatic compression has the following dimensions:  $a = 45 \text{ \AA}$ ;  $b = 45 \text{ \AA}$ ;  $c = 47 \text{ \AA}$ .

Uniaxial tension is applied to the compressed material to determine if a composite has been formed. Fig. 3 shows the deformation curves under uniaxial tension of structures formed at different temperatures. As can be seen from the curves, hydrostatic compression at different temperatures in the range from 1000 to 2000 K does not have a particularly large effect on the strength properties of the composite material. All curves are approximately in the same range. However, it is important to pay attention to the degree of tensile deformation. Structures can withstand large degrees of deformation and it is important to note that ultimate strength has not yet been reached. Hence, we can conclude that under these conditions it is possible to obtain a durable and plastic composite material.

In addition, metal clusters are removed from the compressed structure to reveal the effect of nickel nanoparticles. Then, uniaxial tension is applied to the crumpled graphene. In Fig. 3 it can be seen (black curve), that a rather loose carbon structure will not have such outstanding properties. Even at a degree of deformation of 0.6, the ultimate strength of the structure is reached. Despite strong covalent bonds between neighboring unit elements of crumpled graphene are formed, destruction of the structure took place.

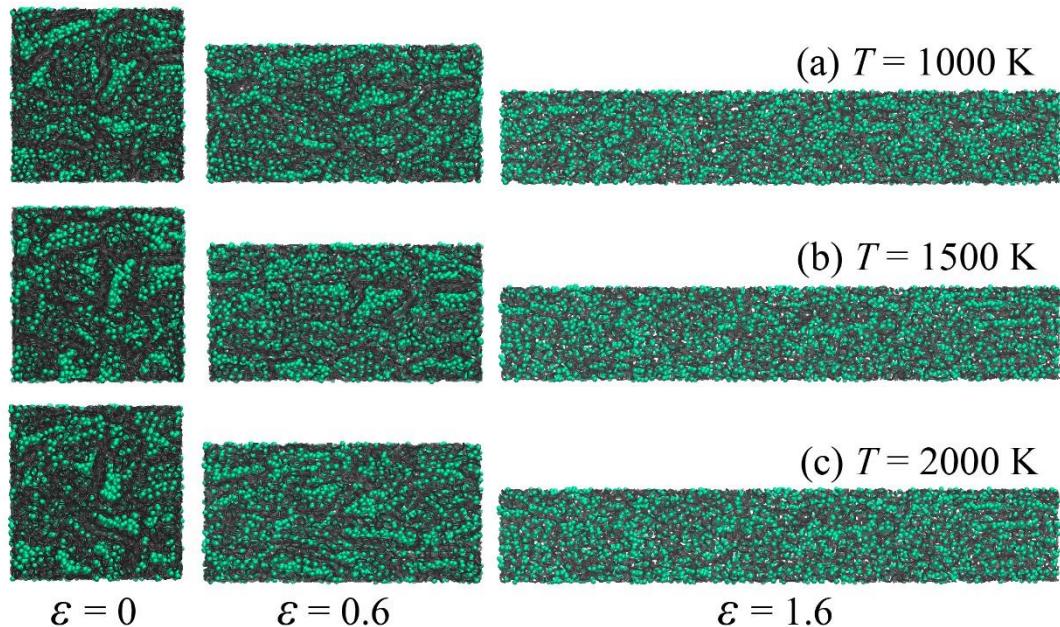


**Fig. 3.** Stress-strain curves after uniaxial tension of the composite obtained by hydrostatic compression at 1000 K, 1500 K and 2000 K, as well as for the structure of crumpled graphene formed by compression at 1000 K.

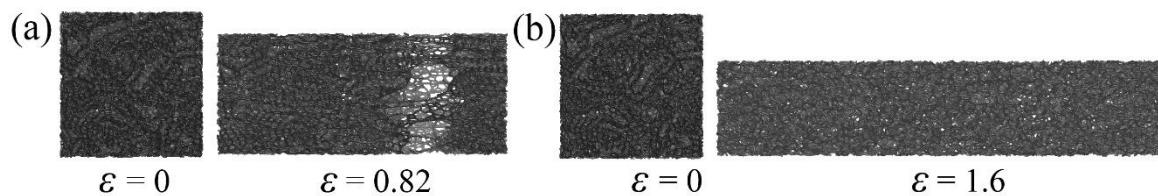
Fig. 4 shows the structures in the process of uniaxial tension for different degrees of deformation, obtained by hydrostatic compression at different temperatures. The figures confirm that there are no noticeable differences between the structures formed at different temperatures. Hence, it can be concluded that in the temperature range from 1000 to 2000 K, a sufficient number of new chemical bonds appear between adjacent flakes, which are responsible for the strength properties of the composite. Despite the fact that nickel nanoparticles are connected to the graphene flake by weak van der Waals forces, they make the structure more plastic. Plasticity is achieved due to the fact that metal clusters occupy an equilibrium position in the graphene cavity at the centers of the hexagons. When uniaxial tension is applied, defects appear in the graphene flake as the effect on the material increases. However, covalent bonds between adjacent graphene flakes, as well as metal atoms bound by van der Waals forces to graphene, resist external influences. The graphene flake begins to unravel at the site of the first defect, forming carbon chains of different shapes and lengths. Until the carbon particles of the composite break into separate short carbon chains, the structure will stretch.

In addition, the structure of pure crumpled graphene obtained by hydrostatic compression at a temperature of 1000 K is considered. Fig. 5. shows a comparison of two materials: (a) the structure of

the composite depicted without metal nanoparticles, and (b) the structure of pure crumpled graphene before and after stretching. As can be seen from the figures, the structure obtained from rolled graphene flakes filled with nickel nanoparticles stretches almost two times more than pure crumpled graphene. In pure crumpled graphene, when covalent bonds with neighboring flakes are broken, the pore size increases with increasing impact on the material, and at this point the structure is destroyed. Hence, it can be concluded that nickel nanoparticles improve the mechanical properties of the graphene-nickel composite.



**Fig. 4.** Snapshots of the composite structure obtained by hydrostatic compression at (a) 1000 K; (b) 1500 K; (c) 2000 K during uniaxial tension.



**Fig. 5.** Snapshots of (a) a composite structure without nickel nanoparticles, as well as (b) crumpled pure graphene before and after uniaxial stretching.

### Conclusions

In this work, the effect of deformation-heat treatment on the mechanical behavior of the graphene-nickel composite by the method of molecular dynamics is investigated. It was found that the composite can be obtained at elevated temperatures higher than 1000 K. No special differences in the structures obtained at different temperatures were observed. It is shown that nickel nanoparticles increase the strength properties of the composite and the structure withstands large degrees of deformation, whereas in pure crumpled graphene, rupture occurs much earlier.

### Acknowledgements

Calculation of the hydrostatic compression of CG done by L.R.S. and supported by the program of fundamental researches of Government Academy of Sciences of IMSP RAS. Investigation of obtaining a composite based on graphene and metal nanoparticles made by J.A.B., K.A.K. and supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 20-72-10112).

### REFERENCE

- Kurapova O.Y., Smirnov I.V., Solovyeva E.N., Archakov I.Y., Konakov V.G. The effect of reduced graphene oxide (rGO) and thermally exfoliated graphite (TEFG) on the mechanical properties of “nickel-graphene” composites. Lett. Mater., vol. 10. N 2. 2020. p. 164.

2. Safina L.R., Baimova J.A., Krylova K.A., Murzaev R.T., Mulyukov R.R. Simulation of metal-graphene composites by molecular dynamics: a review. *Lett. Mater.*, vol. 10. N 3. 2020. p. 351.
3. Khisamov R.K., Nazarov K.S., Trinh P.V., Nazarov A.A., Phuong D.D., Mulyukov R.R. Field electron emission from a copper-based composite reinforced with carbon nanotubes. *Lett. Mater.*, vol. 9. N 4s 2019. p. 566.
4. Park N., Sung D., Lim S., Moon S., Hong S. Realistic adsorption geometries and binding affinities of metal nanoparticles onto the surface of carbon nanotubes. *Appl. Phys. Lett.*, vol. 94. 2009. p. 073105.
5. Inoue S., Matsumura Y. Influence of metal coating on single-walled carbon nanotube: Molecular dynamics approach to determine tensile strength. *Chem. Phys. Lett.*, vol. 469. N 1–3. 2008. p. 125.
6. Myasnicenko V.S., Razavi M., Outokesh M., Sdobnyakov N.Y., Starostenkov M.D. Molecular dynamic investigation of size-dependent surface energy of icosahedral copper nanoparticles at different temperature. *Lett. Mater.*, vol. 6. N 4. 2016. p. 260.
7. Chepkasov I.V., Gafner Y.Y., Kurbanova E.D., Polukhin V.A. Study of the effect of ultrafast heating on the structure and shape of the gas phase synthesized Cu nanoparticles. *Lett. Mater.*, vol. 4. N 4. 2014. p.249.
8. Li M., Lin L., Guo R., Bhalla A., Zeng X. J. Numerical investigation of size effects on mechanical behaviors of Fe nanoparticles through an atomistic field theory. *Micromech. Mol. Phys.*, vol. 02. N 3. 2017. p. 1750010.
9. Song H.-Y., Zha X.-W. Mechanical properties of nickel-coated single-walled carbon nanotubes and their embedded gold matrix composites. *Phys. Lett. A*, vol. 374. N 8. 2010. p. 1068.
10. Ren Z., Meng N., Shehzad K., Xu Y., Qu S., Yu B., Luo J.K. Mechanical properties of nickel-graphene composites synthesized by electrochemical deposition. *Nanotechnology*, vol. 26. 2015. p. 065706.
11. Kim Y., Lee J., Yeom M.S., Shin J.W., Kim H., Cui Y., Kysar J.W., Hone J., Jung Y., Jeon S., Han S.M. Strengthening effect of single-atomic-layer graphene in metal-graphene nanolayered composites. *Nat. Commun.*, vol. 4. 2013. p. 2114.
12. Kumar C.M.P., Venkatesha T.V., Shabadi R. Preparation and corrosion behavior of Ni and Ni-graphene composite coatings. *Mater. Res. Bull.*, vol. 48. N 4. 2013. p. 1477.
13. Xiang L., Shen Q., Zhang Y., Bai W., Nie C. One-step electrodeposited Ni-graphene composite coating with excellent tribological properties. *Surf. Coat. Technol.*, vol. 373. 2019. p. 38.
14. Kuang D., Xu L., Liu L., Hu W., Wu Y. Graphene–nickel composites. *Appl. Surf. Sci.*, vol. 273. 2013. p. 484.
15. Zhou H., Liu D., Luo F., Luo B., Tian Y., Chen D., Shen C. Preparation of graphene nanowalls on nickel foam as supercapacitor electrodes. *Micro Nano Lett.*, vol. 13. N 6. 2018. p. 842.
16. Girifalco L. A., Weizer V. G. Application of the morse potential function to cubic metals. *Physical Review*, vol. 114. N 3. 1959. p. 687.
17. Katin K. P., Prudkovskiy V. S., Maslov M. M. Molecular dynamics simulation of nickel-coated graphene bending. *Micro & Nano Letters*, vol. 13. N 2. 2018. p. 160.
18. Galashev A. Y., Katin K. P., Maslov M. M. Morse parameters for the interaction of metals with graphene and silicone. *Physics Letters A*, vol. 383. N 2-3. 2019. p. 252.
19. Krylova K.A., Safina L.R., Murzaev R.T., Baimova J.A., Mulyukov R.R. Effect of nanoparticle size on the mechanical strength of Ni-graphene composites. *Materials*, vol. 14. N 11. 2021. p. 3087.
20. Safna L. R., Baimova J.A., Mulyukov R. R. Nickel nanoparticles inside carbon nanostructures: atomistic simulation. *Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes*, vol. 5. 2019. p. 1.
21. Ganz E., Ganz A.B., Yang L.M. and Dornfeld M. The initial stages of melting of graphene between 4000 K and 6000 K. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, vol. 19. 2017. p. 3756-3762.
22. Orekhov N.D. and Stegailov V.V. Melting temperature of graphene. *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 653. 2015. p.012090

#### **Information about authors**

**Julia A. Baimova** – Dr. Sci. Prof. RAS, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS  
**E-mail:** julia.a.baimova@gmail.com

**Liliya R. Safina** – student, Ufa State Petroleum Technological University.  
**E-mail:** saflia@mail.ru

**Karina A. Krylova** – Ph.D.. Researcher, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS  
**E-mail:** bukreevkarina@gmail.com

## **Reinforcement of Polymer Composite Materials by Titanium Dioxide Nanoparticles Synthesized in Plasma Discharge under Ultrasonic Cavitation**

**Bulychev N.A., Kolesnik S.A.**

Epoxy resins are often used as polymer matrices in functional and structural composites due to their good heat resistance, durability, as well as good electrical, chemical and mechanical properties. However, the area of application of such materials is often limited due to their fragility and poor toughness. One of the ways to overcome these problems is to improve the properties of epoxy matrices by introducing a solid filler into the polymer matrix. A new approach in the field of nanotechnology proposes the use of fillers in the nanometer size range, since nanofillers have a large surface area, which makes them chemically very reactive and helps them to better bond with the matrix. Nanoparticles embedded in a polymer matrix are attracting increasing interest due to the unique mechanical, optical, electrical, and magnetic properties exhibited by such polymer composite materials and can significantly improve them. These property improvements are dependent on the volumetric content of the filler as well as the type and characteristics of the nanofillers.

Nanofillers of a metallic or other inorganic type can be considered as excellent candidates for hardening polymer matrices. Due to their chemical inertness, low toxicity, photocatalytic activity, high refractive index, and other beneficial properties, titanium dioxide ( $TiO_2$ ) nanoparticles have attracted a great deal of attention of many researchers and are used in the food, paint and varnish industry, etc. A number of studies have shown that the introduction of  $TiO_2$  nanoparticles improves some properties of polymer materials. However, the process of interaction and the mechanism of hardening of epoxy resin using nanoparticles is still obscure and not fully understood. There are few works on epoxy polymer composite materials with  $TiO_2$  nanoparticles; therefore, it is prospective to obtain new examples of such polymer composite materials and study their physical and mechanical properties, since due to the presence of  $TiO_2$ , it is possible to use such polymer composite materials in biomedicine, as bactericidal and photocatalytic surfaces.

In a range of previous studies, the possibility to initiate the specific type of plasma discharge in a cavitating liquid has been shown as well as the application of such discharge for the synthesis of nanomaterials with controlled properties.

Since it was found that the acoustoplasma method allows to synthesize nanosized particles of metal oxides with the controlled shape and narrow size distribution, the aim of this work was to obtain and study the properties of aggregation and sedimentation stable dispersed systems of titanium dioxide nanoparticles with an average particle size less than 100 nm, with the same shape and narrow particle size distribution.

Further observations of nanoparticles suspensions showed that they have high aggregative and sedimentation stability and do not grow larger over time, but can form composite associates when applied to a substrate.

As a result of the further experiments, epoxy polymer composite materials based on titanium dioxide nanoparticles in the form of opaque blue-gray films were obtained. The composition and structure of epoxy polymer composite materials were studied by scanning electron microscopy. In a polymer composite material containing 2%  $TiO_2$  nanoparticles, agglomerations of particles are observed, and therefore the average diameter increases from 30-50 nm to 70-90 nm.

In following physical and mechanical tensile tests, the efficiency of filling the polymer matrix with  $TiO_2$  nanoparticles was monitored according to the following parameters: tensile strength ( $R_m$ , MPa), elastic modulus ( $E$ , GPa), and relative deformation ( $\epsilon$ , %). The test included control samples not modified with titanium dioxide and samples of polymer composite materials with different contents of  $TiO_2$  nanoparticles. The size of the samples was  $10 \times 90$  mm, the thickness was 0.08 mm. The tensile test speed was 2 mm/min. The samples were securely fixed in rubberized clamps and a load was applied until complete destruction. Fracture occurred in the middle of the sample. After carrying out all the necessary tests and calculations, diagrams of the dependence of strength, modulus, and deformation on the concentration of  $TiO_2$  nanoparticles were obtained. As shown in Fig. 5, the tensile strength drops sharply at concentrations of  $TiO_2$  nanoparticles higher than 3 wt.%, which is possibly associated with secondary processes of agglomeration of  $TiO_2$  nanoparticles. Therefore, working concentrations of  $TiO_2$  nanoparticles should not exceed 3 wt.%.

Thus, it was demonstrated that mechanical properties depend on the concentration of TiO<sub>2</sub> nanoparticles. The values of the elastic modulus and tensile strength are maximum at a nanoparticle concentration of 3 wt.%. The relative deformation increases with increasing concentration up to 1 wt.%.

As a result of these studies, polymer composite materials based on epoxy resin and titanium dioxide nanoparticles have been obtained by introducing synthesized nanoparticles into epoxy resin at the stage of its curing, and the effect of nanoparticle concentration on physical and mechanical properties of obtained polymer composite materials has been investigated. The physical and mechanical properties of epoxy polymer composite materials have been investigated. It is shown that the introduction of 1 wt.% of TiO<sub>2</sub> nanoparticles leads to an increase in the relative deformation by 35-40 %. The maximum tensile strength values are achieved at a concentration of 3 wt.% TiO<sub>2</sub>. The increase in the elastic modulus is 20-25 % at TiO<sub>2</sub> nanoparticles concentrations was observed above 1 wt.%. Improved mechanical properties indicate the formation of strong interfacial interactions.

*This work has been carried out with the financial support of Russian Science Foundation, project No. 20-19-00395.*

#### **Information about authors**

**Bulychev N.A.** – Doctor of Chemical Sciences, Leading Researcher Lebedev Physical Institute of RAS, Professor Moscow Aviation Institute  
E-mail: [nbulychev@mail.ru](mailto:nbulychev@mail.ru)

**Kolesnik S.A.** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Moscow Aviation Institute  
E-mail: [ksa@mai.ru](mailto:ksa@mai.ru)

# Displacement and Stress-Strain Fields Comparison of Particle-Reinforced Timoshenko Beam with Uniform and Non-Uniform Distribution of Particles

Chopuryan S. S., Khurshudyan As. Zh.

In this paper, we study the influence of the particle distribution on the displacement and stress-strain fields of axially compressed particle-reinforced Timoshenko cantilevered beam. Governing equations are obtained by means of the multiscale method. More specifically, we first obtain the beam equations in the microscale where the beam is represented as a continuum strengthened with spherical inclusions. Then, the beam equations at the mesoscale are obtained by decreasing the scale parameter to 0, where the beam is represented as a continuum with point inhomogeneities. The comparative analysis based on simulations show that in the case of uniformly distributed particles, the normal displacement and the tangential stress are smaller compared to that for non-uniformly distributed particles. However, the normal stress is larger in the case of uniformly distributed particles.

## 1. Introduction

Contemporary production engineering provides extended opportunities to process materials with arbitrarily fine microstructure. In other words, almost arbitrary solution provided by material, structure and topology optimization of a given sample can be realized with high accuracy. For a review of corresponding technologies and the opportunities they provide, see, [1]. At the same time, material modelling is also under great development and metamaterials with more and more useful target properties are proposed. One of the most frequently used methods of material modelling is the so-called multiscale method [2] linking the structure and behavior of materials at different scales.

In this paper, we are going to consider particle-reinforced materials having wide applications in many areas of applied engineering [3]. Most of existing studies on particle-reinforced materials aim to estimate or exactly calculate the so-called effective properties (see, e.g., [3-16] and references therein). These effective properties depend on particle distribution, volume fraction, material characteristics. Since the distribution of particles affect the value of the effective properties of the composite, a natural problem arises: are there optimal distributions of particles leading to effective properties of the composite changing in a required range? In [13-15], the dependence of the effective properties on the particles distribution is made explicit, thus, making possible to answer the question above relatively easy. It is already a fact that the uniform distribution of particles may not always be optimal [17].

This paper is the first step in that direction and our aim is to figure out the differences of uniform and non-uniform particle distributions in the case of Timoshenko beam. More specifically, we consider a Timoshenko beam with uniformly distributed particles and particles distributed randomly according to the well-known Weibull distribution. The beam equations are then simulated to illustrate the displacement field and stress-strain state of the beam and compare them with each other. The analysis shows that the normal displacement and tangential stresses decrease in the case of uniformly distributed particles, whereas the normal stress increases.

## 2. Beam Equations at Microscale and Mesoscale

We begin with the microscale description of the beam. We consider a beam of constant, rectangular cross section occupying the domain  $B = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h_1, 0 \leq z \leq h_2\}$ , which is reinforced by a finite number of balls  $b^\zeta := \bigcup_{n=1}^N b_n^\zeta \subset B$  with center  $x_{0n}$  and radius  $r_n$  of the  $n^{\text{th}}$  ball. Here,  $\zeta = r / \min(h_1, h_2)$ , is a scale parameter allowing to zoom in or zoom out the scale at which the beam is studied. The volume fraction  $\phi_p$  of the balls remains constant for all values of  $\zeta$ .

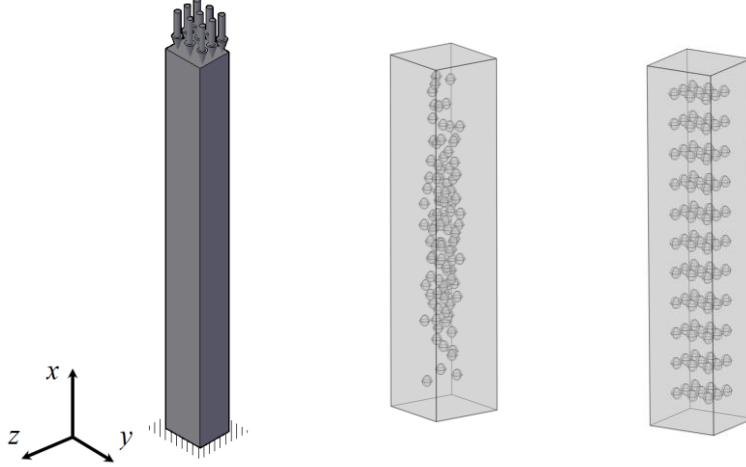
The beam is cantilevered at one end and it is subjected to an axial force  $F$  at its other end. Following to [16], we accept the following hypotheses.

**Assumption 1.**  $B_b^\zeta := B \setminus b$  is connected.

**Assumption 2.** Both  $b^\zeta$  and  $B_b^\zeta$  are isotropic, linear elastic, homogeneous and free of all types of defects and voids.

**Assumption 3.** During the deformation of the beam, particles do not interact mechanically, meaning that for any  $n_1 \neq n_2$ ,  $b_{n_1}^\zeta \cap b_{n_2}^\zeta = \emptyset$ .

**Assumption 4.** Infinitesimal strains are considered such that for any  $n_1 \neq n_2$ ,  $\varepsilon_{ij} \ll \text{dist}(b_{n_1}^\zeta, b_{n_2}^\zeta)$ . Here,  $\varepsilon_{ij}$  are the components of the strain tensor of the beam,  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  measures the distance in  $\mathbb{R}^3$ .



**Figure 1.** Schematic representation of the beam with uniformly and non-uniformly distributed balls

In [16], the microscopic beam equations are obtained as follows:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa_1 E_0^\zeta(x) \left( \frac{\partial w^\zeta}{\partial x} - \varphi^\zeta \right) \right] = 0, \quad F \frac{\partial w^\zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ E_2^\zeta(x) \frac{\partial \varphi^\zeta}{\partial x} \right] + \kappa_1 E_0^\zeta(x) \left[ \frac{\partial w^\zeta}{\partial x} - \varphi^\zeta \right] = 0, \quad (1)$$

where  $\kappa_1 = \frac{\kappa}{2(1+\nu)}$ ,  $w^\zeta$ ,  $\varphi^\zeta$ ,  $\kappa$  and  $\nu$  are the normal displacement, slope, shear factor and Poisson ratio of the beam,  $E_k^\zeta(x) = \int_A z^k E^\zeta(x, y, z) dA$ ,  $k = 0, 2$ ,  $E^\zeta(x, y, z) = E_b \chi_{B_b^\zeta}(x, y, z) + E_p \chi_{b^\zeta}(x, y, z)$ ,  $E^\zeta$  and  $A$  are the Young's modulus and cross-sectional area of the beam,  $E_b$  and  $E_p$  are the Young's moduli of the bulk material and particles, respectively,  $\chi_{B_b^\zeta}$  is the indicator function of  $B_b^\zeta$ .

It has been shown in [16] that the mesoscale beam equations when  $\zeta \rightarrow 0$  are as follows:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa_1 E_0^0(x) \left( \frac{\partial w^0}{\partial x} - \varphi^0 \right) \right] = 0, \quad F \frac{\partial w^0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ E_2^0(x) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x} \right] + \kappa_1 E_0^0(x) \left[ \frac{\partial w^0}{\partial x} - \varphi^0 \right] = 0, \quad (2)$$

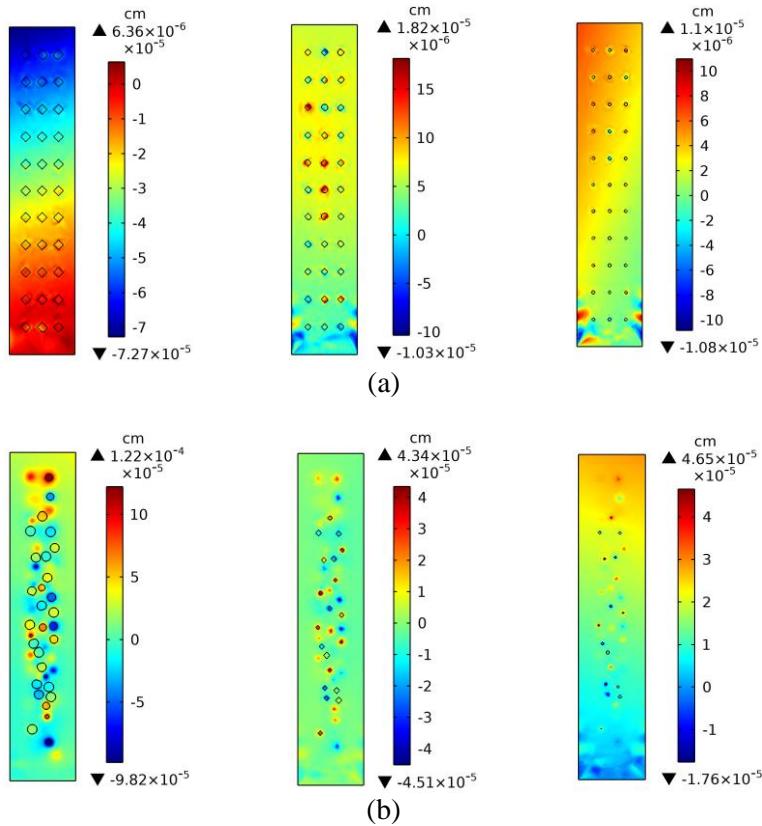
where  $E_k^0$  are defined exactly as  $E_k^\zeta$ , but using the following expression for  $E^0$ :

$$E^0(x, y, z) = (1 - \phi_p) E_b + \phi_p \cdot \frac{E_p V_B}{N} \sum_{n=1}^N \delta(x - x_{0n}) \delta(y - y_{0n}) \delta(z - z_{0n}).$$

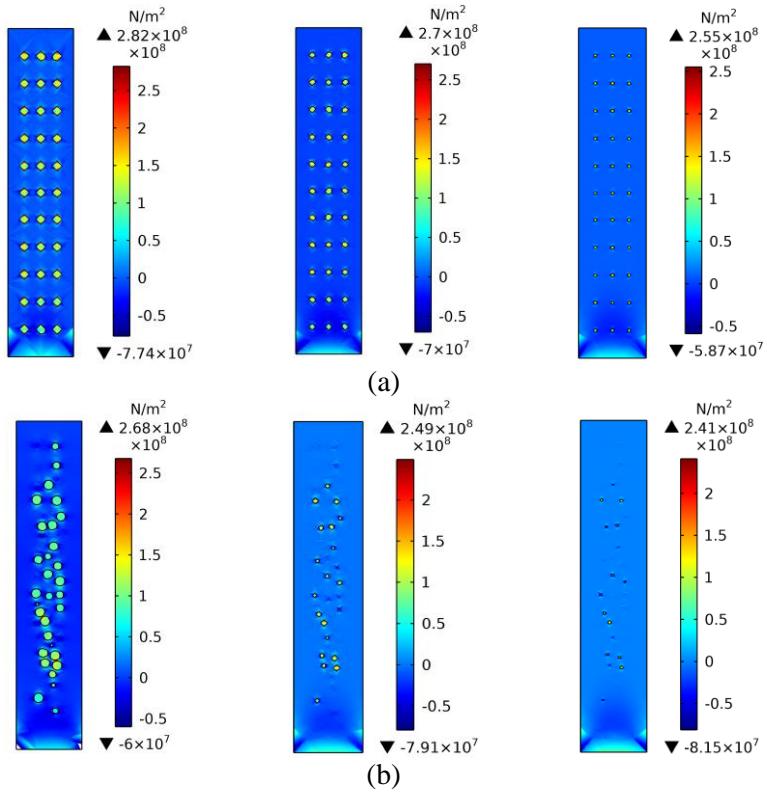
### 3. Results of Numerical Simulation

In order to carry out a comparison of the normal displacement and stress-strain state components for uniformly and non-uniformly distributed particles, we perform a simulation based on the beam equations (1) and (2). More specifically, we consider the solution of (1) for  $\zeta = 0.075, 0.05$  and when  $\zeta \rightarrow 0$ , we use the solution of (2). For the sake of simplicity, we consider the case when the beam is made from copper, whereas the material of the particles is made from steel. Results of

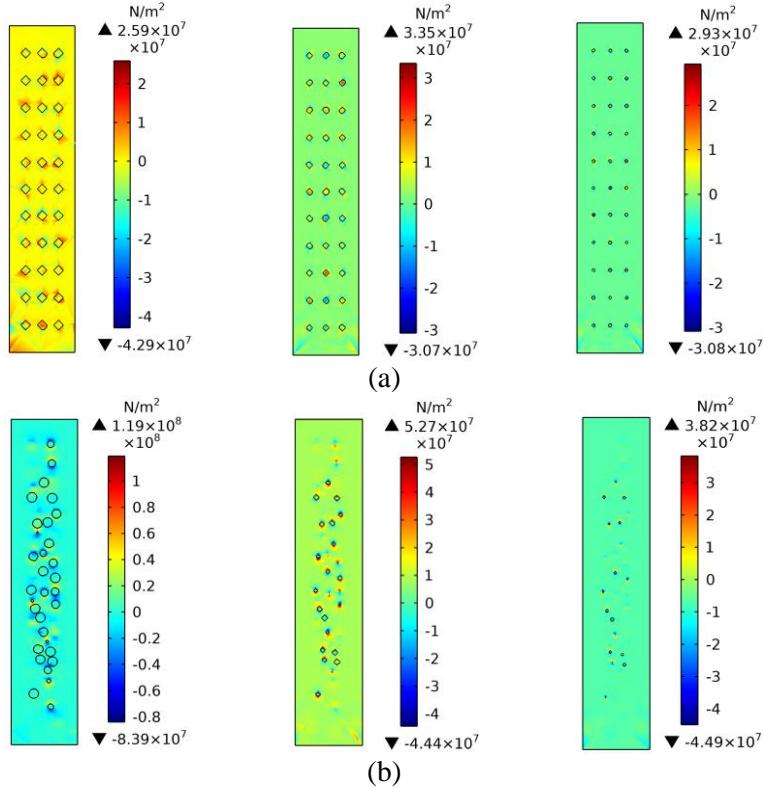
comparison are represented in Figures 2-4 below. In the first case, the particles are distributed according to the Weibull distribution.



**Figure 2.** Distribution of  $w^c$  for uniformly (a) and non-uniformly distributed particles (b)



**Figure 3.** Distribution of  $\sigma_{xx}^c$  for uniformly (a) and non-uniformly distributed particles (b)



**Figure 4.** Distribution of  $\sigma_{xz}^\xi$  for uniformly (a) and non-uniformly distributed particles (b)

Evidently, from the corresponding values of the quantities shown on plots above it follows that as  $\xi \rightarrow 0$

$$|w^\xi| \searrow |w^0|, \quad |\sigma_{xx}^\xi| \nearrow |\sigma_{xx}^0|, \quad |\sigma_{xz}^\xi| \searrow |\sigma_{xz}^0|.$$

#### 4. Conclusions

This paper deals with a cantilevered Timoshenko beam subjected to an axial force. The beam is reinforced with a finite set of balls of fixed radius. At this, two cases are considered. First, when the particles are distributed uniformly and second, when the particles are distributed non-uniformly according to the well-known Weibull distribution. Our aim is to compare the main characteristics of the displacement field and the stress-strain state of the beam. To this end, we carried out simulations in both cases and presented the results graphically.

In particular, we have established that, in absolute values, the normal displacement and the tangential stress of the beam are smaller in the case of uniformly distributed particles, while the normal stress is smaller in the case of non-uniform distribution of particles.

#### REFERENCES

1. Vaezi, M., Seitz, H., Yang, S., A review on 3D micro-additive manufacturing technologies. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* **67**(5–8), 1721–1754 (2013).
2. Steinhauser M. O. Computational Multiscale Modeling of Fluids and Solids: Theory and Applications. 2nd edn. Springer, Berlin (2017).
3. German, R. M. Particulate Composites: Fundamentals and Applications. Springer, Switzerland (2016).
4. Kushnhevsky V., Morachkovsky O., Altenbach H. Identification of effective properties of particle reinforced composite materials. *Computational Mechanics* **22**, 317–325 (1998).

5. Altenbach H. Modelling of anisotropic behavior in fiber and particle reinforced composites. In: Sadowski T. (eds) Multiscale Modelling of Damage and Fracture Processes in Composite Materials. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), vol 474. Springer, Vienna (2005).
6. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. Effective properties of particulate composites with surface-varying interphases. *Composites. Part B*, 149, 268– 284 (2018).
7. Nazarenko L., Stolarski H., Altenbach H. A statistical interphase damage model of random particulate composites. *International Journal of Plasticity*, 116, 118–142 (2019).
8. Sokolovski D., Kaminski M. Homogenization of carbon/polymer composites with anisotropic distribution of particles and stochastic interface defects. *Acta Mechanica*, 229, 3727–3765 (2018).
9. Kaminski M. Homogenization of particulate and fibrous composites with some non-Gaussian material uncertainties. *Composite Structures*, 210, 778–786 (2019).
10. Muc A., Barski M. Design of particulate-reinforced composite materials. *Materials* 11, 234 (2018).
11. Lin Ch.-H., Muliana A. Micromechanics models for the effective nonlinear electro-mechanical responses of piezoelectric composites. *Acta Mechanica*, 224(7), 1471–1492 (2013).
12. Khanbareh H., Topolov V., Bowen Ch. Piezo-Particulate Composites. Manufacturing, Properties, Applications. Springer Nature, Cham (2019).
13. Khurshudyan As. Zh. Derivation of a mesoscopic model for nonlinear particle reinforced composites from fully microscopic model. *Acta Mechanica*, 230(10), 3543 – 3554 (2019).
14. Khurshudyan As. Zh. A mesoscopic model for particle-reinforced composites. *Continuum Mech. Thermodyn.* 32, 1057–1071 (2020).
15. Khurshudyan As. Zh. The meso-scale behavior of particle-reinforced thermo-elastic composites3. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, DOI: 10.1007/s00161-021-00985-6 (2021).
16. Avetisyan A.S., Chopuryan S.S., Khurshudyan As. Zh. A meso-scale model of particle reinforced Timoshenko beam. *Proc. NAS Arm. Mech.*, 74 (1), 6 – 14 (2021).
17. Huang L.J., Geng L., Peng H-X. Microstructurally inhomogeneous composites: Is a homogeneous reinforcement distribution optimal? *Progress in Materials Science*, 71, 93–168 (2015).

### **Information about authors**

**Smbat S. Chopuryan** – Graduate Student, National Polytechnic University of Armenia, Department of Mechanics and Mechanical Engineering.

**Email:** smbat172@mail.ru

**Asatur Zh. Khurshudyan** – Senior Researcher at the Institute of Mechanics, NAS of Armenia.  
**Email:** khurshudyan@mechins.sci.am

# Constructive Formulas for Maslov's Canonical Operator in a Neighborhood of Caustics

**Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E.**

We discuss expressions for Maslov's canonical operator in a neighborhood of caustics in the form of special functions of a composite argument. These expressions permit rapid and efficient computation of wave processes.

Let  $\Lambda \subset \mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$  be a Lagrangian manifold in the phase space with coordinates  $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ , the embedding being given by the parametric equations  $x = X(\alpha)$ ,  $p = P(\alpha)$ , and let  $\alpha_0 \in \Lambda$  be a focal point, i.e., a point such that  $\det \partial X(\alpha) / \partial \alpha = 0$  at  $\alpha = \alpha_0$ . Then, in a neighborhood of the caustic point  $x_0 = X(\alpha_0)$ , Maslov's canonical operator [1] on  $\Lambda$  is given by a  $k$ -fold rapidly oscillating integral, where  $k = n - \text{rank } \partial X(\alpha) / \partial \alpha|_{\alpha=\alpha_0}$ . However, if  $\alpha_0$  is a generic focal point in the sense of [2], then there exists a Lagrangian equivalence reducing  $\Lambda$  in a neighborhood of  $\alpha_0$  to a normal form from the list in [2] (let us denote it by  $L$ ), and an associated transformation (which essentially amounts to a change of variables followed by the multiplication by a rapidly oscillating exponential) locally reduces the canonical operator on  $\Lambda$  to the canonical operator on  $L$ . The latter can be computed in terms of the special function associated with  $L$  and its derivatives, and hence we can replace the rapidly oscillating integrals in the representation of the canonical operator near generic caustics by finite expressions involving special functions of a composite argument. To obtain efficient formulas for computing the canonical operator with the use of technical computation systems such as *Wolfram Mathematica* and *MatLab*, it remains to indicate "good" formulas for the computation of the above-mentioned Lagrangian equivalence and the coefficients in the representation of the canonical operator on  $L$  via the special function and its derivatives. Such formulas were presented in [3,4] for the simplest  $A_2$  (fold) and  $A_3$  (cusp) Lagrangian singularities, which arise as generic singularities starting from  $n=1$  and 2, respectively. In the talk, we will also consider the case of  $n=3$ . Note that rapidly oscillating integrals with degenerating and/or coalescing stationary points (also known as wave catastrophes) have been extensively studied in the literature (e.g., see [5,6], where one can find further references). We will also discuss the relationship between the results of these studies and our formulas.

Here we explain the main ideas in more detail, using the cusp singularity as an example and following [4] (where one can also find all the references).

**1. Asymptotics associated with the standard cusp  $A_3$ .** The standard Lagrangian singularity  $A_3$  is defined by the germs at the origin of the projection  $(x, p) \mapsto x$  of the Lagrangian manifold  $L$  given by the parametric equations

$$x = X(\alpha) = (4\alpha_1^3 - 2\alpha_1\alpha_2, \alpha_2), \quad p = P(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_1^2),$$

where  $x = (x_1, x_2)$ ,  $p = (p_1, p_2)$ , and  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \equiv (p_1, x_2)$ . (There is also another kind of this singularity differing by the sign of  $4\alpha_1^3$  in the first equation, but its study goes along the same lines, and we omit it.) We equip the manifold  $L$  with the standard volume form  $d\mu = d\alpha_1 \wedge d\alpha_2$ , and then Maslov's canonical operator on  $L$  is given by the formula

$$[K_L^h A](x) = \frac{e^{i\pi/4}}{(2\pi h)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{h}(p_1^4 + x_2 p_1^2 + x_1 p_1)} A(p_1, x_2) dp_1.$$

Here  $A = A(\alpha)$  is a function on  $L$ . If  $A(\alpha) \equiv 1$ , then this formula just gives the *Pearcey function*

$$P(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^4 + yt^2 + zt)} dt;$$

more precisely,

$$[K_L^h 1](x) = \frac{e^{i\pi/4}}{(2\pi)^{1/2} h^{1/4}} P\left(\frac{x_2}{h^{1/2}}, \frac{x_1}{h^{3/4}}\right).$$

The Pearcey function is well tabulated, and so, from the computational viewpoint, this expression for  $[K_L^h 1](x)$  is clearly better than the original integral. However, we would like to obtain integral-free expressions for the case of an arbitrary (smooth, well-behaved at infinity) amplitude  $A(p_1, x_2)$ . Set  $\Phi(p_1, x) = p_1^4 + x_2 p_1^2 + x_1 p_1$ ; then

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(p_1, x) = p_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(p_1, x) = p_1^2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}(p_1, x) = 4\Pi(p_1, x),$$

where

$$\Pi(p_1, x) = p_1^3 + \frac{1}{2} x_2 p_1 + \frac{1}{4} x_1$$

is a monic polynomial in  $p_1$  with analytic coefficients. Let us artificially treat  $A$  as a function of three variables  $(p_1, x) = (p_1, x_1, x_2)$ , even though it is actually independent of  $x_1$ . Then, by Malgrange's preparation theorem, this function admits the expansion

$$A(p_1, x_2) = \Pi(p_1, x) g(p_1, x) + \sum_{j=0}^2 \rho_j(x) p_1^j$$

with smooth coefficients  $g$  and  $\rho_j$ . We substitute this expansion into the formula for the canonical operator, integrate by parts and differentiate as appropriate, and obtain

$$\begin{aligned} [K_L^h A](x) &= \frac{e^{i\pi/4}}{(2\pi)^{1/2} h^{1/4}} \left[ \rho_0(x) P\left(\frac{x_2}{h^{1/2}}, \frac{x_1}{h^{3/4}}\right) - i h^{1/4} \rho_1(x) \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{x_2}{h^{1/2}}, \frac{x_1}{h^{3/4}}\right) \right. \\ &\quad \left. - i h^{1/2} \rho_2(x) \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{x_2}{h^{1/2}}, \frac{x_1}{h^{3/4}}\right) \right] + O(h), \end{aligned}$$

so that it remains to compute the yet unknown coefficients  $\rho_j(x)$ . First, let us present the expressions for these coefficients in the domain  $\mathcal{D}$  lying in the lower half-plane  $\{x_2 < 0\}$  bounded by the branches of the caustic  $27x_1^2 = -8x_2^3$ . In the domain  $\mathcal{D}$ , the polynomial  $\Pi(\xi, x)$  has three roots  $\xi = \xi_k(x)$  given by

$$\xi_k(x) = \left(-\frac{2}{3}x_2\right)^{1/2} \cos \varphi_k, \quad \varphi_{1,2} = \frac{2\pi}{3} \pm \varphi_3, \quad \varphi_3 = \frac{1}{3} \arccos \frac{3^{3/2} x_1}{(-2x_2)^{3/2}}.$$

In terms of these roots, the expressions for the  $\rho_j(x)$  in  $\mathcal{D}$  read

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= \sum_{k=1}^3 \frac{A(\xi_k(x), x_2) \xi_l(x) \xi_m(x)}{W_k(\xi_k(x), x)}, \\ \rho_1(x) &= -\sum_{k=1}^3 \frac{A(\xi_k(x), x_2) (\xi_l(x) + \xi_m(x))}{W_k(\xi_k(x), x)}, \quad \rho_2(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{A(\xi_k(x), x_2)}{W_k(\xi_k(x), x)}, \end{aligned}$$

where  $(k, l, m)$  is always a cyclic permutation of  $(1, 2, 3)$ . The expressions outside  $\mathcal{D}$  can be found as follows. Let

$$Q(x) = \left(\frac{x_2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x_1}{8}\right)^2, \quad \xi(x) = \left(Q^{1/2}(x) - \frac{x_1}{8}\right)^{1/3} - \left(Q^{1/2}(x) + \frac{x_1}{8}\right)^{1/3}.$$

Now we arbitrarily continue  $\rho_1(x)$  and  $\rho_2(x)$  from  $\mathcal{D}$  to the entire  $R^2$  as smooth functions of  $x$  (see below) and set

$$\rho_0(x) = A(\xi(x), x_2) - \rho_1(x)\xi(x) - \rho_2(x)\xi^2(x)$$

in  $R^2 \setminus \mathcal{D}$ . There is a theorem in [4] stating that a smooth continuation of  $\rho_1$  and  $\rho_2$  is always possible and then the last formula gives a smooth continuation of  $\rho_0$ . However, the caustic bounding  $\mathcal{D}$  has a cusp, so it is not immediately clear how to construct such a continuation in practice. The simplest procedure is as follows. Let us lift  $\rho_{1,2}$  from  $\mathcal{D}$  to  $L$  using the mapping  $\pi: \alpha \mapsto X(\alpha)$ . The preimage of  $\mathcal{D}$  is the domain  $\pi^{-1}(\mathcal{D}) = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_2 < -6\alpha_1^2\}$  bounded by the smooth nondegenerate curve  $\alpha_2 = -6\alpha_1^2$ . The lifts  $\tilde{\rho}_j$  of the  $\rho_j$ ,  $j=1,2$ , can be continued across this curve as smooth functions by standard methods. In particular, a continuation with  $n-1$  derivatives continuous across this curve (where  $n$  is arbitrary) can be obtained by the formula

$$\rho_j(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k \rho_j(\alpha_1, -6\alpha_1^2 - k(\alpha_2 + 6\alpha_1^2)), \quad \alpha_2 \geq -6\alpha_1^2, \quad j=1,2,$$

where  $\binom{n}{k}$  are the binomial coefficients (see [4] for details and explanations). Note that  $\pi$  is

a one-to-one mapping between  $L \setminus \pi^{-1}(\mathcal{D})$  and  $R^2 \setminus \mathcal{D}$ , so that the continuations of the lifts give well-defined continuations of the  $\rho_j$  themselves. Again, there is a theorem in [4] stating that these latter continuations will be smooth.

The above construction covers the case of the standard cusp.

**2. Asymptotics associated with a generic cusp.** As was mentioned in the introduction, the method we use to obtain constructive formulas in this case is to reduce a general Lagrangian manifold  $\Lambda$  with a cuspidal singularity of the projection to the standard manifold  $L$  by a Lagrangian equivalence. Let  $L \subset T^*\mathbb{R}_y^2$  and  $\Lambda \subset T^*\mathbb{R}_x^2$ . A general Lagrangian equivalence has the form [2]

$$x = f(y), \quad p = \left( \left( \frac{\partial f}{\partial y}(y) \right)^* \right)^{-1} q + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(f(y)),$$

where  $x = f(y)$  is a diffeomorphism,  $\Phi(x)$  is a smooth real-valued function,  $q = (q_1, q_2)$  are the variables dual to  $y = (y_1, y_2)$ , and the star stands for transposition. If we find such an equivalence taking  $L$  to  $\Lambda$ , then we obtain the canonical on  $\Lambda$  from that on  $L$  according to the rule

$$[K_\Lambda^h A](x) = e^{\frac{i}{h}\Phi(x)} [K_L^h A](y(x)) \sqrt{\det \frac{\partial y}{\partial x}(x)} + O(h),$$

which is an easy consequence of the standard formula for the change of variables in the canonical operator. (Here  $y = y(x)$  is the inverse function of  $x = f(y)$ .) Combining this rule with the formula in the preceding section for the canonical operator on  $L$  via the Pearcey function and its derivatives, we obtain the desired constructive formula for the Lagrangian manifold with a generic cusp. The only remaining thing for this scheme to work is that we need a constructive formula for  $\Phi$  and  $f$ .

Let  $\mathcal{D}$ , just as before, be the domain between the branches of the caustic for the standard cusp and let  $\mathcal{D}$  be its counterpart for the generic cusp in question. Then  $f$  must diffeomorphically map  $\mathcal{D}$  onto  $\mathcal{D}$  (more precisely, we should speak of sufficiently small neighborhoods of the respective cuspidal points.) Here we only describe the construction of  $f$  and  $\Phi \circ f$  on  $\mathcal{D}$ ; the continuation to a full neighborhoods of the origin can be obtained by methods similar to the ones discussed in the preceding section, and we omit the details, which can be found in [4]. In each of the domains  $\mathcal{D}$  and  $\mathcal{D}$ , there are three branches of the action function corresponding

to three sheets of each of the respective Lagrangian manifolds over these domains. We denote these branches by

$$\tau_1(y), \tau_2(y), \tau_3(y), \quad y \in \mathcal{D}; \quad S_1(x), S_2(x), S_3(x), \quad x \in \mathcal{D};$$

the numbering of branches is assumed to be chosen in a consistent way (i.e., branches with same numbers correspond to sheets to be taken to each other by  $f$ ). Now the system for  $f$  has the form

$$\tau_2(y) - \tau_1(y) = S_2(f(y)) - S_1(f(y)),$$

$$\tau_3(y) - \tau_1(y) = S_3(f(y)) - S_1(f(y)),$$

while  $\Phi(x)$  can be found upon solving this system of equations by the formula

$$\Phi(x) = S_1(x) - \tau_1(f^{-1}(x)), \quad x \in \mathcal{D}.$$

Again, the paper [4] contains theorems guaranteeing the existence of appropriate continuations of  $f$  and  $\Phi$  thus constructed into a full neighborhood of the cuspidal point and provides constructive formulas.

The work was supported by the Russian Science Foundation under grant 21-11-00341.

## REFERENCES

1. Maslov V.P. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Paris: Dunod, 1972.
2. Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N., Singularities of Differentiable Maps. Vol. 1: The Classification of Critical Points and Wave Fronts, Basel: Birkhäuser, 1985.
3. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E. Efficient formulas for the Maslov canonical operator near a simple caustic. Russ. J. Math. Phys., vol. 25. N. 3. 2018. pp. 545–552.
4. Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E. Lagrangian manifolds and efficient short-wave asymptotics in a neighborhood of a caustic cusp. Math. Notes, vol. 108. N. 3. 318–338.
5. Berry M.V. and Howls C.J. Integrals with coalescing saddles, Chap. 36 in NIST Handbook of Mathematical Functions, Olver F. et al., eds. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
6. Kryukovskii A.S. Uniform Asymptotic Theory of Boundary and Corner Wave Catastrophes, Moscow: RosNOU, 2013.

### Information about authors

**Sergei Dobrokhotov** – Head of Laboratory, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia, +7 495 4337544

E-mail [s.dobrokhotov@gmail.com](mailto:s.dobrokhotov@gmail.com)

**Vladimir Nazaikinskii** – Principal Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia, +7 495 4343695

E-mail [nazaikinskii@googlemail.com](mailto:nazaikinskii@googlemail.com)

# On the influence of the active medium on the delayed fracture of a cylindrical shell using a fractional linear creep and long-term strength model

Fomin L.V., Fomina Yu.V.

Delayed fracture of a long thin-walled cylindrical shell is studied during creep, under an unsteady complex stress state, taking into consideration the influence of an active ambient medium. The influence of the ambient medium on creep and delayed fracture of the shell is determined by diffusive penetration of the media elements into the materials of the shell. With the help of Yu.N. Rabotnov's kinetic theory, times to fracture of such a shell are determined for two unsteady loading programs. One of the programs is implemented by way of an isolated action of the internal pressure and axial tensile force sequential in time, the other – by a combined joint action of the internal pressure and force at the first loading stage, while at the second loading stage, there acts only the tensile force up to the moment of fracture. The time to shell fracture is determined using a fractional linear creep and delayed fracture model where the tensile strength of the material at the appropriate temperature plays the role of ultimate stress. To take into account damage accumulation during creep and determine the criterion, before fracture, scalar and vector damage parameters are used, while the components of the vector damage parameter are associated with the space of principal stresses. To estimate the speed of the diffusion process, an approximate method for solving the diffusion equation based on the introduction of a diffusion front is used. The impact of the ambient medium on the time to fracture is taken into account by introducing a function of the integral average concentration into the determining and kinetic linear-fractional relationships. Comparison of the times to fracture using the scalar and vector damage parameters is carried out. Special features of using a linear-fractional model to describe long-term fracture processes are determined.

## 1. Introduction and problem statement

Forecasting durability of materials and structural elements under long-lasting high temperature loading in the presence of an active ambient medium is an extremely important problem to ensure reliability during the entire operational life. This study is based on Rabotnov's kinetic theory of creep and creep rupture [1]. Consider a long thin-walled cylindrical shell without bottoms with the radius of the middle surface  $R$  and wall thickness  $H$ . Let this shell be under the action of tensile axial force  $P$  and internal pressure  $Q$ . The shell is in an active medium. In this study, two programs of unsteady loading are considered, one of which (a) will be implemented by means of a separate, sequential in time action of internal pressure and axial tensile force, the other by a combined joint effect of these pressure and force at the first stage of loading, while at the second stage only the force continues to operate up to fracture. A diagrams (a) and (b) of the loaded shell is given in Figure 1.

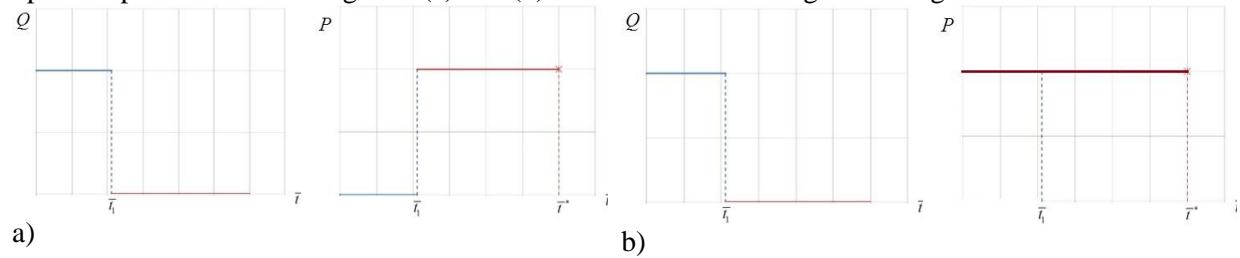


Figure 1. Shell loading programs (a) and (b).

## 2. Approximate method to solve the diffusion equation

To analyse the diffusion process of the active medium into a thin-walled cylindrical shell, an approximate method for solving the diffusion equation is proposed, based on the introduction of a diffusion front propagating from the shell surface [2]. Due to the small curvature of the shell wall, one can consider such a diffusion process as a process in a flat plate, which occurs symmetrically due to the geometric symmetry of the flat plate relative to the middle surface and the symmetry of the boundary conditions and diffusion characteristics. The considered approximate approach allows dividing the entire cross section of the shell into perturbed (where the medium has already penetrated into the material) and unperturbed areas (where there is no penetration of the medium yet) and then track the boundary between these areas in time. The time dependence of the concentration of the active medium in the shell material is approximated in the form of a polynomial, furthermore, the boundary and initial conditions are satisfied exactly, and the diffusion equation is satisfied integrally in the entire cross section of the shell.

In the future, to analyze the effect of an active medium on the time until the destruction of a typical element, a dimensionless integral average concentration  $\bar{c}_m(\bar{t})$  will be used, which is obtained using the indicated approximate method and has the form:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \int_0^1 \bar{c}(\bar{z}, \bar{t}) dz = \begin{cases} (1/3)\sqrt{\bar{t}} & \text{at } 0 < \bar{t} \leq 1 \\ 1 - (2/3) \cdot \exp[-(1/4)(\bar{t} - 1)] & \text{at } \bar{t} > 1 \end{cases}$$

Dimensionless variables are introduced here

$$\bar{z} = 2z/H \quad \bar{t} = 48Dt/H^2 \quad \bar{c} = c/c_0 ,$$

where  $z$  is the coordinate along the thickness of the typical wall ( $z=0$  - on the median line of the cross section of the shell),  $t$  is the time,  $c_0$  is the constant concentration at the boundary of the material of a typical element and the external active medium,  $D = \text{const}$  is the diffusion coefficient.

The monograph [2] shows the results of a numerical experiment, which shows a comparison of the corresponding concentrations of the active medium  $\bar{c}(\bar{x}, \bar{t})$  and the integral average concentrations  $\bar{c}_m(\bar{t})$  obtained as a result of the exact (expressed in series) [3] and approximate solutions according to the proposed method, taking into account the introduction of a diffusion front. The closeness of the approximate solution to the exact one is less than 5 percent, depending on the choice of the degree of the polynomial of the desired approximate solution.

Taking into account the fact that the experimental creep curves and times to fracture have, as a rule, a significant scatter at the same mechanical stresses and temperatures, the effect of a slight deviation of the integral average concentration of the active medium on creep and long-term strength in accordance with an approximate solution in comparison with the exact solution is perfectly acceptable.

### 3. Fractional linear creep model

The active medium effect is taken into consideration by introducing into fractional linear [4] constitutive equation of the function of cumulative average concentration of the active medium  $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$  in the material of the shell

$$\dot{p}_u = A(\sigma_u / (\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad (1)$$

where  $\dot{p}_u$  - creep strain rate intensity,  $\sigma_u$  - stress intensity,  $\sigma_b$  - short-time strength limit at given research temperature,  $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$  - function of cumulative average level of concentration  $\bar{c}_m(\bar{t})$  of the ambient medium elements in the shell [5],  $A$  - material constant.

The function  $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$  is introduced into the kinetic equations. The kinetic equation given a scalar damage parameter is assumed to have the following form

$$\dot{\omega} = d\omega/d\bar{t} = C(\sigma_u / (\sigma_b - \sigma_u)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad \omega(\bar{t} = 0) = 0, \quad \omega^* = \omega(\bar{t} = \bar{t}_\omega^*) = 1. \quad (2)$$

Kinetic equations for vector damage parameter  $\Omega$  [6, 7] are as follows

$$\dot{\Omega}_i = d\Omega_i / d\bar{t} = \begin{cases} C \cdot (\sigma_i / (\sigma_b - \sigma_i)) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{at } \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{at } \sigma_i \leq 0 \end{cases} \quad i = z, \theta, \quad (3)$$

where  $\Omega_i$  - damage vector projection on  $i$  - th axis of the coordinate system,  $z$  - longitudinal coordinate,  $\theta$  - circumferential coordinate

$$\Omega = \sqrt{(\Omega_z)^2 + (\Omega_\theta)^2}, \quad \Omega(\bar{t} = 0) = 0, \quad \Omega^* = \Omega(\bar{t} = \bar{t}_\Omega^*) = 1 - \text{fracture criterion.} \quad (4)$$

### 4. On the expediency of using the vector parameter of damage

At present, there is an insufficient amount of systematic experimental data on creep deformations and long-term strength under arbitrary unsteady complex stress states. The design and implementation of such experiments is, as a rule, a rather difficult task. An analytical review of such works known to the author of the article is given in [8]. It should also be noted that the random nature of the accumulated damage when the type of complex stress state changes.

The question arises as to how to take into account the accumulation of damage in the process of creep. The scalar damage parameter can be used adequately only in a number of cases. To determine the components of the tensor parameter of damage, it is necessary to search for a sufficiently large number of material constants and functions, carrying out complex setup experiments. According to the author of the article, for modeling the long-term destruction processes, it is optimal to use the vector parameter of damage accumulation.

It should also be noted that the vector approach makes it possible to simulate long-term strength and determine the times to fracture both with a constant position of the main axes and with a change in the orientation of the main axes of the stress-strain state, and even when such a change in the orientation of the main axes is repeated many times. So, for example, in [9, 10], the results of known tests of tubular specimens at constant axial stress and constant or alternating shear stress are considered. Experiments show that a cyclic change in the sign of shear stresses leads to a significant increase in the time to fracture. To describe this effect, a kinetic approach was used [6, 11] with a vector parameter of damage. The application of this approach leads to good agreement between the experimental and theoretical values of the times to fracture.

## 5. On determining the parameters of the model equations

In describing the creep process for a wide class of metallic materials, power-law and fractional-linear creep models are used. Material parameters are determined based on the processing of the experiment. An experiment is a tensile creep test of a standard sample made of a material whose properties are to be studied. As a result of the experiment, a family of creep curves is obtained, each of which is obtained at a certain mechanical stress  $\sigma$ . To determine, the second sections of the family of creep curves are used - the sections of steady-state creep on each curve of the family. The short-term strength limit  $\sigma_b$  at an appropriate temperature is determined by a known standard method. The values of the material constants will generally depend on the particular material selected and the test temperature.

The parameter in equation (3) is determined in a similar way, while the experiment is carried out in a neutral medium. The effect of the active medium in equations (1), (2) and (3) is taken into account by introducing a function  $f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a \cdot \bar{c}_m(\bar{t})$  into the specified equation, the definition of the constant  $a$  is described in detail in [5]. For example, when determining the long-term strength of samples made of low-carbon steel (Research and experimentation by I. A. Oding and Z. G. Fridman about role of surface layers during delayed fracture of metals under creep condition), taking into account the diffusion of oxygen into the samples from the active medium, the value  $a=9.5$  was obtained.

The characteristic  $C$  of the material (in equation (3)) is determined on the basis of equating the values of the theoretical and experimental times to fracture in the creep test of a standard sample in a neutral medium. The theoretical time to failure  $\bar{t}^*$  is determined by kinetic equations (2) and (3) to the damage  $\omega$  and  $\Omega$  value to the value  $\omega^*=1$  and  $\Omega^*=1$  respectively, in this calculation, the value of  $f(\bar{c}_m(\bar{t}))=1$  is taken to be equal to one.

It should also be noted that to solve the model problem, some model values of the specified material parameters can be taken.

## 6. Results of calculations and conclusions

As a result of the calculation, dimensionless times to fracture were obtained for separate and combined loading programs using the scalar damage parameter  $\bar{t}_\omega^*=0.614$  and using the vector damage parameter  $\bar{t}_\Omega^*=0.817$ . The ratio of times to fracture is  $\xi=\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^*=1.33$ . Thus, the time to fracture when using the vector damage parameter is greater than the time to failure obtained when using the scalar damage parameter.

Under the selected condition  $P=2\pi R^2 Q$ , the times until the destruction of the cylindrical shell in separate and combined loading programs are the same. This is true for both scalar and vector damage parameters. With such  $P=2\pi R^2 Q$  a dependent on each other setting of external loads, dimensionless

parameters  $\bar{C} = (\sigma_b H - RQ)/(RQ)$  and  $\bar{P} = P/(2\pi RH\sigma_b - P)$  must satisfy the condition  $\bar{C}\bar{P} = 1$ . When the external loads under consideration are set independently, the dimensionless parameters  $\bar{C}$  and  $\bar{P}$  are set independently of each other.

The conducted research shows the difference in the mechanisms of damage accumulation during prolonged high-temperature loading. The result obtained confirms similar results obtained by the authors of [12] in the study of long-term unsteady loading of a plate in mutually orthogonal planes. In the specified work [12], the ratios of times to fracture  $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^*$ , depending on the ratio of the values of bending moments, are in the range  $\bar{t}_\Omega^*/\bar{t}_\omega^* = 1.15 - 1.39$ .

### **Acknowledgements**

The authors of this article are grateful to Professor A.M. Lokoshchenko for his attention to the work done and useful discussions.

The authors would like to acknowledge the financial support of the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 20-08-00387a.

### **REFERENCE**

1. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam. Noth-Holland, 1969.
2. Lokoshchenko A.M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. London. New York: CISP. CRC Press. Taylor Francis Group. Boca. Raton, 2018.
3. Tikhonov A., Samarskiy A. Equations of Mathematical Physics. Ed. 7, 2004.
4. Shesterikov S.A., Yumasheva M.A. "More precise specification of the equation of state in creep theory," *Mech. of Solids*, vol. 19, no. 1, pp. 81-85, 1984.
5. Fomin L. V. "Description of the long-term strength of stretchable rods of rectangular and round cross-sections in high-temperature air," *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.*, vol. 32, no. 3, pp. 87-97, 2013.
6. Kachanov L. M. Foundations of the Mechanics of Damage. Moscow: Nauka, 1974.
7. Namestnikova I. V., Shesterikov S. A. Vector representation of damage parameter. Deformation and destruction of solids. In *Proceedings of the Institute of Mechanics of Moscow State University*. Moscow: Publishing House of Moscow University, 1985, pp. 43-52.
8. Lokoshchenko A.M., Fomin L.V., Teraud W.V., Basalov Yu. G., Agababyan V.S. Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review). *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.*, vol. 24, no. 2, pp. 275-318, 2020.
9. Lokoshchenko A.M. Use of a vector damage parameter in modeling of long-term strength of metals. *Mech. of Solids*, vol. 51, pp. 315-320, 2016.
10. Lokoshchenko A.M. Modeling the long-term strength of metals in an unsteady complex stress state. *Mech. of Solids*, vol. 53, pp. 88-100, 2018.
11. Kachanov L.M. Fractures under creep conditions under complex loading. *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mekhanika tverdogo tela*, no 5, pp. 11-15, 1972.
12. Lokoshchenko A.M., Fomin L.V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium. Applied Mathematical Modelling. vol. 60, pp. 478-489, 2018

### **Information about authors**

**Fomin Leonid** – Candidate Doctor of Physics and Maths, Senior Researcher of the Laboratory of Creep and Creep Rupture Strength, Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University

+7(495)9392428

**E-mail** [fleonid1975@mail.ru](mailto:fleonid1975@mail.ru)

**Fomina Yulia** - Mathematics Teacher of the Highest Category, Lyceum 1, Podolsk city district.

## Vibrations of a Plate of Inhomogeneous Thickness

**Grigoryan H.F.**

In this paper we investigate the vibrations of plates inhomogeneous in thickness based on the Kirchhoff hypothesis. A solution of the particular problem is given.

Let the elastic plate in the Cartesian rectangular coordinate system occupy the domain  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1$  and the Young's modulus E, the Poisson's ratio  $\nu$ , and the density of the plate material  $\rho$  are the functions of the z coordinates.

For vibration problems of thin plates, according to Kirchhoff's theory, the following system of equations can be obtained [3]:

$$C\Delta\varphi = m \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, B_0\Delta\psi = m \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$D\Delta^2w + m \frac{\partial^2w}{\partial t^2} - K\Delta^2\varphi = q,$$

where

$$C = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1-\nu^2} dz, K = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{zE}{1-\nu^2} dz, D_0 = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^2E}{1-\nu^2} dz, \quad (2)$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1+\nu} dz, D = D_0 - \frac{K^2}{C}, m = \int_{-h_2}^{h_1} \rho dz.$$

The boundary conditions with respect to the function  $\varphi, \psi, w$  on the edge of the plate  $x = \text{const}$  have the form:

hard sealing-

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

hinged fastening-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = 0, \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, w = 0, \frac{\partial^2w}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

sliding contact-

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, D \frac{\partial^3w}{\partial x^3} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (5)$$

Let's consider an example: it is required to find solutions to the system of equations (1) for free vibrations of plastic with hinged edges  $x = 0, x = a, y = 0$  and sliding edges of the edge  $y = b$ .

Then the boundary conditions of the problem, taking into account (4) and (5), will have the form:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - K \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \text{ for } y = b. \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ for } x = 0; a. \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ for } y = 0. \quad (8)$$

From the second condition (6),  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$  is defined and is supplied to the first condition, which leads to the equality  $\Delta \psi = 0$  on the boundary  $y = b$ . According to the equation for  $\psi$ , it follows from (1) that  $\psi = 0$  for  $y = b$ . Then from the second condition in (6) we obtain  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ .

Finally, for condition (6) we have:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - K \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \quad (9)$$

on the edge  $y = b$ .

For  $x = \text{const}$ , supplying the second condition (7) to the first condition, we obtain  $\Delta \varphi = 0$ , and from the first equation (1) it follows that  $\varphi = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ .

Condition (7) is converted to the following expressions:

$$\varphi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ for } x = 0; a, \quad (10)$$

and for the condition (8) in the following expressions:

$$\varphi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ for } y = 0. \quad (11)$$

For  $q = 0$ , the solutions of system (1) that satisfy the boundary conditions (9), (10) and (11) have the form:

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{i\omega_n t} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \sin \lambda_n x, \\ \psi &= e^{i\xi_n t} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(y) \cos \lambda_n x, \quad \text{where } \lambda_n = \frac{n\pi}{a} \\ w &= e^{i\eta_n t} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \lambda_n x. \end{aligned} \quad (12)$$

To determine the functions  $\varphi_n(y)$ ,  $\psi_n(y)$  and  $f_n(y)$ , we put (1) in (12). Finally, for  $\omega_n^2$ ,  $\xi_n^2$  and  $\eta_n^2$ , the following expressions are obtained:

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 C(a^2 + b^2)}{a^2 b^2 m}, \xi_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 B_0(a^2 + b^2)}{a^2 b^2 m}, \eta_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 D(a^2 + b^2)}{a^2 b^2 m}. \quad (13)$$

## **REFERENCES**

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат.1957. 463 с.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропных тел. М.: Наука. 1977. 416 с.
3. Белубекян М. В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. Известия НАН Армении. Механика. №3. 2002. Стр. 34-41.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратов Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев.Науковадумка. 1991. 228 с.
5. Belubekyan M.V., Grigoryan H. F. The Bending of the Plate of Asymmetrically Inhomogeneous Thickness under Normal Loading. Materials, Methods & Technologies, Volume 10. ISE Bulgaria 2016. p.374-378.

## **Information about authors**

**Grigoryan Hermine F.** Associate Professor PhD in Physics and Mathematics, VSU Vanadzor, Armenia, e-mail: [grigherm@gmail.com](mailto:grigherm@gmail.com)

## Finding Coefficients in the Problem of Cylindrical Shell with a Cutout

Kashtanova S.V., Rzhonsnitskiy A.V.

The cylindrical shell with a circular hole under three types of boundary conditions is considered: an axial tension, internal pressure and torsion. A new mathematical approach that allows reducing an infinite system and finding unknown coefficients for the deriving stress is offered. This approach lifts classical mathematical restrictions for curvature parameter. The comparison of analytical and numerical results by collocation method is described.

We consider a cylindrical shell of radius  $R$  and thickness  $h$  with a circular hole  $r_0$  under different boundary conditions. The main parameter that is responsible for ratio between geometric characteristics is  $\beta^2 = r_0^2 \cdot \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4Rh}$ ,  $\nu$  – Poisson's coefficient. Note that limit transition while  $\beta \rightarrow 0$  leads us to the plane problem. In addition, function  $\Phi = \frac{Eh}{8\beta^2 R} w - iU$  is used, where  $w$  and  $U$  are displacement and stress function,  $E$  – Young's modulus. The connection between stresses and stress function is

$$\begin{pmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \\ -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{pmatrix},$$

median surface stress can be expressed as  $\sigma = T/h$ .

The government equation of the problem reduces to

$$\Delta\Delta\Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

with follow three types of boundary conditions:

1. axial tension  $P$  at infinity along  $x$ -coordinate

- at infinity  $T_x = p, T_{xy} = 0, T_y = 0, w = 0$ ;
- at the boundary of the hole in polar coordinates  $(r, \vartheta)$  – free edge  
 $T_{rr}|_{r=r_0} = 0, T_{r\vartheta}|_{r=r_0} = 0, M_r|_{r=r_0} = 0, Q_r|_{r=r_0} = 0$ ;

2. uniform internal pressure  $q_0$  ( $q = \frac{q_0 r_0}{2}$ ):

- $T_x = q; T_y = 2q; T_{xy} = 0$ ;

or (in polar coordinates)  $2T_r = q(3 - \cos 2\vartheta); 2T_{r\vartheta} = q \sin 2\vartheta; 2T_\vartheta = q(3 + \cos 2\vartheta)$

- at the boundary of the hole in polar coordinates  $(r, \vartheta)$   
 $T_{rr}|_{r=r_0} = 0, T_{r\vartheta}|_{r=r_0} = 0, M_r|_{r=r_0} = 0, Q_r|_{r=r_0} = -\frac{q_0 r_0}{2}$ ;

3. torsion

- at infinity  $T_x = 0, T_y = 0, T_{xy} = \tau, \tau = \frac{M}{2\pi R^2}$

or in polar coordinates  $T_r = \tau \sin 2\vartheta, T_\vartheta = -\tau \sin 2\vartheta, T_{r\vartheta} = \tau \cos 2\vartheta$

- at the boundary of the hole in polar coordinates  $(r, \vartheta)$   
 $T_{rr}|_{r=r_0} = 0, T_{r\vartheta}|_{r=r_0} = 0, M_r|_{r=r_0} = 0, Q_r|_{r=r_0} = 0$ .

The solution offered by authors can be written in the next form (for case 1, 2 and 3 respectively):

$$\Phi = -i \frac{py^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot f_n,$$

$$\Phi = -i \frac{qy^2}{2} - i \frac{2qx^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot f_n,$$

$$\Phi = i \tau x y + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot f_n,$$

where for I and II types of boundary conditions we have

$$f_n(r, \vartheta) = \frac{g(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} g(r, n, l) \cdot \cos 2l\vartheta$$

and for III type

$$f_n(r, \vartheta) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{g}(r, n, l) \cdot \sin 2l\vartheta.$$

In its turn

$$g(r, n, l) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l} \cdot \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} \cdot (J_{n+2l}((1+i)\beta r) + J_{n-2l}((1+i)\beta r)), \quad n = 0, 1, \dots, \infty \\ l = 0, 1, \dots, \infty$$

$$\tilde{g}(r, n, l) = (-1)^{l+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{H_n^{(1)}((1+i)\beta r)}{H_n^{(1)}((1+i)\beta)} (J_{n-2l}((1+i)\beta r) - J_{n+2l}((1+i)\beta r)), \quad n = 1, \dots, \infty \\ l = 1, \dots, \infty$$

The main accent of the work is the method of finding unknown coefficients  $a_n$  and  $b_n$  from the system with an infinite number of equations that we get from boundary conditions of the stresses problem. We proved that one equation is a linear combination of four others that helped us to solve the system. For all types of boundary conditions, the matrixes of the system are received. All systems have the same structure and were reduced to finite systems.

#### SYSTEM FOR TYPE I AND II

<b>n</b>	<b>0</b>		<b>1</b>		<b>2</b>		<b>3</b>			unknown	Free Type I	Free Type II
<b>l</b>	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re				
0	$t_3(0,0)$	$t_3(0,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(1,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(2,0)$	$t_3(3,0)$	$t_3(3,0)$	...	$a_0$	0	0
0	$t_4(0,0)$	$t_4(0,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(1,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(2,0)$	$t_4(3,0)$	$t_4(3,0)$		$b_0$	0	$16\beta^2 q$
1	$g(0,1)$	$g(0,1)$	$g(1,1)$	$g(1,1)$	$g(2,1)$	$g(2,1)$	$g(3,1)$	$g(3,1)$		$a_1$	$-\frac{p}{4}$	$\frac{q}{4}$
1	$g'(0,1)$	$g'(0,1)$	$g'(1,1)$	$g'(1,1)$	$g'(2,1)$	$g'(2,1)$	$g'(3,1)$	$g'(3,1)$		$b_1$	$-\frac{p}{2}$	$\frac{q}{2}$
1	$t_3(0,1)$	$t_3(0,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(1,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(2,1)$	$t_3(3,1)$	$t_3(3,1)$		$a_2$	0	0
1	$t_4(0,1)$	$t_4(0,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(1,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(2,1)$	$t_4(3,1)$	$t_4(3,1)$		$b_2$	0	0
2	$g(0,2)$	$g(0,2)$	$g(1,2)$	$g(1,2)$	$g(2,2)$	$g(2,2)$	$g(3,2)$	$g(3,2)$		$a_3$	0	0
2	$g'(0,2)$	$g'(0,2)$	$g'(1,2)$	$g'(1,2)$	$g'(2,2)$	$g'(2,2)$	$g'(3,2)$	$g'(3,2)$		$b_3$	0	0

$$t_3(n, l) = i(-4l^2 \nu g(n, l) + \nu g'(n, l) + g''(n, l))$$

$$t_4(n, l) = i(12l^2 \cdot g(n, l) - (1 + \nu + 4l^2(2 - \nu))g'(n, l) + g'''(n, l))$$

$$(-4l^2 \nu \tilde{g}(n, l) + \nu \tilde{g}'(n, l) + \tilde{g}''(n, l))$$

$$\tilde{t}_4(n, l) = i(12l^2 \cdot \tilde{g}(n, l) - (1 + \nu + 4l^2(2 - \nu))\tilde{g}'(n, l) + \tilde{g}'''(n, l))$$

From these systems, all coefficients are uniquely found for each case and our results are in 100% correspondence with results received by collocation method in work [4]. All mathematical restrictions to the model were lifted and our model is applicable in the range of  $0 < \beta \leq 4$  that goes from mechanical sense [1].

### SYSTEM FOR TYPE III

<b><i>n</i></b>	<b><i>l</i></b>	1		2		3		4		unknown	Free	Type III
		Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re			
1	$\tilde{t}_3(1,1)$	$\tilde{t}_3(1,1)$	$\tilde{t}_3(2,1)$	$\tilde{t}_3(2,1)$	$\tilde{t}_3(3,1)$	$\tilde{t}_3(3,1)$	$\tilde{t}_3(4,1)$	$\tilde{t}_3(4,1)$		$a_1$	0	
1	$\tilde{t}_4(1,1)$	$\tilde{t}_4(1,1)$	$\tilde{t}_4(2,1)$	$\tilde{t}_4(2,1)$	$\tilde{t}_4(3,1)$	$\tilde{t}_4(3,1)$	$\tilde{t}_4(4,1)$	$\tilde{t}_4(4,1)$		$b_1$	0	
1	$\tilde{g}(1,1)$	$\tilde{g}(1,1)$	$\tilde{g}(2,1)$	$\tilde{g}(2,1)$	$\tilde{g}(3,1)$	$\tilde{g}(3,1)$	$\tilde{g}(4,1)$	$\tilde{g}(4,1)$		$a_2$	$-\frac{\tau}{2}$	
1	$\tilde{g}'(1,1)$	$\tilde{g}'(1,1)$	$\tilde{g}'(2,1)$	$\tilde{g}'(2,1)$	$\tilde{g}'(3,1)$	$\tilde{g}'(3,1)$	$\tilde{g}'(4,1)$	$\tilde{g}'(4,1)$		$b_2$	$-\tau$	
2	$\tilde{t}_3(1,2)$	$\tilde{t}_3(1,2)$	$\tilde{t}_3(2,2)$	$\tilde{t}_3(2,2)$	$\tilde{t}_3(3,2)$	$\tilde{t}_3(3,2)$	$\tilde{t}_3(4,2)$	$\tilde{t}_3(4,2)$		$a_3$	0	
2	$\tilde{t}_4(1,2)$	$\tilde{t}_4(1,2)$	$\tilde{t}_4(2,2)$	$\tilde{t}_4(2,2)$	$\tilde{t}_4(3,2)$	$\tilde{t}_4(3,2)$	$\tilde{t}_4(4,2)$	$\tilde{t}_4(4,2)$		$b_3$	0	
2	$\tilde{g}(1,2)$	$\tilde{g}(1,2)$	$\tilde{g}(2,2)$	$\tilde{g}(2,2)$	$\tilde{g}(3,2)$	$\tilde{g}(3,2)$	$\tilde{g}(4,2)$	$\tilde{g}(4,2)$		$a_4$	0	
2	$\tilde{g}'(1,2)$	$\tilde{g}'(1,2)$	$\tilde{g}'(2,2)$	$\tilde{g}'(2,2)$	$\tilde{g}'(3,2)$	$\tilde{g}'(3,2)$	$\tilde{g}'(4,2)$	$\tilde{g}'(4,2)$		$b_4$	0	
...												

$$\tilde{t}_3(n, l) = i$$

### ACKNOWLEDGMENTS

The reported study was funded by RFBR, project number 19-31-60008.

### REFERENCE

1. Guz A.N., Dishel M.S., Kuliev G.G., Milovanova O.B. Fracture and Stability of Thin Bodies with Cracks (in Russ.). Naukova Dumka, Kiev, 1981.
2. Lurie, A.I.: Concentration of stresses in the Vicinity of an Aperture in the Surface of a Circular Cylinder (in Russian), Prikladnaya Matematika I Mekhanika, 1946. vol.10. p.397
3. Kashtanova S.V., Rzhonsnitskiy A.V. Analytical approach to obtaining the stress field of a cylindrical shell with a circular hole under tension. PNRPU Mechanics Bulletin, 2021. no. 2. pp. 12-23. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.07.
4. Van Dyke, P: Stresses about a Circular Hole in a Cylindrical Shell, AIAA Journal, Vol.3. № 9. pp.1733-1742, 1965.

### Information about authors

**Stanislava V Kashtanova** (Saint-Petersburg, Russia) – PhD in Solid Mechanics, researcher of Institute for Problems of Mechanical Engineering of Russian Academy of Science; docent of Saint-Petersburg State Institute of Technology and Saint-Petersburg Polytechnical State University

e-mail: [kastasya@yandex.ru](mailto:kastasya@yandex.ru)

**Alexey V Rzhonsnitskiy** (Saint-Petersburg, Russia) – senior lecturer of the Department of Bioinformatics at Saint-Petersburg State Academy University of RAS, Saint-Petersburg State Institute of Technology

e-mail: [rzhonsnitskiy@yandex.ru](mailto:rzhonsnitskiy@yandex.ru)

# On Contact Interaction Between the Infinite Sheet and Three Elastic Stringers with Finite Lengths through Adhesive Layers

**Kerobyan A. V.**

This paper considers the problem for an elastic infinite plate (sheet) which on parallel finite parts of its upper surface is strengthened by three finite stringers, two of which are arranged on the same line, having different elastic properties. The stringers parallel each other are located asymmetrically with respect to horizontal axis of the sheet and deform under the action of horizontal forces. The interaction between the infinite sheet and stringers takes place through thin, uniform elastic adhesive layers having other physical-mechanical properties and geometric configuration. The problem of determination of unknown stresses acting between the infinite sheet and stringers is reduced to a system of Fredholm integral equations of second kind with respect to unknown functions, which are specified on three finite intervals. It is shown that in the certain domain of the change of the characteristic parameters of the problem this system of integral equations can be solved by the method of successive approximations. Particular cases are considered, the character and behavior of unknown stresses are investigated.

**1. Statement of the Problem and Obtaining the System of Integral Equations.** Let an elastic infinite plate (sheet) which is defined in generalized plane stress state ( $xOy$  is its average plane) with small constant thickness  $h$  the Young's modulus  $E$  and the Poisson's ratio  $\nu$ , of its upper surface along at  $y=b(b>0)$  and  $y=-d(d>0)$  parallel lines, on the  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2](a_2 > b_1)$  and  $[c_1, d_1]$  finite intervals, respectively, is strengthened by tree finite stringers, modulus of elasticity equal to  $E_1$  for  $x \in [a_1, b_1](b_1 > a_1)$ ,  $E_2$  for  $x \in [a_2, b_2](b_2 > a_2)$  and equal to  $E_3$  for  $x \in [c_1, d_1](d_1 > c_1)$ . It is supposed that the stringers having rectangular cross-sections with small areas  $F_1 = b_1^* h_1$ ,  $F_2 = b_2^* h_2$ ,  $F_3 = b_3^* h_3$ , respectively, where  $b_1^*(b_1^* << b_1 - a_1)$ ,  $b_2^*(b_2^* << b_2 - a_2)$ ,  $b_3^*(b_3^* << d_1 - c_1)$ , are the widths of the stringers and  $h_j(j=1, 3)$  are their small constant thicknesses. The interaction between the infinite sheet and stringers is realized through thin, uniform, elastic adhesive layers with Young's modulus  $E_k$ , Poisson's ratio  $\nu_k$ , and small constant thickness  $h_k$ . The problem is to specify the law of distribution of unknown stresses acting between the sheet and the stringers, when concentrated horizontal forces  $P_1$ ,  $P_2$  and  $Q$  are applied at one end points of the stringers  $x = b_1$ ,  $x = b_2$  and  $x = d_1$ , respectively, and are directed to parallel along the  $Ox$  axis.

It is assumed that for the stringers, the model of uniaxial strain state in combination with the model of contact along the line is realized [1-4], and for the adhesive layers there are the pure shear conditions [2]. In the case of such assumptions, it is accepted that only tangential (shear) stresses act between the sheet and stringers [1, 2].

With such assumptions, let write the horizontal displacements  $u_1(x, b)$  and  $u_2(x, -d)$  of the points of the infinite plate (sheet) as in [1], in the following form:

$$u_1(x, b) = \frac{1}{\pi A^*} \int_{a_1}^{b_1} \left( \ln \frac{1}{|x-s|} + C \right) p_1(s) ds + \frac{1}{\pi A^*} \int_{a_2}^{b_2} \left( \ln \frac{1}{|x-s|} + C \right) p_2(s) ds + \frac{1}{\pi A^*} \int_{c_1}^{d_1} (N(x-v) + C) q(v) dv, \quad (1.1)$$

$$u_2(x, -d) = \frac{1}{\pi A^*} \int_{c_1}^{d_1} \left( \ln \frac{1}{|x-v|} + C \right) q(v) dv + \frac{1}{\pi A^*} \int_{a_1}^{b_1} (N(x-s) + C) p_1(s) ds + \frac{1}{\pi A^*} \int_{a_2}^{b_2} (N(x-s) + C) p_2(s) ds, \quad (1.2)$$

when tangential (shear) forces with intensity  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  and  $q(x)$  act on the  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$  and  $[c_1, d_1]$ , finite intervals of its upper surface along  $y=b$  and  $y=-d$  parallel lines, respectively, where  $p_1(x)=b_1^*\tau^{(1)}(x, b)$ ,  $\tau^{(1)}(x, b)$  is the shear stresses, acting on the  $[a_1, b_1]$  finite part,  $p_2(x)=b_2^*\tau^{(2)}(x, b)$ ,  $\tau^{(2)}(x, b)$  is the shear stresses, acting on the  $[a_2, b_2]$  finite part,  $q(x)=b_3^*\tau^{(3)}(x, -d)$ ,  $\tau^{(3)}(x, -d)$  is the shear stresses, acting on the  $[c_1, d_1]$  finite part,  $C$  is arbitrary constant and

$$N(x)=\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+(b+d)^2}}-\frac{\kappa(b+d)^2}{x^2+(b+d)^2}, A^*=\frac{4Eh}{(1+\nu)(3-\nu)}, \kappa=\frac{1+\nu}{3-\nu}.$$

Now, assuming that each differential element of the adhesive layers is in a condition of pure shear [1, 2], the following contact conditions are obtained:

$$u^{(1)}(x)-u_1(x, b)=k_1^*p_1(x), \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (1.3)$$

$$u^{(2)}(x)-u_1(x, b)=k_2^*p_2(x), \quad a_2 \leq x \leq b_2, \quad (1.4)$$

$$u^{(3)}(x)-u_2(x, -d)=k_3^*q(x), \quad c_1 \leq x \leq d_1, \quad (1.5)$$

where  $k_j^*=h_k/b_j^*G_k$ ,  $j=1, 3$ ,  $G_k=E_k/2(1+\nu_k)$ ,  $G_k$  is the shear modulus of adhesive layers,  $u^{(1)}(x)=u^{(1)}(x, b)$ ,  $u^{(2)}(x)=u^{(2)}(x, b)$  and  $u^{(3)}(x)=u^{(3)}(x, -d)$  are the horizontal displacements of the points of the stringers at  $y=b$  and  $y=-d$  parallel lines, on the  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$  and  $[c_1, d_1]$  finite intervals, respectively,  $p_1(x)=b_1^*\tau^{(1)}(x, b)=b_1^*G_k\gamma_k^{(1)}(x, b)$ ,  $p_2(x)=b_2^*\tau^{(2)}(x, b)=b_2^*G_k\gamma_k^{(2)}(x, b)$  and  $q(x)=b_3^*\tau^{(3)}(x, -d)=b_3^*G_k\gamma_k^{(3)}(x, -d)$ ,  $\gamma_k^{(1)}(x, b)$ ,  $\gamma_k^{(2)}(x, b)$  and  $\gamma_k^{(3)}(x, -d)$  are the shear deformations of the adhesive layers, on the  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$  and  $[c_1, d_1]$  finite intervals, respectively.

Further, taking into account the above assumptions [1-4], the equilibrium differential equations for the stringers on the  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$  and  $[c_1, d_1]$  finite intervals will be written in the following form:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{p_1(x)}{E_1F_1}, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2u^{(2)}}{dx^2}=\frac{p_2(x)}{E_2F_2}, \quad a_2 \leq x \leq b_2, \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2u^{(3)}}{dx^2}=\frac{q(x)}{E_3F_3}, \quad c_1 \leq x \leq d_1, \quad (1.8)$$

which, by virtue of (1.3), (1.4) and (1.5), can be written in the form:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}-\gamma_1^2u^{(1)}(x)=-\gamma_1^2u_1(x, b), \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2u^{(2)}}{dx^2}-\gamma_2^2u^{(2)}(x)=-\gamma_2^2u_1(x, b), \quad a_2 \leq x \leq b_2, \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2 u^{(3)}}{dx^2} - \alpha^2 u^{(3)}(x) = -\alpha^2 u_2(x, -d), \quad c_1 \leq x \leq d_1, \quad (1.11)$$

where we have also the following boundary conditions:

$$\left. \frac{du^{(1)}}{dx} \right|_{x=a_1} = 0, \quad \left. \frac{du^{(1)}}{dx} \right|_{x=b_1} = \frac{P_1}{E_1 F_1}, \quad (1.12)$$

$$\left. \frac{du^{(2)}}{dx} \right|_{x=a_2} = 0, \quad \left. \frac{du^{(2)}}{dx} \right|_{x=b_2} = \frac{P_2}{E_2 F_2}, \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{du^{(3)}}{dx} \right|_{x=c_1} = 0, \quad \left. \frac{du^{(3)}}{dx} \right|_{x=d_1} = \frac{Q}{E_3 F_3}. \quad (1.14)$$

Here  $\gamma_1^2 = 1/k_1^* E_1 F_1$ ,  $\gamma_2^2 = 1/k_2^* E_2 F_2$ ,  $\alpha^2 = 1/k_3^* E_3 F_3$ .

The solutions to the boundary value problems (1.9) and (1.12), (1.10) and (1.13), (1.11) and (1.14), respectively, we obtain in the form:

$$u^{(1)}(x) = u_0^{(1)}(x) + \gamma_1^2 \int_{a_1}^{b_1} G_1(x, s) u_1(s, b) ds, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \quad (1.15)$$

$$u^{(2)}(x) = u_0^{(2)}(x) + \gamma_2^2 \int_{a_2}^{b_2} G_2(x, s) u_1(s, b) ds, \quad a_2 \leq x \leq b_2, \quad (1.16)$$

$$u^{(3)}(x) = u_0^{(3)}(x) + \alpha^2 \int_{c_1}^{d_1} K(x, v) u_2(v, -d) dv, \quad c_1 \leq x \leq d_1, \quad (1.17)$$

where  $u_0^{(1)}(x)$ ,  $u_0^{(2)}(x)$  and  $u_0^{(3)}(x)$  are the general solutions of the homogenous equations corresponding to equations (1.9), (1.10) and (1.11), respectively, with the boundary conditions (1.12), (1.13) and (1.14), respectively, and have the following form:

$$u_0^{(j)}(x) = \frac{P_j \cos h[\gamma_j(x-a_j)]}{\gamma_j E_j F_j \sin h[\gamma_j(b_j-a_j)]} \quad (j=1,2), \quad u_0^{(3)}(x) = \frac{Q \cos h[\alpha(x-c_1)]}{\alpha E_3 F_3 \sin h[\alpha(d_1-c_1)]}.$$

In equations (1.15), (1.16) and (1.17),  $G_j(x, s)$  ( $j=1,2$ ) and  $K(x, v)$  are Green's functions [5],

$$G_j(x, s) = \frac{1}{\gamma_j \sin h[\gamma_j(b_j-a_j)]} \begin{cases} \cos h[\gamma_j(x-b_j)] \cos h[\gamma_j(s-a_j)], & x > s, \\ \cos h[\gamma_j(x-a_j)] \cos h[\gamma_j(s-b_j)], & x < s. \end{cases}$$

$$K(x, v) = \frac{1}{\alpha \sin h[\alpha(d_1-c_1)]} \begin{cases} \cos h[\alpha(x-d_1)] \cos h[\alpha(v-c_1)], & x > v, \\ \cos h[\alpha(x-c_1)] \cos h[\alpha(v-d_1)], & x < v. \end{cases}$$

Further, without going into details we only note that by virtue of (1.15) - (1.17), according to (1.1), (1.2) and (1.3) - (1.5), finally we can obtain the following system of integral equations:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) + \delta_1^2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_1(x, t) \varphi_1(t) dt + \delta_1^2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} M_1(x, t) \varphi_2(t) dt + \\ + \delta_1^2 \int_{\xi_1}^{\eta_1} H_1(x, \tau) \psi(\tau) d\tau = f_0^{(1)}(x), \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_2(x) + \delta_2^2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_2(x, t) \varphi_1(t) dt + \delta_2^2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} M_2(x, t) \varphi_2(t) dt + \\
& + \delta_2^2 \int_{\xi_1}^{\eta_1} H_2(x, \tau) \psi(\tau) d\tau = f_0^{(2)}(x), \quad \alpha_2 \leq x \leq \beta_2, \\
& \psi(x) + \bar{\delta}_1^2 \int_{\xi_1}^{\eta_1} R(x, \tau) \psi(\tau) d\tau + \bar{\delta}_1^2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} T(x, t) \varphi_1(t) dt + \\
& + \bar{\delta}_1^2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} T(x, t) \varphi_2(t) dt = q_0(x), \quad \xi_1 \leq x \leq \eta_1,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

where

$$\begin{aligned}
& \varphi_1(x) = ap_1(ax), \quad \varphi_2(x) = ap_2(ax), \quad \psi(x) = aq(ax), \\
& \alpha_1 = a_1/a, \quad \beta_1 = b_1/a, \quad \alpha_2 = a_2/a, \quad \beta_2 = b_2/a, \quad \xi_1 = c_1/a, \quad \eta_1 = d_1/a, \\
& b_* = b/a, \quad d_* = d/a, \quad \delta_1^2 = a/\pi k_1^* A^*, \quad \delta_2^2 = a/\pi k_2^* A^*, \quad \bar{\delta}_1^2 = a/\pi k_3^* A^*, \\
& M_j(x, t) = \ln \frac{1}{|x-t|} - a\gamma_j^2 \int_{\alpha_j}^{\beta_j} G_j(ax, as) \ln \frac{1}{|s-t|} ds, \quad j=1,2, \\
& H_j(x, \tau) = N_1(x-\tau) - a\gamma_j^2 \int_{\alpha_j}^{\beta_j} G_j(ax, as) N_1(s-\tau) ds, \quad j=1,2, \\
& R(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x-\tau|} - a\alpha^2 \int_{\xi_1}^{\eta_1} K(ax, av) \ln \frac{1}{|v-\tau|} dv, \\
& T(x, t) = N_1(x-t) - a\alpha^2 \int_{\xi_1}^{\eta_1} K(ax, av) N_1(v-t) dv, \\
& N(ax) = \ln \frac{1}{a} + N_1(x), \quad N_1(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (b_* + d_*)^2}} - \frac{\kappa(b_* + d_*)^2}{x^2 + (b_* + d_*)^2}, \\
& f_0^{(j)}(x) = \frac{P_j a \gamma_j \cosh[a \gamma_j(x - \alpha_j)]}{\sinh[a \gamma_j(\beta_j - \alpha_j)]}, \quad j=1,2, \quad q_0(x) = \frac{Q a \alpha \cosh[a \alpha(x - \xi_1)]}{\sinh[a \alpha(\eta_1 - \xi_1)]}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

**2. Investigation Solvability of the system of Integral Equations (1.18).** Now let write the system (1.18) in the following form:

$$\varphi + K\varphi = y_0, \tag{2.1}$$

where

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} f_0^{(1)} \\ f_0^{(2)} \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \delta_1^2 k_{11} & \delta_1^2 k_{12} & \delta_1^2 k_{13} \\ \delta_2^2 k_{21} & \delta_2^2 k_{22} & \delta_2^2 k_{23} \\ \bar{\delta}_1^2 k_{31} & \bar{\delta}_1^2 k_{32} & \bar{\delta}_1^2 k_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
k_{11}\varphi_1 &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_1(x, t)\varphi_1(t)dt, k_{12}\varphi_2 = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} M_1(x, t)\varphi_2(t)dt, k_{13}\psi = \int_{\xi_1}^{\eta_1} H_1(x, \tau)\psi(\tau)d\tau, \\
k_{21}\varphi_1 &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} M_2(x, t)\varphi_1(t)dt, k_{22}\varphi_2 = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} M_2(x, t)\varphi_2(t)dt, k_{23}\psi = \int_{\xi_1}^{\eta_1} H_2(x, \tau)\psi(\tau)d\tau, \\
k_{31}\varphi_1 &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} T(x, t)\varphi_1(t)dt, k_{32}\varphi_2 = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} T(x, t)\varphi_2(t)dt, k_{33}\psi = \int_{\xi_1}^{\eta_1} R(x, \tau)\psi(\tau)d\tau. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Further, consider operator equation (2.1) in Banach space with elements  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ , where

$y_1(x) \in L_2(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $y_2(x) \in L_2(\alpha_2, \beta_2)$ ,  $y_3(x) \in L_2(\xi_1, \eta_1)$  and with norm:

$\|y\| = \max \left\{ \|y_1\|_{L_2(\alpha_1, \beta_1)}, \|y_2\|_{L_2(\alpha_2, \beta_2)}, \|y_3\|_{L_2(\xi_1, \eta_1)} \right\}$ .  $L_2(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $j=1, 2$  and  $L_2(\xi_1, \eta_1)$ , are the spaces of square integrable functions, specified on the intervals  $(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $j=1, 2$ , and  $(\xi_1, \eta_1)$ , respectively.

Then operational equation (2.1) can be solved by the method of successive approximations, if  $\|K\| < 1$ , where

$$\|K\| = \max \left\{ \delta_1^2 (\|k_{11}\| + \|k_{12}\| + \|k_{13}\|), \delta_2^2 (\|k_{21}\| + \|k_{22}\| + \|k_{23}\|), \bar{\delta}_1^2 (\|k_{31}\| + \|k_{32}\| + \|k_{33}\|) \right\}.$$

Therefore, the condition  $\|K\| < 1$  will be satisfied, if

$$\delta_1^2 (\|k_{11}\| + \|k_{12}\| + \|k_{13}\|) < 1, \quad \delta_2^2 (\|k_{21}\| + \|k_{22}\| + \|k_{23}\|) < 1, \quad \bar{\delta}_1^2 (\|k_{31}\| + \|k_{32}\| + \|k_{33}\|) < 1. \quad (2.3)$$

Further, we determine the values of  $\delta_1^2$ ,  $\delta_2^2$  and  $\bar{\delta}_1^2$  parameters, for which the conditions (2.3) will be satisfied.

## REFERENCE

1. **Kerobyan A.V.** On a Problem for an Elastic Infinite Sheet Strengthened by Two Parallel Stringers with Finite Lengths Through Adhesive Shear Layers. Proceedings of the Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. №3. 2020. p. 153-164.
2. **Lubkin J.L. and Lewis L.C.** Adhesive Shear Flow for an Axially Loaded, Finite Stringer Bonded to an Infinite Sheet. - Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XXIII, 1970, p. 521-533.
3. **Melan E.** Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ingenieur-Archiv, Bd.3, Heft 2, 1932. p.123-129.
4. **Muki R. and Sternberg E.** On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheet.- Transactions of the ASME. №4.1968. p.737-746
5. **Shilov G.E.** Mathematical Analysis, Special Course, Moscow.1961. 442 p.(in Russian).

### **Information about author:**

**Kerobyan Aghasi V.**, Associate Prof., Yerevan State University,  
E-mail: [agas50@ysu.am](mailto:agas50@ysu.am)

## Inhomogeneous transversely isotropic space under influence of concentrated power and temperature sources

**Kryvyi O. F., Morozov Yu. O.**

Explicit expressions are obtained, for the components of the vector of fundamental solutions for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space under the action of concentrated normal and tangential forces as well as stationary heat sources. The stress fields in the plane of the connection of half-spaces are investigated.

To reduce problems for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space containing internal and interphase defects to a system of two-dimensional singular integral equations, it is necessary to have fundamental solutions for this medium. The presence of such solutions makes it possible to determine the stress field in the vicinity of defects, such as inclusions and cracks, which makes it possible to correctly set the boundary conditions.

Using the approach of [1-9], the problem of constructing fundamental solutions is reduced to the matrix Riemann problem on the part of variables in the space of generalized functions of slow growth  $\mathfrak{J}'(\mathbb{R}^3)$ . An exact solution of the latter was obtained, which has allowed to receive the fundamental solutions in an obvious type for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space in the presence of concentrated forces and heat sources.

**1. Problem statement.** Let in an inhomogeneous space composed of two different transversely isotropic half-spaces, completely linked in the plane  $z=0$ , at an arbitrary point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  concentrated force  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ , and at an arbitrary point  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  stationary sources of heat. The Elastic-deformed state of space is described by the vector

$$\mathbf{v} = \{v_k(x, y, z)\}_{k=1,9} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\} \quad (1)$$

Based on the equations of equilibrium and the generalized Hooke's law, with respect to the components of the vector  $\mathbf{v}$ , the following matrix differential equations are obtained

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3]\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{F} \in \mathfrak{J}'(\mathbb{R}^3) \quad (2)$$

Here we use the notation

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{vmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{D}_0^T \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}^T = \mathbf{F}_0^T + \mathbf{F}_*^T; \mathbf{F}_0^T = -\delta(x - x_0, x - x_0, x - x_0) \|\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{O}_{1 \times 6}\|; \\ \mathbf{F}_*^T &= \delta(x - x_1, x - x_1, x - x_1) \|\mathbf{O}_{1 \times 3}, \beta_1 T, \beta_2 T, \beta_3 T, \mathbf{O}_{1 \times 3}\|; \quad \mathbf{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_2 \end{vmatrix}, \\ \mathbf{D}_0 &= \begin{vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{vmatrix} s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $s_{kj} = \theta(z)s_{kj}^+ + \theta(-z)s_{kj}^-$ ,  $s_{kj}^\pm$  – the coefficients of the generalized Hooke's law, respectively, for the upper  $z > 0$  and lower  $z < 0$  half-spaces;  $\mathbf{O}_{3 \times 3}$  – zero matrix of dimension  $3 \times 3$ ,  $\beta_k = \theta(z)\beta_k^+ + \theta(-z)\beta_k^-$ ,  $\beta_k^\pm$  – thermal expansion coefficients,  $T$  – temperature concentrated heat source, capacity  $Q$ .

Complete adhesion of half-spaces corresponds to the condition of equality to zero the next jumps in the plane  $z=0$ :

$$\{\langle \sigma_z \rangle, \langle \tau_{yz} \rangle^-, \langle \tau_{xz} \rangle^-, \langle u \rangle^-, \langle v \rangle^-, \langle w \rangle^- \} = 0 \quad (3)$$

To solve the boundary value problem (2), (3), we go over to the space of generalized functions of slow growth  $\mathfrak{J}'(\mathbb{R}^3)$  and, given the linearity of the equation (2), vector  $\mathbf{v}$  is represented as follows

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_*, \quad (1.4)$$

where the vector  $\mathbf{v}_0$  describes the stress and displacement fields in a piecewise homogeneous transversely isotropic space in the presence of a concentrated force  $\mathbf{P}$  and the absence of a stationary heat source, vector  $\mathbf{v}_*$  field describes the stresses and displacements in the absence of body forces and the presence of a stationary heat source.

The components of the vector  $\mathbf{v}_0$  and  $\mathbf{v}_*$  are obtained using the results of the work [1-9], as a result, for the components of the vector  $\mathbf{v}$ , the representations are obtained

$$\begin{aligned} \sigma_z &= Q \left\{ -\sum_{n=1}^3 \left( \frac{R_{1,n}^0}{\sqrt{r_1^2 + (\xi_n |z - z_1|)^2}} - \frac{\omega_{1,n}}{\sqrt{r_1^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_0 z_1)^2}} \right) + \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{1,n,m}}{\sqrt{r_1^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_1)^2}} \right\} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 P_j \mathfrak{g}_{2,j} \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{R_{1,2,n}^*}{(r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{3/2}} + \sum_{n,m=1}^2 \frac{\beta_{1,n,m}^2}{(r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{3/2}} \right\} - \\ &\quad - P_3 \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{|z - z_0| \bar{R}_{1,1,n}^*}{(r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{3/2}} - \sum_{n,m=1}^2 \frac{z \bar{\beta}_{1,n,m}^1 + z_0 \bar{\beta}_{1,n,m}^1}{(r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{3/2}} \right\}, \\ \tau_{xz} &= \mathfrak{g}_{11} Q \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_n |z - z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2})} - \sum_{n=1}^3 \frac{\omega_{2,n} (r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_n |z| + \bar{\xi}_0 |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_0 z_0)^2})} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{2,n,m} (r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_n |z| + \bar{\xi}_m |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2})} \right\} + \sum_{j=1}^2 P_j \partial_2 \mathfrak{g}_{1,j} \left\{ \frac{(-1)^{j-1} S_{11} (r_0^2 + (\xi_0^+ |z - z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_0^+ |z - z_0| + (r_0^2 + (\xi_0^+ |z - z_0|)^2)^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{j-1} \tilde{\beta}_1 (r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z + \bar{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_0 z + \bar{\xi}_0 z_0) + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z + \bar{\xi}_0 z_0)^2}} \right\} + \partial_1 \mathfrak{g}_{2,j} \sum_{n,m=1}^2 \left\{ \frac{\beta_{2,n,m}^2 (r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_n |z| + \bar{\xi}_m |z_0|) + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_{2,2,n}^* (r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{-1/2}}{|z - z_0| \xi_n^+ + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2}} \right\} - \mathfrak{g}_{11} P_3 \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{R_{2,1,n}^*}{(r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{3/2}} + \sum_{n,m=1}^2 \frac{\beta_{q,n,m}^1}{(r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{3/2}} \right\} \\ \tau_{yz} &= \mathfrak{g}_{12} Q \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_n |z - z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2})} - \sum_{n=1}^3 \frac{\omega_{2,n} (r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_n |z| + \bar{\xi}_0 |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_0 z_0)^2})} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_{2,n,m} (r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_n |z| + \bar{\xi}_m |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2})} \right\} + \sum_{j=1}^2 P_j \left\{ \partial_1 \mathfrak{g}_{1,j} \left\{ \frac{(-1)^{j-1} S_{11} (r_0^2 + (\xi_0^+ |z - z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_0^+ |z - z_0| + (r_0^2 + (\xi_0^+ |z - z_0|)^2)^{1/2}} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{(-1)^{j-1} \tilde{\beta}_1 (r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z + \bar{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_0 z + \bar{\xi}_0 z_0) + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z + \bar{\xi}_0 z_0)^2}} \right\} + \partial_2 \mathfrak{g}_{2,j} \sum_{n,m=1}^2 \left\{ \frac{-R_{2,2,n}^* (r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{-1/2}}{|z - z_0| \xi_n^+ + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2}} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{\beta_{2,n,m}^2(r_0^2+(\xi_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{-1/2}}{(\xi_n |z| + \bar{\xi}_m |z_0|) + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2}}\} \} + \vartheta_{12} P_3 \left\{ \sum_{n=1}^2 \frac{R_{2,1,n}^*}{(r_0^2 + (\xi_n |z - z_0|)^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n,m=1}^2 \frac{\beta_{q,n,m}^{1,*}}{(r_0^2 + (\xi_n z + \bar{\xi}_m z_0)^2)^{3/2}} \right\}$$

**Stress and displacement fields in the plane of connection of half-spaces.** Putting in the fundamental solution  $z = 0$ , we obtain the distribution of normal and tangential stresses and displacements in the plane of connection of half-spaces in the case when a concentrated force acts  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  at an arbitrary point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , as well as stationary heat sources at the point  $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ .

$$\begin{aligned} \sigma_z &= Q \left\{ - \sum_{n=1}^3 \frac{R_{1,n}^0}{\sqrt{r_1^2 + (\xi_n z_1)^2}} + \frac{\omega_1}{\sqrt{r_1^2 + (\bar{\xi}_0 z_1)^2}} + \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_{1,n}}{\sqrt{r_1^2 + (\bar{\xi}_n z_1)^2}} \right\} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 P_j \sum_{n=1}^2 B_{1,n} \frac{\vartheta_{2,j} z_0}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}} - P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{1,n} z_0}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}}, \\ \tau_{xz} &= \vartheta_{11} Q \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2})} - \frac{\omega_2 (r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_0 |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z_0)^2})} - \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_{2,n} (r_0^2 + (\bar{\xi}_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_n z_0)^2})} \right\} - \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 P_j \left\{ - \partial_1 \frac{\vartheta_{1,j} (-1)^{3-j} (r_0^2 + (\xi z_0)^2)^{-1/2} S_1}{\xi |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \partial_2 \sum_{n=1}^2 \frac{\vartheta_{2,j} B_{2,n} (r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2})} \right\} + P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n} (x - x_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}}, \\ \tau_{yz} &= \vartheta_{12} Q \left\{ \sum_{n=1}^3 \frac{R_{2,n}^0 (r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2})} - \frac{\omega_2 (r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_0 |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_0 z_0)^2})} - \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_{2,n} (r_0^2 + (\bar{\xi}_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\bar{\xi}_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\bar{\xi}_n z_0)^2})} \right\} - \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 P_j \left\{ - \partial_1 \frac{\vartheta_{1,j} (-1)^{3-j} (r_0^2 + (\xi z_0)^2)^{-1/2} S_1}{\xi |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi z_0)^2}} + \partial_2 \sum_{n=1}^2 \frac{\vartheta_{2,j} B_{2,n} (r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\xi_n |z_0| + \sqrt{r_0^2 + (\xi_n z_0)^2})} \right\} + P_3 \sum_{n=1}^2 \frac{A_{2,n} (y - y_0)}{(r_0^2 + (\xi_n z_0)^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

## CONCLUSION

The fundamental solutions of the problem of thermoelasticity for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space were constructed in an explicit form, which made it possible to study how temperature affects the stress distribution in the plane of compound of materials. In particular, it is shown that the inhomogeneity of the thermoelastic characteristics of the medium is essentially floating on the stress distribution in space

## REFERENCE

1. Kryvyy O. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Oper. Theory: Adv. Appl. – 2009. – **191**. – P. 395–406.
2. Kryvyy O. F. Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 1. – P. 101–119. <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0856-6>
3. Kryvyy O. F. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 4. – P. 515–531 <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0419-2>

4. Kryvyi O. F. Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 2. – P. 245–253. – <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9714-7>
5. Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. Solution of the problem of heat conduction for the transversely isotropic piecewise-homogeneous space with two circular inclusions // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 162–182.
6. Kryvyi O. F., Morozov Yu. Thermally active interphase inclusion in a smooth contact conditions with transversely isotropic half- spaces // Frattura ed Integrità Strutturale. 2020 – 52. – P. 33 35. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.52.04
7. Кривой А. Ф. Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2003. – 8, вип. 2. – С. 140–149.
8. Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecewise homogeneous transversely isotropic elastic space // Researches in Mathematics and Mechanics. — 2020. — V. 25, Is. 1(35) — P. 16–30
9. Кривий О. Ф., Морозов Ю. О. Фундаментальні розв'язки для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного пружного простору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2020. – 63, № 1. – С. 122–132.

### **Information about authors**

**Kryvyi O.** – Prof., National University "Odessa Maritime Academy": Odessa, Ukraine/  
E-mail [krivoy-odessa@ukr.net](mailto:krivoy-odessa@ukr.net)

**Morozov Yu.** – Associate professor, Odessa Polytechnic State University, Institute of mechanical engineering: Odessa, Ukraine  
E-mail [morozovyu@gmail.com](mailto:morozovyu@gmail.com)

## Non-Newtonian Hele-Shaw Flows

### Logvinov O. A.

Averaged models of the flows in a Hele-Shaw cell for power Ostwald – de Waele fluid and Bingham – Shvedov fluid with finite yield stress are proposed. In the frame of such models, the problems of radial and frontal displacement of these non-Newtonian fluids from a Hele-Shaw cell are considered.

**Introduction.** Flows in a Hele-Shaw cell are the flows of a fluid between two parallel plates separated by a small gap. Hele-Shaw cells are frequently used to simulate seepage flows in porous medium. Of a particular interest is a problem of viscous fluid displacement from a Hele-Shaw cell by a less viscous one entering the cell. Hele-Shaw flows of a linear viscous (Newtonian) fluids have been studied thoroughly. Seepage flows of fluids with strong non-Newtonian rheological properties are of better importance for applications. Many oils exhibit non-Newtonian (shear-thinning) behavior. Hydro-fracturing fluids (propping agents) practically are nonlinear viscous, have yield stress and even some elastic properties.

**Hele-Shaw Models.** Averaged model of linear viscous (Newtonian) fluid flow in a Hele-Shaw cell is derived by integration of three-dimensional Navier – Stokes equations for incompressible viscous fluid over a direction perpendicular to the cell plates (over a gap) [1]. Similar averaging procedure can be conducted for the fluids with non-Newtonian properties.

For Ostwald – de Waele fluid, viscosity is a power function of the second invariant of strain rates tensor. Hele-Shaw model for such a fluid takes the form:

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = -\frac{4(2l+1)}{l\delta^2} \langle \mu \rangle \langle u \rangle \quad \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} = -\frac{4(2l+1)}{l\delta^2} \langle \mu \rangle \langle v \rangle \quad (1a)$$

$$\langle \mu \rangle = m \cdot \langle S \rangle^{(l-1)/2} \quad \langle S \rangle = 2 \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} \right)^2 \quad (1b)$$

where  $\langle u \rangle, \langle v \rangle$  and  $\langle p \rangle$  – averaged velocity components and averaged pressure  $\langle \mu \rangle$  – averaged viscosity,  $\delta$  – a gap between Hele-Shaw cell plates,  $l$  – dimensionless power law index,  $m$  – dimensional constant often called a consistency,  $l\delta^2/4(2l+1)$  – effective (dependent on the properties of filtrating fluid) permeability of a Hele-Shaw cell.

Let us note, that in Newtonian case, for which  $l=1$ , effective permeability becomes  $\delta^2/12$ . Wherein, fluids with  $l < 1$  are called *shear-thinning* (pseudoplastic, viscosity is decreased with strain rates), fluids with  $l > 1$  – *shear-thickening* (dilatant, viscosity is increased with strain rates).

For Bingham – Shvedov fluids with finite yield stress  $\tau_c > 0$ , Hele-Shaw model can be derived similarly:

$$\langle u \rangle = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} \frac{\delta^2}{12\mu} \left( 1 + \frac{4\tau_c^3}{\delta^3 |\text{grad} \langle p \rangle|^3} - \frac{3\tau_c}{\delta |\text{grad} \langle p \rangle|} \right) \quad (2a)$$

$$\langle v \rangle = -\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} \frac{\delta^2}{12\mu} \left( 1 + \frac{4\tau_c^3}{\delta^3 |\text{grad} \langle p \rangle|^3} - \frac{3\tau_c}{\delta |\text{grad} \langle p \rangle|} \right) \quad (2b)$$

The main difference between system (2) and classical Newtonian Hele-Shaw model is explicit dependency of averaged velocity components on averaged pressure gradient.

Generalized Hele-Shaw models (1) and (2) are closed by averaged continuity equation:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

**Displacement Problems.** Let us consider two displacement problems – radial displacement for Ostwald – de Waele fluids and frontal – for Bingham – Shvedov fluids. Corresponding idealized problem statements are given on **fig. 1**. The fluids in both cases are treated as poorly miscible – dimensionless Peclet number tends to infinity. As a consequence, stabilizing mechanisms – surface tension on the interface and molecular diffusion are absent in the system. However, characteristic size of viscous fingers generated as a result of instability will be produced without these stabilizing factors. The reason lies in an action of viscous normal stresses on the interface, providing interface stability. Let us note, that linear stability analysis for non-Newtonian fluids with viscous normal stresses accounted is conducted for the first time.

We begin with a radial case for power fluids: infinite region is filled with displaced fluid, a displacing one enters the cell with a source of constant volume rate  $Q > 0$ . We will carry linear analysis of current displacement front position  $R_{act}(t)$  stability to infinitesimal disturbances (**fig. 1b**). The motion of both fluids is described by averaged Hele-Shaw model (1) and (3) in polar coordinates  $(r, \varphi)$ . On the interface – on the disturbed front  $r = \xi(\varphi, t)$  – the equality of normal velocities (as for ideal fluids) and equalities of full normal stresses (as for viscous fluids) are set:

$$r = \xi(\varphi, t): (\mathbf{W}_1)_n = (\mathbf{W}_2)_n = \frac{d\xi}{dt}, \quad (\boldsymbol{\sigma}_{1n})_n = (\boldsymbol{\sigma}_{2n})_n \quad (4)$$

Let me explain the conditions (4). Formally, averaged Hele-Shaw equations (1) and (3) are of the first order, therefore boundary conditions should correspond to the case of ideal fluid. For an ideal fluid, a dynamical condition of normal stresses equality on the interface is reduced to simple equality of pressures. However, in reality both fluids are viscous – viscosity explicitly appears in equations of motion with a friction force of a fluid against the plates of a Hele-Shaw cell. The fact, that the fluid is viscous, can be reflected in boundary conditions by taking into account viscous normal stresses. Mathematical correctness will not be violated – there are still two boundary conditions as for an ideal fluid.

Equations (1) and boundary conditions (4) are linearized near undisturbed solution:

$$u_1^* = u_2^* = \frac{Q}{2\pi\delta} \frac{1}{r}, \quad R = R(t) = \left( \frac{Qt}{\pi\delta} \right)^{1/2}$$

$$\frac{dp_i^*}{dr} = -\frac{m_i}{K_i} \left( \frac{Q}{2\pi\delta} \right)^{l_i} \frac{2^{l_i-1}}{r^{2l_i-1}} \quad \mu_i^* = m_i \left( \frac{Q}{2\pi\delta} \right)^{l_i-1} \left( \frac{2}{r^2} \right)^{l_i-1}, \quad i = 1, 2$$

Linear stability analysis leads to dispersion relation between dimensionless wave number  $n$ , determining the disturbance, and the growth rate  $\omega$  of this disturbance:

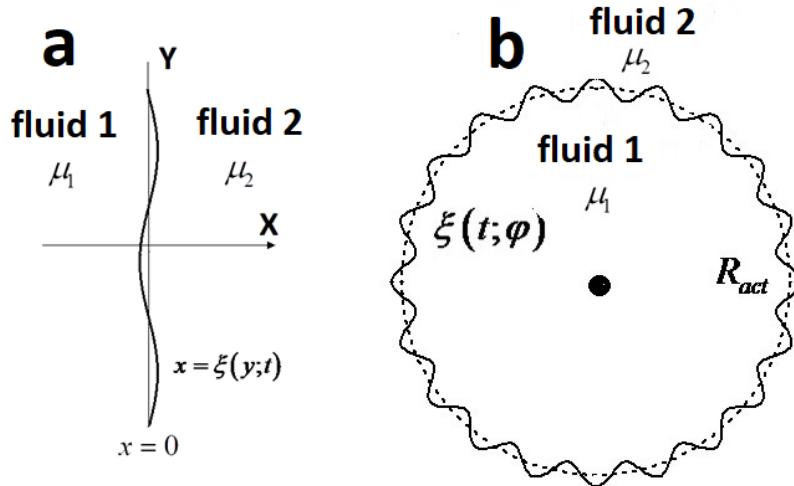
$$\xi(\varphi, t) = S e^{\omega t} \cos(n\varphi)$$

$$\omega = -1 + \frac{1 + 2l_1\varepsilon_1 - \tilde{M}(1 + 2l_2\varepsilon_2)}{(l_2/I_2)\tilde{M}(1 + \varepsilon_2(n^2 - \alpha_-)) - (l_1/I_1)(1 + \varepsilon_1(n^2 - \alpha_+))} \quad (5)$$

In relation (5), following notions are used:

$$\tilde{M} = \frac{m_2 K_1}{m_1 K_2} \left( \frac{Q}{\pi R_{act}^2 \delta} \right)^{l_2-l_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{l_1^2}{(2l_1+1)(l_1+1)} \frac{\delta^2}{R_{act}^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{l_2^2}{(2l_2+1)(l_2+1)} \frac{\delta^2}{R_{act}^2}$$

$$I_1 = \alpha_+ + (l_1-1)n^2, \quad I_2 = \alpha_- + (l_2-1)n^2$$



**fig. 1.** Idealized two dimensional displacement problem statements:  
(a) frontal displacement (b) radial displacement

Constants  $\alpha_+ > 0$  and  $\alpha_- < 0$  are two (real) roots of quadratic equation

$$\alpha^2 + (2l - 2 + (l-1)n^2)\alpha + n^2(2l^2 - 5l + 2) = 0$$

Dispersion relation (5) is presented in dimensionless form. The actual (undisturbed) radius  $R_{act}$  of the interface is chosen as a length scale and  $U_0 = Q/(2\pi R_{act} \delta)$  – as a velocity scale. Dimensionless parameter  $\tilde{M}$  is a generalization of common viscosity ratio  $M$  in Newtonian case for the case of power fluids. It can be shown, that the condition  $\tilde{M} > 1$  presents necessary and enough (generalized) condition of the interface stability loss. Parameters  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ , in turn, are the generalized form of stabilizing geometrical criterion  $\varepsilon$  in Newtonian case for the case of power fluids.

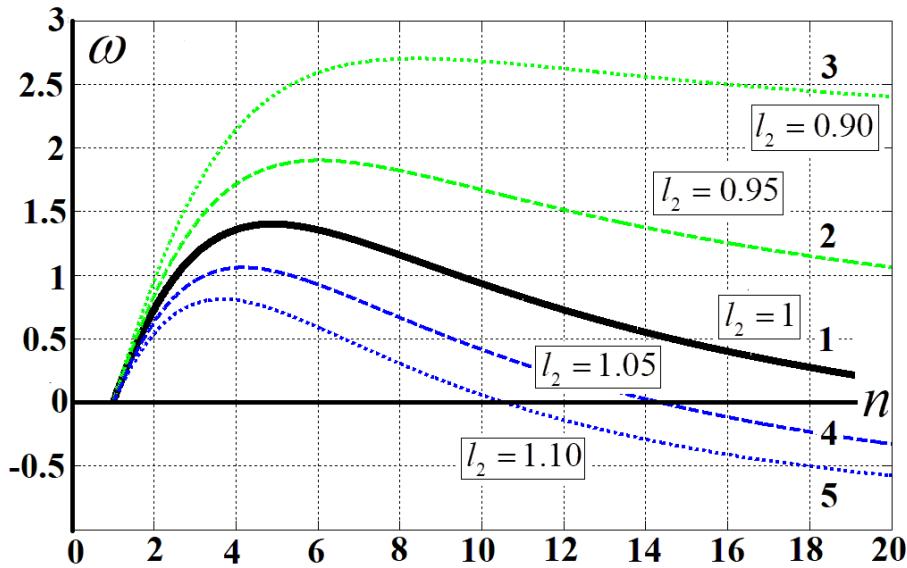
For analyzing relation (5), I will fix parameters  $\delta = 1 \text{ mm}$ ,  $R_{act} = 2 \text{ mm}$ ,  $Q = 10^{-3} \text{ mm}^3/\text{sec}$  and the consistencies of fluids  $m_1 = 10^{-6} \text{ kg}/(\text{sec}^{2-l_1} \cdot \text{mm})$ ,  $m_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{sec}^{2-l_2} \cdot \text{mm})$ . The results for the case when the *displacing* fluid is Newtonian  $l_1 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.041$  are presented on **fig. 2**. For curve (1) both fluids are Newtonian. The curves (2) and (3) correspond to shear thinning displaced fluids:  $l_2 = 0.95$  and  $l_2 = 0.90$  respectively; curves (4) and (5) – to shear thickening fluids:  $l_2 = 1.05$  and  $l_2 = 1.10$  respectively. The values of destabilizing parameter  $\tilde{M}$  and stabilizing parameter  $\varepsilon_2$  are given in the legend.

The main tendency for a shear thinning fluid is that with decreasing power law index the number of the fastest mode is increased, as a consequence, the number of viscous fingers also rises. For shear thickening fluid with increasing of power law index the number of viscous fingers is decreased. At the same time, the cut-off wave number is also decreased – all disturbances with higher wave numbers are damped. These tendencies are held for the cases when the displacing fluid is also power.

Let us turn to frontal displacement of Bingham – Shvedov fluids: in a left half plane there is a displacing fluid, in a right half plane – the displaced one (**fig. 1a**). Cartesian coordinate system is related with undisturbed interface position (line  $x = 0$ ) for all time moments. Undisturbed interface is propagating with constant velocity  $U_0$ . The motion of both fluids is described by averaged Hele-Shaw model (2) and (3) for Bingham – Shvedov fluid in Cartesian coordinates  $(x, y)$ . On the interface  $x = \xi(y, t)$  boundary conditions (4) are set.

The undisturbed solution has the form:

$$u_i^* = u_2^* = U_0, \quad \frac{dp_i^*}{dx} = C_i^* = \text{const} < 0, \quad i = 1, 2$$



**fig. 2.** Dispersion curves (5) for the case of power fluid.

The displacing fluid is Newtonian for all cases:  $l_1 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.041$ .

Curve (1) correspond to pure Newtonian case:  $l_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.041$ ,  $M = 500$ .

The displaced fluids on curves (2) and (3) are shear thinning; on curves (4) and (5) – shear thickening:

(2) –  $l_2 = 0.95$ ,  $\varepsilon_2 = 0.039$ ,  $\tilde{M} = 837$ , (3) –  $l_2 = 0.90$ ,  $\varepsilon_2 = 0.038$ ,  $\tilde{M} = 1406$ ,

(4) –  $l_2 = 1.05$ ,  $\varepsilon_2 = 0.043$ ,  $\tilde{M} = 299$ , (5) –  $l_2 = 1.10$ ,  $\varepsilon_2 = 0.045$ ,  $\tilde{M} = 180$ .

Constants  $C_i^*$  are satisfied to algebraic equation of the third order:

$$(C_i^*)^3 + \left( \frac{12\mu_i}{\delta^2} U_0 + \frac{3\tau_c^{(i)}}{\delta} \right) (C_i^*)^2 - 4 \left( \frac{\tau_c^{(i)}}{\delta} \right)^3 = 0$$

The dispersion relation between dimensionless wave number  $k$  determining the disturbance, and the growth rate  $\omega$  of this disturbance, has the form:

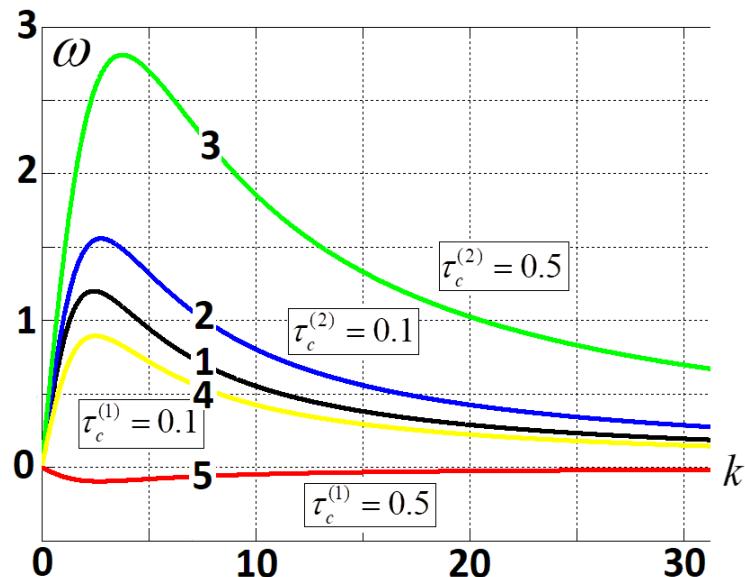
$$\omega = \frac{M(C_2^* - C_1^*) \sqrt{M \cdot C_1^* C_2^*} k}{MC_1^* \sqrt{-\frac{C_2^*}{A_1}} + MC_2^* \sqrt{-\frac{MC_1^*}{A_2}} - \frac{k^2}{6} \left( \sqrt{-\frac{C_2^*}{A_1}} + M \sqrt{-\frac{MC_1^*}{A_2}} \right)} \quad (6)$$

$$A_i = 1 + \left( 2\tau_c^{(i)} / C_i^* \right)^3, \quad i = 1, 2$$

Dispersion relation (6) is presented in dimensionless form. A gap  $\delta$  is chosen as a length scale and velocity of the interface  $U_0$  – as a velocity scale. Both yield stresses  $\tau_c^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  are scaled as  $12\mu_i U_0 / \delta$ .

Dispersion curves (6) are presented on **fig. 3** for the case when one of the fluids (for the curve 1, both fluids) is Newtonian. Two main tendencies can be seen. If the *displacing* fluid is Newtonian – curves (2) and (3) – with the increasing of yield stress of displaced fluid, the number of viscous fingers also increases, growth rate arises. And if the *displaced* fluid is Newtonian – curves (4) and (5) – with the increasing of yield stress of displacing fluid, the number of viscous fingers is decreased, growth rate goes down. To such an extent, that after a yield stress is overcoming some value, the displacement becomes absolutely stable (curve 5).

If both fluids have non zero yield stresses, specified tendencies are held.



**fig. 3.** Dispersion curves (6) for Bingham – Shvedov fluid.

Curve (1) corresponds to pure Newtonian case. For curves (2) and (3) only displacing fluid is Newtonian.

For curves (4) and (5) – only displaced one.

Viscosity ratio for all cases  $M = 100$ .

**Conclusions.** The solution of radial displacement problem of power Ostwald – de Waele fluid from a Hele-Shaw shows that for shear thinning fluid with the decreasing of power law index, the number of viscous fingers is increased, and for shear thickening fluid with the increasing of power law index, the number of viscous fingers is decreased. The solution of frontal displacement problem of Bingham – Shvedov fluid with finite yield stress from a Hele-Shaw shows that with the increasing of yield stress of displaced fluid, the number of viscous fingers is increased, the growth rate arises and with the increasing of yield stress of displacing fluid, the number of viscous fingers is decreased, the growth rate goes down. To such an extent, that after a yield stress overcomes some value, the displacement becomes absolutely stable.

#### REFERENCE

1. Logvinov O. A. Averaged equations in a Hele-Shaw cell: Hierarchy of models. *Acta. Astronaut.*, vol. 123, 103–108, 2016.
2. Kim H., Funada T., Joseph D. D., Homsy G. M. Viscous potential flow analysis of radial fingering in a Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, vol. 21, 074106, 2009.

#### Information about authors

**Logvinov Oleg** (Anatolievich) – senior research fellow, gas and wave dynamics department of Moscow Lomonosov State University (MSU).

Mobile: 8(916)5036050

E-mail: [oleglogvinov@mail.ru](mailto:oleglogvinov@mail.ru)

# Application of Polyether Ether Ketone in Total Cervical Disc Arthroplasty: A Review

Niranjan Y C, Shankar K, R Velmurugan R

Cervical disc arthroplasty (CDA) is a surgical procedure where a degenerated or damaged cervical disc is removed and replaced with an artificial disc in levels C3/4, C4/5, C5/6, and C6/7 of the spine. Cervical disc replacement promises improvement for the patient compared to more conventional fusion surgery. Commonly used disc replacement devices are Ultra-high-molecular-weight polyethylene (UHMWPE) with cobalt-chrome alloy (CoCr). The problems associated with the available total disc replacement devices are wear and the biological response to the wear debris in-vivo. UHMWPE and metal wear particles can cause an inflammatory reaction and promote foreign-body granulation tissue response, leading to the implant's failure in-vivo. Considering these effects, there exists a need for revising the material in CDA. The use of Polyether ether ketone (PEEK) as an alternative material to UHMWPE have shown less wear when used as a self-mating surface in CDA. The current study reviews and reports available literature on PEEK as alternating materials for cervical disc replacement.

## 1. Introduction

Back pain is the most common cause for disability which has a high penalty in socioeconomic consideration for the individual aged less than 45 years [1]. A well-known cause of back pain is intervertebral disc degeneration [2]. The Intervertebral disc is the largest mobile part of the three-joint complex (two vertebrates connecting disc and facet joints), responsible for motion in the spine [3]. The main reason for abnormal motion in the spine segment and biomechanical instability leading to chronic spinal pain is degenerative disc disease (DDD) [4]. The degenerative disc effects are alterations in shape, volume, structure, and composition of both annulus fibrosus and nucleus pulposus, leading to alteration of the spine's mechanics [5]. The spine can be divided into three parts: cervical, Thoracic, and Lumber [5]. Lumbar and cervical discs are subjected to high degeneration compared to thoracic due to motion associated with them. In the year 2000, a study in the UK reveals that 12 to 35% of the population are affected by disc degeneration, 10% of these become chronically disabled. Among these, about 20% are teens affected by DDD before their second decade of life, showing mild signs of degeneration [5]. The approach to DDD is to restrict motion between spinal segments by fusion surgery [1]. Fusion immobilizes the painful spine segment by encouraging bone growth across the immobilized levels [6]. The immediate loss of functionality after fusion resulting from movement restriction promoting graft union [7]. Fusion may heal the pain but tends to increase the rate of degeneration and cause alteration in the spinal motion of the adjacent segment [8]. Other consequences of fusion surgery include loss of viscoelastic disc properties, immobilization, risk of allograft transplantation, Pseudarthrosis, reoperation and plating complications [7].

## 2. Cervical Disc Arthroplasty (CDA)

Removing the degenerated disc in the spine's cervical region and replacing it with a synthetic artificial implant is known as Cervical Disc Arthroplasty (CDA) [5]. Figure 1 demonstrates the procedure involved in CDA. Retaining the natural motion, restoring the disc height and flexibility after surgery are the primary aims of CDA [9]. Clinical evidence shows, after cervical disc replacement, the patient felt free and painless [9]. Most disc replacement devices are of the ball on socket design [10]. Clinical data reveals that the ball on socket design likely to maintain ROM and relieve pain [10]. For decades' polymers, metals and ceramics have become the primary members for bearing surfaces in total joint arthroplasty [11]. Alternative bearing surfaces currently include ceramic-on-UHMWPE, ceramic-on-ceramic, metal-on-metal (MOM), and metal-on-Polymer (MOP) [12].

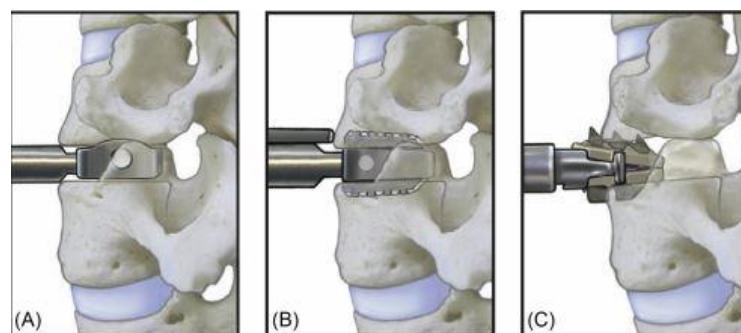


Figure 1: Procedure involved in CDA A) Sizing, B) Slot Cutting C) Disc Placement (Used with permission, PEEK Biomaterials Handbook, Second Edition) [13].

### 3. Polyether ether ketone in CDA

Polymer joint replacement has the advantage of low friction and moderate shock absorption [14]. In Europe polyethylene has been used as a material in total disc replacement (TDR) since 1980 [15]. MOM devices have been introduced and gained popularity as an alternative to MOP to reduce the polymer wear rate of polymer core and prevent particle-induced osteolysis. However, MOM cervical discs lead to metal wear debris in vivo and lack shock absorption [14]. Ceramic-on-ceramic (COC) joints performed well, but the low fracture toughness of ceramics can lead to the occasional fracture incidence in vivo and can lead to revision surgeries [16].

The majority of patients suffering from DDD are between 30 to 50 years of age compared to the total joint replacement of about 70 years of age, where wear debris and durability of UHMWPE is a big concern [17]. As a result, the disc devices must last longer than the joint replacement devices [18].

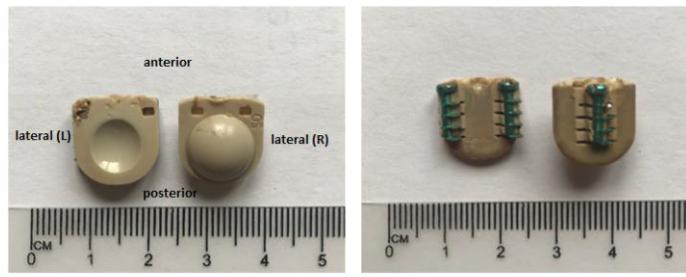


Figure 2: PEEK on PEEK ball on socket NuNec cervical arthroplasty system. [19] (Used with permission, Biotribology, Elsevier publications)

PEEK has proven to be an excellent alternating material with well-established biocompatibility, excellent biostability, chemical resistance, radiation resistance, and mechanical characteristics [20]. PEEK was introduced as a fusion device in 1990 for spinal instability and DDD. PEEK also has a record of being used in interspinous spacers and PEEK rods for pedicle screw-based-lumbar fusion systems. In the year 2001, Food and Drug Administration (FDA) has approved the utility of PEEK as a fusion device, and by 2010 PEEK has covered about 65% of the market as fusion devices [6]. Recently PEEK has been used as a bearing material due to its excellent mechanical properties and biocompatibility [21]. Figure 2 shows the available PEEK on PEEK ball on socket NuNec CDA system.

### 4. Biological Response and Cytokine Effect to Wear Debris

Wear and corrosion are the two leading causes of disc failure in vivo due to biological and chemical reactions [8]. Particles are generated from the prosthetic devices due to fretting, wear and/or fragmentation [14], which are generally unavoidable [22]. These particles can cause an inflammatory reaction and promote foreign-body granulation tissue response [14]. The inflammatory response may lead to pain, osteolysis, pannus formation, and implant loosening. About 75% of the implant loosening is due to aseptic osteolysis caused by wear debris [14]. The biological response of UHMWPE debris can trigger a foreign body granulomatous response and stimulate bone resorption [23][24]. Bone resorption leads to technically challenged revision surgery, an added economic burden, more importantly, pain, and significant risk to the patient [25]. Revision surgery carries considerable risk to the major anterior vessels and is a potentially life-threatening procedure [26]. In vitro experiments show that the UHMWPE particles increase pro-inflammatory cytokine and mediators interleukin 1 $\beta$  (IL-1 $\beta$ ), interleukin-6 (IL-6), tumor necrosis factor- $\alpha$  (TNF- $\alpha$ ), and prostaglandin E2 (PGE2), and phagocytosis of particles. In vivo experiments have also shown cartilage degeneration, meniscus, and synovitis after UHMWPE particle injection to Wistar rat models [27].

PEEK is a material of proven biocompatibility. The biocompatibility tests show that PEEK clears all ISO-10993 tests. Biodurability tests confirm that the PEEK material is noncytotoxic, with no degradation, muscle necrosis, marked inflammatory responses, or any other significant changes [10]. Wear particles of the most common PEEK composite, carbon fiber reinforced Polyether ether ketone (CFR-PEEK), will not raise a severe inflammatory response [28]. Animal studies on the baboon model have shown no change in disc height between preoperative and postoperative for the study period of 12 months [10]. Histology shows no inflammatory behaviour along with the vertebral endplate [10]. Cytokine analysis has shown no evidence of cellular apoptosis, giant cell reaction, or other significant

pathological changes [10], [23]. In vitro experiments suggest that the possibility of aseptic loosening and immunoreaction caused by PEEK and CFR-PEEK particles from the cervical disc prosthesis is minimum [17]. James Hallab et al. [24] have studied the biological response to wear debris of PEEK optima. The results show that PEEK optima particles are more biocompatible than the UHMWPE and XUHMWPE (crosslinked UHMWPE) of the same particle size and dose. Charles-H Rivard et al. [29] have conducted in vivo experiments on 24 female New Zealand white rabbits to study PEEK particle's compatibility in the spine. PEEK powder was suspended in 0.9% saline and injected into the spinal canal of thoracic T10 sites and lumbar L3 sites. Before injection, rabbits were operated on with the spinal implant at respective sites. Histological findings have shown moderate inflammatory response of the dura mater at 1 week postoperative, became moderate to mild with particles limited to the dura mater and the surrounding connective tissue after four weeks of surgery. At 12 weeks post-surgery, inflammation reactions were observed, and the particles were limited to the dura mater. The spinal cord tissue (nerve cells) did not develop any adverse secondary response to the particle injected during the observation period. The histology of the dura mater to the PEEK particle suggests that PEEK is harmless to the nerve roots and spinal cord. Thus PEEK can be used as a bearing material in the spinal implant. To study the clinical and radiological outcome of single and multiple level Anterior Cervical Disc Replacement (ACDR) using PEEK on PEEK (POP) system, Lakkol et al. [30] have considered 31 patients with radiculopathy/myelopathy. Pain and function were evaluated by a visual analogue score for the neck (VAS-NP) and arm pain (VAS-AP). Neck disability index (NDI) and SF-36 questionnaires were completed. Disc height and segmental angular correction (SAC) were measured on radiographs for pre and postoperative conditions. Average follow-up of six months has shown a mean VAS-NP improved from 7.27 to 3.93 and VAS-AP from 7.27 to 3.4 (preoperative to postoperative). Mean SF-36 enhanced from 32.21 to 40.22. All patients were found to have functional improvement for NDI. There has been an improvement in SAC from 5.4° to 8.0° for 1-level, 3.1° to 7.5° for 2-level, 8.4° to 9.4° for 3-level and 5.8° to 26.7° for 4-level ACDR. The author suggests that the clinical and radiological outcomes are similar to other types of ACDR reported in the literature. POP-CDR also allows safe use of MRI during follow-up with fewer artefacts giving it an edge over other systems. In another clinical and radiographic outcome of ACDR, Likkol et al. [31] considered 36 patients with radiculopathy/myelopathy who failed to respond to conservative measures. The patients are treated with NuNec™, a POP-CDR (Pioneer Surgical Technology, USA). Eight patients had received ACDR at 1-level, 15 had 2-level surgery, 12 had 3-level surgery, and 1 had a 4-level surgery. At the mean 14.25 months follow-up, mean NDI improved from 49.35 to 33.78, VAS-NP from 8.16 to 3.65, VAS-AP from 7.32 to 3.12 SF-36BP from 29.15 to 37.18. The authors have given that the NuNec™ discs are statistically significant in the outcome measures, and NuNec™ discs preserve global cervical spine ROM and improvement in FSU ROM despite single or multiple levels of ACDR. NuNec™ ACDR also gives excellent quality MR images during a postoperative assessment. The author reports that the NuNec™ ACDR device is safe, effective, and has added design benefits. Turner et al. [32] have considered 33 patients who has undergone 44 POP NuNec™ cervical disc replacement for myelopathy and radiculopathy and reported two years of follow-up clinical data. They suggest all clinical outcomes have improved in two years of follow-up. Their results suggest that both myelopathy and radiculopathy group patients may clinically benefit from ACDR, and these benefits are being maintained for longer in patients with radiculopathy. The patient group demonstrated higher heterotopic ossification (HO) at baseline and follow-up, with 10.8% of operated levels showing grade 3 or 4 HO at baseline and 53.3% after two years. This progression is statistically significant. The author indicates that this may result from the mechanical features of the NuNec™ device or an iatrogenic response to bone drilling. The reoperation rate at two years in this cohort due to HO was 6.7%. The authors suggest that the high 6.7% may be a consequence of the small sample size, which is only related to 2 patients and suggest reoperation of 6.7% due to HO being not higher than the range of reoperation rates (4%-9%) in anterior cervical disc fusion.

## 5. Conclusion

PEEK as a biomaterial is not a new concept. PEEK has already been used as a fusion device in spine surgery. There exists a PEEK on PEEK disc replacement device in the market (Nubac®). Biocompatibility tests confirm the compatibility of PEEK in vivo. Available clinical reports/studies are also favourable for the use of POP arthroplasty devices. The wear performance of PEEK can

further be improved by fiber reinforcement. With the addition of carbon fiber to PEEK, a notable reduction in wear is observed in the available literature. Both PAN and PITCH carbon fibers can be reinforced to the biomaterial PEEK to improve wear performance. When the CFR-PEEK is tested for wear over a range of materials, the study of available literature indicates that CFR-PEEK (PAN) as self-articulating bearing surfaces provide lesser wear rates than any other combination of materials in the available literature.

## REFERENCES

- [1] F. Taher *et al.*, “Lumbar Degenerative Disc Disease: Current and Future Concepts of Diagnosis and Management,” *Adv. Orthop.*, vol. 2012, no. Ivd, pp. 1–7, 2012.
- [2] M. R. Berry, B. G. Peterson, and D. H. Alander, “A granulomatous mass surrounding a maverick total disc replacement causing iliac vein occlusion and spinal stenosis: A case report,” *J. Bone Jt. Surg. - Ser. A*, vol. 92, no. 5, pp. 1242–1245, 2010.
- [3] M. Szpalski, R. Gunzburg, B. L. Rydevik, J. C. Le Huec, and H. M. Mayer, *Surgery for low back pain*. 2010.
- [4] J. Song *et al.*, “In vitro wear study of PEEK and CFRPEEK against UHMWPE for artificial cervical disc application,” *Tribol. Int.*, vol. 122, no. February, pp. 218–227, 2018.
- [5] B. A. Frost, S. Camarero-Espinosa, and E. Johan Foster, “Materials for the spine: Anatomy, problems, and solutions,” *Materials (Basel.)*, vol. 12, no. 2, pp. 1–41, 2019.
- [6] S. M. Kurtz and J. Nevelos, *PEEK Bearing Materials for Total Joint Replacement*, 2nd ed. Elsevier Inc., 2019.
- [7] P. A. Anderson, R. C. Sasso, J. P. Rouleau, C. S. Carlson, and J. Goffin, “The Bryan Cervical Disc: Wear properties and early clinical results,” *Spine J.*, vol. 4, no. 6 SUPPL., pp. S303–S309, 2004.
- [8] J. Reeks and H. Liang, “Materials and their failure mechanisms in total disc replacement,” *Lubricants*, vol. 3, no. 2, pp. 346–364, 2015.
- [9] T. Pitzen *et al.*, “Cervical spine disc prosthesis: Radiographic, biomechanical and morphological post morta findings 12 weeks after implantation. A retrieval example,” *Eur. Spine J.*, vol. 16, no. 7, pp. 1015–1020, 2007.
- [10] Q. Bin Bao *et al.*, “Nubac Disc Arthroplasty: Preclinical Studies and Preliminary Safety and Efficacy Evaluations,” *SAS J.*, vol. 1, no. 1, pp. 36–45, 2007.
- [11] S. R. Golish and P. A. Anderson, “Bearing surfaces for total disc arthroplasty: metal-on-metal versus metal-on-polyethylene and other biomaterials,” *Spine Journal*, vol. 12, no. 8, pp. 693–701, 2012.
- [12] L. K. Longhofer, A. Chong, N. M. Strong, P. H. Wooley, and S. Y. Yang, “Specific material effects of wear-particle-induced inflammation and osteolysis at the bone-implant interface: A rat model,” *J. Orthop. Transl.*, vol. 8, pp. 5–11, 2017.
- [13] M. K. C. Lui, Y. P. Arramon, M. R. Alvis, and D. Hovda, *PEEK-on-Ceramic Cervical Disc Arthroplasty*, 2nd ed. Elsevier Inc., 2019.
- [14] N. Hallab, H. D. Link, and P. C. McAfee, “Biomaterial optimization in total disc arthroplasty,” *Spine (Phila. Pa. 1976)*, vol. 28, no. 20 SUPPL., pp. 139–152, 2003.
- [15] S. M. Kurtz *et al.*, “Polyethylene wear and rim fracture in total disc arthroplasty,” *Spine J.*, vol. 7, no. 1, pp. 12–21, 2007.
- [16] S. C. Scholes and A. Unsworth, “The wear performance of PEEK-OPTIMA based self-mating couples,” *Wear*, vol. 268, no. 3–4, pp. 380–387, 2010.
- [17] J. Song *et al.*, “Tribology International Insight into the wear particles of PEEK and CFRPEEK against UHMWPE for artificial cervical disc application : Morphology and immunoreaction,” *Tribol. Int.*, vol. 144, no. September 2019, p. 106093, 2020.
- [18] D. W. Howie, S. D. Rogers, M. A. McGee, and D. R. Haynes, “Biologic effects of cobalt chrome in cell and animal models,” *Clin. Orthop. Relat. Res.*, no. 329 SUPPL., 1996.
- [19] G. Kandemir, S. Smith, J. Andrews, A. Bowey, and T. J. Joyce, “Retrieval analysis of an explanted NuNec cervical disc: A case report,” *Biotribology*, vol. 24, no. September, p. 100150, 2020.
- [20] M. Dworak, A. Rudawski, J. Markowski, and S. Blazewicz, “Dynamic mechanical properties of carbon fibre-reinforced PEEK composites in simulated body-fluid,” *Compos. Struct.*, vol.

- 161, pp. 428–434, 2017.
- [21] I. Y. Kim, A. Sugino, K. Kikuta, C. Ohtsuki, and S. B. Cho, “Bioactive composites consisting of PEEK and calcium silicate powders,” *J. Biomater. Appl.*, vol. 24, no. 2, pp. 105–118, 2009.
- [22] H. Xin, D. E. T. Shepherd, and K. D. Dearn, “A tribological assessment of a PEEK based self-mating total cervical disc replacement,” *Wear*, vol. 303, no. 1–2, pp. 473–479, 2013.
- [23] A. A. Stratton-Powell, K. M. Pasko, S. Lal, C. L. Brockett, and J. L. Tipper, *Biologic Responses to Polyetheretherketone (PEEK) Wear Particles*, 2nd ed. Elsevier Inc., 2019.
- [24] N. J. Hallab, K. McAllister, M. Brady, and M. Jarman-Smith, “Macrophage reactivity to different polymers demonstrates particle size- and material-specific reactivity: PEEK-OPTIMA® particles versus UHMWPE particles in the submicron, micron, and 10 micron size ranges,” *Journal of Biomedical Materials Research - Part B Applied Biomaterials*, vol. 100 B, no. 2, pp. 480–492, 2012.
- [25] E. Ingham and J. Fisher, “The role of macrophages in osteolysis of total joint replacement,” *Biomaterials*, vol. 26, no. 11, pp. 1271–1286, 2005.
- [26] J. François, R. Coessens, and P. Lauweryns, “Early removal of a Maverick disc prosthesis: Surgical findings and morphological changes,” *Acta Orthop. Belg.*, vol. 73, no. 1, pp. 122–127, 2007.
- [27] D. Y. Park, B. H. Min, D. W. Kim, B. R. Song, M. Kim, and Y. J. Kim, “Polyethylene wear particles play a role in development of osteoarthritis via detrimental effects on cartilage, meniscus, and synovium,” *Osteoarthritis and Cartilage*, vol. 21, no. 12, pp. 2021–2029, 2013.
- [28] A. M. H. Latif, A. Mehats, M. Elcocks, N. Rushton, R. E. Field, and E. Jones, “Pre-clinical studies to validate the MITCH PCR™ Cup: A flexible and anatomically shaped acetabular component with novel bearing characteristics,” *J. Mater. Sci. Mater. Med.*, vol. 19, no. 4, pp. 1729–1736, 2008.
- [29] C. Rivard, S. Rhalmi, and C. Coillard, “In vivo biocompatibility testing of peek polymer for a spinal implant system : A study in rabbits,” no. November, 2001.
- [30] S. Lakkol, S. Bhatnagar, R. Lashmipathy, G. Reddy, and T. Friesem, “CERVICAL MOTION PRESERVATION BY PEEK ON PEEK CERVICAL DISC REPLACEMENT (POPCDR) SYSTEM: ANALYSIS OF EARLY CLINICAL AND RADIOLOGICAL RESULTS,” *Orthop. Proc.*, vol. 94-B, no. SUPP\_X, p. 148, 2012.
- [31] S. Lakkol, K. Lingutla, R. Taranu, J. Kang, G. Reddy, and T. Friesem, “PRESERVATION OF CERVICAL RANGE OF MOTION USING A NEW PEEK ON PEEK ARTICULATION CERVICAL DISC REPLACEMENT: ONE YEAR CLINICAL AND RADIOLOGICAL OUTCOMES,” *Orthop. Proc.*, vol. 94-B, no. SUPP\_XXVI, p. 89, 2012.
- [32] I. Turner and D. Choi, “NuNec™ cervical disc arthroplasty improves quality of life in cervical radiculopathy and myelopathy: A 2-year follow-up,” *Clin. Neurosurg.*, vol. 83, no. 3, pp. 422–428, 2018.

#### **Information about authors:**

**Y C Niranjan** - Research Scholar, Indian Institute of Technology Madras Chennai, India.

**E-mail:** [niranjangowda38@gmail.com](mailto:niranjangowda38@gmail.com)

**Shankar Krishnapillai** - Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology Madras,Chennai, India

**Velmurugan Ramanujam** – Professor Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Madras,Chennai, India. **E-mail:** [ramanv@iitm.ac.in](mailto:ramanv@iitm.ac.in)

## Stress analysis of composites with interfacial bridged cracks and damaged zones

Perelmutter M. N.

Stress analysis of composite structures with bridged cracks and damaged zones is performed with the direct boundary integral equations method in axisymmetric formulation. It is assumed that: a) the crack faces interact in some zones behind of a cracks edges (bridged zones); b) these zones width can be comparable to the whole crack size; c) adjacent parts of the structure can be connected by mechanical ligaments (including interfaces ahead of cracks edges) and the relative displacements of these parts can occur under the loading (these zones consider as damaged zones). The boundary element software to solve axisymmetric problems of elasticity was developed. The results for different properties of composite materials and bonds are presented. Applications to modeling of cracks self-healing have been considered.

**1. Introduction.** Analysis of cracks growth in composite materials and in adhesive joints using models of a crack process zone (cohesive or bridged) includes the problem of displacements and stresses computation in crack process zones and in vicinity of crack edges. In this paper the bridged crack approach is considered as a crack process zone model. This approach it is assumed that the stress intensity factors do not vanish at a crack tip. The problem of displacements and stresses analysis for bridged cracks in homogeneous infinite media was considered in [1-2] (planar problem) and [3] (problem with axial symmetry). For bridged interfacial cracks between two semi-infinite plates the problems were solved in [4-5] by the singular integral-differential equation method (planar problem). In the last two decades a number of papers were devoted to the application of the boundary element method (BEM) to computation of the stress intensity factors (SIF) for cracks on bi-material interfaces in finite size structures, see, for example, [6-8]. In all these papers interaction between crack surfaces was not assumed nor considered. Only few papers have been directed to analysis of bridged cracks in finite size structures, [9-11]. The main objective of this paper is the stress analysis of composite structures with bridged cracks and damaged zones with the direct boundary integral equations method in axisymmetric formulation.

**2. Bridged interfacial crack.** To characterize the bridged interfacial crack model let us consider a plane crack of radius  $R$  on an interface of two dissimilar elastic materials, Fig.1. The layer of width  $d$ , adjacent to the crack front, is the bridged zone of this crack. In this zone the crack faces interact with each other; this interaction restrains the crack opening. To describe mathematically the interaction between the crack surfaces, it is assumed that there are bonds between the crack faces at the bridging zone of the interfacial crack. The tractions in these bonds restrain the crack opening and decrease the SIFs. It is assumed that the deformation law of these bonds, which is generally nonlinear, is predefined. The stresses (the bond tractions)  $Q(s)$  appear under the external loading action in the bonds between the faces of the bridged interfacial crack placed at the boundary between different materials. These tractions  $Q(s)$  have (in particular, in the simplest case of an uniaxial tension) the axial  $t_z(s)$  and radial  $t_r(s)$  components ( $s$  - is the radial coordinate along the crack radius, in the case of Fig.1,  $s \equiv r$ ):

$$Q(s) = t_z(s) - i t_r(s), \quad i^2 = -1 \quad (1)$$

The crack faces in the bridged zone are loaded by the axial and radial stresses, which are numerically equal to these components of tractions.

The interfacial crack opening in the bridged zone,  $u(s)$ , can be written in the form similar to (1)

$$u(s) = u_z(s) - i u_r(s), \quad u_z(s) = u_z^+(s) - u_z^-(s), \quad u_r(s) = u_r^+(s) - u_r^-(s) \quad (2)$$

where  $u_r^+, u_z^+$  and  $u_r^-, u_z^-$  denote the displacements components of the upper and lower crack faces.

The relation between the crack opening and the bond traction (the bond deformation law) depends on the physical nature of the bonds and their properties. The general form of the spring-like bond deformation law can be written similar to [4-5]

$$u(s) = c_z(s, \sigma)t_z(s) - i c_r(s, \sigma)t_r(s), \quad c_{z,r}(s, \sigma) = \phi_{1,2}(s, \sigma) \frac{H}{E_b}, \quad \sigma = \sqrt{t_r^2 + t_z^2} \quad (3)$$

where the functions  $c_z$  and  $c_r$  can be considered as the effective bond compliances in the axial and radial directions,  $\phi_{1,2}$  are dimensionless functions used for the description of non-uniform behavior of compliances over the bridged zone,  $H$  is the linear scale being proportional to the thickness of the bonding zone,  $E_b$  is the effective elasticity modulus of the bond,  $\sigma$  is the modulus of the tractions vector of bonds. Note that the second formula in (3) presents the compliances of linear-elastic bonds if the functions  $\phi_i$  depend only on the coordinate  $s$ . In particular, the compliances have a uniform distribution over the crack bridged zone if the functions  $\phi_i$  are constants.

The SIF for interfacial cracks can be defined on the basis of asymptotic relations for the crack opening and the stresses in the polar coordinates system  $\rho, \theta$  with the origin at the crack edge (see Fig.1).

The crack opening is the difference between displacements of the upper ( $\theta = \pi$ ) and lower ( $\theta = -\pi$ ) faces of the crack and according to [12] for an interfacial crack between two semi-infinite plates with axial symmetry it can be written as

$$u_z(\rho) + i u_r(\rho) = \frac{\left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) (K_I + i K_{II})}{2(1 + 2i\beta) \cosh(\pi\beta)} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left( \frac{\rho}{D} \right)^{i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln \alpha}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2} \quad (4)$$

where  $K_I$  and  $K_{II}$  are the SIF for an interfacial crack,  $u_z(\rho)$  and  $u_r(\rho)$  are the components of the crack opening,  $\alpha$  and  $\beta$  are the bielastic parameters,  $\kappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ ,  $\nu_{1,2}$  and  $\mu_{1,2}$  are Poisson's ratios and the shear modulus of jointed materials 1 and 2,  $D$  is an arbitrary length to normalize the distance  $\rho$  in (4). Relation (4) for the crack opening has an oscillatory behavior as  $\rho \rightarrow 0$  and this means that the crack faces near its front are overlapped. If the tension loading is predominating, the size of this zone is very small. Within this model framework we assume that the lengths of the overlapping regions are much less than the crack bridged zone width.

The asymptotic of the stress field in a neighborhood in front of the interfacial crack edge ( $\theta = 0$ ) is [12]

$$\sigma_{zz}(\rho) + i \sigma_{rz}(\rho) = \frac{K_I + i K_{II}}{\sqrt{2\pi\rho}} \left( \frac{\rho}{D} \right)^{i\beta} \quad (5)$$

which also has an oscillatory behavior in a small zone in front of the crack edge.

The SIF modulus is defined as

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (6)$$

and it can be found from relation (4) for the crack opening behind the crack edge ( $K_u$ ) and also from relation (5) for the stresses ahead of the crack edge ( $K_\sigma$ )

$$K_u(\rho) = \frac{2 \cosh(\pi\beta) \sqrt{1 + 4\beta^2}}{A} \sqrt{\frac{2\pi(u_r^2 + u_z^2)}{\rho}}, \quad K_\sigma(\rho) = \sqrt{2\pi\rho} \sqrt{\sigma_{zz}^2 + \sigma_{rz}^2} \quad (7)$$

In formulas (7) the values  $u_r, u_z$  and  $\sigma_{rz}, \sigma_{zz}$  are defined at the position  $s$  behind or ahead of the crack edge, respectively. These formulas are used for computation of the SIF module from numerical results.

The crack opening along crack bridged layer and the stresses ahead of crack edge, which are used in formulas (7), can be determined semi-analytically or numerically in the case of an infinite region with bridged crack between two different materials under a uniform external loading. Detailed results

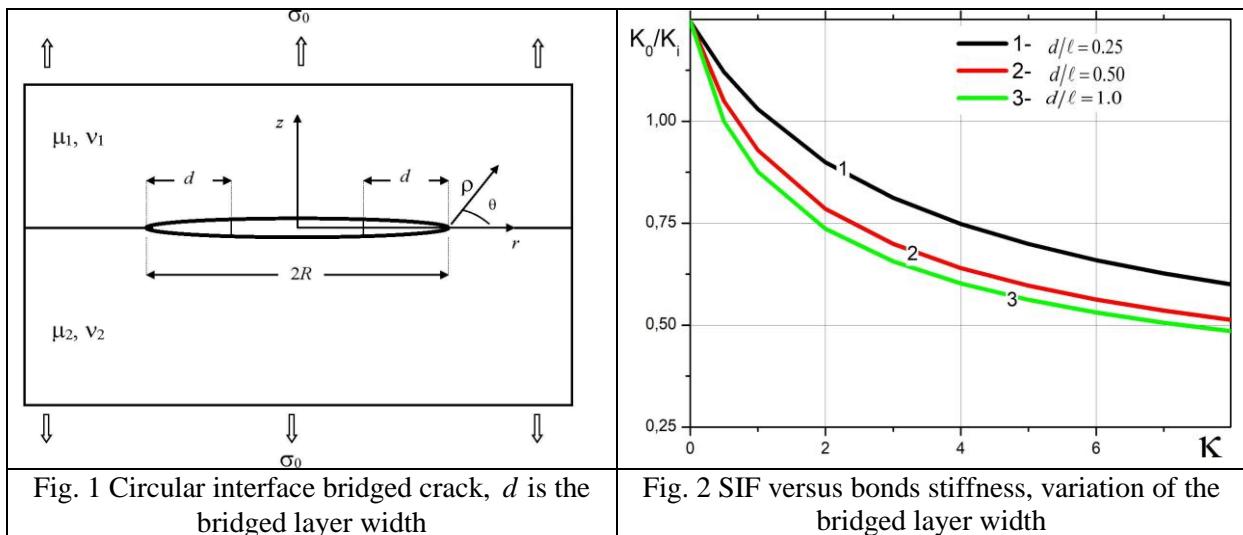
for these problems are presented in [4-5]. For structures of finite size with bridged cracks and spring-like bonds deformation law which is similar to (3) the crack opening along crack bridged zones, bonds stresses and stresses ahead of crack edge can only be determined numerically.

**3. Boundary element formulation for bridged interfacial crack.** The modeling of bridged interfacial cracks is based on the multi-domain BEM formulation, [13]. Within this approach, direct boundary integral equations (BIE) for elasticity problems are used for each homogeneous sub-region of the structure. The supplementary boundary conditions at the interfacial boundaries and at the bridged zones of cracks are introduced and used to eliminate additional variables on joint boundaries of sub-regions.

For axisymmetric elasticity problems without body forces the direct BIE for any sub-region of the structure is given by [14]:

$$c_{ij}(p)u_i(p) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(q, p)r(q)t_i(q) - F_{ij}(q, p)r(q)u_i(q)]dS(q), \quad i, j = r, z \quad (8)$$

where  $\Gamma$  is the line which when rotated about axis symmetry  $z$ , generated the axisymmetric surface  $S$  ( $dS = 2\pi d\Gamma$ ), the kernel functions  $G_{ij}(q, p)$ ,  $F_{ij}(q, p)$  are displacements and tractions in the direction  $j$  at field point  $q$ , due to unit ring load in the  $i$  direction, applied at source point  $p$ . The expressions of the kernel function  $G_{ij}(q, p)$  can be derived by integration of the fundamental solution for three-dimensional case over an axisymmetric ring for radial and axial loads and the expressions for kernel function  $F_{ij}(q, p)$  are calculated by differentiation respect to  $r$  and  $z$  according to stress-displacement relations in cylindrical polar coordinates. The coefficient  $c_{ij}(p)$  in Eq. (8) depends on local geometry of the boundary at a point  $p$ , for a smooth boundary it is  $c_{ij}(p) = 0.5\delta_{ij}$ , [14]. If the point  $p$  lies on  $z$ -axis then must to consider limiting relations of the axisymmetric kernels.



The displacements continuity and the tractions equilibrium supplementary conditions at the interfacial boundaries without cracks are the following

$$u_i^k(p) = u_i^f(p), \quad t_i^k(p) = -t_i^f(p) \quad (9)$$

where  $k$  and  $f$  are joint sub-regions numbers,  $u_i(p)$  and  $t_i(p)$  are displacements and tractions components at the boundary point  $p$ .

The relationships between bond tractions and displacements difference of the upper and lower crack surfaces (the crack opening) at the crack bridged zone can be written in the following generalized form (the bonds deformation law)

$$t_{z,r}(p) = \kappa_{z,r}(p, \sigma) u_{z,r}(p), \quad \kappa_{z,r}(p, \sigma) = \frac{1}{c_{z,r}(p, \sigma)} = \gamma_{1,2}(p, \sigma) \frac{E_b}{H} \quad (10)$$

where  $t_{z,r}(p)$  and  $u_{z,r}(p)$  are the components of tractions vector and crack opening (see (2)) in the local coordinate system connected with the axial  $z$  and radial  $r$  directions at the point  $p$  and belonging to the sub-region with number  $M$ , where  $M = \min(f, k)$ ,  $c_{z,r}(p, \sigma)$  are the compliance and  $\kappa_{z,r}(p, \sigma)$  are the stiffness of bonds depending on the distance from the crack edge,  $\sigma$  is the tractions vector modulus at the current point  $p$ , and  $\gamma_{1,2} = (\phi_{1,2})^{-1}$ , see (3).

The boundaries of all sub-regions of the structure are subdivided into quadratic isoparametric elements for numerical solution of the BIE (8). For the interfacial crack displacements and stresses asymptotic modeling the special crack tip elements are used. For any point at the interface of joint sub-regions or at the interfacial crack bridged zone  $4m$  nodal unknown functions ( $m=2$  for axisymmetric problem) need to be defined. The multi-domain BIE formulation provides  $2m$  equations, and the auxiliary equations are generated for the remaining  $2m$  unknown functions ( $m$  from the continuity condition and  $m$  from the equilibrium condition across the jointed parts of subregions for cases without bridged zones, see (9), or  $m$  from the equilibrium conditions and  $m$  from the bond deformation law (10) for bridged zones of interfacial cracks). The displacements and tractions are regarded as nodal unknowns on jointed parts of sub-regions whereas the displacements of the upper and lower crack surfaces are regarded as nodal unknowns on interfacial crack bridged zones and the additional tractions are eliminated by substitution of the bond deformation law (10) into BIE (8).

**4. Numerical results.** The algorithm of numerical solution BIE system (8) for structures with bridged interfacial cracks and the SIFs computation were implemented as the computer code for axisymmetric problems of elasticity. The quarter-point boundary elements with tractions modification [15] were used. The SIF module and  $K_{I,II}$  are calculated according to the following relations [1]

$$K_0 = \sqrt{2\pi L} \sqrt{\bar{t}_z^2 + \bar{t}_r^2}, \quad K_I = \bar{t}_z \sqrt{2\pi L}, \quad K_{II} = \bar{t}_r \sqrt{2\pi L}$$

where  $L$  is the length of boundary element jointed to the crack edge,  $\bar{t}_{z,r}$  are the tractions computed at the crack edge.

To verify the described BEM algorithm the problem for circular interface crack (radius  $R$ ) between two half-space under internal pressure  $\sigma_0$  was considered. The computation was performed for the finite cylindrical region divided into two subregions ( $R_{ext}/R=10$ ),  $R_{ext}$  is the external radius of the region. In Table 1 numerical results are shown with comparison to the exact solution [16]. The numerical results have an error lower than 3%.

Table 1. Nondimensional SIF for the circular interface crack,  $K_i = 2\sigma_0 \sqrt{R/\pi}$

$G_1 / G_2$	$K_I / K_i$		$K_{II} / K_i$	
	[11]	BEM	[11]	BEM
1	1.0000	1.0200	0.0000	0.0000
4	0.9979	1.0015	0.1315	0.1367
10	0.9960	0.9849	0.1809	0.1855
25	0.9948	0.9751	0.2052	0.2085
100	0.9941	0.9693	0.2186	0.2209

Dependencies of the SIF modulus vs relative bonds stiffness were computed for finite cylindrical region divided into two subregions ( $R_{ext}/R=5$ ) under external tension. A circular interface crack is placed at the materials interface. Results for different width of the bridged layer  $d$  and for material parameters  $\mu_2/\mu_1=5, \nu_1=\nu_2=0.3$  are shown in Fig.2. Bonds stiffness in the radial direction was assign zero ( $\kappa_r=0$ ). Relative bonds stiffness in the axial direction is defined for  $E_b=E_1$  as, (see (10))

$$\kappa = \kappa_z(p, \sigma) \left( \frac{E_1}{\ell} \right)^{-1} = \frac{\ell}{H}$$

**5. Closing.** The computation of the bridged stresses and the SIF module analysis is the first step in bridged cracks growth modeling. Analysis of bridged cracks growth can be implemented in the frame of the nonlocal criterion of bridged cracks growth [4] which can be easily incorporated into the developed boundary element code. The bridged crack model can be used also to model cracks self-healing assuming that the self-healing process is the result of the crack bridged zone formation.

### Acknowledgements

The work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 19-19-00616).

### REFERENCE

- 1 Weitsman Y. Nonlinear analysis of crazes. Trans. ASME J. Appl. Mech. vol. 53, 97-102, 1986.
- 2 Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed springs, J. Mech. Phys. Solids vol. 35, n.4, 383-405, 1987
- 3 Movchan N.V., Willis J.R. Penny-shaped crack bridged by fibres, Quart. Appl. Math., vol. 56. 327-340.1998
- 4 Goldstein R.V. and M.N. Perelmutter Modeling of bonding at an interface crack, Int. J. Fract. 99(1-2):53-79, (1999)
- 5 Perelmutter M.N. An interface crack with non-linear bonds in a bridged zone, J. Appl. Math. Mech. (PMM), vol. 75, 106-118, 2011.
- 6 Yuuki R., Cho S.B. Efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials, Eng. Fract. Mech., vol. 34, 179-188, 1989.
- 7 Raveendra S.T., Banerjee P.K. Computation of stress intensity factors for interfacial cracks, Eng. Fract. Mech., vol. 40, 89-103, 1991.
- 8 Hadjesfandiari A.R., Dargush G.F. Analysis of bi-material interface cracks with complex weighting functions and non-standard quadrature, Int. J. Solids Struct., vol. 48, 1499-1512, 2011.
- 9 Liu Y.F., Masuda C., Yuuki R. An efficient BEM to calculate weight functions and its application to bridging analysis in an orthotropic medium, Comput. Mech., vol. 22, 418-424, 1998.
- 10 Selvadurai A.P.S. Crack-bridging in a unidirectionally fibre-reinforced plate, J. Eng. Math., vol. 6, 5-14, 2010.
- 11 Perelmutter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks, Comput. Mech., vol. 51, 523-534, 2013.
- 12 Rice J.R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, Trans ASME J. Appl. Mech., vol.55, 98-103, 1988.
- 13 Balanford G., Ingraffea A., Liggett J. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, Int. J. for Numer. Meth. Eng., vol. 17, 387-404, 1981.
- 14 Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, 1984. 464 p.
- 15 Martinez J., Dominguez J. On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations, Int J Numer. Meth. Eng., 20, 1941-1950, 1984.
16. Stress Intensity Factors Handbook. Vol. 1. Ed. Y. Murakami. Pergamon Press, Oxford, 1987. 640 p.

### Information about authors:

**Perelmutter M.N.** - Dr. Phys-Math. Sci., Leading researcher, A. Y. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, prospekt Vernadskoho 101-1, 119526, Moscow, Russia.

**E-mail:** perelm@ipmnet.ru

# Graphene Flakes as a Storage Cavity for Nickel Nanoparticles

Safina L.R., Baimova J.A., Krylova K.A

The possibility of storing nickel nanoparticles in pores of crumpled graphene flake is studied using the molecular dynamics simulation. A single element of crumpled graphene - a rolled flake filled with nickel nanoparticles of different sizes is investigated. The behavior of the hybrid structure is studied at various temperatures. It is shown that a graphene flake easily covers the nanoparticle, but the interaction dynamics strongly depends on the nanocluster size. Small nanoclusters are easily bent by rigid graphene flakes, while the largest ones retain their shape. It is expected that such structures, consisting of Ni nanoclusters and graphene flakes, can be further used to obtain a composite material with improved mechanical properties.

## 1. Introduction

Graphene is capable of enhancing the performance, functionality as well as durability of many applications. The one-atom thin structure can serve as the platform for other materials especially since the graphene layer can be bent or crumpled. Extensive studies have been carried out in recent decades to investigate the crumpling behavior of thin sheets like graphene, by both theoretical and experimental methods [1-4]. It was shown that crumpled structures can have excellent compression and aggregation-resistant properties [5-9]. Crumpled graphene can be used for the production of new supercapacitors [10]. However, one of their new and important applications is that of a natural container for other atoms.

In this work, in order to investigate the possibility of storing nickel nanoparticles in the pores of crumpled graphene, a single element of the carbon structure - a rolled graphene flake filled with nickel nanoparticles of different sizes is considered. The behavior of the hybrid structure is studied by atomistic simulation at different temperatures. For the carbon–nickel system, room temperature (300 K) and temperature close to the melting point of Ni (1000 K) are chosen. The dynamics of the structure is studied during exposure for 20 ps.

## 2. Simulation details

To study the interaction between graphene flake (GF) and atomic nanocluster, an initial structure composed of the GF of one size ( $N_c = 252$ ) and atomic clusters of different sizes ( $N = 21; 38; 47; 66; 78$ ) is considered. One graphene flake is filled with the above given different sizes of nickel nanoparticles. The maximum size of the nanocluster is chosen so to almost completely fill the cavity of the graphene flake.

GF with the nanocluster is exposed at 300 K and 1000 K for 20 ps to study the dynamics of nanocluster inside. Previously [11], it was shown that the melting temperature of the Ni nanocluster is about 1300 K. Thus, in the present work, the highest considered temperature is 1000 K. At this temperature, Ni nanocluster is close to melting but not melted yet, even for the smallest nanocluster, which consisted of 21 atoms. Initially, Ni atoms were packed into the face-centered cubic lattice.

To describe the interatomic interaction between Ni–Ni and Ni–C, Morse interatomic potential is used with the parameters  $D_e = 0.4205$  eV,  $R_e = 2.78$  Å and  $b = 1.4199$  1/Å for Ni–Ni [12]; and  $D_e = 0.433$  eV,  $R_e = 2.316$  Å,  $b = 3.244$  1/Å for Ni–C. The parameters of the Morse potential for describing the interaction of nickel and carbon atoms were recently proposed using *ab-initio* simulation [13,14]. The Adaptive Intermolecular Reactive Empirical Bond Order potential (AIREBO) is used to describe the interatomic interactions between carbon atoms.

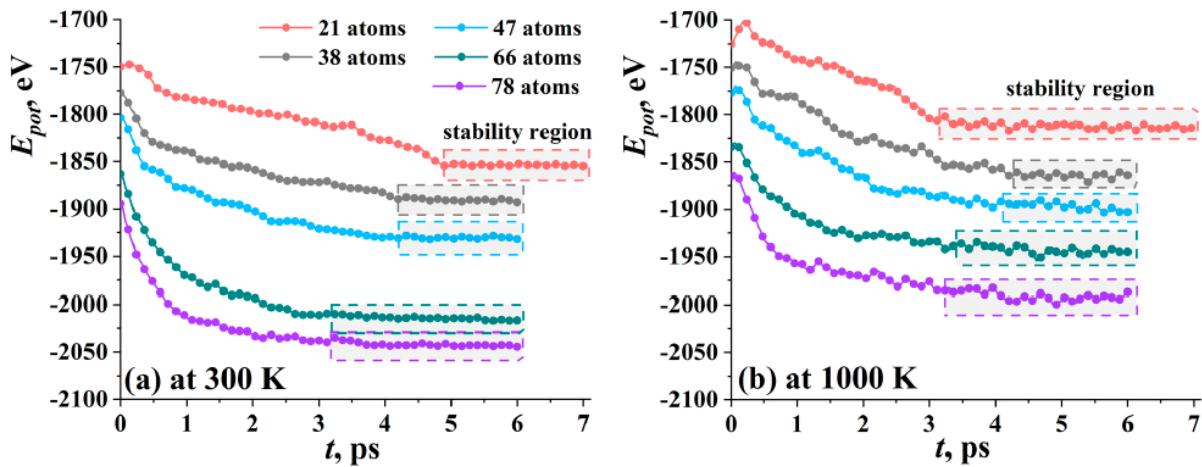
The simulation is conducted using a Large-scale Atomic/molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS). Equations of motion for the atoms were integrated numerically using the fourth-order Verlet method with the time step of 0.2 fs. The Nose–Hoover thermostat is used to control the system temperature. The periodic boundary conditions are applied in all directions, however, the simulation box is much bigger than the size of GF filled with nanocluster.

## 3. Results and discussion

In Figure 1, potential energy as the function of exposure time at 300 K (a) and 1000 K (b) for five types of nanoclusters is shown. It is found that the total potential energy of the system is saturated to a practically constant value at the end of the equilibration process, indicating that the system reached equilibrium and a stable state. All the changes in the energy curves correspond to some structural changes. The longest time of stabilization at 300 K is found for  $\text{Ni}_{21}$  (5 ps). Curves for nanoclusters of

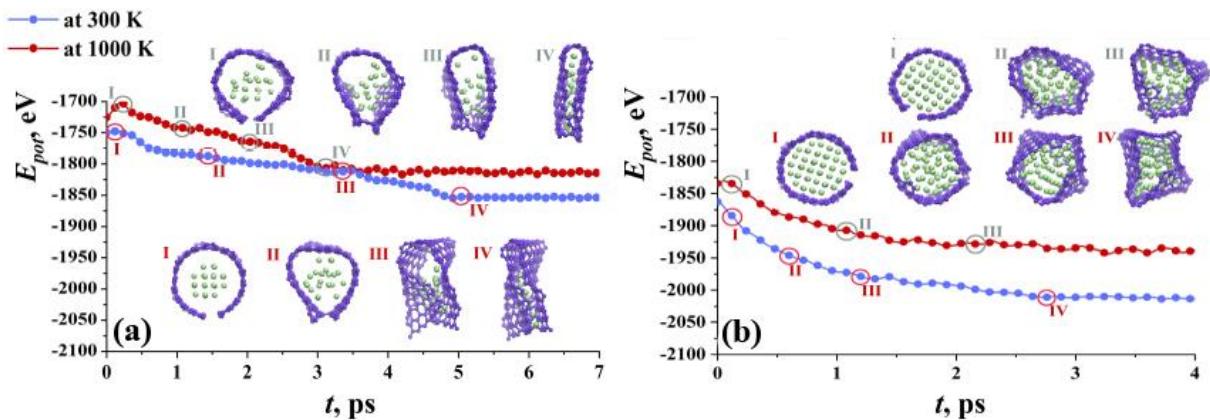
close diameter are almost the same. Graphene flake with  $\text{Ni}_{38}$  and  $\text{Ni}_{47}$  reach the equilibrium state at about 4 ps of exposure, while the GF with  $\text{Ni}_{66}$  and  $\text{Ni}_{78}$  reach equilibrium state at 3.2 ps. The bigger the diameter of the nanocluster, the less the equilibration time. This can be explained by the mutual arrangement of the nanocluster and GF. For a small nanocluster, the distance  $a$  is two times higher than for the biggest one which means that the time required to attach the nanocluster by the graphene flake is longer. For nanocluster  $\text{Ni}_{78}$ , 3 ps is enough for GF to fully cover the nanocluster, while for  $\text{Ni}_{21}$ , not only coverage took place, but also the further crumpling of the flake with the changing of the round shape of nanocluster.

At higher temperature (1000 K), again a strong correlation between equilibration time and the size of the nanocluster was found. For GF with  $\text{Ni}_{21}$  nanocluster, the transformation was fast since the temperature was close to the melting point and the nanocluster can be easily destroyed. Temperature fluctuations facilitate the crumpling process and the appearance of new bonds between the edges of GF. For bigger nanoclusters, the temperature slightly affects the time of equilibration. Again, the same values of equilibration time were obtained for  $\text{Ni}_{38}$  and  $\text{Ni}_{47}$  (about 4 ps) and for  $\text{Ni}_{66}$  and  $\text{Ni}_{78}$  (about 3.2 ps). However, temperature decreases the total potential energy of the system.



**Fig. 2.** Structure of crumpled graphene containing nickel nanoparticles in pores during exposure.

As an example, in Figure 2, the potential energy is shown as a function of exposure time for the  $\text{Ni}_{21}$  (a) and  $\text{Ni}_{66}$  (b) nanoclusters for exposure at 300 K (blue line) and 1000 K (red line). Corresponding snapshots of the structure of a GF filled with a nanocluster at different time of exposure are also shown. It is found that the total potential energy of the system is saturated to a practically constant value at the end of the equilibration process, indicating the system has reached equilibrium and a stable state. All the changes in the energy curves correspond to some structural changes. Bigger the diameter of the nanocluster, the less the equilibration time. This can be explained by the mutual arrangement of the nanocluster and GF. For a small nanocluster, distance between nanoparticle ad the side of the flake is two times higher than for the biggest one which means that time required to attach the nanocluster by the graphene flake is longer. At high temperature (1000 K), again a strong correlation between equilibration time and size of the nanocluster is found. For GF with  $\text{Ni}_{21}$  nanocluster, the transformation is fast since the temperature is close to the melting point and the nanocluster can be easily destroyed. Temperature fluctuations facilitate the crumpling process and the appearance of new bonds between the edges of GF. For structure with  $\text{Ni}_{66}$ , the temperature slightly affects the time of equilibration. However, temperature decreases the total potential energy of the system.



**Fig. 2.** Potential energy as the function of exposure time for Ni<sub>21</sub> (a) and Ni<sub>66</sub> (b). Corresponding snapshots of the structure of GF filled with nanocluster during exposure at 300 K (bottom line of snapshots) and 1000 K (upper line of snapshots). Carbon atoms are shown by violet and nickel atoms - by green.

### Conclusions

Molecular dynamics simulation is used to study the dynamics of graphene flakes filled with the metal nanoclusters. The obtained results can shed the light on understanding the possibility of using crumpled graphene as a storage media from the point of single flake behavior. It was found that cavities of crumpled graphene (the structure consists of crumpled graphene flakes) can be used as containers for metal nanoclusters. A graphene flake can easily cover nanocluster, however, the dynamics of the interaction strongly depend on the nanocluster size. Small nanoclusters can be easily bent by rigid graphene flake, while the biggest conserve the shape. Such a structure, composed of Ni nanoclusters and graphene flakes, can be further used to obtain composite material with improved mechanical properties.

### REFERENCE

1. Meyer J.C., Geim A.K., Katsnelson M.I., Novoselov K.S., Booth T.J., Roth S. The structure of suspended graphene sheets. *Nature*, vol. 446. 2007. p.60-63.
2. Tallinen T., Åström J.A., Timonen J. The effect of plasticity in crumpling of thin sheets. *Nat. Mater.*, vol. 8. 2008. p. 25-29.
3. Matan K., Williams R.B., Witten T.A., Nagel S.R. Crumpling a Thin Sheet. *Phys. Rev. Lett.*, 2002. p. 88.
4. Zhang L., Zhang F., Yang X., Long G., Wu Y., Zhang T., Leng K., Huang Y., Ma Y., Yu A., et al. Porous 3D graphene-based bulk materials with exceptional high surface area and excellent conductivity for supercapacitors. *Sci. Rep.*, 2013. p. 3.
5. Baimova Y.A., Murzaev R.T., Dmitriev S.V. Mechanical properties of bulk carbon nanomaterials. *Phys. Solid State*, vol. 56. 2014. p. 2010-2016.
6. Niu L., Xie J., Chen P., Li G., Zhang X. Quasi-static compression properties of graphene aerogel. *Diam. Relat. Mater.*, vol. 111. 2021. p. 108225.
7. Luo J., Jang H.D., Sun T., Xiao L., He Z., Katsoulidis A.P., Kanatzidis M.G., Gibson J.M., Huang J. Compression and Aggregation-Resistant Particles of Crumpled Soft Sheets. *ACS Nano*, vol. 5. 2011. p.8943-8949.
8. Baimova J.A., Liu B., Dmitriev S.V., Zhou K. Mechanical properties of crumpled graphene under hydrostatic and uniaxial compression. *J. Phys. D Appl. Phys.*, 2015. 48, 095302.
9. Khan, M.B.; Wang, C.; Wang, S.; Fang, D.; Chen, S. The mechanical property and microscopic deformation mechanism of nanoparticle-contained graphene foam materials under uniaxial compression. *Nanotechnology*, 2020. 32, 115701.
10. Liu S., Wang A., Li Q., Wu J., Chiou K., Huang J., Luo J. Crumpled Graphene Balls Stabilized Dendrite-free Lithium Metal Anodes. *Joule*, vol. 2. 2018. p.184-193.

11. Safna L. R., Baimova J.A., Mulyukov R. R. Nickel nanoparticles inside carbon nanostructures: atomistic simulation. Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes, vol. 5. 2019. p. 1.
12. Girifalco L. A., Weizer V. G. Application of the morse potential function to cubic metals. Physical Review, vol. 114. N 3. 1959. p. 687.
13. Katin K. P., Prudkovskiy V. S., Maslov M. M. Molecular dynamics simulation of nickel-coated graphene bending. Micro & Nano Letters, vol. 13. N 2. 2018. p. 160.
14. Galashev A. Y., Katin K. P., Maslov M. M. Morse parameters for the interaction of metals with graphene and silicone. Physics Letters A, vol. 383. N 2-3. 2019. p. 252.

#### **Information about authors**

**Julia A. Baimova** – Dr. Sci. Prof. RAS, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS  
**E-mail:** julia.a.baimova@gmail.com

**Liliya R. Safina** – student, Ufa State Petroleum Technological University.  
saflia@mail.ru

**Karina A. Krylova** – Ph.D.. Reseacheer, Institute for Metals Superplasticity Problems of RAS  
**E-mail:** bukreevkarina@gmail.com

# Analytical prediction of low-velocity impact response of titanium/composite laminates

Sharma A. P., Velmurugan R.

Titanium-based fiber metal laminates (FMLs) are high-temperature materials, mainly used in aerospace structures, which often experience impact damages. Four FML layups with unidirectional glass/epoxy layers and titanium alloy Ti-6Al-4V sheets of different thicknesses are fabricated, exhibiting dispersion of metallic layers across the thickness of FMLs with the same total metal layer thickness. The low-velocity impact behaviour of thin circular clamped FML plates before the first failure of glass/epoxy layers for a hemispherical impactor striking at the center is derived analytically using a mass-spring arrangement. Delamination as internal damage is considered. The deflection to delamination, maximum deflection, maximum load, and total impact time of the plates are computed. Moreover, the estimated time history of impact load of FMLs is in good comparison with experiments.

## 1. Introduction

Hybrid composite materials comprising layers of metal bonded to layers of the fiber-reinforced composite are fiber metal laminates (FMLs). This new family of materials includes aramid fiber reinforced aluminium laminates (ARALL), carbon fiber reinforced aluminium laminates (CARALL), glass fiber reinforced aluminium laminates (GLARE). High bearing strength, resistance to impact, and easy reparability are exhibited by metals, which when combining with composites can considerably increase laminates' mechanical properties [1]. However, a hybrid titanium composite laminate (HTCL) exhibiting capability to operate at long lives ( $> 10,000$  h), fatigue resistance being superior, and tolerance to damage at temperatures up to  $350^{\circ}\text{F}$  is considered explicitly for the development of future high-speed aircraft [2]. This is because titanium exhibits higher resistance to creep than aluminium alloy [2-4]. In this case, well-known FMLs based on aluminium such as ARALL, GLARE, and CARALL have limitations with in-service temperature and tolerance to damage. Henceforth, the development of HTCLs is being executed to meet such obligations [5, 6].

Vlot [7] has reported that damage to a smaller extent is exhibited by GLARE 3 than carbon/PEEK having the same thickness or areal density. Vlot [8] has reported that the force-time and displacement-time functions of GLARE calculated by a nonlinear elastic impact model well follow the experiments. Abatan et al. [9] have investigated that the analytical solution for impact on hybrid laminates agrees with finite element analysis. The results predicted by classical plate theory are relatively accurate to shear deformation theory. Tsamasphyros and Bikakis [10] have shown that for a GLARE 2-2/1-0.3 plate, the predicted static load-indentation curve and first failure matches well with experiments. Morinière et al. [11] have reported that the major mechanisms of impact in FMLs may be revealed by integrating the classical laminate theory into an energy-balance model, supporting the purposes of design. Sharma et al. [12] have investigated that the ballistic limit velocity of titanium-based FMLs predicted by the wave propagation model is within 12 % of experiments.

It is noted from the above studies that the low-velocity impact (LVI) resistance of titanium-based FMLs has not been predicted using analytical modelling, particularly before the first failure of glass/epoxy layers. The thickness of total metal layers and overall FMLs exhibiting arrangement of layups viz. 2/1, 3/2, 4/3, etc are not maintained the same. The present study focuses on this direction. To execute this, four different FML layups are fabricated using Ti-6Al-4V sheets of dissimilar thicknesses and glass fiber reinforced epoxy (GFRP) layers. The predicted force history and energy absorption of FMLs will be compared with experiments.

## 2. Problem formulation

A thin clamped circular FML plate having radius  $\alpha$  and thickness  $h$  is considered. A hemispherical impactor tip of radius  $R$ , mass  $M_o$  and kinetic energy being initial  $E_k$  is used to deform the plate centrally. High aspect ratio  $\alpha/h$  is presumed to have small shear deformation and local indentation. A polar coordinate system is applied at the plate origin. The boundary conditions

fulfilled by the plate lateral displacement  $w$  are  $w=0, \frac{\partial w}{\partial r}=0 (r=\alpha)$ . The principal energy absorption mechanisms before glass/epoxy layers fracture are deformation and delamination, implying,  $E_{abstot} = E_{def} + E_{del}$  where  $E_{abstot}, E_{def}, E_{del}$  are total energy absorption, deformation energy, and delamination energy of specimen, respectively.

### 3. Theoretical formulation

The LVI is simulated in three stages using a spring-mass model. During the initial stage, the plate is started to deform by the impactor, until composite layers delamination. The corresponding differential equation of motion is

$$(M_0 + m_e) \ddot{w}_0 + P_0 + (K_b + K_{m1}) w_0 + K_{m2} w_0^3 = 0 \quad (3.1)$$

where the load during loading is

$$P_L(w_0) = P_0 + (K_b + K_{m1}) w_0 + K_{m2} w_0^3 \quad (3.2)$$

$m_e$  is the effective mass of the plate reported in Ref. [13]. The coefficients of Eq. (3.1) are [10]

$$P_0 = 4M_{xy}, \quad K_b = \left[ \begin{array}{l} (3.318 + 2.906 \ln \alpha)(D_{11} + D_{22}) + (-8.124 + 1.938 \ln \alpha)D_{12} \\ + (14.758 + 3.876 \ln \alpha)D_{66} \end{array} \right] \frac{1}{\alpha^2}$$

$$K_{m1} = 0.576(N_x + N_y) + 0.734N_{xy}, \quad K_{m2} = [0.62(A_{11} + A_{22}) + 0.412(A_{12} + 2A_{66})] \frac{1}{\alpha^2}$$

where extension and bending stiffness of the composite laminate are denoted by  $A_{ij}$  and  $D_{ij}$ . Bending and membrane stiffness of the laminate are designated by  $K_b$  and  $K_m$ . In-plane forces and moments are quantified in Ref. [12]. The initial conditions are

$$w_0(0) = 0 \quad \dot{w}_0(0) = v \quad (3.3)$$

The second impact stage initiates following deflection to composite layers delamination  $w_0^d$  and completes at maximum plate deformation  $w_0^{\max}$ . The differential equation given by Eq. (3.1) is also effective. The initial conditions are

$$w_0(0) = w_0^d \quad \dot{w}_0(0) = w_{02} \quad (3.4)$$

where  $w_{02}$  is the velocity beneath the impactor following delamination. The third impact stage initiates from the  $w_0^{\max}$  and completes when the falling load comes to zero. The corresponding differential equation of motion is

$$(M_0 + m_e) \ddot{w}_0 + P_0 + (K_b + K_{m1})(2w_0 - w_0^{\max}) + K_{m2} w_0^3 = 0 \quad (3.5)$$

where load during unloading and initial conditions are

$$P_U(w_0) = P_0 + (K_b + K_{m1})(2w_0 - w_0^{\max}) + K_{m2} w_0^3 \quad (3.6)$$

$$w_0(0) = w_0^{\max} \quad \dot{w}_0(0) = 0 \quad (3.7)$$

The differential Eqs. (3.1) and (3.5) and the initial conditions by Eqs. (3.3), (3.4) and (3.7) frame three problems having distinct initial value, demonstrating physical impact event. Initially,  $w_0^d, w_{02}$ , and  $w_0^{\max}$ , to be determined, following solving of differential equations of motion. Successively, the  $(P, t)$  curve can be calculated.

### 4. Experimental method

Titanium alloy Ti-6Al-4V sheets and unidirectional (UD) E-GFRP layers are used with titanium-based FML. Greater stiffness, strength, corrosion, and creep resistance than aluminium alloys at elevated temperatures are displayed by the titanium alloy (Ti). Four dissimilar titanium-based FML

layups displaying the identical overall metal layer thickness are manufactured by hand layup technique and compression molding. They include [T6/0/90/90/0/T6], [T3/0/90/T6/90/0/T3], [T4/0/90/T4/90/0/T4] and [T3/0/T3/90/90/T3/0/T3], denoted by 2/1-0.6, 3/2-0.3(O), 3/2-0.4 and 4/3-0.3, with thicknesses of 3.1 mm, 3.37 mm, 3.3 mm and 3.41 mm, respectively. In this case, T3, T4, and T6 denote 0.3 mm, 0.4 mm, and 0.6 mm thick titanium layers, and 0 and 90 indicate UDGFRP layers with fibers positioning along 0° and 90° directions. The classification particulars of FML layups are designated in Ref. [14]. Specimens of 100 x 100 mm<sup>2</sup> size are cut from the manufactured plates of 350 x 350 mm<sup>2</sup> size using a band saw to execute LVI tests. The fiber volume fraction of composite layers is obtained at around 50 %. A drop tower impact system is employed to perform impact tests. The signal is measured by a load cell placed nearly the impactor holder's head. An ASTM standard D5628 (FA) is considered for specimen testing [15]. A specimen holding fixture with a circular opening of 70 mm diameter is utilized. The diameter and entire mass of a hemispherical steel impactor are 16 mm and 8.132 kg. FMLs are subjected to LVI tests with energy levels of 30 J, 45 J, and 60 J and corresponding velocities of 2.7 m/s, 3.3 m/s, and 3.8 m/s. During the experiment, the impact force-time history and impactor velocity ahead of impact are recorded.

## 5. Results

### 5.1 Material properties of FML constituents

The equations of motion before glass/epoxy layers failure as stated above are resolved by an iterative scheme. The projectile initial velocity is first supposed with the projectile and panel deflection and velocity calculations. The static tensile properties of FML constituents are reported in Tables 1 and 2 of Ref. [12]. The fracture and interlaminar properties of glass/epoxy can be found in Ref. [12].

### 5.2 Transient response of Ti/GFRP plate

Fig. 1 illustrates the load-time curves of FMLs 2/1-0.6, 3/2-0.3(O), 3/2-0.4, and 4/3-0.3 obtained from predictions with both M & B and M only. In this figure, the load during the loading and unloading stages is calculated by Eqs. (3.2) and (3.6), respectively. Time is obtained from velocity and displacement using numerical integration. Moreover, the corresponding load-time curves of FMLs measured from experiments are shown. On observing Fig. 1, it is evident that the FML impact load is at first zero (as the deformation of the plate has not happened initially) and starts increasing (as the plate is deformed steadily by the impactor), till it reaches its highest value. From this location, the force starts reducing (as the unloading stage initiates) and remains to drop, till it reaches zero and the impact event is concluded. The curves obtained from experiments and theoretical predictions are found to be in good agreement, as indicated in Fig. 1. For the above-mentioned FMLs sequence to follow, the maximum load obtained from experiments and predictions with both M & B and M only is 11.3 kN, 10.4 kN, 10.7 kN, 10.2 kN, and 11.1 kN, 11.0 kN, 11.4 kN, 10.9 kN, and 11.4 kN, 10.5 kN, 10.8 kN, 10.3 kN, respectively. This suggests that the predictions of maximum load are to be within 2 %, 7 %, 7 %, 8 % and 1 %, 1 %, 1 %, 2 % of experiments for FMLs with both M & B and M only, individually. Further, time to maximum load acquired from experimental data and theoretical estimates of FMLs with both M & B and M only is 2.8 ms, 2.8 ms, 2.9 ms, 3.1 ms, and 2.3 ms, 2.2 ms, 2.3 ms, 2.1 ms, and 2.6 ms, 2.4 ms, 2.5 ms, 2.4 ms, respectively. Thus, the difference between experiments and predictions of time to maximum load is 23 %, 26 %, 28 %, 44 % and 8 %, 18 %, 18 %, 29 % for the same FMLs order with both M & B and M only, separately. Furthermore, the total impact duration obtained from experimental results and analytical calculations of FMLs with both M & B and M only is 5.7 ms, 5.4 ms, 5.5 ms, 5.6 ms, and 4.2 ms, 4.0 ms, 4.0 ms, 3.8 ms, and 4.5 ms, 4.3 ms, 4.4 ms, 4.3 ms, correspondingly. This indicates that the variation between experiments and calculations stands at 35 %, 34 %, 37 %, 47 % and 25 %, 25 %, 26 %, 31 % for FMLs with both M & B and M only, consistently. Overall, this infers that the load-time curves measured from experiments are to be relatively good with predictions for FMLs with M only than FMLs with both M & B in Fig. 1. This suggests that the membrane strain energy plays a significant part in load-time calculation than

bending strain energy. FML 2/1-0.6 shows the higher maximum load, FML 4/3-0.3 the lower load and both FMLs 3/2 transitional values. The time to delamination, time to maximum load, and contact duration seem to be lower for FML 2/1-0.6 and higher and comparable for the other three FMLs.

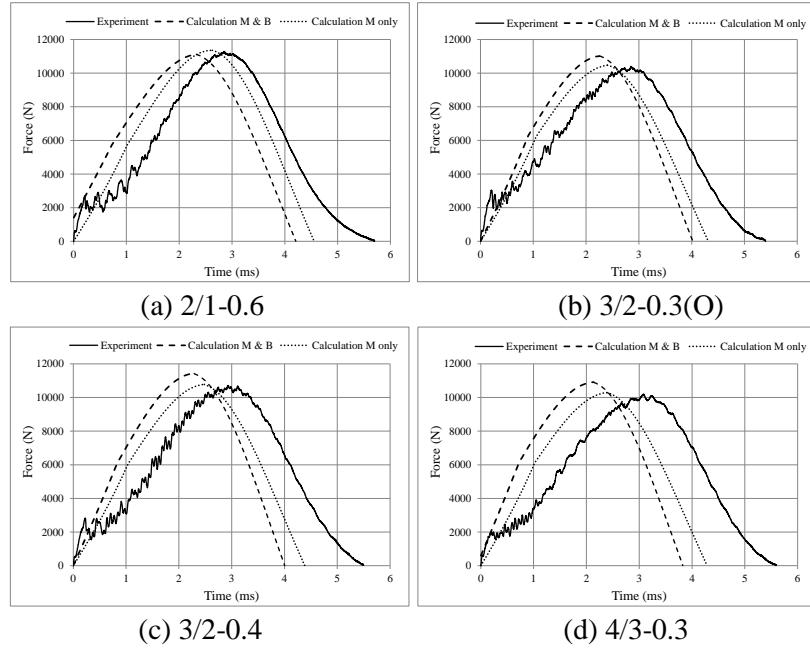


Fig. 1 Force history of the FMLs at 30 J impact energy

The energy absorption obtained from energy-time curves of FMLs with both M & B and M only is compared with experiments in Fig. 2. In this case, FML 4/3-0.3 exhibits higher energy absorption, FML 2/1-0.6 the lower value, and both FMLs 3/2 the in-between values at different impact energy levels. This is because FMLs 4/3-0.3, both 3/2 and 2/1-0.6 exhibit more, fewer, and the least metal/composite interfaces, resulting in more, intermediate, and less delamination, individually and so the energy absorption. The predictions well follow the experiments with an average error to be within 28 %, 31 % and 16 %, 17 % and 11 %, 13 % for FMLs with both M & B, M only at energy levels of 30 J, 45 J, and 60 J, respectively.

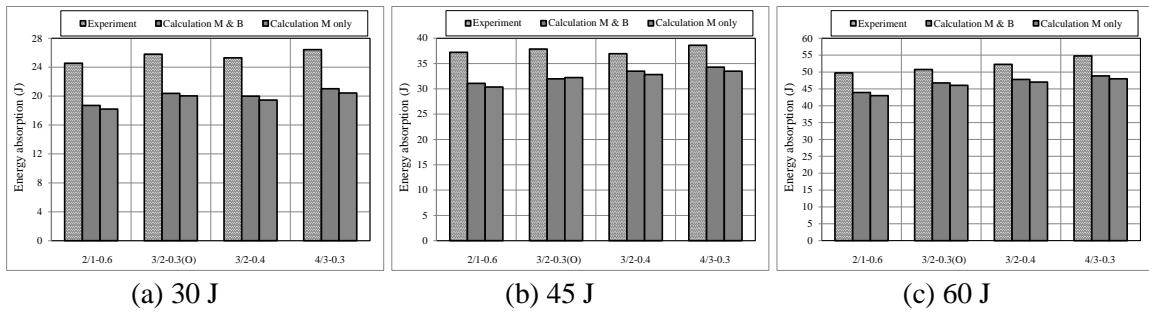


Fig. 2 Energy absorption of FMLs at increasing impact energy levels

## 6. Conclusions

The low-velocity impact response of FML plates for a hemispherical impactor is predicted using the mass-spring arrangement. The impact load-time curves obtained from calculations are consistent with experiments for FMLs. In this case, FMLs with M only exhibit a good match with experiments than FMLs with both M & B. This suggests the substantial contribution of membrane strain energy over bending strain energy. FML with outermost, fewer, and more metallic layers display the higher, intermediate, and lower maximum load, respectively, and vice-versa for contact duration. Further, the

predicted energy absorption is found to be in good comparison with experiments at different impact energy levels. In this case, FML with more metallic layers exhibits more energy absorption, succeeded by FMLs with fewer and outermost metallic layers.

## REFERENCES

1. Vogelesang L.B., Vlot A., Development of fibre metal laminates for advanced aerospace structures, *Journal of Materials Processing Technology*, 103(1), 1–5, 2000.
2. Rhymer D.W., Johnson W.S., Fatigue damage mechanisms in advanced hybrid titanium composite laminates, *International Journal of Fatigue*, 24, 995–1001, 2002.
3. Burianek D.A., Giannakopoulos A.E., Spearing S.M., Modeling of facesheet crack growth in titanium-graphite hybrid laminates, Part I, *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 775–798, 2003.
4. Burianek D.A., Spearing S.M., Modeling of facesheet crack growth in titanium-graphite hybrid laminates. Part II: Experimental results, *Engineering Fracture Mechanics*, 70(6), 799–812, 2003.
5. Li X., Zhang X., Zhang H., Yang J., Nia A.B., Chai G.B., Mechanical behaviors of Ti/CFRP/Ti laminates with different surface treatments of titanium sheets, *Composite Structures*, 163, 21–31, 2017.
6. Miller J.L., Progar D.J., Johnson W.S., St. Clair T.S.L., Preliminary evaluation of hybrid titanium composite laminates, *Journal of Adhesion*, 54(1–4), 223–40, 1995.
7. Vlot A., Impact properties of fibre metal laminates, *Composites Engineering*, 3(10), 911–927, 1993.
8. Vlot A., Kroon E., La Rocca G., Impact response of fiber metal laminates, *Key Engineering Materials*, 141–143, 235–276, 1998.
9. Abatan A., Hu H., Olowokere D., Impact Resistance Modeling of Hybrid Laminated Composites, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 11(3), 249–260, 1998.
10. Tsamasphyros G.J., Bikakis G.S., Analytical Modeling of Circular Glare Laminated Plates Under Lateral Indentation, *Advanced Composites Letters*, 18(1), 11–19, 2009.
11. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R., Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates - A review, *International Journal of Impact Engineering*, 67, 27–38, 2014.
12. Sharma A.P., Velmurugan R., Shankar K., Ha S.K., High-velocity impact response of titanium-based fiber metal laminates. Part II: Analytical modeling, *International Journal of Impact Engineering*, 152, 103853, 2021.
13. Tsamasphyros G.J., Bikakis G.S., Dynamic response of circular GLARE fiber–metal laminates subjected to low velocity impact, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 30(11), 978–987, 2011.
14. Sharma A.P., Velmurugan R., Shankar K., Ha S.K., High-velocity impact response of titanium-based fiber metal laminates. Part I: experimental investigations, *International Journal of Impact Engineering*, 152, 103845, 2021.
15. ASTM D5628-10, Standard Test Method for Impact Resistance of Flat, Rigid Plastic Specimens by Means of a Falling Dart (Tup or Falling Mass), ASTM International, West Conshohocken, PA, 2010.

## Information about authors

Sharma A. P. - Institute Post Doctoral Fellow, Indian Institute of Technology Madras, Department of Aerospace Engineering.

E-mail [ankushsharma1000@gmail.com](mailto:ankushsharma1000@gmail.com)

Velmurugan R. - Professor, Indian Institute of Technology Madras, Department of Aerospace Engineering.

E-mail [ramanv@iitm.ac.in](mailto:ramanv@iitm.ac.in)

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Агабекян П.В., Арутюнян Л.А.</b> Плоская контактная задача для составной области с симметричными трещинами между материалами .....	5
<b>Агаян К.Л., Мартиросян А.В.</b> Изгиб балки бесконечной длины на границе упругой полуплоскости .....	10
<b>Акопян В.Н., Амирджанян А.А.</b> Осесимметричная контактная задача для составного пространства с круговой дискообразной трещиной .....	15
<b>Акопян Л.В., Даشتоян Л.Л.</b> Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной.....	18
<b>Амирджанян А.А., Белубекян М.В., Геворгян Г.З., Дарбиян А.З.</b> Распространение поверхностных волн в системе полуплоскость-слой при относительном скольжении .....	23
<b>Арутюнян А.Р., Евдокименко В.А.</b> Использование линейных упруго-вязких моделей для описания эффектов старения полимерных и композиционных материалов .....	28
<b>Арутюнян А.Р., Сайтова Р.Р.</b> Точные и приближенные решения системы взаимосвязанных уравнений теории ползучести и длительной прочности .....	33
<b>Арутюнян Л.А., Агабекян П.В.</b> Плоская контактная задача для неоднородной луночки с симметричными трещинами.....	38
<b>Атоян Л.А.</b> Упруго-спиновые волны в составной ферромагнитной структуре .....	43
<b>Барсегян В. Р.</b> Об оптимальном управлении колебаниями струны со смещениями на концах с заданными состояниями в промежуточные моменты времени .....	47
<b>Белубекян В.М., Терзян С.А.</b> Локализованная неустойчивость окрестности упруго–закрепленной стороны прямоугольной пластинки .....	51
<b>Белубекян М.В., Хачатрян В.М.</b> Изгибные колебания пьезоактивных упругих пластин из материала гексагональной симметрии поляризованной по толщине.....	55
<b>Беляк О.А.</b> Прямая и обратная задача идентификации дефекта в ортотропном слое.....	59
<b>Богачев И.В.</b> Об одной схеме идентификации механических характеристик и предварительного напряжения упругой полосы .....	64
<b>Ватульян А.О., Юров В.О.</b> Прямые и обратные задачи для цилиндрического волновода с частотно зависимыми импедансными граничными условиями.....	68
<b>Гафурова П.С., Медведев А.Е.</b> Численное моделирование течения воздуха в бронхах человека при лечении аэрозолями и термической гелий-кислородной смесью.....	73
<b>Геворгян Г.А.</b> Высокоточное моделирование механизма шарнирного параллелограмма с упругим шатуном .....	77
<b>Геодакян Э.Г., Ли Ли, Карапетян Дж.К., Оганесян С.М., Саакян Б.В.</b> Механика процесса разрывообразования Шоржинского землетрясения 05 февраля 2021г. ....	81
<b>Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Стадник Н.Э.</b> О методах численного расчета остаточных напряжений в функционально-градиентном материале.....	85
<b>Дударев В.В., Мнухин Р.М.</b> О задаче идентификации переменных свойств неоднородного цилиндра.....	88
<b>Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Чурдалев А.Д., Шекоян А.В.</b> Солитоны деформации в безграничной среде с точечными дефектами, находящейся в нестационарном неоднородном температурном поле .....	93
<b>Зеленцов В.Б., Загребнева А.Д., Лапина П.А.</b> Индентирование упругого материала с порами.....	98
<b>Земцова Е.Г., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Смирнов В.М.</b> Механические свойства металломатричного композита, армированного карбидными структурами.....	103

<b>Зимин В. Н., Крылов А. В., Кузыркин Г. Н., Шахвердов А. О.</b> Разработка математической модели силового привода для раскрытия космической конструкции изменяемой конфигурации .....	108
<b>Казаков К.Е.</b> О влиянии неоднородности внешнего покрытия трубы на контактные напряжения, возникающие под жесткими втулками.....	113
<b>Казаков К.Е., Паршин Д.А.</b> Модель механики растущих тел для анализа напряженно-деформированного состояния намоточных композитов, армируемых тонкими односторонними волокнами.....	118
<b>Карапетян К. А., Валесян С. Ш.</b> О коэффициенте рассеяния энергии стеклопластиковых трубчатых элементов с изначально нарушенной симметрией армирования относительно оси.123	
<b>Келлер И.Э., Казанцев А.В., Дудин Д.С., Пермяков Г.Л.</b> Модель формирования состояния материала при гибридном аддитивном производстве металлического сегмента и ее экспериментальное подтверждение.....	128
<b>Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Yu G.</b> Примеры точных решений краевых задач теории упругости для усеченного клина.....	130
<b>Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Шуляковская Т.Д.</b> Точное и балочное решения для узкого защемленного прямоугольника.....	135
<b>Колесников В.И., Беляк О.А., Суворова Т.В.</b> Динамическая контактная задача для гетерогенного основания.....	140
<b>Коцур О.С.</b> Модификация метода диффузионной скорости для моделирования вязких несжимаемых течений методом вихревых петель .....	145
<b>Кравченко М.Н., Диева Н.Н., Малова А.Д., Лищук А.Н., Шестернина Н.В.</b> Моделирование зоны реакции при термогазохимическом воздействии с применением бинарных смесей .....	150
<b>Кузыркин Г.Н., Савельева И.Ю., Кувшинникова Д.А.</b> Математическое моделирование температурных напряжений в нелокальной термовязкоупругой сплошной среде.....	155
<b>Кукуджанов К.В.</b> Самозалечивание микротрещин в процессе продольной электропластической прокатки .....	159
<b>Курдина С.П., Геворкян Г.А.</b> Динамическое моделирование упругого двойного физического маятника на основе обобщенного метода Ньютона-Эйлера .....	162
<b>Магомедова Д.К., Чуракова А.А., Гундеров Д.В.</b> Исследование механических свойств и поверхности разрушения цилиндрических образцов Al-6101 при статическом растяжении.....	167
<b>Мартиросян С.Р.</b> Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям.....	172
<b>Мурашкин Е.В.</b> Краевые условия в процессах поверхностного наращивания материалов с микроструктурой.....	177
<b>Недин Р.Д.</b> К моделированию колебаний предварительно напряженной решетчатой пластинки глаза .....	180
<b>Оганесян С.М., Карапетян Дж.К., Геодакян Э.Г., Саакян Б.В.</b> О приведении в соответствие величин максимальных ускорений на картах сейсмического районирования.....	185
<b>Осипов М.Н., Сергеев Р.Н., Лимов М.Д.</b> Особенности применения многолучевой голографической интерферометрии в фотоупругости.....	189
<b>Очиров А.А., Белоножко Д.Ф.</b> О влиянии упругой пленки на затухание волн на горизонтальной поверхности раздела вязкой и движущейся над ней идеальной жидкостей.....	193
<b>Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.</b> О волновом движении на поверхности вязкой стратифицированной жидкости .....	196
<b>Попов В.Г.</b> Система трещин под действием плоских упругих волн .....	198

<b>Саакян А.В., Саркисян В.Г., Хачикян А.С.</b> Определяющее уравнение смешанной задачи для упругой составной полосы, содержащей внутреннюю трещину, выходящую на линию раздела материалов .....	201
<b>Самсонов И.К., Казаков Е.А.</b> Влияние винглетов на подъёмную силу тонкой пластиинки: натурный и численный эксперимент.....	206
<b>Сейранян С.П.</b> Выделение особенностей в изгибающих моментах в прямоугольной свободно опертой пластине, нагруженной сосредоточенной силой.....	211
<b>Смирнов С.В., Мясникова М.В., Коновалов Д.А.</b> Идентификация упруго-вязко-пластической модели материала полимерного покрытия по результатам индентирования .....	216
<b>Судьенков Ю.В., Смирнов И.В., Зимин Б.А.</b> Влияние текстуры металлов и скорости нагружения на тепловыделение при квазистатическом растяжении .....	221
<b>Сумбатян М.А., Казаков Е.А.</b> Интегральное уравнение в аэродинамике вращающейся лопасти.....	226
<b>Сумбатян М. А., Мусатова Н.К.</b> Дифракция звука на узком теле в однородном набегающем потоке .....	231
<b>Хачикян А. С.</b> Об уравнениях Максвелла .....	236
<b>Шекян Г.Г., Геворкян А.В.</b> Частотный анализ корпуса вращающегося электрической машины .....	239
<b>Явруян О.В.</b> Об особенностях исследования прямой и обратной задач о колебаниях слоистой среды с дефектом.....	244
<b>Aleksanyan H.N., Avetisyan L.V., Sarkisyan S.V.</b> Periodic waves in a layer with inertial masses in the boundaries.....	248
<b>Aminev D.A., Badertdinova E.R., Kravchenko M.N.</b> Updating Reservoir Properties for High-Viscosity Oil Fields at the Late Stage of Production.....	253
<b>Astafev V.I., Bulgakov S.A.</b> The influence of discontinuities in reservoirs on the character of the fluid flow to the production wells .....	258
<b>Avetisyan Ara S., Mkrtcian M.H.</b> Formation of a Hybrid of Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites .....	262
<b>Baimova J.A., Safina L.R., Krylova K.A.</b> Effect of deformation-heat treatment on the mechanical behavior of the graphene-nickel composite.....	267
<b>Bulychev N.A., Kolesnik S.A.</b> Reinforcement of Polymer Composite Materials by Titanium Dioxide Nanoparticles Synthesized in Plasma Discharge under Ultrasonic Cavitation .....	272
<b>Chopuryan S. S., Khurshudyan As. Zh.</b> Displacement and Stress-Strain Fields Comparison of Particle-Reinforced Timoshenko Beam with Uniform and Non-Uniform Distribution of Particles.....	274
<b>Dobrokhотов S.Yu., Nazaikinskii V.E.</b> Constructive Formulas for Maslov's Canonical Operator in a Neighborhood of Caustics .....	279
<b>Fomin L.V., Fomina Yu.V.</b> On the influence of the active medium on the delayed fracture of a cylindrical shell using a fractional linear creep and long-term strength model.....	283
<b>Grigoryan H.F.</b> Vibrations of a Plate Of Inhomogeneous Thickness.....	287
<b>Kashtanova S.V., Rzhonsnitskiy A.V.</b> Finding Coefficients in the Problem of Cylindrical Shell with a Cutout .....	290
<b>Kerobyan A. V.</b> On Contact Interaction Between the Infinite Sheet and Three Elastic Stringers with Finite Lengths through Adhesive Layers .....	293
<b>Kryvyi O. F., Morozov Yu. O.</b> Inhomogeneous transversely isotropic space under influence of concentrated power and temperature sources .....	298
<b>Logvinov O. A.</b> Non-Newtonian Hele-Shaw Flows.....	302
	328

<b>Niranjan Y C, Shankar K, R Velmurugan R.</b> Application of Polyether Ether Ketone in Total Cervical Disc Arthroplasty: A Review .....	307
<b>Perelmutter M. N.</b> Stress analysis of composites with interfacial bridged cracks and damaged zones .....	312
<b>Safina L.R., Baimova J.A., Krylova K.A</b> Graphene Flakes as a Storage Cavity for Nickel Nanoparticles.....	317
<b>Sharma A. P., Velmurugan R.</b> Analytical Prediction of Low-Velocity Impact Response of Titanium/Composite Laminates .....	321