

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Материалы VIII международной конференции
01-05 октября 2023, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН – 2023

УДК 531(082)
ББК 22.25я43
А 437

Институт механики НАН РА
Южный федеральный университет России
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Дом творчества писателей в Цахкадзоре

Со-председатели оргкомитета: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян (Армения)
д.ф.-м.н. А.О.Ватульян (Россия)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения), д.ф.-м.н. М.А.Сумбатян (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения), к.ф.-м.н. Е.В.Мурашкин (Россия)

Международный редакционный совет:

Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Агаян К.Л., Айзикович С.М. (Россия),
Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Д. (США), Бабешко В.А. (Россия), Багдасарян Г.Е.,
Барсегиан В.Р., Вайсфельд Н.Д. (Украина), Вельмуруган Р. (Индия), Гачкевич А.Р.
(Украина), Горячева И.Г. (Россия), Гукасян А.А., Гупта Н. (Индия), Джаниани Г.
(Грузия), Жубер С. (ЮАР), Зимин В.Н. (Россия), Игумнов Л.А. (Россия), Казарян К.Б.,
Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Карапетян К.А., Карев В.И. (Россия), Климов Д.М.
(Россия), Коссович Л.Ю. (Россия), Кувыркин Г.Н. (Россия), Кудиш И.И. (США),
Кушнир Р.М. (Украина), Ломакин Е.В. (Россия), Матвеев В.П. (Россия), Морозов
Н.Ф. (Россия), Мруз З. (Польша), Мхитарян С.М., Назайкинский В.Е. (Россия),
Олиферук В. (Польша), Орелма Х. (Финляндия), Попов В.Г. (Украина), Радаев Ю.Н.
(Россия), Саркисян С.О., Северина Н.С. (Россия), Сейранян А.П. (Россия), Федотов И.
(ЮАР), Цатурян А.К. (Россия), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Шаталов М. (ЮАР)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

А 437 Актуальные проблемы механики сплошной среды.- Ер.: Гитутюн, 2023, - 362 с.

В сборник включены доклады, представленные на VIII-ую международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды».

УДК 531(082)
ББК 22.25я43

ISBN 978-5-8080-1518-0

© ИМ НАН РА

© ИПМех РАН

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

**ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ
ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ**

VIII միջազգային գիտաժողովի նյութեր
01-05 հոկտեմբերի 2023թ., Ծաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2023

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

**TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM
MECHANICS**

Proceedings of VIII International Conference
01-05 October 2023, Tsaghkadzor, Armenia

YEREVAN – 2023

УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА НАПРЯЖЕНИЕ И МОЩНОСТЬ ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЯ

Аветисян В.В.

Для системы, моделирующей динамику однозвенного электромеханического манипулятора, решается задача построения управляющего напряжения и определения областей конечных состояний, переход в каждую точку которых из начального состояния покоя с помощью построенного управления происходит за конечное время без нарушения заданных ограничений на напряжение и мощность тепловыделения в обмотке ротора электродвигателя.

1. Рассмотрим электромеханическую систему, состоящую из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и абсолютно твердого тела (инерционной нагрузки) на его выходном валу. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы. В этом случае инерционная нагрузка есть рука манипулятора вместе с грузом, закрепленным в его схвате. Движение описанной электромеханической системы определяется уравнениями [1]

$$(I + Jn^2)\ddot{\varphi} = nkj, \quad Rj + kn\dot{\varphi} = u, \quad |u| \leq U. \quad (1.1)$$

В (1.1) φ – угол поворота руки; I – момент инерции руки вместе с ведомой шестерней редуктора; J – момент инерции ротора электродвигателя вместе с ведущей шестерней редуктора; n – передаточное число редуктора привода; R – электрическое сопротивление обмотки ротора электродвигателя; μ – момент электромагнитных сил, создаваемый двигателем; j – ток в цепи ротора электродвигателя; k – постоянная (параметр электродвигателя); u – входное (управляющее) напряжение двигателя; U – максимально допустимое значение управляющего напряжения при эксплуатации двигателя.

Первое уравнение в (1.1) описывает динамику механической части системы, второе уравнение описывает баланс напряжений в цепи ротора электродвигателя, если пренебречь явлением самоиндукции в обмотке ротора. Неучет явления самоиндукции при описании динамики манипулятора возможно, если электромагнитная постоянная времени $\tau = L/R$ (L – индуктивность обмотки ротора) много меньше времени рабочей операции манипулятора. На практике это условие в большинстве случаев выполняется. Отметим, что система уравнений (1.1) приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется независимым приводом, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало ([1,2]).

Переходя в (1.1) к безразмерным единицам (с последующим опусканием штрихов),

$$t' = t/\bar{T}, \quad u' = u/U, \quad k' = kn/(U\bar{T}), \quad R' = RA/(knU\bar{T}^2), \quad j' = j(T^2kn/A), \quad (1.2)$$

где $A = I + Jn^2$, а $\bar{T} = nk/U$ – единица измерения времени, получим следующую систему:

$$\ddot{\varphi} = k^{1/2}j, \quad Rj + k^{1/2}\dot{\varphi} = k^{-1/2}u, \quad (1.3)$$

$$|u| \leq 1. \quad (1.4)$$

В данной работе, наряду с ограничением (1.4), рассматривается ограничение на мощность тепловыделения в обмотке ротора электродвигателя привода [2]. Количество тепла q , выделяющегося в обмотке ротора электродвигателя в единицу времени (мощность тепловыделения), равно $q = j^2R$. Подставляя j из второго уравнения (1.1) в последнее равенство, получим (в исходных размерных переменных) следующее выражение для количества тепла, выделяющегося в обмотке ротора электродвигателя: $q = (u - kn\dot{\varphi})^2 R^{-1}$. При продолжительной нагрузке привода выделяемое тепло в обмотке ротора нагревает электродвигатель. Во избежание сильного перегрева и перегорания обмотки двигателя мощность тепловыделения ограничивается сверху $q \leq q^0$:

$$q = (u - kn\dot{\varphi})^2 R^{-1} \leq q^0. \quad (1.5)$$

Переходя к безразмерным переменным (1.2), величина q преобразуется по формуле $q' = \bar{T}^3 A^{-1} q$, а ограничение (1.5) (с опусканием штрихов) сводится к ограничению на угловую скорость манипулятора и на допустимое значение входного напряжения:

$$|u - k\dot{\phi}| \leq (kRq^0)^{1/2} = \eta. \quad (1.6)$$

З а д а ч а. Найти закон изменения управляющего напряжения $u(t)$, который обеспечивает приведение манипулятора из начального состояния покоя

$$\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 0 \quad (1.7)$$

в заданное конечное состояние

$$\phi(T) = \phi^1, \quad \dot{\phi}(T) = \dot{\phi}^1 \quad (1.8)$$

в некоторый момент времени $t = T$ при ограничениях на управляющее напряжение (1.4) и на мощность тепловыделения в обмотке ротора электродвигателя (1.6).

Далее, исключив переменную j из системы (1.3), получим уравнение

$$R\ddot{\phi} + k\dot{\phi} = u. \quad (1.9)$$

После перехода к новым переменным в (1.4), (1.6)-(1.9)

$$v = u - k\dot{\phi}, \quad z_1 = R\phi, \quad z_2 = R\dot{\phi}, \quad (1.10)$$

уравнение (1.9) с начальными (1.7) и конечными (1.8) условиями запишутся в виде

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = v, \quad (1.11)$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0, \quad (1.12)$$

$$z_1(T) = z_1^1 = R\phi^1, \quad z_2(T) = z_2^1 = R\dot{\phi}^1. \quad (1.13)$$

При этом ограничения (1.4) и (1.6) соответственно примут вид

$$|v + kR^{-1}z_2| \leq 1, \quad |v| \leq \eta. \quad (1.14)$$

Таким образом, сформулированная задача переходит к задаче для системы (1.11)-(1.14).

2. Закон изменения управляющего напряжения $v(t)$, обеспечивающий переход системы (1.11) из начального состояния покоя (1.12) в конечное состояние (1.13) в момент времени T без учета ограничений (1.14) строится с помощью метода Калмана [3-5] и имеет вид [6]:

$$v(t) = (-12T^{-3}t + 6T^{-2})z_1^1 + (6T^{-2}t - 2T^{-1})z_2^1. \quad (2.1)$$

Интегрируя уравнения (1.11) с начальными условиями (1.12) при управлении (2.1), найдем

$$z_2 = (-6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t)z_1^1 + (3T^{-2}t^2 - 2T^{-1}t)z_2^1. \quad (2.2)$$

Учитывая (2.1), (2.2), ограничения (1.14) запишем в виде

$$|g_1(t, T)z_1^1 + g_2(t, T)z_2^1| \leq 1, \quad |f_1(t, T)z_1^1 + f_2(t, T)z_2^1| \leq \eta, \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} g_1(t, T) &= -6kR^{-1}T^{-3}t^2 + (6kR^{-1}T^{-2} - 12T^{-3})t + 6T^{-2}, & f_1(t, T) &= -12T^{-3}t + 6T^{-2}, \\ g_2(t, T) &= 3kR^{-1}T^{-2}t^2 + (6T^{-2} - 2kR^{-1}T^{-1})t - 2T^{-1}, & f_2(t, T) &= 6T^{-2}t - 2T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для выполнения (2.3) достаточно потребовать выполнения следующих неравенств:

$$|g_1(t, T)z_1^1| + |g_2(t, T)z_2^1| \leq 1, \quad |f_1(t, T)z_1^1| + |f_2(t, T)z_2^1| \leq \eta, \quad t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Неравенства (2.5) должны выполняться при всех $t \in [0, T]$. Оценив сверху максимальные по $t \in [0, T]$ значения величин $|g_i(t, T)|$, $|f_i(t, T)|$, $i = 1, 2$, фигурирующих в (2.5), получим:

$$\max_{t \in [0, T]} |g_1(t, T)| = \bar{g}_1(T) = \begin{cases} 6T^{-2}, & 0 < T \leq 2k^{-1}R = T', \\ 1.5kR^{-1}T^{-1} + 6k^{-1}RT^{-3}, & T' \leq T < \infty. \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\max_{t \in [0, T]} |g_2(t, T)| = kR^{-1} + 4T^{-1}, \quad 0 < T < \infty, \quad (2.7)$$

$$\max_{t \in [0, T]} |f_1(t, T)| = \max_{t \in [0, T]} |-12T^{-3}t + 6T^{-2}| = 6T^{-2}, \quad \max_{t \in [0, T]} |f_2(t, T)| = \max_{t \in [0, T]} |6T^{-2}t - 2T^{-1}| = 4T^{-1}. \quad (2.8)$$

Подставляя оценки (2.6)-(2.8) в (2.5) получим:

$$\begin{aligned} |g_1(t, T)| |z_1^1| + |g_2(t, T)| |z_2^1| &\leq \bar{g}_1(T) |z_1^1| + (kR^{-1} + 4T^{-1}) |z_2^1| \leq 1, \quad 0 < T < \infty, \\ |f_1(t, T)| |z_1^1| + |f_2(t, T)| |z_2^1| &\leq 6T^{-2} |z_1^1| + 4T^{-1} |z_2^1| \leq \eta, \quad 0 < T < \infty. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Совокупность двух неравенств (2.9) представляет достаточные условия разрешимости поставленной задачи управления (1.11)-(1.14). Эти условия, связывающие конечное состояние и время процесса, можно рассматривать как достаточные управляемости системы -из начального состояния покоя в заданное конечное состояние (z_1^1, z_2^1) за время T .

Правые соотношения (2.9) рассмотрим в случае равенства, записанные в виде

$$G(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = 1, \quad F(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = \eta, \quad 0 < T < \infty, \quad (2.10)$$

где

$$G(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = \begin{cases} 6T^{-2} |z_1^1| + (kR^{-1} + 4T^{-1}) |z_2^1|, & 0 < T \leq T', \\ (1.5kR^{-1}T^{-1} + 6k^{-1}RT^{-3}) |z_1^1| + (kR^{-1} + 4T^{-1}) |z_2^1|, & T' \leq T < \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$F(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = 6T^{-2} |z_1^1| + 4T^{-1} |z_2^1|, \quad 0 < T < \infty. \quad (2.12)$$

Из положительности левой части первого равенства (2.10) следует, что $|z_2^1| < k^{-1}R$. Функции (2.11) и (2.12) по T непрерывные и монотонно убывают от ∞ до 0 при изменении T от 0 до ∞ . Следовательно, для любой пары $(z_1^1, z_2^1) \in Z$, где

$$Z = \{(z_1^1, z_2^1): |z_1^1| < \infty, |z_2^1| < k^{-1}R\}, \quad (2.13)$$

неравенства (2.5) будут выполняться для всех $t \in [0, T]$, если T выбирать из условий (2.10).

Если обозначить через T_1 и T_2 решения первого и второго уравнений (2.10) соответственно, то ограничения (2.3) не нарушаются при любом t из интервала $[0, T^*]$, где

$$T^* = \max(T_1, T_2). \quad (2.14)$$

Рассмотрим две области изменения пары $(z_1^1, z_2^1) \in Z$:

$$Z_- = \{(z_1^1, z_2^1) \in Z: |z_2^1| \geq k^{-1}R/3 - kR^{-1}|z_1^1|/2\}, \quad (2.15)$$

$$Z_+ = \{(z_1^1, z_2^1) \in Z: |z_2^1| \leq k^{-1}R/3 - kR^{-1}|z_1^1|/2\}. \quad (2.16)$$

В соответствии с (2.11), (2.12) областям (2.15) и (2.16) отвечают интервалы $(0, T']$ и $[T', \infty)$. Поэтому, если $(z_1^1, z_2^1) \in Z_-$, то искомое $T_1 \in (0, T']$ находится из уравнения

$$G(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = 6T^{-2} |z_1^1| + (kR^{-1} + 4T^{-1}) |z_2^1| = 1$$

и определяется формулой

$$T_1^{(-)} = \left(2|z_2^1| + \sqrt{4|z_2^1|^2 + 6(1 - kR^{-1}|z_2^1|)|z_1^1|} \right) / (1 - kR^{-1}|z_2^1|), \quad (2.17)$$

а- если $(z_1^1, z_2^1) \in Z_+$, то искомое $T_1 \in [T', \infty)$ определяется из уравнения

$$G(T, |z_1^1|, |z_2^1|) = (1.5kR^{-1}T^{-1} + 6k^{-1}RT^{-3})|z_1^1| + (kR^{-1} + 4T^{-1})|z_2^1| = 1,$$

приведенного к кубическому уравнению с отрицательным дискриминантом

$$2kR^{-1}(1 - kR^{-1}|z_2^1|)T^3 - (3kR^{-1}|z_1^1| + 8|z_2^1|)kR^{-1}T^2 - 12|z_1^1| = 0$$

и, следовательно, имеющего один действительный положительный корень

$$T_1^{(+)} = \sqrt[3]{-\alpha/2 + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\alpha/2 - \sqrt{Q}} - b/(3a), \quad Q = (\beta/3)^3 + (\alpha/2)^2 > 0, \quad (2.18)$$

$$\alpha = -(3kR^{-1}|z_1^1| + 8|z_2^1|)^3 / \left[108(1 - kR^{-1}|z_2^1|)^3 \right] - 6|z_1^1| / \left[kR^{-1}(1 - kR^{-1}|z_2^1|) \right],$$

$$\beta = -(3kR^{-1}|z_1^1| + 8|z_2^1|)^2 / \left[12(1 - kR^{-1}|z_2^1|)^2 \right], \quad \gamma = -(3kR^{-1}|z_1^1| + 8|z_2^1|) / \left[6(1 - kR^{-1}|z_2^1|) \right].$$

Решение второго уравнения (2.10) для любой пары $(z_1^1, z_2^1) \in Z$ (2.13) имеет вид

$$T_2 = 2\eta^{-1}|z_2^1| + \sqrt{4(\eta^{-1}|z_2^1|)^2 + 6\eta^{-1}|z_1^1|}. \quad (2.19)$$

С учетом (2.19)-(2.21), из (2.16) получаем

$$T^* = \begin{cases} \max(T_1^{(-)}, T_2), & \text{если } (z_1^1, z_2^1) \in Z_-, \\ \max(T_1^{(+)}, T_2), & \text{если } (z_1^1, z_2^1) \in Z_+. \end{cases} \quad (2.20)$$

Таким образом, построение искомого управления $u(t)$ осуществляется в следующей последовательности: 1) для заданных параметров задачи определяются области управляемости (2.13), (2.15), (2.16); 2) если конечное состояние $(z_1^1, z_2^1) \in Z$, то с помощью формулы (2.20) определяем время движения T^* ; 3) фиксируя любое $T \geq T^*$, находим вспомогательную управляющую функцию $v(t)$ и фазовую переменную $z_2(t)$ по явным формулам (2.1), (2.2); 3) переходя к исходным переменным по формулам (1.2), (1.10), находим управление $u(t)$:

$$u = At^2 + Bt + C, \quad A = -3kR^{-2}T^{-2}(2T^{-1}\phi^1 - \dot{\phi}^1),$$

$$B = -2\left[T^{-2}R^{-1}(6T^{-1} - 3kR^{-1})\phi^1 + T^{-1}R^{-1}(kR^{-1} - 3T^{-1})\dot{\phi}^1\right], \quad C = 2R^{-1}T^{-1}(3T^{-1}\phi^1 - \dot{\phi}^1).$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного гранта № 21Т-2Д255.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов. - М.: ИПМ АН СССР, 1986. 71с.
2. Аветисян В.В. Оптимизация транспортных движений манипуляционных роботов с ограничением на мощность тепловыделения // Изв. АН СССР. Техническая Кибернетика. 1987, № 4, с. 200-207.
3. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. - М.: Физматлит, 2006. 328 с.
4. Аветисян В.В. Ограниченное управление линейной динамической системой с ограничением на фазовую скорость // Известия НАН РА. Механика. 2000. Т. 53, № 4, с. 48-55.
5. Аветисян В.В. Управление электромеханическим манипулятором при ограничениях на напряжение и ток // Изв. НАН РА. Механика. 2002, Т. 55, №1, с. 68-74.
6. Аветисян А.С., Аветисян В.В. О построении управления электромеханической системой // Доклады НАН РА. 2017. Т. 117, №2, с. 121-131.

Сведения об авторе:

Аветисян Ваган Вардгесович - д.ф.м.н., профессор, Институт механики НАН РА, тел.: (+374) 94 44 95 60, e-mail: -vanavet@yahoo.com

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДУГАМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ

Агабекян П.В., Арутюнян Л.А.

Рассматривается плоская задача теории упругости о гладком контакте двух тел конечных размеров, занимающих области в виде круговых сегментов различных радиусов, имеющих одинаковые основания. На каждой из свободных границ заданы давящие нормальные усилия, равнодействующие которых равны друг другу, а также касательные напряжения, равнодействующие которых равны нулю. С помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье решение поставленной задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения на бесконечном интервале.

Постановка задачи

В биполярной системе координат рассмотрим гладкий контакт двух конечных тел, ограниченных дугами пересекающихся окружностей, которые сжимаются друг к другу при помощи нормальных и касательных нагрузок, соответственно интенсивности $\sigma_m(\alpha)$ и $\tau_m(\alpha)$ ($m = 1, 2$), приложенных на свободных границах контактирующих тел.

Будем считать, что в биполярной координатной системе первое тело с упругими характеристиками μ_1 и ν_1 занимает область $0 < \beta < \beta_1$, а второе с упругими характеристиками μ_2 и ν_2 область $\beta_2 < \beta < 0$, причем координата α внутри рассматриваемой области изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (рис.1).

Связь между биполярными α, β и прямоугольными x, y координатами дается формулами [1,2]:

$$gx = sh\alpha, \quad gy = \sin \beta, \quad ag = ch\alpha + \cos \beta \quad (1)$$

где a – размерный параметр.

Задача решается при помощи функций напряжений $\phi_m(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$), каждая из которых удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\phi_m) = 0 \quad (2)$$

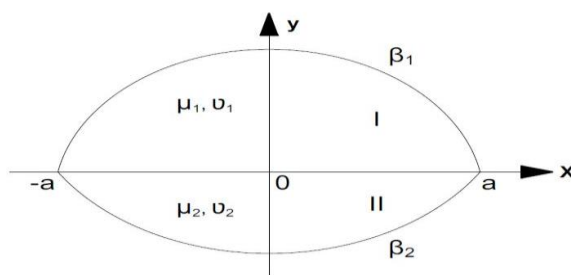


Рис. 1

Напряжения и перемещения в биполярных координатах через функции напряжений $\phi(\alpha, \beta)$ выражаются формулами

$$a\sigma_\alpha = \left[(ch\alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - sh\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + ch\alpha \right] (g\phi)$$

$$a\sigma_\beta = \left[(ch\alpha + \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - sh\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \cos \beta \right] (g\phi)$$

$$a\tau_{\alpha\beta} = -(\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta) \frac{\partial^2(g\phi)}{\partial\alpha\partial\beta} \quad (3)$$

$$2\mu au = (\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta) \left((1-2\nu) \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} \right)$$

$$2\mu av = (\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta) \left((1-2\nu) \frac{\partial\phi}{\partial\beta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \right)$$

$$\text{где } \frac{\partial^2(g\Psi)}{\partial\alpha\partial\beta} = (1-\nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1 \right) (g\phi) \quad (4)$$

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1]

$$g\phi_m(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=\beta_m} = \sigma_m(\alpha), \quad \frac{\partial(g\phi_m(\alpha, \beta))}{\partial\beta} \Big|_{\beta=\beta_m} = \tau_m(\alpha) \quad (m=1, 2) \quad (5)$$

На линии контакта задаются следующие условия

$$\frac{\partial(g\phi_m(\alpha, \beta))}{\partial\beta} \Big|_{\beta=0} = 0 \quad m=1, 2 \quad (6)$$

$$\phi_1(\alpha, 0) = \phi_2(\alpha, 0); \quad v_1(\alpha, 0) = v_2(\alpha, 0)$$

Предполагается, что $\sigma_m(\alpha), \tau_m(\alpha)$ ($m=1, 2$) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Функцию напряжений $\phi_m(\alpha, \beta)$ ищем в виде интеграла Фурье

$$g\phi_m(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t, \beta) e^{-it\alpha} dt \quad (7)$$

где

$$f_m(t, \beta) = A_m(t) \operatorname{cht}(\beta_m - \beta) \cos\beta + B_m(t) \operatorname{cht}\beta \cos(\beta_m - \beta) + C_m(t) \operatorname{sht}(\beta_m - \beta) \sin\beta + D_m(t) \operatorname{sht}\beta \sin(\beta_m - \beta) \quad (8)$$

Применяя к условиям (5) и (6) преобразование Фурье и учитывая представление (8), можно из уравнений, соответствующих условиям (5) и первым двум из условий (6), искомые коэффициенты в представлении (8) выразить через одну неизвестную функцию $Y(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) A_m(t) &= Y(t) \operatorname{ch} t\beta_m - \bar{\sigma}_m(t) \cos\beta_m \\ \Delta_1(t) B_m(t) &= \bar{\sigma}_m(t) \operatorname{ch} t\beta_m - Y(t) \cos\beta_m \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta_2(t) C_m(t) = K_1(t) \operatorname{sht}\beta_m - tK_2(t) \sin\beta_m$$

$$\Delta_2(t) D_m(t) = K_2(t) \operatorname{sht}\beta_m - tK_1(t) \sin\beta_m \quad m=1, 2$$

где

$$\Delta_1(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_m + \sin^2 \beta_m, \quad \Delta_2(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_m - t^2 \sin^2 \beta_m$$

$$K_1(t) = tA_m(t) \operatorname{sht}\beta_m - B_m(t) \sin\beta_m$$

$$K_2(t) = tB_m(t) \operatorname{sht}\beta_m - A_m(t) \sin\beta_m - \bar{\tau}_m(t) \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_m(\alpha) e^{it\alpha} d\alpha; \quad \bar{\tau}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_m(\alpha) e^{it\alpha} d\alpha \quad m=1, 2$$

Удовлетворяя же последнему из условий (6), а именно, условию равенства нормальных перемещений, получим уравнение для определения указанной неизвестной $Y(t)$. Это уравнение, записанное относительно комбинации

$$W(t) = A_1(t) \operatorname{sh} t\beta_1 - D_1(t) \operatorname{sh} t\beta_1 - \frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)} [A_2(t) \operatorname{sh} t\beta_2 - D_2(t) \sin \beta_2], \quad (11)$$

в неявном виде содержащей неизвестную $Y(t)$, представляет собой следующее сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$W(t) = -\frac{2}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi(\tau-t)} W(\tau) d\tau}{1 - e^{2\pi(\tau-t)}} \quad (12)$$

Сингулярное интегральное уравнение (12) необходимо рассматривать вместе с условием равновесия одного из тел, например, верхнего:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\phi_1(\alpha, 0) d\alpha = P_0 \quad (13)$$

$$\text{где } P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2(\alpha) d\alpha.$$

После решения уравнения (12) каким-либо способом, из уравнения (11) определяем функцию $Y(t)$, далее, по формулам (9) и (10) – коэффициенты A_m, B_m, C_m, D_m ($m=1, 2$), по формулам (7)-(8) – функцию напряжений $\phi_m(\alpha, \beta)$. Затем, имея выражение функции напряжений $\phi_m(\alpha, \beta)$, можно по формулам (3)-(4) определить поля напряжений и перемещений внутри обоих тел.

Заключение. В рамках плоской задачи теории упругости решение задачи о гладком контакте упругих тел конечных размеров, но определенной формы, удалось свести к решению сингулярного интегрального уравнения на бесконечном интервале достаточно простой формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968, 401с.
2. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН Арм. ССР, „Механика”, XXIX, “1, 1976, ст.51–66.

Сведения об авторах:

Агабекян Пайкар Вараздатович - к.ф.м.н. Институт Механики НАН Армении (37493) 248547
E-mail: paykaraghabekyan@gmail.com

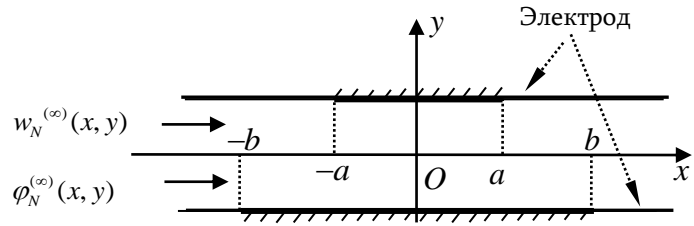
Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.м.н., Институт Механики НАН Армении (37499) 675747
E-mail: arutyunyanlevon@gmail.com

СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ШТАМПОВ НА КРАЯХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л.

Рассмотрена задача о направленном распространении гармонических волн в пьезоэлектрическом слое-волноводе, границы которого заземлены. Предполагается, что слой-волновод по границам усилен нерастяжимыми лентами, которые имеют разные длины, не сопротивляются изгибу и расположены симметрично друг над другом. Полагая, что слой находится в условиях антиплоской деформации, определены электроупругое волновое поле в слое, амплитуды контактных напряжений под лентами, а также число отраженных и проходящих волн и их волновые характеристики в зависимости от физических и геометрических параметров волновода и падающих волн.

Постановка задачи и решение определяющих уравнений. Рассмотрим электроупругий слой-волновод в декартовой системе координат $Oxyz$ (фиг.1), занимающий область $\Omega_0 (|x| < \infty; -h < y < h; |z| < \infty)$. Главная ось пьезоэлектрического слоя (кристалл класса $6mm$ гексагональной симметрии) параллельна оси Oz . Граничные плоскости волновода $y = \pm h$ покрыты тонким металлическим заземленным слоем, жесткость которых пренебрегается и его можно рассматривать как электрод. Предполагается также, что волновод по полосам ($|x| \leq a; |z| < \infty$) и ($|x| \leq b; |z| < \infty$) граничных плоскостей $y = \pm h$, соответственно, закреплен жесткими ленточными штампами.



Фиг.1

С левой стороны конструкции из бесконечности набегают плоская сдвиговая электроупругая волна антиплоской деформации, поляризованная вдоль оси симметрии:

$$w_N^{(\infty)}(x, y) = A_N e^{i\gamma_N x} \cos \frac{\pi N}{2h} (y - h); \quad \varphi_N^{(\infty)}(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w_N^{(\infty)}(x, y), \quad (1)$$

$$\gamma_N = \sqrt{k^2 - \lambda_N^2}; \quad \lambda_N = \frac{\pi N}{2h}; \quad k > \lambda_N, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $w(x, y)$ – отличная от нуля компонента перемещения $u_z(x, y, z) = w(x, y)e^{-i\omega t}$, $\varphi(x, y)$ – потенциал электрического поля, ω – частота падающей волны, t – время, A_N – постоянная, $k = \omega/c$ – волновое число, c – скорость распространения сдвиговых волн в слое, e_{15} – пьезомодуль, ϵ_{11} – диэлектрическая постоянная. Число N удовлетворяет неравенству $N < 2kh/\pi$, которое обеспечивает условие прохождения волны [1-3]. Выше и в дальнейшем гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опускается, т.е. задача решается в амплитудах. Полагая, что слой находится в условиях антиплоской деформации, требуется определить электроупругое волновое поле в слое, амплитуды контактных напряжений под штампами, а также число отраженных и проходящих волн и их волновые характеристики в зависимости от физических и геометрических параметров волновода и падающих волн. Проблема формулируется в виде следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial^2 y} + k^2 w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial^2 y} = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w(x, y) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi(x, \pm h) = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)_1$$

$$\begin{cases} \sigma_{yz}(x, +h) \equiv (c_{44} \partial w / \partial y + e_{15} \partial \varphi / \partial y) \Big|_{y=+h} = 0 \quad (|x| > a) \\ \sigma_{yz}(x, -h) \equiv (c_{44} \partial w / \partial y + e_{15} \partial \varphi / \partial y) \Big|_{y=-h} = 0 \quad (|x| > b) \end{cases}, \quad (4)_2$$

$$\begin{cases} w(x, +h) = 0 \quad (|x| < a) \\ w(x, -h) = 0 \quad (|x| < b) \end{cases}, \quad (4)_3$$

где Δ – оператор Лапласа, $c_{44} = \mu$ – модуль сдвига материала слоя.

Положим, как обычно:

$$W(x, y) = w(x, y) - w_N^{(\infty)}(x, y), \quad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi_N^{(\infty)}(x, y). \quad (5)$$

Далее введем функции $g_{\pm}(x)$ следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=+h} &= \{H(x+a) - H(x-a)\} g_+(x) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=-h} &= \{H(x+b) - H(x-b)\} g_-(x) \end{aligned} \right. , \quad (6)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда.

Подставив (5) в (3) и сделав преобразование Фурье (ПФ), мы приходим к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} - \gamma^2 \bar{w}(\sigma, y) &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi}(\sigma, y) &= -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{w}(x, y) \end{aligned} \right. , \quad (7)$$

где $\gamma = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$, $\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$ – преобразование Фурье функции f .

Решение системы (7), с учетом (5), можно представить в виде:

$$\bar{w}(\sigma, y) = Ach\gamma y + Bsh\gamma y + 2\pi A_N \cos \lambda_N (y-h) \delta(\sigma - \gamma_N), \quad \bar{\varphi}(\sigma, y) = Cch\gamma y + Dsh\gamma y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{w}(\sigma, y), \quad (8)$$

где A, B, C, D – неизвестные постоянные интегрирования, $\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

Граничные условия (4)₁ - (4)₂ и (5) после ПФ примут вид:

$$\bar{\varphi}(\sigma, \pm h) = 0 \quad (|\sigma| < \infty), \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{w}(\sigma, y)}{\partial y} + \frac{e_{15}}{c_{44}} \bar{\varphi}(\sigma, y) \right) \Big|_{y=\pm h} = \bar{Q}_{\pm}(\sigma) \quad (|\sigma| < \infty), \quad (10)$$

где

$$\bar{Q}_+(\sigma) = \int_{-a}^a g_+(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{Q}_-(\sigma) = \int_{-b}^b g_-(x) e^{i\sigma x} dx \quad (11)$$

Подставив (8) в граничные условия (9) и (10), после несложных преобразований, получим:

$$\bar{w}(\sigma, y) = \frac{ch\gamma y}{2\gamma sh\gamma h} \cdot \frac{\bar{G}^-(\sigma)}{1 + \bar{M}_2(\sigma)} + \frac{sh\gamma y}{2\gamma ch\gamma h} \cdot \frac{\bar{G}^+(\sigma)}{1 + \bar{M}_1(\sigma)} + \pi A_N \left\{ 2 \cos \frac{\pi N (y-h)}{2h} + \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}} \left[\frac{1 + (-1)^N}{1 + \bar{M}_2(-\gamma_N)} \frac{|\gamma_N| |sh|\gamma_N h| ch\gamma y}{\gamma ch\lambda h ch|\gamma_N h|} + \frac{1 + (-1)^N}{1 + \bar{M}_1(-\gamma_N)} \frac{|\gamma_N| |ch\gamma_N h sh\gamma y|}{\gamma sh\lambda h sh|\gamma_N h|} \right] \right\} \delta(\sigma + \gamma_N), \quad (12)$$

$$\bar{\varphi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}} \left\{ \frac{ch\gamma y}{\gamma sh\gamma h} \cdot \frac{\bar{G}^-(\sigma) R_c(\sigma, y)}{1 + \bar{M}_2(\sigma)} + \frac{sh\gamma y}{\gamma ch\gamma h} \cdot \frac{\bar{G}^+(\sigma) R_s(\sigma, y)}{1 + \bar{M}_1(\sigma)} \right\} + \pi A_N \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \left\{ \left[\frac{1 + (-1)^N}{ch(\pi N / 2)} \frac{R_c(\sigma, y) ch\gamma y}{1 + \bar{M}_2(\sigma)} + \frac{1 - (-1)^N}{sh(\pi N / 2)} \frac{R_s(\sigma, y) sh\gamma y}{1 + \bar{M}_1(\sigma)} \right] \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}} - \frac{1 + (-1)^N}{\cos(\pi N / 2)} ch\gamma_N y - \frac{1 - (-1)^N}{\sin(\pi N / 2)} sh\gamma_N y + 2 \cos \frac{\pi N (y-h)}{2h} \right\} \delta(\sigma + \gamma_N) \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}^+(\sigma) &= \bar{Q}_+(\sigma) + \bar{Q}_-(\sigma), \quad \bar{G}^-(\sigma) = \bar{Q}_+(\sigma) - \bar{Q}_-(\sigma), \\ R_c(\sigma, y) &= 1 - \frac{ch\gamma y}{ch\gamma h} \frac{ch\sigma y}{ch\sigma h}, \quad R_s(\sigma, y) = 1 - \frac{sh\gamma y}{sh\gamma h} \frac{sh\sigma y}{sh\sigma h}, \\ \bar{M}_1(\sigma) &= \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}} \left(1 - \frac{|\sigma|}{\gamma} th\gamma h \cdot cth\sigma h \right), \quad \bar{M}_2(\sigma) = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}} \left(1 - \frac{|\sigma|}{\gamma} cth\gamma h \cdot th\sigma h \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что решения (12) и (13) удовлетворяют граничным условиям (9), (10). Из (12) и (13), после обратного ПФ можно получить функции $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$, представляющие электроупругое волновое поле в волноводе. Однако в (12) и (13) входят еще неизвестные функции \bar{Q}_\pm , или точнее, функции $g_\pm(x)$. Теперь, подставляя (12) и (13) в граничные условия (4), после обратного ПФ и некоторых, довольно сложных выкладок, приходим к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных $g_\pm(x)$. Эти уравнения, в связи с известными ограничениями, здесь не приводятся. Для одного частного случая они приведены ниже.

Рассмотрим частный случай задачи при условиях: $e_{15} = 0$, $a = b$, $N = 2m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Тогда $g_+(x) = -g_-(x)$ и указанная система уравнений сводится к следующему интегральному уравнению с сингулярным ядром Коши:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a K(x-t)g_+(t)dt = -i\gamma_{2m}A_m e^{i\gamma_{2m}x} \quad (|x| < a), \quad (15)$$

$$K(z) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma ch\gamma z}{\gamma sh\gamma h} e^{-i\sigma z} d\sigma \quad (16)$$

с дополнительным условием

$$\int_{-a}^a g_+(t)dt = 0. \quad (17)$$

где

$$\gamma \equiv \gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}, \quad \gamma_{2m} = \sqrt{k^2 - (\pi m / h)^2}, \quad k > \pi m / h, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Интеграл (16) понимается в смысле обобщенных функций и не поддается непосредственному интегрированию. При помощи контурного интегрирования, в сочетании асимптотических методов интегрирования, ядро из (16) представится в виде:

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \kappa \text{sign}(z) \left\{ -\frac{\pi}{2} \cos(\kappa|z|v) + I_1(z) + v^2 I_2(z) + 2I_3(z) - I_4(z) \right\}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^v \frac{\sigma e^{i\kappa|z|\sigma}}{\sqrt{v^2 - \sigma^2}} d\sigma + v^2 \int_v^{+\infty} \frac{e^{-\kappa|z|\sigma}}{\sqrt{v^2 + \sigma^2}} d\sigma + \int_0^v \left(\frac{\sqrt{v^2 - \sigma^2} e^{i\sqrt{v^2 - \sigma^2}}}{\sin \sqrt{v^2 - \sigma^2}} - 1 \right) \frac{\sigma \sin(\kappa|z|\sigma)}{v^2 - \sigma^2} d\sigma, \\ I_2(z) &= \int_v^{+\infty} \frac{\sqrt{\sigma^2 - v^2} e^{-\sqrt{\sigma^2 - v^2}} - sh\sqrt{\sigma^2 - v^2}}{\sqrt{\sigma^2 - v^2} sh\sqrt{\sigma^2 - v^2}} \frac{\sin(\kappa|z|\sigma)}{\sqrt{\sigma^2 - v^2}} d\sigma, \\ I_3(z) &= \int_v^{+\infty} \frac{\sqrt{\sigma^2 - v^2} \sin(\kappa|z|\sigma)}{e^{2\sqrt{\sigma^2 - v^2}} - 1} d\sigma, \quad I_4(z) = \int_v^{+\infty} \frac{\sin(\kappa|z|\sigma)}{\sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (20)$$

В этом случае уравнение (15) и условие (17) соответственно примут вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_1(x-t)g_1^{(m)}(t)dt = A_m^* \alpha_{2m} e^{i(-\pi/2 + \kappa\alpha_{2m}x)} \quad (|x| < 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

$$\int_{-1}^1 g_1^{(m)}(t)dt = 0. \quad (22)$$

где

$$g_1^{(m)}(t) = g_+(at), \quad \kappa = a/h, \quad v = kh, \quad \alpha_{2m} = \sqrt{v^2 - (\pi m)^2} \quad (v > \pi m). \quad (23)$$

Решение уравнения (21) с условием (22) построено методом механических квадратур по многочленам Чебышева. Для волнового поля в областях $x < -a$ ($w^{(-)}(x, y)$) и $x > a$ ($w^{(+)}(x, y)$) получена формула:

$$w^{(\pm)}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nm}^{(\pm)} e^{\pm i\kappa\alpha_n x/a} \cos \lambda_n y + A_m^* e^{i\kappa\alpha_{2m} x/a} (-1)^m \cos \frac{\pi m}{h} y \quad (24)$$

где

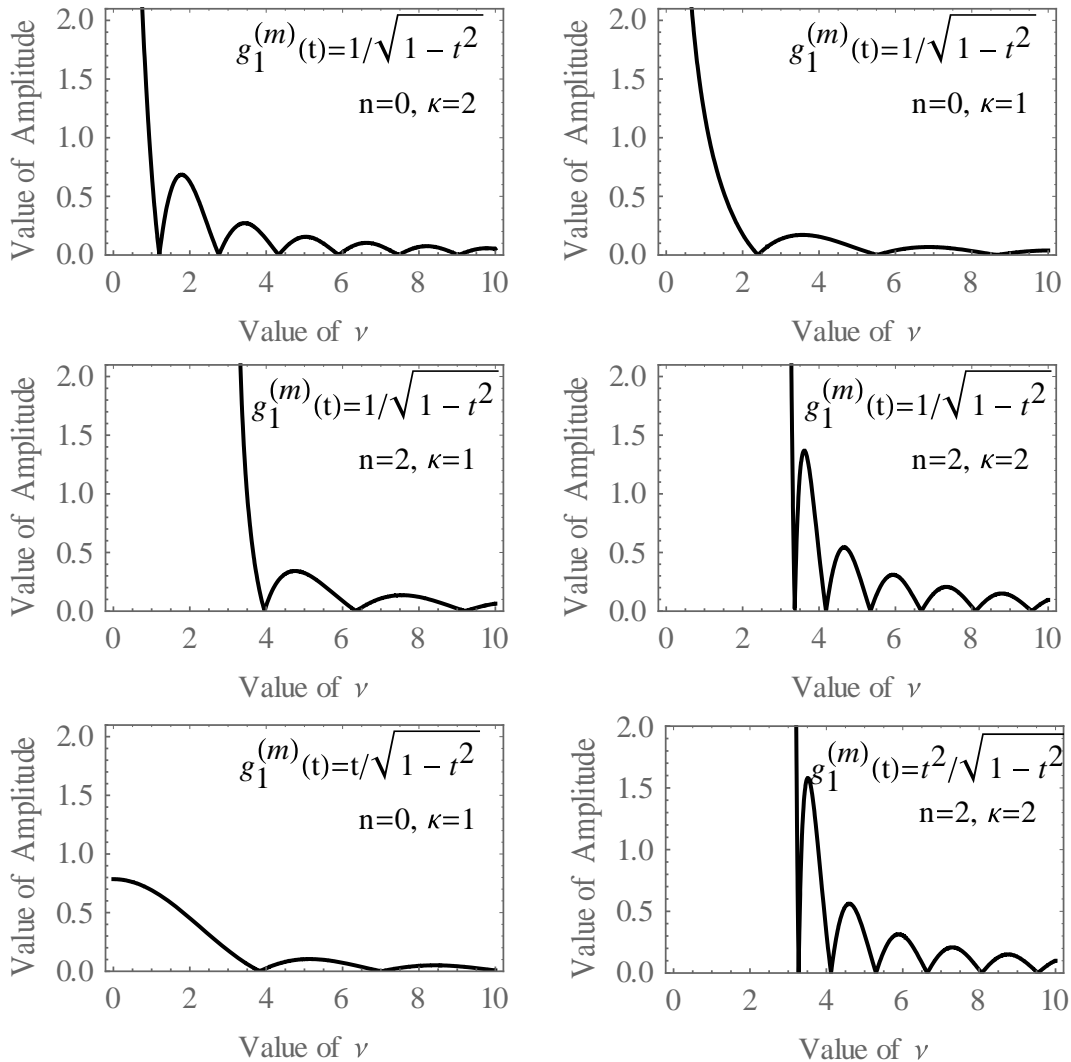
$$A_{nm}^{(\pm)} = (-1)^n \frac{i(2 - \delta_{0n})}{2\alpha_n} \cos \frac{\pi n}{2} J_{nm}^{(\pm)}, \quad J_{nm}^{(\pm)} = \kappa \int_{-1}^1 g_1^{(m)}(t) e^{\pm i\kappa\alpha_n t} dt, \quad \alpha_n = \sqrt{v^2 - (\pi n/2)^2} \quad (v > \pi n/2), \quad (25)$$

δ_{nn} – символ Кронекера. При нечетном n отсутствуют отраженные и проходящие волны, так как $\cos(\pi n/2) = 0$. Из обозначений (23) и (25) следует, что в общем случае, при $v \rightarrow \pi n/2$ ($n=0,1,2,\dots$) численные значения амплитуды $A_{nm}^{(\pm)}$ неограниченно возрастают, что означает наличие резонанса. В рассматриваемом здесь случае условие появления резонанса сводится к условию:

$$\int_{-1}^1 g_1^{(m)}(t) dt \neq 0. \quad (26)$$

Отметим, что условие (17) указывает на отсутствие резонанса в данном случае.

В случае, когда $g_1^{(m)}(t)$ – заданная функция, из (25) следует, что численные значения амплитуд отраженных ($w_{nm}^{(-)}$) и проходящих ($w_{nm}^{(+)}$) волн равны между собой. На графиках приведены зависимости численных значений амплитуд от $v = kh$ для различных значений κ и для некоторых заданных функций $g_1^{(m)}(t)$.



Анализ выше приведенных графиков показывает, что увеличение κ ведет к увеличению осцилляций амплитуды. Для нечетных функций $g_1^{(m)}(t)$ резонанс отсутствует, а для четных

функций $g_1^{(m)}(t)$ имеет место резонанс, который возникает при значениях $\nu = 0, \pi, 2\pi, \dots$, т.е. когда $\alpha_n = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962, 297с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., Мир, 1974, 327 с.
3. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М., Физматлит, 1913. 328 с.
4. Балакирев М.К. Гишинский И. А. Волны в пьезокристаллах, Новосибирск, Наука, 1982, 240с.
5. Мелешко В. В., Бондаренко А. А. и др. – Математические методы и физико-механические поля. 2008. т. 51, стр.86-104, 163-180.
6. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство. //Изв. НАН РА, Механика, 2007, т. 60, №3, с.23-38.
7. Агаян К.Л. Дифракция электроупругих сдвиговых плоских волн на краях полубесконечных электродов в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Эколог. вестник научн. центров, 2011, , №1, стр. 10-18
8. Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругих и электроупругих средах, допускающих распространение поверхностных волн. //Труды межд. конф. "Актуальные проблемы механики сплошной среды", посвященной 100-летию акад. НАН РА Н.Х.Арутюняна, Ереван, 2012, стр. 186-190.
9. Avetisyan A.S. Amplitude-phase distortion of the normal high-frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces. //Proc. of NAS Armenia, Mechanics, 2017. vol. 70, №2, p. 28-42.
10. Агаян К.Л. Плоская сдвиговая волна в слое с неоднородными граничными условиями. //Труды IX межд. конф. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред", Ереван, 2018, стр. 19-23.
11. M.V. Belubekyan, S.L. Sahakyan, On the localization of shear vibrations in a composite elastic semi-infinite flat waveguide, Proceedings of the Yerevan State University, 2020, 54 (1), p. 44–49
12. Ара С. Аветисян, С. Л. Саакян. Отражение и прохождение форм волны сдвига от границы раздела двух полубесконечных частей упругого композитного волновода. //Доклады НАН Армении, 2023, т. 123, №1, стр. 12-20.

Сведения об авторах

Агаян Каро Леренцович – д.ф.-м.н., ведущий науч. сотр. Института механики НАН РА, (+374 49) 485566, e-mail: karo.aghayan@gmail.com.

Атоян Левон Арутюнович – к.ф.-м.н., старший науч. сотр. Института механики НАН РА, (+374 91) 508290, e-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Леонович – доцент кафедры "Численный анализ и мат. моделирование" ЕГУ, науч. сотр. Института механики НАН РА, (+374 77) 002408, e-mail: ssahakyan@ysu.am

ПЛОСКАЯ СДВИГОВАЯ ВОЛНА В УПРУГОМ СЛОЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Агаян К.Л., Закарян В.Г.

Рассматривается задача о направленном распространении плоских сдвиговых упругих волн в волноводе (слое) при смешанных граничных условиях на граничных плоскостях. Решение задачи в общем случае сводится к решению из двух интегральных уравнений, ядра которых представляются в виде суммы гиперсингулярного, логарифмического и регулярных частей. Получены явные выражения волновых функций, представляющих поле упругих перемещений во всех областях слоя. Определены число и волновые характеристики отраженных и проходящих волн.

1. Введение. Динамические задачи о направленном волноводном распространении гармонических волн в упругих и электроупругих протяженных телах различных конфигураций составляют предмет теоретических и практических исследований, проводимых многими исследователями.

Отметим лишь книги [1-4] и работы [5-13], в которых обсуждаются вопросы об определении волновых полей в различных волноводах с разными механическими свойствами и различной конструкции и, что важно, с различными граничными условиями на граничных поверхностях и линиях. Рассматриваемая здесь задача по своей постановке родственна работе [10]. Здесь, решение задачи сводится к системе из двух интегральных уравнений с гиперсингулярным ядром, решение которого построено методом механических квадратур с узлами в корнях многочленов Чебышева [14].

2. Постановка задачи и вывод определяющих системы уравнений. Упругий слой – волновод с модулем сдвига μ_0 и толщиной $2h$ в декартовой системе координат занимает область $\Omega_0 \{ |x| < \infty, -h < y < h, |z| < \infty \}$ и находится в условиях антиплоской деформации.

Предполагается, что волновод по полуплоскостям $(|x| \geq a, |z| < \infty)$ и $(|x| \geq b, |z| < \infty)$ граничных плоскостей $y = \pm h$ соответственно, жестко закреплены (рис.1).

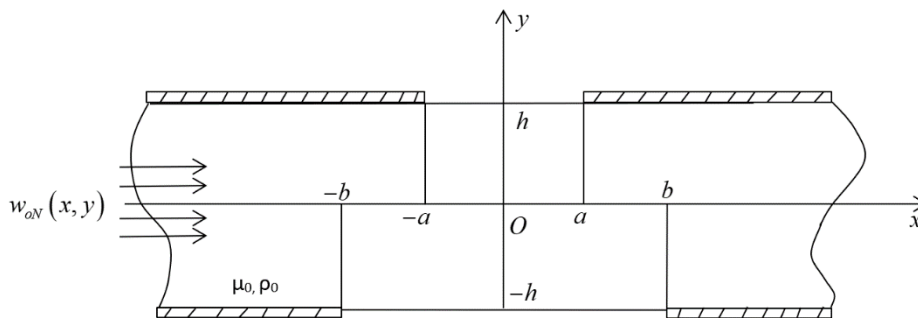


Рис.1

Относительно полуплоскостей $(|x| < a, y = h, |z| < \infty)$ и $(|x| < b, y = -h, |z| < \infty)$ предполагается, что на них могут быть заданы равномерно распределенные по оси Oz амплитуды напряжения или перемещения.

Со стороны левой части слоя ($x < 0$) из бесконечности по направлению оси Ox , набегают гармоническая распространяющаяся плоская сдвиговая волна с амплитудой:

$$w_{0N}(x, y) = C_N e^{i\gamma_N x} \sin \frac{\pi N}{2h} (y - h) \quad (1)$$

$$\gamma_N = \sqrt{k_0^2 - \lambda_N^2}; \quad \lambda_N = \frac{\pi N}{2h}; \quad k_0 > \lambda_N; \quad N = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Здесь $w_0(x, y)$ - амплитуда упругого перемещения $u_z(x, y, t) = w_0(x, y)e^{-i\omega t}$, где ω - частота колебаний волны, t - время, C_N - постоянная, $k_0 = \omega/c_0$ - волновое число, $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ - скорость распространения сдвиговой волны в слое. Число N натуральное число, удовлетворяющее условию $N < 2k_0 h/\pi$, которое, в свою очередь, обеспечивает выполнение условия проходящей волны (1) [1,2].

Отметим, что в (1) и, в дальнейшем, гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ опущен, так что задача решается в амплитудах.

При этих предположениях требуется определить излученное волновое поле в слое, а также число отраженных и проходящих волн и их волновые характеристики в зависимости от моды падающей волны.

Обращаясь теперь к поставленной задаче, заметим, что для ее решения следует исходить из скалярного волнового уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + k_0^2 w_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0 \quad (3)$$

при следующих граничных условиях :

$$w_0(x, \pm h) = 0, \quad \begin{cases} |x| > a; y = h \\ |x| > b; y = -h \end{cases} \quad (4)$$

$$\tau_{yz}(x, \pm h) = \mu_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = -\mu_0 q_{\pm}(x), \quad \begin{cases} |x| < a; y = h \\ |x| < b; y = -h \end{cases} \quad (5)$$

где $q_{\pm}(x)$ - заданные функции.

Получим, как обычно :

$$W(x, y) = w_0(x, y) - w_{0N}(x, y) \quad (6)$$

где $w_{0N}(x, y)$ дается формулой (1). Введем функцию $g_{\pm}(x)$, доопределив граничное условие на всю ось Ox , следующим образом :

$$w_0(x, y) \Big|_{y=\pm h} = \begin{cases} [H(x+a) - H(x-a)g_+(x)] \\ [H(x+b) - H(x-b)g_-(x)] \end{cases} \quad (7)$$

где $g_{\pm}(x)$ - неизвестные функции перемещения, а $H(x)$ - известная функция Хевисайда.

Следует отметить, что возможна и другая постановка задачи, когда функции из (7) заданы, т.е. заданы перемещения, и тогда функции $q_{\pm}(x)$ определяются при помощи (5), а граничные условия даются объединением (4) и (7).

Применив к (3) - (7) преобразование Фурье, в конечном итоге, решение краевой задачи (3), (4)-(7), учитывая при этом обозначение (6), удастся представить в следующем виде:

$$w_0(x, y) = \int_{-a}^a J_+(x-t, y) g_+(t) dt + \int_{-b}^b J_-(x-t, y) g_-(t) dt + 2\pi w_{0N}(x, y), \quad |x| < \infty, |y| < h \quad (8)$$

где

$$J_{\pm}(x-t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sh(\gamma_0(h \pm y))}{sh(2\gamma_0 h)} e^{-i\sigma(x-t)} d\sigma, \quad \gamma_0 = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2} \quad (9)$$

Отметим, что построенное решение удовлетворяет граничным условиям (7).

Прежде чем перейти к вопросу определения $g_{\pm}(x)$, обратимся к вычислению несобственных интегралов $J_{\pm}(x-t, y)$ из (9), входящих в (8). Эти интегралы не поддаются непосредственному интегрированию. Для вычисления интегралов из (9), как обычно, следует перейти в комплексную плоскость $\alpha = \sigma + i\tau$, где подынтегральная функция $sh(\gamma_0(h \pm y))/sh(2\gamma_0 h)$ является целой функцией. Вычислив эти интегралы, для $w_0(x, y)$ из (8) окончательно получим

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi n}{4h^2 \alpha_n} \left[\sin(\lambda n(h+y)) \int_{-a}^a g_+(t) e^{+i\alpha_n|x-t|} dt + \right. \\ \left. + \sin(\lambda n(h-y)) \int_{-a}^a g_-(t) e^{+i\alpha_n|x-t|} dt \right] + 2\pi w_{0N}(x, y); \quad |x| < \infty, |y| < h \quad (10)$$

В тех случаях, когда заданы $g_{\pm}(x)$, волновое поле следует вычислять непосредственно при помощи (10).

При неизвестных $g_{\pm}(x)$, следует при помощи (8) удовлетворить граничному условию (5), после чего, для определения неизвестных $g_{\pm}(x)$ придем к следующей системе из двух интегральных уравнений :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a K_{11}(x-t) g_+(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b K_{12}(x-t) g_-(t) dt = q_+(x) + f_{1N}(x) \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a K_{21}(x-t) g_+(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b K_{22}(x-t) g_-(t) dt = q_-(x) + f_{2N}(x), \quad |x| < b$$

$$K_{11}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0 ch(2\gamma_0 h)}{sh(2\gamma_0 h)} e^{-i\sigma z} d\sigma = K_{22}(z) \quad (12)$$

$$K_{12}(z) = K_{21}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0}{sh(2\gamma_0 h)} e^{-i\sigma z} d\sigma$$

$$f_{1N}(x) = (-1)^N f_{2N}(x) = 2\pi \lambda_N C_N e^{-i\gamma_N x} \quad (13)$$

Система интегральных уравнений (11) представляет собой определяющую систему уравнений поставленной задачи.

3. Рассмотрим частный случай поставленной задачи, приняв при этом, что $a = b$; $q_+(x) = q_-(x) = 0$; $N = 2m$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)

Тогда получится, что $g_+(x) = -g_-(x)$ и, в итоге, система (12) сведется к уравнению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k_0(x-t) g_+(t) dt = 2\pi^2 m \frac{1}{h} C_{2m} e^{-i\gamma_{2m} x}, \quad |x| < a \quad (14)$$

$$k_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0 [th(2\gamma_0 h) - sh^{-1}(2\gamma_0 h)] e^{-i\sigma z} d\sigma \quad (15)$$

с краевыми условиями $g_+(-a) = g_+(a) = 0$.

В ядрах (12) интегралы понимаются в смысле обобщенных функций. При помощи контурного интегрирования, в сочетании с асимптотическими методами интегрирования [5,10], ядро (15) удастся представить в виде суммы гиперсингулярного, слабосингулярного и регулярного ядер:

$$k_0(x-t) = -\frac{2}{|x-t|^2} - k_0^2 \ln|x-t| + R(x-t) \quad (16)$$

где $R(x-t)$ представляется в виде суммы сходящихся интегралов, выражения которых здесь не приводятся.

Имея решение $g_+^m(t)$ уравнения (14) при заданном m , из (8) получим представление волнового поля в областях $|x| < a$ ($w_0^{(-)}(x, y)$) и $|x| > a$ ($w_0^{(+)}(x, y)$) в следующем виде

$$w_0^{(\pm)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}^{(\pm)} \sin(\lambda_n y) e^{\pm i\chi\alpha_n \frac{x}{a}} + 2\pi C_{2m} (-1)^m \sin\left(\frac{\pi m}{h} y\right) e^{i\chi\alpha_m \frac{x}{a}} \quad (17)$$

где числовые коэффициенты амплитуд $A_{nm}^{(\pm)}$ определяются формулами:

$$A_{nm}^{(\pm)} = (-1)^n \frac{\pi n}{2\alpha_n} \cos \frac{\pi n}{2} \chi \int_{-1}^1 g_+^{(m)}(t) e^{\pm i\chi\alpha_n t} dt, \quad v_0 = k_0 h, \quad \chi = a/h, \quad (18)$$

$$\alpha_n = \sqrt{v_0^2 - (\pi n/2)^2}$$

Из выражения (18) следует, что, в общем случае, при $v_0 \rightarrow \pi n/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ числовые коэффициенты $A_{nm}^{(\pm)}$ могут неограниченно возрастать, что привело бы к явлению резонанса. Однако нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае, отсутствие резонанса зависит от решения интегрального уравнения $g_+^{(m)}(x)$, в плане выполнения условия

$$\int_{-a}^a g_+^{(m)}(x) dx = 0$$

В противном случае имеет место резонанс.

В табл. 1, при помощи (18) определено число распространяющихся отраженных и проходящих волн для некоторых значений параметров v_0 и m :

Таблица 1.

v_0	$0 < v_0 < \pi$		$\pi < v_0 < 2\pi$		$2\pi < v_0 < 3\pi$		$3\pi < v_0 < 4\pi$	
	отр.	прох.	отр.	прох.	отр.	прох.	отр.	прох.
$m=0$	1	2	2	3	3	4	4	5
$m=1$	-	-	2	3	3	4	4	5
$m=2$	-	-	-	-	3	4	4	5
$m=3$	-	-	-	-	-	-	5	6

ЛИТЕРАТУРА

1. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 297с.
2. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 327с.
3. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.
4. Сумбатьян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013, 328с.
5. Мелешко В.В., Бондаренко А.А. и др. Упругие волноводы: История и современность I, II. Математические методы и физико – механические поля. 2008. Т.51. №2, с.86-104 и №4, с. 163-180.
6. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство // Изв. НАН Армении. Механика 2007. Т.60 №3. С.23-28.

7. Агаян К.Л. Дифракция электроупругих сдвиговых плоских волн на краях полубесконечных электродов в пьезоэлектрическом пространстве со щелью //Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №1. С. 13-18.
8. Piliposyan D.G., Ghazaryan R.A., Ghazaryan K.B. Shear waves in periodic waveguide with alternating boundary condition. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2014. Т.67. №3. P.40-48.
9. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A. Amplitude – phase distortion of the normal high – frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics. 2017. Vol.70. №2. P.28-42.
10. Агаян К.Л. Плоская сдвиговая волна в слое с неоднородными граничными условиями. Тр. X межд. конф. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, С.19-23.
11. Саакян С.Л. О возможности внутреннего резонанса сдвиговых частот упругого волновода, обусловленного смешанными краевыми условиями. //Изв. НАН Армении. Механика 2019, Т.72, №2, С.48-56, <http://doi.org/10.33018/72.2.4>.
12. Агаян К.Л. Дифракция сдвиговых плоских волн на полубесконечной трещине в составном упругом полупространстве. //Изв. НАН Армении. Механика 2020, Т.73, №2, С.22-34, <http://doi.org/10.33018/73.2.2>.
13. Аветисян А.С., Саакян С.Л. Отражение и прихождение форм волн сдвига от границы раздела двух полубесконечных частей упругого композитного волновода. Доклады НАН Армении, 2023, Т.123, №1, С.12-20.
14. Акопян В.В., Гаспарян А.В., Саакян А.В. О решении одного гиперсингулярного интегрального уравнения, встречающегося в механике трещин. Доклады НАН РА, т. 123, №2, сс. 18-30. DOI:10.54503/0321-1339-2023.123.2-18

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. Тел.: (+37491)485-566, E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.: (+37477)789-264, E-mail: vahe-zaqaryan@mail.ru

К ВОПРОСУ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МОДЕЛЕЙ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

Айзикович С.М., Лапина П.А.

В рамках решения контактных задач о действии жесткого штампа на поверхность неоднородных сред (неоднородного полупространства, неоднородного слоя на упругом основании, неоднородного слоя на жестком основании) осуществлен сравнительный анализ моделей неоднородных упругих оснований. При построении решений интегральных уравнений соответствующих контактных задач используются приближённые аналитические методы (метод Винера-Хопфа, метод большого параметра, двусторонне асимптотический метод). Исходя из близости трансформант ядер интегральных уравнений, выявлены области параметров упругих модулей моделей неоднородных сред, для которых значения контактных напряжений также оказались близки. Это обеспечивает эквивалентность рассматриваемых моделей в полученной области параметров.

1. Введение

В работе рассмотрены контактные задачи о сдвиге поверхности упругого неоднородного полупространства и упругих неоднородных по глубине слоев, лежащих на недеформируемом и упругом основании. Контактные задачи сведены к решению интегральных уравнений типа свёртки Фурье I рода с разностными ядрами. Решения задач осуществлены приближённо аналитически при помощи асимптотических методов, в том числе, методом Винера-Хопфа и двусторонне асимптотическим методом, с использованием простейших аппроксимаций ядер интегральных уравнений. Модели рассматриваемых сред являются близкими в определенной области параметров задачи. Проведен численный анализ близости трансформант ядер интегральных уравнений и контактных напряжений в зависимости от параметров задачи.

2. Постановка задачи о сдвиге поверхности неоднородной среды

Рассматриваются задачи о чистом сдвиге поверхности неоднородной среды в рамках трех моделей среды (неоднородное полупространство, модуль сдвига которого растет с глубиной, неоднородный слой, лежащий на недеформируемом основании, и неоднородный слой, лежащий на упругом основании). Поверхность полупространства/слоя сдвигается на величину ε полосовым бесконечным штампом ширины $2a$. Уравнение теории упругости в случае антиплоской деформации имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

где напряжения $\sigma_{zx}(x, y)$, $\sigma_{zy}(x, y)$ и деформации $w(x, y)$ связаны соотношениями

$$\sigma_{zx} = \mu(y) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{zy} = \mu(y) \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Здесь $\mu(y)$ - модуль сдвига неоднородного по вертикальной координате полупространства/слоя.

В случае модели неоднородного полупространства (задача 1) граничные условия имеют вид

$$w(x, 0) = \varepsilon \quad |x| \leq a \quad (2.3)$$

$$\sigma_{yz}(x, 0) = \begin{cases} -\varphi(x) & |x| \leq a \\ 0 & a < |x| < \infty \end{cases} \quad (2.4)$$

где $\varphi(x)$ - контактные напряжения под штампом, подлежащие определению.

К условиям (2.3)-(2.4) на поверхности добавляется условие убывания решения на бесконечности

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \left\{ w, \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = 0. \quad (2.5)$$

В случае если слой лежит на недеформируемом основании (задача 2), граничные условия на верхней поверхности имеют вид (2.3)-(2.4), а граничные условия на нижней границе слоя задаются в виде

$$w(x, H) = 0 \quad |x| < \infty, \quad (2.6)$$

где H - толщина неоднородного слоя.

Слой, лежащий на упругом основании (задача 3), представляется неоднородным полупространством, модуль сдвига которого задается в виде

$$\begin{cases} \mu(y), & 0 \leq y \leq H \\ \mu_\infty, & H < y < \infty \end{cases} \quad (2.7)$$

где μ_∞ - модуль сдвига упругого основания.

В этом случае граничные условия задачи состоят из условий (2.3), (2.4) на поверхности слоя, к которым добавляется условие убывания решения на бесконечности вида (2.5).

3. Интегральные уравнения контактных задач

В работе рассмотрен случай, когда модуль сдвига неоднородного полупространства/слоя изменяется по экспоненциальному закону

$$\mu(y) = \mu_0 e^{2d y}, \quad (3.1)$$

где $0 \leq y < \infty$ в случае задачи 1 и $0 \leq y \leq H$ в случае задач 2 и 3. Здесь μ_0 - величина модуля сдвига на верхней поверхности неоднородного слоя, а d - величина, характеризующая скорость изменения модуля сдвига с глубиной.

В таком случае в задаче 3 модуль сдвига упругого основания $\mu_\infty = \mu_0 e^{2dH}$, т.е. модуль сдвига упругого основания больше модуля сдвига на поверхности слоя в e^{2dH} раз.

С помощью интегрального преобразования Фурье решение задач сведено к решению интегральных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений.

Решение задачи 1 сведено к решению интегрального уравнения типа свёртки Фурье I рода с разностным ядром относительно неизвестных приведенных контактных напряжений [1]

$$\int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha) e^{i\alpha \left(\frac{\xi-x}{\lambda} \right)} d\alpha = 2\pi, \quad |x| \leq 1, \quad (3.2)$$

$$K(\alpha) = \left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2} \right)^{-1}, \quad \lambda = \frac{1}{da}. \quad (3.3)$$

где $\tilde{\varphi}(x) = a\varepsilon^{-1} \mu_0^{-1} \varphi(x)$ - неизвестные приведенные контактные напряжения, $\varphi(x)$ - истинные контактные напряжения.

Ядро интегрального уравнения обладает следующими асимптотическими свойствами

$$K(\alpha) = |\alpha|^{-1} + O(\alpha^{-2}) \quad \text{при } |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

$$K(\alpha) = K(0) + O(\alpha^2) \quad \text{при } |\alpha| \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Для построения приближенных аналитических решений интегрального уравнения используются асимптотические методы, построенные по безразмерному параметру λ . При малых значениях безразмерного параметра $\lambda \in (0, \lambda_0)$ решение интегрального уравнения выбирается в виде нулевого члена ряда Неймана и строится аналитически на основе метода Винера — Хопфа [2] с дальнейшим использованием простейшей аппроксимации ядра $K(\alpha)$ следующего вида

$$K(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + \alpha^2}} \frac{B^2 + \alpha^2}{C^2 + \alpha^2}, \quad \frac{1}{A} \frac{B^2}{C^2} = K(0). \quad (3.6)$$

При построении решения интегрального уравнения задачи в случае больших значений $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$ используются разложения в ряды по степеням безразмерного параметра λ и решение записывается в виде двойного функционального ряда, как это было предложено в [3].

Для задачи 2 [4] интегральное уравнение в безразмерной форме имеет вид аналогичный (3.2), где

$$K(\alpha) = (d_0 + V \operatorname{cth} V)^{-1}, \quad V = \sqrt{\alpha^2 + d_0^2}, \quad d_0 = Hd, \quad \lambda = \frac{H}{a}. \quad (3.7)$$

Трансформанта $K(\alpha)$ обладает асимптотическими свойствами (3.4), (3.5). При построении приближенных аналитических решений интегрального уравнения задачи 2 используются

асимптотические методы по безразмерному параметру λ . При малых значениях параметра $\lambda \in (0, \lambda_0)$ решение интегрального уравнения строится в рамках метода Винера — Хопфа.

В случае задачи 3 интегральное уравнение относительно неизвестных контактных напряжений согласно [5] записывается в таком же виде, как и (3.2), с учетом обозначения

$$K(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|} L(\alpha). \quad (3.8)$$

Функция $L(\alpha)$ получена аналитически и имеет вид

$$L(\alpha) = \frac{(|\alpha| - d_0) \operatorname{sh} V + V \operatorname{ch} V}{(|\alpha| + d_0) \operatorname{sh} V + V \operatorname{ch} V}, \quad V = \sqrt{\alpha^2 + d_0^2}, \quad d_0 = Hd, \quad \lambda = \frac{H}{a} \quad (3.9)$$

Функция $L(\alpha)$, заданная выражением (3.9), обладает следующими асимптотическими свойствами

$$L(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-1}) \quad \text{при } |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

$$L(\alpha) = L(0) + O(\alpha) \quad \text{при } |\alpha| \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

При решении интегрального уравнения задачи 3 используется двусторонне асимптотический метод [6], для применения которого трансформанта ядра аппроксимируется следующим произведением

$$L(\alpha) = L_{\Pi}^N(\alpha) = \prod_{i=1}^N \frac{\alpha^2 + A_i^2}{\alpha^2 + B_i^2}, \quad (B_i - B_k)(A_i - A_k) \neq 0 \quad \text{при } i \neq k \quad (3.12)$$

На основе предложенной аппроксимации строится приближенное аналитическое решение интегрального уравнения.

4. Численный анализ

На рис. 1 представлены трансформанты ядер интегральных уравнений $|\alpha|K(\alpha)$ для модели неоднородного полупространства (задача 1) и $L(\alpha)$ для модели неоднородного по глубине слоя на упругом основании (задача 3), построенные аналитически и численно-аналитически соответственно, при различных значениях параметров d и H .

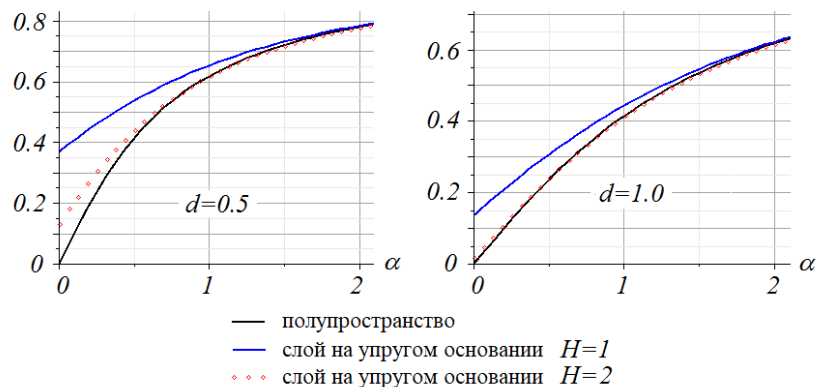


Рис. 1. Трансформанты ядер интегральных уравнений $|\alpha|K(\alpha)$ (задача 1) и $L(\alpha)$ (задача 3) при $d=0.5$, $d=1$ и $H=1$, $H=2$

С ростом параметра α графики $|\alpha|K(\alpha)$ для модели 1 и графики $L(\alpha)$ для модели 3 приближаются и стремятся к значению 1 при $\alpha \rightarrow \infty$.

В области параметров задачи d и H , при которых относительная разность между $|\alpha|K(\alpha)$ для задачи 1 и $L(\alpha)$ для задачи 3 не превышает нескольких процентов, проанализированы контактные напряжения. На рис. 2 представлены относительные контактные напряжения $P^{-1}\tilde{\varphi}(x)$ при $d=1$ и $H=1$, $H=2$, построенные методом Винера-Хопфа (задача 1, $\lambda_1=1$) и двусторонним асимптотическим методом (задача 3, $\lambda_3=1$ и $\lambda_3=2$). Здесь $\tilde{\varphi}(x) = a\varepsilon^{-1}\mu_0^{-1}\varphi(x)$, P - действующая на штамп сила.

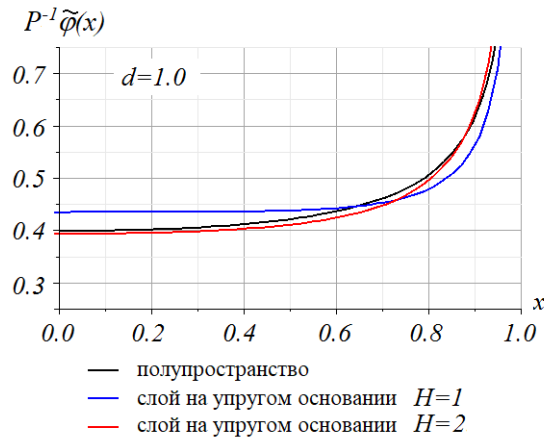


Рис. 2. Относительные контактные напряжения $a\varepsilon^{-1}\mu_0^{-1}P^{-1}\varphi(x)$ при $d=1$ и $H=1$, $H=2$

Численные результаты показывают, что контактные напряжения, построенные в рамках двух моделей (задачи 1 и 3) на основе двух подходов, в области параметров задачи, в которых расхождение между значениями трансформант интегральных уравнений менее 5-7 процентов, также дают погрешность, не превышающую 5-7 процентов.

На рис. 3 представлены трансформанты ядер интегральных уравнений для двух моделей неоднородного по глубине слоя (задачи 2 и 3) при различных значениях параметра d_0 . Для модели 2 на графиках изображены функции $|\alpha|K(\alpha)$, для модели 3 - $L(\alpha)$. С ростом α графики $|\alpha|K(\alpha)$ для модели 2 и графики $L(\alpha)$ для модели 3 приближаются и стремятся к значению 1 при $\alpha \rightarrow \infty$.

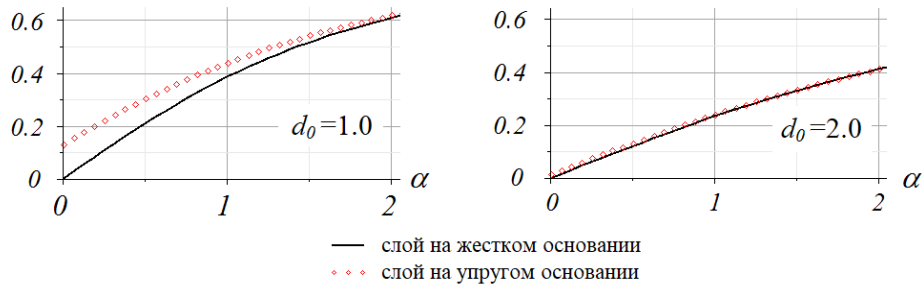


Рис. 3. Трансформанты ядер интегральных уравнений $|\alpha|K(\alpha)$ (задача 2) и $L(\alpha)$ (задача 3) при $d_0=1$, $d_0=2$

Значения параметра $d_0=1$ и $d_0=2$ для задачи 3 означают, что модуль сдвига на поверхности больше модуля сдвига упругого основания в e^2 и e^4 раз соответственно.

В работе рассматривается случай, когда модуль сдвига растет с глубиной ($d_0 > 0$), и при $d_0 \rightarrow +0$ неоднородный слой переходит в однородный. В таком случае с уменьшением d_0 модели 2 и 3 перестают быть близкими, что подтверждается численными расчетами.

Для значений параметра модуля сдвига d_0 , при которых относительная разность трансформант ядер $|\alpha|K(\alpha)$ и $L(\alpha)$ интегральных уравнений задачи 2 и 3 невелика, проанализированы контактные напряжения. Отметим, что с точки зрения приложений интерес представляют тонкие слои. На рис. 4 изображены относительные контактные напряжения $P^{-1}\tilde{\varphi}(x)$ при $d_0=2$, где $\tilde{\varphi}(x)=a\varepsilon^{-1}\mu_0^{-1}\varphi(x)$, P - действующая на штамп сила. В случае модели 2 решение построено методом Винера-Хопфа, что соответствует случаю малых значений безразмерного параметра $\lambda_2=0.5$ (тонкий слой). В случае модели 3 решение построено двухсторонне асимптотическим методом при $\lambda_3=0.5$.

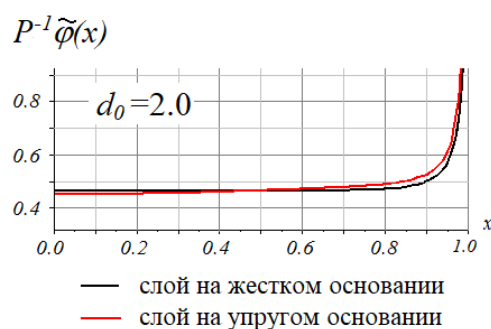


Рис. 4. Относительные контактные напряжения $a\varepsilon^{-1}\mu_0^{-1}P^{-1}\varphi(x)$ при $d_0 = 2$

Численные результаты показали, что при $d_0 > 1$ (когда значение модуля сдвига на нижней границе слоя превосходит значение модуля сдвига на верхней границе слоя более чем e^2 раз) контактные напряжения, построенные для случая слоя на недеформируемом основании, близки к контактным напряжениям, построенным для случая слоя на упругом основании, и погрешность между решениями не превосходит 5 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-19-00732).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zelentsov V.B., Lapina P.A., Mitrin B.I., Eremeyev V.A. Characterization of the functionally graded shear modulus of a half-space. *Mathematics*, vol. 8(4), 2020.
2. Noble B. *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*, Pergamon Press, London, UK, 1958. 246 p.
3. Aleksandrov V.M., Belokon' A.V. Asymptotic solution of a class of integral equations and its application to contact problems for cylindrical elastic bodies. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 31(4), 1967.
4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости, Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. 456 с.
5. Aizikovich S.M. Shear by a stamp of an elastic inhomogeneous half-space of a special form. *Izvestiya AN SSSR. MTT.*, vol. 5, 1978.
6. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S. A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem of the torsion of an elastic half-space inhomogeneous in depth. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 77 (1), 2013.

Сведения об авторах

Айзикович Сергей Михайлович – зав. лабораторией, Донской государственной технической университет,
E-mail saizikovich@gmail.com

Лапина Полина Анатольевна – мл. научный сотрудник, Донской государственной технической университет,
E-mail polina_azarova86@mail.ru

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЁТОМ СУХОГО ТРЕНИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ОТ КООРДИНАТ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В.

Построено точное решение контактной задачи о вдавлении абсолютно жёсткого штампа с прямым основанием в один из берегов конечной трещины, находящегося в однородной упругой плоскости. Принимается, что касательные контактные напряжения связаны с нормальным давлением законом Кулона, коэффициент трения которого прямо пропорционален координате соприкасающихся точек контактирующих поверхностей.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние однородного упругого пространства с коэффициентами Ламэ μ и λ , которое расслаблено конечной магистральной трещиной, которая на базовой плоскости, отнесённой к декартовой системе координат Oxy , занимает интервал $(-a, a)$ оси абсцисс. Будем считать, что пространство деформируется при помощи абсолютно жёсткого включения, вдавливаемого в нижний берег трещины при помощи нормальной сосредоточенной нагрузки величины P_0 , приложенной в центре включения и касательные контактные напряжения под штампом связаны с нормальным контактным давлением законом сухого трения, коэффициент трения которого прямо пропорционален координатам точек контактирующих поверхностей [1].

Ставится задача: построить замкнутое решение.

Записав условия на берегах трещины в следующем виде

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0 \\ \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -f \frac{x}{a} \sigma_y^{(2)}(x, 0) & |x| < a \\ \frac{dv^{(2)}(x, 0)}{dx} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и используя разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной, приведённые в [2], решение поставленной задачи сначала сведём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \sigma(x) - \frac{f\alpha x}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds = A \\ f\alpha \frac{x}{a} \sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \beta v'(x) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

при условиях

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P_0; \quad \int_{-a}^a v'(x) dx = 0, \quad (3)$$

а затем, введя в рассмотрение исчезающие на бесконечности и аналитические во всей комплексной плоскости, разрезанной по интервалу $(-a, a)$ комплексные функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-z} ds; \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-z} ds, \quad (4)$$

к задаче Римана для двух функций:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) = v_1(x)\Phi_2^-(x) + f_1(x) \\ \Phi_2^+(x) = v_2(x)\Phi_1^-(x) + f_2(x) \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j=1, 2$) – компоненты тензора напряжений, действующие в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, $u^{(j)}(x, y)$ и $v^{(j)}(x, y)$ ($j=1, 2$) – горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений в соответствующих полуплоскостях, $\sigma(x) = -\sigma_y^{(2)}(x, 0)$ и $\tau(x) = -\tau_{xy}^{(2)}(x, 0)$ – скачки нормальных и касательных напряжений, действующие на берегах трещины, $u'(x)$ и $v'(x)$ – горизонтальные и вертикальные составляющие дислокаций смещений точек берегов трещины, f – максимальное значение коэффициента трения, а функции $v_j(x)$ и $f_j(x)$ ($j=1, 2$), постоянные $\alpha, \beta, c, A, \vartheta_1$ и ϑ_2 даются формулами:

$$v_1(x) = -\frac{i\beta}{1-icx/a}; \quad v_2(x) = -\frac{i[1+icx/a]}{\beta}; \quad f_1(x) = \frac{A}{2(1-icx/a)};$$

$$f_2(x) = -\frac{iA}{2\beta}; \quad \alpha = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}; \quad \beta = \frac{2(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\vartheta_2}; \quad A = \frac{f\alpha}{\pi a} P_0; \quad c = f\alpha;$$

$$\theta_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda + 3\mu)}; \quad \theta_2 = \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 3\mu)}.$$

Решение определяющих уравнений

Убеждаясь, что соответствующая однородная система (5) имеет два канонических решения искомого класса, соответствующие различным ветвям функций $\ln v_j(x)$ ($j=1, 2$), по процедуре, приведённой в [3], построены частные решения системы (5) для функций $\Phi_j^{(n)}(z)$ ($j=1, 2; n=0, 1$) на основе каждой из канонических решений. Затем, общее решение системы (5) представлено в виде:

$$\Phi_j(z) = C_1 X_j^{(0)}(z) + C_2 X_j^{(1)}(z) + \frac{1}{2} \Phi_j^{(0)}(z) + \frac{1}{2} \Phi_j^{(1)}(z) \quad (j=1, 2), \quad (6)$$

где $X_j^{(n)}(z)$ ($n=0, 1$) – канонические решения соответственной однородной задачи Римана (5), а C_1 и C_2 – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Далее, используя условия (3), и учитывая поведение функций $\Phi_j(z)$ ($j=1, 2$) на бесконечности, определены постоянные C_j ($j=1, 2$) и по известным формулам Племеля-Сохоцкого получены явные выражения для контактного давления и нормальной составляющей дислокации смещений:

$$\sigma(x) = \eta_1(-x) + \eta_1(x); \quad v'(x) = \frac{1}{\beta} [\eta_2(-x) - \eta_2(x)], \quad (7)$$

где

$$\eta_i(x) = \frac{A}{4 \left[1 + (cx/a)^2 \right]} + \frac{Q_i(x)}{\omega(x)} \left(C_1 + \frac{A}{4} I_1(x) \right) + \frac{A}{4} \frac{Q_i(x)}{\omega(-x)} I_2(x);$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(s) F(s)}{s-x} ds; \quad I_2(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(-s) F(s) ds}{\sqrt{a^2 - s^2} (s-x)} \quad (i=1,2),$$

а $I_j(x)$, $Q_j(x)$ ($j=1,2$), $F(x)$ и $\omega(x)$ известные заданные функции.

В частном случае отсутствие касательных напряжений из формул (7) для нормального контактного давления и нормальной составляющей дислокации смещений точек берегов трещины получим выражения

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{2}P_0}{4\pi} \left[\frac{1}{\omega(x)} + \frac{1}{\omega(-x)} \right]; \quad v'(x) = -\frac{\sqrt{2}P_0}{4\pi\beta} \left[\frac{1}{\omega(x)} - \frac{1}{\omega(-x)} \right],$$

которые точно совпадают с результатами работы [4], если в ней принять коэффициент трения равным нулю.

Проведён численный расчет и изучены закономерности изменения контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения. Проведён сравнительный анализ с решением той же задачи в рамках контактной модели Л.А. Галина [5].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта 21Т-2С209

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости // Изв. НАН РА, Механика, 2023, т.76, No2, с.20-31
2. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
3. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и её приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.// ПММ, 1962, т. 26, вып.5, с. 907-912.
4. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной. // Известия НАН РА, Механика, т.73, № 4, 2020г, с. 3-12 .
5. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the Ends// In Book: Altenbach H., Bauer S., Belyaev K., and other (eds), Advances in Solid and Fracture Mechanics, A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of Nikita Morozov 2022, p.187-197.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович - доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188 E-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович - канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188 E-mail: amirjanyan@gmail.com

Акопян Лусине Ваграмовна - канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188 E-mail: lhakobyan@gmail.com

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С КРУГОВОЙ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЁТОМ ОБОБЩЁННОГО СУХОГО ТРЕНИЯ

Акопян В.Н., Саакян А.В., Даштоян Л.Л.

В работе рассмотрено осесимметричное напряжённое состояние однородного упругого пространства с круговой дискообразной трещиной, в один из берегов которой вдавливаются цилиндрический круговой штамп (шайба) с трением. Считая, что в зоне контакта действует закон сухого трения, при котором коэффициент трения зависит от радиальной координаты контактирующих поверхностей и прямо пропорционален им, построено точное решение задачи.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть упругое однородное пространство с коэффициентами Ламе λ, μ в цилиндрической системе координат $\varphi r z$ на плоскости $z=0$ содержит дискообразную круговую трещину радиуса a . Полагаем, что на нижний берег трещины при помощи сосредоточенной нагрузки величины P_0 вдавливаются цилиндрический штамп с круговым основанием того же радиуса, а верхний берег трещины свободен от напряжений. Будем считать также, что касательные контактные напряжения, действующие под штампом связаны с нормальным контактным давлением законом сухого трения. Считается, что коэффициент трения прямо пропорционален радиальным координатам контактирующих поверхностей [1].

Требуется определить контактные напряжения, действующие под штампом и раскрытие трещины.

Условия на берегах трещины будут следующими:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0; \quad \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = 0; \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) = f \frac{r}{a} P(r); \quad w_2(r, 0) = -\delta; \end{cases} \quad (0 < r < a) \quad (1)$$

Здесь $w_j(r, z)$ и $u_j(r, z)$ ($j=1, 2$) – нормальные и радиальные компоненты смещений точек соответственно верхнего и нижнего полупространств в цилиндрической системе координат, $P(r) = -\sigma_z^{(2)}(r, 0)$ – контактное давление под штампом, $\sigma_z^{(j)}(r, z)$ и $\tau_{rz}^{(j)}(r, z)$ ($j=1, 2$) – нормальные и касательные компоненты тензора напряжений, действующих в различных полупространствах, f – максимальное значение коэффициента трения, а δ – нормальное жёсткое смещение штампа.

Решение поставленной задачи будем строить, используя разрывные решения для составного пространства с круговой дискообразной трещиной, приведённые в [2]. При помощи указанных решений, удовлетворив условиям (1), перейдя к образам Абея для скачков напряжений на берегах трещины $\sigma_*(r)$, $\tau_*(r)$ и компонент дислокации смещений точек берегов трещины $w'_*(r)$, $u'_*(r)$, после некоторых преобразований, учитывая, что образы напряжений связаны тем же законом, что и оригиналы и, исключив из полученных уравнений горизонтальную составляющую дислокации смещений $u'_*(r)$, придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} \sigma_*(x) - \frac{f\alpha}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(t) dt}{t-x} - \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{w'_*(t) dt}{t-x} = A \\ \beta w'_*(x) - \frac{\alpha f}{a} x \sigma_*(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(t) dt}{t-x} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

которую нужно рассматривать при условиях

$$\int_{-a}^a \sigma_*(x) dx = P_0 / \pi; \quad \frac{\alpha}{\beta} \frac{f^2}{a^2} \int_{-a}^a x^2 \sigma_*(x) dx - \frac{f}{a} \int_{-a}^a x w'_*(x) dx = \frac{2a}{\pi\beta} \left(4c_* + \frac{f}{\pi a} P_0 \right) - \frac{\alpha P_0}{\pi\beta} \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:

$$\sigma_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-t}^t \frac{\xi \sigma(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad w'_*(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-t}^t \frac{\xi w'(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - t^2}} d\xi; \quad A = \frac{4}{\pi} (\alpha c_* + \beta \delta) + \frac{f \alpha P_0}{\pi^2 a};$$

$$\alpha = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}; \quad \beta = \frac{2(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\vartheta_2}; \quad \theta_1 = \frac{\mu^2}{\lambda + 3\mu}; \quad \theta_2 = \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}.$$

Далее, введя в рассмотрение исчезающие на бесконечности и аналитические во всей комплексной плоскости, разрезанной по интервалу $(-a, a)$ комплексные функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sigma_*(s)}{s-z} ds; \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{w'_*(s)}{s-z} ds \quad (4)$$

и используя формулы Племеля - Сохоцкого [3] систему (2) запишем в виде следующей задачи Римана для двух функций:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) = v_1(x) \Phi_2^-(x) + f_1(x) \\ \Phi_2^+(x) = v_2(x) \Phi_1^-(x) + f_2(x) \end{cases}, \quad (5)$$

где $v_j(x)$ и $f_j(x)$ ($j=1,2$) – известные заданные функции.

Решение задачи Римана

Учитывая, что операторы вращения снижают порядок показательной особенности функций на $1/2$, ввиду энергетических соображений мы должны построить те решения системы (5), показатель особенности которых не превышает $1/2$. При этом в тех конечных точках, где показатель особенности больше $1/2$, нужно взять ограниченное в этой точке решение. Нетрудно проверить, что соответствующая однородная система (5) имеет два канонических решения, ограниченные на одной из конечных точек интервала интегрирования, и имеющие в другой точке степенную особенность, показатели которых меньше $1/2$, соответствующие различным ветвям функций $\ln v_j(x)$ ($j=1,2$). Следуя работе [4], построены эти канонические решения, на основе которых построены частные решения системы (5) $\Phi_j^{(n)}(z)$ ($j=1,2; n=0,1$) и общее решения системы (5), исчезающее на бесконечности представлена в виде:

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2} \Phi_j^{(-1)}(z) + \frac{1}{2} \Phi_j^{(0)}(z) \quad (j=1,2), \quad (6)$$

Далее, используя условия (3), и учитывая поведение функций $\Phi_j(z)$ ($j=1,2$) на бесконечности, определены постоянные c_* и δ . Затем, по формулам Племеля-Сохоцкого [3] получены формулы для образов контактного давления и нормальной составляющей дислокации смещений, а также для жёсткого смещения штампа:

$$\sigma_*(x) = \frac{A}{4\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{Q_1(x)\omega(-x)F(-s)}{\omega(-s)} - \frac{Q_1(-x)\omega(x)F(s)}{\omega(s)} \right] \frac{ds}{s-x} + \frac{A}{2[1+(cx/a)^2]}; \quad (7)$$

$$w'_*(x) = \frac{A}{4\pi\beta} \int_{-a}^a \left[\frac{Q_2(x)\omega(x)F(s)}{\omega(s)} + \frac{Q_2(-x)\omega(-x)F(-s)}{\omega(-s)} \right] \frac{ds}{s-x}; \quad (8)$$

$$\delta = -\frac{\alpha P_0}{8\beta a} \left(\alpha - \frac{2f}{\pi} \right) + \frac{\alpha^2 f P_0}{8\beta a^2 a_0} \left[\frac{\beta a_1 \exp(-B_0)}{\alpha} - \frac{f a_2}{a} \right] + \frac{P_0}{2\beta} \left[\frac{\exp(-B_0/2)}{a_0} - \frac{f \alpha}{2\pi a} \right], \quad (9)$$

где B_0 ; a_j ($j = 0, 1, 2$); $Q_j(x)$ ($j = 1, 2$); $\omega(x)$ и $F(x)$ – известные числа и заданные функции.

Оригиналы контактных напряжений и составляющих дислокации смещений можно найти при помощи обращения операторов вращения.

Отметим, что в частном случае, когда трение отсутствует, т.е. когда $f = 0$, по формулам (7), (8) и (9) для образов нормального контактного давления $\sigma_*(x)$, нормальной составляющей дислокации смещений $w'_*(x)$ и жёсткого смещения δ получим следующие выражения:

$$\sigma_*(x) = \frac{\sqrt{2}P_0 [\omega(x) + \omega(-x)]}{2\pi^2 a}; \quad w'_*(x) = -\frac{\sqrt{2}P_0 [\omega(x) - \omega(-x)]}{2\pi^2 a\beta}; \quad \delta = \frac{P_0 [1 - \pi(\alpha/2)^2]}{2\pi a\beta}.$$

Проведён численный расчет и изучены закономерности изменения контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта 21Т-2С209

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости. // Известия НАН РА, Механика, т.76, № 2, 2023г, с.20-31
2. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
4. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и её приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.// ПММ, 1962, т. 26, вып.5, с. 907-912.

Сведения об авторах

Акопян Ваграм Наслетникович - доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188, E-mail: vhakobyan@sci.am

Саакян Аветик Вараздатович - доктор физ.-мат. наук, в.н.с. Института механики НАН Армении, E-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна - канд. физ.-мат. наук, ученый секретарь Института механики НАН РА, тел.(37410)56-81-89, E-mail: lilit.dashtoyan@mail.sci.am

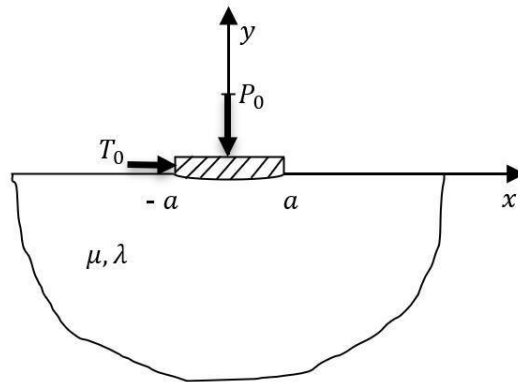
О КОНТАКТЕ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ШТАМПА С ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Амирджанян А.А., Григорян А.

Рассмотрено плоско-деформированное состояние упругой полуплоскости, в которую вдавливаются абсолютно жесткий штамп с трением. Считая, что касательные напряжения, действующие в контактной зоне, связаны с нормальным давлением по закону сухого трения, коэффициент которого является линейной функцией от координаты соприкасающихся точек контактирующих тел, построено замкнутое решение задачи в квадратурах.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско-деформированное состояние упругой полуплоскости с коэффициентами Ламе μ и λ , занимающая в декартовой системе координат Oxy нижнюю полуплоскость $y \leq 0$, когда на ее границу давит, без горизонтального смещения, абсолютно жесткий штамп ширины $2a$, основание которого описывается гладкой функцией $y = g(x)$ (Фиг.1). Будем считать, что касательные напряжения, действующие в зоне контакта, $\tau_{xy}(x, 0)$ связаны с нормальным давлением $p(x) = -\sigma_y(x, 0)$ согласно закону сухого трения с коэффициентом трения, зависящим от координаты точек контактирующих поверхностей линейно $f(x) = f_1 + f_2 x/a$, где $f_1 > f_2 > 0$ постоянные положительные числа, сумма которых меньше единицы. Будем полагать также, что на штамп действуют нормальная и горизонтальная сосредоточенные нагрузки соответственно величины P_0 и $T_0 = f_1 P_0$.



Фиг.1

Ставится задача построить точное решение задачи.

Поставленную задачу математически сформулируем в виде следующей граничной задачи для упругой полуплоскости:

$$\begin{cases} v(x, 0) = \delta - g(x); \\ \tau_{xy}(x, 0) = -f(x)\sigma_y(x, 0) \end{cases} \quad (|x| < a) \quad (1)$$

где $v(x, y)$ - нормальные смещения точек упругой полуплоскости, $\tau_{xy}(x, y)$ и $\sigma_y(x, y)$ компоненты тензора напряжений, а δ - жесткое смещение штампа.

Для решения граничной задачи (1) используем значения производной от вертикальных смещений точек контактной зоны полуплоскости на линии $y = 0$, приведенные в [1]:

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\varkappa - 1}{4\mu} \tau_{xy}(x) + \frac{\varkappa + 1}{4\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma_y(s) ds}{s - x}, \quad (2)$$

где $\varkappa = 3 - 4\nu$ - постоянная Мусхелишвили, а ν - коэффициент Пуассона.

Дифференцируя первое из уравнений (1) и подставляя туда выражение $v'(x, 0)$ из (2), в котором напряжение $\tau_{xy}(x, 0)$ заменено согласно второму из уравнений (1), для определения контактного давления $p(x) = -\sigma_y(x, 0)$ получим сингулярное интегральное уравнение второго рода с переменными коэффициентами:

$$f(x)p(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)ds}{s-x} = g'(x) \quad \left(\alpha = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} > 2 \right), \quad (3)$$

которое нужно рассматривать при условии равновесия штампа:

$$\int_{-a}^a p(x)dx = P_0. \quad (4)$$

Решение определяющего уравнения

Чтобы построить решение уравнения (3) при условии (4) введём в рассмотрение аналитическую во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль интервала $(-a, a)$, комплексную функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-z}. \quad (5)$$

Тогда, при помощи формул Племелья-Сохоцкого для интегралов типа Коши [1,2], уравнение (3) можем записать в виде следующей задачи Римана с переменным коэффициентом:

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g_*(x) \quad (|x| < a); \quad (6)$$

$$\left(G(x) = \frac{f(x) - i\alpha}{f(x) + i\alpha}; \quad g_*(x) = \frac{g'(x)}{f(x) + i\alpha} \quad (|x| < a) \right).$$

Здесь верхние индексы \pm у функций, означают значения комплексной функции соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала интегрирования.

Общее решение уравнения (6) дается формулой [2]:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g_*(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)} + C_0 X(z), \quad (7)$$

где функция $X(z)$ - каноническое решение соответствующей однородной задачи Римана, неограниченное на обоих концах интервала интегрирования, а C_0 - постоянная, подлежащая определению. Нетрудно проверить, что коэффициент задачи Римана $G(x)$ - непрерывная функция, отличная от нуля на интервале $(-a, a)$. Следовательно, искомое каноническое решение однородной задачи Римана будет даваться формулой [2]:

$$X(z) = \frac{1}{z-a} e^{\Gamma(z)}, \quad (8)$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

При этом должна быть выбрана та ветвь функции $\ln G(x)$, аргумент которой в точках $x = -a$ находится в интервале $(0, 2\pi)$. Так как $|G(x)| = 1$, то

$$\ln G(x) = i \arg G(x) = i \arg \left(\frac{f(x) - i\alpha}{f(x) + i\alpha} \right) = i \arg \left(\frac{-(\alpha^2 - f^2(x)) - 2i\alpha f(x)}{f^2(x) + \alpha^2} \right).$$

Далее, положим

$$0 < \arg G(x) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2\alpha f(x)}{\alpha^2 - f^2(x)} = \pi + 2\operatorname{arctg} \frac{f(x)}{\alpha} < 2\pi.$$

Тогда

$$\ln G(-a) = i\vartheta_1 = i \left(\pi + 2\operatorname{arctg} \frac{f(-a)}{\alpha} \right); \quad \ln G(a) = i\vartheta_2 = i \left(\pi + 2\operatorname{arctg} \frac{f(a)}{\alpha} \right).$$

и в точке $z = -a$ функция $\Phi(z)$ будет иметь особенность $(z+a)^{-\gamma_1}$, где

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \arg \ln(G(-a)) = \frac{1}{2} + \beta_1 \left(\beta_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{f(-a)}{\alpha} \right) \right),$$

а в точке $z = a$ функция $\Phi(z)$ будет иметь степенную особенность типа $(z-a)^{\gamma_2}$, где

$$\gamma_2 = \frac{\vartheta_1 + \Delta}{2\pi} - \left[\frac{\vartheta_1 + \Delta}{2\pi} \right] - 1 = -\frac{1}{2} + \beta_2 \left(\beta_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{f(a)}{\alpha} \right) \right).$$

Для определения постоянной C_0 функцию $\Phi(z)$ разложим в ряд Лорана вблизи бесконечно удаленной точки по формулам (5) и (7), и сравним коэффициенты разложений при z^{-1} . В итоге найдем $C_0 = -P_0 / 2\pi i$.

Теперь, при помощи представления (7), определим контактное давление под штампом. Используя формулы Племяля-Сохоцкого

$$\Phi^\pm(x) = X^\pm(x) \left\{ \pm \frac{g_*(x)}{2X^+(x)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g_*(s) ds}{X^+(s)(s-x)} - \frac{P_0}{2\pi i} \right\},$$

получим:

$$p(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{g_*(x)}{2} \left[1 + \frac{X^-(x)}{X^+(x)} \right] + \frac{X^+(x) - X^-(x)}{2\pi i} \left\{ \int_{-a}^a \frac{g_*(s) ds}{X^+(s)(s-x)} - P_0 \right\}.$$

Отсюда, поставив значения функций $X^\pm(x)$, после некоторых математических выкладок, найдем:

$$P(x) = \frac{f(x)g'(x)}{\alpha^2 + f^2(x)} - \frac{\alpha \exp[\psi_1(x)]}{\pi \omega(x) \sqrt{\alpha^2 + f^2(x)}} \left\{ \int_{-a}^a \frac{\omega(s)g'(s) ds}{\exp[\psi_1(s)](s-x)} - P_0 \right\}. \quad (9)$$

Здесь введены обозначения:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{f(t)}{\alpha} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{f(x)}{\alpha} \right)}{t-x} dt;$$

$$\omega(x) = (a+x)^{1/2+\beta(x)} (a-x)^{1/2-\beta(x)}; \quad \beta(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{f(x)}{\alpha} \right).$$

Касательные же контактные напряжения, при этом, будут даваться второй формулой из соотношений (1).

Отметим, что из (9) можно получить решения ряда частных случаев поставленной задачи. В частности, когда основание штампа плоское, т.е. когда $g(x) = 0$, из (9) для контактного давления получим формулу

$$p(x) = \frac{\alpha P_0 \exp[\psi_1(x)]}{\pi(a+x)^{1/2+\beta(x)}(a-x)^{1/2-\beta(x)}\sqrt{\alpha^2+f^2(x)}},$$

которая точно совпадает с результатом, полученным в [4], если считать $f_1 = 0$. В случае гладкого контакта, т.е. когда $f(x) = 0$, из (9) получим решение задачи о вдавлении штампа с гладким основанием, описываемым функцией $y = g(x)$, в упругую полуплоскость. В этом случае нормальное контактное давление будет даваться формулой:

$$P(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \left\{ \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-s^2} g'(s) ds}{s-x} - P_0 \right\},$$

которая так же совпадает с известным в литературе [3] результатом для указанной задачи.

Заключение

Таким образом в настоящей работе построено точное решение задачи о контактом взаимодействии абсолютно жесткого штампа с упругой полуплоскостью с учетом трения покоя, когда касательные контактные напряжения связаны с нормальным контактным давлением законом сухого трения, коэффициент которого линейно зависит от координат точек контактирующих поверхностей. Получены простые формулы для определения контактных напряжений. В двух частных случаях, когда основание штампа плоское и когда основание штампа гладкое, получены результаты, известные в литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977.- 640с.
3. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
4. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости // Изв. НАН РА, Механика, 2023, т.76, No2, с.20-31.

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович- канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188 E-mail: amirjanyan@gmail.com

Григорян Арам Арутюнович- канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. Института механики НАН Армении.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МОДУЛЕЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ

Арутюнян А.Р., Петручок А. И., Судьенков Ю.В.

В данной работе экспериментально исследуется эволюция упругих характеристик, а также энергетический баланс конструкционных материалов в процессе механических испытаний. Для исследований был использован оптико-акустический метод. Были построены экспериментальные кривые изменения коэффициента поперечных деформаций, скоростей продольных и поперечных волн для образцов из капролона в процессе механических испытаний. Проведено исследование энергетического баланса в серии испытаний на растяжение и ползучесть образцов из капролона с учетом разделения работы внешних сил по деформации тела на энергию изменения объема и энергию сдвиговых деформаций.

1. Введение

В настоящее время всё больше и больше в различные сферы инфраструктуры внедряются полимерные и композиционные материалы на их основе, такие как оргстекло, капролон, углепластик и прочее. Они, в отличие от металлов, обладают большей лёгкостью, коррозионной прочностью и меньшей плотностью. Исследования эволюции упругих характеристик в полимерных конструкционных материалах являются важной задачей материаловедения, позволяющей повысить безопасность производственных объектов, установить наличие критических дефектов и устранять браки на начальных стадиях производства. Диаграмма растяжения, построенная по деформации образца, характеризует поведение материала при деформировании. Она даёт возможность проводить анализ неупругих явлений в твёрдом теле по продольным деформациям. Однако такого же рода анализ можно провести по записям поперечных деформаций. На изменение величины поперечных деформаций в большей степени сказывается состояние деформируемого тела. Следовательно, закономерности изменения поперечных деформаций дают более полную информацию о неупругих явлениях.

Для исследования изменения структуры различных материалов используются различные методы диагностики, в том числе и неразрушающие методы контроля, которые позволяют проводить исследование материалов без их разрушения. В данной работе используется оптико-акустический (ОА) метод. Применение данного метода для исследования структуры материалов, в частности, рассматривалось в работах [1-3]. Исследования изменения коэффициента поперечных деформаций проводились в работах [4-8].

В данной работе рассмотрено применение оптико-акустического метода для оценки напряжённо-деформированного состояния и структурных преобразований в образцах из капролона. Исследуются изменения коэффициента поперечных деформаций, скоростей продольных и поперечных волн. Также в работе исследован энергетический баланс в ходе испытаний на растяжение образцов из капролона с учетом разделения работы внешних сил по деформации тела на энергию изменения объема и энергию сдвиговых деформаций.

2. Методика измерения упругих характеристик материалов оптико-акустическим методом в ходе механических испытаний

Растяжение образцов проводилось на испытательной машине Tinius Oslen 10ST при комнатной температуре. Во время испытаний параллельно измерялась температура образцов, которая определялась по инфракрасному излучению, регистрируемому с частотой 50 Гц тепловизионной камерой ThermoCAM SC 3000. Исследование упругих характеристик в образцах проводилось на основе ОА метода, который основывается на возбуждении акустических импульсов путём лазерного воздействия на поверхность образца. С обратной стороны образца находится датчик, вырезанный из пьезокерамики. Направление поляризации пьезокерамики составляло 45° , что позволяет регистрировать как продольные, так и поперечные акустические волны одновременно. Регистрация сигналов с пьезодатчика осуществлялась цифровым осциллографом Lecroy с $\Delta f = 600 \text{ МГц}$.

Зная скорости V_L продольных и V_T поперечных волн можно рассчитать текущий коэффициент поперечных деформаций μ по следующей формуле:

$$\mu = \frac{V_L^2 - 2V_T^2}{2(V_L^2 - V_T^2)} \quad (1)$$

Предложенная методика позволяет измерять скорости V_L и V_T в любой момент времени в течении эксперимента. Для исследования изменения μ в каждом испытании осуществлялась генерация лазерного импульса с частотой 1 Гц.

3. Экспериментальное исследование изменения упругих характеристик образцов капролона в серии испытаний на растяжение и ползучесть

Эксперименты по исследованию эволюций упругих характеристик для образцов из капролона проходили по следующей программе: простое растяжение со скоростью 5 мм/мин до нагрузки $\sigma^* = 67$ МПа (вблизи временного сопротивления) без разрушения; испытание на ползучесть в течение 4 часов при постоянной нагрузке σ_{pol} . Эксперименты проводились при уровнях нагрузки 45 МПа и 35 МПа (при этом образцы не доводились до разрушения); испытание на растяжение до разрушения образца со скоростью 5 мм/мин.

Между этапами испытаний образцы выдерживались в течение нескольких дней, для релаксации напряжений. Во время первого и третьего этапа на протяжении всего процесса деформирования каждую секунду проводилось измерение скоростей продольных и поперечных волн ОА методом. В испытании на ползучесть данные измерения проводились только на начальном этапе нагружения, когда напряжение растёт от 0 до σ_{pol} . Полученные экспериментальные кривые показаны на рис. 1.

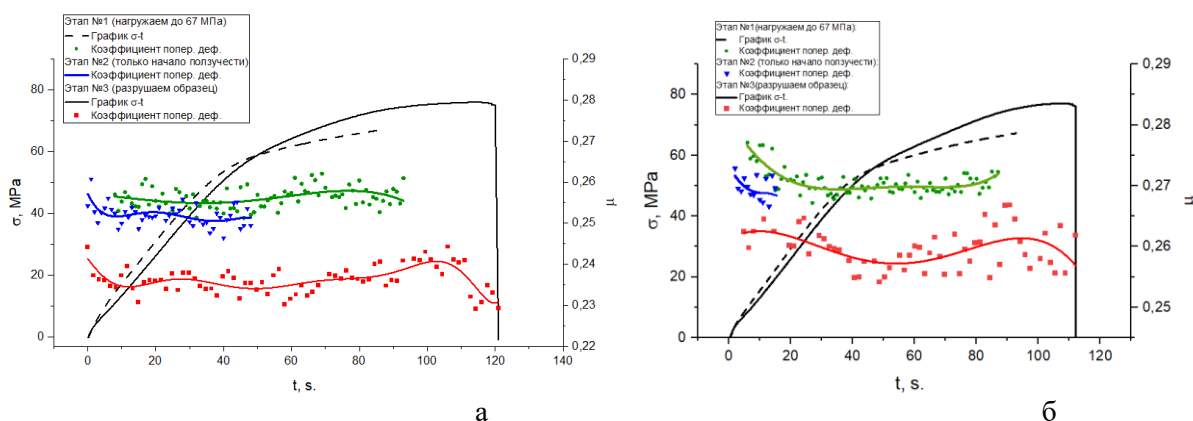


Рис. 1. Экспериментальные результаты для образцов капролона, испытанных на ползучесть с нагрузкой $\sigma_{pol} = 35$ МПа (а) и $\sigma_{pol} = 45$ МПа (б): диаграммы $\sigma - t$ первого и третьего этапа испытания и изменения коэффициентов поперечных деформаций.

Согласно полученным результатам, коэффициент поперечной деформации в начале каждого этапа уменьшается. Такое поведение характерно для каждого этапа эксперимента. Также из графиков видно, что после каждого следующего этапа кривые изменения μ находятся ниже, чем в предыдущем этапе нагружений. Так для первого образца на первом этапе $\mu \approx 0,257$. На втором этапе, пока нагрузка растёт до значения $\sigma_{pol} = 35$ МПа, коэффициент поперечной деформации падает со значения 0,256 до 0,251. И наконец, на третьем этапе, при растяжении образца до разрушения, μ вначале уменьшается с 0,244 до 0,234, немного возрастает в конце до 0,241 и затем падает до 0,229. Похожая тенденция наблюдается и для второго образца капролона.

4. Энергетический баланс в процессе механических испытаний

По предложенной теории Кузьменко [9] предлагается следующая концепция. На первом этапе деформирования внешнее воздействие приводит к накоплению в веществе потенциальной энергии двух видов: W_σ – энергия, затраченная на объемные деформации; W_τ – энергия, затраченная на сдвиговые деформации. Сумма этих величин равняется работе внешних сил W по деформации тела. Изменение объёма тела, характеризуемого энергией W_σ , приводит к развитию ответного механического воздействия, характеризуемого энергией реакции P . Силы реакции в свою очередь преодолевают два вида сопротивления: сопротивление расширению или сжатию и сопротивление приложенных внешних сил, инициировавших деформацию.

Поэтому энергия P расходуется на два разных процесса: часть её C затрачивается на всестороннее деформирование твёрдого тела, а другая часть B идёт на работу против сил внешнего источника в связи с изменением размеров тела. Каждая из величин, C и B как их сумма P может быть разделена на составляющие, каждая из которых относится к сдвиговым или объёмным деформациям. Наиболее значимым с точки зрения расчётов в механике материалов является разделение энергии деформирования A , для которой верно:

$$A = W - B.$$

В свою очередь

$$A = A_\sigma + A_\tau,$$

где A_σ и A_τ – энергии объёмных и сдвиговых деформаций. По теории Кузьменко для A_σ и A_τ справедливы следующие соотношения для произвольного напряженного состояния:

$$\frac{A_\sigma}{A} = \frac{W_\sigma}{W}, \quad \frac{A_\tau}{A} = \frac{W_\tau}{W},$$

где

$$\frac{W_\sigma}{W} = \frac{\mu(1+3\mu+3\mu^2)}{1+\mu}, \quad \frac{W_\tau}{W} = \frac{1-3\mu^2-3\mu^3}{1+\mu}. \quad (2)$$

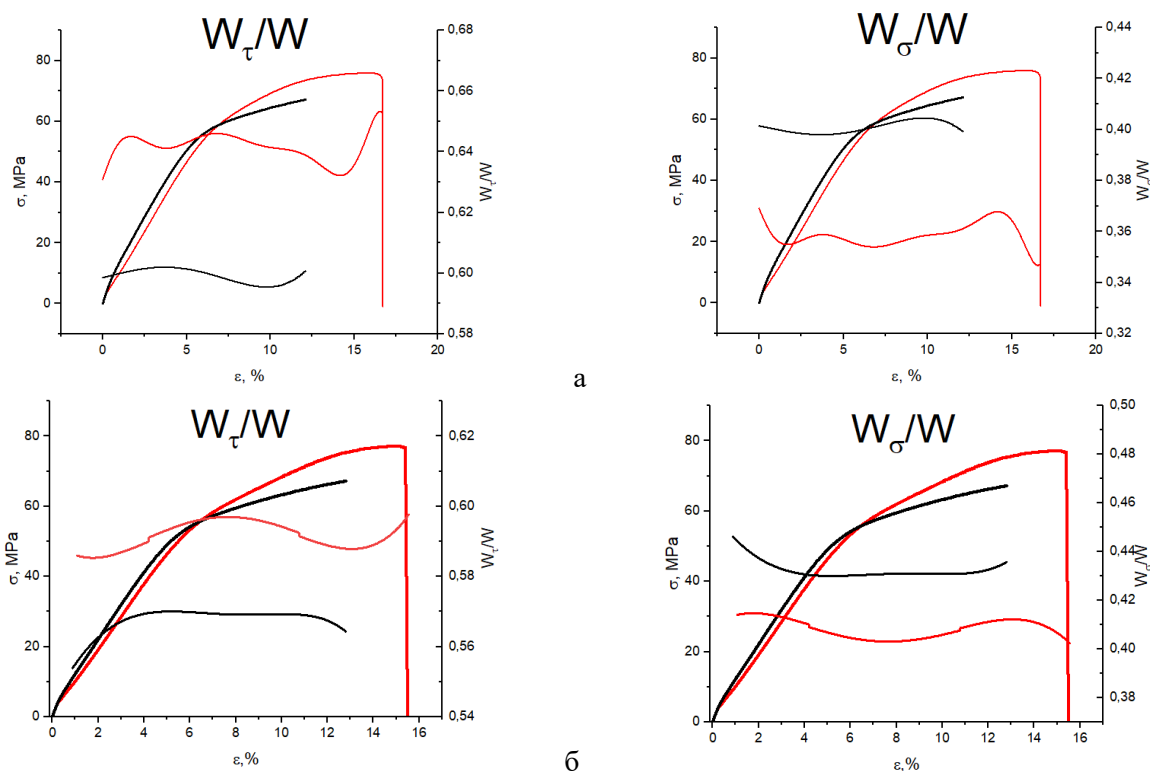


Рис. 2. Кривые деформирования и удельные энергии сдвиговых W_τ/W и объёмных W_σ/W деформаций для первого (а) и второго (б) образцов из капролона на первом (чёрный цвет) и третьем (красный цвет) этапе нагружения.

Кривые деформирования и удельные энергии сдвиговых W_τ/W и объёмных W_σ/W деформаций для первого и второго образцов из капролона на первом (чёрный цвет) и третьем (красный цвет) этапе нагружения показаны на рис. 2.

По графикам, представленным на рис. 2 видно, что для обоих образцов удельная энергия сдвиговых деформаций W_τ/W преобладает над удельной энергией объёмных деформаций W_σ/W , как на первом, так и на третьем этапе нагружения (примерно 56 – 60 % от общей энергии W против 40 – 44 %). Можно заметить, что удельная доля объёмных деформаций на третьем этапе испытаний меньше, чем на первом для обоих образцов. Для обоих образцов в третьем этапе испытаний прослеживается уменьшение W_σ/W в начале деформации, затем постепенный рост и спад в конце, при разрушении.

Как известно, традиционный энергетический баланс также определяется равенством работы деформации W сумме выделяющегося тепла Q и скрытой энергии L [10]:

$$W = Q + L,$$

где $W = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon$, $Q = \rho c_p \Delta T$, ρ – плотность материала, c_p – теплоёмкость, ΔT – разность температур. Применяя теорию по разделению энергии на составляющие, можно получить удельные доли энергии для Q и L :

$$Q = Q_\sigma + Q_\tau, \quad L = L_\sigma + L_\tau$$

Как известно, скрытая энергия складывается из внутренней энергии идеального твердого тела и потенциальной энергии дефектной структуры реального образца. При этом, наличие дефектной структуры на микромасштабах определяет существование микронапряжений сдвига. В этой связи, представляется необходимым учитывать в балансе энергии деформирования работу, обусловленную действием внутренних микронапряжений сдвига.

Рассчитанные энергии Q_σ , Q_τ , L_σ и L_τ для двух этапов эксперимента (первого и третьего) для двух образцов из капролона представлены на рис. 3.

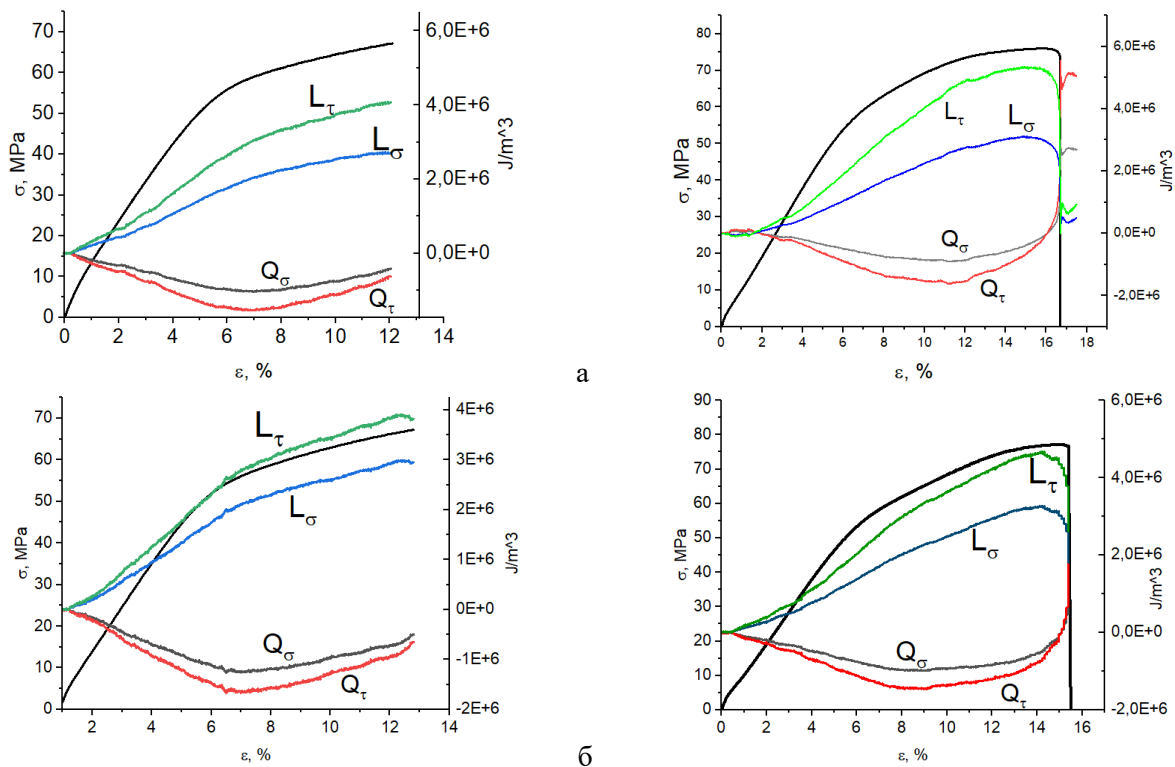


Рис. 3. Диаграммы $\sigma - \varepsilon$ и графики Q_σ , Q_τ , L_σ и L_τ для первого (а) и второго (б) образцов из капролона для первого (слева) и третьего (справа) этапов эксперимента.

Из графиков, представленных на рис. 3 следует, что на начальном этапе наблюдается снижение величин Q_σ и Q_τ , в дальнейшем наблюдается их рост вплоть до момента разрушения. Данное поведение говорит о схожести капролона с металлическими материалами. Для величин L_σ и L_τ наблюдается постоянный рост вплоть до момента разрушения.

5. Выводы

В работе были исследованы упругие характеристик образцов капролона на основе ОА метода. Полученные экспериментальные данные показывают, что наблюдается последовательное уменьшение коэффициента поперечных деформаций от этапа к этапу, что объясняется усилением хрупких свойств материала после испытания, вследствие накопления дефектов и образования несплошностей после релаксации напряжений. Увеличение μ в пластической области объясняется пластическим течением части микрообъемов деформируемого твердого тела. Проведено исследование энергетического баланса в серии испытаний на растяжение образцов из капролона с учетом разделения работы внешних сил по деформации тела на

энергию изменения объема и энергию сдвиговых деформаций. Построены графики удельных долей работ, затраченных на объемные W_σ/W и сдвиговые W_τ/W деформации с использованием теории В.А. Кузьменко. Удельная энергия сдвиговых деформация W_τ/W преобладает над удельной энергией объемных деформаций W_σ/W , как на первом, так и на третьем этапе нагружения. Построены графики изменения $Q_\sigma, Q_\tau, L_\sigma$ и L_τ . На начальном этапе наблюдается снижение величин Q_σ и Q_τ , в дальнейшем наблюдается рост величин Q_σ и Q_τ вплоть до момента разрушения. Данное поведение говорит о схожести капролона с металлическими материалами. Для величин L_σ и L_τ наблюдается постоянный рост вплоть до момента разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карабутов А.А., Кобелева Л.И., Подымова Н.Б., Чернышева Т.А. Лазерный оптико-акустический метод локального измерения упругих модулей композиционных материалов, упрочненных частицами // Техническая акустика. 2008. Т. 8. С. 2-13.
2. Арутюнян А.Р., Зимин Б.А., Судьенков Ю.В. Исследование циклической долговечности конструкционных материалов методом оптико-акустической спектроскопии // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2008. Сер. 1. вып. 3. С. 88–96.
3. Судьенков Ю.В. Влияние ангармонизма на тепловыделение и упрочнение металлов при квазистатическом растяжении // Физика твёрдого тела. 2020. Т. 62. Вып. 1. С. 125-130.
4. Жуков А.М. О коэффициенте Пуассона в пластической области// Известия академии наук СССР. Отделение технических наук. 1954. N 12. С. 86-91.
5. Ровинский Б.М., Лютцау В.Г. Коэффициент Пуассона при релаксации напряжений// Известия академии наук СССР. Отделение технических наук. 1953. N 10. С. 1171-1174.
6. Черняк Н.И. Механические свойства стали в области малых пластических деформаций. Изд.: АН УССР. 1962. С. 11-22.
7. Давиденков Н.Н., Васильев Д.М. О коэффициенте поперечной деформации // Механические методы испытаний. Заводская лаборатория. 1952. Т. XVIII. N 5. С. 596-599.
8. Гусенков А.П., Зацаринный В.В., Шнейдерович Р.М. Методика получения характеристик сопротивления малоцикловому деформированию и разрушению при изменении поперечных деформаций // Механические методы испытаний. Заводская лаборатория. 1971. N 4. С. 464-468.
9. Кузьменко В.А. Развитие представлений о процессе деформирования материалов// О поперечных деформациях. Киев: УкрНИИТИ. 1968. N 1.
10. Скорый И.А., Дорожки И.В. Вопросы сопротивления материалов. 1954. С. 114-117.

Сведения об авторах

Арутюнян Александр Робертович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 4284164, E-mail: a.arutyunyan@spbu.ru

Петручок Алексей Иванович – студент, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (953) 3539949, E-mail: alex_petruchok@mail.ru

Судьенков Юрий Васильевич – доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 4284245, E-mail: y.sudenkov@yandex.ru

ОПИСАНИЕ СТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЖЕНИЙ ПРИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян А.Р., Саитова Р.Р.

Эволюция поврежденности металлических материалов происходит в условиях высокотемпературной ползучести. Для ее описания используется концепция поврежденности Качанова–Работнова. В работе параметр поврежденности определяется как относительное изменение плотности материала, которая является интегральной характеристикой поврежденности. С учетом этого параметра и закона сохранения массы сформулированы взаимосвязанные кинетические уравнения для деформации ползучести и параметра поврежденности. Получены аналитические решения этих уравнений для случая двухступенчатого нагружения. Проведены сравнения аналитических решений с экспериментальными исследованиями на ползучесть дуралюмина Д16Т при переменных нагрузках при 150°C. Наблюдается хорошее согласие полученных теоретических кривых с экспериментальными результатами.

1. Введение

Рассматривается задача ползучести и длительной прочности металлических материалов и сплавов. Под действием относительно низких напряжений и высоких температур металлические материалы становятся хрупкими и разрушаются при небольшой величине остаточных деформаций. Эта проблема известна как проблема тепловой хрупкости металлов. Данный эффект наблюдается в элементах многих важных инженерных объектов, поэтому проблема хрупких разрушений стала предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований.

Для решения этой проблемы в механике материалов в работах Л.М. Качанова [1], Ю.Н. Работнова [2] была введена концепция сплошности (поврежденности). Для описания хрупкой области экспериментальной кривой длительной прочности была предложена система простых кинетических уравнений для параметра поврежденности и деформации ползучести, а также был сформулирован критерий длительной прочности.

В работе Р.А. Арутюняна [3] предлагается модифицированный вариант системы кинетических уравнений Качанова–Работнова с учетом закона сохранения массы и конкретизации параметра поврежденности в виде отношения текущей величины плотности материала к начальной.

Результаты многочисленных экспериментальных исследований по изменению пористости и плотности различных металлов и сплавов вследствие образования и развития микропор и микротрещин в условиях высокотемпературной ползучести [4–6] позволяют рассматривать плотность в качестве интегральной меры накопления структурных микродефектов.

В данной работе рассматривается модифицированная система уравнений Качанова–Работнова для скорости ползучести и повреждения для случая двухступенчатого нагружения.

2. Теоретическое описание ступенчатого нагружения при ползучести

Рассмотрим систему взаимосвязанных кинетических уравнений Р.А. Арутюняна [3] для скорости ползучести и параметра поврежденности (сплошности):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B\sigma_0^m \psi^{m-\beta} e^{m\varepsilon}, \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\sigma_0^n \psi^{n-\alpha} e^{n\varepsilon}, \quad (2)$$

где $\psi = 1 - \omega = \rho / \rho_0$ – сплошность, ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность образца, B , A , m , n , α , β – постоянные.

Система уравнений (1)-(2) для скорости ползучести и поврежденности может быть решена для случая ступенчатого нагружения. Далее будем рассматривать двухступенчатое нагружение. Рассмотрим случай чисто хрупкого разрушения и малых деформаций при $e^{m_1 \varepsilon_1} \approx 1 + m_1 \varepsilon_1$, $e^{n_1 \varepsilon_1} \approx 1 + n_1 \varepsilon_1$ и перепишем систему уравнений (1)-(2) в виде [7]:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt_1} = B_1 \sigma_{0_1}^m \psi_1^{m-\beta} (1 + m_1 \varepsilon_1), \quad (3)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt_1} = -A_1 \sigma_{01}^{m_1} \psi_1^{n_1 - \alpha_1} (1 + n_1 \varepsilon_1) \quad (4)$$

При условиях $m_1 = \beta_1$, $n_1 = 1 + \alpha_1$ система уравнений (3)-(4) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка [8]:

$$\psi_1 \frac{d^2 \psi_1}{dt_1^2} - (n_1 - \alpha_1) \left[\frac{d\psi_1}{dt_1} \right]^2 - m_1 B_1 \sigma_{01}^{m_1} \psi_1^{m_1 - \beta_1 + 1} \frac{d\psi_1}{dt_1} - A_1 B_1 \sigma_{01}^{m_1 + n_1} (m_1 - n_1) \psi_1^{m_1 - \beta_1 - \alpha_1 + n_1 + 1} = 0 \quad (5)$$

Принимая условия $m_1 = \beta_1$, $n_1 = 1 + \alpha_1$ и при начальных условиях $t_1 = 0$, $\psi_1 = 1$ из (5), получим выражение для параметра сплошности:

$$\psi_1 = e^{\left[\frac{A_1 \sigma_{01}^{m_1 - m_1} (m_1 - n_1)}{B_1 m_1^2} \left(e^{m_1 B_1 \sigma_{01}^{m_1} t_1} - 1 \right) - \frac{A_1 \sigma_{01}^{n_1} (m_1 - n_1)}{m_1} t_1 \right]} \quad (6)$$

Учитывая условия $m_1 = \beta_1$, $n_1 = 1 + \alpha_1$ в (3) и при начальных условиях $t_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$, получим

$$\varepsilon_1 = \frac{e^{B_1 m_1 \sigma_{01}^{m_1} t_1} - 1}{m_1} \quad (7)$$

Для второй ступени нагружения рассмотрим решение уравнения (3) при начальных условиях $t_2 = t_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$:

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt_2} = B_2 \sigma_{02}^{m_2} \psi_2^{m_2 - \beta_2} (1 + m_2 \varepsilon_2) \quad (8)$$

Учитывая условия $m_2 = \beta_2$ и начальные условия $t_2 = t_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, в (8) получим

$$\varepsilon_2 = \frac{e^{B_2 m_2 \sigma_{02}^{m_2} (t_2 - t_1) + \ln \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \left(e^{B_1 m_1 \sigma_{01}^{m_1} t_1} - 1 \right) \right)} - 1}{m_2} \quad (9)$$

3. Сравнение теоретических кривых с экспериментальными результатами

Наиболее важным в теоретическом и практическом отношениях является случай переменных нагрузок. Большинство деталей, как правило, работает при переменных нагрузках, в этих условиях выявляется отчетливо различие в теориях ползучести. Эксперименты при переменных нагрузках должны занимать основное место в испытаниях на ползучесть при простом растяжении.

В работе [9] был проведен ряд опытов на ползучесть при ступенчато изменяющихся нагрузках для образцов дуралюмина Д16Т в состоянии поставки (табл. 1). К образцу после прогрева, соответствующего данной температуре, прикладывалось напряжение σ_1 , при котором он полз в течение времени t_1 . В момент времени t_1 напряжение изменялось до σ_2 , и образец оставался при нем в течение времени $t_2 - t_1$.

Эксперименты проводились на круглых цилиндрических образцах диаметром 10 ± 0.01 мм и длиной рабочей части 100 ± 0.1 мм. Прогрев образцов до температуры испытания при 150°C производился 3-4 часа.

Таблица 1

При 150°C						
№ Образца	15		157		14	
σ , МПа	171.62	313.81	285.96	333.43	196.13	294.19
t , час	45	27	22	14	41	39

На рис. 1 представлено сравнение теоретических кривых ползучести с экспериментальными результатами для образцов дуралюмина Д16Т. Наблюдается хорошее согласие теоретических и экспериментальных кривых ползучести.

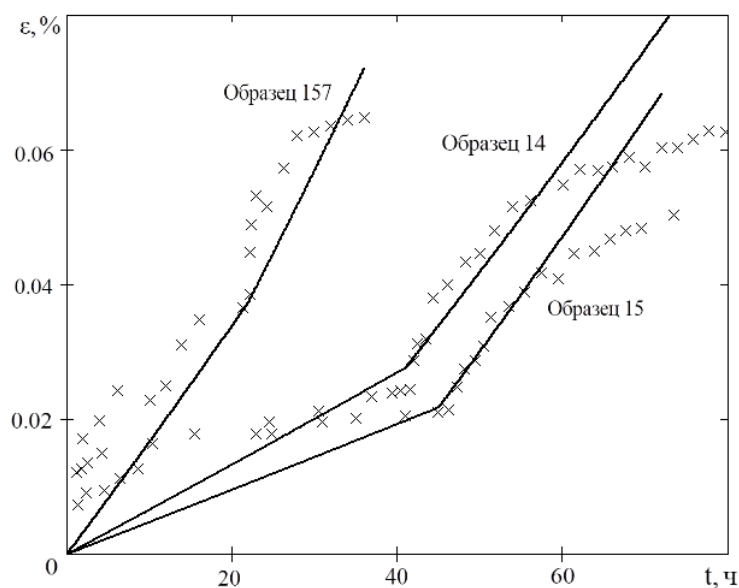


Рис.1. Теоретические кривые деформации ползучести согласно соотношениям (7, 9) и экспериментальные точки согласно работе [9].

4. Заключение

Рассматривается модифицированный вариант системы взаимосвязанных кинетических уравнений Качанова–Работнова с учетом закона сохранения массы и конкретизации параметра поврежденности в виде отношения текущей величины плотности материала к начальной. Получены решения данной системы кинетических уравнений для случая двухступенчатого нагружения.

Проведены сравнения аналитических решений с экспериментальными результатами на ползучесть дуралюмина Д16Т при переменных нагрузках при температуре 150°C. Полученные теоретические кривые ползучести хорошо описывают полученные в экспериментах кривые ползучести при двухступенчатых нагружениях для дуралюмина Д16Т. Таким образом, предложенная система взаимосвязанных кинетических уравнений для скорости ползучести и параметра поврежденности позволяет описывать случаи ступенчатых нагружений, что говорит об универсальности системы.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект ID № 104236322).

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. Изв. АН СССР. Отд. Техн. Наук, № 8. 1958. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5-7.
3. Arutyunyan R.A. The Problem of High-Temperature Creep and Long-Term Strength in the Mechanics of Materials // Doklady Physics. Vol. 62. N 8. 2017. P. 384-386.
4. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении. Прикладная математика и механика. № 4. 1965. С. 681-689.
5. Betekhtin V.I., Porosity of solids // Trans. St.- Petersburg Acad. Sci. strength problems. Vol. 1. 1997. P. 201-210.

6. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2015. 506с.
7. Arutyunyan A.R., Saitova R.R. Exact and approximate solutions of the system of interrelated equations of the theory of creep and long-term strength // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 2231 (1). 012001.
8. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton. 2003. 783p.
9. Наместников В.С., Хвостунков А.А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках // Прикладная механика и техническая физика. Номер 4. 1960. С. 90-95.

Сведения об авторах

Арутюнян Александр Робертович – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет, +7 (812) 4284164, E-mail a.arutyunyan@spbu.ru

Сайтова Регина Ринатовна – ассистент, Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет, +7 (812) 4284164, E-mail rigastr@yandex.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ТРУБАМ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

Астафьев В.И., Губанов С.И.

Сформулированы основные уравнения стационарного течения однофазной вязкой несжимаемой жидкости по горизонтальным проницаемым трубопроводам и методы их решения. Базовые уравнения основываются на законе сохранения массы, уравнении неразрывности и определяющем соотношении в форме закона Старлинга, связывающем величину скорости притока жидкости через проницаемую стенку трубопровода и перепадом давления в пласте и внутри трубопровода.

1. Основные уравнения гидродинамики вязкой жидкости – это уравнения Навье-Стокса и условие несжимаемости [1]

$$\rho \partial v / \partial t = -grad(p) + \mu \Delta v \quad (1)$$

$$div(v) = 0 \quad (2)$$

Здесь:

$\rho = const$ – плотность жидкости;

$\mu = const$ – вязкость жидкости;

$p(x, y, z)$ – давление в жидкости;

$v = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости течения жидкости;

$grad = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right)$ – векторный оператор «градиент»;

$div(v) = \left(\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} \right)$ – дивергенция вектора скорости.

Однако, в общем виде система (1) - (2) не имеет аналитического решения. Поэтому для получения расчетных зависимостей приходится прибегать к различным упрощениям этой системы. Так при стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном перфорированном трубопроводе систему (1)-(2) можно представить в следующем виде [2, 3]:

$$\frac{dP}{dz} = - \frac{2\tau_w(z)}{R} \quad (3)$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{2q(z)}{R} \quad (4)$$

Здесь:

z - переменная вдоль оси горизонтального трубопровода;

$V(z)$ - средняя скорость течения жидкости в сечении z ;

$P(z)$ - среднее давление в сечении z ;

R - радиус трубопровода;

$q(z)$ - скорость притока жидкости в трубопровод через его проницаемую стенку;

$\tau_w(z)$ - напряжение трения на проницаемой стенке трубопровода.

Таким образом, для нахождения искомым функций $V(z)$ и $P(z)$ имеем два дифференциальных уравнения (3) и (4). Для решения этих уравнений необходимо предварительно определить входящие в эти уравнения функции $q(z)$ и $\tau_w(z)$.

Величина скорости притока жидкости из пласта в трубопровод сквозь проницаемую стенку $q(z)$ зависит от величины перепада давления между средним давлением внутри трубопровода $P(z)$ и внешним пластовым давлением p_c . Эту зависимость можно представить в форме закона Старлинга [4], согласно которому скорость притока жидкости сквозь проницаемую стенку трубопровода $q(z)$ пропорциональна разнице между средним давлением жидкости внутри трубопровода $P(z)$ и внешним пластовым давлением p_c

$$q(z) = -k(z) \cdot (P(z) - p_c). \quad (5)$$

Здесь $k(z)$ - экспериментально определяемый коэффициент проницаемости стенки трубопровода в сечении z (для непроницаемых участков величина $k(z)=0$).

Закон Старлинга в форме граничного условия (5) означает отсутствие касательной компоненты вектора скорости v_s на стенке трубопровода (условие прилипания жидкости к стенке трубопровода). В работе Биверса-Дхозефа [6] условие (5) было заменено на более общее условие скольжения жидкости вдоль стенки трубопровода, согласно которому скорость скольжения жидкости вдоль стенки трубопровода v_s записывается в следующем виде:

$$v_s = \left(\frac{\sqrt{k}}{a}\right) \frac{dv}{dn} \quad (6)$$

где $\left(\frac{\sqrt{k}}{a}\right)$ - длина скольжения, k - коэффициент проницаемости стенки трубопровода, a - экспериментально определяемая безразмерная постоянная ($0.1 < a < 4$ [6]).

В соотношении (3) функция $\frac{2\tau_w(z)}{R}$ характеризует потерю давления $\frac{dP}{dz}$ только за счет сил трения при течении вязкой жидкости по трубопроводу. В работах [7-8] была рассмотрена общая ситуация и были выделены следующие четыре составляющих таких потерь давления:

$\left(\frac{dP}{dz}\right)_a = -\rho \frac{d}{dz} \left(\frac{V(z)^2}{\alpha}\right)$ - потери давления, вызванные изменением кинетической энергии потока (эффект ускорения потока жидкости по трубопроводу, где безразмерный коэффициент α меняется от $\alpha=0.75$ для ламинарного потока до $\alpha=0.9643-0.9895$ для турбулентного потока [8]);

$\left(\frac{dP}{dz}\right)_f = -\frac{2\tau_w(z)}{R}$ - потери давления за счет трения между частицами вязкой жидкости и стенкой трубопровода;

$\left(\frac{dP}{dz}\right)_m = K \frac{V(z)q(z)}{2}$ - потери давления, вызванные эффектом смешивания двух потоков жидкости - потока жидкости $q(z)$, втекающего в трубопровод и потока жидкости $V(z)$, движущегося по трубопроводу (K - коэффициент смешивания);

$\left(\frac{dP}{dz}\right)_g = -\rho g \sin(\theta)$ - гравитационные потери давления, возникающие на наклонных участках трубопровода ($g = 9.8 \text{ м/с}^2$, $\theta \geq 0$).

Таким образом, в общем случае соотношение (3) можно переписать в следующем виде [8]:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \frac{d}{dz} \left(\frac{V(z)^2}{\alpha}\right) - \frac{2\tau_w(z)}{R} + K \frac{V(z)q(z)}{2} - \rho g \sin(\theta) \quad (7)$$

Пренебрегая вкладом от гравитационных потерь давления $\left(\frac{dP}{dz}\right)_g$ в суммарную величину потерь давления $\frac{dP}{dz}$ и полагая коэффициент α постоянным, соотношение (7) можно переписать в следующем виде [6]:

$$\frac{d}{dz} \left(P + \rho \frac{V^2}{\alpha}\right) = -\rho \frac{fV^2}{4R} + K \frac{Vq}{2} \quad (8)$$

Здесь $f=f_w+f_p$ - безразмерный коэффициент трения, учитывающий потери давления как на непроницаемых f_w , так и на проницаемых f_p стенках трубопровода.

Коэффициент трения $f(z)$ зависит от безразмерного числа Рейнольдса $Re(z) = \frac{\rho V(z)d}{\mu}$ потока вязкой жидкости, движущейся по трубе со скоростью $V(z)$, где $d=2R$ - диаметр трубопровода, μ - вязкость жидкости.

Для ламинарного потока при $Re(z) < 2000$ коэффициент трения $f(z)$ вычисляется по теоретической формуле Стокса $f(z) = 64/Re(z)$. Для турбулентного потока при $Re(z) > 2000$ величину $f(z)$ можно вычислять по эмпирической формуле Блазиуса $f(z) = 0.3164/Re^{0.25}$ [9].

Таким образом, для нахождения трех неизвестных функций $V(z)$, $P(z)$ и $q(z)$ получаем замкнутую систему уравнений (4), (5), (8). В общем случае эта система может быть решена только численно, например, с помощью метода конечных разностей [9].

2. При приближенном решении данной системы можно поступить следующим образом.

Изменение скорости притока жидкости $q(z)$ по длине трубопровода определяется характером распределения зон перфорации вдоль стенки трубопровода. При произвольном расположении N перфорационных зон по длине трубопровода зависимость $q(z)$ можно аппроксимировать следующей функцией:

$$q(z) = q_i, \text{ при } z_i < z < z_i + h_i \quad (9a)$$

$$q(z) = 0, \text{ при } z_i + h_i < z < z_{i+1} \quad (9b)$$

Здесь:

h_i - длина i -той перфорационной зоны ($0 < h_i < (z_{i+1} - z_i)$);

q_i - скорость притока жидкости сквозь i -тую перфорационную зону ($i=1, 2, \dots, N$).

Тогда из уравнения (4) следует, что изменение скорости потока жидкости $V(z)$ вдоль трубопровода будет следующим:

$$V(z) = V_i + \left(\frac{2q_i}{R}\right) \cdot (z - z_i), \text{ при } z_i < z < z_i + h_i \quad (10a)$$

$$V(z) = V_{i+1}, \text{ при } z_i + h_i < z < z_{i+1} \quad (10b)$$

где $V_{i+1} = V_i + \left(\frac{2q_i}{R}\right) \cdot h_i$ - значение скорости в конце i -той перфорационной зоны,

$V_{i+1/2} = V_i + \frac{q_i}{R} \cdot h_i$ - значение скорости в середине i -той перфорационной зоны.

Приближенно интегрируя уравнение (8), найдем значения давления $P_{i+1/2}$ в середине i -той перфорационной зоны и P_{i+1} в начале $(i+1)$ -й перфорационной зоны

$$P_{i+1/2} - P_i = -\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)(V_{i+1/2}^2 - V_i^2) - \left(\frac{h_i}{8R}\right)(\rho f V_{i+1/2}^2 - 4RKq_i V_{i+1/2}) \quad (11a)$$

$$P_{i+1} - P_{i+1/2} = -\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)(V_{i+1}^2 - V_{i+1/2}^2) - \left(\frac{\rho}{4R}\right)(f V_{i+1}^2)(z_{i+1} - (z_i + h_i)) \quad (11b)$$

Уравнение (5), записанное в форме закона Старлинга, позволяет связать скорость притока жидкости через i -тую перфорационную зону q_i с величиной перепада давления $(P_i - p_c)$ в этой зоне. Данное уравнение для проницаемой стенки трубы имеет вид

$$q_i = -k(P_i - p_c), \text{ при } z_i < z < z_i + h_i \quad (12)$$

Из уравнений (9)-(12) можно найти распределение притока жидкости в трубопровод $q(z)$, скорости потока жидкости по трубопроводу $V(z)$ и величины давления в трубопроводе $P(z)$, последовательно находя решения для первой ($i=1$), второй ($i=2$) и т.д. перфорационных зон.

ЛИТЕРАТУРА

1. Локтев, В.И. Механика сплошной среды. Астрахань: АГТУ, 2005, 62 с.
2. Регирер, С.А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками. Известия вузов. Математика, 1962, № 5 (30), стр. 65-74.
3. Чесноков, Ю.Г. Течение жидкости по трубкам с проницаемыми стенками при наличии проскальзывания на стенке. Известия СПбГИ (ТУ). 2018, № 47 (73), стр. 102-107.
4. Гамзаев, Х.М. Моделирование нестационарного течения несжимаемой жидкости в перфорированном трубопроводе. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021, № 72, стр. 60-69.

5. Muthu, P., Berhane, T. Mathematical model of flow in renal tubules. Int. J. of Appl. Math. and Meth. 2010, v. 6, no 20, pp. 94-107.
6. Beavers, G.S., Joseph, D.D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. J. Fluid Mech. 1967, v. 30, pp. 197-207.
7. Joshi, S.D. Horizontal Well Technology. Tulsa, OK, USA, 1991, 535 p.
8. Ouyang, L.B., Arbabi S., Aziz, K. A single-phase wellbore-flow model for horizontal, vertical and slanted wells. SPE Journal. 1998, v. 3(2), pp. 124-133.
9. Лурье, М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа. М.: ИЦ РГУ нефти и газа, 2012, 456 с.

Сведения об авторах

Астафьев В.И. – ведущий научный сотрудник, Самарский научно-исследовательский и проектный институт нефтедобычи (ООО "СамараНИПИнефть"), (+7 964) 991 10 36
E-mail vladimir.astafev@mail.ru

Губанов С.И. – старший преподаватель, Самарский государственный технический университет (СамГТУ), институт нефтегазовых технологий, (+7 937) 214 43 93
E-mail gubanov0393@gmail.com

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ИСПЫТАНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ГРАФЕНА С ДЕФЕКТАМИ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Ахунова А.Х., Баимова Ю.А.

Теоретическое исследование дефектов в графене позволяет предсказывать его физико-механические свойства, что в итоге способствует расширению области его практического применения. Методом молекулярной динамики проведено исследование механических свойств графена в диапазоне температур. Исследованы дислокационные диполи, состоящие из двух объединенных дефектов 5-7 (дислокаций), расположенных на различном расстоянии друг от друга. Изучено влияние температуры на механические свойства графена с дислокационным диполем. Показано, что повышение температуры слабо влияет на прочность графена с дислокационными диполями независимо от размера плеча диполя, в отличие от бездефектного графена и графена с дефектом Стоуна–Уэльса (диполь с нулевым плечом).

1. Введение

Графен представляет собой новое поколение материалов, потенциал которых полностью не изучен. Помимо прекрасных транспортных свойств, он обладает высокой прочностью, нулевой изгибной жесткостью, высокой химической активностью. Синтез графена большой площади является предметом интенсивных исследований, так как получить бездефектный материал в промышленных масштабах очень трудно. Наличие дефектов может не только изменить геометрию поверхности графена, но и его химические, физические и механические свойства. В этой связи важно понять влияние дефектов на прочность графена. В экспериментах часто наблюдают дислокации 5-7, которые также могут составлять дислокационные диполи, состоящие из двух дефектов 5-7, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Экспериментальное наблюдение дефектов графена очень сложный и дорогостоящий процесс. Уменьшить число экспериментов позволяет компьютерное моделирование, с помощью которого можно проанализировать все структурные изменения, происходящие в материале [1].

В настоящей работе методом молекулярно-динамического моделирования в программе LAMMPS исследовано влияние температуры на механические свойства графена с дислокационными диполями.

2. Методика исследований

Исследование механической прочности монослоя графена при одноосном растяжении проводилось в программной среде LAMMPS. Растягивающая нагрузка прикладывалась к графеновому листу как в направлении «кресло» (ось x), так и в направлении «зигзаг» (ось y). Рассматривалась ячейка со следующими параметрами: геометрические размеры – 74×103 Å, количество атомов углерода – 31000.

Рассмотренные дислокационные диполи (ДД) располагались в середине расчетной ячейки, и представляли собой два дефекта 5-7 с углом ориентации $\pi/6$, разделённых расстоянием l (плечом диполя). Размер плеча варьировался от 0 до 25 Å. Отметим, что хорошо известный дефект СУ представляет собой ДД с нулевым плечом. Далее при обозначении структур с ДД использовался нижний индекс n , который указывает на количество гексагонов, разделяющих пару дислокаций. В качестве примера на рис.1 представлены фрагменты ячеек с дефектом СУ и ДД₂.

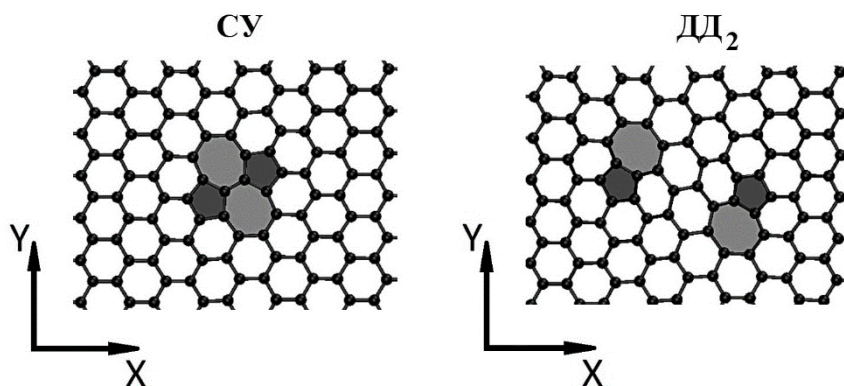


Рис.1. Фрагменты ячеек графена с дефектами СУ и ДД₂.

Моделирование растяжения проводилось при скорости деформации 0.005 ps^{-1} в изотермических условиях для температур от 0 до 3000 К. Перед растяжением графен релаксировался до энергетического состояния с минимальной энергией системы. Температура в процессе моделирования контролировалась термостатом Нозе-Гувера с использованием pvt -ансамбля. Взаимодействие между атомами описывалось потенциалом AIREBO.

3. Результаты моделирования

На рис. 2 в качестве примера приведены зависимости напряжения от степени деформации при 0 К, полученные для четырех структур в двух ориентациях «кресло» (а) и «зигзаг» (б) – графена, СУ, ДД₂ и ДД₁₀. Критические значения, полученные по результатам моделирования растяжения, такие как предел прочности σ_{UTS} и время до разрушения τ для всех рассматриваемых температур и структур, представлены на рис. 3 и 4, соответственно.

Показано, что для всего диапазона температур сохраняется следующая закономерность – уровень напряжений для бездефектного графена и графена с дефектом СУ выше в 3 и более раз, чем для графена с ДД. При этом для ДД с плечом $l > 0$ деформационные кривые демонстрируют практически идентичное поведение для каждого направления деформации при всех рассмотренных температурах (рис. 2).

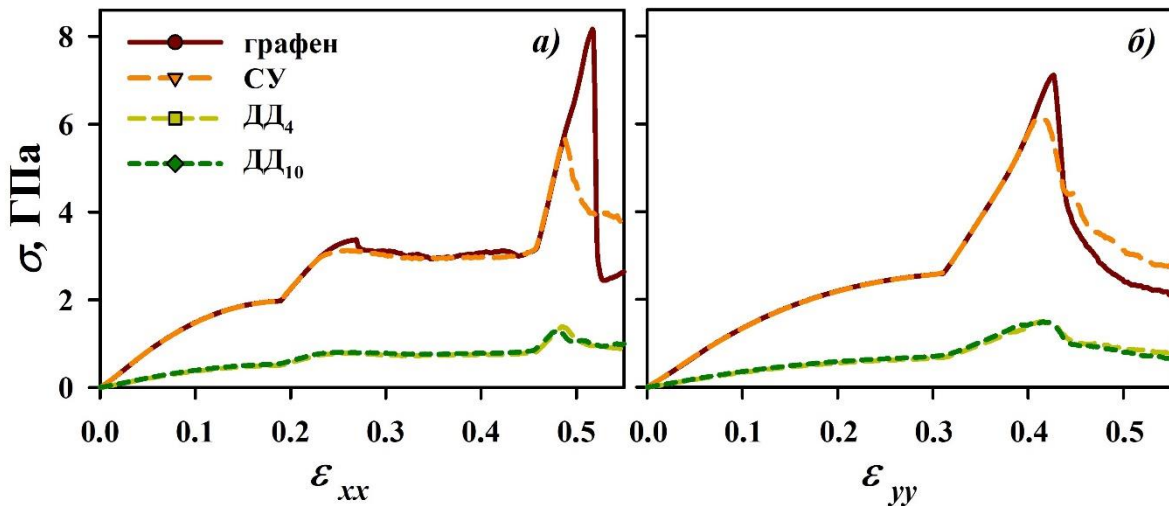


Рис.2. Кривые напряжение-деформация для графена и графена с СУ, ДД₂ и ДД₁₀, растянутого вдоль направлений «кресло» (а) и «зигзаг» (б) при T=0 К.

Результаты оценки влияния температуры испытания на разрушение листа графена с ДД показали, что для направления «кресло» падение предела прочности σ_{UTS} бездефектного графена и графена с дефектом СУ происходит резко – с 8.6 и 5.6 ГПа при 0 К до 2.7 и 2.8 ГПа при 300 К, соответственно (рис.3, а). Для остальных дефектов это падение не так сильно выражено – в среднем с 2 до 0,8 ГПа. При дальнейшем увеличении температуры прочность остается на том же уровне.

Для направления «зигзаг» падение предела прочности σ_{UTS} бездефектного графена и графена с СУ происходит постепенно – с 7.2 и 6.3 ГПа при 0 К до 1.7 при 3000 К, соответственно (рис. 3, б). Для остальных дефектов повышение температуры влияет заметно меньше – σ_{UTS} изменяется с 1.6 до 0.4 ГПа при 0 и 3000 К, соответственно.

Механическое разрушение графена является результатом разрыва межатомных связей, время наступления которого ускоряется с ростом температуры. При растяжении в направлении «кресло» при повышении температуры испытания до 500 К наблюдается резкое падение значения τ – практически в 2 раза по сравнению с τ при 0 К (рис. 4, а). Дальнейшее повышение температуры снижает величину τ незначительно. Отметим, что на τ практически не влияет наличие и размер ДД.

При растяжении в направлении «зигзаг» наблюдается близкая к линейной зависимость τ от температуры, при этом значения τ снижаются постепенно. (рис. 4, б).

Процесс деформации при растяжении по направлению «зигзаг» условно можно поделить на три стадии: упругая стадия, при которой графен еще остается плоским; стадия интенсивной пластической деформации, когда нарушается плоская структура графена и начинают образовываться складки; и стадия разрушения с разрывом связей. С точки зрения действующих механизмов деформации, на начальном этапе деформирование графена проходит за счет поворота связей до достижения критического значения угла между ними, после чего механизм поворота сменяется на механизм растяжение связей.

При деформации растяжением по направлению «кресло» стадия интенсивной пластической деформации заканчивается распрямлением складок, после чего начинается стадия разрушения. С точки зрения действующих механизмов деформации с самой первой стадии действует как механизм поворота связей, так и их растяжение. Повышение же температуры увеличивает количество тепловых флуктуаций, что облегчает процесс разворота связей, и уменьшает время разрыва.

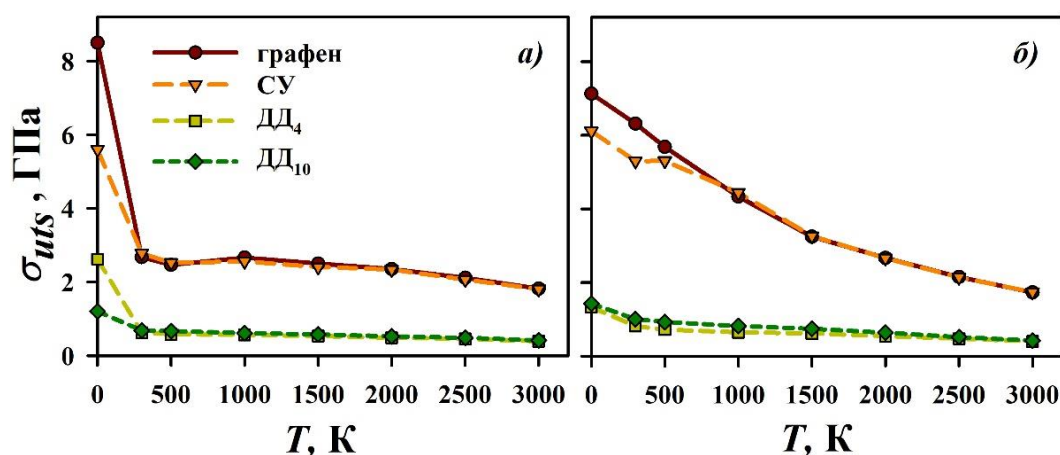


Рис. 3. Зависимость предела прочности σ_{UTS} от температуры испытания при растяжении графена, СУ, ДД₂ и ДД₁₀ в направлении «кресло» (а) и «зигзаг» (б).

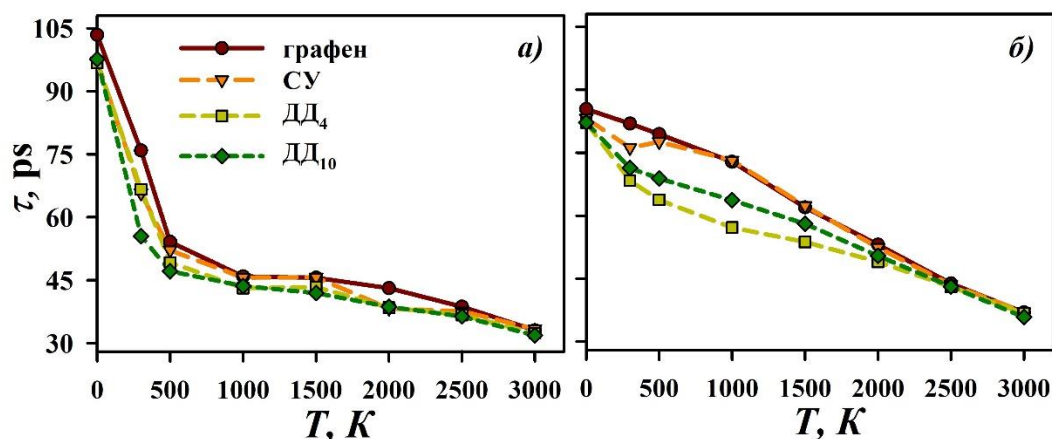


Рис. 4. Зависимость времени до разрушения τ от температуры испытания при растяжении графена, СУ, ДД₂ и ДД₁₀ в направлении «кресло» (а) и «зигзаг» (б).

Таким образом, проведенные исследования показали, что:

- при растяжении по направлению «кресло» повышение температуры испытания до 300 К резко снижает предел прочности как бездефектного, так и дефектного графена. При дальнейшем повышении температуры предел прочности остается практически постоянным. При этом при растяжении вдоль направления «зигзаг» бездефектный графен и графен с СУ

чувствителен к повышению температуры во всем диапазоне рассмотренных температур, в отличие от графена с ДД, у которого предел прочности практически не изменяется;

- на время существования графена до разрушения в большей степени влияет направление растяжения и температура, чем размер дефекта. Бездефектный графен и графен с ДД показывают близкие к друг другу значения времени до разрушения во всем диапазоне температур для всех направлений растяжения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке госзадания ИПСМ РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахунова А.Х., Баимова Ю.А. Влияние дислокационных диполей с разным плечом на деформационное поведение графена: молекулярная динамика // Журнал технической физики. Т. 93. № 4. 2023. С. 445-452. DOI: 10.21883/JTF.2023.04.55030.6-23

Сведения об авторах

Ахунова А.Х. – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, лаборатория физики и механики углеродных наноматериалов, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа

E-mail akhunova.a.a@gmail.com

Баимова Ю.А. - доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующий лабораторией физики и механики углеродных наноматериалов, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа

E-mail julia.a.baimova@gmail.com

СВЕРХЗВУКОВОЙ ФЛАТТЕР КОМПОЗИЦИОННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Багдасарян Г.Е., Пантелеев А.В.

Предлагаемая работа посвящена вопросам устойчивости слоистой цилиндрической оболочки из монослоев ортотропного композиционного материала (КМ), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено в линейной постановке в случае замкнутой удлиненной оболочки. Получена формула определения критической скорости флаттера. Найдены экстремальные значения критической скорости по волновым числам в зависимости от углов армирования слоев материала оболочки. Полученные результаты существенно облегчают исследования вопросов оптимального регулирования величины минимальной критической скорости при помощи выбора угла армирования и физико-механических параметров рассматриваемой задачи. Они подчеркивают пути исследования указанных вопросов.

1. Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h , составленную из конечного числа $(2k+1)$ слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки. За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки (срединная поверхность среднего слоя), которая представляется координатами α_1, α_2 (α_1 – вдоль образующей, α_2 – по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Третья координатная линия α_3 прямолинейная и представляет расстояние по нормали срединной поверхности от точки $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ до точки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ оболочки. Слои, симметрично расположенные относительно координатной поверхности $\alpha_3 = 0$, имеют одинаковую толщину, одинаковые физико-механические свойства и состоят из $2n_s$ элементарных слоев ортотропного композиционного материала, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi_s$ ($s = 1, 2, \dots, 2k+1$) к оси цилиндра. Таким образом, рассматривается слоистая цилиндрическая оболочка, составленная из нечетного числа однородных ортотропных композиционных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности [1,2]. Предполагается, что слои оболочки после деформирования остаются упругими и работают совместно, без скольжения. Согласно вышеизложенному, упругие характеристики $B_{ij}^{(s)}$ материала s -ого слоя в главных геометрических направлениях оболочки определяются через упругие характеристики соответствующих элементарных слоев в главных физических направлениях по известным формулам поворота [3].

Пусть оболочка обтекается с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью \vec{U} ($|\vec{U}| = U = \text{const}$), направленной по образующим цилиндра. Будем исследовать устойчивость оболочки под действием избыточного давления газа, появляющегося вследствие малых возмущений обтекаемой поверхности (вследствие возмущенного колебания оболочки).

Для получения основных уравнений и соотношений, описывающих возмущенное движение рассматриваемой аэроупругой системы, принимаются следующие предположения:

- а) гипотеза о недеформируемых нормалях для всего пакета оболочки в целом [3];
- б) избыточное давление Δp вычисляется с помощью приближенной формулы “поршневой теории” при малых возмущениях [4];
- в) влияниями тангенциальных составляющих сил инерции можно пренебречь.

В силу принятых предположений получаются следующие уравнения и соотношения, описывающие поведение малых возмущений в рассматриваемой оболочке [3]:

уравнения возмущенного состояния

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_1} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial \alpha_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1}{R} T_{22} + Z = m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь m^* – приведенная масса, отнесенная к единице площади срединной поверхности

$$m^* = \frac{2}{g} \left[\gamma_{k+1} \delta_{k+1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i (\delta_i - \delta_{i+1}) \right],$$

где γ_i – удельный вес материала i -го слоя, δ_i – расстояние верхней поверхности i -го слоя от срединной поверхности, Z – нормальная составляющая внешней нагрузки, T_{ij} , M_{ij} – возмущения внутренних сил и моментов невозмущенного состояния, $u(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $v(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $w(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – возмущения перемещений точек срединной поверхности оболочки;

соотношения упругости:

$$\begin{aligned} T_{11} = c_{11} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right), \quad M_{11} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ T_{22} = c_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R} \right) + c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, \quad M_{22} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}, \\ T_{12} = T_{21} = c_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} \right), \quad M_{12} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь для жесткостей растяжения c_{ij} и изгиба D_{ij} имеем

$$c_{ij} = 2 \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1} + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \quad D_{ij} = \frac{2}{3} \left[B_{ij}^{(k+1)} \delta_{k+1}^3 + \sum_{s=1}^k B_{ij}^{(s)} (\delta_s^3 - \delta_{s+1}^3) \right], \quad (1.3)$$

где упругие постоянные $B_{ij}^{(s)}$ материала s -ого слоя в главных геометрических направлениях оболочки согласно формулам поворота имеют следующие представления [3]:

$$\begin{aligned} B_{11}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s, \\ B_{22}^{(s)} &= B_{11}^{0(s)} \sin^4 \varphi_s + 2B_0^{(s)} \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + 2B_{22}^{0(s)} \cos^4 \varphi_s, \\ B_{12}^{(s)} &= B_{12}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \\ B_{66}^{(s)} &= B_{66}^{0(s)} + [B_{11}^{0(s)} + B_{22}^{0(s)} - 2B_0^{(s)}] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s, \quad B_0^{(s)} = B_{12}^{0(s)} + 2B_{66}^{0(s)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.4) $B_{ij}^{0(s)}$ – упругие постоянные материала s -ого слоя в главных физических направлениях (упругие постоянные элементарных слоев, образующих данный слой оболочки), φ_s – угол армирования материала s -ого слоя.

Подставляя значения из (1.2) в уравнение (1.1), получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений возмущенного движения оболочки:

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = 0, \\ c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_2^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha_1^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{c_{22}}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} = 0, \\ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_2^4} + \frac{1}{R} \left(c_{12} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} \right) + c_{22} \frac{w}{R^2} + m^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поперечная нагрузка $Z(\alpha_1, \alpha_2, t)$ возмущенного состояния складывается из сил демпфирования и избыточного аэродинамического давления Δp :

$$Z = -\varepsilon m^* \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p, \quad (1.6)$$

где ε – коэффициент затухания.

В случае внешнего обтекания оболочки, используя “поршневую теорию” для Δp , получаем [5]

$$\Delta p = -\varkappa p_0 \left(\frac{1}{a_0} \frac{\partial w}{\partial t} + M \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right), \quad M = \frac{U}{a_0}. \quad (1.7)$$

В (1.7) M – число Маха, p_0 – давление, a_0 – величина скорости звука для невозмущенного газа, \varkappa – показатель политропы.

Введением функции $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t)$, связанной с u, v, w соотношениями [3]

$$\begin{aligned} u &= L_1 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \Phi, \\ v &= L_2 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[(a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \right] \Phi, \\ w &= L_3 \Phi = \left[a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \Phi, \end{aligned} \quad (1.8)$$

с учетом (1.6) и (1.7), приведем систему (1.5) к одному разрешающему уравнению [6]

$$P L_3 \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha_1^4} + L_3 \left[m^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(m^* \varepsilon + \frac{\varkappa p_0}{a_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \varkappa p_0 M \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] \Phi = 0, \quad (1.9)$$

где линейный дифференциальный оператор P имеет вид

$$P = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4}.$$

Коэффициенты a_{ik} линейных дифференциальных операторов L_i ($i = 1, 2, 3$) определяются формулами [3]

$$a_{ik} = \frac{c_{ik}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad a_{66} = \frac{1}{c_{66}} \quad (i = 1, 2, \quad k = 1, 2). \quad (1.10)$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа сведена к решению уравнения (1.9) при обычных условиях закрепления краев оболочки.

2. С целью выявления качественного влияния угла армирования материала оболочки на процесс устойчивости аэроупругой системы ниже рассматривается случай однослойной бесконечной оболочки. Затем рассматривается задача флаттера оболочки конечной длины.

Решение задачи в указанном случае будем искать в классе волн, распространяющихся вдоль оболочки, т.е. решение уравнения (1.9) ищется в виде

$$\Phi = \Phi_0 e^{i(\omega t - k \alpha_1)} \cos \frac{n}{R} \alpha_2. \quad (2.1)$$

Здесь Φ_0 – некоторая комплексная постоянная, ω – частота колебаний, $k = \pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина полуволны в направлении образующих, n – целое число волн по окружности оболочки.

Подстановка (2.1) в (1.9) приводит к характеристическому уравнению:

$$\omega^2 - i\omega(\varepsilon + \gamma) - \Omega^2(k, n) + ik\gamma U = 0, \quad \left(\gamma = \frac{\varepsilon \rho_0}{\rho h a_0} \right) \quad (2.2)$$

где $\Omega^2(k, n)$ квадрат частоты собственных поперечных колебаний оболочки в вакууме, ρ – плотность материала оболочки, a_{ik} определяются согласно (1.10), жесткости D_{ik} и c_{ik} согласно (1.3) представляются в виде

$$D_{ik} = B_{ik} h^3 / 12, \quad c_{ik} = B_{ik} h,$$

Для любых заданных значений k и n из уравнения (2.2) можно найти частоту. Если ее действительная часть отрицательна, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие частот с неотрицательной действительной частью означает неустойчивость. Условия того, чтобы уравнение (2.2) с комплексными коэффициентами не имело корней с неотрицательными действительными частями, могут быть представлены в форме, аналогичной известным условиям Рауса-Гурвица [7]. Поступая аналогичным образом, как в работе [5], из этих условий для критической скорости получим формулу

$$U_{cr} = V \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\varepsilon h}{a_0} \right). \quad (2.3)$$

Здесь ρ_0 – плотность невозмущенного газа, V – фазовая скорость распространения упругих волн в оболочке.

Из (1.3), (1.4) и (1.10) следует, что D_{ik} и a_{ik} зависят от угла армирования φ материала оболочки. Более того, как критическая скорость, так и величины D_{ik} и a_{ik} , являются периодическими функциями угла φ с периодом π .

Для самой скорости получим формулу:

$$U_{cr}^{\min} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 h R}} \sqrt{\frac{D_{11}}{a_{11}}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right). \quad (2.4)$$

Рассматривая формулу (2.4), легко заметить, что минимальные значения критической скорости существенно зависят от угла армирования материала оболочки. Для иллюстрации указанной зависимости приведены числовые расчеты при $h = 0.01R$. Рассматриваются оболочки, изготовленные из композиционных материалов со следующими безразмерными упругими характеристическими $\bar{B}_{ik}^0 = B_{ik}^0 / B_{11}^0$ в главных направлениях упругости [9,10]:

1. Стеклопластик СВМ 5:1

$$\bar{B}_{11}^0 = 1, \quad \bar{B}_{22}^0 = 0.62, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.12, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.16;$$

2. Стеклопластик СВМ 1:1

$$\bar{B}_{11}^0 = \bar{B}_{22}^0 = 1, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.08, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.1;$$

3. Стеклопластик КАСТ – В

$$\bar{B}_{11}^0 = 1, \quad \bar{B}_{22}^0 = 0.572, \quad \bar{B}_{12}^0 = 0.11, \quad \bar{B}_{66}^0 = 0.0956.$$

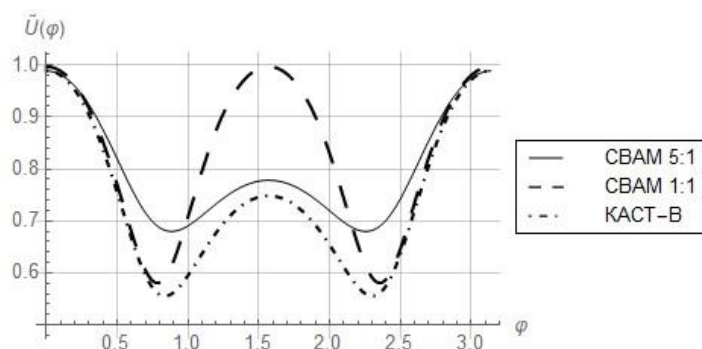


Рис.1. График минимальной критической скорости флаттера $\tilde{U}(\varphi)$ для различных КМ.

При этих исходных данных результаты вычислений приведены на рис.1. Кривые на этом рисунке представляют собой зависимости минимальной безразмерной критической скорости $\tilde{U} = c_t^{-1} U_{cr}^{\min}$, где $c_t = (B_{11}^0 / \rho_0)^{1/2}$, от угла армирования φ .

Рис.1. показывает, что

а) максимальные значения минимальной критической скорости получаются при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$, т.е. когда одно из главных направлений упругости материала монослоев, образующих оболочку, совпадает с направлением потока газа;

б) минимальные значения минимальной (по волновым числам) критической скорости достигаются в точках внутри интервала $(0, \pi)$, расположение которых существенно зависит от отношений типа B_{ik}^0 / B_{11}^0 . Таким образом, варьируя физико-механические параметры композиционной аэроупругой системы, особенно угол армирования материала оболочки, можно оптимально регулировать величину критической скорости флаттера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21Т-2С257.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёт многослойных пластинок и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. Л.: Машиностроение, 1985.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука 1974.
4. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
5. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.:Физматгиз, 1961.
6. Багдасарян Г.Е. Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки в потоке газа. Труды IV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Ереван, 1962.
7. Chebotaryev N.V., Meyman N.S. Gauss-Hurwitz problem for polynomials and integer-valued functions. Proc. AN SSSR, 1949.
8. Volmir A.S. Dynamics of plates and shells. Moscow, Nauka, 1972. -432 p.
9. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетере Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига:Зинатне, 1980.
10. Jones R.M. Mechanics of composite materials. New York, Mc. Craw-Hill Book Co., 1975.
11. Швейко Ю. Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа. Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Мех. и машиностр., 1960. № 6. С. 74-79.

Сведения об авторах

Багдасарян Геворг Ервандович – доктор физ-мат наук, профессор, академик НАН РА, главный научный сотрудник Института Механики Национальной Академии Наук Армении
Phone: (374 10) 561327
E-mail: gevorg.baghdasaryan@rau.am

Пантелеев Андрей Владимирович – доктор физ-мат наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики МАИ
E-mail: avpanteleev@inbox.ru

УПРАВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫМ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ САМОЛЕТНОГО ТИПА С ЗАДАНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ РАЗНЫХ ЧАСТЕЙ КООРДИНАТ

Барсегян В. Р., Матевосян А. Г.

Рассмотрена математическая модель пространственного полета беспилотного летательного аппарата самолетного типа. Для линеаризированной математической модели беспилотного летательного аппарата решена задача синтеза законов управления с заданными начальными, конечными значениями фазового вектора и промежуточными значениями разных частей координат в разные моменты времени. Сформулировано необходимое и достаточное условие существования программного управления и соответствующего движения. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения. В качестве приложения предложенного подхода для конкретных численных значений построены явные выражения функции программного управления и программного движения.

Введение. В настоящее время все большее распространение получают беспилотные летательные аппараты (БПЛА), что является весьма актуальным. БПЛА предназначены для выполнения миссий, представляющих существенную опасность для людей, а также миссий, имеющих неоправданный большой расход ресурсов на выполнение примитивных действий. Поэтому многие страны начинают развивать отрасль производства БПЛА различного класса и назначения. Многообразие сфер применения предполагает использование разных типов БПЛА. БПЛА делятся на самолётные, с несущими плоскостями-крыльями, и вертолётные – квадрокоптеры с вертикальными роторными приводами. БПЛА как динамический объект управления представляет собой сложную динамическую систему. Для управления движением БПЛА необходимо воздействовать на силы и моменты, действующие на летательный аппарат [1-3]. Вообще, важное прикладное и теоретическое значение имеют задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также многоточечные промежуточные условия [4-8].

В настоящей работе рассматривается пространственное движение БПЛА самолетного типа. В математической модели движения БПЛА учитываются особенности динамики управляемого БПЛА. Используя методы теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями для систем линеаризованных дифференциальных уравнений, рассмотрена задача управления движением БПЛА самолетного типа с заданными промежуточными значениями разных частей координат в разные моменты времени. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения. Для конкретных числовых значений построены явные выражения функции программного управления и программного движения, а также соответствующие графики функции.

1. Математическая модель динамики БПЛА самолетного типа и постановка задачи.

В качестве объекта управления будем рассматривать БПЛА самолетного типа как тело с жестко фиксированной внешней оболочкой, т.е. не будут учитываться упругие деформации конструкции, которые могут иметь место при внешних нагрузках.

Движение БПЛА в задачах управления полетом рассматривается как сложное – движение центра масс и движение вокруг центра масс. Для составления математической модели БПЛА приняты следующие допущения [1-2]: процессы, происходящие внутри оболочки БПЛА, считаются стационарными; конфигурация БПЛА имеет плоскость симметрии, массы распределены симметрично по отношению к этой плоскости; внешняя среда, в которой происходит движение БПЛА, считается неизменной, а характеристики этой среды однозначно известны; вращением Земли и кривизной ее поверхности можно пренебречь.

Движение управляемого БПЛА основано на создании изменяемых по величине и направлению сил и моментов, влияющих на БПЛА. Предполагается, что рассматриваемый БПЛА оснащен органами управления, тягой двигателя и аэродинамическими рулями – элеронами. При изменении положений элеронов изменяются и направления воздушных потоков, из-за которых возникают дополнительные аэродинамические силы. В качестве регулирующих факторов, позволяющих воздействовать на летательный аппарат для управления его движением, используются тяга двигателя, углы отклонения руля высоты, руля направления, элеронов.

Используя теоремы о движении центра масс тела, об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии, выводятся уравнения движения БПЛА. С уче-

том всех действующих сил и моментов уравнения пространственного движения БПЛА имеют весьма сложный вид [1-2]. Для исследования конкретных задач управления и аналитического представления решения целесообразно иметь линейное приближение системы дифференциальных уравнений. Система линеаризованных уравнений в форме Коши, описывающих динамику БПЛА, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \quad \dot{x}_2 = -x_8 U_*, \quad \dot{x}_3 = -x_9 U_*, \quad \dot{x}_4 = \frac{u_1}{m} - \frac{x_8}{m} Q, \quad \dot{x}_5 = \frac{u_4}{J_x}, \quad \dot{x}_6 = \frac{u_5}{J_y}, \\ \dot{x}_7 &= \frac{u_6}{J_z}, \quad \dot{x}_8 = \frac{u_2}{m U_*}, \quad \dot{x}_9 = \frac{u_3}{m U_*}, \quad \dot{x}_{10} = x_6, \quad \dot{x}_{11} = x_7, \quad \dot{x}_{12} = x_5, \end{aligned} \quad (1)$$

где обозначения x_i , $i = 1, \dots, 12$ соответствуют следующим переменным

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = v, \quad x_5 = \omega_x, \quad x_6 = \omega_y, \\ x_7 &= \omega_z, \quad x_8 = \Theta, \quad x_9 = \Psi, \quad x_{10} = \psi, \quad x_{11} = \mathcal{G}, \quad x_{12} = \gamma, \end{aligned}$$

x , y и z – координаты центра масс в земной системе координат, m – масса БПЛА, v – скорость БПЛА, g – ускорение, создаваемое силой тяжести, J_x , J_y , J_z – основные моменты инерции БПЛА, M_x, M_y, M_z – проекции моментов сил, действующих на БПЛА, ω_x , ω_y , ω_z – угловые скорости БПЛА в проекциях на оси связанной системы координат, α – угол атаки, β – угол скольжения между вектором скорости и его проекций на вертикальную плоскость симметрии БПЛА, γ_c – угол крена в скоростной системе координат, Θ – угол наклона траектории, Ψ – угол поворота траектории БПЛА, ψ – угол рыскания, θ – угол тангажа, γ – угол крена. Управляющими воздействиями являются силы и моменты, действующие на БПЛА [1-3]. Система (1) вполне управляема [7, 9] (можно убедиться непосредственной проверкой).

Пусть заданы начальное и конечное

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \quad (2)$$

значения фазового вектора системы (1) и в некоторые промежуточные моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$, $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < T$, следующие значения части координат фазового вектора

$$x_3(t_1), \quad x_4(t_1), \quad \text{и} \quad x_1(t_2), \quad x_2(t_2). \quad (3)$$

Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t), u_6(t))^T$, $t \in [t_0, T]$ и программное движение $x = x(t)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям (2) и (3), а также построить их.

Здесь и далее буква « T » в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

2. Об основных результатах. Запишем решение уравнения (1) в виде [5-7, 9]:

$$x(t) = X[t, t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^t H[t, \tau]U(\tau)d\tau, \quad (4)$$

где через $X[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.1), $H[t, \tau]$ импульсно-переходная матрица [7, 9].

Для определения законов управления, учитывая промежуточные (3) и конечные (2) условия, применяя подходы, приведенные в работах [5-8], получим, что управляющее воздействие должно удовлетворять интегральным соотношениям, которые представим в виде:

$$\int_{t_0}^T H(t)U(t)dt = \eta(t_0, t_1, t_2, T), \quad \eta(t_0, t_1, t_2, T) = (C_1, C_2, \dots, C_{16})^T. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= x_1(T) - x_1(t_0) - (T - t_0)x_4(t_0) - Q(T - t_0)^2 x_8(t_0)(2m)^{-1}, \\ C_2 &= x_2(T) - x_2(t_0) + V(T - t_0)x_8(t_0), \quad C_3 = x_3(T) - x_3(t_0) + V(T - t_0)x_9(t_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= x_4(T) - x_4(t_0) - Q(T-t_0)x_8(t_0)m^{-1}, & C_j &= x_j(T) - x_j(t_0), \quad j=5,6,\dots,9, \\
C_{10} &= x_{10}(T) - (T-t_0)x_6(t_0) - x_{10}(t_0), & C_{11} &= x_{11}(T) - (T-t_0)x_7(t_0) - x_{11}(t_0), \\
C_{12} &= x_{12}(T) - (T-t_0)x_5(t_0) - x_{12}(t_0), & C_{13} &= x_3(t_1) - x_3(t_0) + V(t_1-t_0)x_9(t_0), \\
C_{14} &= x_4(t_1) - x_4(t_0) - Q(t_1-t_0)x_8(t_0)m^{-1}, & C_{16} &= x_2(t_2) - x_2(t_0) + V(t_2-t_0)x_8(t_0), \\
C_{15} &= x_1(t_2) - x_1(t_0) - (t_2-t_0)x_4(t_0) - Q(t_2-t_0)^2 x_8(t_0)(2m)^{-1}.
\end{aligned}$$

Матрица $H(t)$ имеет размерность (15×6) , элементы которой имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
h_1^{(1)}[T,t] &= h_2^{(2)}[T,t] = h_3^{(3)}[T,t] = \frac{T-t}{m}, & h_4^{(1)}[T,t] &= \frac{1}{m}, & h_1^{(2)}[T,t] &= \frac{Q(T-t)^2}{2m^2V} \\
h_4^{(2)}[T,t] &= \frac{Q(T-t)}{m^2V}, & h_5^{(4)}[T,t] &= \frac{1}{J_x}, & h_6^{(5)}[T,t] &= \frac{1}{J_y}, & h_7^{(6)}[T,t] &= \frac{1}{J_z}, \\
h_4^{(2)}[T,t] &= \frac{Q(T-t)}{m^2V}, & h_5^{(4)}[T,t] &= \frac{1}{J_x}, & h_6^{(5)}[T,t] &= \frac{1}{J_y}, & h_7^{(6)}[T,t] &= \frac{1}{J_z}, \\
h_8^{(2)}[T,t] &= h_9^{(3)}[T,t] = \frac{1}{mV}, & h_{10}^{(5)}[T,t] &= \frac{T-t}{J_y}, & h_{11}^{(6)}[T,t] &= \frac{T-t}{J_z}, & h_{12}^{(4)}[T,t] &= \frac{T-t}{J_x}, \\
h_{13}^{(3)}[T,t] &= \begin{cases} -(t_1-t)m^{-1}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{при } t_1 < t \leq T, \end{cases} & h_{14}^{(1)}[T,t] &= \begin{cases} m^{-1}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & \text{при } t_1 < t \leq T, \end{cases} \\
h_{14}^{(2)}[T,t] &= \begin{cases} Q(t_1-t)^2 m^{-2}V^{-1}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{при } t_1 < t \leq T \end{cases}, & h_{15}^{(1)}[T,t] &= \begin{cases} (t_2-t)m^{-1}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0, & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases} \\
h_{15}^{(2)}[T,t] &= \begin{cases} 0.5Q(t_2-t)^2 m^{-2}V^{-1}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2, \\ 0, & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}, & h_{16}^{(2)}[T,t] &= \begin{cases} -(t_2-t)m^{-1}, & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2, \\ 0, & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases},
\end{aligned}$$

где нижний индекс функции $h_j^{(i)}$ это номер строки, а верхний индекс – номер столбца матрицы.

Все остальные элементы матрицы $H(t)$, которые здесь не приводятся, равны нулю.

Управляющее воздействие $U(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (5), представим в виде [9-10, 12, 13]

$$U(t) = H^T(t)Q^{-1}\eta + f(t), \quad (6)$$

где $H^T(t)$ – транспонированная матрица, $f(t)$ – вектор-функция и такая, что

$$\int_{t_0}^T H(t)f(t)dt = 0, \quad Q = \int_{t_0}^T H(t)H^T(t)dt. \quad (7)$$

Решение задачи сформулируем в виде теоремы, аналогичной теореме, доказанной в [7, 10].

Для того чтобы существовало программное управление (6) и соответствующее ему решение системы (1), удовлетворяющее условиям (5), необходимо и достаточно, чтобы матрица Q (7) была не особой, или чтобы ранги матрицы Q и расширенной матрицы $\{Q, \eta\}$ совпадали между собой.

Матрица Q имеет размерность (16×16) , и $\det Q \neq 0$. Имея выражение для функции управления $U(t)$, соответствующее программное движение запишется в виде формулы Коши (4). Если найденные выражения функции управления $U(t)$ подставить в (1) и на каждом промежутке времени проинтегрировать эти уравнения при заданных начальном и промежуточных значениях фазового вектора, получим законы движения.

Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что $t_0 = 0$, $t_1 = 4$, $t_2 = 8$, $T = 14$. Начальное и конечное состояние фазового вектора выберем следующим образом:

$$x(0) = (0, 0, 0, 0, 5, 3, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 2)^T,$$

$$x(T) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 80, 8, 100, 130)^T.$$

Пусть в промежуточные моменты времени $t_1 = 4$, $t_2 = 8$ заданы значения части координат фазового вектора в виде: $x_3(t_1) = 80$, $x_4(t_1) = 8$ и $x_1(t_2) = 100$, $x_2(t_2) = 130$. Вычисляя значения $H^T(t)$, Q^{-1} , η и подставляя значения этих матриц и вектора η в (5), (при $f(t) = 0$) для управляющих воздействий будем иметь следующие явные выражения:

$$u_1(t) = \begin{cases} \frac{137315475}{4267088} - \frac{83374005t}{8534176}, & 0 \leq t \leq 4 \\ \frac{285783711}{4267088} - \frac{83374005t}{8534176}, & 4 < t \leq 8 \\ \frac{55513781}{38403792} - \frac{46737125t}{38403792}, & 8 < t \leq 14 \end{cases}, \quad u_3(t) = \begin{cases} -\frac{611}{28} + \frac{951t}{112}, & 0 \leq t \leq 4 \\ \frac{3568}{175} - \frac{1443t}{700}, & 4 < t \leq 14 \end{cases},$$

$$u_2(t) = \begin{cases} \frac{21869187}{4267088} - \frac{160634283t}{8534176} + \frac{83374005t^2}{17068352}, & 0 \leq t \leq 4 \\ \frac{615742131}{4267088} - \frac{457570755t}{8534176} + \frac{83374005t^2}{17068352}, & 4 < t \leq 8 \\ \frac{679615983}{4267088} - \frac{817142891t}{38403792} + \frac{46737125t^2}{76807584}, & 8 < t \leq 14 \end{cases},$$

$$u_4(t) = -\frac{87}{98} + \frac{33t}{343}, \quad u_5(t) = -\frac{115}{98} + \frac{87t}{686}, \quad u_6(t) = -\frac{177}{98} + \frac{135t}{686}.$$

Согласно вышесказанному, законы движения для геометрических координат имеют вид:

$$x_1(t) = \begin{cases} 5t + \frac{145849651}{8534176}t^2 - \frac{1887411}{2438336}t^3 - \frac{53544761}{68273408}t^4 + \frac{5558267}{68273408}t^5, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{3534958}{38099} + \frac{9027890}{38099}t - \frac{893428001}{8534176}t^2 + \frac{54671917}{2438336}t^3 - \frac{152523585}{68273408}t^4 + \frac{5558267}{68273408}t^5, & 4 < t \leq 8 \\ -\frac{4778192146}{1028673} + \frac{2190992093}{1028673}t - \frac{80944708463}{230422752}t^2 + \frac{433557623}{16458768}t^3 - \frac{817142891}{921691008}t^4 + \frac{9347425}{921691008}t^5, & 8 < t \leq 14 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} -2t - \frac{21869187}{8534176}t^2 + \frac{53544761}{17068352}t^3 - \frac{27791335}{68273408}t^4, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{14139832}{38099} + \frac{10528676}{38099}t - \frac{615742131}{8534176}t^2 + \frac{152523585}{17068352}t^3 - \frac{27791335}{68273408}t^4, & 4 < t \leq 8 \\ -\frac{2047489472}{1028673} + \frac{721233635}{1028673}t - \frac{679615983}{8534176}t^2 + \frac{817142891}{230422752}t^3 - \frac{46737125}{921691008}t^4, & 8 < t \leq 14 \end{cases},$$

$$x_3(t) = \begin{cases} -t + \frac{611}{56}t^2 - \frac{317}{224}t^3, & \text{при } 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{2814}{25} + \frac{4171}{50}t - \frac{1784}{175}t^2 + \frac{481}{1400}t^3, & \text{при } 4 < t \leq 14 \end{cases}.$$

Графики фазового вектора-функции $x(t)$ при $t \in [0, 14]$ по геометрическим координатам $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ и траектории движения представлены на рис. 1 - 4.

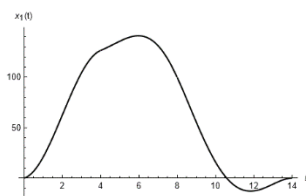


Рис.1. График функции $x_1(t)$.

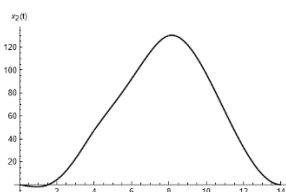


Рис.2. График функции $x_2(t)$.

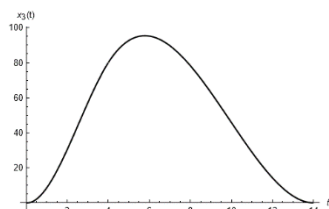


Рис.3. График функции $x_3(t)$.

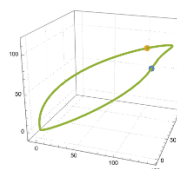


Рис.4. Траектория движения.

Таким образом, для системы линеаризованных дифференциальных уравнений пространственного движения БПЛА самолетного типа решена задача управления полетом с заданными начальными, конечными условиями и заданными значениями разных частей координат в двух разных промежуточных моментах времени, а также построены соответствующие графики функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев, А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 615 с.
2. Телухин С.В., Матвеев В.В. Беспилотный летательный аппарат как объект управления. Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 10. С. 7-10
3. Богословский С.В., Дорофеев А.Д. Динамика полёта летательных аппаратов. СПб.: СПбГУАП, 2002. С. 34—41.
4. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями. ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 215-222.
5. Барсегян В.Р. Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени. Докл. НАН Армении. 2010. Т. 110. № 3. С. 251–260.
6. Barseghyan V.R. and Barseghyan T.V. On an Approach to the Problems of Control of Dynamic System with Nonseparated Multipoint Intermediate Conditions. Automation and Remote Control, 2015, Vol. 76, № 4, pp. 549-559.
7. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
8. Barseghyan, V. and Solodusha, S. On One Problem in Optimal Boundary Control for String Vibrations with a Given Velocity of Points at an Intermediate Moment of Time. Conference Paper. Publisher: IEEE. 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), pp.343-349, 2021. Doi: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514.
9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
10. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975, 496 с.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор факультета математики и механики ЕГУ.

Тел.: (37410) 52 36 40; E-mail: barseghyan@sci.am

Матевосян Арам Гагикович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент факультета математики и механики ЕГУ, 0025, г.Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

(e-mail: matevosaram@gmail.com)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ МАССОПЕРЕНОСА РАСТВОРЕННОГО В ВОДЕ ВЕЩЕСТВА В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ–ШОУ ПРИ НАЛИЧИИ КОЛЕБАНИЙ ВОДЫ

Бушуева А.В., Дьякова В.В., Полежаев Д.А.

Обсуждаются результаты экспериментального изучения массопереноса растворенного в воде вещества в ячейке Хеле – Шоу при наличии и отсутствии колебаний воды. Эксперименты проводятся в «пустой» ячейке Хеле – Шоу и в ячейке, заполненной калиброванными шариками, диаметр которых чуть меньше, чем ширина зазора между образующими ячейку стеклянными пластинами. В отсутствие колебаний массоперенос растворенного в воде вещества обеспечивается только молекулярной диффузией. Эксперименты с осциллирующей жидкостью показывают, что темп массопереноса увеличивается и зависит от частоты и амплитуды колебаний. Предположительно, эффект связан с возникновением дисперсии Тейлора и появлением осредненных течений в порах между шариками. Техника измерения темпа массопереноса оригинальная и основана на измерении концентрации растворенного вещества – флуоресцирующего красителя родамина Б – по интенсивности флуоресцентного излучения. Результаты измерения коэффициента молекулярной диффузии родамина Б в воде хорошо согласуются с данными, полученными с помощью других экспериментальных техник.

Экспериментально изучается массоперенос растворенного в воде флуоресцирующего вещества в ячейке Хеле – Шоу при наличии и отсутствии колебаний воды. Интерес к проведению экспериментов в заполненной водой ячейке Хеле – Шоу обусловлен тем, что ее можно представить как простую модель насыщенной жидкостью пористой среды. В таком случае поиск методов интенсификации массопереноса растворенного в жидкости вещества актуален, например, для улучшения селективной доставки лекарств, увеличения отдачи нефтяных пластов и т. д. Одним из возможных вариантов интенсификации массопереноса растворенного в жидкости вещества является вибрационное воздействие на жидкость. В отсутствие колебаний растворенное в жидкости вещество распространяется благодаря молекулярной диффузии. В случае колебаний в дозвуковом и звуковом диапазонах в жидкости возникают два дополнительных механизма переноса вещества: дисперсия Тейлора [1] и акустические (осредненные) течения [2]. Дисперсия Тейлора способна увеличить массоперенос находящегося в жидкости или газе вещества в несколько раз по сравнению с молекулярным переносом, когда поперечный размер канала сравним с толщиной вязкого пограничного слоя, то есть при низких безразмерных частотах колебаний [3]. Если ячейка с жидкостью имеет сложную форму, то вследствие неоднородности пульсационного поля скорости в жидкости возникают осредненные потоки, способные переносить растворенное в них вещество значительно быстрее, чем в отсутствие колебаний [4]. При ультразвуковом воздействии на жидкость к обозначенным механизмам дополнительного массопереноса добавляется перемешивание растворенного вещества, вследствие потоков, образующихся при кавитационном схлопывании пузырьков газа [5].

В настоящей работе рассматривается влияние колебаний в дозвуковом и звуковом диапазонах на массоперенос растворенного в воде флуоресцирующего красителя в «пустой» ячейке Хеле – Шоу и в ячейке, заполненной калиброванными шариками.

В качестве флуоресцирующего вещества используется родамин Б, который представляет собой растворимый в воде порошок, у которого максимум энергии излучения приходится на длину волны 568 нм, а максимум энергии возбуждения – на длину волны 546 нм. Для измерения интенсивности массопереноса используется методика, основанная на измерении концентрации красителя по интенсивности флуоресцентного излучения жидкости. Результаты измерений коэффициента молекулярной диффузии родамина Б в покоящейся воде, проведенные в «пустой» ячейке Хеле – Шоу и в ячейке, заполненной калиброванными шариками, хорошо согласуются с данными, полученными с помощью других экспериментальных техник.

Предварительные эксперименты, проведенные при различных частотах и амплитудах колебаний жидкости, показывают, что темп массопереноса растворенного в воде флуоресцирующего красителя увеличивается с ростом числа Пекле.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00311).

ЛИТЕРАТУРА

1. Aris R. On the dispersion of a solute by diffusion, convection and exchange between phases. Philos. T. R. Soc. A, vol. 252 (1271), 1959.
2. Riley N. Steady streaming, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 33(1), 2001.
3. Polezhaev D., Duru P., and Plouraboue F. Enhanced evaporation from an oscillating liquid in a capillary tube. Int. J. Heat Mass Tran., vol. 95, 2016.
4. Kozlov V. and Polezhaev D. Enhanced mass transfer in air oscillating in a channel with periodically varying radius. Int. J. Heat Mass Tran., vol. 167, 2021.
5. Jalal J. and Leong T. S. Microstreaming and its role in applications: a mini-review. Fluids, vol. 3(4), 2018.

Сведения об авторах

Бушуева Анастасия Васильевна – студент, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, физический факультет, +7 (342) 215-19-47 (доб. 489)
E-mail bushueva_av@pspu.ru

Дьякова Вероника Вадимовна – доцент, кандидат физико-математических наук, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра прикладной физики, +7 (342) 2-391-283
E-mail dyakova@pspu.ru

Полежаев Денис Александрович – доцент, кандидат физико-математических наук, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, физический факультет, +7 (342) 215-19-47 (доб. 489)
E-mail polezhaev@pspu.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБА ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ.

Валесян С.Ш., Саакян А.А.

Экспериментально исследован максимальный прогиб шарнирно-опертой балки под воздействием сосредоточенной силы. Исследовано влияние точки приложения силы на максимальный прогиб. Проведено сравнение экспериментально полученных результатов с теоретически полученными.

1. Введение.

Существенный интерес для объектов строительства, техники специального назначения, а также машиностроения представляет исследование вопросов изгиба конструкций, нагруженных сосредоточенной силой.

Задача изучения изгиба балки от приложенной сосредоточенной силы приводится в работе [1]. Вопросам исследования оптимального выбора расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости изотропной прямоугольной пластины, обеспечивающее наименьшее значение наибольшего прогиба, посвящены работы [2-3].

Теоретическое исследование максимального прогиба балки под воздействием сосредоточенной силы проведено в работе [4]. В отличие от задачи для струны, где максимальный прогиб получается в точке приложения сосредоточенной силы, в работе [4], посвященной задаче изгиба балки под действием сосредоточенной нагрузки, получено, что не во всех сечениях балки можно получить максимальный прогиб.

В данной работе экспериментально исследован максимальный прогиб шарнирно-опертой балки под воздействием сосредоточенной силы, исследовано влияние точки приложения силы на максимальный прогиб и проведено сравнение экспериментально полученных результатов с теоретически полученными.

2. Экспериментальная часть.

Экспериментальное исследование максимального прогиба балки проводилось на образце из стали Ст45 с размерами $l \times b \times h$, равными 20см, 1.5см и 0.9см, соответственно (рис. 1).

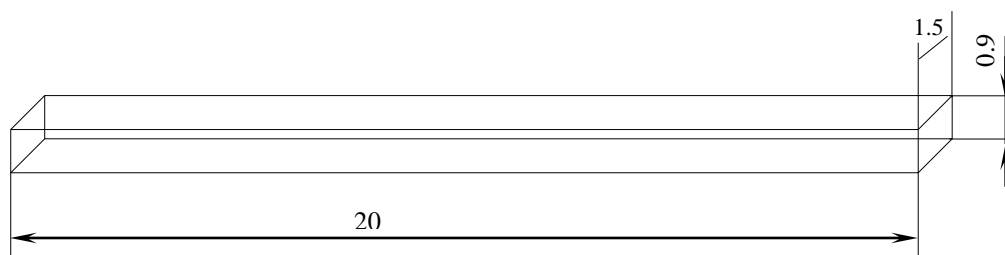


Рис.1 Экспериментальный образец.

Образец испытывался на машине ZD 10/90. Датчики часового типа с ценой деления 10мкн., измеряющие прогиб образца, были расположены вдоль образца на расстоянии 3см, 6.5см, 10см, 13.5см и 17см в расчете от левого конца.

Шарнирно-опертый образец нагружался сосредоточенной силой, равной 40 кгс по середине на отметке 10см (рис. 2(а)) и снимались данные датчиков, затем нагружался сосредоточенной силой того же номинала на отметках 6.5см и 3см, соответственно (рис. 2(б) и (в)). Для каждого последующего случая показания изгиба отдельно снимались с датчиков.

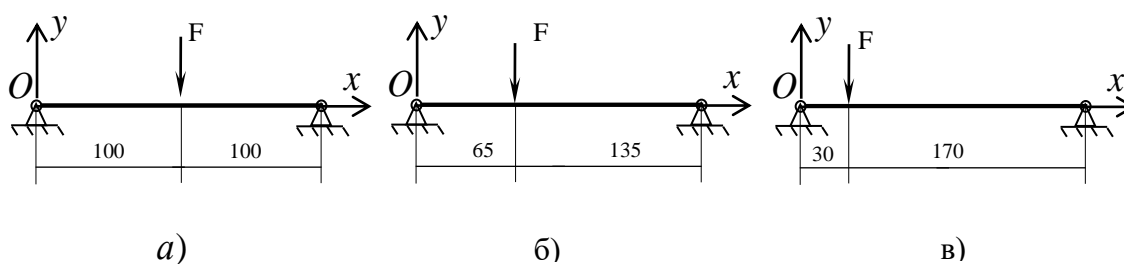


Рис. 2. Схема приложения сосредоточенной силы.

Испытания образца на определение максимального прогиба проводились как с сечением $b=1.5\text{см}$ и $h=0.9\text{см}$, так и с сечением $b=0.9\text{см}$ и $h=1.5\text{см}$. В последнем случае образец нагружался сосредоточенной силой равной 100кГс на расстоянии 10см , 6.5см и 3см , соответственно.

Экспериментально полученные данные сравнены с аналитической формулой

$$6Dw(x) = q_0(\zeta - x^3)H(x - \zeta) + \frac{q_0}{l}x(l - \zeta)(x^2 - 2l\zeta + \zeta^2),$$

приведенной в работе [4]. Здесь $D = EJ_x$ - жесткость балки, E - модуль Юнга материала балки, J_x - момент инерции поперечного сечения, ζ - точка приложения силы, а w - величина прогиба балки.

3. Результаты экспериментальных исследований.

В первом случае, шарнирно-опертая балка-образец длиной $l = 20\text{см}$ и с сечением $b=1.5\text{см}$ и $h=0.9\text{см}$ нагружалась сосредоточенной силой q_0 на расстоянии 3см , 6.5см и 10см от левого конца.

На рис. 3 и 4 приведены эпюры изгибающих моментов (здесь эпюра изгибающего момента изображена в положительной части графика), прогибы балки-образца, полученные в результате эксперимента, обозначены квадратами, а кривые, описывающие прогиб балки-образца и построенные по данным, рассчитанным в соответствии с вышеупомянутой формулой, обозначены сплошными линиями.

Эпюра изгибающего момента, экспериментальные и теоретические кривые прогиба образца, нагруженного сосредоточенной силой равной 40кГс (или изгибающим моментом M равным $1.96\text{кН}\cdot\text{см}$) посередине пролета (т.е. на расстоянии 10см от левого конца) представлены на (Рис.3а). Известно, что в этой точке приложения силы ($l/2$) должен быть максимальный прогиб балки [5]. Как видно на рис. 3а, в точке максимального прогиба, т.е. в середине пролета балки, разница между экспериментально и теоретически полученными данными составила 4.5% .

На рис. 3б приведены эпюра изгибающего момента, экспериментальные данные и теоретическая кривая прогиба образца, нагруженного сосредоточенной силой в 40кГс ($M = 1.72\text{кН}\cdot\text{см}$) на расстоянии 6.5см от левого конца. В точке приложения силы разница между экспериментальными и расчетными данными прогиба составила 0.6% , а в середине - 2.13% . По теоретическим расчетам максимальный прогиб зафиксирован на расстоянии 9.08см , что соответствует условию $0.422651 < x < 0.577351$, приведенному в [4], а разница между максимальным прогибом и прогибом посередине составила 1.035% .

На рис. 3в приведены эпюра изгибающего момента, экспериментальные данные и теоретическая кривая прогиба образца, нагруженного сосредоточенной силой в 40кГс ($M = 0.9\text{кН}\cdot\text{см}$) на расстоянии 3см от левого конца. В точке приложения силы разница между экспериментальными и расчетными данными прогиба составила 23% , а в середине - 6.06% . По теоретическим расчетам максимальный прогиб зафиксирован на расстоянии 8.6см , что удовлетворяет вышеуказанному условию, а разница между максимальным прогибом и прогибом посередине составила 2.21% .

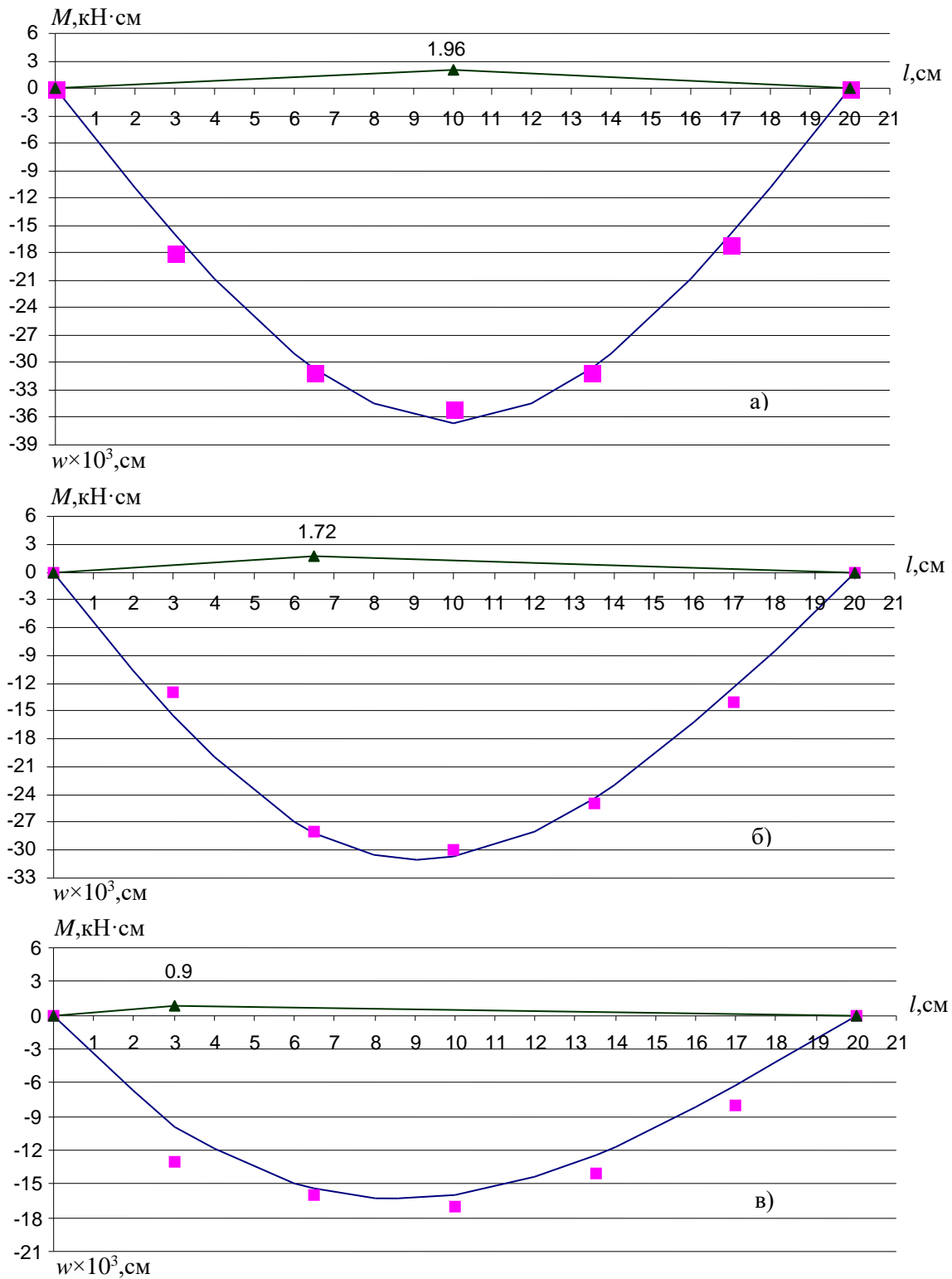


Рис. 3 Эпюры изгибающих моментов, экспериментальные данные и теоретические кривые, описывающие прогиб балки-образца, длиной $l=20$ см и с сечением $b=1.5$ см и $h=0.9$ см.

Во втором случае, шарнирно-опертая балка-образец длиной $l=20$ см и с сечением $b=0.9$ см и $h=1.5$ см нагружалась сосредоточенной силой q_0 на расстоянии 3 см, 6.5 см и 10 см от левого конца.

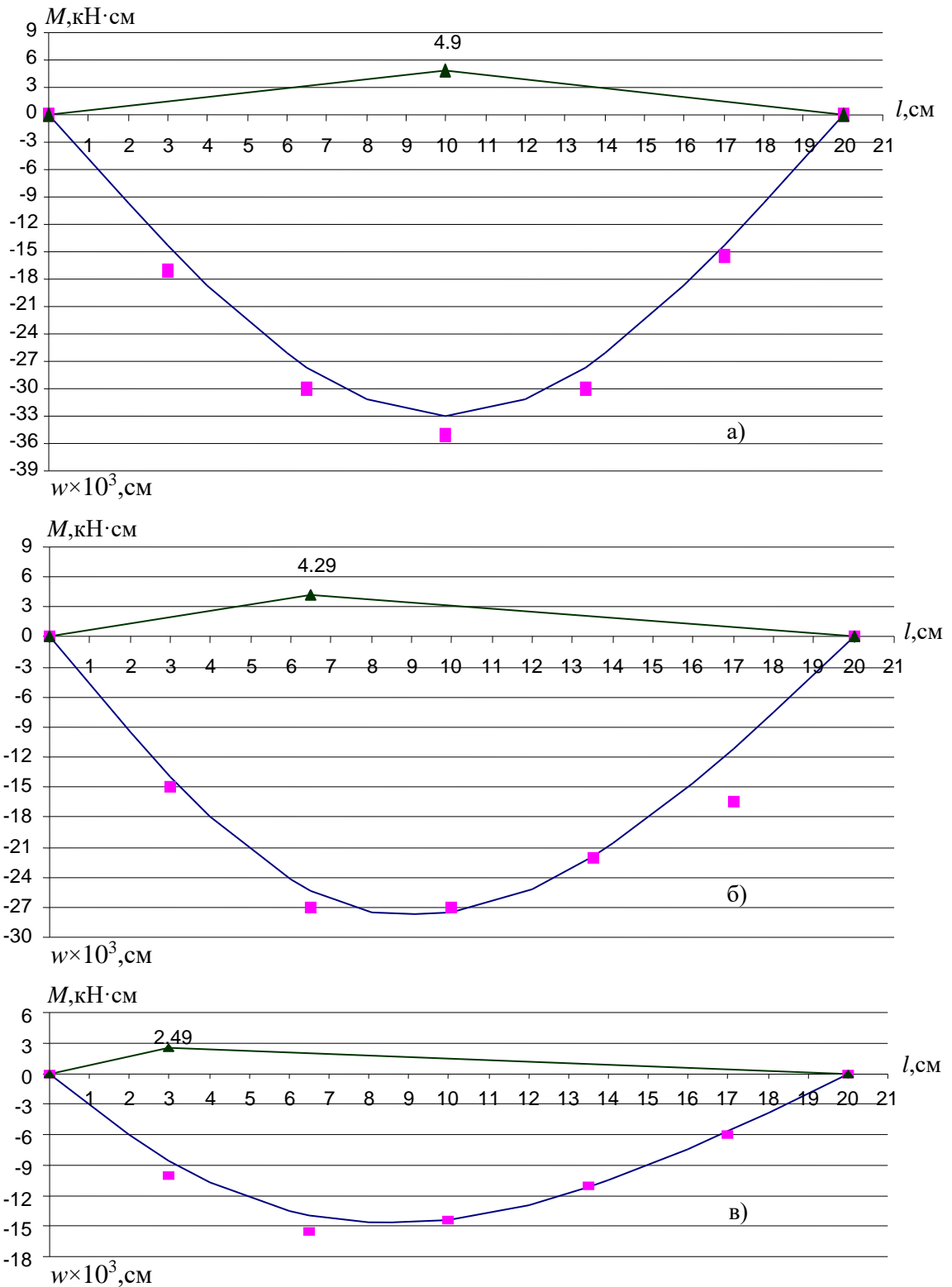


Рис. 4 Эпюры изгибающих моментов, экспериментальные данные и теоретические кривые, описывающие прогиб балки-образца длиной $l = 20$ см и с сечением $b = 0.9$ см и $h = 1.5$ см.

Эпюра изгибающего момента, экспериментальные данные и теоретическая кривая прогиба образца, нагруженного сосредоточенной силой, равной 100 кгс (или изгибающим моментом M равным 4.96 кН·см), посередине пролета, представлена на рис. 4а. Очевидно, точка

максимального прогиба находится посередине пролета балки, и разница между экспериментально и теоретически полученными данными составила 5.94%.

На рис. 4б и рис. 4в приведены эпюры изгибающих моментов, экспериментальные данные и теоретические кривые прогиба образца, нагруженного сосредоточенной силой в 100кГс ($M=4.29\text{кН}\cdot\text{см}$) на расстоянии 6.5см и 100кГс ($M=2.49\text{кН}\cdot\text{см}$) на расстоянии 3см от левого конца, соответственно.

В точке приложения силы 100кГс ($M=4.29\text{кН}\cdot\text{см}$) на расстоянии 6.5см разница между экспериментальными и расчетными данными прогиба составила 6.1%, а в середине-2.15%. По теоретическим расчетам максимальный прогиб зафиксирован на расстоянии 9.08см, а разница между максимальным прогибом и прогибом посередине составила 1.035%.

На расстоянии 3см от левого конца, приложена сосредоточенная сила 100кГс ($M=2.49\text{кН}\cdot\text{см}$), и соответственно, разница между экспериментальными и расчетными данными прогиба составила 14.4% в точке приложения силы, а в середине - 0.2%. По теоретическим расчетам максимальный прогиб зафиксирован на расстоянии 8.6см, а разница между максимальным прогибом и прогибом посередине составила 2.21%.

4. Заключение.

Исследование влияния точки приложения сосредоточенной силы на максимальный прогиб балки показало, что для силы, приложенной посередине пролета балки, максимальный прогиб проявляется в этой же точке, а для силы, приложенной в точках 6.5см и 3см, соответственно, точки максимальных прогибов удовлетворяют условию $0.422651 < x < 0.577351$, приведенному в [4].

Сравнивая экспериментально полученные данные с теоретическими данными, описывающими прогиб балки, можно отметить, что разброс данных находится в пределах 6% для обоих случаев. Однако отметим, что под воздействием сосредоточенной силы, приложенной на расстоянии 3см от левого конца, разница величин прогиба составила 23% и 14.4%.

А также нужно отметить, что для балок с равной площадью поперечного сечения, на с разными параметрами b и h ($b=1.5\text{см}$ и $h=0.9\text{см}$ – в первом случае и $b=0.9\text{см}$ и $h=1.5\text{см}$ – во втором случае) можно получить одно и тоже значение максимального прогиба, если величина сосредоточенной силы будет в 2.5 раза больше для второго случая параметров балки.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Тимошенко С.П. Сопrotивление материалов. М.: Наука, Т.1, 1965. 365с.
2. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости. В сб. “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем”, Ереван, Изд-во ЕГУ, 1997, с.115-120
3. Белубекян М.В., Гараков В.Г. Задача С.А.Амбарцумяна о выборе места расположения опор балки. В сб. “Седьмая годовичная научная конференция РАУ”, Ереван, Изд-во РАУ, 2013, с.19-23
4. Саакян А.А. Анализ прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных условиях на концах. Известия НАН РА, Механика, т.69, №2, 2016, с. 46-54.
5. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М.-Л., Гостехиздат, 1949. 772с.

Сведения об авторах:

Валесян Сона Шантовна – к.т.н., доцент, старший научный сотрудник Института механики НАН РА, **E-mail:** svalesyan@yahoo.com

Саакян Арег Аветикович – к.ф.-м.н., **E-mail:** areg1992@gmail.com

О ТЕРМОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ.

Василян Т. Г., Джилавын С. А.

Рассматриваются термоупругие поперечные колебания однородной пластинки из трансверсально-изотропного материала на основе уточненной теории пластин. Изучены влияния учета поперечных сдвиговых деформаций при взаимосвязанной задаче термоупругости на частоту и коэффициент затухания колебаний.

1. Однородная, прямоугольная пластинка из трансверсально-изотропного материала отнесена к прямоугольной системе координат x, y, z . Плоскость изотропии параллельна координатной плоскости Oxy , совпадающей со срединной плоскостью пластинки. Пластинка размерами a, b $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, толщиной $2h$, $z \in [-h, h]$ шарнирно оперта по всему контуру, находится под влиянием температурного поля $t(x, y, z, \tau)$, τ – параметр времени. Рассматриваются поперечные колебания пластинки, и в основу задачи принимаются гипотезы уточненной теории пластин [1]. Формулы для компонент вектора перемещения имеют вид

$$\begin{aligned} U_x &= U(x, y, \tau) - z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y, z, \tau) \\ U_y &= V(x, y, \tau) - z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y, z, \tau) \\ U_z &= W(x, y, \tau), \end{aligned} \tag{1}$$

$U(x, y, \tau)$, $V(x, y, \tau)$, $W(x, y, \tau)$ – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости, W – нормальное перемещение (прогиб), $f_1(x, y, z, \tau)$, $f_2(x, y, z, \tau)$ – искомые функции, характеризующие распределения поперечных сдвиговых деформаций.

Относительно функций $w(x, y, \tau)$, $\varphi(x, y, \tau)$, $\psi(x, y, \tau)$ получим уравнения поперечных колебаний пластинки при температурном поле [2], пренебрегая инерцией вращения и нормальным напряжением σ_z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{3}{h^2} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) - \frac{2h^2}{5G'} \left(\Delta \varphi - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \varphi + \frac{1+\nu}{h} \alpha \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) - \frac{2h^2}{5G'} \left(\Delta \psi - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \psi + \frac{1+\nu}{h} \alpha \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad G' = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G' – модули сдвига для плоскости изотропии и нормальных к ней плоскостей, ρ – плотность, ν, E , – коэффициент поперечного сжатия и модуль Юнга, α – температурный коэффициент линейного расширения в плоскости изотропии,

$$T = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z \cdot t(x, y, z, \tau) dz$$

интегральная характеристика температуры. Функции f_1, f_2 представлены в виде [1]

$$f_1 = f(z)\varphi(x, y, \tau), f_2 = f(z)\psi(x, y, \tau), f(z) = \frac{z}{2G'} \left(h^2 - \frac{z^2}{3} \right)$$

Если считать $G' = \infty$, то получим уравнение температурной задачи пластинки на основе классических гипотез.

2. Задача теплопроводности в тонкостенных элементах конструкции упрощается после приведения пространственной задачи к двумерной. Принимается нестационарное уравнение теплопроводности для анизотропной (трансверсально-изотропной) пластинки с учетом термоупругого рассеяния механической энергии. Этим и обусловлена связанность полей деформации и температуры.

Если на граничных поверхностях пластинки $z = \pm h$ заданы распределения температуры

$$t(x, y, z, \tau) = t^\pm(x, y, z, \tau),$$

то получим соответствующее уравнение теплопроводности для пластинки [2,3]

$$\frac{\lambda}{\lambda'} h^2 \Delta T - \frac{h^2 (1 + \varepsilon_0 \tilde{\lambda})}{a_z} \frac{\partial T}{\partial \tau} - 15T = - \frac{h^3}{\alpha a_z} \cdot \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta w - \frac{6}{5} \frac{\rho}{G'} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) - \frac{15}{2} (t^+ - t^-). \quad (3)$$

Здесь

$$\varepsilon_0 = \frac{Et_0 \alpha^2}{C_\varepsilon (1 - 2\nu)} \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{2\nu' + \left(1 - \nu \frac{E' \alpha'}{E \alpha} \right)^2}{(1 - \nu) \frac{E'}{E} - 2\nu'^2},$$

λ, λ' – коэффициенты теплопроводности вдоль координатных осей, $a_z = \frac{\lambda'}{c_\varepsilon}$,

c_ε – теплоемкость, t_0 – абсолютная температура в естественном состоянии.

Безразмерные коэффициенты $\varepsilon_0, \tilde{\lambda}$ характеризуют термоупругое рассеяние и анизотропию материала, соответственно. В случае изотропной пластинки $\tilde{\lambda} = 1$, а если принять $\varepsilon_0 = 0$, то уравнение сводится к обычному нестационарному уравнению теплопроводности без учета термоупругого рассеяния.

Уравнению (3) соответствует кубический закон изменения температуры по толщине. В случае уточненной теории пластин [1], когда принимается квадратный закон распределения поперечных сдвиговых деформаций по толщине пластинки, перемещения и расчетные напряжения (1) в пластинке изменяются по толщине стенки по кубическому закону [1].

Принятие кубического закона изменения температуры по толщине пластинки находится в соответствии с гипотезой уточненной теории.

Уравнения (2) вместе с уравнением теплопроводности (3) составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений поперечных термоупругих колебаний трансверсально-изотропной пластинки с учетом поперечных сдвиговых деформаций и термоупругого рассеяния механической энергии. Учет рассеяния энергии приводит к связанной задаче термоупругости.

Критерии тонкостенности трансверсально-изотропной пластинки в случае взаимосвязанной термоупругой задачи при принятии кубического закона изменения температуры и расчетных напряжений [2, 3] по толщине пластинки имеют вид

$$\left(\frac{G h^2}{G' b^2}\right)^2 \ll 1; \quad \left(\frac{\lambda h^2}{\lambda' b^2}\right)^2 \ll 1; \quad \left(\frac{h^2(1+\varepsilon_0\lambda)}{a_z \tau_*}\right)^2 \ll 1$$

$\frac{h^2}{a_z}$ – является характерным временем прогрева пластинки, τ_* – время заметного возрастания температуры, b – ширина пластинки.

3. Пусть на торцах $x = [0; a]$, $y = [0; b]$ шарнирно опертой пластинки поддерживается постоянная температура и $t^+ = t^-$. Тогда искомые функции можно представить в виде:

$$W(x, y, \tau) = W_{mn} \exp(\Omega_m \tau) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad T(x, y, \tau) = T_{mn} \exp(\Omega_m \tau) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b},$$

$$\varphi(x, y, \tau) = \varphi_{mn} \exp(\Omega_m \tau) \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad \psi(x, y, \tau) = W_{mn} \exp(\Omega_m \tau) \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}.$$

Для определения Ω_{mn} из уравнений (2), (3) получим следующее характеристическое уравнение:

$$\Omega_0^3 + A_{mn} \Omega_0^2 + H_{mn}^* K_{mn} \Omega_0 + A_{mn} H_{mn}^* = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \Omega_0 = \frac{\Omega_{mn}}{\omega_{0mn}}; \quad \omega_{0mn} = \frac{h\pi^2}{b^2} \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2 \right) \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}$$

$$A_{mn} = 2 \frac{g_0}{\pi} \frac{\pi^2 \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2 \right) \frac{h^2 \lambda}{b^2 \lambda'} + 15}{1 + \varepsilon_0 (\lambda + (1-2\nu)(1-H_*))}; \quad c = \frac{a}{b}$$

$$h^* = \frac{2 h^2 \pi^2}{5 b^2} \frac{E}{G'(1-\nu^2)} \text{ характеризует учет поперечных сдвиговых деформаций,}$$

$$H_{mn}^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{m^2}{c^2} + n^2 \right) h^*}; \quad K_{mn}^* = \frac{1 + \varepsilon_0 (\lambda + 1 - 2\nu)}{1 + \varepsilon_0 (\lambda + (1-2\nu)(1-H_{mn}^*))};$$

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{\tau_0 \omega_0}, \quad \tau_0 = \frac{4h^2}{a_z} \text{ – характерное время нагрева пластинки.}$$

При $h^* = 0$ формулы соответствуют классическим гипотезам теории пластин.

Исследование характеристического уравнения (4) показывает, что при больших и малых значениях параметра ν_0 относительный коэффициент затухания невелик, который характеризует отношение периода упругого колебания к времени нагрева пластинки. Если $\nu_0 \rightarrow \infty$, термоупругий процесс протекает почти в изотермических условиях, для которых выражение частоты колебания [1]

$$\text{Im}\Omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{H_{mn}^*}.$$

$$\text{В случае } \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{Im}\Omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{H_{mn}^* K_{mn}}.$$

Учет поперечных сдвиговых деформаций оказывает сильное влияние на величину частоты как изотермических, так и термоупругих колебаний. Учет термоупругого рассеяния энергии ($\varepsilon_0 \neq 0$) приводит к затуханию колебаний. Коэффициент затухания стремится к нулю как с возрастанием, так и с уменьшением ν_0 , но при определенных значениях параметра ν_0 достигает своего максимального значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Москва. Наука; 1987 г. 360 с.
2. Джилавян С. А. К вопросу о термоупругих колебаниях трансформных пластин, механика, Межвуз. сб. Ереван, ЕГУ, 1986 г., вып. 5, с. 230 – 241.
3. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев. Наук. дум. 1978 г. 344с.

Сведения об авторах:

Василян Татевик Гургеновна - диссертант кафедры механики ЕГУ, tat.vasilyan@gmail.com

Джилавян Самвел Акопович - к.ф.м.н, доцент, кафедра механики ЕГУ, samjilavyan@ysu.am

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОРФОЛОГИЮ ПОВЕРХНОСТИ ОБРАЗЦОВ ИЗ PLA ПРИ 3D-ПЕЧАТИ

Виндокуров И.В., Пирогова Ю.В., Ташкинов М.А., Зильбершмидт В.В.

Изучение особенностей деформирования изделий, созданных с помощью аддитивных технологий (AM), при разных видах нагружения имеет практическую значимость для оптимизации процессов печати и повышения качества и надежности изготавливаемых изделий. Это позволяет предсказывать и управлять поведением материалов при эксплуатации и проектировать более прочные и эффективные конструкции. В данной работе представлены результаты экспериментального исследования механических свойств кубических образцов разного размера из полимолочной кислоты (PLA), изготовленных аддитивно методом послойной печати при разных скоростях нагружения и в двух конфигурациях (с минимизацией трения и без). Для анализа уплотнения материала проведено исследование изменения плотности образцов. Определены значения модуля упругости и предела прочности из испытаний на сжатие. Сделан вывод, что характерный размер куба влияет на предел прочности и модуль упругости при сжатии. Кроме того, было изучено влияния таких параметров, как скорость деформации, размер образца и конфигурация нагружения на механический отклик материала при сжимающих нагрузках. Представлены сравнительные результаты механических свойств образцов при разной конфигурации нагружения.

1. В настоящее время 3д технология часто используется в тканевой инженерии, в том числе для восстановления или замены костной ткани искусственными структурами, скаффолдами [3–5, 7, 8]. Материал скаффолдов должен обладать биосовместимостью при полной замене костной ткани или биоразлагаемостью, если скаффолд выполняет вспомогательную функцию для ее регенерации. PLA является одним из наиболее популярных полимеров, используемых для их изготовления [1, 6], поскольку разлагается с образованием молочной кислоты, которая обычно присутствует в организме [2]. Как известно, наибольшее напряжение кость испытывает при осевом (продольном) нагружении, в следствии этого скаффолд должен выдерживать большие сжимающие нагрузки. Также для успешного внедрения заменителя в организм, должны быть выполнены многочисленные структурные и механические требования, зависящие в том числе от производства.

В конструкциях, применимых в биомедицинских приложениях, важна не только биосовместимость применяемого материала, но и точность воспроизведения деталей. Таким образом, нужно учесть масштабные эффекты, влияющие на свойства получаемой детали. Для этого может быть проведено исследование влияния характерного размера образца на механический отклик.

Одним из показателей изменения свойств материала является изменение плотности. Для образцов, напечатанных с помощью аддитивных технологий, этот параметр особенно показателен. Пустоты и дефекты, полученные при производстве, под действием сжимающих нагрузок схлопываются, тем самым увеличивая плотность образца. Текущее исследование сосредоточено на механическом поведении образцов, напечатанных на 3D-принтере из полилактида (PLA), подвергнутых исследованию сжимающей нагрузки со скоростями деформации в диапазоне $2 * 10^{-3} - 4 * 10^{-1} \text{ s}^{-1}$. Были проведены испытания на сжатие для определения модуля упругости и предела текучести кубических образцов с различными характерными размерами. Проведено микроскопическое исследование поверхности образцов для отслеживания микроскопических дефектов, накопленных в процессе производства (до испытаний) и после деформирования. Также было проанализировано изменение плотности образцов посредством их гидростатического взвешивания.

2. Испытания на сжатие были проведены для кубического образца с различным характерным размером $a = 2, 3, 4, 5$ и 7.5 мм. Примеры моделей, использованных в этом исследовании, показаны на Рисунок 1а, изображения образцов после печати из PLA на сжатие показаны на **Error! Reference source not found.**

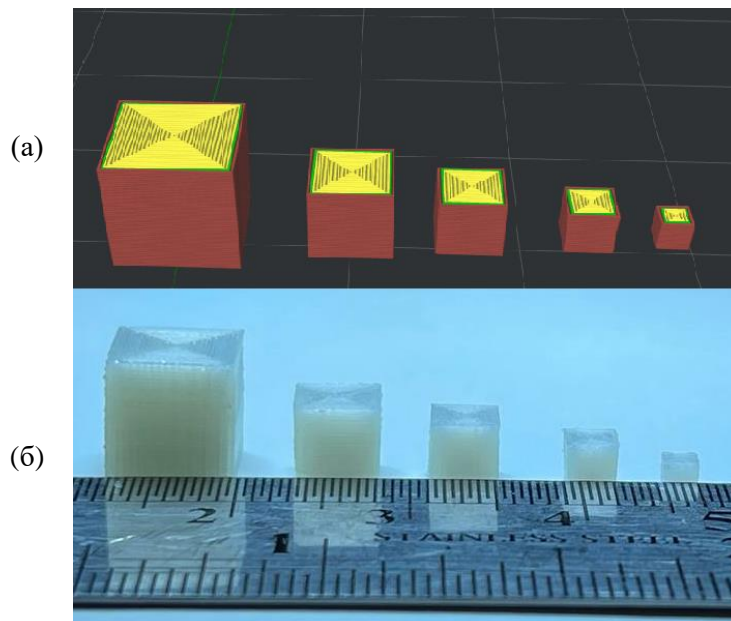


Рисунок 1 (а) 3-Д модели и (б) напечатанные кубические образцы в порядке уменьшения характерного размера

Испытания проводились на универсальной испытательной машине Instron 68SC-5 с датчиком нагрузки 5 кН при различных скоростях нагружения $V=1, 1.3, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 40$ и 50 мм/с. Температура окружающей среды была равна комнатной температуре ($\sim 22^\circ\text{C}$). Точность измерения нагрузки в диапазоне от 5 Н до 5 кН – 0.5% от измеренного значения, а разрешение перемещения сервопривода составляет 0.0095 мкм. Для измерения деформаций использовался видеоэкстензометр AVE2. Механические свойства образцов при сжатии были получены из графика зависимости напряжений от деформации, полученной с видеоэкстензометра. Для оценки повторяемости каждая конфигурация образца была протестирована по семь и больше раз. Скорость деформирования для каждого образца была рассчитана из предположения, что происходит идеальное одноосное деформирование $\dot{\epsilon}(t) = \frac{v(t)}{L_0}$, т.к. скорость нагружения для всех образцов была одинакова, а скорость деформирования различна и менялась в пределах $0.8 — 0.002 \text{ с}^{-1}$ в зависимости от характерного размера. Испытания проводились до деформации равной 50%. Также проводились исследования влияния трения по схеме:

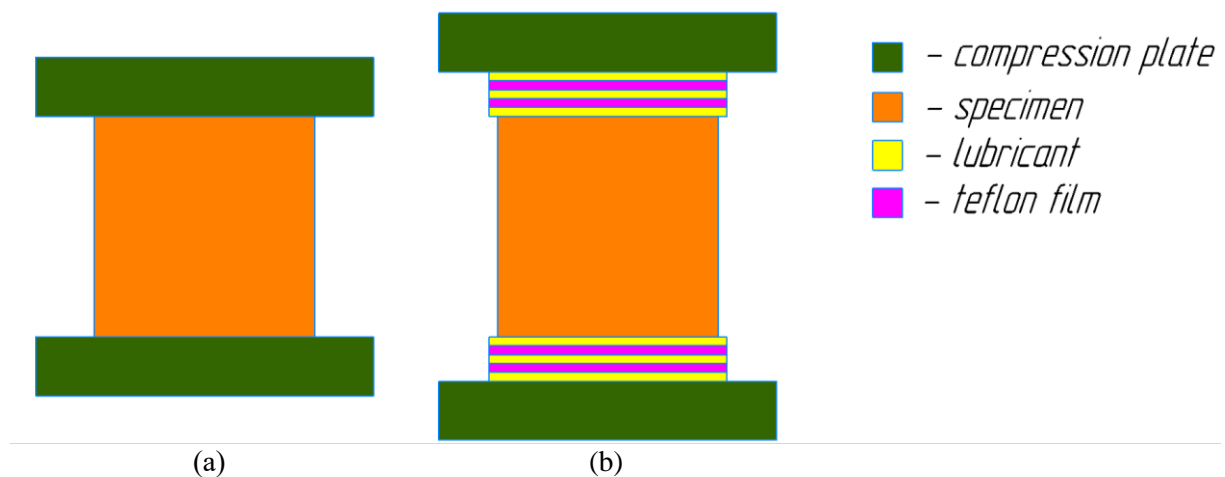


Рисунок 2 Схема конфигурации нагружения (а) конфигурация А, (б) конфигурация В

В конфигурации А образец находится между двумя плитами, которые оказывают на него давление вдоль одной оси. Такое положение позволяет оценить прочность образца при одноосном сжатии и определить его устойчивость к давлению. В конфигурации В образец также находится между двумя плитами, но между ними находятся слои циатима и тефлона. Эта конфигурация позволяет оценить влияние трения на поверхности образца и установить, как поверхностные эффекты могут влиять на его механические свойства.

В качестве смазочного материала используется высокотемпературная смазка ЦИАТИМ-221F с добавлением ультрадисперсного политетрафторэтилена (PTFE). Благодаря формирующейся на поверхности фторопластовой плёнке толщиной 50 мкм, значительно снижается трение. Чтобы избавиться от излишней смазки, перед началом испытания был прописан цикл предварительной нагрузки в 50 N и разгрузки до 0 N в пятикратном повторении. Такой цикл позволяет выровнять слой смазочного материала, выдавливая излишки.

3. Анализ образцов, напечатанных на 3D-принтере после испытания на сжатие, может дать информацию о механических свойствах материала и качестве печати. Одним из первых параметров, которые необходимо оценить при анализе образцов, является качество поверхности. Неровности, пузырьки воздуха, трещины и другие дефекты поверхности могут указывать на проблемы с качеством печати и приводить к снижению механических свойств. Испытания на сжатие могут вызвать деформацию материала и изменить его микроструктуру. Микроскопический анализ до и после испытаний может помочь определить, какие изменения произошли и как они могут повлиять на характеристики материала. Он также может помочь понять, какой тип разрушения произошел и какие дефекты могут быть связаны с ним. Оценка размера и расположения дефектов может помочь понять, какие дефекты присутствовали в начале испытания, и предположить их влияние на дальнейшее исследование механических свойств материала.

В целом, проведение испытаний на одноосное сжатие с разными скоростями нагружения может дать полное представление о механических свойствах образца и помочь определить оптимальные параметры печати для достижения требуемых механических свойств. При разных скоростях нагружения образец будет деформироваться и разрушаться по-разному, что указывает на его устойчивость к динамическим нагрузкам и способность сопротивляться ударным нагрузкам. Например, при нагружении образца с более высокой скоростью могут происходить более интенсивные деформации и повреждения материала, что может привести к раннему разрушению образца. Однако, если образец проявляет высокую устойчивость к динамическим нагрузкам, он может лучше справляться с высокоскоростными нагрузками. В данном исследовании рассматриваются 5 конфигураций образцов типа куб со стороной 2, 3, 4, 5 и 7.5 мм. С разным набором скоростей 1, 1.3, 3, 5, 10, 15, 20, 30, 40 и 50 мм/мин, что соответствует скорости деформирования $0.002 - 0.4 \text{ с}^{-1}$ в зависимости от размера образца.

На рисунке 3 приведена кривая зависимости модуля упругости от деформации. График можно разделить на две основные характерные стадии деформирования: стадия I - до ϵ_1 (начальная линейная область), модуль упругости с увеличением деформации резко уменьшается, что связано с разрушением внутренних связей в материале; стадия II - нелинейная область, материал после уплотнения начинает снова сопротивляться нагрузке.

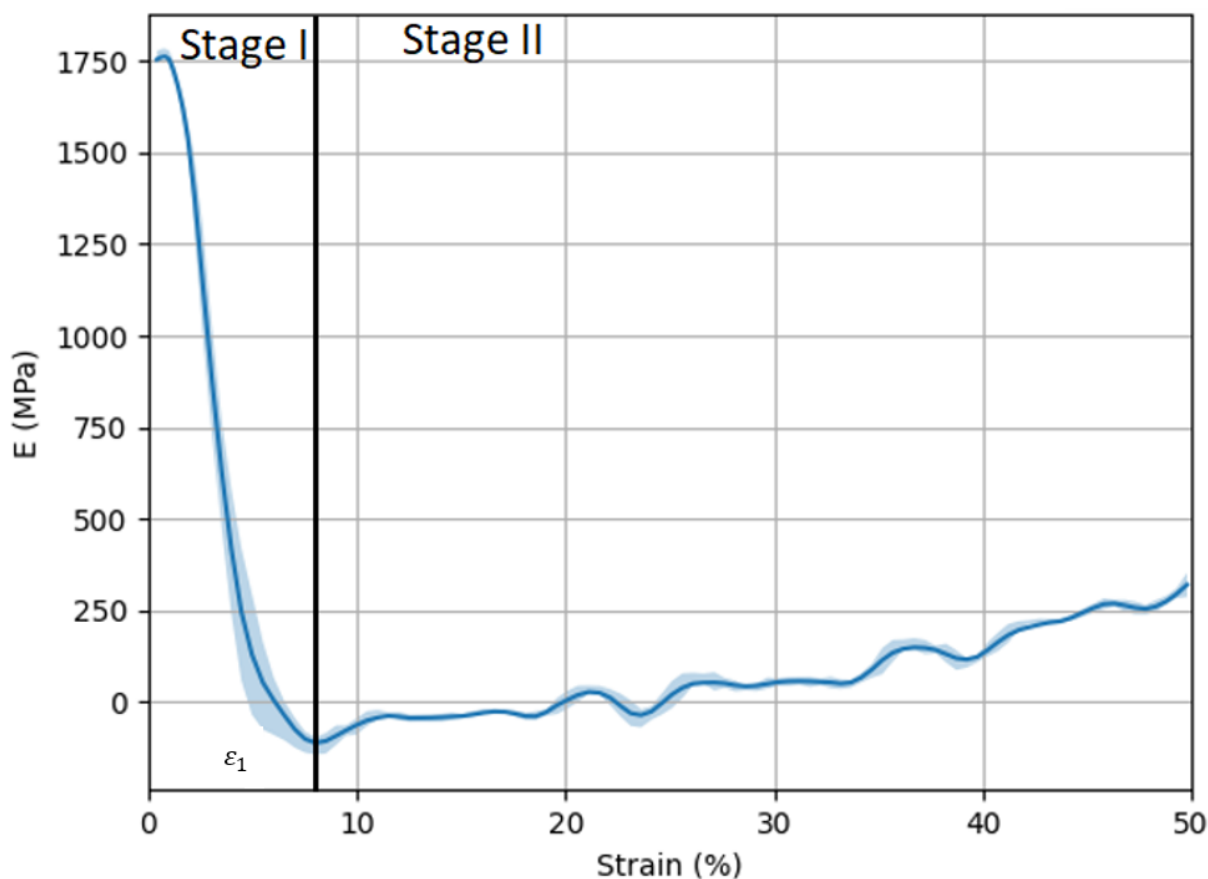


Рисунок 3 Зависимость модуля от деформации

4. В данной работе рассмотрено влияние таких параметров, как скорость деформации, размер образца и конфигурация нагружения на механический отклик материала при сжимающих нагрузках. Проведен микроскопический анализ поверхности для определения дефектов до и после испытаний. Для оценки отклика были рассмотрены предел прочности, упругий модуль и плотность.

Исследовано 2 конфигурации нагружения: плита — образец и плита — смазка — пленка — смазка — пленка — образец. Сделан вывод о том, что характер деформирования зависит от величины трения. Так, например, для конфигурации с силами трения для всех образцов характерно бочкообразование, а для конфигурации с минимизацией сил трения деформирование происходит трапецидально. Для конфигурации А характерны образование трещин с их последующим раскрытием, при этом плоскость распространения трещины совпадает с плоскостью нагружения образца. Во-втором случае, также появляются трещины, однако из-за сил трения, которые перераспределяются на поверхности образца, не успевают раскрыться.

Экспериментально подтверждено, что скорость деформации в диапазоне $0.002— 0.4 \text{ c}^{-1}$ влияет в большей степени на предел прочности, нежели на модуль упругости. Тенденция поведения изменений предела прочности относительно скорости деформации не выявлена. Стоит отметить, что при исследовании упругого модуля замечено, что при нагружении с трением он увеличивается в зависимости от размера куба: от большего к меньшему. Однако для испытания при минимизированном трении такой зависимости не выявлено. Здесь наибольший модуль по среднему значению также соответствует образцу со стороной 2 мм, однако затем значения расположены в соответствии с образцами, характерный размер которых 7.5 ,4, 3 и 5 мм.

Исследование плотности образцов до и после испытаний было проведено с использованием метода гидростатического взвешивания. Изменение плотности при нагружении свидетельствует о схлопывании дефектов внутри образца. Однако это изменение мало и составляет примерно 6% от первоначального значения.

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете в рамках гранта, выделяемого для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных организациях высшего образования, научных учреждениях и государственных научных центрах Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-578 от 31.05.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gregor A. [и др.]. Designing of PLA scaffolds for bone tissue replacement fabricated by ordinary commercial 3D printer // *Journal of Biological Engineering*. 2017. № 1 (11). С. 1–21.
2. Gunatillake T., Adhikari R. Biodegradable Synthetic Polymers For Tissue Engineering. // *European cells & materials*. 2003. (5). С. 1–16; discussion 16.
3. Jiang D., Ning F., Wang Y. Additive manufacturing of biodegradable iron-based particle reinforced polylactic acid composite scaffolds for tissue engineering // *Journal of Materials Processing Technology*. 2021. (289). С. 116952.
4. Mohd Pu'ad N. A. S. [и др.]. Review on the fabrication of fused deposition modelling (FDM) composite filament for biomedical applications // *Materials Today: Proceedings*. 2020. (29). С. 228–232.
5. O'Brien F. J. Biomaterials & scaffolds for tissue engineering // *Materials Today*. 2011. № 3 (14). С. 88–95.
6. Pugliese R. [и др.]. Polymeric biomaterials for 3D printing in medicine: An overview // *Annals of 3D Printed Medicine*. 2021. (2). С. 100011.
7. Wang W. [и др.]. 3D printing of PLA/n-HA composite scaffolds with customized mechanical properties and biological functions for bone tissue engineering // *Composites Part B: Engineering*. 2021. (224). С. 109192.
8. Zein I. [и др.]. Fused deposition modeling of novel scaffold architectures for tissue engineering applications // *Biomaterials*. 2002. № 4 (23). С. 1169–1185.

Сведения об авторах

Виндокуров И.В. – младший научный сотрудник НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail ivv@pstu.ru

Пирогова Ю.В. – лаборант-исследователь НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail yu.pirogova@pstu.ru

Ташкинов М.А. – ведущий научный сотрудник НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail m.tashkinov@pstu.ru

Зильбершмидт В.В. – научный руководитель НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет

E-mail V.Silberschmidt@lboro.ac.uk

ДИНАМИКА ПАРЫ СВОБОДНЫХ ЦИЛИНДРОВ В ПОЛОСТИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ И СОВЕРШАЮЩЕЙ МОДУЛИРОВАННОЕ ВРАЩЕНИЕ

Власова О.А.

Экспериментально исследуется динамика пары цилиндрических тел в цилиндрической полости с жидкостью, совершающей модулированное вращение вокруг горизонтальной оси. Периодическое изменение (модуляция) скорости вращения полости приводит к возникновению азимутальных колебаний тел за счет вязкого взаимодействия с границей полости. Показано, что на осциллирующее вблизи стенки полости тела действует осредненная сила отталкивания, направленная от стенки полости. В результате между телами и стенкой полости возникает зазор, который растет с амплитудой модуляций. Сила отталкивания измерена методом подвеса тел в центробежном поле в широком диапазоне безразмерных частот. Показано, что сила проявляется на расстоянии, сравнимом с толщиной динамических пограничных слоев.

Экспериментально изучается динамика вращающейся гидродинамической системы, содержащей свободные фазовые включения при наличии внешнего осциллирующего воздействия. В качестве включений используется пара круговых цилиндров одинаковых размеров, свободно движущихся в горизонтальной цилиндрической полости. Полость заполнена жидкостью, плотность которой меньше плотности цилиндров. Полость совершает модулированное вращение с заданной частотой и амплитудой по закону $\Omega = \Omega_{rot}(1 + \varepsilon \cos \Omega_{lib} t)$. Здесь Ω_{rot} – средняя скорость вращения полости, ε – амплитуда модуляции скорости вращения полости, Ω_{lib} – частота модуляции скорости вращения полости. В экспериментах варьируются параметры вращения и вязкость жидкости.

При равномерном вращении под действием центробежной силы цилиндры прижимаются к стенке, совершая твердотельное вращение с полостью и окружающей жидкостью. Цилиндры располагаются рядом друг с другом. При модуляции скорости вращения граница полости совершает азимутальные колебания с заданными амплитудой ε и частотой Ω_{lib} , которые накладываются на равномерное вращение. За пределами вязкого динамического слоя жидкость в цилиндрической полости совершает равномерное вращение со скоростью Ω_{rot} . За счет вязкого взаимодействия со стенкой неравномерно вращающейся полости цилиндры совершают комбинированные колебания: азимутальные колебания вдоль стенки и вращательные колебания вокруг своей оси. В работе изучается временная динамика основных характеристик движения цилиндров от параметров вращения: амплитуда азимутальных колебаний вдоль стенки полости, амплитуда вращательных колебаний вокруг своей оси, расстояние от стенки полости, скорость дрейфа.

В результате осциллирующего движения цилиндров вблизи стенки полости за счет асимметричного распределения давления по поверхности тел генерируется осредненная подъемная сила, направленная от стенки полости [1, 2]. При достижении порогового значения амплитуды колебаний (при фиксированной частоте модуляции) цилиндры отталкиваются от стенки и переходят в подвешенное состояние на некотором расстоянии от границы полости (рис. 1).



Рис. 1. Фотография пары цилиндров в подвешенном состоянии

С увеличением амплитуды модуляции расстояние между телами и стенкой растёт. Действующая на цилиндры сила отталкивания измерена методом подвеса тел в центробежном поле. Полученные экспериментальные результаты обобщены на плоскости управляющих параметров задачи.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-71-00081.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozlov N. V., Vlasova O. A. Behavior of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation. *Fluid Dynamics Research*. vol 48(5), P. 055503, 2016
2. Vlasova O., Karpunin I., Solomennikov M. Lift Force Acting on a Heavy Cylinder and a Steady Flow in an Unevenly Rotating Container. *Microgravity Science and Technology*. vol. 32, P. 889-896, 2020

Сведения об авторе

Власова Ольга Андреевна – доцент кафедры физики и технологии, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Лаборатория вибрационной гидромеханики
E-mail vlasova_oa@pspu.ru

ЗАДАЧА ОБ ОТСЛОЕНИИ ПОКРЫТИЯ ОТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ЕЕ КРИВИЗНЫ, ПОДАТЛИВОСТИ, А ТАКЖЕ ДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

Гандилян Д.В., Устинов К.Б.

Исследован процесс образования отслоения покрытия от цилиндрической подложки под действием сжимающих напряжений. Рассмотрены отслоения, расположенные в осевом и в окружном направлении. Задача исследовалась в приближении теории цилиндрических оболочек с граничными условиями типа обобщенной упругой заделки. Получены выражения для скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль прямолинейной и криволинейной границ, угла поворота в точке заделки, также получены профили отслоившегося участка покрытия.

Введение. В настоящее время в области микро- и нанoeлектроники широко применяются технологии нанесения упрочняющих и износостойких покрытий на поверхности элементов конструкций. В процессе эксплуатации деталей, для тел слоистой структуры характерно образование дефектов в виде отслоения покрытий [1]. Механические напряжения, возникающие в покрытиях во время эксплуатации деталей, оказывают существенное влияние на их долговечность и надежность. На процесс отслоения покрытий от основания влияют такие факторы, как кривизна и податливость основания. Среди работ, посвященных исследованию влияния указанных факторов на параметры возможного отслоения покрытия, в работах [2, 3] исследовалось только влияние кривизны, а в [4, 5] — податливости основания. Одновременное влияние кривизны и податливости основания исследовалось в работах [6, 7]. В частности, в [6] рассматривалась модель, не учитывающая влияние поперечных сил на компоненты смещения и угол поворота в точке заделки, в [7] — модель слабо-искривленной пластины. В данной работе рассмотрено отслоение покрытия в осевом и в окружном направлении в рамках более общей теории нелинейных цилиндрических оболочек.

1. Геометрия. Рассмотрим процесс отслоения покрытия, соединенного с подложкой, представляющего собой в исходном состоянии цилиндрическую оболочку радиуса R и толщиной h . Используем криволинейную систему координат (рис. 1), где α — осевая, β — окружная и γ — нормальная координаты, а компоненты смещения в срединной поверхности покрытия обозначим: $v(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

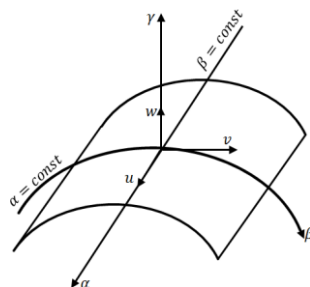


Рис. 1.

2. Задача об отслоении в осевом направлении. До отслоения на покрытие, вдоль координатных линий β и γ действовали сжимающие усилия (рис. 2а)

$$F_1 = \sigma h, \quad N_1 = 0; \quad \sigma > 0 \tag{2.1}$$

На подложку действовало напряжение: $p_0 = \sigma h/R$.

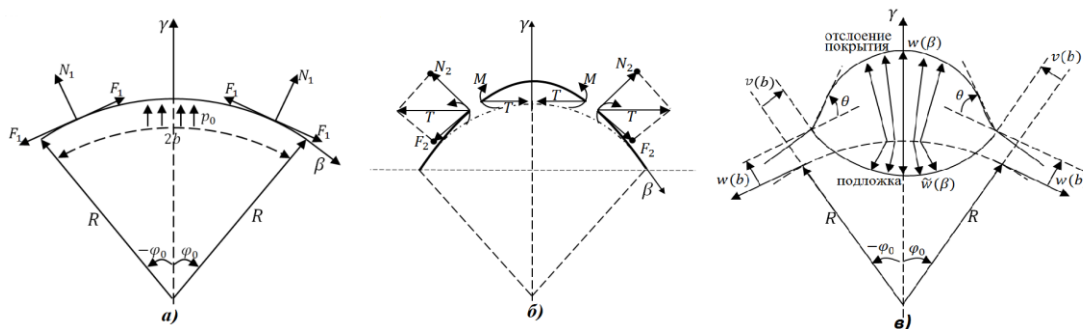


Рис. 2.

После отслоения на покрытие действует горизонтально сжимающая сила равная T ($T > 0$) (рис. 2б), проекции которой на координаты β и γ соответственно будут

$$F_2 = T \cos \varphi_0, \quad N_2 = T \sin \varphi_0; \quad T > 0, \quad \varphi_0 = b/R, \quad (2.2)$$

где b — полуширина отслоившего участка покрытия. Также в точке заделки действует изгибающий момент M . Разница между силовыми параметрами после и до отслоения имеет вид

$$F = F_2 - F_1 = T \cos \varphi_0 - \sigma h, \quad N = N_2 - N_1 = T \sin \varphi_0 - 0 = T \sin \varphi_0, \quad \Delta p = -p_0, \quad (2.3)$$

Для сечений, расположенных вдали от краев отслоения, напряженное состояние может быть описано в приближении плоской деформации, при этом одна из компонент смещений будет:

$\mathbf{u}(\alpha, \beta) \equiv \mathbf{0}$, а остальные зависят только от одной переменной: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\beta)$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\beta)$. Также используем следующие параметры (отмечены на рис. 2в): $\theta = -w'(\beta)|_{\beta=b}$ — угол поворота отслоения в точке заделки, $\tilde{\mathbf{w}}(\beta)$ — смещение поверхности подложки.

Дифференциальные уравнения изгибаемой по образующей цилиндрической поверхности имеют вид [2, 8, 9]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{F_2}{R} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = 0; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (2.4)$$

где D — изгибная жесткость покрытия, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия. Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial \beta}(\beta=0) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}(\beta=0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}(\beta=b) = \frac{M}{D}, \quad w(\beta=b) = w_b \quad (2.5)$$

Здесь неизвестными являются изгибающий момент M , смещение в точке заделки w_b , усилия F_2 и N_2 .

Для учета влияния подложки воспользуемся граничными условиями типа обобщенной упругой заделки

$$\bar{E} \begin{pmatrix} v(b) \\ h\theta \\ w(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \\ N \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad (2.6)$$

где \mathbf{a}_{ij} ($\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ji}$) — расширенная матрица коэффициентов упругой заделки [6, 12].

Решая дифференциальное уравнение (2.4) с учетом граничных условий (2.5), получим

$$w(\beta) = w_b + \frac{(\beta^2 - b^2)}{2R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R} \right) \left(\frac{D}{T \cos \varphi_0} \right) \left(1 - \frac{\cos(\lambda\beta/b)}{\cos \lambda} \right), \quad \lambda = b \sqrt{\frac{T \cos \varphi_0}{D}}. \quad (2.7)$$

Для определения компоненты смещения $v(\beta)$ воспользуемся соотношениями для компонент дополнительных деформаций [8]

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) + \tilde{b}_{ij} w + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial i} \frac{\partial w}{\partial j}, \quad i, j = \alpha, \beta, \quad \tilde{b}_{\alpha\alpha} = \tilde{b}_{\alpha\beta} = \tilde{b}_{\beta\alpha} = 0, \quad \tilde{b}_{\beta\beta} = \frac{1}{R}. \quad (2.8)$$

Подстановка (2.3) в выражение для дополнительных деформаций (2.8) дает

$$\Delta \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{\Delta \sigma_{\beta\beta}}{\bar{E}} = \frac{-F}{\bar{E}h} = \frac{-T \cos \varphi_0 + \sigma h}{\bar{E}h} = \frac{dv}{d\beta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 \Rightarrow \frac{dv}{d\beta} = \frac{-F}{\bar{E}h} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2. \quad (2.9)$$

Интегрирование последнего выражения от 0 до b дает разность тангенциального смещения в точках b и 0. Поскольку в силу симметрии $\mathbf{v}(\beta = 0) = \mathbf{0}$, то:

$$v(b) = -Fb/\bar{E}h - \int_0^b \left(w/R + 1/2 \left(dw/d\beta \right)^2 \right) d\beta. \quad (2.10)$$

Введем безразмерные величины:

$$f = F/\sigma h, \quad n = N/\sigma h, \quad m = M/\sigma h^2, \quad \varepsilon = \sigma/\bar{E}, \quad (2.11)$$

откуда с учетом (2.3) получаем

$$T \cos \varphi_0 = (f+1)\sigma h, \quad n = (f+1) \tan \varphi_0 \Rightarrow \lambda = \eta \pi \sqrt{(f+1)}, \quad \eta = b/b_0, \quad b_0 = h\pi/\sqrt{12\varepsilon}, \quad (2.12)$$

где η — отношение полуширины отслоения, к критической полуширине, соответствующей потери устойчивости отслоения от прямолинейной границы при граничных условиях типа жесткой заделки.

Подставив выражения (2.7), (2.10) в граничные условия (2.6), затем представив их в безразмерных величинах, получим систему из трех уравнений для определения трех неизвестных переменных m, f, w_b .

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы (обозначим G_{ss}) посчитана как высвобождающаяся упругая энергия единицы длины отслоившегося участка, деленная на его ширину равную $2b$. Эта энергия состоит из энергии, высвободившейся из изгибаемого участка покрытия ΔU_1 , неотслоившегося участка покрытия ΔU_2 и энергии, высвободившейся из основания ΔU_3 [10, 11]:

$$\Delta U_1 = \frac{(\sigma h)^2}{\bar{E}h} b - \frac{(T \cos \varphi_0)^2 b}{\bar{E}h} - D \int_0^b \left(\frac{d^2 w}{d\beta^2} \right)^2 d\beta. \quad (2.16)$$

$$\Delta U_2 = (\sigma h + T \cos \varphi_0)(-v(\beta = b)) - M(-w'(\beta = b)) - T \sin \varphi_0 w(\beta = b). \quad (2.17)$$

$$\Delta U_3 = \frac{(\bar{E} + \bar{E}_s)(\sigma h)^2}{\bar{E}\bar{E}_s} b^2 \pi. \quad (2.18)$$

Скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль криволинейной и прямолинейной границы (обозначим G), отнесенные к упругой энергии покрытия до отслоения имеют вид [2]

$$\frac{G_{ss}}{G_0} = \frac{\Delta U}{2bG_0} = \frac{(\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3)}{2bG_0}, \quad G_0 = \frac{(1-v^2)\sigma^2 h}{2E} = \frac{\sigma^2 h}{2\bar{E}}. \quad (2.19)$$

$$\frac{G}{G_0} = \frac{d}{db} \left(\frac{\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3}{2G_0} \right) = \frac{d}{db} \left(b \frac{G_{ss}}{G_0} \right) = \eta \frac{d}{d\eta} \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right) + \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right). \quad (2.20)$$

3. Задача об отслоении в окружном направлении. До отслоения на покрытие, вдоль координатных линий α, β, γ (рис. 3а), действовали сжимающие усилия

$$F_1 = \sigma h, \quad P_1 = \sigma h, \quad N_1 = 0, \quad \sigma > 0. \quad (3.1)$$

На подложку также действовало напряжение: $p_0 = \sigma h/R$.

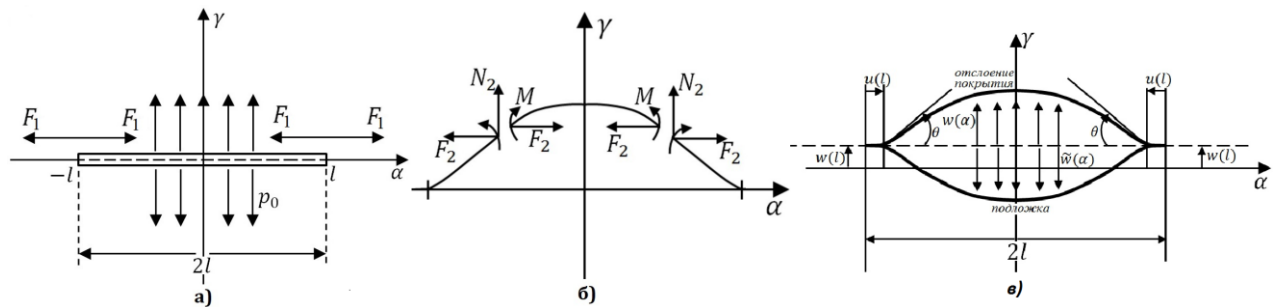


Рис. 3.

После отслоения на покрытие, вдоль координатных линий α, β, γ (рис. 3б), действуют усилия F_2, P_2, N_2 и изгибающий момент M в точке заделки.

Аналогично, в данной постановке одна из компонент смещения будет $v(\alpha, \beta) = 0$, а остальные компоненты и другие параметры зависят только от одной переменной: $u = u(\alpha)$, $w = w(\alpha)$, $\theta = -w'(\alpha)|_{\alpha=l}$, $\tilde{w} = \tilde{w}(\alpha)$.

Дифференциальные уравнения изгибаемой по образующей цилиндрической поверхности имеют вид [2, 8, 9]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\nu}{R} F_2 + (\nu - 1) \frac{\sigma h}{R} + Eh \left(\frac{w}{R^2} \right) = 0, \quad \frac{dF_2}{d\alpha} = 0. \quad (3.2)$$

Граничные условия записываются аналогично выражению (2.6). Из условий баланса сил, а также закона Гука, следует, что компоненты F_2, P_2, N_2 имеют вид [6, 7], (для удобства обозначим $F_2 = T, T > 0$)

$$F_2 = T, \quad P_2 = \nu F_2 - (\nu - 1) \sigma h - (1 - \nu^2) \bar{E} h \left(\frac{w}{R} \right), \quad (3.3)$$

$$N_2 = \frac{1}{R} \int_0^l P_2 d\alpha = \frac{1}{R} \left(\nu F_2 l - (\nu - 1) \sigma h - (1 - \nu^2) \bar{E} h \int_0^l \left(\frac{w}{R} \right) d\alpha \right).$$

Эффективные продольные F и поперечные (перерезывающие) N усилия определяются следующим образом

$$F = F_2 - F_1 = T - \sigma h, \quad N = N_2 - N_1 = \frac{1}{R} \left(\nu F_2 l + (1 - \nu) \sigma h l - (1 - \nu^2) \bar{E} h \int_0^l \left(\frac{w}{R} \right) d\alpha \right). \quad (3.4)$$

Дальнейшее решение данной задачи аналогично предыдущей, решая дифференциальное уравнение (3.2), получим компоненту смещения $w(\alpha)$, используя выражение для компонент дополнительных деформаций (2.10), определим компоненту смещения $u(\alpha)$, также подстановкой полученных выражений для $u(\alpha), w(\alpha), w'(\alpha)$ в граничные условия типа обобщенной упругой заделки получим систему из трех уравнений, определяющую значения трех неизвестных переменных m, f, w_l .

Также скорости высвобождения энергии при отслоении в направлении криволинейной и прямолинейной границы G_{ss}, G определяются выражениями (2.19), (2.20), при этом вместо параметра b пишем l , ΔU_3 определяется выражением (2.18), $\Delta U_1, \Delta U_2$ имеют вид

$$\Delta U_1 = \frac{(\sigma h)^2}{\bar{E} h} l - \frac{T^2 l}{\bar{E} h} + \int_0^l \left(2\sigma h (1 - \nu) \frac{w}{R} - \left(\frac{w}{R} \right)^2 (1 - \nu^2) \bar{E} h \right) d\alpha - D \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right)^2 d\alpha, \quad (3.5)$$

$$\Delta U_2 = (T + \sigma h) (-u(\alpha = l)) - M(-w'(\alpha = l)) - Nw(\alpha = l). \quad (3.6)$$

4. Результаты численных расчетов. Зависимости скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы ($G_{ss}/G_0, G/G_0$) для различных значений податливости подложки, а также для различных величин кривизны подложки представлены на рис. 4. На рис. 5 представлены профили отслоения покрытия при разных значениях $\beta/\beta_0 (l/l_0)$. Все расчеты были выполнены для значения коэффициента Пуассона равном $\nu = 1/3$.

Пуассона равном $\nu = 1/3$.

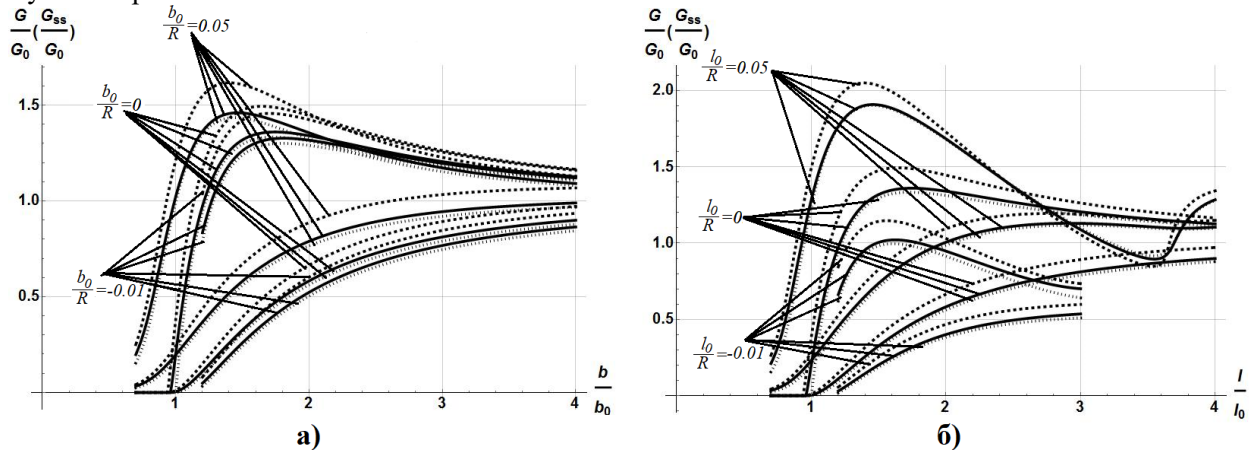


Рис. 4. Зависимости скорости высвобождения энергии ($G_{ss}/G_0, G/G_0$) от $\beta/\beta_0 (l/l_0)$ при $\sigma/\bar{E} = 0.01$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии; жесткая заделка - точечные линии: (а) — отслоение, расположенное в осевом направлении, (б) — отслоение, расположенное в окружном направлении.

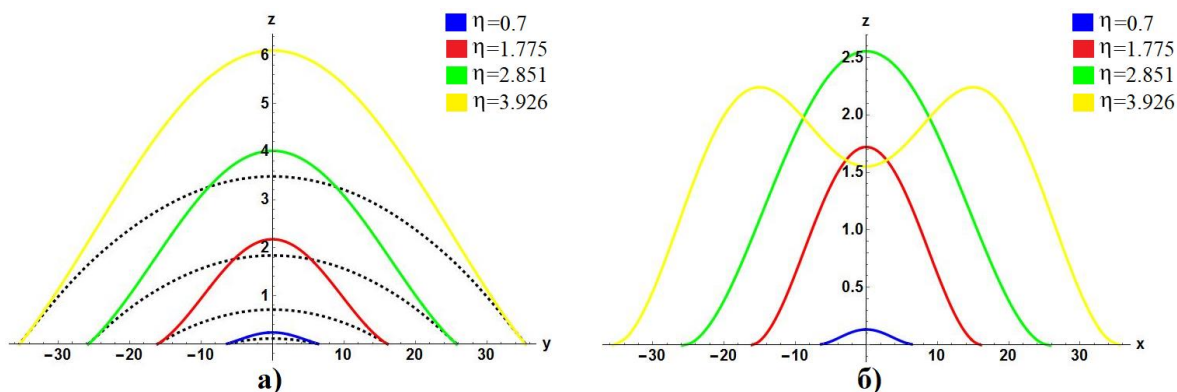


Рис. 5. Профили отслоения покрытия в зависимости от разных значений $\eta = \beta/\beta_0$ ($\eta = l/l_0$) при b_0/R (l_0/R) = 0.05, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: (а) — отслоение, расположенное в осевом направлении, (б) — отслоение, расположенное в окружном направлении.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ государственной регистрации 123021700045-7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. California: Advances in Applied Mechanics edited by J. W. Hutchinson and T. Y. Wu. – 1992. – 191 p.
2. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – V. 49. – pp. 1847–1864.
3. Faulhaber S., Mercer C., Moon M.-Y. et. al. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks // J. Mech. Phys. Solids. – 2006. – V. 54. – pp. 1004–1028.
4. Yu H.-H., Hutchinson J. W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // Int. J. Fract. – 2002. – V. 113. – pp. 39–55.
5. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Engineering Failure Analysis. – 2015. – pp. 1–7. doi: 10.1016/j.engfailanal.2013.09.022
6. Устинов К.Б., Каспарова Е.А. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия // Деформация и разрушение материалов. – 2015. – № 3. – С. 28-35.
7. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. On Combined Influence of Substrate Curvature and Compliance on Parameters of Coating Delamination from a Cylindrical Base // Mechanics of Solids. – 2023. – V. 58(2). – pp. 240-258.
8. Sanders J.L. Nonlinear theories for thin shells // Quart. Appl. Math. – 1963. – V. XXI. № 1. – pp. 21–36.
9. Власов В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек. Том I. М.: Издательство АН СССР. – 1962. – 528 с.
10. Malyshev V.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack // Int. J. Fracture Mechanics. – 1965. – V. 1. № 2. – pp. 114–128.
11. Дыскин А.В., Салганик Р.А. Модель дилатансии хрупких материалов с трещинами при сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 6. – С. 169–178.
12. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mechanics of Solids. – 2015. – V. 50. № 1. – pp. 62-80.

Сведения об авторах:

Гандилян Давид Ваганович – аспирант, младший научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), тел.: +7-963-686-76-25
E-mail: david.gandilyan@mail.ru

Устинов Константин Борисович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), тел.: +7-916-110-14-58 E-mail ustinoff127@mail.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН-ПОЛОС ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭФФЕКТОВ

Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.

Рассмотрена задача устойчивости по Эйлеру ортотропных пластин-полос переменной толщины в условиях плоской деформации при учёте поперечного сдвига и инерции вращения. Полученные уравнения позволяют определить как частоты собственных колебаний, так и критические значения осевой силы, при которой пластина-полоса теряет устойчивость. Задачи решены модифицированным методом коллокаций при различных граничных условиях на концах и значениях геометрических и физических параметров, характеризующих пластину-полосу переменной толщины.

1. Рассмотрим ортотропную пластину-полосу, бесконечную вдоль оси Oy и длины a по оси Ox , имеющую переменную толщину $h(x)$. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины. Примем, что главные направления анизотропии материала пластины-полосы совпадают с координатными осями. Уравнения изгибных колебаний пластины-полосы при учёте влияния поперечного сдвига и наличия осевой силы P можно представить в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= -P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - N_x &= -\frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - a_{55} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$N_x = \frac{2}{3} h \varphi_1 - \frac{h^2 B_{11}}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad M_x = -\frac{h^3 B_{11}}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \quad (2)$$

Здесь a_{ij} и B_{ij} – упругие параметры материала, φ_1 – функция, характеризующая распределение касательных напряжений τ_{xz} , w – прогиб срединной плоскости пластины-полосы, t – время, ρ – плотность материала. Подставляя (2) в (1), переходя к задачам устойчивости или колебаний и используя обезразмеривающие обозначения

$$A_1 = a_{13} B_{11} + a_{23} B_{12}, \quad \Delta_2 = a_{13} (a_{55} B_{11} + A_1) + a_{23} (a_{55} B_{12} + A_2) \quad (3)$$

$$x = a\bar{x}, \quad z = h_0 \bar{z}, \quad s = h_0 / a, \quad \chi = a_{55} B_{11}, \quad \bar{\Delta}_2 = B_{11} \Delta_2, \quad \omega^2 = B_{11} \Omega^2 / \rho a^2,$$

$$h = h_0 H, \quad s = h_0 / a, \quad N_x = \bar{N}_x B_{11} h_0 e^{i\omega t}, \quad M_x = \bar{M}_x B_{11} h_0^2 e^{i\omega t}, \quad \varphi_1 = \varphi B_{11} e^{i\omega t}$$

$$P = -TB_{11} h_0, \quad w = h_0 f e^{i\omega t}, \quad u_z = h_0 u e^{i\omega t}$$

где ω – круговая частота колебаний пластины, k_1, k_2, k_3 – коэффициенты, определяющие постановку задачи и принимающие значения 0 или 1. При $k_1 = 1$ учитывается инерция вращения, обусловленная классическим изгибом, при $k_2 = 1$ учитывается инерция вращения от поперечных сдвигов, а при $k_3 = 1$ учитываются обжатие и напряжение σ_z . При коэффициенте, равном нулю, соответствующий фактор не учитывается. При $\chi = 0$ получается классическая постановка задачи, $\chi = \frac{2-3\nu}{1-2\nu}$ соответствует изотропному материалу, а для ортотропного материала χ может принимать значения до 40. Остальные обозначения общеприняты [1]. В итоге приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\left[H^2 s^3 \frac{d^2 H}{dx^2} - 12Ts \right] \frac{d^2 f}{dx^2} - H \left[8 + s^2 ((\chi + k_3 A_1) \frac{d^2 H}{dx^2}) \right] \frac{d\varphi}{d\bar{x}} - 16 \frac{dH}{d\bar{x}} \varphi - sH\Omega^2 \times \\ &\times \left[12f + sH \frac{dH}{d\bar{x}} \left(k_1 s \frac{df}{d\bar{x}} - k_2 \chi \varphi \right) - \frac{k_3 s H^2}{2} \left(A_1 s \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - \bar{\Delta}_2 \frac{d\varphi}{d\bar{x}} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$s^3 H^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} + 2s^3 H \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d^2 f}{d\bar{x}^2} - H^2 s^2 \left[(\chi + k_3 A_1) \frac{d^2 \varphi}{d\bar{x}^2} \right] -$$

$$- 2Hs^2 \left[(\chi + k_3 A_1) \frac{dH}{d\bar{x}} \right] \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + 8\varphi + \Omega^2 H^2 s^2 \left(k_1 s \frac{df}{d\bar{x}} - k_2 \chi \varphi \right) = 0 \quad (4)$$

Уравнения (4) позволяют решить как задачу устойчивости, так и задачу собственных колебаний. При $T < T_{кр}$ система совершает колебания с частотой Ω . При $T \rightarrow T_{кр}$ $\Omega \rightarrow 0$. Если положить $\Omega = 0$, то можно определить критическое значение силы T , при котором пластина-полоса теряет устойчивость.

Обычно используют граничные условия заделки, шарнирного опирания или свободного конца. Более близкими к реальным условиям являются условия упругой заделки [3], которые представим в виде:

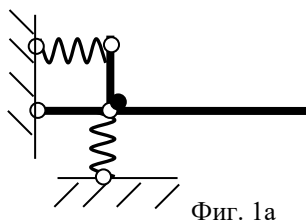
1) Угол поворота средней линии или торца пластины пропорционален изгибающему моменту, что в безразмерном виде можно представить:

$$l_1 \frac{df}{dx} \pm (1-l_1) M_x = 0 \quad \text{или} \quad l_1 \frac{du}{dz} \pm (1-l_1) M_x = 0, \quad \text{которые при } \chi = 0 \text{ совпадают.} \quad (5)$$

При $x=0$ берётся знак $+$, а при $x=1$ знак $-$.

2) Перерезывающая сила пропорциональна перемещению w (фиг.1).

$$l_2 f + (1-l_2) \bar{N} = 0 \quad (6)$$



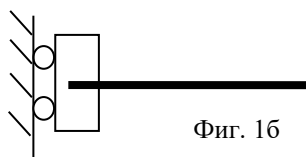
Из этих условий для различных l_1, l_2 можно получить следующие граничные условия:

а) $l_1 = 0, l_2 = 0$ ($M = 0, N = 0$) – свободный конец

б) $l_1 = 0, l_2 = 1$ ($M = 0, f = 0$) – шарнирное опирание

в) $l_1 = 1, l_2 = 0$ ($df/dx = 0, N = 0$) – условия симметрии или можно назвать скользящей заделкой (фиг.1б).

г) $l_1 = 1, l_2 = 1$ ($df/dx = 0, f = 0$) – жёсткая заделка.



Безразмерные перемещение, поперечное усилие и момент имеют вид:

$$u_x = u_0 - z \left(s \frac{df}{dx} - \chi \varphi \right), \quad N = s^3 H \frac{dH}{dx} - \chi s^2 H \frac{dH}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - 8\varphi, \quad M_x = s \frac{d^2 w}{dx^2} - \chi \frac{d\varphi}{dx} \quad (7)$$

В [5] использован несколько другой подход к определению условий упругой заделки.

Для решения методом коллокаций функции \bar{w} и φ берём в виде

$$f = \sum_{i=0}^n a_i \bar{x}^i, \quad \varphi = \sum_{i=0}^n b_i \bar{x}^i \quad (8)$$

В качестве точек коллокаций берём нули смещённых полиномов Чебышева $T_n(2\bar{x}-1)$,

$\bar{x}_k = \left[1 + \cos \frac{\pi(k-1/2)}{n} \right] / 2$. Удовлетворяя в точках коллокаций уравнениям (4), а в конечных точках граничным условиям, получим однородную систему $2n+4$ уравнений относительно a_i, b_i .

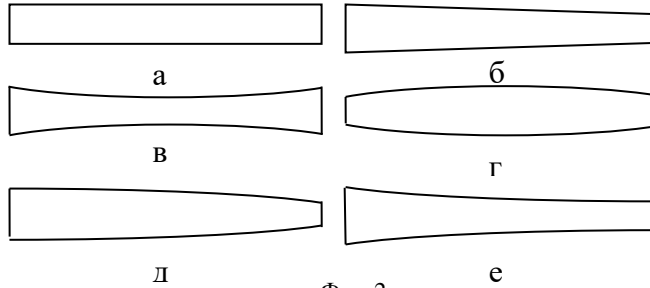
Функции f и φ можно также взять в виде

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=1}^{n+1} a_{i+2} x^{i+2} (1-x)^3, \quad \varphi = b_0 + b_1 x + \sum_{i=1}^{n+1} b_{i+1} x^{i+1} (1-x)^2 \quad (9)$$

Удовлетворив граничным условиям можно постоянные a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 выразить через одну постоянную и удовлетворить только в точках коллокаций уравнениям (4) и получить однородную систему из $2n$ уравнений.

Рассмотрим пластины-полосы переменной толщины, для которых безразмерная толщина $H(x)$ изменяется по законам (фиг. 2).

$$\begin{aligned}
 \text{а) } H(x) &= 1, \text{ б) } H(x) = \frac{2}{k+1}[(1-k)x+k], \text{ в) } H(x) = \frac{12(k-1)}{k+2}(x-0.5)^2 + \frac{3}{k+2} \\
 \text{г) } H(x) &= \frac{3}{2k+1}[4(1-k)(x-0.5)^2+k], \text{ д) } H(x) = \frac{3}{2k+1}[(1-k)x^2+k], \text{ е) } H(x) = \frac{3}{k+2}[(k-1)(x-1)^2+1]
 \end{aligned}
 \tag{10}$$



Фиг. 2

Все они имеют одинаковую площадь осевого сечения и, при переменности толщины, толстая часть в k раз больше тонкой.

При вычислениях для изотропного материала принято $\chi=3$, $A_1=-0,5$, $\bar{\Delta}_2=-2,25$, а для ортотропного $\chi=10,30$, $A_1=-5$, $\bar{\Delta}_2=-128$, $s=0.05$

Полагая $\Omega=0$ и приравнявая определитель этой системы к нулю, получим критические значения силы T , при которых происходит потеря устойчивости. После определения этих значений можно определить и вид функций f и φ , соответствующих этим значениям. Для этого надо полученные уравнения разделить на один из коэффициентов a_m или b_m , перевести соответствующий столбец в правую часть и отбросить одно из уравнений. Решая эти уравнения, можно с точностью до постоянного множителя определить функции f и φ .

В табл. 1–4 приведены безразмерные значения $10^3 T_{кр}$ при $\Omega=0$ при четырёх видах граничных условий.

Таблица 1

Граничные условия	χ	k	а	б	в	г	д	е
Заделка ($l_1=1, l_2=1$) -заделка ($l_1=1, l_2=1$)	0	1	8.4722					
		2		7.085	8.402	6.8052	6.9225	7.1652
		3		5.645	7.947	6.0211	5.5251	7.1641
	3	1	7.9315					
		2		6.8566	7.0932	6.6505	6.7121	6.2607
		3		5.5112	7.3451	5.8707	5.3905	5.3872
	10	1	7.3217					
		2		7.1351	6.3225	6.2607	6.2508	6.3601
		3		6.4221	6.6115	5.0715	5.1551	5.0379
30	1	6.0015						
	2		5.2612	5.6225	5.5515	5.2601	5.2021	
	3		4.3254	5.0111	5.0934	4.3151	4.1652	

Как показывают численные расчёты, разница между первым и вторым вариантами условий (5) для рассмотренных значений геометрических и физических параметров наибольшая разница при $\chi=30$ составляет не более 3%.

Наибольшая разница $T_{кр}$ по классической и уточнённой постановках при $\chi=30$ составляет 24% и имеет место в случае, когда оба конца заделаны для пластины е), когда тонкая часть находится в середине пластины-полосы.

В случае заделка-шарнир наибольшее значение $T_{кр}$ принимает для пластины постоянной толщины, а случае шарнир-шарнир для пластины $\gamma) - T_{кр}$ при $k = 3$ на 30% больше, чем для пластины постоянной толщины.

Таблица 2

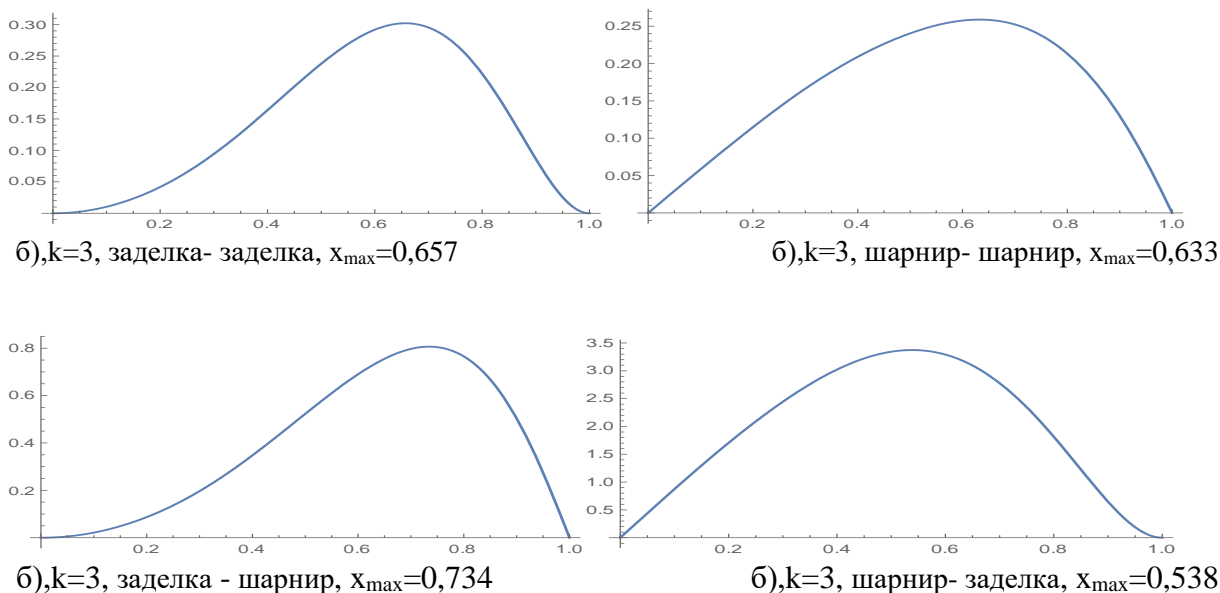
Граничные условия	χ	κ	а	б	в	г	д	е
Шарнир ($l_1 = 0, l_2 = 1$)- шарнир ($l_1 = 0, l_2 = 1$)	0	1	2.05617					
		2		1.7912	1.1745	2.6815	1.9711	1.562.
		3		1.4351	0.7912	2.7951	1.6951	1.135
	3	1	2.0365					
		2		1.7811	1.1508	2.6651	1.9512	1.5451
		3		1.4571	0.7252	2.7650	1.6825	1.1215
	10	1	1.9951					
		2		1.7405	1.1195	2.5595	1.9110	1.5241
		3		1.4321	0.6515	2.6811	1.6520	1.1152
	30	1	1.8805					
		2		1.6452	1.0617	2.4211	1.8112	1.4471
		3		1.3555	0.5722	2.4913	1.5605	1.0655

Таблица 3.

Граничные условия	χ	κ	а	б	в	г	д	е
Заделка ($l_1 = 1, l_2 = 1$)- шарнир ($l_1 = 0, l_2 = 1$)	0	1	4.2064					
		2		3.6405	3.5665	4.1308	3.7450	3.4655
		3		2.9572	2.9952	3.8752	3.1482	2.6140
	3	1	4.1272					
		2		3.5815	3.4715	4.0672	3.6850	3.4105
		3		2.9220	2.8650	3.8082	3.1045	2.5812
	10	1	3.9552					
		2		3.4482	3.2881	3.9320	3.6556	3.2710
		3		2.8224	2.6580	3.6810	3.0051	2.5112
	30	1	3.6355					
		2		3.1271	2.8891	3.6001	2.2318	2.9555
		3		2.5751	2.2991	3.3905	2.7581	2.2818

Таблица 4

Граничные условия	χ	κ	а	б	в	г	д	е
Заделка ($l_1 = 1, l_2 = 1$)- свободный ($l_1 = 0, l_2 = 0$)	0	1	0.5140					
		2		0.2851	0.3625	0.3752	0.2842	0.2852
		3		0.1745	0.1760	0.1775	0.1552	0.1718
	3	1	0.5138					
		2		0.2853	0.3655	0.3805	0.2752	0.2852
		3		0.1753	0.1625	0.2055	0.1583	0.1721
	10	1	0.5111					
		2		0.2853	0.3661	0.3925	0.2752	0.2827
		3		0.1754	0.1572	0.2385	0.1518	0.1724
	30	1	0.5025					
		2		0.2805	0.2806	0.2802	0.2811	0.2812
		3		0.1691	0.1695	0.1690	0.1692	0.1697



Фиг. 3

На фиг. 3 приведены графики функции f с точностью постоянного множителя для первого критического значения $T_{кр}$ при $k=3$ и различных граничных условиях при линейном изменении толщины. Приведены также значения x_{\max} при которых безразмерный прогиб f принимает максимальное значение.

При увеличении k приходится удерживать больше членов для получения приемлемых результатов. При $k \leq 3$ можно ограничиться 7-9 порядком многочленов f и φ . При $k > 5$ не удается получить достоверные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №4. С.12–20.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под.ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Т.3. Изд. Машиностроение, 1964. 564с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемленной опорой. // Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. №2. С.101-107.
6. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учёте поперечных сдвигов и инерции вращения. // В сб., посв. 80-летию акад. НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван: 2002. С.137–146.
7. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. О неклассической задаче определения частот свободных колебаний ортотропных пластин линейно-переменной толщины. // В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис 1–7 октября 2005.
8. Геворкян Г.З. Статическая устойчивость ортотропных пластин-полос переменной толщины при учёте поперечного сдвига. // В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды II международной конференции, 4-8 октября, Дилижан, Армения. С.177–181.

Сведения об авторах:

Геворкян Гнун Завенович К.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА,
E-mail: gnungev@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович К.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА,
E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

ПРОЦЕСС РАЗРЫВООБРАЗОВАНИЯ И МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЧАГА ВОСТОЧНО ТУРЕЦКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ 06 ФЕВРАЛЯ 2023г. Mw=7.8

**Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Саакян Б.В.,
Мкртчян М.А., Оганесян С.М., Мкртчян Г.А.**

В настоящей работе на основе инструментальных данных сейсмических станций регистрирующие Газиантепское (Турция) землетрясение Mw=7.8 определены кинематические, динамические параметры и спектральные характеристики очагового излучения. Анализ волновых картин регистрации велесограмм на близрасположенных турецких и удаленной Гарнийской (Армения) геофизической станции выявлено, что магистральный разрыв представляет с собой многоактовый, состоящий из 4-ех субочагов, сложный нелинейный процесс разрывообразования. Проведен сопоставительный анализ формирования магистрального разрыва, с параметрами механизма очага и геолого-тектонического строения эпицентральной области и разработана геодинамическая модель этого землетрясения. Построенная геодинамическая модель позволяет выявить основные закономерности и характерные особенности разрывообразования очага возникающих в регионе сильных землетрясений и адекватно оценить уточненную картину сейсмогенеза.

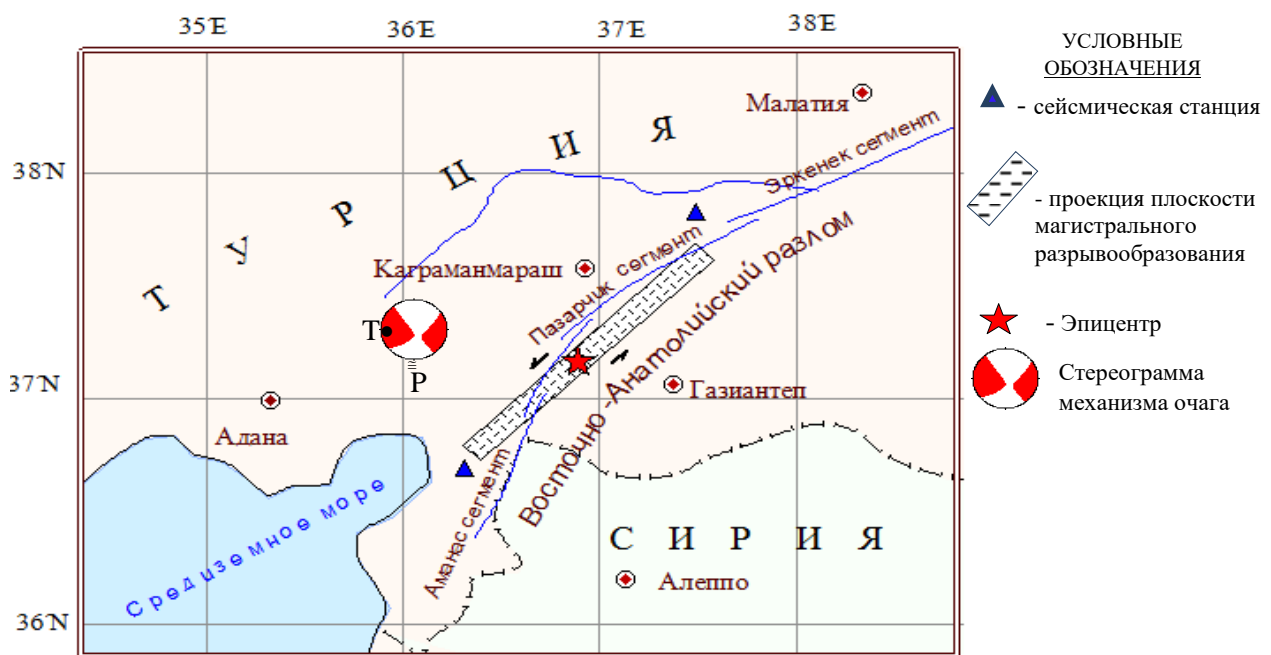
Процессы подготовки и возникновения разрушительных и сильных землетрясений являются одним из важных и пока еще окончательно не решенных проблем современной сейсмологии. Главной причиной трудности решения этих проблем являются неустойчивый характер протекающих в геологической среде земной коры сложных геодинамических процессов. Согласно концепции о литосфере, как о сложной иерархической самоорганизующейся системы, сейсмический процесс дискретно отображает сложные тектонические движения возникающие в зонах взаимодействия иерархически различных по масштабности структурных элементов в этой системе.[6]

Многочисленные экспериментальные исследования процессов разрывообразования и на их основе разработка теоретических моделей показывают, что процессы разрывообразования сильных землетрясений существенно влияют такие факторы этой системы, какими являются поля напряжений, упруго-пластические деформации, геометрия разломов и их насыщенность с флюидом, реология и вязкость геологической среды. Следует отметить, что разрушительные и сильнейшие землетрясения в сейсмоактивных регионах возникают крайне редко. Детальное исследование их очаговых зон и построение адекватных моделей разрывообразования этих землетрясений вносят существенный вклад для понятия сейсмогенеза конкретного региона и решений фундаментальных проблем, изучения физики очага землетрясения в целом.

К ряду таких землетрясений относятся разрушительные землетрясения возникшие 06 и 20 февраля 2023г. соответственно с магнитудами Mw=7.8, 7.5 и 6.3 произошедшие в юго-восточной части крупного Восточно-Анатолийского трансформного разлома в области сочленения Евроазиатской, Африканской и Аравийской литосферных макроплит. Эти стихийные бедствия привели к многочисленным человеческим жертвам и почти полному разрушению ряда городов и населенных пунктов, в 5-ти провинциях юго-восточной части Турции и приграничной к ней территории Сирии. Эти землетрясения были инструментально зарегистрированы практически всеми сейсмическими станциями различных авторитетных, мировых, региональных сейсмологических агентств. Решение фокальных механизмов этих землетрясений, а также многочисленные инструментальные регистрации волновых картин цифровых записей распространения объемных сейсмических волн на ближайших сейсмических станциях, наиболее полно обобщены и приведены в информационных бюллетенях Centre Sismologique Euro-Méditerranéen Euro-Mediterranean Seismological Centre (EMSC) и Disaster and Emergency Management Presidency, Earthquake Department (AFAD)[8,9]. В настоящей работе была поставлена цель на основе этих данных оценить напряженно-деформационное состояние очаговой области Газиантепского землетрясения, определить кинематические, динамические

параметры, спектральные характеристики очагового излучения магистрального разрывообразования и построить ее геодинамическую модель.

К основным кинематическим параметрам относятся длина, ширина и площадь плоскости магистрального разрывообразования, продолжительность и скорость этого процесса. На основе корреляционных зависимостей[5] между величиной магнитуды, с протяженностью и шириной плоскости, а также продолжительностью протекания магистрального разрывообразования, определен, очаг Газиантепского землетрясения с магнитудой $M_w=7.8$, которая имеет протяженность 140км с шириной 40км углубление в геологическую среду земной коры с общей площадью $S=5600\text{км}^2$, где в течении 38 секунд, со скоростью 2.4км/с сформировался магистральный разрыв этого землетрясения. Проведен комплексный анализ параметров ориентации нодальных плоскостей и главных осей сжимающих и растягивающих напряжений с геометрией сейсмотектонических разрывов очаговой области. Восточно-Анатолийский разлом в очаговой области имеет сложную структуру геолого-тектонического строения, состоящий из 7-и сегментов ступенчатообразных, кулисообразно расположенных разрывных нарушений, которые отделяют Анатолийскую плиту от Аравийской плиты[8]. В этой системе плоскость магистрального разрывообразования имеет ориентацию с юга-запада на северо-восток с азимутом 225^0 , с близвертикальным 85^0 углом падения в глубь земной коры, проекция которой на земной поверхности имеет ширину 15 км. (рис. 1)



Газиантепского землетрясения

Учитывая азимутальную ориентацию плоскости магистрального разрывообразования и его угол падения относительно к горизонту земной поверхности, противоположные грани плоскости разрыва принимают так называемые «висячей» и «лежащей» борты мгновенного, относительного смещения разрыва и приуроченные, соответственно к Аравийскому и Анатолийскому макроплитам. Анализ разности времен вступления объемной, продольной P_{max} волн, на станциях азимутально со всех сторон оконтуривающих область магистрального разрыва, показывает, что магистральное разрывообразование представляет из себя гипоцентр одновременно билатерально распространяющийся одноосный процесс. Сложные волновые

картины регистраций цифровых записей, как на близрасположенных турецких сейсмических станций, так и на удаленной геофизической станции Гарни ($\Delta=740\text{км}$)[8,9], показывает, что процесс разрывообразования по своему характеру, представляет собой, нелинейный, многоактовый процесс состоящий из 4-ех субочагов .

Детали вспаривания магистрального разрыва и характер трещинообразования в очаговой зоне определяют особенности этих субисточников. Для их выявления были применены широко используемые в современной сейсмологии методы спектрального анализа очагового излучения объемных волн зарегистрированные на этих станциях. Какой бы сложности не были очаговые процессы и излучения, они описываются с помощью спектральной модели ω^2 [2] с двумя угловыми частотами разлагающими очаговое излучение на регулярные низкочастотные и высокочастотные составляющие. Этот сложный процесс магистрального разрывообразования наилучшим образом аппроксимируются спектральной моделью Хаскела[1,7]. Для получения количественных значений референчных частот f_0 , f_1 и промежуточный диапазон доминантных частот, приведенных на спектрах записей на турецких станции, нами, были представлены билогарифмическом масштабе в виде двух прямых, позволяющих получить значение первой референц частоты $f_0=1,25\text{Гц}$. С целью выделения второй f_1 референц частоты, частотного диапазона низкочастотных доминантных составляющих очагового излучения, был построен спектральный анализ волновых форм амплитудно-частотных спектров продольных Р волн, зарегистрированных на удаленной геофизической станции "Гарни", позволивший выделить вторую референц частоту $f_1=0.55\text{Гц}$. По практически квазигоризонтальному амплитудному уровню спектра доминантной низкочастотной составляющей прямым способом определено значение скалярного сейсмического момента $M_0=5.2 \cdot 10^{20}\text{Н}\cdot\text{м}$. На этой же близгоризонтальной прямой низкочастотной составляющей четко выделяются 3 пики высокочастотных наложений, которые соответствуют очаговому излучению субисточником этого магистрального разрыва. По экспериментально определенным исходным данным используя приведенные в работах [1,3,4] формул, рассчитаны основные динамические параметры очага, количественные значения которых представлены в таблице 1.

Таблица 1

Кинематические и динамические параметры разрывообразования очага $M_w = 7,8$ Газинтепского землетрясения									
Кинематические параметры			Динамические параметры						
Φ_s - азимутальная ориентация разрывообразования	Δt - длительность разрывообразования (сек)	c - скорость разрывообразования ($\text{км}\cdot\text{сек}^{-1}$)	L - длина магистрального разрыва (км)	M_0 - скалярный сейсмический момент (Н·м)	E_s - высвобожденная сейсмическая энергия (Дж)	$\Delta\sigma$ - сброшенное напряжение (мБар)	$\Delta\tau$ - сброшенное касательное напряжение (мБар)	S - площадь поверхности разрыва очага (км^2)	\bar{u} - сейсмолетоническая подвижка (м)
228	37,8	2,4	140	$5,4 \cdot 10^{20}$	$3,16 \cdot 10^{16}$	2,5	3,5	5600	3,2

На основы кинематических, динамических параметров и спектральных характеристик очагового излучения, нами была сделана попытка создать геодинамическую модель очага этого землетрясения. Рис. 2

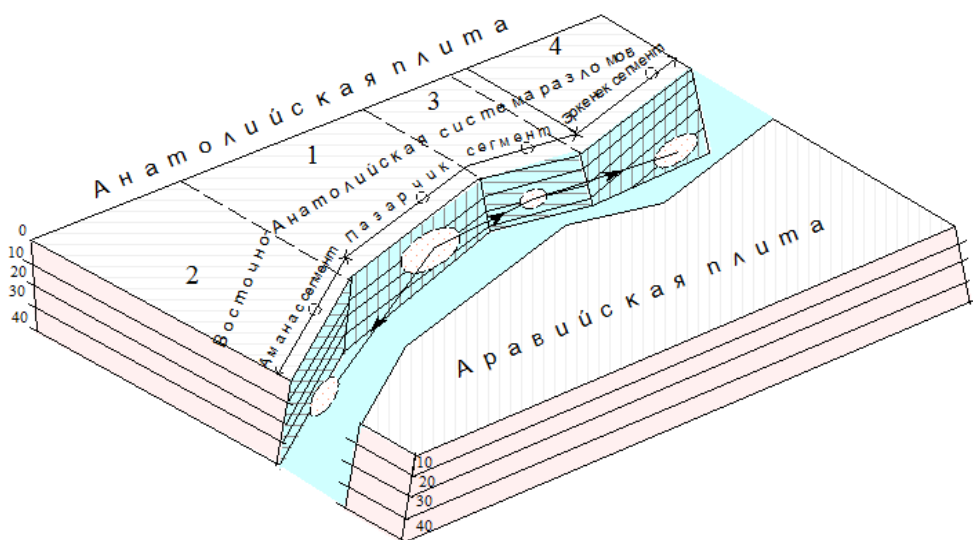


Рис. 2 Геодинамическая модель очага Газиантепского землетрясения

Согласно этой модели, гипоцентр очага, где было накоплено наибольшее значение сейсмотектонических напряжений $\sigma=2,5\div 3,5$ МБар, от которого начинается процесс формирования магистрального разрывообразования, приурочено к Позарчикскому сегменту, к системе трансформного Восточно-Анатолийского разлома. Азимут магистрального разрыва совпадает, с азимутом системы ступенчато расположенных геолого-тектонических разрывных нарушений.

Эффективная длина магистрального разрыва направлена от юго-запада на северо-восток и последовательно полностью охватывает Аманосский, Пазарчикский и Эргенекские сегменты до дизъюнктивного узла этой системы с Сургутского глубинного разлома[8]. В ходе развития разрывообразования происходит относительно гладкое скольжение без отрыва берегов этих разрывных сегментов с одновременным раздроблением сплошности геологической среды на перемычках кулисообразно расположенных сегментов. В общем процессе разрывообразования эти фрагменты раздробления геологической среды представляют из себя субочаги мультиплетного, многоактового вспарывания магистрального разрыва. При возникновении землетрясения в гипоцентральной области произошло резкое относительное смещение противоположенных бортов магистрального разрыва, значение которой составляет $\bar{u}=3.2$ м. Значительная по величине сейсмотектоническая подвижка по мере удаления от гипоцентра убывает. На основе тензорного анализа сейсмического момента, определены главные диагональные составляющие M_1, M_2, M_3 и по этим данным рассчитан коэффициент Лоде-Нодаи $\mu=0.08$, которое указывает, что в очаге подвижка по разрыву представляет собой чистый левосторонний сдвиг.

В дальнейшем полученная геодинамическая модель может быть уточнена с помощью привлечения пространство-временного распределения афтершокового процесса данного землетрясения.

Построенная геодинамическая модель позволит выявить основные закономерности и характерные особенности разрывообразования в очагах возникающих в регионе сильных землетрясений и адекватно оценит уточненную картину сейсмогенеза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверьянова В.Н. Энергетический спектральный метод оценки сейсмической опасности. М.: Наука, 1989, с.187.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т.1, 2, М.: Изд-во «Мир», 1983.
3. Аптекман Ж.Я., Белавина Ю.Ф., Захарова А.И., Зобин В.М., Коган С.Я., Корчагина О. А., Москвина А.Г., Поликарпова Л.А., Чепкунас Л.С. Спектры Р- волн в задаче определения динамических параметров очагов землетрясений. Переход от стационарного спектра к очаговому и расчет динамических параметров очагов//Вулканология и сейсмология. -М.: Наука 1989, с. 66-79.
4. Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. – М.: Наука, 1975. 176с.
5. Ризниченко Ю.В., Избранные труды. Проблемы сейсмологии. –М.: "Наука", 1985. 405с.
6. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality //Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P 364–374.
7. Haskell N.A. Elastic displacements in the near-field of propagating fault. Bull.Seismol.Soc. Amer. 1969.vol.59 №3 p.865-908. www.emsc.org. <https://depem.afad.gov.tr>

Сведения об авторах:

Геодакян Эдуард Григорьевич - канд. физ.-мат. наук, зав. лабораторией Институт геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА (ИГИС НАН РА), (+374)93 51-31-23, geodakyan.e@mail.ru

Карапетян Джон Костикович - канд. геол. наук, директор и зав. лабораторией ИГИС НАН РА, (+374)94 79-85-80, jon_iges@mail.ru

Саакян Бабкен Вазгенович - научный сотрудник ИГИС НАН РА, (+374)93 62-66-53, sahakyan_babken@mail.ru

Мкртчян Мери Артушовна - научный сотрудник ИГИС НАН РА, (+37494)60-25-45, mary-mary-86@mail.ru

Оганесян Севада Мкртчичевич - член-корр. НАН РА Армения, доктор физ-мат наук, сов. директора и зав. лабораторией ИГИС НАН РА, (+374)93 42-04-43, iges@mail.ru

Мкртчян Гоарик Артаваздовна - научный сотрудник ИГИС НАН РА, (+374)93 17-72-01, mgohar56@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ПРОЧНОСТИ И МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ПЕРЛИТОВОЙ ПОРОДЫ, КЛАССИФИЦИРОВАННОЙ ПО СРЕДНЕЙ ПЛОТНОСТИ, НА ПРОЦЕСС ЕЕ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Гургенян Н.В., Хачанова И.Б

Исследован механизм измельчения перлитовой породы Арагацкого месторождения, классифицированной по средней плотности. Изучены два способа разрушения однородного по плотности сырья – в конусной и лабораторной щековой дробилках с последующим анализом полученного продукта. На примере щековой дробилки рассчитаны затраты энергии при дроблении классифицированного перлита. В связи с чем получена корреляционная связь между прочностью, модулем упругости и средней плотностью породы.

На основе полученных данных рекомендована более рациональная технология механической переработки перлитов раздельно по плотностям.

Введение

Перед тем как стать сырьем для вспучивания перлитовая порода проходит определенные этапы механической переработки, связанные с ее дроблением, измельчением и фракционированием. Проблемы дробления и измельчения в горнодобывающей и химической промышленности решаются путем подбора соответствующих дробящих и измельчающих агрегатов, поскольку сам процесс является довольно-таки энергоемким. Поэтому данному этапу в технологической цепочке получения продукции уделяется особое внимание.

Условия формирования перлитов влекут за собой образование структурной неоднородности по мощности потока, связанную с пористостью и трещиноватостью, обусловленную процессом контракции стекловидной массы [1]. В работах, связанных с разрушением горных пород выявлены наиболее вероятные элементы структуры, по которым развивается разрушение: поры, микротрещины, границы срастания минеральных фаз [2–7], которые являются причиной возникновения внутренних напряжений. Такое предварительно напряженное стекло может оставаться неизменным до момента механического или термического воздействия [8].

Наличие различной степени пористости, трещиноватости и, как результат, появление разновидностей перлитов, обусловило сложно-структурный характер перлитовых месторождений. Указанные разновидности, являясь продуктами одной и той же магмы, отличаются физико-техническими и технологическими свойствами. Поэтому выявлению технологических особенностей перлитов необходимо уделять должное внимание, т.к. именно технологические свойства определяют промышленную ценность перлитового сырья.

Исходя из сказанного, пористые перлиты больше подвержены разрушению, так как при затрате одинакового количества энергии степень разрушения пористых перлитов выше. Существующее дробящее оборудование, входящее в технологические линии по механической обработке перлитовой породы и предназначенное для дробления прочных горных пород, обладает низкой избирательной способностью и при переработке перлита производит большое количество некондиционного продукта. Поступающее на дробление горная масса, добываемая валовым способом, неоднородна по плотности. В результате наблюдается колебание фракционного состава дробленного продукта в довольно широком диапазоне и его регулирование не представляется возможным. Кроме того, приложенная при дроблении нагрузка по-разному действует на неоднородное сырье. Пористые и слабопористые разновидности подвергаются большему разрушению, поскольку их прочность и модуль упругости значительно ниже, чем у плотных и массивных и в дробленном продукте, в основном, представлены в виде мелких фракций, т.е. неоднородность поступающего сырья усугубляется в процессе дробления.

Экспериментальная часть. Для исследования процессов измельчения перлитов были подготовлены три пробы, со средней плотностью 1400, 1800 и 2000 кг/м³.

Процесс механической переработки перлита представляет интерес с точки зрения количественного выхода фракций, предназначенных для вспучивания, в зависимости от средней плотности породы.

Разрушение наступает после перехода за предел прочности нормальных и касательных напряжений, возникающих в материале при его упругих деформациях: растяжении, сжатии, сдвиге или изгибе [9].

Ранее при исследовании свойств сырья была установлена корреляционная связь между средней плотностью породы, пористостью и прочностью при сжатии (рис.1) [10]. В таких хрупких телах, где уже имеются микротрещины и поры, даже при относительно небольшом воздействии размеры и плотность микроповреждений быстро растут и наступает разрушение [11]. Причем с увеличением плотности перлита пористость и трещиноватость, способствующие разрушению при испытаниях на прочность, уменьшаются и для разрушения материала требуются большие нагрузки.

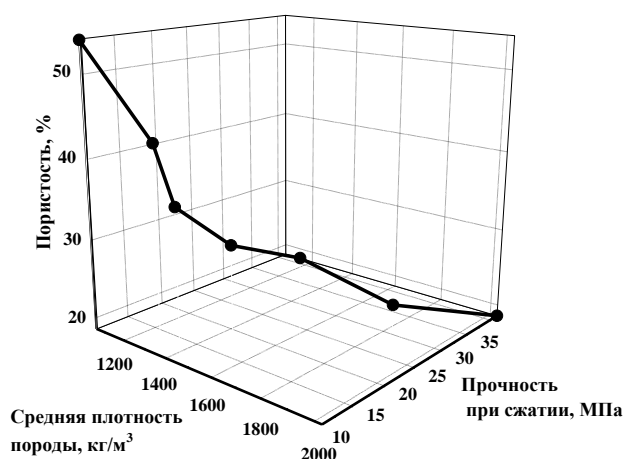


Рис.1. Зависимость прочности при сжатии и пористости от средней плотности породы

Поскольку перлитовая порода имеет широкую гамму плотностей, которая обусловлена изменением пористости от 5 до 65%, и прочности от 0.3 до 10 МПа, то небезынтересно проследить поведение перлита с различной плотностью, прочностью и пористостью при разных параметрах разрушения.

Для сравнения поведения перлитов в различных дробящих агрегатах, проведены испытания дробимости в конусной инерционной и лабораторной щековой дробилках. Механизм разрушения твердых тел достаточно хорошо изучен, однако при дроблении материала часто возникает резонансный режим разрушения, приводящий к наиболее оптимальному способу разрушения [12,13]. Конусные дробилки основаны на принципе излома, раздавливания и частичного истирания между двумя конусами, вращающимися эксцентрично по отношению друг к другу. Такие дробилки позволяют достигнуть более высокой степени дробления. В щековых – материал измельчается раздавливанием, раскалыванием и частичным истиранием в пространстве между щеками при их периодическом сближении [14].

Обсуждение полученных результатов

Результаты испытаний дробимости перлита до крупности 0 – 5.0 мм в дробилке КИД – 300 показали возможность использования агрегатов подобного типа действия для дробления перлита. Из-за сравнительно низкой прочности перлитов дробление проводилось при

незначительных усилиях, развиваемых дебалансом дробилки, равным 4% от максимального его значения. Все изменения параметров настройки дробилки, вносимые в процессе испытаний, давали ощутимые изменения в крупности продуктов ее разгрузки.

Результаты дробления перлитовой породы в КИД – 300 с частотой 1200 об/мин, и разгрузочной щелью 5 мм приведены в табл. 1. Эти параметры для данной дробилки и породы являются оптимальными.

Таблица 1

Степень измельчения перлитовой породы с разной средней плотностью при дроблении

Плотность исходной породы, кг/м ³	Выход дробленной породы, %, по фракциям, мм в конусной дробилке					
	+2.5	1.25-2.5	0.63-1.25	0.31-0.63	0.14-0.31	0-0.14
1400	54.4	10.6	12.4	9.6	6.6	6.4
1800	60.0	9.2	8.0	12.0	5.2	5.6
2000	64.0	11.2	5.6	11.2	4.0	4.0
	Выход дробленной породы, %, по фракциям, мм в щековой дробилке					
1400	32.2	22.4	20.2	15.8	4.5	4,9
1800	45.8	26.3	17.3	2.7	4.3	3.6
2000	65.3	20.7	7.0	2.5	2.1	2.4

Как было отмечено выше, испытания дробления перлита с той же средней плотностью проводились и в лабораторной щековой дробилке с установленной шириной разгрузочной щели – 5мм.

Данные табл. 1 свидетельствуют о равнозначности результатов, полученных при использованных методах разрушения материала, т.е. с нарастанием плотности породы уменьшается дефектность материала, что ведет к увеличению его прочности и затруднению его мелкого дробления. При дроблении плотной разновидности перлита количественный выход крупных фракций заметно больший, чем при дроблении слабопористых и пористых разновидностей и для приравнивания их степени измельчения потребуется больше энергии.

Для установления закономерности изменения затрат энергии при дроблении перлитов Арагацкого месторождения всего исследуемого диапазона плотностей возникла необходимость определения модуля упругости для всех имеющихся разновидностей. В работе [15] были определены модули упругости для разных плотностей перлитов данного месторождения неdestructивными методами, в основе которых лежит измерение собственных колебаний образцов или скорости распространения в материале звуковых и ультразвуковых волн. Для наглядности приводится ниже график полученной зависимости (рис. 2).

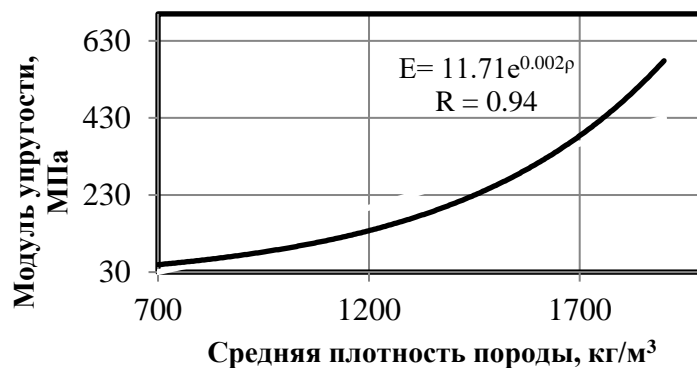


Рис.3. Зависимость модуля упругости (E) от средней плотности породы (ρ)

Из графика видно, что с возрастанием средней плотности породы модуль упругости увеличивается. На основании установленных зависимостей и количественного выхода фракций сырья при дроблении разновидностей перлита можно сделать вывод о неоднозначности затрат энергии в процессе механической переработки перлитов, отличающихся плотностью, при одной и той же производительности измельчающего агрегата.

Перлит, как и большинство горных пород, при сжатии не дает остаточных деформаций. Такие тела можно отнести к абсолютно упругим и для них можно применить известное выражение для работы деформации [16, 17]:

$$A = \frac{3\sigma^2 \cdot Q}{2E \cdot \rho} \cdot \frac{lgi}{lgQ}, \text{ кгс} \cdot \text{см}, \quad (1)$$

где A – затрачиваемая работа на измельчение, σ – величина разрушающих напряжений;

Q – масса дробимого продукта, E – модуль Юнга, ρ – плотность материала,

$\frac{lgi}{lgQ}$ – степень измельчения, η – коэффициент пропорциональности

Откуда энергия, затрачиваемая при дроблении, согласно гипотезе Кирпичева-Кика будет равна

$$N = 1,39 \cdot 10^{-6} + \frac{\sigma \cdot Q}{\eta \cdot E \cdot \rho} \cdot lgi, \text{ кВт}. \quad (2)$$

Для щековой дробилки марки СМ-741 по ГОСТ 7084-71 «Щековые дробилки. Технические условия» общий к.п.д. принят равным 0,2. Расчет сделан для указанной дробилки. Полученные значения энергозатрат приведены в табл.3.

Таблица 3

Показатели энергозатрат при дроблении перлитов разной плотности

Средняя плотность, кг/м ³	760	1200	1500	1600	1700	2000
Энергозатраты, кВт	0.83	2.31	3.07	3.50	3.50	3.82

Данные в табл. 3 свидетельствуют о том, что при дроблении единицы объема перлита с разной плотностью энергозатраты увеличиваются с уменьшением дефектности породы, т.е. с возрастанием средней плотности. Кроме того, исходя из данных фракционного состава, определенного после дробления (табл.1), видно, что с нарастанием плотности выход крупных фракций +/- 2,5 мм увеличивается и для получения одинакового зернового состава необходимы дополнительные затраты энергии на додробливание.

Заключение

1. Зависимость фракционного состава дробленного продукта и энергозатрат при дроблении от средней плотности перлитовой породы дает основание рекомендовать более рациональную технологию механической переработки перлитов, отдельно по плотностям.
2. Зависимость прочности и модуля упругости перлитовой породы от ее средней плотности свидетельствует о наличии разновидностей породы, отличающихся физико-механическими свойствами.
3. Использование маломощных дробилок при дроблении пористых и слабопористых разновидностей создает возможность снизить энергозатраты и регулировать фракционный состав дробленного продукта.
4. В связи с этим предлагается селективная добыча породы тонкими выемочными слоями, однородными по средней плотности, т.е. введение понятия сортности, что обеспечило бы однородность поступающего на дробление сырья и сокращение потерь энергии при дроблении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наседкин В.В. Водосодержащие вулканические стекла кислого состава, их генезис и изменения, М.: Академия наук, 1963. 280с.
2. Канкян П.Х. Перлитовые породы Армении, Ереван: Айастан, 1963. 129с.
3. Ревнивцев В.И., Гапонов Г.В., Зарогатский Л.П. и др. Селективное разрушение минералов, М., Наука, 1988. 286 с.
4. Добрынин В.М., Вендельштейн Б.Ю., Кожевников Д.А. Петрофизика, М.: Недра, 1991. 368.
5. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород, Л.: Недра, 1985. 240с.
6. Протасов Ю.И. Разрушение горных пород, М.: Издательство Московского государственного горного университета, 3-е изд. 2002. 453 с.
7. Ржевский В.В., Новик В.Я. Основы физики горных пород. Изд. 3-е перераб. и доп., М.: Недра, 1978. 390 с.
8. Журков С.Н. К вопросу о физической природе прочности. Физика твердого тела. т.22, № 2, с.3444-3449, 1980.
9. Назимко Е.И. Конспект лекций по курсу «Подготовительные процессы обогащения», <https://studfile.net/preview/5678963/>
10. Гургенян Н.В., Костандян М.Ф., Григорян А.Е., Варданян Н.К., Хачанова И.Б. Корректировка некоторых параметров, влияющих на процесс вспучивания перлитов. Химическая технология. №1, С.36-40, 2020.
11. Андреев С.Е., Петров В.А., Зверович В.В. Дробление и грохочение полезных ископаемых, М.: Недра, 1980. 415с.
12. Кононенко В.Н., Халкечев К.В. Резонансное разрушение горных пород при дроблении и измельчении. Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал), С.231-235, 2010.
13. Данилов А.В. Определение работы разрушения горных пород под воздействием динамических нагрузок. Горный информационно-аналитический бюллетень, С.260-263, 2010.
14. Берлин Н.Ф. Процессы и аппараты в технологии строительных материалов.-М.: Высшая школа, 1986. 280с.
15. Гургенян Н.В., Хачанова И.Б. Влияние плотности перлитовой породы на ее деформационные свойства. Ереван: VI Международная конференция по химии и химической технологии, С.215-218, 2019.
16. Сиденко П.М. Измельчение в химической промышленности. М.: Наука, 1977.- 392с.
17. http://samlit.com/izmel/sposoby-teoreticheskie_osnovy_izmelcheniya.html Способы и основные законы измельчения.

Сведения об авторах:

Гургенян Нинель Вагинаковна – канд. тех. наук, зав. лабораторией “Композиционные материалы, химия и технология” института общей и неорганической химии им. Манвеляна НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 91) 575655 **E-mail:** gurnelius49@gmail.com

Хачанова Инесса Багратовна – доцент кафедры учебно-экспериментальной лаборатории строительных материалов и изделий Национального Университета Архитектуры и Строительства Армении, тел.: (+37491) 340188, **E-mail:** inessbag@yahoo.com

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Джилавян С.А., Галичян Т.А.

Рассматриваются задачи о существовании сдвиговой поверхностной электроупругой волны, локализованной у свободной от напряжений плоскости в составной пьезоэлектрической среде

Конструктивная неоднородность упругой среды и взаимодействие полей различного физического происхождения вносят существенное изменение в классическую теорию распространения сдвиговых волн, в частности, электроупругих волн. Помимо объемных волн в твердых телах со свойством пьезоэффекта могут распространяться локализованные упругие волны сдвига, которые затухают, проникая вглубь пьезоэлектрика [1,2]. Скорость распространения этих сдвиговых волн меньше скорости объемных волн [2, 3, 4].

Наличие в среде свободных от напряжений поверхностей порождает новые эффекты в задачах о распространении сдвиговых электроупругих волн [4, 5]. Взаимосвязь между составными частями пьезоэлектрической среды включает физикомеханические процессы, происходящие как в отдельных средах, так и возникающие при их взаимодействии. В основу принимаются дифференциальные уравнения динамической теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатистическом приближении.

1. Рассматривается составная упругая среда, обладающая пьезоэффектом. Пространство отнесено к прямоугольной системе координат x, y, z . Среда состоит из двух пьезоэлектрических полупространств – пьезоэлектриков класса $6mm$ гексагональной симметрии, ось oz совпадает с главной осью пьезокристалла. Пьезоэлектрики занимают полупространства $y > 0$ и $y < 0$, отсутствует акустический контакт по поверхности $y = 0$, т.е. имеет место только непрерывность электрических характеристик.

Неоднородная пьезоэлектрическая среда находится в условиях антиплоской деформации. При такой постановке задачи смещения частиц перпендикулярны направлению распространения волны, и имеют место только деформации сдвига.

Смещения $u_z^{(i)}$ и электрические потенциалы $\Phi^{(i)}$ $i = 1, 2$ в полупространствах $y > 0$, $y < 0$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial y^2} = \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial y^2} = \frac{1}{a_i^2} \frac{e_i}{\varepsilon_i} \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial t^2}$$

где $a_i = \sqrt{\frac{c_i(1+\chi_i)}{\rho_i}}$ $i = 1, 2$ скорости распространения сдвиговых электроупругих волн в

полупространствах, $c_i = c_{44}^{(i)}$, $e_i = e_{15}^{(i)}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}^{(i)}$, ρ_i $i = 1, 2$ упругие, пьезоэлектрические,

диэлектрические постоянные и плотность соответствующих пьезосред $y > 0$, и $y < 0$,

$\chi = \frac{e_i^2}{c_i \varepsilon_i}$ – коэффициент электромеханической связи. При диэлектриках без пьезоэффекта

полагается: $\chi_i = 0$.

Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля:

$$u_z^{(i)} = u_i(x, y) e^{-i\omega t}, \quad \Phi^{(i)} = \Phi_i(x, y) e^{-i\omega t},$$

где ω – частота.

Задача, как и принято в этом случае, рассматривается в амплитудах $u_i(x, y)$, $\Phi_i(x, y)$ $i = 1, 2$.

Рассмотрим возможность распространения сдвиговой поверхностной волны, локализованной у свободной от напряжений разделительной плоскости $y = 0$. В таком случае волна затухает при удалении вглубь пьезоэлектрических полупространств, т.е.

$$u_i(x, y) = w_i(y) e^{i\sigma x}, \tag{2}$$

$$\Phi_i(x, y) = \varphi_i(y) e^{i\sigma x},$$

$$w_i(y) \rightarrow 0, \quad \varphi_i(y) \rightarrow 0 \quad \text{при } |y| \rightarrow \infty \tag{3}$$

Необходимо ввести электромеханические условия на контактной плоскости $y = 0$:

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0), \quad D_1(x, 0) = D_2(x, 0) \quad \text{при } y = 0 \tag{4}$$

и на отсутствие напряжений

$$\sigma_{yz}^{(i)}(x, 0) = 0 \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

Здесь D_i , $\sigma_{yz}^{(i)}$ – амплитуды составляющих вектора электрической индукции и амплитуды напряжения при $y > 0$ и $y < 0$ $i = 1, 2$. Известны соотношения [1, 2]:

$$\sigma_{yz}^{(i)} = e_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + e_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$$

$$D_i = e_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$$

Из уравнений (1) для искоемых функций $w_i(y)$, $\varphi_i(y)$ $i = 1, 2$ получим уравнения

$$\frac{d^2 w_i}{dy^2} - (\sigma^2 - k_i^2) w_i = 0, \quad k_i = \frac{\omega}{a_i} \tag{6}$$

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dy^2} - \sigma^2 \varphi_i + k_i^2 \frac{e_i}{\varepsilon_i} w_i = 0$$

при $y > 0$ $i = 1$ и при $y < 0$ $i = 2$.

Из-за условий (3) решения уравнений представим в виде

$$w_i = A_i e^{-\sqrt{\sigma^2 - k_i^2} |y|}$$

$$\Phi_i = B_i e^{-|\sigma| |y|} + \frac{e_i}{\varepsilon_i} w_i \quad (7)$$

Удовлетворяя условия (4) и (5), получим следующее характеристическое уравнение относительно σ [4,5]

$$K(\sigma) = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2} - \frac{\chi_1 |\sigma|}{(1 + \chi_1) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2 |\sigma|}{(1 + \chi_2) \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}} = 0 \quad (8)$$

Показано, что уравнение $K(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_0 > k_0$, $k_0 = \max(k_1, k_2)$. Следовательно, $\sigma = \pm \sigma_0$ есть нули функции $K(\sigma)$. Таким образом, в полупространствах могут распространяться сдвиговые поверхностные волны со скоростью $\frac{\omega}{\sigma_0}$, локализованные у поверхности $y = 0$:

$$u_z^{(i)} = A_i e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_i^2} |y|} \cdot e^{i(\sigma_0 x - \omega t)} \quad (9)$$

$A_i = const$ $i = 1, 2$ для полупространств $y > 0$ и $y < 0$. Существование поверхностной электроупругой сдвиговой волны обусловлено пьезоэффектом в одном из полупространств.

2. Рассмотрим пьезоэлектрическое (класса бтт гексагональной симметрии) составное полупространство, содержащее пьезоэлектрическое полупространство $y > 0$ с электромеханическими параметрами $c = c_{44}$, $e = e_{15}$, $\varepsilon = \varepsilon_{11}$, и пьезоэлектрический слой $-h < y < 0$ с параметрами $c_1 = c_{44}^{(1)}$, $e_1 = e_{15}^{(1)}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^{(1)}$ [3,4]. Задача опять решается в амплитудах (временной множитель $e^{-i\omega t}$).

Считаем, что между полупространством и слоем имеется безакустический контакт, т.е. имеет место непрерывность электрических характеристик

$$\Phi(x, 0) = \Phi_1(x, 0), \quad D_1(x, 0) = D_2(x, 0) \quad \text{при } y = 0, \quad (10)$$

а для напряжений

$$\sigma_{yz}(x, 0) = \sigma_{yz}^{(i)}(x, 0) = 0. \quad (11)$$

Край слоя $y = -h$ металлизирован

$$\Phi_1(x, -h) = 0. \quad (12)$$

Поверхность слоя $y = -h$ склеена с абсолютно жесткой средой, то есть она упруго закреплена (модель склейки)

$$\sigma_{yz}^{(i)} = c_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \eta w_1 \quad \text{при } y = -h \quad (13)$$

Очевидно, что если принять $\eta = 0$, получим свободный от напряжения край слоя, а при $\eta = \infty$ имеем дело с жестким защемлением $w_1 = 0$.

Для существования локализованной у поверхности $y = 0$ поверхностной электроупругой волны, решения представляются в виде

$$w(x, y) = Ae^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}y} \cdot e^{i\sigma x} \quad y > 0$$

$$\Phi(x, y) = Be^{-|\sigma|y} e^{i\sigma x} + \frac{e}{\varepsilon} w(x, y) \quad (14)$$

$$w_1(x, y) = \left(C \operatorname{sh} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y + D \operatorname{ch} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} y \right) e^{i\sigma x} \quad -h < y < 0$$

$$\Phi_1(x, y) = \left(E \operatorname{sh} |\sigma| y + F \operatorname{ch} |\sigma| y + \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1(x, y) \right) e^{i\sigma x}. \quad (15)$$

Из условий (10) – (13) получим для искомым постоянных

$$B = -A \frac{c(1+\chi)}{e} \frac{\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{|\sigma|}, \quad E = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} B$$

$$C = -A \frac{e \chi_1(1+\chi)}{e_1 \chi(1+\chi_1)} \frac{\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}$$

$$D = C \frac{c_1 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \operatorname{ch} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} h + \eta \operatorname{sh} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} h}{c_1 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \operatorname{sh} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} h + \eta \operatorname{ch} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} h}$$

$$F = B + \frac{e}{\varepsilon} A - \frac{e_1}{\varepsilon_1} D,$$

а для определения σ следующее уравнение

$$K_*(\sigma) = E \operatorname{sh} |\sigma| h - F \operatorname{ch} |\sigma| h + \frac{e_1}{\varepsilon_1} \left(C \operatorname{sh} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} h - D \operatorname{ch} \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} h \right) = 0 \quad (16)$$

Утверждается, что $\sigma_* > k > k_1$, σ_* есть решение уравнения $K_*(\sigma) = 0$ и в пьезоэлектрическом полупространстве $y > 0$ могут распространяться сдвиговые локализованные волны со скоростью

$$\frac{\omega}{\sigma_*}$$

$$w(x, y) = Ae^{-\sqrt{\sigma_*^2 - k^2}y} e^{i\sigma_* x} \quad (17)$$

Наверное, следует припомнить известный факт, что в упругом однородном полупространстве (без пьезоэффекта) сдвиговых поверхностных волн не существуют.

Локализованные поверхностные волны обладают относительно малой скоростью распространения, для них характерна простота возбуждения (с малыми потерями) и приема, а также есть возможность управления волной по пути ее распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах, Новосибирск, Наука, 1982, 239с
2. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде, Изв. АН Армении, Механика, 1985, т. 38, 1, с 12-19
3. Белубекян М.В., Белубекян В.М. Поверхностные электро-упругие сдвиговые волны в пьезоактивной системе слой-полупространство. Уч. Записки ЕГУ, Естеств. Науки, 2006, 3, с. 25-30
4. Джилаван С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в гизэлектрике, Изв. АН НАН Армении, Механика, т.68, 1, 2015, с. 45-57
5. Джилаван С.А., Саргсян А.С. Дифракция плоской волны сдвига в составном пьезоэлектрическом пространстве, Изв. АН НАН Армении, Механика, т. 72, 1, 2019, с. 35-48

Сведения об авторах

Джилаван Самвел Акопович – к.ф.м.н., доцент, кафедра Механики ЕГУ.

Е-mail samjilavyan@ysu.am

Галичян Тигран Александрович – к.ф.м.н., с. н. с. Института Механики НАН Армении.

Е-mail galichyantigran@gmail.com

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛОИСТЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ КОМПОЗИТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ WAAM НА ОСНОВЕ СПЛАВОВ AA1050 И AA5056

Евстифеев А.Д., Якупов Б.А., Смирнов И.В., Волосевич Д.В., Воропаев А.А.

В работе исследуется возможность создания слоистых алюминиевых материалов с использованием технологии проволоочно-дугового аддитивного производства. Рассматриваются особенности деформирования композитов на основе алюминиевых сплавов AA1050 и AA5056. Приводятся результаты экспериментов по растяжению образцов с различной ориентацией слоев AA1050 в матрице сплава AA5056. Полученные результаты анализируются с учетом структурных особенностей композитных материалов.

1. Введение

В последние годы технология проволоочно-дугового аддитивного производства (WAAM) привлекает значительное внимание в области изготовления металлических изделий благодаря своей эффективности, экономичности и возможности создания сложных геометрий [1-4]. Технология WAAM позволяет изготавливать сложные компоненты с высокой точностью, уникальной геометрией и разнообразными комбинациями материалов слой за слоем. Отдельное внимание привлекает использование легких алюминиевых сплавов, которые могут применяться для широкого спектра изделий, включая детали самолетов, аэрокосмические детали и детали судостроения. Данный подход открывает перспективы для создания новых композитных алюминиевых материалов с уникальными механическими и структурными характеристиками.

В настоящей работе представлено исследование особенностей деформирования композитных слоистых алюминиевых материалов, изготовленных с использованием технологии WAAM. В качестве материалов для изучения были выбраны два алюминиевых сплава: чистый сплав AA1050 и алюминиевый сплав AA5056 системы Al-Mg. Эти сплавы были использованы для создания композитных материалов. В качестве основы использовался конструкционный алюминиевый сплав AA5056, а менее прочный материал AA1050 вводился в объем композитного материала слоями толщиной 2.5 мм.

2. Материал и методы исследований

Исследования проводились с использованием композитных алюминиевых сплавов, включающих в себя комбинацию слоев AA5056 (4.98Mg; 0.14Mn; 0.09Fe масс.%; Al - ост.) и AA1050 (0.2Si; 0.12Fe масс.%; Al - ост.), произведенных по технологии WAAM. Исходный материал для WAAM поставлялся в виде проволоки диаметром 1.2 мм.

Заготовки композитного материала выращивались с использованием установки прямого дугового осаждения, созданной на основе оборудования Fronius с технологией холодного переноса материала. В качестве источника сварочной дуги использовался TPS 500i. В качестве системы перемещения использовался промышленный робот Fanuc M-710ic.

Механические испытания на растяжение выполнялись на разрывной машине Shimadzu AG-50kNX с постоянной скоростью деформации 10^{-3} с^{-1} на плоских образцах с геометрическими размерами рабочей части 4 мм и 1.5 мм в ширину и толщину соответственно. Длина образцов варьировалась в зависимости от количества слоев AA1050 и их наклона относительно рабочей части образца. На рис.1а представлено схематическое расположение образцов в объеме композитного материала с одной полосой AA1050 толщиной 2.5 мм. Длина рабочей части образца равнялась 15 мм как для перпендикулярного расположения полосы из AA1050 к рабочей части, так и под углом 45°. На рис.1б представлено схематическое расположение образцов в объеме композитного материала с чередующимися полосами AA1050 толщиной 2.5 мм и AA5056 толщиной 5 мм. Длина рабочей части образцов с двумя полосами AA1050, ориентированных под 90° к рабочей части, равняется 15 мм. Длина рабочей части образцов с тремя полосами AA1050, ориентированных под 90° к рабочей части, равняется 25 мм. Длина рабочей части образцов с двумя полосами AA1050, ориентированных под 45° к рабочей части, равняется 20 мм.

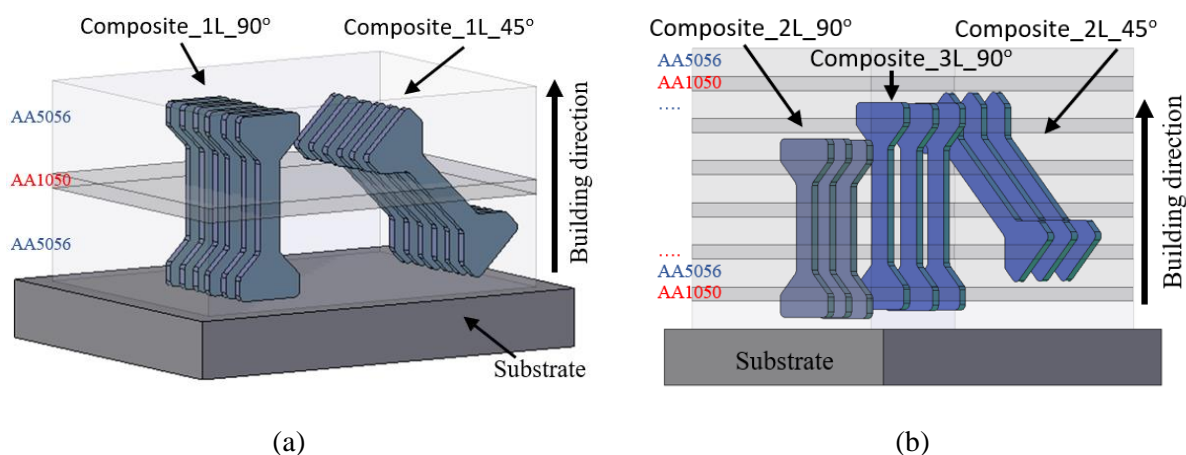


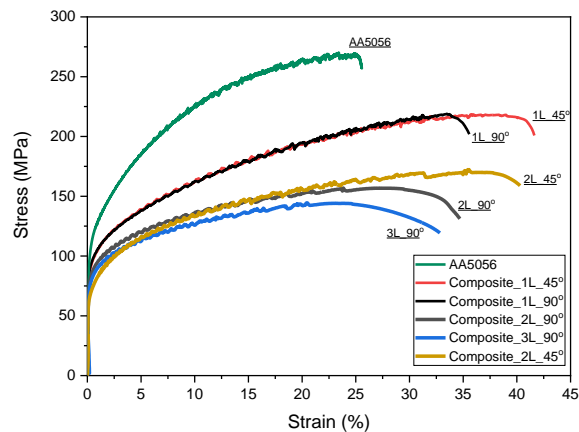
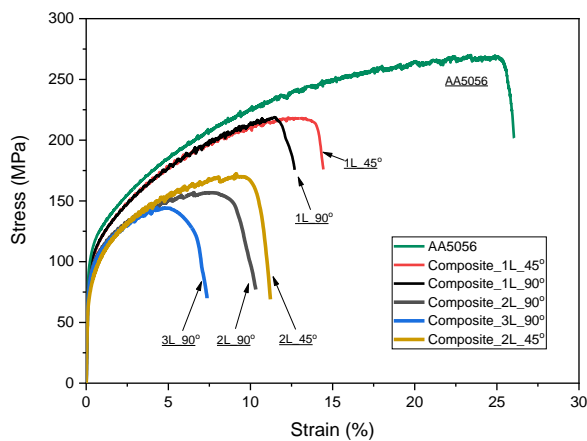
Рис.1. Схематическое расположение образцов в объеме композитного материала с (а) одним слоем AA1050 толщиной 2.5 мм; (б) чередующимися слоями AA1050 толщиной 2.5 мм и AA5056 толщиной 5 мм

По результатам механических испытаний определялись средние значения условного предела текучести ($\sigma_{0.2}$), соответствующего 0.2% деформации, предела прочности (σ_{UTS}), относительного удлинения до разрушения (δ).

3. Результаты и их обсуждение

На рис.2а представлены диаграммы деформирования WAAM материалов. WAAM материал AA5056 имеет прочность 273 МПа, что на 40 МПа меньше, чем исходное сырье. Данный факт можно объяснить тем, что в процессе печати материал расплавляется, тем самым снимается наклеп, который был получен в процессе производства проволоки. Поскольку материал AA5056 является алюминиевым сплавом системы Al-Mg, он упрочняется в процессе деформационной обработки, а термическая обработка в процессе сварки частично гомогенизирует исходный материал, делая его менее прочным. Также анализируя представленные данные, можно отметить существенное снижение пластических характеристик композитных материалов с увеличением количества слоев AA1050 в матрице AA5056. Однако, в данном случае представлена деформация в процентах, определяемая по формуле $\epsilon = \Delta L / L_0$, где ΔL – изменение длины образца в процессе растяжения, а L_0 – начальная длина образца. При этом образцы AA5056 деформировались однородно без локализации, а композитные материалы, имеют четкую область локализации. Тем самым прямое сравнение величин относительного удлинения до разрушения некорректно, поскольку условная начальная длина рабочей части образцов композитного материала существенно меньше начальной длины образца, которая использовалась в расчетах. Точное значение начальной длины рабочей части образцов из композитного материала определить не представляется возможным. Можно сделать примерную коррекцию на основе данных по оценке поверхности разрушения образцов и предположить, что если ширина полосы AA1050 равна 2.5 мм, то условная длина деформируемой части этого образца может быть равна 5 мм. Исходя из этого предположения, можно произвести перерасчет. Результаты скорректированных диаграмм деформирования представлены на рис. 2б.

Добавление одного слоя AA1050 толщиной 2.5 мм снижает прочность AA5056, но как следует из результатов, не до параметров AA1050. Композитный материал с одним слоем AA1050 имеет прочность 211 МПа в случае расположения этой полосы на рабочей части образца под 90° и 216 МПа в случае расположения этой полосы на рабочей части образца под 45°. Наблюдается снижение прочности на ~20-25 % относительно исходного материала.



(a)

(b)

Рис.2. Диаграммы деформирования WAAM материалов: (a) исходные, (b) скорректированные по длине рабочей части.

На рис. 3 представлены фото образцов в процессе растяжения и поверхность разрушения центральной части. Наглядно видно, что полоса AA1050 деформируется вдоль линии контакта с основным материалом. Образуется полоса сдвига, что наглядно видно по смещению верхней и нижней части относительно своей первоначальной оси. На поверхности разрушения центральной части образца видно, что трещина зарождается также под углом 45° . Прочностные характеристики композитного материала по всей видимости выше, чем у материала AA1050 за счет того, что в процессе послойной печати материалы частично перемешиваются и объем переходной области материала также участвует в процессе деформирования образца. Данный факт подтверждается результатами химического анализа, выполненного по длине образца. Этим можно объяснить и тот факт, что образец с полосой, ориентированной под углом 45° , оказывается незначительно прочнее образца с полосой, ориентированной под углом 90° . Это связано с тем, что объем материала из переходной области в образце Composite_1L_45° больше, чем в Composite_1L_90° по причине большей длины границ полосы AA1050 с основным материалом.

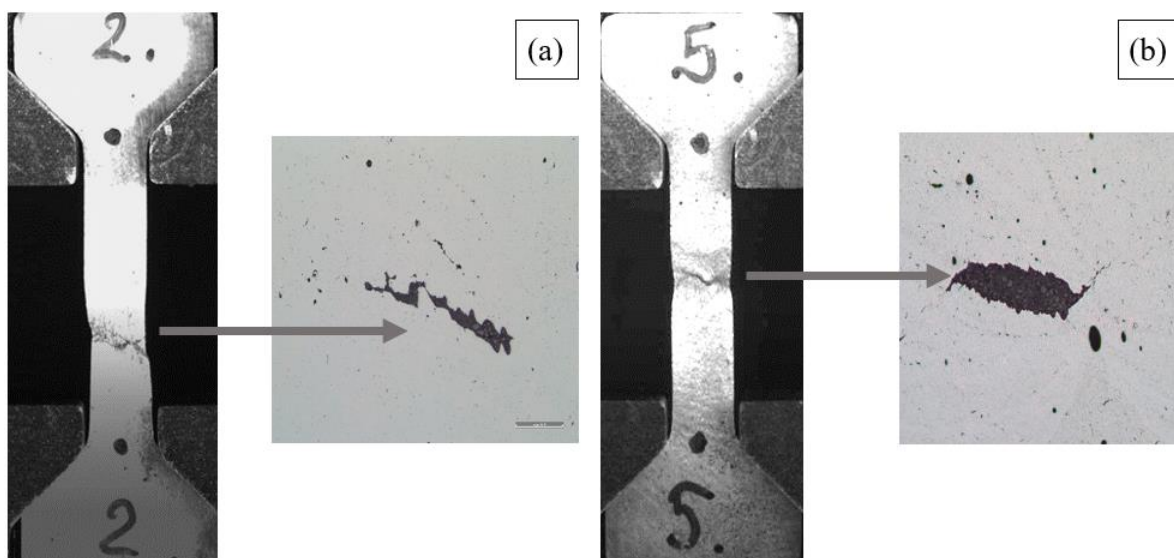


Рис.3. Фото Composite_1L_45° в процессе растяжения и поверхность разрушения центральной части образца (a); Фото Composite_1L_90° в процессе растяжения и поверхность разрушения центральной части образца (b).

3. Заключение

Результаты представленного исследования демонстрируют потенциал создания слоистых алюминиевых материалов с использованием технологии проволоочно-дугового аддитивного производства. Были изучены особенности деформирования композитов на основе алюминиевых сплавов AA1050 и AA5056. В качестве основы использовался конструкционный алюминиевый сплав AA5056, а менее прочный материал AA1050 вводился в объем композитного материала слоями толщиной 2.5 мм.

Было показано, что комбинация материалов с отличающейся в три раза прочностью на разрыв не приводит к падению прочностных характеристик композитного материала до уровня самого слабого звена. При этом добавление слоя малопрочного материала в деталь сложной формы позволит в локальных областях повысить пластичность и в случае достижения критических значений напряжений при эксплуатации направить возможную трещину в заданном направлении, что может гарантировать повышение эксплуатационных характеристик и общей безопасности сложного конструкционного изделия, изготовленного по технологии WAAM.

Результаты настоящего исследования могут способствовать разработке новых конструкционных решений и применению новых композитных материалов в различных отраслях, включая авиацию, аэрокосмическую промышленность и судостроение. Однако, для полного понимания возможностей данной технологии и оптимизации процесса производства, необходимо провести дополнительные исследования, включая определение оптимальных параметров процесса и анализ влияния различных факторов на механические свойства получаемых композитов.

Финансирование работы: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10043.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ding, D., Pan, Z., Cuiuri, D. et al. Wire-feed additive manufacturing of metal components: technologies, developments and future interests. *Int J Adv Manuf Technol* 81, 465–481 (2015).
2. Williams, S.W., Martina, F., Addison, A.C., Ding, J., Pardal, G., Colegrove, P.: Wire + Arc Additive Manufacturing. *Materials Science and Technology* 32(7), 641–647 (2015).
3. Gress, D.R., Kalafsky, R.V.: Geographies of production in 3D: Theoretical and research implications stemming from additive manufacturing. *Geoforum* 60, 43–52 (2015).
4. Evans, S.I.; Wang, J.; Qin, J.; He, Y.; Shepherd, P.; Ding, J. A review of WAAM for steel construction—Manufacturing, material and geometric properties, design, and future directions. *Structures* 2022, 44, 1506–1522.

Information about authors

Evstifeev A.D. – senior researcher, Saint Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, Saint Petersburg, Russia E-mail ad.evstifeev@gmail.com

Yakupov B.A. – post graduate student, Saint Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, Saint Petersburg, Russia E-mail b.yakupov@spbu.ru

Smirnov I.V. – senior researcher, Saint Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, Saint Petersburg, Russia E-mail i.v.smirnov@spbu.ru

Volosevich D.V. – senior researcher, State Marine Technical University, World-Class Research Center, Saint Petersburg, Russia E-mail dasha.volosevich@mail.ru

Voropaev A.A. – senior researcher, State Marine Technical University, World-Class Research Center, Saint Petersburg, Russia E-mail t-voropaev94@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТОЧЕЧНЫХ ДЕФЕКТОВ НА ДИСПЕРСИЮ И НЕЛИНЕЙНУЮ ПРОСТРАНСТВЕННУЮ ЛОКАЛИЗАЦИЮ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В МАТЕРИАЛАХ

Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Шекоян А.В.

В данной работе показано, что самосогласованная математическая модель, включающая в себя уравнения теории упругости и кинетические уравнения для плотностей различных типов точечных дефектов, может быть сведена к нелинейному эволюционному уравнению, объединяющему в себе известные уравнения волновой динамики: Кортевега–де Вриза–Бюргерса и Клейна–Гордона.

При воздействии на материал лазерного излучения или потока частиц (например, при ионной имплантации) в нем создаются точечные дефекты (вакансии, межузлия) [1]. Прохождение интенсивной продольной акустической волны способствует изменению в областях растяжения и сжатия энергии активации образования точечных дефектов, приводя к их пространственному перераспределению. Дефекты, мигрирующие по материалу, рекомбинируют на различного рода центрах. Роль таких центров могут играть дислокации, примеси внедрения и др.

Волновые эффекты в ансамблях дислокаций изучались в работах [2–5].

В [6] показано, что задачу о распространении акустической волны в материале с точечными дефектами следует рассматривать как самосогласованную, включающую в себя, наряду с динамическим уравнением теории упругости, кинетическое уравнение для плотности дефектов.

В [7] исследовано взаимодействие нелинейной волны деформации с полем концентрации точечных дефектов (вакансий, межузлий), приводящее как к рассеянию волны, так и к изменению энергии активации образования дефектов и их пространственному перераспределению.

При этом предполагалось, что основными процессами, определяющими поведение дефектов, являются процессы генерации, рекомбинации и диффузии. Объемная взаимная рекомбинация разноименных дефектов не учитывалась.

Учтем далее объемную взаимную рекомбинацию разноименных дефектов.

Самосогласованная задача, включающая в себя динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение для плотности дефектов, примет вид [2]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\beta_N}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\Omega_V}{\rho} \frac{\partial n_V}{\partial x} - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\Omega_i}{\rho} \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_V}{\partial t} = q_0 + q_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + D_V \frac{\partial^2 n_V}{\partial x^2} - \beta_V n_V - \beta_{iV} n_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = q_0 + q_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} + D_i \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} - \beta_i n_i - \beta_{Vi} n_V. \quad (3)$$

Здесь $U(x, t)$ – продольное перемещение частиц материала (волна считается плоской); $n_j(x, t)$ – объемная концентрация точечных дефектов ($j = V$ – для вакансий, $j = i$ – для межузлий); $c_i = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость, с которой распространялась бы продольная волна в материале, если бы в нем отсутствовали дефекты; λ, μ – константы Ламе; ρ – плотность материала; β_N – коэффициент нелинейности, $\beta_N = 3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C$; A, B, C – модули Ландау третьего порядка; Ω_j – дилатационный параметр, характеризующий изменение объема материала при образовании в нем одного точечного дефекта. Для вакансий $\Omega_j < 0$, для межузлий $\Omega_j > 0$. Через q_0 обозначен темп генерации точечных дефектов в отсутствие деформации; второе слагаемое в правой части (2) представляет собой деформационную

поправку в генерацию дефектов; D_j – коэффициент диффузии дефекта типа j ; β_j – скорость рекомбинации на стоках. Через β_{iV} и β_{Vi} обозначены скорости взаимной рекомбинации дефектов типа «межузлие-вакансия» и типа «вакансия-межузлие», соответственно.

Распространение гармонической волны в условиях отсутствия вынуждающей силы ($q_0 = 0$) описывается линейной системой. В отсутствие нелинейных слагаемых система (1)–(3) сводится к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(c_l^2 - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{q_\varepsilon \Omega_i}{\rho \beta_{iV}} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \\ & + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{\rho} \left(\Omega_V - \frac{\beta_V \Omega_i}{\beta_{iV}} \right) \frac{\partial n_V}{\partial x} - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\Omega_i}{\rho \beta_{iV}} \frac{\partial^2 n_V}{\partial x \partial t} + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\Omega_i D_V}{\rho \beta_{iV}} \frac{\partial^3 n_V}{\partial x^3} = 0, \\ & \frac{\partial^2 n_V}{\partial t^2} - (\beta_V D_i + \beta_i D_V) \frac{\partial^2 n_V}{\partial x^2} + (\beta_i + \beta_V) \frac{\partial n_V}{\partial t} - (D_V + D_i) \frac{\partial^3 n_V}{\partial x^2 \partial t} + D_i D_V \frac{\partial^4 n_V}{\partial x^4} + \\ & + q_\varepsilon (\beta_{iV} - \beta_i) \frac{\partial U}{\partial x} - q_\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + q_\varepsilon D_i \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + (\beta_i \beta_V - \beta_{iV} \beta_{Vi}) n_V = 0 \end{aligned}$$

В полученную систему дифференциальных уравнений подставляем решение в виде монохроматических волн с произвольными амплитудами U^0 , n_V^0 :

$$\begin{cases} U = U^0 \exp(i\omega t - ikx) \\ n_V = n_V^0 \exp(i\omega t - ikx) \end{cases}$$

где ω и k – частота и волновое число волны. Составляем определитель системы и приравниваем его нулю.

Дисперсионное уравнение в безразмерных переменных

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\beta_i + \beta_V}, \quad \bar{k} = \frac{k}{(\beta_i + \beta_V)/c_l}$$

($\bar{\omega}$, \bar{k} – безразмерные величины частоты и волнового числа, соответственно) получаем в следующем виде (черта опущена):

$$\begin{aligned} & \omega^4 + i \left[-a_7 (1 + a_2) (1 + a_3) k^2 \omega^3 - \omega^3 \right] - a_3 a_7^2 (1 + a_2)^2 k^4 \omega^2 - (1 + a_7 (a_2 + a_3)) k^2 \omega^2 - \\ & - \frac{(a_2 - a_4 a_5)}{(1 + a_2)^2} \omega^2 + i \left[a_7 (1 + a_2) (1 + a_3) k^4 \omega - \left(\frac{a_1 (1 + a_6)}{1 + a_2} - 1 \right) k^2 \omega \right] + a_3 a_7^2 (1 + a_2)^2 k^6 +, \quad (4) \\ & + a_7 (a_2 + a_3 - a_1 (a_3 + a_6)) k^4 + \frac{(a_2 - a_4 a_5 - a_1 (a_2 + a_6 - a_4 - a_5 a_6))}{(1 + a_2)^2} k^2 = 0 \end{aligned}$$

где безразмерные параметры имеют вид

$$a_1 = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{q_\varepsilon \Omega_V}{\rho c_l^2 \beta_V}, \quad a_2 = \frac{\beta_i}{\beta_V}, \quad a_3 = \frac{D_i}{D_V}, \quad a_4 = \frac{\beta_{iV}}{\beta_V}, \quad a_5 = \frac{\beta_{Vi}}{\beta_V}, \quad a_6 = \frac{\Omega_i}{\Omega_V}, \quad a_7 = \frac{\beta_V D_V}{c_l^2}.$$

В области низких частот фазовая скорость определяется выражением

$$v_{ph}^2 = 1 - a_1 + \frac{a_1(1-a_5)(a_4-a_6)}{a_2-a_4a_5}.$$

В предельных случаях, когда в материале имеет место только один тип точечных дефектов (либо вакансии, либо межузлия) уравнение (4) упрощается ($a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_6 = 0$).

Фазовая скорость на низких частотах близка к значению $v_0 = \sqrt{1-a_1}$.

Для исследования распространения нелинейных волн, считаем, что имеется только статическая деформация $U = U(x)$. Система уравнений (1)–(3) сведется к одному уравнению, описывающему динамику точечных дефектов:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 n_V}{\partial t^2} - (\beta_V D_i + \beta_i D_V) \frac{\partial^2 n_V}{\partial x^2} + (\beta_i + \beta_V) \frac{\partial n_V}{\partial t} - (D_i + D_V) \frac{\partial^3 n_V}{\partial x^2 \partial t} + D_i D_V \frac{\partial^4 n_V}{\partial x^4} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{q_\varepsilon \beta_N D_i}{\rho^3 c_l^6} \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)^2 \left(\frac{\Omega_i \beta_V}{\beta_{iV}} - \Omega_V \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (n_V^2) + (\beta_i \beta_V - \beta_{iV} \beta_{Vi}) n_V - \\ & - \frac{1}{2} \frac{q_\varepsilon \beta_N}{\rho^3 c_l^6} \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)^2 (\beta_i - \beta_{iV}) \left(\frac{\Omega_i \beta_V}{\beta_{iV}} - \Omega_V \right)^2 n_V^2 = (\beta_i - \beta_{iV}) \left(q_0 - \frac{2q_\varepsilon \rho c_l^2}{\beta_N} \right) \end{aligned}$$

Уравнение получено с учетом того, что скорости рекомбинации на стоках и скорости взаимной рекомбинации дефектов одного порядка.

Введем новые переменные: $\xi = x - ct$, $\eta = \tilde{\varepsilon}x$ и в первом приближении по малому параметру $\tilde{\varepsilon}$ получим эволюционное уравнение относительно n_0 :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial n_0}{\partial \eta} + a_1 n_0 \frac{\partial n_0}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial^2 n_0}{\partial \xi^2} + a_3 \frac{\partial^3 n_0}{\partial \xi^3} + a_4 n_0 \right) = a_5 n_0 + a_6 n_0^2 + a_0. \quad (5)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= - \frac{q_\varepsilon \beta_N D_i \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)^2 \left(\frac{\Omega_i \beta_V}{\beta_{iV}} - \Omega_V \right)^2}{2 \tilde{\varepsilon} \rho^3 c_l^6 (\beta_V D_i + \beta_i D_V)}, \quad a_2 = - \frac{D_i + D_V}{2 \tilde{\varepsilon} \sqrt{\beta_V D_i + \beta_i D_V}}, \\ a_3 &= - \frac{D_i D_V}{2 \tilde{\varepsilon} (\beta_V D_i + \beta_i D_V)}, \quad a_4 = \frac{\beta_i + \beta_V}{2 \tilde{\varepsilon} \sqrt{\beta_V D_i + \beta_i D_V}}, \quad a_5 = \frac{\beta_i \beta_V - \beta_{iV} \beta_{Vi}}{2 \tilde{\varepsilon} (\beta_V D_i + \beta_i D_V)}, \\ a_6 &= - \frac{q_\varepsilon \beta_N (\beta_i - \beta_{iV}) \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)^2 \left(\frac{\Omega_i \beta_V}{\beta_{iV}} - \Omega_V \right)^2}{4 \tilde{\varepsilon} \rho^3 c_l^6 (\beta_V D_i + \beta_i D_V)}, \quad a_0 = - \frac{(\beta_i - \beta_{iV}) \left(q_0 - \frac{2q_\varepsilon \rho c_l^2}{\beta_N} \right)}{2 \tilde{\varepsilon} (\beta_V D_i + \beta_i D_V)}. \end{aligned}$$

Заметим, что в уравнении (5) слагаемые с коэффициентами a_1 и a_6 обусловлены наличием нелинейности; слагаемые с коэффициентами a_2 и a_4 отвечают за диссипативные процессы; слагаемые же с коэффициентами a_3 и a_5 отвечают за дисперсионные процессы.

Если в системе рекомбинация дефектов и диффузионные процессы проявляются одинаково сильно, то в уравнении (5) нельзя пренебрегать слагаемыми, необходимо рассматривать уравнение целиком. Считаем, что вынуждающая сила отсутствует ($a_0 = 0$).

Если в рассматриваемой системе диффузия преобладает над рекомбинацией дефектов, то уравнение (5) преобразуется в уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса:

$$\frac{\partial n_0}{\partial \eta} + a_1 n_0 \frac{\partial n_0}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial^2 n_0}{\partial \xi^2} + a_3 \frac{\partial^3 n_0}{\partial \xi^3} = 0.$$

Если же, наоборот, в системе рекомбинация дефектов преобладает над диффузионными процессами, то эволюционное уравнение (5) преобразуется в уравнение Клейна–Гордона с диссипативными слагаемыми:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial n_0}{\partial \eta} + a_4 n_0 \right) = a_5 n_0 + a_6 n_0^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. Лазерное управление процессами в твердом теле // Успехи физических наук. 1996. 166, № 1. С. 3-32.
2. Ерофеев В.И. Самомодуляция акустической волны в твердом теле с дислокациями // Письма в Журнал технической физики. 2008. 34, № 4. С. 32-36.
3. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.
4. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В. Нелинейная стационарная акустическая волна в твердом теле с дислокациями // Журнал технической физики. 2010. 80, № 4. С. 149-151.
5. Сарафанов Г.Ф. Коллективные и волновые эффекты в ансамбле дислокаций при пластической деформации металлов. Н.Новгород: Литера, 2010. 359 с.
6. Мирзоев Ф.Х., Шелепин Л.А. Нелинейные волны деформации и плотности дефектов в металлических пластинах при воздействии внешних потоков энергии // Журнал технической физики. 2001. 71, № 8. С. 23-26.
7. Ерофеев В.И., Артамонова О.А. Влияние точечных дефектов в материале на распространение нелинейной акустической волны // Труды XXII Сессии Российского акустического общества и Научного совета по акустике РАН. М.: ГЕОС, 2010. 1, С.159.
8. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.

Сведения об авторах

Ерофеев Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия (+7831) 432 05 76
E-mail erof.vi@yandex.ru

Леонтьева Анна Викторовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия (+7831) 432 03 00
E-mail aleonav@mail.ru

Шекоян Ашот Вазгенович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики Национальной академии наук Армении, Ереван, Армения
E-mail ashotshak@mechins.sci.am

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛЮМОМАТРИЧНОГО КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО КАРБИДОМ ТИТАНА

Земцова Е.Г., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Смирнов И.В., Смирнов В.М.

Предложена оригинальная методика изготовления металломатричных нанокомпозитов, заключающаяся в нанесении методом молекулярного наслаивания на поверхность частиц алюминиевого порошка карбида титана толщиной 4-12 нм, перемешивании полученных дисперсных частиц с частицами металла, последующим прессовании, спекании полученной смеси и действию на полученные заготовки интенсивной пластической деформации методом кручения под высоким давлением, в результате которой не только снижалась пористость, обеспечивалось однородное распределение армирующих частиц по объему и происходило разрушение карбидных оболочек на поверхности дисперсных частиц, но и происходило измельчение частиц алюминия.

Построены экспериментальные кривые деформирования $\sigma - \varepsilon$ образцов из синтезированных композитов. Оценен возможный вклад различных механизмов упрочнения в итоговое упрочнение алюмоматричных композитов, проведено сравнение с экспериментально определенным упрочнением, на основании которого оценен размер зерна алюминия в матрице.

В синтезированных таким методом металлокомпозитах при малых долях объемного содержания армирующих частиц карбида титана (менее 0.5%) наблюдается практически двукратное упрочнение и трехкратный рост предела текучести при незначительном сокращении пластической деформации до разрушения.

1. Введение

Металломатричные композиты (ММК) с алюминиевой матрицей находят широкое применение благодаря их высоким эксплуатационным свойствам. Переход к армированию металлической матрицы от микрочастиц к наночастицам приводит к значительному улучшению механических свойств. Это, прежде всего, связано с тем, что по сравнению с микрочастицами наночастицы обладают большей способностью препятствовать движению дислокаций в металлической матрице и, следовательно, более эффективно повышать прочность композитов (упрочнение Орована, упрочнение, вызванное рассогласованием упругих модулей, несовпадением коэффициентов линейного расширения и т.п.). Кроме этого, внедренные наночастицы также могут привести к усилению эффектов упрочнения границ зерен и дислокаций матрицы, препятствовать инициации и распространению трещин внутри зерен или на границах раздела частица/матрица, что способствует улучшению пластичности композитов.

Существуют различные жидкофазные и твердотельные методы изготовления нанокомпозитов с алюминиевой матрицей, содержащих различные типы наночастиц, такие как литье с перемешиванием, ультразвуковое литье, селективное лазерное плавление, обработка трением с перемешиванием, накопительная прессовка, порошковая металлургия и др.. Несмотря на то, что нанокомпозиты, полученные с помощью этих процессов, могут показывать повышенную прочность по сравнению с неармированной алюминиевой матрицей, их прочность, по-прежнему, ограничена сложностью введения однородной дисперсии наночастиц с их высокой концентрацией, т.к. наночастицы более склонны к агрегации (слиянию) в металлических матрицах чем микрочастицы из-за их большей площади поверхности относительно объема, что становится существенной причиной при высоких объемных концентрациях армирующих наночастиц. Поэтому достижение однородной дисперсии армирующих наночастиц и препятствие их слиянию имеют ключевое значение.

Одним из способов достижения в ММК однородной дисперсии наночастиц является применение методов интенсивной пластической деформации деформаций (SPD)[1-2], в частности, равноканальное угловое прессование (ECAP), накопительная прокатка (ARB), кручение под высоким давлением (НРТ), которые приводят как к уменьшению пористости и равномерному диспергированию армирующих частиц, так и повышению прочностных свойств ([3-6]).

Авторами была предложена оригинальная методика изготовления металломатричных нанокомпозитов, заключающаяся в нанесении методом молекулярного наслаивания на поверхность частиц алюминиевого порошка карбидных структур толщиной порядка 4-12 нм, перемешивании полученных дисперсных частиц с частицами алюминия, последующим прессовании и спекании полученной смеси. После прессования и спекания полученные образцы подвергались действию интенсивной пластической деформации методом кручения под высоким давлением, в результате которой не только снижалась пористость, обеспечивалось однородное распределение армирующих частиц по объему и происходило разрушение карбидных оболочек на

поверхности дисперсных частиц, но и измельчались частицы алюминия. В результате при малых долях объемного содержания армирующих наночастиц карбида титана, методом молекулярного наслаивания нанесенных на частицы алюминия, наблюдается в синтезированном таким методом ММК большое упрочнение.

2. Методика создания алюмоматричного композита

В качестве исходного материала для изготовления металломатричного композита взят алюминиевый порошок АСП-50. После просеивания порошка через сито были выделены частицы, средний размер которых 100 мкм. Затем методом молекулярного наслаивания на поверхность алюминиевых частиц наносился послойно карбид титана с толщиной одного слоя порядка 4 нм.

Были получены дисперсные частицы Al@TiC с одним, двумя и тремя слоями нанесенного карбида кремния толщиной 4нм, 8нм, 12нм соответственно. Далее проводилась компактирование этих частиц с добавлением или без добавления дисперсного порошка алюминия, прессование, спекание и изготовление таблеток. Максимальное объемное содержание карбида титана в изготовленных таким образом таблеток не превышает 0.1%.

Полученные на этих этапах заготовки синтезируемого композита обладают высокой пористостью, для снижения которой применялось кручение (10 оборотов) под высоким давлением (6 ГПа). В результате наслоенное на алюминиевые частицы покрытие распадается на отдельные армирующие частицы карбида титана, размер которых зависит от интенсивности кручения, т.е. давления и числа оборотов.

Этим методом достигается не только равномерное распределение по объему армирующих частиц и уменьшается пористость [5-6], но и происходит измельчения частиц алюминия как за счет кручения под высоким давлением, так и дополнительно инициированное частицами карбида кремния.

Кроме того, армирующие наночастицы на границах зерен алюминиевой матрицы препятствуют их слиянию. Следует также отметить, что с ростом концентрации карбидных частиц уменьшаются размеры зерен алюминия, что приводит к упрочнению синтезируемого металлокомпозита. Существенное значение имеют как размер, так и концентрация армирующих частиц [5].

3. Моделирование упрочнения металломатричного композита на основе дисперсного алюминия с нанесенным на его поверхность карбида титана

На рис.1 приведены экспериментальные кривые деформирования $\sigma - \varepsilon$ для металломатричных композитов, синтезированных из стопроцентного дисперсного порошка алюминия с одним, двумя и тремя слоями нанесенного на него карбида кремния.

При сравнении кривых деформирования ($\sigma - \varepsilon$) для частиц с различной толщиной карбидного наслоения наблюдается зависимость упрочнения от числа слоев карбида, нанесенных на частицы алюминия.

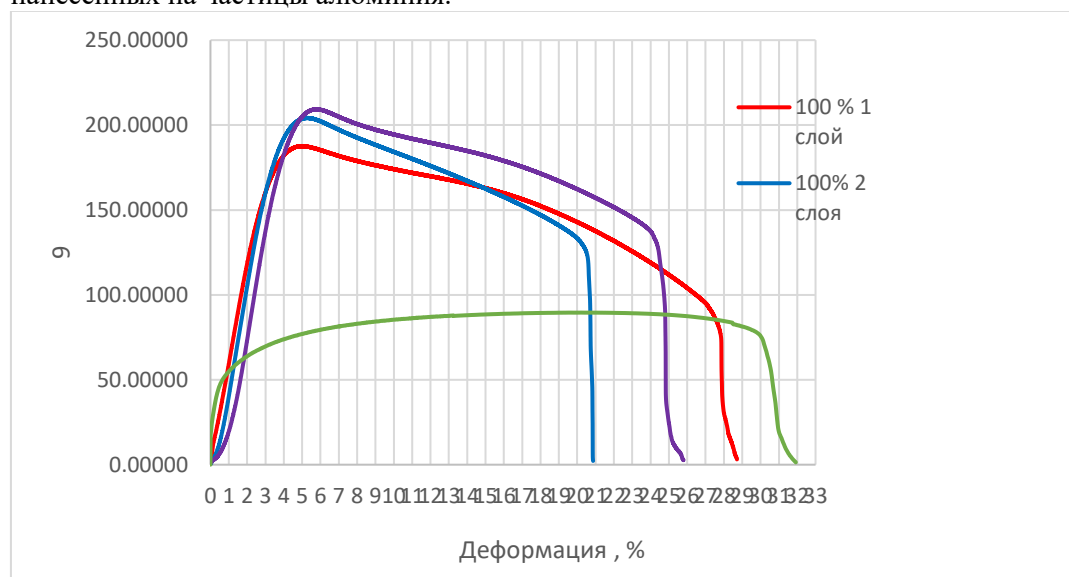


Рис. 1. Условные кривые деформирования $\sigma - \varepsilon$ для алюмоматричных композитов,

Несмотря на столь малую концентрацию армирующих частиц карбида титана все образцы демонстрируют двукратное увеличение предела прочности и более чем трехкратное увеличение условного предела пластичности $\sigma_{0.2}$ по сравнению с образцом из алюминиевого порошка без добавления дисперсных частиц, изготовленного предложенным методом. Заметим, что при стандартном армировании карбидными частицами при столь значительном упрочнении существенно уменьшается протяженность пластического деформирования, что не наблюдается на полученных в нашем случае кривых деформирования. На Рис.1 представлены кривые деформирования $\sigma - \varepsilon$ для алюмоматричных композитов, синтезированных из стопроцентного дисперсного порошка алюминия Al@TiC с одним, двумя и тремя слоями карбида титана.

По-видимому, это обусловлено малой концентрацией армирующих частиц карбида титана в композите и тем, что после кручения при высоком давлении карбидное покрытие на дисперсных частицах распадается на частицы, диаметр которых имеет порядок толщины покрытия.

Проведем теоретическую оценку вкладов механизмов упрочнения в итоговое упрочнение композита в предположении, что средние диаметры частиц карбида кремния после интенсивной пластической деформации равен толщине покрытия, т.е. 4 нм, 8 нм и 12 нм.

Так как объемная концентрация армирующих частиц менее 0,1%, упрочнением за счет перераспределения нагрузки и рассогласования коэффициентов температурного расширения матрицы и армирующего материала можно пренебречь [8].

Оценка вклада дисперсионного упрочнения может быть получена с помощью формулы Орована-Эшби [7]

$$\Delta\sigma_{Orow} = \frac{0.13G_m b}{d_p \left[\left(\frac{1}{2V_p} \right)^{1/3} - 1 \right]} \ln \left(\frac{d_p}{2b} \right), \lambda = d_p \left[\left(\frac{1}{2V_p} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad (1)$$

где $G_m = 30$ ГПа – модуль сдвига матрицы, $b = 0.3 \cdot 10^{-9}$ м вектор Бюргерса, V_p и d_p – объемная концентрация и диаметр армирующих частиц TiC соответственно.

Приращение упрочнения, вызванное геометрически необходимыми дислокациями, порожденными несоответствием упругих модулей матрицы и армирующих частиц

$$\Delta\sigma_{EM} = \alpha G_m b \sqrt{\frac{8V_p \varepsilon}{b d_p}} \quad (2)$$

где $\alpha - 1.25$ для алюминия равен [8].

При кручении под высоким давлением происходит измельчение зерен металла, сопровождающееся упрочнением материала по механизму Холла-Петча

$$\sigma_Y = \sigma_0 + \Delta\sigma_{H-P} = \sigma_0 + K \sqrt{\frac{1}{d_{Al}}} \quad (3)$$

где $\sigma_0 \approx 15$ МПа, а $K = 70$ МПа · мкм^{1/2} для алюминия, d_{Al} – диаметр зерна, σ_Y – предел текучести.

Заметим, что при деформировании мелкозернистых металлов, зная предел текучести металла после интенсивной пластической деформации, можно оценить средний размер зерна

$$d_{Al} = \left(\frac{K}{\sigma_Y - \sigma_0} \right)^2 \quad (4)$$

При наличии наноразмерных армирующих частиц следует учитывать их влияние на размер зерна матрицы при кручении под высоким давлением (Zener pinning).

Следуя [8],

$$\sigma_Y = \sigma_0 + \Delta\sigma_{H-P-Z} = \sigma_0 + K G_m \sqrt{\frac{3bV_p}{4d_p}} \quad (5)$$

где $\sigma_0 \approx 15$ МПа, $K = 0.05$, $G_m = 30$ ГПа, b – вектор Бюргерса, d_p – диаметр армирующей частицы, V_p – объемная концентрация частиц, $\Delta\sigma_{H-P-Z}$ – упрочнение Холла-Петча-Зенера.

Для оценки суммарного вклада от отдельных механизмов упрочнения воспользуемся аддитивной моделью [8]

$$\Delta\sigma_{cy} = \Delta\sigma_{H-P-Z} + \Delta\sigma_{Orow} + \Delta\sigma_{EM} \quad (6)$$

В таблице 1 для синтезированных металлокомпозитов из стопроцентного дисперсного порошка алюминия Al@TiC с одним, двумя и тремя слоями карбида титана приведены найденные из экспериментальных кривых предел прочности (столбец 3), предел текучести (столбец 4) и упрочнение (столбец 5), вклады механизмов упрочнения Орована (столбец 6), за счет несоответствия упругих модулей (столбец 7), упрочнение Холла-Петча-Зенера (столбец 8), разность между упрочнением $\Delta\sigma_y$ из экспериментальных кривых и суммарным упрочнением (7) (столбец 9), разность между упрочнением $\Delta\sigma_y$ из экспериментальных кривых и суммой упрочнений Орована $\Delta\sigma_{Orowan}$ и за счет несоответствия упругих модулей $\Delta\sigma_{EM}$ (столбец 10).

Значения, приведенные в столбце 9, дают основание полагать, что упрочнение Холла-Петча-Зенера не соответствует размеру зерен алюминия в синтезированном ММК. Это объясняется, прежде всего, тем, что не учитывается в полной мере измельчение зерна алюминиевой матрицы на этапе снижения пористости методом кручения под давлением при наличии армирующих частиц.

В столбце 11 приведен средний размер зерна алюминиевой матрицы, если предположить, что разность между $\Delta\sigma_y$ и $\Delta\sigma_{Orowan} + \Delta\sigma_{EM}$ соответствует упрочнению, вызванного измельчением частиц алюминия, и воспользоваться формулой (4) для определения диаметра частиц алюминия.

Таблица 1.

Процентное содержание Дисперсных частиц (масс)	Число слоев	Предел прочности МПа, экспериментальный	Предел пластичности МПа, σ_{02} экспериментальный	$\Delta\sigma_y = \sigma_y - \sigma_0$	$\Delta\sigma_{Orowan}$	$\Delta\sigma_{EM}$	$\Delta\sigma_{H-P-Z}$	$\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_{Orowan} - \Delta\sigma_{EM} - \Delta\sigma_{H-P-Z}$	$\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_{Orowan} - \Delta\sigma_{EM}$	Размер зерна нм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
100%	1	188	148	133	46	19	52,7	15,3	68	1060
	2	203	162	147	40	19	52,7	25,3	88	633
	3	209	168	153	36	19	52,7	45,3	98	510
0%		90	50							4000

4. Заключение

Предложен новый метод введения наноразмерных частиц карбида титана в алюминиевую матрицу посредством дисперсных частиц алюминия с нанесенным наноразмерным слоем карбида титана.

Применение метода интенсивной пластической деформации (кручение под высоким давлением) не только уменьшает пористость композита, но и существенно влияет на структуру матрицы.

Несмотря на довольно низкую концентрацию карбида титана в композите прочность повышается более чем в два раза.

Предложенная методика синтеза металломатричного композита с использованием на этапе снижения пористости кручения под давлением даже при малых долях армирующего материала (TiC) существенно повышает прочностные свойства металлокомпозита без снижения пластичности,

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда №20-11-20083

ЛИТЕРАТУРА

1. Vinogradov, A., Estrin, Y. Analytical and numerical approaches to modelling of severe plastic deformation. *Progress in Materials Science*, vol.95, 2018. doi.org/10.1016/j.pmatsci.2018.02.001
2. Glezer, A.M.; Sundeev, R.V. General view of severe plastic deformation in solid state. *Materials Letters*, vol.139, 2015. doi:10.1016/j.matlet.2014.10.052
3. Zhilyaev, A.P., McNelly, T.R. and Langdon, T.G. Evolution of microstructure and microtexture in fcc metals during high-pressure torsion. *Journal of Materials Science*, vol.42 (5), 2007. doi:10.1007/s10853-006-0628-0
4. M. Alizadeh, H.A. Beni, M. Ghaffari, R. Amini, Properties of high specific strength Al-4wt.% Al₂O₃/B₄C nano-composite produced by accumulative roll bonding process, *Mater. Des.*, vol..50, 2013. doi:10.1016/j.matdes.2013.03.018
5. Sabirov, I., Kolednik, O. & Pippan, R. Homogenization of metal matrix composites by high-pressure torsion. *Metall Mater Trans A*, vol.36, 2005. doi.org/10.1007/s11661-005-0281-2
6. Jorge M. Cubero-Sesin, Zenji Horita (2012). Mechanical Properties and Microstructures of Al-Fe Alloys Processed by High-Pressure Torsion. vol. 43(13), 2012. doi:10.1007/s11661-012-1341-z
7. Raj, Ritesh; Thakur, DG. Effect of particle size and volume fraction on the strengthening mechanisms of boron carbide reinforced aluminum metal matrix composites. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol.233, 2018. doi:10.1177/0954406218771997
8. Mirza, F.; Chen, D. (2015). A Unified Model for the Prediction of Yield Strength in Particulate-Reinforced Metal Matrix Nanocomposites. *Materials*, vol.8(8),2015. doi:10.3390/ma8085138

Сведения об авторах

Земцова Елена Георгиевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии (7 911 9421339)
E-mail ezimtsova@mail.ru

Морозов Никита Федорович – профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет (7 9219405031)
E-mail n.morozov@spbu.ru

Семенов Борис Николаевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет (7 921 9214965)
E-mail b.semenov@spbu.ru

Смирнов Владимир Михайлович - профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии (7 911 2729257)
E-mail yms11@yandex.ru

Смирнов Иван Валерьевич – старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет (79118271217)
E-mail i.v.smirnov@spbu.ru

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИВОДА ДЛЯ РАСКРЫТИЯ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КРУПНОГАБАРИТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Зимин В. Н., Крылов А. В., Шахвердов А. О.

Развитие информационных и транспортных космических систем потребует создания крупногабаритных конструкций. Особый класс таких космических конструкций образуют трансформируемые системы, схемы которых построены на автоматическом изменении конфигурации. Размеры трансформируемых космических систем в транспортном и развернутом рабочем состояниях, как правило, могут отличаться в десятки раз, при этом процедура развертывания таких систем происходит под воздействием силовых приводов. Наиболее рациональным силовым приводом, который может быть использован в трансформируемых космических конструкциях, является привод с активными элементами, выполненными из материала никелида титана с эффектом памяти формы, которые обладают возможностью генерации значительной силы, надежностью, компактностью, легким весом и низкой потребляемой мощностью. В практике создания крупногабаритных трансформируемых космических систем значительная роль отводится натурным экспериментам, для воссоздания которых в наземных условиях требуются дорогостоящие стенды. Поэтому математический эксперимент, использующий разрабатываемые расчетные модели с идентифицируемыми параметрами, является альтернативной возможностью проверки функциональной пригодности создаваемой крупногабаритной трансформируемой космической системы. Проведенные экспериментально-теоретические исследования активных элементов силового привода из материала никелида титана (проволоки диаметром 1,5 мм) подтвердили принципиальную возможность создания привода для раскрытия крупногабаритных трансформируемых космических конструкций.

Существуют материалы, обладающие эффектом памяти формы (ЭПФ). Поэтому перспективным направлением прикладных исследований в области применения материалов с ЭПФ является создание на их основе силовых термомеханических приводов для трансформируемых крупногабаритных космических конструкций [1-3], рис. 1.

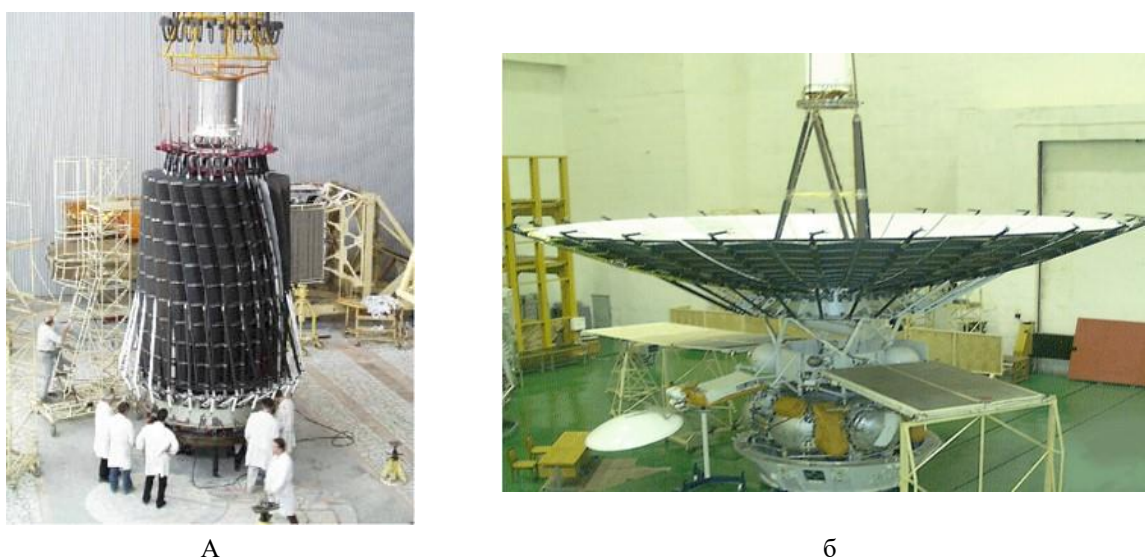


Рис. 1. Трансформируемая крупногабаритная космическая конструкция: а – в транспортном положении; б – в раскрытом рабочем состоянии

Материалы с ЭПФ обладают способностью к деформированию при низких температурах и к сохранению этих деформаций до тех пор, пока они не нагреты. Проволока из материала никелида титана – пример использования материалов с ЭПФ в качестве активного элемента силового привода [4]. Данный материал нашел самое широкое применение в машиностроении из-за своих физико-механических свойств, обеспечивающих его удачное применение на практике [5-7]. Для активных элементов силового привода управляющим воздействием может быть только температурное поле. Поэтому, как правило, проволоку нагревают за счет пропускания через неё электрического тока.

Так как управляющим воздействием на активный элемент из материала с ЭПФ силового привода является изменение его температуры, то в условиях космического пространства инициировать его срабатывание можно несколькими способами: как пропускаем через него электрического тока, так и радиационным нагревом (солнечным излучением) [8-9]. Процесс нагрева активных элементов можно описать с помощью уравнения теплового баланса на основе закона сохранения энергии.

В качестве первого приближения можно принять, что изменение энергии активного элемента силового привода из материала с ЭПФ равно теплу, поступившему за счет электрической энергии, за счет потока солнечного излучения, минус тепловые потери от излучения на орбите

$$cm \frac{dT}{dt} = RI^2 + A_r Q_c - \varepsilon \sigma_0 T^4 S, \quad (1)$$

где c – удельная теплоемкость; m – масса активного элемента; T – температура активного элемента; t – время; R – сопротивление активного элемента; I – сила тока; A_r – коэффициент поглощения солнечного излучения активным элементом; Q_c – тепловой поток солнечного излучения, падающего на активный элемент; ε – коэффициент излучения активного элемента (степень черноты); σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана; S – излучающая поверхность.

Плотность теплового потока q , падающего на единичную площадь поверхности активного элемента в виде проволоки радиусом r , можно определить следующим образом:

$$q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q_0 r \cos \varphi d\varphi = 2q_0 r,$$

где q_0 – плотность потока солнечного излучения на среднем расстоянии Земли от Солнца; φ – угол, отсчитываемый от нормали поверхности активного элемента, направленной на Солнце, рис. 2.

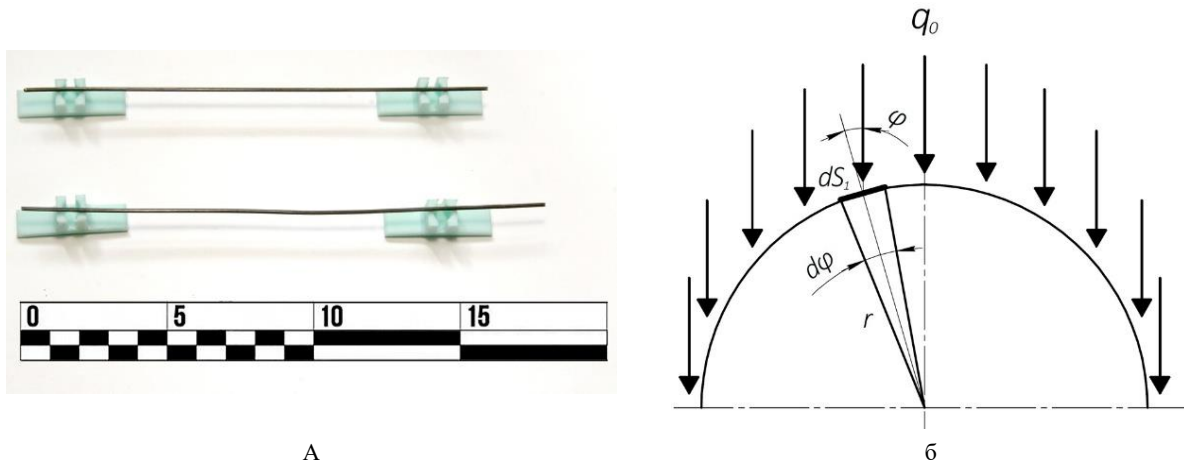


Рис. 2. Активные элементы из материала никелида титана с ЭПФ:

а – образцы активных элементов; б – схема расчета плотности потока солнечного излучения

Поток солнечного излучения, падающий на весь активный элемент длиной L , можно подсчитать по формуле $Q_c = qL = 2q_0 r L$.

В проведенном численном эксперименте изменение тепловой энергии активных элементов определялось как суммарным теплом, поступившем за счет электрической энергии и солнечного излучения, так и отдельно – либо электрической энергии, либо солнечного

излучения соответственно. Также при проведении расчетов были рассмотрены различные варианты тепловых потерь от излучения на орбите, в том числе и их полное отсутствие.

Таким образом, расчет нагрева активных элементов за счет электрической энергии без учета тепловых потерь от излучения на орбите проводился согласно следующей формуле:

$$cm \frac{dT}{dt} = RI^2.$$

При учете потерь

$$cm \frac{dT}{dt} = RI^2 - \varepsilon\sigma_0 T^4 S. \quad (2)$$

Расчет нагрева активных элементов за счет радиационного нагрева (солнечного излучения) без учета тепловых потерь от излучения на орбите осуществлялся по формуле

$$cm \frac{dT}{dt} = A_r Q_c.$$

При учете потерь

$$cm \frac{dT}{dt} = A_r Q_c - \varepsilon\sigma_0 T^4 S.$$

На рисунке 3 представлены результаты численного эксперимента с учетом различных вариантов исходной начальной температуры активного элемента силового привода. Изменение электрического сопротивления активного элемента существенно меняет динамику процесса его нагрева. Поэтому при расчетах учитывалось изменение сопротивления и теплоёмкости активных проволочных элементов.

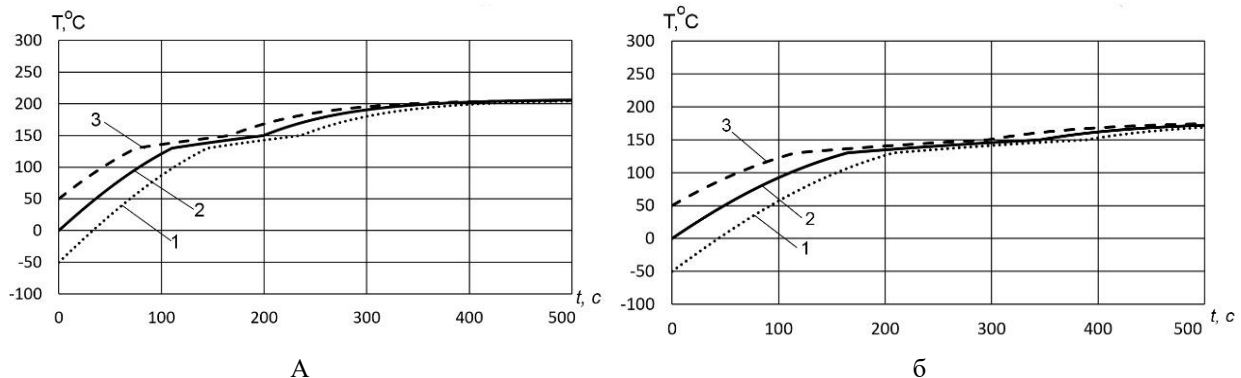
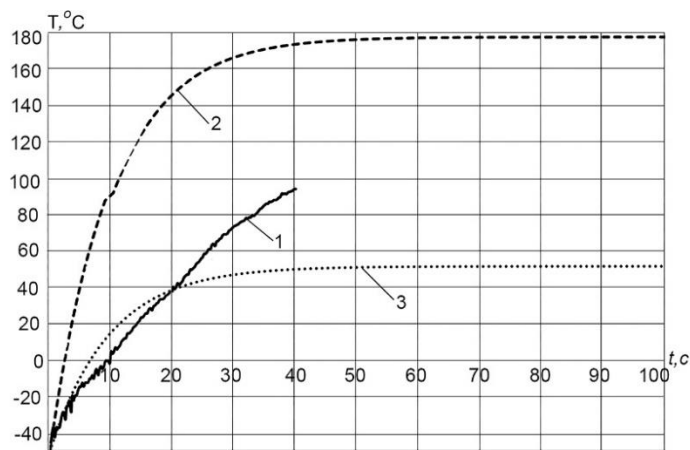


Рис. 3. Результаты расчетов: а – расчет нагрева электрическим током с потерями за счет радиационного излучения (формула (1)); б – расчет нагрева электрическим током и солнечным излучением с потерями за счет радиационного излучения (формула (2)); 1, 2, 3 – исходные начальные температуры активного элемента, равные: -50°C , 0°C , $+50^{\circ}\text{C}$

Дополнительно с расчетами, для уточнения влияния исходной начальной температуры, равной -50°C , активного элемента силового привода на его характеристики: изменение температуры активного элемента, рабочий ход (уменьшение относительного удлинения активного элемента) и время срабатывания, были проведены экспериментальные исследования нагрева электрическим током активных элементов в климатической камере, представленной на рисунке 4. В ходе проведённых испытаний при пропускании электрического тока силой, равной 15 ... 18 А, образцы активных элементов силового привода нагревались до температуры 80°C ... 100°C



А



б

Рис. 4. Испытания образцов активных элементов: а – климатическая камера; б – результаты испытаний и численных расчетов; 1 – при измерении датчиком; 2, 3 – при расчетных значениях тока I , равных 11 А и 17 А

Анализируя полученные результаты численных экспериментальных расчетов и исследований, можно сделать вывод, что время срабатывания силового привода существенно зависит от исходной начальной температуры активного элемента. Таким образом, для задания необходимого времени срабатывания силового привода нужно выбрать необходимое напряжение источника питания, подводимого к активному элементу. Однако длительное пропускание постоянного тока в случае отрицательной исходной начальной температуры активного элемента может привести к его разрушению в силу неравномерного нагрева.

Результаты проведенных расчетов показали, что тепловые потери, связанные с радиационным излучением активных элементов, вносят существенный вклад в изменение их температуры. При использовании в трансформируемой крупногабаритной космической конструкции в качестве основного управляющего воздействия протекание электрического тока через активные элементы силовых приводов, учет возможного дополнительного нагрева активных элементов за счет солнечного излучения приводит к уменьшению времени их срабатывания. Кроме того, в этом случае возможно уменьшить величину силы тока и, как следствие, требуемую электрическую мощность для раскрытия трансформируемой крупногабаритной космической конструкции из транспортного положения в рабочее состояние на орбите. Поэтому вариант нагрева активных элементов только за счет солнечного излучения можно рассматривать как дублирование управляющего воздействия при нештатной ситуации в условиях орбитального полета, связанной с невозможностью пропускания через активные элементы электрического тока.

Проведенные теоретико-экспериментальные исследования активных элементов приводов из материала никелида титана подтвердили принципиальную возможность создания приводов для раскрытия трансформируемых крупногабаритных космических конструкций.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (проект 0705-2023-0012).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (Часть 1) // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2007, № 2. С. 51-57.
2. Механика больших космических конструкций / Н.В. Баничук, И.И. Карпов, Д.М. Климов и др. М.: Изд-во «Факториал», 1997. 302 с.
3. Likhachev, V. A., Razov, A. I., Cherniavsky, A. G., Kravchenko, Y., & Trusov, S. N. (1994, March). Truss mounting in space by shape memory alloys. In Proceedings of the First International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, California, USA (pp. 245-248).
4. Schiedeck F., Hemsel T., Wallaschek J. The use of shape memory alloy wires in actuators // Solid state Phenomena, 2006. Vol. 113. Pp. 195-198.
5. Karla S., Bhattacharya B. & Munjal, B.S. (2017). Design of shape memory alloy actuated intelligent parabolic antenna for space applications. Smart Materials and Structures, 26(9), 095015.
6. Методика проектирования силовых приводов из материала с эффектом памяти формы для ракетно-космической техники / В. А. Барвинок, В. И. Богданович, А. А. Грошев и др. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2013. Т. 15. № 6. С. 272-277.
7. Liang, C. & Rogers, C.A. (1997). Design of shape memory alloy actuators. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 8(4), 303-313.
8. V.N Zimin, A.V Krylov, Kuvyrkin G.N, A O Shakhverdov. Development of a mathematical model of a force actuator for the opening of a space structure with transformable configuration // Journal of Physics: Conference Series 2231 (2022) 012029.
9. Riad, A., Ainamany, A. & Benzohra, M. (2017). The shape memory alloy actuator controlled by the Sun's radiation. Materials Research Express, (4(7), 075701.

Сведения об авторах

Зимин Владимир Николаевич – д.т.н., старший научн. сотр., заведующий кафедрой космических аппаратов и ракет-носителей МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, **e-mail:** zimin@bmstu.ru)

Крылов Алексей Владимирович – к.т.н., доцент кафедры космических аппаратов и ракет-носителей МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, **e-mail:** kav1982@bmstu.ru)

Шахвердов Артур Олегович – ассистент кафедры космических аппаратов и ракет-носителей МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, **e-mail:** shah@bmstu.ru)

ВЛИЯНИЕ МЕЖИОННОГО КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ДИНАМИКУ КОЛЕБАНИЙ ИОННЫХ КРИСТАЛЛОВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Зимин Б.А., Судьенков Ю.В., Ялыч Е.С.

Рассматриваются низкочастотные (акустические) колебания ионного кристалла при импульсном нагружении. Учитывая большой вклад кулоновской энергии в энергию связи для ионных кристаллов, динамические уравнения колебаний записываются с использованием Максвелловского тензора напряжений, который определяется вторым моментом $(E_i E_k)$ электромагнитного поля напряжений. Анализ уравнений Максвелла и уравнений Эйлера позволяют установить зависимость упругих модулей от среднеквадратической величины поля электромагнитных напряжений в ионных кристаллах. В начальный момент нагружения эта величина равна нулю, и мы получаем величину объемного модуля жидкости, что подтверждается экспериментом.

В работах [1, 2] были представлены исследования особенностей отклика твердых тел на воздействие наносекундных импульсов давления и обращалось внимание на релаксационные процессы вблизи поверхности воздействия.

В частности, отмечалась подобная жидкости мгновенная реакция щелочно-галогидных кристаллов на короткие импульсы давления.

На рис.1 представлены результаты измерений амплитуд импульсов продольных и поперечных волн при лазерном возбуждении импульсных давлений в ионных кристаллах NaCl. Приведены нормированная зависимость изменения амплитуды импульсов продольной волны от толщины образцов – σ_l и соответствующие этому нагружению амплитуды импульсов поперечной волны – σ_t .

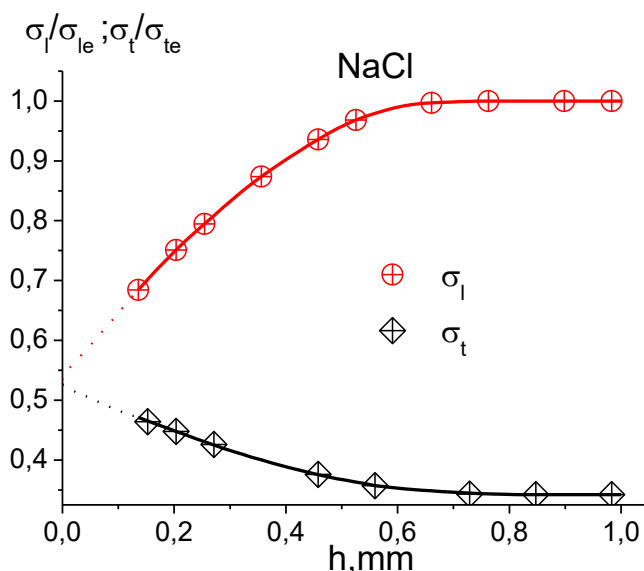


Рис. 1. Нормированная зависимость амплитуды $\sigma_l(h)$ и импульсов поперечной волны – $\sigma_t(h)$.

Такое изменение амплитуд импульсных напряжений возможно при условии, того, что мгновенный коэффициент Пуассона $\nu=1/2$ релаксирующий в дальнейшем к своему равновесному значению.

Обычно полагают, что эти кристаллы состоят из слегка искаженных локализованных ионов, взаимодействующих посредством электростатического поля [3].

Рассмотрим акустические колебания в ионных кристаллах полагая, что такая система является однородной, изотропной и описывается плотностью ρ , давлением P и массовой скоростью частиц \vec{V} .

В результате смещения иона из положения равновесия в таком кристалле возникает дипольный момент, порождающий кулоновское поле, состоящее из макроскопического поля и Лоренцевого поля [4]. При этом учет деформируемости и поляризуемости собственно ионов

требует другого подхода к вопросам динамики, так как эти параметры определяются электронной подсистемой и не могут быть включены в теорию колебаний решетки, исходя лишь из разложения решеточного потенциала только по смещениям ионов.

Поэтому при феноменологическом выводе уравнений движения компоненты макроскопического электрического поля E_i следует рассматривать как независимые динамические переменные.

В электродинамике сплошных сред, обычно рассматривают макроскопические величины усредняя соответствующие микроскопические. Поле E_i является случайной величиной, у которой первый момент равен нулю $\langle E_i \rangle = 0$.

Поэтому уравнения движения Эйлера должны включать Максвелловский тензор напряжений, который квадратичен относительно поля E_i и определяется тензором $\langle E_i, E_k \rangle$ [5].

Исходной системой уравнений для изучения движения сплошных сред являются уравнения Эйлера[5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \partial_k \sigma_{ik} = 0, \quad (2)$$

где $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Для тензора плотности потока импульса σ_{ik} запишем соотношение, учитывающее электрическую составляющую поля [5]

$$\sigma_{ik} = \rho V_i V_k + P \delta_{ik} - (\langle E_i E_k \rangle - \langle E^2 \rangle \delta_{ik} / 2) \frac{\varepsilon}{4\pi}, \quad (3)$$

P – давление, ε – диэлектрическая проницаемость.

В уравнении (3) присутствует тензор напряжений Максвелла, который определяется выражением:

$$\langle E_i E_k \rangle - \langle E^2 \rangle \delta_{ik} / 2.$$

Запишем уравнение Максвелла для E_i [6]:

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon} \text{rot}_i \vec{B} - 4\pi \sigma V_i, \quad (4)$$

где σ – плотность электрического заряда, \vec{B} – вектор индукции магнитного поля.

Для нахождения $E_i E_k$, умножим (4) на E_k и симметризуем произведение по индексам i, k (1,2,3).

Учитывая, что равновесное поле \vec{E} существует в неподвижной системе координат и поэтому инвариантно относительно преобразований Галилея [5]:

$$\vec{B}' = \vec{B} + [\vec{V}, \vec{E}] \frac{\varepsilon}{c}, \quad (5)$$

где квадратные скобки означают векторное произведение, можем записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_i E_k) = \frac{c}{\varepsilon} \text{rot}_i \left(\vec{B} + [\vec{V}, \vec{E}] \frac{\varepsilon}{c} \right) E_k + \frac{c}{\varepsilon} \text{rot}_k \left(\vec{B} + [\vec{V}, \vec{E}] \frac{\varepsilon}{c} \right) E_i - \frac{4\pi \sigma}{\varepsilon} (V_i E_k + V_k E_i) \quad (6)$$

После осреднения (6) [4], членами $-V_i E_k + V_k E_i$, можно пренебречь, ввиду их нелинейности. Рассматриваем среду, в которой магнитные поля $-\vec{B}$ малы по сравнению с электрическим $-\vec{E}$ и поэтому взаимодействием полей \vec{B} и \vec{E} пренебрегаем. Для изотропной среды [3]:

$$\langle E_i E_k \rangle = \langle E^2 \rangle \frac{\langle \delta_{ik} \rangle}{3} = \text{const} \quad (7)$$

С учетом этих комментариев и выражения (7) из (6) получим для адиабатического процесса линеаризованные уравнения для $\langle E_i E_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle E_1^2 \rangle &= -2(d_2 V_2 + d_3 V_3) \frac{\langle E_0^2 \rangle}{3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle E_2^2 \rangle &= -2(d_1 V_1 + d_3 V_3) \frac{\langle E_0^2 \rangle}{3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle E_3^2 \rangle &= -2(d_1 V_1 + d_2 V_2) \frac{\langle E_0^2 \rangle}{3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle E_1 E_2 \rangle &= -2(d_1 V_2 + d_2 V_1) \frac{\langle E_0^2 \rangle}{3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle E_1 E_3 \rangle &= -2(d_1 V_3 + d_3 V_1) \frac{\langle E_0^2 \rangle}{3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle E_2 E_3 \rangle &= -2(d_2 V_3 + d_3 V_2) \frac{\langle E_0^2 \rangle}{3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle E_i E_{k3} \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle E_k E_i \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

Распространение звука – адиабатический процесс и поэтому в (3) не учитывается тепловая составляющая.

Тогда запишем (2) с учетом (3) в виде:

$$\partial_t V_i + \partial_k [\delta_{ik} c^2 \rho - (\langle E_i E_k \rangle - \langle E^2 \rangle \delta_{ik} / 2) \frac{\varepsilon}{4\pi}] \frac{1}{\rho_0} = 0, \quad (9)$$

где $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$, ρ_0 – равновесная плотность.

Дифференцируя (9) по времени с учетом (8) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 V_1 - c^2 \partial_1 (\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3) - [\Delta^2 V_1 + \partial_1 (\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3)] \frac{\langle E_0^2 \rangle}{2\pi\rho_0} \\ \partial_t^2 V_2 - c^2 \partial_2 (\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3) - [\Delta^2 V_2 + \partial_2 (\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3)] \frac{\langle E_0^2 \rangle}{2\pi\rho_0} \\ \partial_t^2 V_3 - c^2 \partial_3 (\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3) - [\Delta^2 V_3 + \partial_3 (\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3)] \frac{\langle E_0^2 \rangle}{2\pi\rho_0} \end{aligned} \quad (10)$$

Ищем решение (10) в виде:

$$\bar{V}(\bar{x}, t) = \tilde{V}(k, \omega) e^{i\bar{k}\bar{x} - i\omega t} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) получим дисперсионные соотношения:

$$\omega^2 = \frac{\langle E_0^2 \rangle \varepsilon}{12\pi\rho_0} k^2 \quad (12)$$

$$\omega^2 = (c^2 + \frac{\langle E_0^2 \rangle \varepsilon}{6\pi\rho_0}) k^2 \quad (13)$$

Соотношение (12) получено для поперечных волн, а (13) для продольных волн.

Скорости поперечных – c_t и продольных – c_l волн равны:

$$c_t = \sqrt{\frac{\langle E_0^2 \rangle \varepsilon}{12\pi\rho}}, \quad c_l = \sqrt{c^2 + \frac{\langle E_0^2 \rangle \varepsilon}{6\pi\rho}} \quad (14)$$

При $\langle E_0^2 \rangle = 0$ скорость поперечной волны $c_t = 0$, и исходя из соотношений теории упругости следует, что коэффициент Пуассона $\nu = \frac{1}{2}$, то есть соответствует жидкости.

Таким образом представленная модель, учитывающая компоненты электрического поля при выводе уравнений движения, подтверждает экспериментальные результаты приведенные в [1, 2].

Предложено при выводе уравнений движения ионных кристаллов компоненты электрического поля рассматривать как независимые динамические переменные.

В уравнения состояния материала добавляется Максвелловский тензор напряжений. Показано, что поперечные моды колебаний в таких материалах определяются характеристиками самоуравновешенного электрического поля $\langle E_0^2 \rangle \epsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Судьенков Ю.В. Релаксация упругих постоянных алюминия вблизи поверхности ударного нагружения. Письма в ЖТФ, 1983, т. 9, вып. 23, С.1418-1422.
2. Байзаков О.Д., Судьенков Ю.В. Релаксационные явления в материалах вблизи поверхности упругого субмикросекундного нагружения // Письма в ЖТФ, 1985, т. 11. вып. 23. С. 1433-1437.
3. Н. Ашкрофт, Н. Мермин. Физика твердого тела, т. 2, Москва, изд. Мир, 1979.
4. Bonheville R. Phys.Rev., В 21, р.368, 1980.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, М. 1959, Гос. издат физ-мат. литер, с. 532.
6. И. Рязанов. Электродинамика конденсированного вещества, изд. Наука, 1984, 304 с.

Сведения об авторах

Зимин Борис Александрович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Балтийский государственный технический университет «Военмех»;

Судьенков Юрий Васильевич – доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, тел.: + 7 (812) 4284245, E-mail: y.sudenkov@yandex.ru ;

Ялыч Елизавета Сергеевна – ассистент, Балтийский государственный технический университет «Военмех».

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВТУЛКИ СО СЛОЖНЫМ ВНУТРЕННИМ ПРОФИЛЕМ И ТРУБЫ С ПОКРЫТИЕМ, НАДЕТОЙ НА ВАЛ

Кзаков К.Е., Паршин Д.А.

Данная работа посвящена формулировке и построению аналитического решения задачи о контакте жесткой втулки и цилиндрической вязкоупругой стареющей трубы с наружным тонким покрытием. На практике наличие дополнительных покрытий требуется, например, для защиты основной конструкции от агрессивных внешних или внутренних сред, для ее электро- и теплоизоляции и т.д. Втулка, надетая с натягом на двухслойную трубу, может иметь сложный профиль, который характеризуется быстро изменяющейся функцией. Учет сложного профиля особенностей важен при анализе напряженно-деформированного состояния труб. При помощи подхода, основанного на использовании специальных базисных функций и вида решения, получено представление для контактных напряжений в трубе в области ее взаимодействия с жесткой втулкой. Используемый подход позволяет выделить функции, описывающие форму внутреннего профиля втулки в виде отдельных слагаемых и множителей в выражении для контактных напряжений. Поэтому для достижения высокой точности при проведении расчетов достаточно ограничиться относительно небольшим числом членов ряда.

Различные участки труб соединяются или крепятся различными способами. Одним из способов соединения является использования ниппелей, которые вставляются в трубы, а затем на трубу одевают втулку, которую обжимают. При этом иногда соединяемые детали обмазывают клеем. В случае, когда муфта располагается на достаточном расстоянии от конца трубы (ниппель достаточно длинный, а обжим произвелся неширокой втулкой посередине ниппеля), а материал трубы значительно мягче материалов ниппеля и втулки, напряженно-деформированное состояние трубы можно найти из решения задачи о взаимодействии трубы насаженной на жесткий вал и обжатой жесткой втулкой. Следует отметить, что переменный внутренний профиль втулки будет влиять на напряженно-деформированное состояние трубы, поэтому учет этого фактора приводит к необходимости построения решения, которое позволит производить эффективные численные вычисления даже в том случае, профиль втулки описывается сложной функцией.

В предыдущих работах (см., например, [1–3]) были поставлены и решены аналогичные задачи о взаимодействии жестких штампов и плоских оснований с покрытиями. В работах [4, 5] были рассмотрены задачи о взаимодействии втулки и трубы с внешним покрытием. В этих задачах также предполагалось, что покрытия могут иметь неоднородность, а формы контактирующих поверхностей могут описываться сложными функциями. На основании этих решений, а также с использованием результатов работ [6–9], в которых была сформулирована и решена задача контакта цилиндрической вставки и трубы с однородным внутренним покрытием, будет построено решение задачи, поставленной в этой статье. Отметим, что большинство этих решений основано на обобщенном проекционном методе, предложенном А.В. Манжировым [10].

Длинная труба состоит из внутреннего вязкоупругого стареющего слоя и внешнего тонкого вязкоупругого слоя, изготовленного из материала с другими свойствами (см. рисунок). Между этими слоями осуществляется гладкий контакт. Вышеописанная труба надета на жесткий вал без трения и натяга.

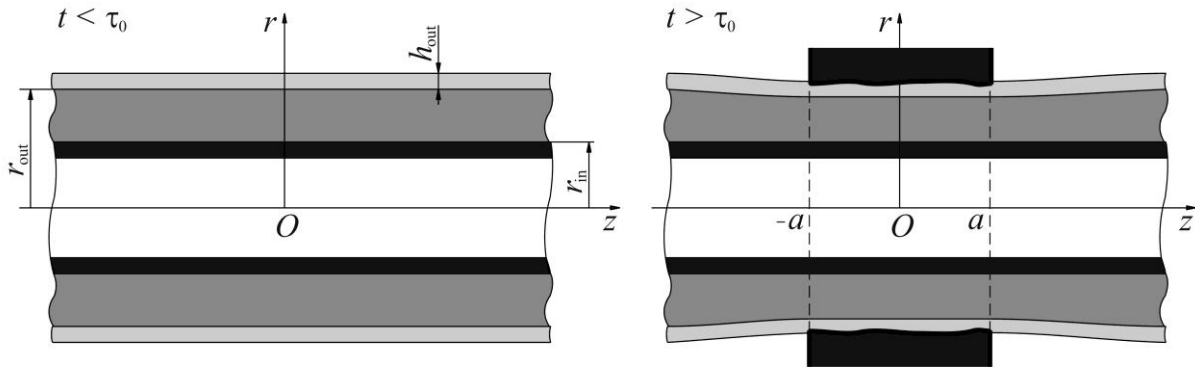
В определенный момент времени t_0 труба обжимается втулкой. Переменный внутренний радиус втулки меньше внешнего радиуса трубы. Из-за этого труба деформируется и в ней возникают напряжения. Поскольку внутренний слой трубы изготовлен из вязкоупругого стареющего материала, напряженно-деформированное состояние трубы меняется со временем. Предполагается, что между внутренним слоем и втулкой осуществляется гладкий контакт.

Необходимо определить распределение контактных напряжений в трубе в области взаимодействия со втулкой.

Сделаем следующие предположения:

1) толщина покрытия много меньше длины втулки, внутреннего радиуса трубы и толщины внутреннего слоя;

- 2) жесткость внешнего слоя меньше жесткости внутреннего слоя;
 3) коэффициент Пуассона внутреннего слоя постоянен, а его модуль Юнга изменяется во времени.



При построении математической модели задачи можно использовать результаты работ [7–9]. Обобщение результатов этих работ для случая, когда профиль втулки зависит от продольной координаты и выполняются указанные выше предположения, позволяет построить следующее смешанное интегральное уравнение, в котором неизвестной функцией является распределение контактных напряжений:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \nu_{\text{out}}^2) h_{\text{out}} \left[\frac{q(z, t)}{E_{\text{out}}(t - \tau_{\text{out}})} - \int_{\tau_0}^t K_{\text{out}}(t - \tau_{\text{out}}, \tau - \tau_{\text{out}}) \frac{q(z, \tau)}{E_{\text{out}}(\tau - \tau_{\text{out}})} d\tau \right] + \\
 & + \frac{2(1 - \nu_{\text{in}}^2)}{\pi} \left[\frac{1}{E_{\text{in}}(t - \tau_{\text{in}})} \int_{-a}^a k_{\text{cs}} \left(\frac{z - \zeta}{r_{\text{in}}} \right) q(\zeta, t) d\zeta - \right. \\
 & \left. - \int_{\tau_0}^t \frac{K_{\text{in}}(t - \tau_{\text{in}}, \tau - \tau_{\text{in}})}{E_{\text{in}}(\tau - \tau_{\text{in}})} \int_{-a}^a k_{\text{cs}} \left(\frac{z - \zeta}{r_{\text{in}}} \right) q(\zeta, \tau) d\zeta d\tau \right] = r_{\text{out}} + h_{\text{out}} - g(z), \quad z \in [-a, a], \quad t \geq \tau_0,
 \end{aligned} \quad (1)$$

В этом уравнении $q(z, t)$ — неизвестная функция, описывающая контактные напряжения, ν_{out} , $E_{\text{out}}(t)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга внешнего слоя (покрытия), h_{out} — толщина этого покрытия в недеформированном состоянии, ν_{in} , $E_{\text{in}}(t)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга внутреннего вязкоупругого стареющего слоя; $K_{\text{in}}(t, \tau)$, $K_{\text{out}}(t, \tau)$ — ядра ползучести слоев [10–12], τ_{in} , τ_{out} — моменты изготовления слоев ($\tau_{\text{in}} \leq \tau_0$, $\tau_{\text{out}} \leq \tau_0$), r_{in} — внутренний радиус внутреннего слоя в недеформированном состоянии, r_{out} — внешний радиус внутреннего слоя в недеформированном состоянии $g(z)$ — внутренний радиус жесткой втулки, $2a$ — длина втулки, равная длине области контакта, $k_{\text{cs}}(s)$ — известное ядро контактной задачи для цилиндрической трубы, надетой на жесткий вал [8]

$$k_{\text{cs}}(s) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(su) du,$$

где

$$L(u) = \frac{uD_1^2(u)}{S(u)}, \quad S(u) = k_r u^2 C_1^2(u) - f(k_r, u) D_1^2(u) - \frac{1}{k_r},$$

$$f(k_r, u) = \frac{2(1 - \nu_{\text{in}})}{r} + u^2 r, \quad k_r = \frac{r_{\text{out}}}{r_{\text{in}}},$$

$$C_1(u) = I_0(k_r u)K_1(u) + I_1(u)K_0(k_r u), \quad D_1(u) = I_1(u)K_1(k_r u) - I_1(k_r u)K_1(u).$$

В данных формулах $I_0(u)$, $I_1(u)$, $K_0(u)$, $K_1(u)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Следует отметить, что интегральное уравнение (1) содержит как операторы с переменными пределами интегрирования, так и с постоянными пределами интегрирования. Это уравнение также включает функцию, которая описывает и профиль втулки ($g(z)$). Она может быть быстро изменяющейся.

Сделаем замену переменных в уравнении (1) по формулам

$$z^* = \frac{z}{a}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{a}, \quad \tau_{in}^* = \frac{\tau_{in}}{\tau_0}, \quad \tau_{out}^* = \frac{\tau_{out}}{\tau_0}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad g^*(z^*) = \frac{g(z) - r_{out} - h_{out}}{a},$$

$$c^*(t^*) = \frac{(1 - \nu_{out}^2)h_{out}E_{in}(t - \tau_{in})}{2(1 - \nu_{in}^2)aE_{out}(t - \tau_{out})}, \quad q^*(z^*, t^*) = \frac{2(1 - \nu_{in}^2)q(z, t)}{E_{in}(t - \tau_{in})}, \quad k^*(z^*, \zeta^*) = \frac{1}{\pi}k_{cs}\left(\frac{z - \zeta}{r_{in}}\right),$$

$$\mathbf{V}_{in}^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K_{in}^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*, \quad \mathbf{V}_{out}^* f(t^*) = \int_1^{t^*} K_{out}^*(t^*, \tau^*) f(\tau^*) d\tau^*,$$

$$\mathbf{F}^* f(z^*) = \int_{-1}^1 k^*(z^*, \zeta^*) f(\zeta^*) d\zeta^*, \quad K_{in}^*(t^*, \tau^*) = K_{in}(t - \tau_{in}, \tau - \tau_{in})\tau_0,$$

$$K_{out}^*(t^*, \tau^*) = \frac{E_{out}(t - \tau_{out})E_{in}(\tau - \tau_{in})}{E_{out}(\tau - \tau_{out})E_{in}(t - \tau_{in})} K_{out}(t - \tau_{out}, \tau - \tau_{out})\tau_0.$$

В этом случае уравнение принимает безразмерный вид

$$c^*(t^*)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_{out}^*)q^*(z^*, t^*) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_{in}^*)\mathbf{F}^* q^*(z^*, t^*) = -g^*(z^*), \quad z^* \in [-1, 1], \quad t^* \geq 1. \quad (2)$$

В этом уравнении \mathbf{I} — тождественный оператор. Новая безразмерная функция $g^*(z^*)$ связана с формой втулки и может являться быстро изменяющейся. Таким образом, из полученного интегрального уравнения необходимо найти функцию $q^*(z^*, t^*)$.

Можно заметить, что полученное здесь уравнение (2) совпадает с уравнением (3) из работы [6] в случае, когда $m^*(z^*) = 1$ (указанная работа посвящена решению задачи о контакте жесткой вставки со сложной формой и трубы с внутренним покрытием переменной толщины). Поэтому при ее решении необходимо использовать аналогичный подход. Поскольку функции $L(u)$ для задачи из работы [6] и для решаемой задачи имеют одинаковые свойства и асимптотику, то свойства ядер в обеих задачах будут одинаковыми.

Не останавливаясь на математических выкладках, приведем только окончательное уравнение, позволяющее найти контактные напряжения:

$$q^*(z^*, t^*) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(t^*) \varphi_k(z^*) - \frac{g^*(z^*)}{c^*(t^*)}, \quad z^* \in [-1, 1], \quad t^* \geq 1, \quad (3)$$

где

$$\varphi_k(z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^{(k)} p_m(z^*),$$

$$f_k^*(t^*) = g_k \left\{ \frac{1}{c^*(t^*)[c^*(t^*) + \gamma_k]} + \int_1^t \frac{R_k(t^*, \tau^*) d\tau^*}{c^*(\tau^*)[c^*(\tau^*) + \gamma_k]} \right\},$$

$$g_k = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^{(k)} \sum_{l=0}^{\infty} R_{il} \int_{-1}^1 p_l(\zeta^*) g^*(\zeta^*) d\zeta^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$R_{il} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k^*(z^*, \zeta^*) p_i(z^*) p_l(\zeta^*) dz^* d\zeta^*, \quad i, l = 0, 1, 2, \dots,$$

ядра $R_k(t^*, \tau^*)$ — это резольвенты ядер $K_k(t^*, \tau^*) = [c^*(t^*)K_{out}^*(t^*, \tau^*) + \gamma_k K_{in}^*(t^*, \tau^*)] / [c^*(t^*) + \gamma_k]$.

Коэффициенты γ_k и $\psi_i^{(k)}$ являются собственными числами и компонентами собственных векторов оператора Фредгольма \mathbf{F}^* , соответственно. Они находятся из решения спектральной задачи

$$\sum_{l=0}^{\infty} R_{il} \psi_l^{(k)} = \gamma_k \psi_i^{(k)},$$

Так как $m^*(z^*) = 1$, то многочлены, построенные по формулам

$$p_j(z^*) = \frac{1}{\sqrt{d_{j-1} d_j}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_j \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z^* & \cdots & (z^*)^j \end{vmatrix}, \quad d_i = \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_i \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_i & J_{i+1} & \cdots & J_{2i} \end{vmatrix}, \quad J_i = \int_{-1}^1 (\zeta^*)^i d\zeta^*,$$

являются нормированными функциями многочленов Лежандра. Отметим, что они образуют ортонормированный базис в $L_2[-1, 1]$.

Полученное безразмерное уравнение (3) теперь можно привести к размерному виду. В результате мы получаем выражение для нахождения контактных давлений

$$q(z, t) = \frac{E_{in}(t - \tau_{in})}{2(1 - \nu_{in}^2)} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^*(t^*) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^{(k)} p_m(z^*) + \frac{E_{out}(t - \tau_{out})}{1 - \nu_{out}^2} \frac{r_{out} + h_{out} - g(z)}{h_{out}}, \quad (4)$$

$$z \in [-a, a], \quad t \geq \tau_0.$$

Таким образом, сформулирована и решена задача о взаимодействии вязкоупругой стареющей трубы с наружным вязкоупругим покрытием и жесткой втулкой сложной формы в случае, когда труба насажена без трения и натяга на жесткий недеформируемый вал. Получено аналитическое решение в рядах. Полученная формула (4) для контактных напряжений показывает, что функция, описывающая внутренний профиль втулки, представлена отдельным слагаемым. Это позволяет производить точные расчеты, даже когда она является быстро изменяющейся. В этом случае высокая точность достигается даже при относительно небольшом количестве членов ряда (порядка 20 слагаемых). Решения, полученные другими известными методами (без учета наличия в уравнении сложных функций), приводят к значительным ошибкам при численных расчетах.

Исследование выполнено по теме государственного задания (номер госрегистрации 123021700050-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Indentation of the regular system of punches into the foundation with rough coating // *Mechanics for Materials and Technologies. Advanced Structured Materials*. Vol. 46. Springer, 2017. P. 297–308.
2. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Contact problems for bodies with complex coatings // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43. No. 13. P. 7692–7705.
3. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Plane problems of multiple interactions of rigid punches and bodies with complex multilayer coatings // *Mathematical Methods in the Applied Sciences* [в печати].
4. Kazakov K.E. On the interaction of rigid bush and pipe with nonuniform coating // *AIP Conference Proceedings*. 2020. Vol. 2293. Art. No. 210012.
5. Kazakov K.E. Modeling of the interaction of cylindrical bodies with complex surface properties // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1745. Art. No. 012117.
6. Kazakov K.E. On accounting complex forms of surfaces in the task of interaction of a rigid insert and pipe with internal coating // *Procedia Structural Integrity*. 2022. Vol. 40. P. 201–206.
7. Манжиров А.В., Черныш В.А. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // *Известия Академии Наук СССР. Механика твердого тела*. 1988. №6. С. 112–118.
8. Черныш В.А. Контактные задачи теории ползучести для стареющих цилиндрических тел. Диссертация кандидата физико-математических наук. Институт проблем механики. 1999. 209 с.
9. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
10. Манжиров А.В. Смешанное интегральное уравнение механики и обобщенный проекционный метод его решения // *Доклады Академии наук*. 2016. № 4. С. 401–405.
11. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
12. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.

Сведения об авторах

Казakov Кирилл Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

Паршин Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

E-mail: parshin@ipmnet.ru

ЗАВИСИМОСТЬ ДЕФОРМАТИВНЫХ СВОЙСТВ И ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ЦЕМЕНТНОГО ВЯЖУЩЕГО ОТ КОЛИЧЕСТВА ДЕСОРБИРОВАННОЙ ВЛАГИ

Карапетян К.А.

В работе обсуждаются результаты исследования зависимости модуля упругости и прочности двух серий конструкционных цементных легких бетонов и цементогрунта от продолжительности процесса десорбции химически не связанной влаги, сохранившейся в их порах и капиллярах в течение длительного времени.

Показано, что при комментировании результатов исследований изменения механического поведения цементогрунтных элементов сооружений в зависимости от различных факторов целесообразно учесть фактор потери химически не связанной влаги на эти изменения, поскольку, в некоторых случаях, он может оказаться доминирующим среди других факторов.

Введение. В строительной практике для придания удобоукладываемости на стадии формовки изделий в сухую смесь цементных бетонов обычно вводится вода в количестве, существенно большем, чем это требуется для прохождения химических реакций образования цементного камня-матрицы бетонов [1]. Содержание влаги (свободной воды, т.е. воды, химически не связанной с твердой фазой) в бетонах находится в зависимости от атмосферных условий окружающей среды. При этом в первое время после возведения конструкций в среде с невысокой влажностью ($W \leq 75\%$, [2]) происходит процесс интенсивного влагоотделения (десорбция влаги), приводящего к ухудшению условий, необходимых для нормального твердения бетона, а также к уменьшению рабочей площади конструкционных элементов вследствие образования пустот (дефектов) в их порах и капиллярах, заполненных до этого свободной водой [1, 3]. Считается, что влияние только последнего фактора на деформативность и прочность конструкционных элементов из цементных бетонов в некоторых случаях может оказаться существенным [4]. Сказанное выше, как будет показано в настоящей работе, равным образом относится и к цементогрунту на основе белоземов карбонатного состава (БКС).

В данной работе рассматриваются результаты экспериментального исследования изменения модуля упругости и прочности элементов из конструкционных цементных легких бетонов и цементогрунта на основе БКС в зависимости от количества десорбированной свободной влаги.

Экспериментальная часть. Как известно, изменение во времени деформативных свойств и прочности строительных композитных материалов на основе цементного вяжущего обусловлены параллельно протекающими разными химическими и физическими явлениями. Для установления доли влияния определенного явления на эти изменения необходимо при экспериментировании, по возможности, исключить влияние других.

Сведения о зависимости сопротивляемости деформированию и разрушению элементов из композитов от продолжительности десорбционных процессов (потери влаги) можно получить и из экспериментов с использованием опытных образцов, хранившихся длительное время в гидроизолированном состоянии, и освобожденных от изоляции к моменту проведения соответствующих измерений [5, 6]. Сказанное было принято за основу при осуществлении экспериментальной части рассматриваемых здесь вопросов.

Для цементных легких бетонов были использованы цилиндры диаметром (d) 5,5 см. и высотой (h) 16,5...18 см., полученные способом выбуривания из исходных перлитобетонных (лиитоитпемзобетонных) и туфобетонных элементов. Исходные элементы сразу после расформовки гидроизолировались и в таком состоянии хранились в помещении лаборатории (более 5-и лет (63 мес.) – в случае перлитобетонных и 23 года – в случае туфобетонных исходных элементов). Был использован перлитобетон состава по массе 1:1,513:2,368 (цемент: песок: щебень), $V/C=0,88$ и туфобетон состава по массе 1:1,797:2,743, $V/C=1,43$, изготовленные на основе портландцемента и шлакопортландцемента активностью 38МПа и 40МПа соответственно.

В случае цементогрунта на основе БКС опытные цилиндрические образцы с $d=h=5,0$ см. (для определения прочности) и с $d=5,0$ см., $h=20,0$ см. (для определения модуля упругости), сразу после изготовления гидроизолировались и в таком состоянии хранились в лаборатории более трех лет (примерно 3 года и 2 месяца). Был использован цементогрунт на основе БКС состава

по массе 1:9 (цемент: белозем), В/Ц=1,79, изготовленный на основе портландцемента активностью 40МПа.

Испытания упомянутых выше всех опытных образцов и проведения соответствующих измерений осуществлялись сразу после удаления гидроизоляции (контрольные образцы) и периодически – после определенного срока их нахождения в лабораторном помещении.

По аналогичному методу были испытаны и кубические образцы с ребром 10см, изготовленные из упомянутого выше перлитобетона.

В период проведения экспериментов температура лабораторного помещения составляла 21...23±4°C, а относительная влажность – 64...65±7% (среда с невысокой влажностью).

Результаты и их обсуждение. Прежде чем перейти к рассмотрению данных измерений (они на рис. 1 показаны метками в сравнении с аппроксимирующими кривыми), проведенных при экспериментировании, отметим, что данные, касающиеся изменения деформативных свойств и прочности элементов из перлитобетона и туфобетона в зависимости от продолжительности процесса десорбции влаги, подробно обсуждались в работах [5] и [6]. В настоящей статье приводятся отдельные результаты этих работ с целью сравнения их с идентичными результатами, полученными при проведении аналогичных исследований с применением другого строительного композита на основе цементного вяжущего – цементогрунта на основе БКС, а также формулирования некоторых выводов.

Как замечаем из данных рис. 1, а, с момента нахождения в среде с невысокой влажностью начинается процесс десорбции влаги (потеря влаги) с начальной высокой (в течение первых 7 сут. наблюдения) и дальнейшей существенно убывающей переменной скоростью у рассматриваемых всех опытных образцов, изначально содержащих в порах и капиллярах химически не связанную влагу. Величина средней скорости потери влаги в течение 180 сут. с момента проведения наблюдений у перлитобетонных (кривая 1, рис.1, а) и туфобетонных (кривая 2, рис. 1, а) опытных образцов составляет примерно 0,028% /сут. и 0,039% /сут., соответственно. Значение этого показателя, определенного для цементогрунтных образцов в течение 120 сут. с начала проведения наблюдений составляет 0,04% /сут.

Проведенные измерения показали, что потеря влаги перлитобетонными и туфобетонными образцами вследствие десорбции влаги в течение 180 сут. составляла 5,1% и 7,0%, соответственно. Величина этого показателя для цементогрунтных образцов, подвергнутых влагоотделению в течение 120 сут, составляла 4,8%.

Для сравнения отметим, что, согласно данным проведенных измерений, в момент проведения экспериментов влажность перлитобетонных и туфобетонных опытных образцов составляла 9,6% и 10,6% соответственно, а цементогрунтных образцов – примерно 17,9%.

Обсудим результаты изучения изменения прочности элементов из конструкционных цементных легких бетонов и цементогрунта в зависимости от количества потери изначально содержащей химически не связанной влаги.

Как замечаем из полученных экспериментальных данных, представленных на рис.1, в метками, в течение первых 7 сут. прохождения десорбционных процессов изменение прочности как у перлитобетонных цилиндрических (кривая 1) и кубических (кривая 1'), так и у туфобетонных цилиндрических (кривая 2) образцов практически не наблюдается. Одновременно, как уже отмечалось, в период упомянутого промежутка времени фиксируется сравнительно высокая скорость удаления свободной влаги из бетонных опытных образцов (см. соответствующие данные на рис.1, а). По мере дальнейшего уменьшения в образцах количества содержащей свободной влаги имеет место уменьшение с начальной высокой (в течение от 7 сут. до 30 сут.) и дальнейшей существенно убывающей (в период времени от 30 сут. и до конца проведения наблюдений) скоростью прочности опытных образцов из цементных бетонов. Расчеты показывают, что величина средней скорости падения прочности в период проведения наблюдений у перлитобетонных цилиндрических и кубических образцов составляет примерно 0,055МПа/сут. и 0,033МПа/сут. соответственно, а у туфобетонных цилиндрических образцов – 0,037МПа/сут.

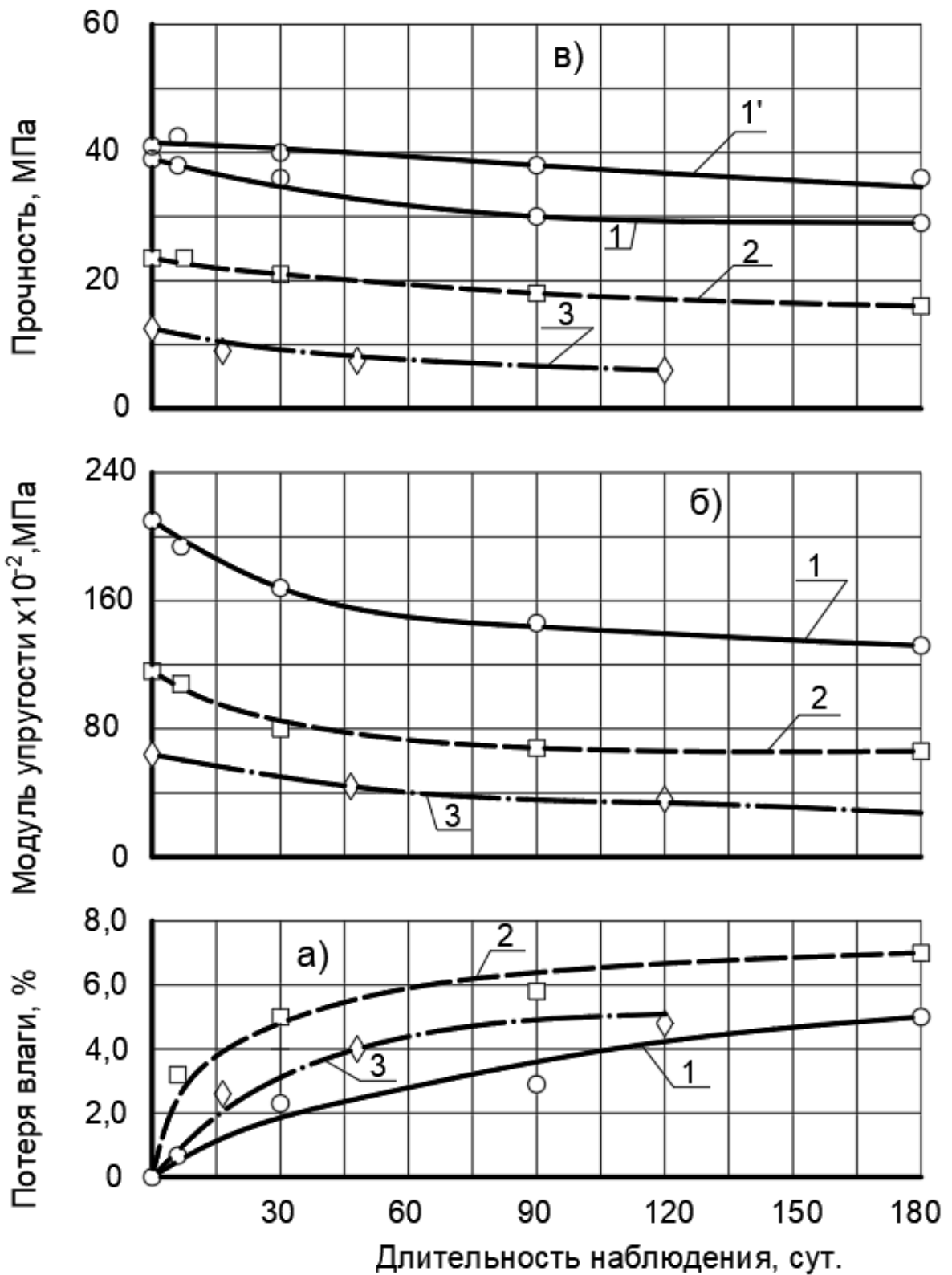


Рис.1 Кривые изменения во времени потери влаги (а), модуля упругости (б), прочности (в) перлитобетона (1), туфобетона (2) и цементогрунта (3).

В случае цементогрунта, в отличие от цементных бетонов, уменьшение во времени начальной высокой (в течение первых 16 сут.) и дальнейшей существенно убывающей (в период времени от 16 сут. до 120 сут.) скоростью прочности наблюдается с началом проведения измерений (см. кривую 3 на рис.1, в). Значение средней скорости падения прочности в период проведения наблюдений в этом случае составляет примерно 0,048МПа/сут.

Расчеты показывают, что величина спада прочности вследствие потери химически не связанной влаги в течение упомянутых выше промежутков времени по сравнению с ее начальным значением (определенным сразу после удаления гидроизоляции) составляет: у перлитобетонных цилиндрических и кубических образцов – более чем 25% и 14% соответственно, а у туфобетонных цилиндрических образцов – примерно 29%. Значение этого показателя, определенное для цементогрунта, составляет примерно 48%.

Наблюдаемое сравнительно большое уменьшение прочности перлитобетонных цилиндрических образцов по сравнению с кубическими можно объяснить, в основном, появлением, вследствие десорбции влаги, структурной неоднородности материала по высоте испытываемого цилиндрического образца [7].

Ниже рассматриваются результаты исследования зависимости модуля упругости цементных легких бетонов и цементогрунта от количества потери химически не связанной влаги вследствие прохождения десорбции влаги.

Из данных рис. 1, б следует, что с началом прохождения десорбционных процессов имеет место монотонное уменьшение с переменной во времени скоростью модуля упругости цементных бетонов и цементогрунта. Упомянутая скорость оказывается более высокой в начальный период прохождения процесса десорбции влаги из пор и капилляров этих строительных композитов (в течение первых 7 сут.), а в дальнейшем наблюдается постепенное ее уменьшение с переменной скоростью.

Средняя скорость падения модуля упругости в течение проведения исследования у перлитобетона и у туфобетона составляет $0,417 \times 10^2$ МПа/сут. и $0,283 \times 10^2$ МПа/сут., а у цементогрунта – $0,235 \times 10^2$ МПа/сут. Согласно проведенным расчетам, величина спада модуля упругости вследствие потери изначально содержащей химически не связанной влаги, происходящего в период проведения наблюдений, по сравнению с его исходным значением у перлитобетона и туфобетона составляет 35,7% и 43,6% соответственно, а у цементогрунта – 43,9%.

Таким образом, потеря химически несвязанной влаги конструкционными цементными легкими бетонами и цементогрунтом на основе белоземов карбонатного состава, вызревавшими длительное время в благоприятных для нарастания прочности условиях (в гидроизолированном состоянии) приводит к существенному уменьшению их прочности и способности сопротивляться деформированию. При этом способность сопротивляемости деформированию легких бетонов и цементогрунта оказывается более чувствительной к уменьшению начальной влажности, чем прочность.

Заключение. Как известно, при вызревании в среде с невысокой влажностью, после определенного упрочнения, имеющего место, обычно, в течение до 2-х лет, может наблюдаться спад прочности при сжатии цементных бетонов (такие результаты, полученные немногочисленными авторами, обобщены в работе [8]). Согласно данным работы [9], полученным в результате периодически проведенных экспериментов, величина прочности при сжатии конструкционных легких бетонов (перлитобетон, шлакобетон, туфобетон) через 10...23 года вызревания в упомянутой выше среде может оказаться на 17...20% ниже ее проектного значения (определяемое, обычно, в расчетном возрасте после выдержки в среде с влажностью $95 \pm 5\%$ и температурой $20 \pm 3^\circ\text{C}$ [10]). Наблюдаемый во времени спад прочности [8, 9], как и сопротивляемости деформированию [5, 6, 11] цементного бетона объясняется, в основном, ослаблением рабочей площади испытываемого объекта порами (дефектами), образующимися вследствие десорбции химически не связанной влаги из пор и капилляров.

Сравнительный анализ приведенных в данной работе экспериментальных данных указывает на то, что физический механизм влияния десорбции химически не связанной влаги на модуль упругости (определяемый, обычно, кратковременным испытанием изучаемого объекта) и прочность как цементных легких бетонов, так и цементогрунта на основе белоземов карбонатного состава носит практически один и тот же характер. Следовательно, при коммен-

тировании поведения сопротивляемости деформированию и разрушению цементогрунта в условиях кратковременного или длительно действующего силового, а также не силового (например, воздушно-влажностные условия окружающей среды) воздействий целесообразно учитывать упомянутый выше фактор, поскольку в некоторых случаях он может оказаться доминирующим среди других.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов М.З. Основы технологии легких бетонов. М.: Изд. лит. по строительству, 1973.584с.
2. Строительные нормы и правила. Часть II. Нормы проектирования. Глава 21. Бетонные и железобетонные конструкции. (СН и П 2.03.01-84*). М.: Стройиздат, 1998.77с.
3. Карапетян К.С. Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. //Докл. АН Арм. ССР.1957.Т.24.№4.С.145-152.
4. Басевич А.З. Массивные гидротехнические сооружения с искусственным обжатием бетона. Л.-М.: ГИЗ лит. по строительству и архитектуре, 1957. 199с.
5. Карапетян К.С., Карапетян К.А. Исследование изменения прочности, модуля деформации и степени анизотропии весьма старого туфобетона при сжатии вследствие водонасыщения и высыхания. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1981.Т.34.№4.С.29-51.
6. Карапетян К.А. Влияние десорбции химически несвязанной влаги на механические свойства бетона при кратковременных силовых воздействиях. //Изв. НАН Армении. Механика.2004.Т.57.№3.С.70-77.
7. Почтовик Г.Н., Буденков Г.А., Школьник И.Е. Исследование анизотропии и напряженного состояния бетона с помощью поперечных ультрозвуковых колебаний. //Сб. Тр. Моск. инж.-строит. инс-та. 1969.№64. С.9-24.
8. Френкель И.М. Использование роста прочности бетона во времени для экономии цемента. М.: ГИЗ.лит. по строительству и архитектуре. 1961.52с.
9. Karapetyan K.A., Kanetsyan H.H. On the change of Goncretes strength with time saved durng the decades of years in the environment with the moderate humidity. //17 Internationale Baustofftagung. 23-26 September. 2009. Weimar. Bundesrepublik Deutschland. Tagungsbericht, Band 2.P.2-0495-2-0495.
10. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам. ГОСТ 10180.М. Стандартиформ, 2006.30с.
11. Карапетян К.С. О закономерностях изменения прочности и деформативных свойств бетонов во времени в условиях различной влажности среды. //Докл. АН Арм. ССР. 1990.Т.90. №1. С.29-53.

Сведения об авторе:

Карапетян Корюн Ашотович – д.т.н., зав. Лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+37410)524852
Email: Koryun.a.karapetyan@gmail.com

О ЕСТЕСТВЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ И ВЫБОРЕ БАЗИСА В МЕТОДЕ РИТЦА

Каштанова С.В., Ржонницкий А.В.

В данной работе изучается вопрос об приемах для решения вариационной задачи методом Ритца, в частности об определении и влиянии естественных граничных условий в задаче о потере устойчивости тонкой пластины с эллиптической вставкой. Исследуется, следует ли учитывать естественные условия для свободного края и как это отражается на сходимости последовательных приближений к ответу задачи. Также в работе рассматривается вопрос о матричном подходе при расчете полной энергии и рассуждения о выборе базиса.

Для нахождения критической нагрузки, при которой случается потеря равновесия (выход из плоской формы) пластины с отверстием или вставкой при растяжении требуется решить вариационную задачу. И если в случае круга это удастся сделать без использования некоторых трюков, то в случае усложнения геометрии выреза или вставки, громоздкость вычислений значительно возрастает, а полученная точность вызывает сомнения. В данной работе изучается вопрос о приемах для решения вариационной задачи методом Ритца, в частности об определении и влиянии естественных граничных условий в задаче о потере устойчивости тонкой пластины с эллиптической вставкой. Исследуется, следует ли учитывать естественные условия для свободного края и как это отражается на сходимости последовательных приближений к ответу задачи. Также в работе рассматривается вопрос о матричном подходе при расчете полной энергии и приводятся рассуждения о выборе базиса.

Естественные граничные условия. Рассмотрим постановку задачи о потере устойчивости растягиваемой бесконечной тонкой пластины с впаянной (защемленной по краю) эллиптической вставкой той же толщины. В задаче со вставкой нужно учитывать, что операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} для пластины и для вставки отличаются напряжениями и изгибной жесткостью. Тогда основная система уравнений устойчивости будет выглядеть следующим образом (верхний индекс “ pl ” означает “plate” – «пластина», “ in ” от “inclusion” – «включение»):

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{pl} w^{pl} = \lambda \mathcal{B}^{pl} w^{pl} \\ \mathcal{A}^{in} w^{in} = \lambda \mathcal{B}^{in} w^{in} \end{cases} \quad (1)$$

со следующими граничными условиями (\bar{n} – внешняя нормаль к границе вставки):

$$(w^{pl} - w^{in})|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{n}}(w^{pl} - w^{in})|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

В такой постановке задача математической физики не равносильна вариационной постановке задачи, так как не хватает некоторых граничных условий.

На границе Γ

$$L_1^{in} w_{\min}^{in} - L_1^{pl} w_{\min}^{pl} = 0, \quad L_2^{in} w_{\min}^{in} + L_2^{pl} w_{\min}^{pl} = 0. \quad (3)$$

Два равенства (3) и есть естественные граничные условия для задачи со вставкой. Таким образом, для того чтобы постановка задачи математической физики была полной, к условиям (1) и (2) необходимо добавить условия (3).

В докладе приведены проверки для предельных случаев – абсолютно мягкой и абсолютно жесткой вставок. В случае абсолютно мягкой вставки получено, что естественным условием является свободный край, в случае абсолютно жесткой – естественные граничные условия отсутствуют. Прогиб пластины равен нулю как будто край прибит (жесткое защемление). Учет дополнительных условий (естественных граничных условий) позволяет при разложении решения в ряд построить такой базис, для которого ряд сходится быстрее.

Базис. Также в докладе обсуждается выбор базиса. При выборе базисных функций для прогиба необходимо руководствоваться следующими соображениями: 1) элементы базиса должны образовывать полную систему. Для проверки полноты полезной может оказаться теорема Мюнца [1]; 2) элементы базиса должны удовлетворять естественным граничным

условиям; 3) интегралы, выражающие работу и энергию, должны сходиться и при этом их вычисление должно быть как можно менее трудоемким. Если прогиб пластины с криволинейным вырезом (вставкой) ищется в виде

$$w = |\omega'|^k \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho^n} (A_{nm} \cos(m-1)\theta + B_{nm} \sin m\theta),$$

то для соблюдения последнего требования необходим оптимальный выбор степени k в сомножителе $|\omega'|^k$. Так, например, для пластины с эллиптическим вырезом (вставкой) в эллиптических координатах $|\omega'| = \sqrt{\det J}$. Тогда неприятности с вычислением интегралов возникают, если подынтегральные выражения содержат $|\omega'|$ в знаменателе, так как наличие знаменателя усложняет интегралы и $|\omega'|$ обращается в ноль при $\eta = 0$ и $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ – особенность на «кончиках трещины». В рассматриваемом случае удастся избавиться от особенности в знаменателе, выбрав степень $k = 3$. Убедиться в этом можно не только в ходе непосредственного вычисления функционала полной энергии, но и с помощью предварительных оценок. Например, для работы подынтегральное выражение (4)

$$W = \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (4)$$

с последующими упрощениями матричным методом и с учетом якобиана перехода к эллиптическим координатам можно оценить с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$\begin{aligned} (\text{grad } w) \frac{1}{(\det J)^2} (\det J \cdot \sigma_{sp} + \sigma_{dev} \cdot J^2) (\text{grad } w)^T \cdot \det J &\leq \\ &\leq \|\text{grad } w\| \cdot \left\| \frac{1}{\det J} (\det J \cdot \sigma_{sp} + \sigma_{dev} \cdot J^2) (\text{grad } w)^T \right\|. \end{aligned}$$

При этом, если $w \sim |\omega'|^3$, то совсем несложно показать, что $\|\text{grad } w\| \sim |\omega'|^2$. Далее линейный оператор $\det J \cdot \sigma_{sp}$ – это просто растяжение, а линейный оператор $\sigma_{dev} \cdot J^2$ – это композиция поворотов, зеркального отражения и растяжения. Повороты и отражение не меняют длины вектора, а согласно [28] растяжения $\sigma_{sp} \sim |\omega'|^{-1}$ и $\sigma_{dev} \sim |\omega'|^{-3}$. Получается окончательная оценка

$$\|\text{grad } w\| \cdot \left\| \frac{1}{\det J} (\det J \cdot \sigma_{sp} + \sigma_{dev} \cdot J^2) (\text{grad } w)^T \right\| \sim |\omega'|^2 \cdot |\omega'|^{-3} \cdot |\omega'|^2 = |\omega'|.$$

Получается, что подынтегральная функция обращается в ноль на «кончиках трещины» и тем более не может иметь в этих точках особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., Наука, 1964. с. 59
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
3. Каштанова С.В., Ржонсницкий А.В. О естественных граничных условиях в задаче о потере устойчивости пластины с эллиптической вставкой при растяжении. Механика машин, механизмов и материалов, №1 (62), 2023

Сведения об авторах

Каштанова Станислава Викторовна– к.ф.-м.н.; доцент СПбГТИ(ТУ) и СПбПУ им Петра Великого e-mail: kastasya@yandex.ru

Ржонсницкий Алексей Викторович– ст.преподаватель СПбГТИ(ТУ) и СПбАУ РАН им Ж.И.Алферова e-mail: rzhonsnitskiy@yandex.ru

ОСЦИЛЛЯЦИОННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Козлов В.Г., Власова О.А., Дьякова В.В.

Экспериментально исследуется динамика осциллирующей границы раздела двух маловязких несмешивающихся жидкостей различной плотности в вертикальном плоском канале. Столб жидкостей совершает гармонические вертикальные колебания малой амплитуды, граница раздела горизонтальна. Обнаружено, что осцилляционное движение жидкостей в канале приводит к пороговому возбуждению волн Фарадея на межфазной поверхности, которые совершают колебания с частотой вдвое меньшей частоты осцилляции границы. Изучение динамики границы раздела жидкостей проводится в широком диапазоне частот и амплитуд колебаний жидкости. Колебания границы исследовались методом скоростной видео-регистрации, структура генерируемых вблизи границы раздела осредненных потоков – PIV методом. Показано, что возбуждение параметрических колебаний приводит к генерации осредненных потоков вблизи границы, которые могут быть использованы для интенсификации массообменных процессов на межфазной границе.

Изучению динамики многофазных систем посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Интерес к данному направлению обусловлен широким распространением многофазных сред в природе и их широким использованием в современной технике, нефтехимических производствах, тепловой энергетике, водном хозяйстве и т.д. Понимание процессов, происходящих на границе раздела фаз, при различных способах воздействия на межфазную границу позволяет управлять ее поведением. Если жидкости отличаются плотностью, то на межфазной поверхности во внешнем силовом поле (в частности, в инерционном) развивается неустойчивость Релея-Тейлора [1, 2]. Ярким примером влияния осциллирующих силовых полей, связанных с вибрациями полости, на межфазную поверхность жидкостей разной плотности является возбуждение ряби Фарадея [3] – параметрических колебаний границы с частотой вдвое меньшей частоты воздействия. Актуальной проблемой является динамика несмешивающихся жидкостей, движущихся в пористой среде. Для моделирования течений жидкостей в пористых средах в лабораторных условиях используют ячейки Хеле-Шоу, в которых движение жидкостей определяется вязкими силами. В случае большого контраста вязкости жидкостей колебания межфазной границы в щелевом канале приводят к появлению осцилляционной пальчиковой неустойчивости [4], в основе которой лежит неустойчивость Саффмана-Тейлора.

В настоящей работе экспериментально изучается динамика осциллирующей границы раздела двух маловязких несмешивающихся жидкостей разной плотности в плоском вертикальном канале. Расход жидкостей, прокачиваемых в вертикальном направлении, изменяется по закону $Q = Q_0 \cos \Omega t$. Исследование динамики границы раздела жидкостей проводится в широком диапазоне частот и амплитуд колебаний межфазной границы. Эксперименты проводятся в канале шириной $L = 74.5$ мм с зазором $d = 2.3$ мм, заполненном парой несмешивающихся жидкостей так, что их граница раздела горизонтальна и находится в средней части канала. Щелевой канал включен в гидравлический контур, обеспечивающий гармоническое колебательное движение жидкостей в направлении перпендикулярном к межфазной поверхности. Подробное описание экспериментальной установки приведено в [5]. В качестве рабочих жидкостей выбраны флуоринерт FC-40 и силиконовое масло ПМС-0.65, относительная плотность которых составляет $\rho = 0.52$. Для визуализации течений, возникающих вблизи границы раздела жидкостей, в верхнюю легкую жидкость (ПМС-0.65) добавлены частицы визуализатора диаметром 40 мкм, которые в поле силы тяжести оседают и собираются вблизи межфазной границы.

Экспериментально обнаружено, что с увеличением амплитуды вертикальных колебаний границы раздела жидкостей наблюдается пороговое возбуждение параметрических колебаний

межфазной границы, которые происходят с частотой вдвое меньшей частоты колебаний жидкости в канале. На Рис. 1 приведены фотографии границы раздела и распределения частиц визуализатора вблизи границы в различных фазах, фрагменты *a*, *б* и *в* соответствуют фазам $\Omega t = 0, \pi, 2\pi$. Видно, что колебания границы происходят с периодом, вдвое превосходящим период осцилляций расхода прокачиваемой жидкости. Частицы визуализатора, находившиеся на межфазной границе, увлекаются потоками и (освещенные зеленым лазером) вырисовывают область осредненных вихревых потоков жидкости вблизи границы.

Следует отметить, что в экспериментах количество длин волн «подстраивается» под ширину канала. Увеличение амплитуды колебаний жидкости при фиксированной частоте приводит к росту амплитуды волны, длина волны при этом остается неизменной. С повышением частоты колебаний, длина стоячей волны уменьшается.

Обнаруженные параметрические колебания границы генерируют осредненные вихревые течения вблизи межфазной границы, форма которых незначительно изменяется в ходе колебаний (Рис.1). Размеры осредненных вихревых потоков сравнимы с длиной стоячей волны.

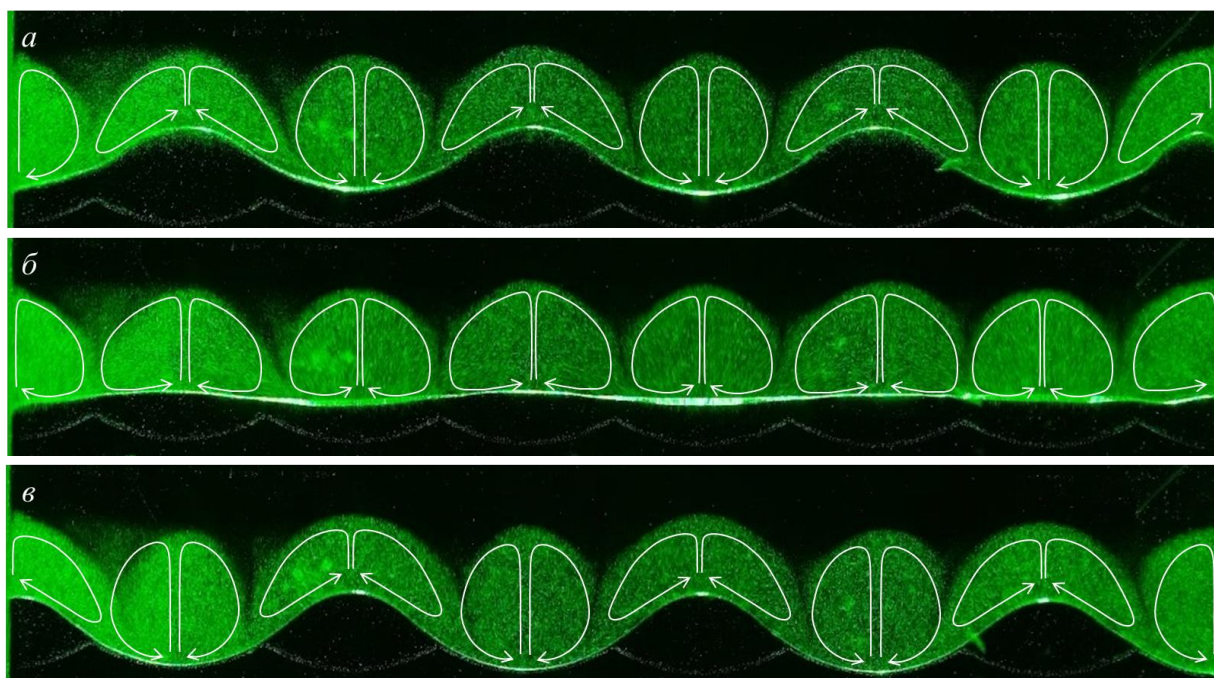


Рис. 1. Фотографии границы раздела при частоте колебаний жидкости $f = \Omega/2\pi = 10$ Гц в фазах $\Omega t = 0, \pi, 2\pi$ (*a* – *в*). Стрелками показано направление осредненных потоков жидкости

Исследование структуры осредненных потоков вблизи осциллирующей межфазной границы выполнено PIV методом. По результатам исследований сделан вывод, что осцилляционное возбуждение параметрических колебаний границы раздела может быть эффективным инструментом интенсификации массообменных процессов на межфазных границах.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект 23-11-00242.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh L. Scientific Papers II, 200, Cambridge, England, 1900. Proceedings of the Royal Society of London, SA, vol. 192, 1950.

2. Taylor G. I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. Proceedings of the Royal Society of London, SA, vol. 201, 1950.
3. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London, №. 3, 1837.
4. Kozlov V., Vlasova O. Oscillatory dynamics of immiscible liquids with high viscosity contrast in a rectangular Hele–Shaw channel. Physics of Fluids, vol. 34, 2022.
5. Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N. Finger instability of oscillating liquid–liquid interface in radial Hele-Shaw cell. Physics of Fluids, vol. 32, 2020.

Сведения об авторах

Козлов Виктор Геннадьевич – д.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, зав. лаб. Вибрационной гидромеханики, 8 (342) 215 19 47

E-mail kozlov@pspu.ru

Власова Ольга Андреевна – к.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, доцент кафедры физики и технологии, 8 (342) 215 19 47

E-mail vlasova_oa@pspu.ru

Дьякова Вероника Вадимовна – к.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, с.н.с. лаб. Вибрационной гидромеханики, 8 (342) 215 19 47

E-mail dyakova@pspu.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ С ВЫСОКИМ КОНТРАСТОМ ВЯЗКОСТЕЙ В НЕРАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

Козлов В.Г., Зимасова А.Р., Козлов Н.В.

Экспериментально исследуется влияние модуляции скорости вращения на форму границы раздела жидкостей разной плотности в быстро вращающемся горизонтальном цилиндре. Жидкости характеризуются высоким контрастом вязкостей, более вязкая жидкость имеет большую плотность и располагается вблизи боковой границы полости. Обнаружено, что модуляция скорости вращения приводит к потере устойчивости исходно осесимметричной границы раздела жидкостей. Неустойчивость проявляется в развитии пространственно-периодического рельефа на границе. Явление носит пороговый характер, критическая амплитуда модуляции скорости зависит от скорости вращения и частоты модуляции скорости. Показано, что возникновение «замороженного» рельефа связано с осцилляционной неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца и сопровождается генерацией интенсивных вихревых потоков вблизи межфазной границы. При этом тангенциальный разрыв скорости на границе определяется контрастом вязкостей жидкостей. Результаты исследований устойчивости и надкритической динамики межфазной границы обобщены в пространстве управляющих безразмерных комплексов.

Проблема управления массопереносом на границах раздела является одной из ключевых во многих химических и биологических технологических процессах. Примером является технология жидкостно-жидкостной экстракции, заключающаяся в переносе растворенного вещества через границу раздела двух несмешивающихся жидкостей, в одной из которых содержится селективный растворитель. Генерация потоков вблизи границы раздела является эффективным методом интенсификации процессов массопереноса. Одним из методов является вибрационное возбуждение осредненных потоков вблизи межфазной границы [1, 2].

В [3] изучена динамика границы раздела жидкостей с высоким контрастом вязкости, заполняющих вертикальный щелевой зазор (ячейку Хеле-Шоу) с круговой границей, совершающей неравномерное вращение вокруг своей оси (либрации) по закону $\Omega = 2\pi f_{rot}(1 + \varepsilon \cos(2\pi f_{lib}t))$. В работе экспериментально и теоретически исследованы равновесная форма и устойчивость межфазной границы. В отсутствие либраций под действием центробежной силы граница имеет осесимметричную форму. Обнаружено, что при либрациях, при определенных соотношениях частот, граница теряет свое осесимметричное положение: в системе отсчета полости она смещается в радиальном направлении. Другой эффект проявляется в том, что с увеличением амплитуды модуляции круговая граница раздела пороговым образом теряет устойчивость: на границе возникает азимутально периодический рельеф. Это связано с осцилляционной неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца, обусловленной тангенциальными колебаниями менее вязкой жидкости вблизи границы раздела с более вязкой.

Данная работа посвящена исследованию устойчивости границы раздела двух жидкостей с высоким контрастом вязкостей в неравномерно вращающемся длинном горизонтальном цилиндре. При этом вязкая жидкость взаимодействует не с границами щелевой полости, а с боковой цилиндрической границей. В качестве жидкостей используются глицерин, подкрашенный родамином, вязкостью $\nu = 823$ сСт, плотностью $\rho = 1262$ кг/м³, и масло АК 0.65 вязкостью $\nu = 1.02$ сСт, плотностью $\rho = 762$ кг/м³. Динамика границы раздела в различных по длине полости поперечных сечениях исследуется методом скоростной видео-регистрации. Съемка границы раздела осуществляется через прозрачную торцевую границу полости с помощью скоростной камеры, установленной соосно с осью вращения кюветы. Лазерный нож (зеленого цвета) рассекает полость перпендикулярно оси вращения. Эксперименты проводятся в центрифугированном состоянии системы, при этом вязкая жидкость, расположенная у стенки полости в виде коаксиального слоя, совершает вращение вместе с кюветой. В отсутствии модуляции скорости граница раздела жидкостей имеет круговую форму (Рис. 1а). Обнаружено, что с повышением амплитуды модуляции скорости вращения ε граница раздела теряет устойчивость, на ней развивается квазистационарный рельеф с азимутальной периодичностью (Рис.1б), который, в свою очередь, возбуждает интенсивное осредненное вихревое движение вблизи границы.

Показано, что возникновение «замороженного» рельефа на межфазной границе связано с развитием осцилляционной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Результаты экспериментов анализируются в пространстве безразмерных параметров.

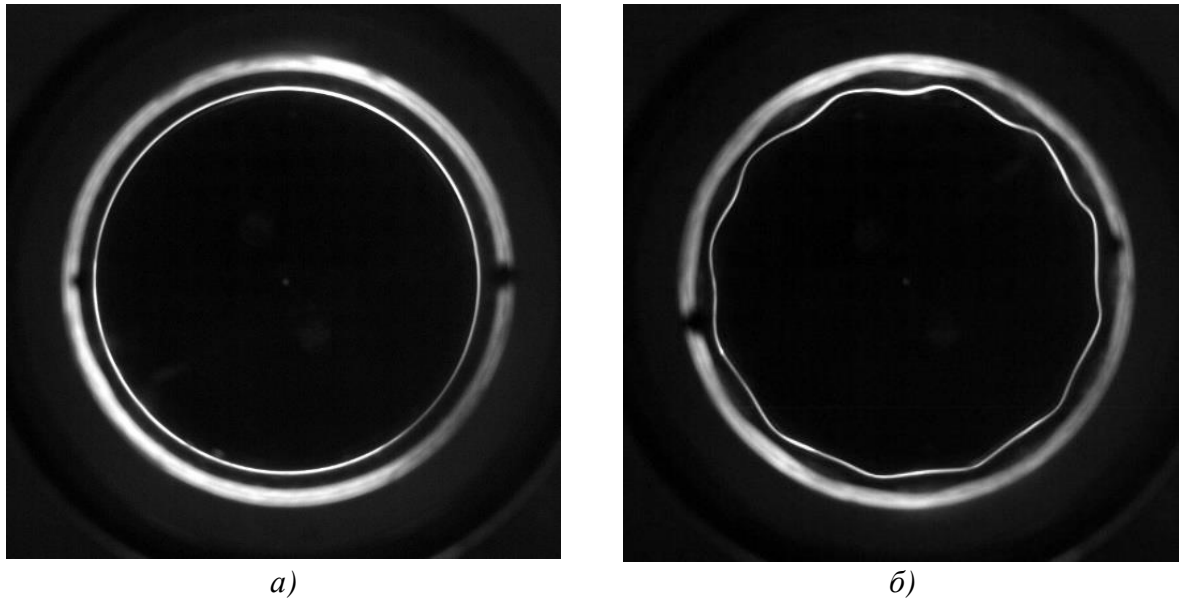


Рисунок 1. Граница раздела при модуляции скорости вращения при $f_{rot} = 3$ об/с, $f_{vib} = 4$ Гц:
 а) $\varepsilon = 0$; б) $\varepsilon = 0.55$

Исследование структуры осредненных потоков вблизи межфазной границы выполнено методом анемометрии по изображениям частиц (PIV). По результатам исследований сделан вывод, что вибрационное возбуждение «замороженного» рельефа может служить эффективным инструментом интенсификации массообменных процессов на межфазных границах.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект 23-11-00242.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozlov V.G., Kozlov N.V., Schipitsyn V.D. Steady flows in an oscillating deformable container: effect of the dimensionless frequency. *Phys. Rev. Fluids*. 2017. Vol. 2. P. 094501
2. Kozlov N. Vibrational Heat Transfer Intensification in an Annulus with a Deformable Boundary. *Shock and Vibration*, Vol. 2019, 9108795.
3. Kozlov V, Petukhova M, Kozlov N. Dynamics of liquids with high viscosity contrast in unevenly rotating Hele-Shaw cell. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2023, 20220082.

Сведения об авторах

Козлов Виктор Геннадьевич – д.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, зав. лаб. Вибрационной гидромеханики, 8 (342) 215 19 47

E-mail kozlov@pspu.ru

Зимасова Алсу Ринатовна – магистрант, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, 8 (342) 215 19 47

E-mail zimalsu@gmail.com

Козлов Николай Викторович – к.ф.-м.н., Институт Механики Сплошных Сред УрО РАН, с.н.с., лаб. Гидродинамической устойчивости

E-mail kozlov.n@icmm.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ СИСТЕМЫ Ni/ГРАФЕН С ПОМОЩЬЮ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Крылова К.А., Мурзаев Р.Т., Баймова Ю.А.

В работе исследуются прочность и теплопроводность композитов Ni/графен, полученных методом высокотемпературного сжатия. Сочетание двух разнородных материалов в одной системе приводит к возникновению новых материалов, обладающих уникальным сочетанием механических и тепловых свойств. Показано, что изменение содержания никеля в структуре композита позволяет создавать материалы с необходимыми механическими и тепловыми свойствами. Увеличение объемной доли атомов Ni с одной стороны увеличивает теплопроводность, а с другой – уменьшает прочность. Первое связано с наличием проводящего металла, а второе определяется графеновой сеткой. Полученные результаты открывают возможность использования композитов системы Ni/графен для производства новых суперконденсаторов, гибкой электроники и аккумуляторных батарей.

1. Введение

Композиты графен/металл являются активно развивающейся областью композитных технологий, поскольку такие материалы могут демонстрировать улучшенные свойства. Основным компонентом этих композитов является графен, который имеет небольшой вес, но при этом обладает высокой прочностью, сверхгибкостью и высокой электро- и теплопроводностью [1, 2]. Комбинируя эти уникальные свойства графена и обычных металлов, можно получить композитные материалы с особыми свойствами, необходимыми для технологий будущего.

Экспериментально и теоретически показано, что никель, армированный графеном, обладает высокой прочностью при этом его пластичность не снижается [3]. Также в работе [4] установлено, что введение даже одного слоя графена в металлическую матрицу Ni или Cu значительно увеличивает коэффициент теплопроводности. Высокотемпературное сжатие для получения композитных материалов с графеновой матрицей вместо металлической матрицы может привести к созданию новых материалов, сочетающих необычные механические и тепловые свойства. В связи с этим создание композитов Ni/графен и исследование их свойств имеют большое прикладное значение для развития промышленности будущего.

В настоящей работе методом молекулярно-динамического моделирования с помощью программы LAMMPS исследованы прочность и теплопроводность композитов системы Ni/графен с разным количеством атомов никеля.

2. Методика исследований

Механические и тепловые свойства композита Ni/графен оцениваются методом молекулярно-динамического моделирования с использованием программного кода LAMMPS. Композит создается из единичных структурных элементов - графеновых чешуек, заполненных наночастицами Ni. В работе рассмотрены три содержания Ni в графеновой матрице - 7,7; 15,7 и 23,6 ат. % Ni (далее такие композиты для удобства обозначены: 8Ni/CG, 16Ni/CG, 24Ni/CG соответственно). Для формирования прочного монолитного композита Ni/графен применяется высокотемпературное гидростатическое сжатие при 1000 К. Данный метод получения композитов Ni/графен, Cu/графен и Al/графен ранее был разработан и подробно описан в работах [5, 6]. Структура композита Ni/графен после гидростатического сжатия, показана на рис.1 (а).

После создания композита, структура подвергалась релаксации до достижения термодинамического равновесия. Сначала композиты уравнивались в NPT ансамбля при каждой изучаемой температуре в течение 1 пс до достижения нулевых давлений в системе. Затем проводилась термализация структуры с помощью ансамбля NVE в течение 1 пс для достижения постоянной температуры в системе (300 К). Уравнения движения атомов интегрируются методом Верле четвертого порядка с шагом по времени 0,2 фс. Периодические граничные условия применяются по трем осям x , y и z .

Исследование механических свойств проводилось при одноосном растяжении композита, показанного на рис. 1 (а), с использованием динамического деформирования, когда нагрузка прикладывается непрерывно с постоянной скоростью.

Структура композита для измерения коэффициента теплопроводности была увеличена воль оси x в 4 раза (см. рис. 1 (б)), для достижения более точных результатов измерения. Данная

структура разбивалась на 20 одинаковых областей шириной 10 Å. Шестая область (красная область на рис. 1 (а)) являлась источником тепла, а пятнадцатая область (синяя область на рис. 1 (б)) – стоком тепла. За счет разницы температур «горячей» и «холодной» области возникает тепловой поток по длине структуры. Температура этих областей была на 10 % выше или ниже от температуры всей системы.

Взаимодействия между атомами Ni-Ni, C-C и Ni-C описываются потенциалами межатомного взаимодействия EAM (метод погруженного атома) [7], AIREBO [8] и Морзе (параметры потенциала получены в результате *ab initio* расчетов) [9] соответственно. Данные потенциалы хорошо протестированы и использовались для моделирования как физических, так и механических свойств подобных материалов [5,6].

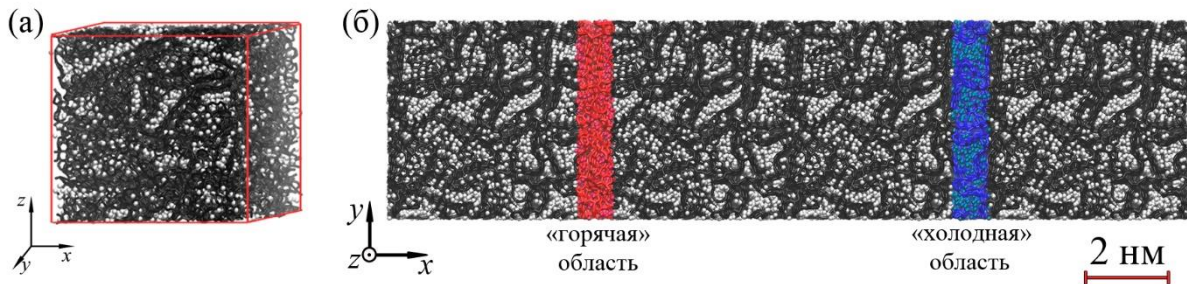


Рис.1. Структура композита для исследования прочности (а) и теплопроводности (б). Атомы углерода показаны черным цветом, а атомы никеля – белым.

3. Результаты моделирования

В результате моделирования получены данные предела прочности (σ_b) и коэффициента теплопроводности (λ) композитов Ni/графен с разным содержанием никеля при 300 К (кривая с кругами и квадратами на рис. 2 соответственно). Для сопоставления результатов на рис. 2 также представлены литературные данные значений σ_b и λ полученные для скомканного графена [10] и наночастиц никеля [11]. Видно, что введение атомов Ni графеновую сетку оказывает сильное влияние как на коэффициент теплопроводности, так и на механические свойства.

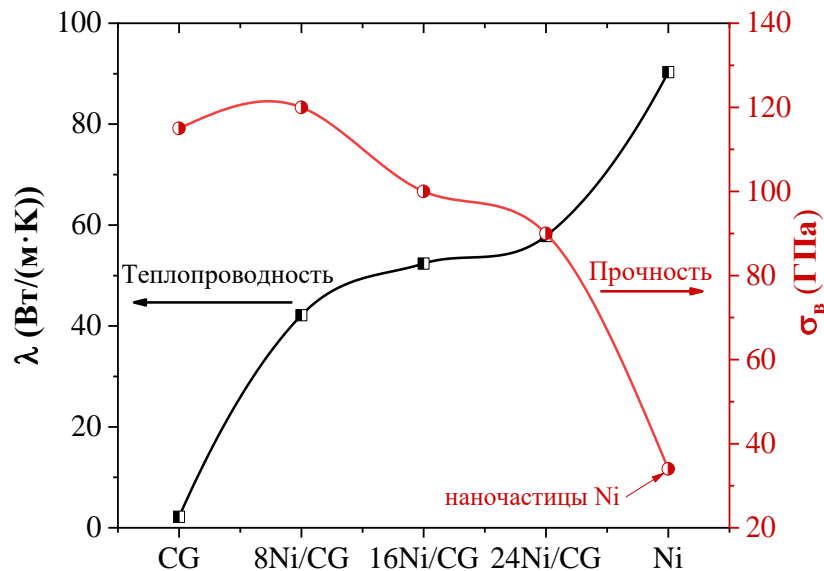


Рис.2. Коэффициент теплопроводности (λ) и предел прочности на растяжение (σ_b) при 300 К

Теплопроводность композита Ni/графен выше теплопроводности скомканного графена (2,183 Вт/(м К) при комнатной температуре [10]). И чем больше объемная доля атомов Ni в структуре композита, тем выше коэффициент теплопроводности системы. Это связано с добавлением в структуру скомканного графена элемента с большей теплопроводностью и за счет формирования контактных границ между никелевой и углеродной фазами. Чем больше таких границ (т.е. больше объемной доли Ni), тем выше величина λ .

Из рис. 2 видно, что предел прочности при растяжении уменьшается с увеличением числа атомов Ni в структуре композита. Наивысшей прочностью обладает композит 8Ni/CG, у которого величина σ_b даже чуть выше, чем у скомканного графена. Это связано с большим распределением атомов Ni по графеновой сетке при меньшей объемной доли никеля, что приводит к формированию большего числа связей между чешуйками графена. В структурах с большим содержанием никеля, наночастички не разрушаются, а следовательно, новых ковалентных связей не образуется (подробнее об этом написано в [5,6]). Однако прочность композитных структур значительно выше прочности наночастицы никеля.

Таким образом, проведенные исследования методом молекулярной динамики показали, что

- при одноосном растяжении предел прочности композитов Ni/графен тем ниже, чем больше объемная доля атомов никеля в структуре. Наивысшей прочностью обладает композит 8Ni/CG, близкой к прочности скомканного графена;

- коэффициент теплопроводности композита Ni/графен ниже, чем у чистого никеля, но значительно выше, чем у скомканного графена. Увеличение объемной доли атомов никеля в композите приводит к росту теплопроводности системы за счет добавления элемента с более высоким значением коэффициента теплопроводности.

- влияние объемной доли атомов никеля на свойства композита Ni/графен имеют разную природу. На прочность композита оказывает влияние графеновая сетка, а на коэффициент теплопроводности – наличие проводящего материала.

Исследование выполнено при финансовой поддержке госзадания ИПСМ РАН.

Литература

1. F. Zhang, K. Yang, G. Liu, Y. Chen, M. Wang, S. Li, R. Li. Recent advances on graphene: Synthesis, properties and applications // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2022. V. 160. P. 107051.
2. Y. Li, Q. Wang, S. Wang. A review on enhancement of mechanical and tribological properties of polymer composites reinforced by carbon nanotubes and graphene sheet: Molecular dynamics simulations // *Composites Part B: Engineering*. 2019. V. 160. P. 348–361.
3. K. Fu, X. Zhang, C. Shi, E. Liu, F. He, J. Li, N. Zhao, C. He. An approach for fabricating ni@graphene reinforced nickel matrix composites with enhanced mechanical properties // *Materials Science and Engineering: A*. 2018. V. 715. P. 108–116.
4. S.-W. Chang, A. K. Nair, M. J. Buehler. Geometry and temperature effects of the interfacial thermal conductance in copper– and nickel–graphene nanocomposites // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2012. V. 24 (24). P. 245301.
5. L. R. Safina, K. A. Krylova, J. A. Baimova. Molecular dynamics study of the mechanical properties and deformation behavior of graphene/metal composites // *Materials Today Physics*. 2022. V. 28. P. 100851.
6. K. Krylova, J. Baimova, R. Mulyukov. Effect of deformation on dehydrogenation mechanisms of crumpled graphene: molecular dynamics simulation // *Letters on Materials*. 2019. V. 9 (1). P. 81–85.
7. M. Mendeleev, M. Kramer, S. Hao, K. Ho, C. Wang. Development of interatomic potentials appropriate for simulation of liquid and glass properties of NiZr₂ alloy // *Philosophical Magazine*. 2012. V. 92 (35). P. 4454–4469.
8. S. J. Stuart, A. B. Tutein, J. A. Harrison. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions // *J. Chem. Phys.* 2000. V. 112 (14). P. 6472–6486.

9. A. Y. Galashev, K. P. Katin, M. M. Maslov. Morse parameters for the interaction of metals with graphene and silicene, *Physics Letters A*. 2019. V. 383 (2-3). P. 252–258.
10. Y. Zhong, M. Zhou, F. Huang, T. Lin, D. Wan. Effect of graphene aerogel on thermal behavior of phase change materials for thermal management, *Sol. Energy Mater. Sol. Cells* 113, 195 (2013).
11. A. Sharma, J. Hickman, N. Gazit, E. Rabkin, Y. Mishin. Nickel nanoparticles set a new record of strength // *Nature Communications*. 2018. V. 9 (1)

Сведения об авторах

Крылова К.А. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория физики и механики углеродных наноматериалов, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа

E-mail bukreevakarina@gmail.com

Мурзаев Р.Т. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория физики и механики углеродных наноматериалов, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа

E-mail mur611@mail.ru

Баймова Ю.А. - доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующий лабораторией физики и механики углеродных наноматериалов, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа

E-mail julia.a.baimova@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р.

Для описания нелинейного деформирования изотропных материалов при неизотермических условиях нагружения предлагается использовать соотношения эндохронной теории термопластичности. В работе получены определяющие соотношения для случая плоского напряженного состояния, приведены расчетные зависимости для метода конечных элементов применительно к рассматриваемой теории, представлены вычислительные методы решения. В последней части показан пример расчета тонкой пластины при сложном нагружении.

Введение Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования изотропных материалов при неизотермическом нагружении, в основном, строится на вариантах теории течения с комбинированным упрочнением [1, 2]. В данной работе предложен вариант эндохронной теории пластичности для изотропных материалов при неизотермических условиях нагружения. Её характерной особенностью является использование внутреннего времени z для учета процессов необратимого деформирования [3, 4]. Преимуществом эндохронной теории термопластичности является относительная простота определяющих соотношений и возможность описывать такие особенности пластического поведения как линейное и нелинейное упрочнение, неупругая разгрузка, гистерезис и др.

1. Определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности

Определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности для пластически несжимаемого изотропного материала, устанавливающие зависимость между напряжениями, деформацией и изменением температуры $\theta = T - T_0$ имеют следующий вид:

$$s_{ij} = \int_0^z 2\mu \cdot \exp[-a(z-z')] \frac{de_{ij}}{dz'} dz', \quad \sigma_o = K(\varepsilon_o - \alpha^{(T)}\theta), \quad (1)$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; e_{ij} — компоненты девиатора деформации; σ_o — среднее напряжение; ε_o — средняя деформация; $a = a(T)$ — материальный параметр модели; $\mu = E/2(1+\nu)$, $K = E/(1-2\nu)$ — модуль сдвига и модуль объемного сжатия соответственно, $E = E(T)$, $\nu = \text{const}$ — нормальный модуль упругости и коэффициент Пуассона; $\alpha^{(T)}$ — температурный коэффициент линейного расширения; z — внутреннее время, определяемое как $dz = d\xi/f(\xi)$, $f(\xi) \geq 1$, $f(0) = 1$, где $f(\xi)$ — функция упрочнения, зависящая от температуры T ; $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, вычисляемое по формуле [5, 6]

$$d\xi^2 = \frac{2}{3} de_{ij} de_{ij} + m^2 d\theta^2, \quad (2)$$

где m — материальный параметр модели, описывающий необратимое деформирование при изменении температуры.

Дифференцируя соотношение (1) по внутреннему времени и используя известные уравнения, связывающие девиаторы и шаровые части тензоров напряжений и деформации, $d\sigma_{ij} = ds_{ij} + \delta_{ij} d\sigma_o$, $d\varepsilon_{ij} = de_{ij} + \delta_{ij} d\varepsilon_o$, получим определяющее уравнение эндохронной теории пластичности при неизотермическом нагружении в дифференциальной форме

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \left(\frac{\sigma_{ij}}{E} \frac{dE}{d\theta} + (h_{ij} - z s_{ij}) \frac{da}{d\theta} - \delta_{ij} K \alpha^{(T)} \right) d\theta - a s_{ij} dz, \quad (3)$$

где D_{ijkl} — компоненты тензора упругих жесткостей 4-го ранга, h_{ij} — компоненты тензора 2-го ранга, определяемые как

$$h_{ij} = \int_0^z 2\mu z' \exp[-a(z-z')] \frac{de_{ij}}{dz'} dz'. \quad (4)$$

Обратное соотношение выглядит следующим образом:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} - \left(S_{ijkl} \frac{\sigma_{kl}}{E} \frac{dE}{d\theta} + S_{ijkl} (h_{kl} - z s_{kl}) \frac{da}{d\theta} - \delta_{ij} \alpha^{(T)} \right) d\theta + a S_{ijkl} s_{kl} dz, \quad (5)$$

где S_{ijkl} — компоненты тензора коэффициентов податливости 4-го ранга.

Рассмотрим подробнее численное интегрирование выражения (4) для компонент тензора h_{ij} . Предполагая, что изменение компонент девиатора деформации $de_{ij}/dz' = \text{const}$ на каждом шаге численного интегрирования, преобразуем соотношение (8) к следующему виду

$$h_{ij}(z_{m+1}) = h_{ij}(z_m) e^{-a\Delta z} + 2 \frac{\mu}{a} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_{m+1}} \left[z_{m+1} - \left(z_m - \frac{1}{a} \right) e^{-a\Delta z} - \frac{1}{a} \right]. \quad (6)$$

2. Определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности для случая плоского напряженного состояния

Рассмотрим важный для приложений случай плоского напряженного состояния, реализуемый в плоскости $x_1 O x_2$. При этом в матричном форме соотношение (5) примет следующий вид:

$$d\varepsilon = \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{1}{E} \frac{dE}{d\theta} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{1+\nu}{E} \left(\boldsymbol{\Lambda} \cdot \mathbf{h} - \frac{1}{3} z \cdot \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \frac{da}{d\theta} - \alpha^{(T)} \boldsymbol{\delta} \right) d\theta + \mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{d\xi}{\sigma_T(\xi)}, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12})^T$ — векторы напряжений и деформации; $\mathbf{h} = (h_{11}, h_{22}, h_{12})^T$, $\boldsymbol{\delta} = (1, 1, 0)^T$; матрица податливости \mathbf{S} и вспомогательные матрицы $\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{Y}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Кроме этого,

$$d\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22}) + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \left(\left(h_{11} + h_{22} - z \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3} \right) \frac{da}{d\theta} + \frac{E\alpha^{(T)}}{1-2\nu} \right) d\theta - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sigma_T(\xi)} d\xi,$$

Здесь

$$\sigma_T(\xi) = \frac{6\mu}{a} f(\xi), \quad f(\xi) = 1 + \beta\xi$$

$$d\xi^2 = \frac{2}{9} \left((d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{22})^2 + (d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{33})^2 + (d\varepsilon_{22} - d\varepsilon_{33})^2 + \frac{3}{2} d\gamma_{12}^2 \right) + m^2 d\theta^2, \quad (8)$$

Равенства, обратные (7), запишем в виде

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot d\varepsilon + \left(\boldsymbol{\sigma} \frac{dE}{d\theta} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{h} - z \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \frac{da}{d\theta} - \frac{E}{1-\nu} \alpha_T \boldsymbol{\delta} \right) \cdot d\theta - \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{d\xi}{\sigma_T(\xi)} = \mathbf{D} \cdot d\varepsilon + \boldsymbol{\Psi} d\theta - \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{d\xi}{\sigma_T(\xi)}, \quad (9)$$

где матрица упругих жесткостей \mathbf{D} и вспомогательные матрицы \mathbf{H}, \mathbf{J} имеют следующий вид:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (2-\nu)/(1-\nu) & -(1-2\nu)/(1-\nu) & 0 \\ -(1-2\nu)/(1-\nu) & (2-\nu)/(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Для удобства дальнейших вычислений исключим из уравнения (8) компоненту деформации $d\varepsilon_{33}$, получив в результате соотношение

$$d\xi = 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{A_1 \cdot (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} - 2H_1) + \sqrt{9C_1 - 3A_1^2 \left((d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{22})^2 + d\gamma_{12}^2 + 3m^2 d\theta^2 \right)}}{9 - \left(2 \frac{1+\nu}{1-\nu} A_1 \right)^2}, \quad (10)$$

где A_1, H_1, C_1 определяем как

$$A_1 = \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sigma_T(\xi)}, \quad H_1 = \left(\frac{1-2\nu}{E} \left(h_{11} + h_{22} - z \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{3} \right) \frac{da}{d\theta} + \alpha^{(T)} \right) d\theta,$$

$$C_1 = \frac{1-\nu+\nu^2}{(1+\nu)^2} (d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{22})^2 + d\varepsilon_{11} d\varepsilon_{22} + \frac{3}{4} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right)^2 (d\gamma_{12}^2 + 3m^2 d\theta^2) - H_1 (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} - H_1).$$

Для сокращения записи при дальнейших выводах представим соотношение (10) в разностной постановке в следующем виде:

$$\Delta\xi = g(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi, z, \mathbf{h}, \Delta\varepsilon, \Delta\theta). \quad (11)$$

3. Расчетные зависимости метода конечных элементов

Примем в качестве базового соотношения метода конечных элементов (МКЭ) для тела объемом V равенство внешней и внутренней работы, совершаемой узловыми силами $\Delta\mathbf{F}$ на возможном перемещении в узлах $\Delta\mathbf{u}$:

$$\int_V (\Delta\varepsilon)^T \Delta\boldsymbol{\sigma} dV = (\Delta\mathbf{u})^T \Delta\mathbf{F}. \quad (12)$$

Используя известную формулу $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$, связывающую вектор узловых перемещений \mathbf{u} с вектором деформации в элементах $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также полученное физическое соотношение (3) в разностной постановке, запишем уравнение (12) в следующем виде:

$$(\Delta\mathbf{u})^T \int_V \mathbf{B}^T \cdot \left(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\Psi} \Delta\theta - \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{\Delta\xi}{\sigma_T(\xi)} \right) dV = (\Delta\mathbf{u})^T \Delta\mathbf{F}.$$

Для того чтобы данное соотношение было верно при любом возможном перемещении, необходимо выполнение следующего равенства:

$$\mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}^{(T)} + \Delta\mathbf{R}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV, \quad \Delta\mathbf{F}^{(T)} = - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Psi} \Delta\theta dV, \quad \Delta\mathbf{R} = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{\Delta\xi}{\sigma_T(\xi)} dV. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{K} — матрица жесткости; $\Delta\mathbf{u}$ — вектор узловых перемещений; $\Delta\mathbf{F}$ — вектор узловых сил; $\Delta\mathbf{F}^{(T)}$ — вектор узловых сил, обусловленных изменением температуры; $\Delta\mathbf{R}$ — вектор узловых сил, обусловленных изменением внутреннего времени.

4. Вычислительные методы

Для наглядности алгоритмов решения уравнения (13) опишем их для одного конечного элемента. С помощью традиционных для МКЭ процедур изложенные действия могут быть распространены на всю конечно-элементную модель [7].

1. Первый метод расчета

Рассмотрим метод, основанный на последовательном уточнении значений вектора узловых нагрузок $\Delta\mathbf{R}$. Алгоритм действий следующий:

1) На первом шаге нагружения при $i=1$ решаем линейную задачу

$$\Delta\mathbf{u}_1 = \mathbf{K}_1^{-1} \cdot (\Delta\mathbf{F}_1 + \Delta\mathbf{F}_1^{(T)}). \quad (15)$$

2) На i -ом шаге выполняем следующую итерационную процедуру

$$\Delta\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{K}_{i-1}^{-1} \cdot (\Delta\mathbf{F}_i + \Delta\mathbf{F}_{i-1}^{(T)} + \Delta\mathbf{R}_i^k),$$

где \mathbf{K}_{i-1} и $\Delta\mathbf{F}_{i-1}^{(T)}$ определяем при T_{i-1} , $\Delta\mathbf{R}_i^k$ вычисляем как

$$\Delta\mathbf{R}_i^k = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{i-1} \frac{\Delta\xi_i^k}{\sigma_T(\xi_{i-1}, T_{i-1})} dV, \quad \Delta\xi_i^k = g(\boldsymbol{\sigma}_{i-1}, T_{i-1}, \xi_{i-1}, z_{i-1}, \mathbf{h}_{i-1}, \Delta\varepsilon_i^k, \Delta\theta_i), \quad \Delta\varepsilon_i^k = \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{u}_i^k.$$

На первой итерации (при $k=1$) принимаем $\Delta\mathbf{u}_i^1 = \Delta\mathbf{u}_{i-1}$. Вычисления продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие $\Delta\xi_i^{k+1} - \Delta\xi_i^k \leq \kappa \cdot \Delta\xi_i^{k+1}$, где $\kappa = 10^{-3} \div 10^{-4}$. Описанный итерационный процесс графически изображен на рис. 1а.

Недостатками данного метода являются необходимость обновления матрицы жесткости при изменении температуры, а также задание малого шага нагружения для сходимости решения, что может значительно повлиять на время расчета.

2. Второй метод расчета

Для исключения недостатков первого метода и повышения точности расчета рассмотрим алгоритм, основанный на уравнивании всей приложенной нагрузки на каждом шаге нагружения.

Последовательность действий будет следующей:

- 1) На первом шаге нагружения при $i=1$ решаем линейную задачу (15);
- 2) На i -ом шаге выполняем следующую итерационную процедуру

$$\Delta \mathbf{u}_i^{-k+1} = \mathbf{K}_1^{-1} \cdot \Delta \bar{\mathbf{R}}_i^{-k},$$

где $\Delta \bar{\mathbf{R}}_i^{-k}$ — вектор узловой уравнивающей силы, определяемый соотношением

$$\Delta \bar{\mathbf{R}}_i^{-k} = \Delta \mathbf{F}_i + \Delta \mathbf{F}_{i-1}^{(T)} - \int_V \mathbf{B}^T \cdot \left(\mathbf{C}(T_{i-1}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-k} - \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{i-1} \frac{\Delta \bar{\xi}_i^{-k}}{\sigma_T(\xi_{i-1}, T_{i-1})} \right) dV.$$

Приращение вектора деформации $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-k}$ и меры внутреннего времени $\Delta \bar{\xi}_i^{-k}$ в элементах на k -ом шаге итерационной процедуры определяем как

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-k} = \mathbf{B} \cdot \left(\Delta \mathbf{u}_{i-1} + \sum_{j=1}^k \Delta \mathbf{u}_i^{-j} \right), \quad \Delta \bar{\xi}_i^{-k} = g \left(\boldsymbol{\sigma}_{i-1}, T_{i-1}, \xi_{i-1}, z_{i-1}, \mathbf{h}_{i-1}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^{-k}, \Delta \theta_i \right).$$

На первой итерации (при $k=1$) принимаем $\Delta \mathbf{u}_i^1 = \Delta \mathbf{u}_{i-1}$. Условие останова аналогично условию останова первого метода. Описанный итерационный процесс изображен на рис. 1б.

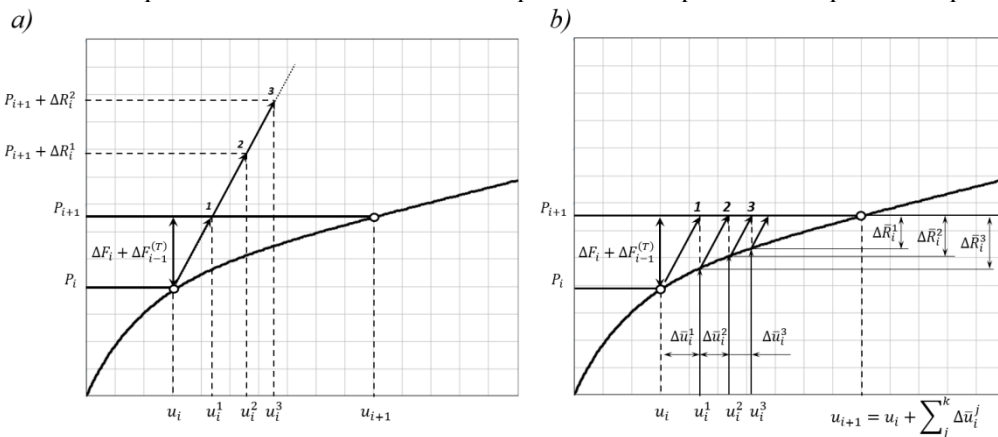


Рис. 1. Алгоритм решения уравнений.

5. Пример расчета В качестве примера рассмотрим растяжение вдоль оси Ox_2 и нагрев прямоугольной пластины размером $(100 \times 100 \times 1)$ мм³ из материала, диаграммы деформирования которого приведены на рис. 2а. Так как сформулированная задача симметрична, будем рассматривать $1/4$ часть конструкции с граничными условиями, приведенными на рис. 2б. Для аппроксимации пластины применяем четырехугольные изопараметрические элементы первого порядка, интегрирование проводим с использованием квадратурной схемы Гаусса 2 порядка.

В первом расчетном случае одновременно растягиваем пластину до 350 МПа и нагреваем её на 300 К (Рис. 3а). Во втором расчетном случае прикладываем нагрузку в четыре этапа: предварительно растягиваем пластину до 350 МПа, далее нагреваем её на 300 К, затем производим полную разгрузку с последующим нагружением до 450 МПа (Рис. 3б). Полученные результаты напряжений и механической деформации выведены в центре элемента №41 для ряда промежуточных шагов нагружения и линейно интерполированы.

Из графиков видим удовлетворительное совпадение результатов расчета МКЭ по эндокронной теории термопластичности с результатами расчета, полученными по теории течения.

Заключение В работе рассмотрен вариант эндохронной теории пластичности для изотропных материалов при неизотермических условиях нагружения, получены соотношения для случая плоского напряженного состояния. Приведены расчетные зависимости метода конечных элементов применительно к предлагаемой теории, а также алгоритмы их решения. Показан численный пример расчета для тонкой пластины при сложном нагружении.

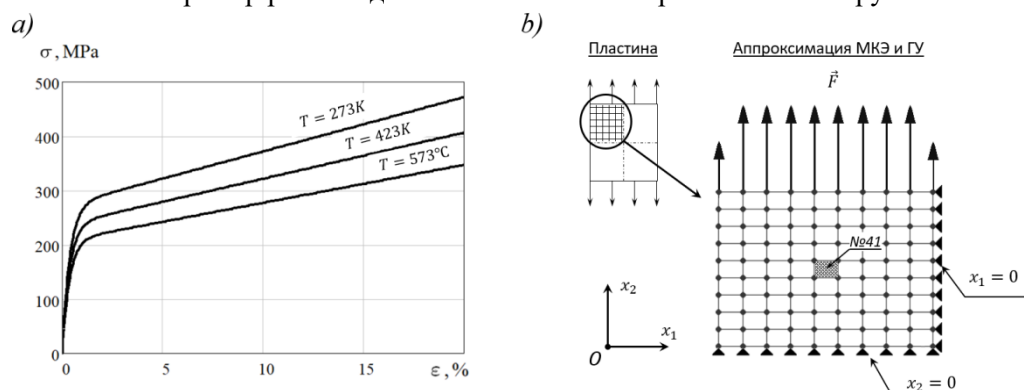


Рис. 2. Диаграммы деформирования материала при различных температурах (а); КЭМ и граничные условия (б).

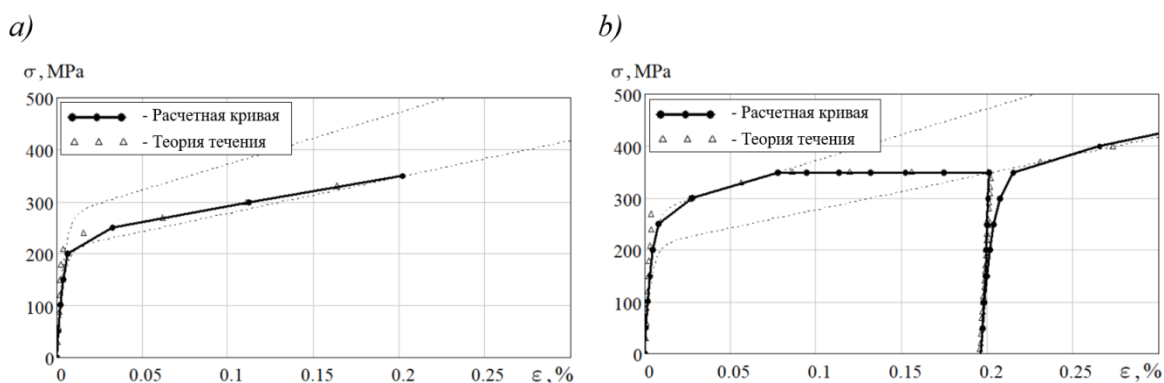


Рис. 3. Графики зависимости напряжения от деформации в центре элемента №41 для первого (а) и второго (б) случая нагружения.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (код проекта №0705-2023-0012 (FSFN-2023-012))

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарь В. С. Неупругость. Варианты теорий. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
2. Chaboche J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. International Journal of Plasticity. 2008. P. 1642-1693.
3. Valanis K. C. A theory of viscoplasticity without a yield surface. Archives of Mechanics. 1971. Vol. 23. №4. P. 517-551.
4. Кувыркин Г. Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд-во МГТУ, 1993. 142 с.
5. Сарбаев Б. С. Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. №7. С. 97-104.
6. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 540 с.

Сведения об авторах

Кувыркин Георгий Николаевич, дтн, проф., заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, +7-499-261-75-41, **E-mail:** fn2@bmstu.ru

Рахимов Даниэль Рустамович, аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана, +7-919-844-10-25, **E-mail:** danrus1996@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЛОКАЛЬНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ СОБСТВЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ТЕЛА

Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю., Сафронов Ю.А., Соколов А.А.

Температурное состояние элементов конструкций технических устройств как твердых тел обусловлено процессом теплопроводности в этих элементах. Для наноструктурных, структурно-чувствительных материалов классическая постановка дает существенное различие на границе расчетной области. Математические модели, хорошо описывающие такие материалы, призванные устранить эти различия, относятся к классу нелокальных моделей. При высоких температурах необходимо учитывать собственное излучение тела. В работе рассмотрена нелокальная постановка нестационарного уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями. С помощью метода конечных элементов построен численный алгоритм. Построен аналитический пример и найдены для него граничные условия и начальное условие, при которых численный алгоритм, учитывающий нелокальность и излучение, будет сходиться к точному решению задачи. Проведены сравнения погрешностей на разных сетках.

Материалы, создаваемые на основе нанотехнологий, обладают уникальными теплофизическими и физико-механическими свойствами [1 – 3]. Однако, образовался существенный разрыв между технологиями получения таких материалов и областью математического моделирования. Известно, что в силу особенностей структуры, к таким материалам неприменима методология континуума. Общая математическая модель для таких материалов описана в работах [4 – 5].

Существенные различия с классической моделью для подобных материалов возникают на границе расчетной области. В данной работе нас интересуют к тому же ситуации, когда нельзя пренебречь собственным излучением тела, например в случае тонких теплоизолирующих покрытий. Рассмотрим подробнее, как эти особенности можно учитывать.

Нестационарное температурное поле в данном случае описывает дифференциальная форма математической модели теплопроводности, включающая частный случай нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности в твердом теле, в виде [6]:

$$c\rho \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + q_v(M, T(M,t), t), \quad (1)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, c — удельная теплоемкость, ρ — массовая плотность, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(M, T(M,t), t)$ — проекция вектора плотности теплового потока, $q_v = q_v(M, T(M,t), t)$ — объемная плотность мощности внутренних источников теплоты, $T = T(M,t)$ — поле температуры, $M = (x, y) \in S$ — точка пространства. Вектор плотности теплового потока $\mathbf{q}(M, T(M,t), t)$ в случае учета эффекта пространственной нелокальности имеет вид:

$$\mathbf{q}(M, T(M,t), t) = -p_1 \hat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T(M,t) - p_2 \int_S \varphi(M, M') \hat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T(M',t) dS', \quad (2)$$

где $M \in S, M' \in S'$, $\varphi(M, M')$ — функция нелокального влияния, причем

$$\int_{S'} \varphi(M, M') dS' = 1, \quad p_1 + p_2 = 1,$$

$p_1 \in (0;1]$ — коэффициенты локального и нелокального слагаемых соответственно, S' — зона нелокальности.

Будем рассматривать граничное условие 3 рода в виде конвективного теплообмена

$$p_1 \hat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T(M,t) \cdot \mathbf{n} + p_2 \int_{S'} \varphi(M, M') \hat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T(M',t) \cdot \mathbf{n} dS' \Big|_{\gamma} = \alpha(T_c - T) + A_r q_n - \varepsilon_r \sigma T^4, \quad (3)$$

где $\gamma \subset \partial S$ — некая подобласть границы, α — коэффициент теплообмена, T_c — температура внешней среды, A_r — коэффициент поглощения, q_n — поток падающего излучения, ε_r — коэффициент излучения, $q^0 = \sigma T^4$ — плотность потока излучения абсолютно черного тела, $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8}$ — постоянная Стефана — Больцмана [6].

Пусть x, y, t, T — безразмерные величины. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в безразмерном виде с учетом $\kappa = c\rho L^2 / t_K \lambda_{max}^{(T)}$ будет иметь следующий вид

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \text{Os}, \quad M(x, y, z) \in S \setminus \partial S, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$\mathbf{q} = -p_1 \hat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T(M, t) - p_2 \int_{S'} \varphi(M, M') \hat{\lambda}^{(T)} \cdot \nabla T(M', t) dS',$$

$$T(x, y, z, t)|_{t=0} = T_0(x, y, z),$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = \text{Bi}(1-T) + A_r \text{Kг} - \varepsilon_r N T^4, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma \setminus \gamma} = q_{boundary}(x, y, z, t),$$

где $\text{Os} = L^2 q_v / T_c \lambda^*$ — число Остроградского, $N = \sigma T_c^3 L / \lambda^*$, $\text{Bi} = \alpha L / \lambda^*$ — число Био, $\text{Kг} = q_{\text{н}} L / \lambda^* T_c$ — число Кирпичева [7].

Метод конечных элементов в нелокальной постановке [8–10] позволяет получить следующую разностную схему для поставленной задачи

$$C_{ij} = \int_S \kappa N_i N_j dS, \quad F_i = -\int_{\gamma} (\text{Bi} + A_r \text{Kг}) N_i d\gamma + \int_S \text{Os} N_i dS - \int_{\Gamma \setminus \gamma} q_{boundary} N_i d\gamma,$$

$$K_{ij} = \int_S p_1 \nabla N_i \nabla N_j dS + \int_S p_2 \nabla N_i \left(\int_{S'} \varphi(M, M') \nabla N_j dS' \right) dS - \int_{\gamma} \text{Bi} N_i N_j d\gamma,$$

$$\begin{cases} \left(C + \tau(K + K^{k,l}) \right) T^{k,l+1} = C T^{k,l} + \tau(F^k + F^{k,l}), & l = \overline{1, s} \\ T^{k+1,0} = T^{k,s}, & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

где k — номер временного слоя, s — количество внутренних итераций, K и F — матрица и вектор, отвечающие за расчет излучения на границе области.

Рассмотрим построение тестового примера. Для двумерной задачи будем использовать в качестве функции нелокального влияния и тензора теплопроводности

$$\varphi(M, M_0) = \frac{1}{2\pi a^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{2a^2}}, \quad \hat{\lambda}^{(T)} \sim \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{xy} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{ij} = \text{const}, \quad (6)$$

а в качестве решения задачи возьмем функцию

$$T(x, y, t) = xy + t, \quad (7)$$

тогда подберем параметры модели для данного аналитического решения. Рассмотрим вектор плотности теплового потока (0) с учетом (6) и (7), будем так же считать, что S' — вся расчетная область, тогда

$$\mathbf{q}(x, y, t) = -\hat{\lambda}^{(T)} \cdot \left(p_1 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} \right) = -p_1 \begin{pmatrix} \lambda_{xx} y + \lambda_{xy} x \\ \lambda_{yx} y + \lambda_{yy} x \end{pmatrix} - p_2 \begin{pmatrix} \lambda_{xx} I_y + \lambda_{xy} I_x \\ \lambda_{yx} I_y + \lambda_{yy} I_x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}(x, y, t) = -\begin{pmatrix} Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} I_x = \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} e^{-\frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{2a^2}} y_0 dx_0 dy_0, \\ I_y = \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} e^{-\frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{2a^2}} x_0 dx_0 dy_0, \end{cases}$$

интегралы I_x и I_y вычисляются аналитически, причем $I_x(x, y, l_x, l_y) = I_y(y, x, l_y, l_x)$.

Для прямоугольной пластины получим

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{left}} = \text{Bi}(1-t) + A_r \text{Kг} - \varepsilon_r N t^4 = Q_x(0, y), \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{right}} = -Q_x(l_x, y),$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{top}} = -Q_y(x, l_y), \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{bot}} = Q_y(x, 0), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y) = xy,$$

$$K\Gamma = \frac{q_n L}{\lambda^{(T)} T_c} = \frac{1}{A_r} (\varepsilon_r N t^4 - \text{Bi}(1-t) + Q_x(0, y)),$$

$$q_n(y, t) = \frac{\lambda^{(T)} T_c}{A_r L} (\varepsilon_r N t^4 - \text{Bi}(1-t) + Q_x(0, y)), \quad N = \frac{\sigma T_c^3 L}{\lambda^{(T)}}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha L}{\lambda^{(T)}},$$

таким образом, выписаны соотношения для граничных условий, начального условия и правой части, при которых численный алгоритм должен сходиться к решению (7).

Рассмотрим безразмерную задачу на единичном квадрате. Положим материал изотропным, $\kappa = 1$, $\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda^{(T)} = 1$, $\lambda_{xy} = \lambda_{yx} = 0$, $\alpha = \varepsilon_r = A_r = 0.7$. Учтем нелокальность по пространству, положив $p_2 = p_1 = 0.5$ и приняв радиус нелокальности $a = 0.8$. Для различных моментов времени и различных сеток приведем погрешность на точном решении, которую будем вычислять следующим образом:

$$\varepsilon = \max |T_{num}(t^*) - T_{exact}(t^*)|, \quad t^* = \text{const},$$

где T_{num} — численное решение, T_{exact} — точное решение, t^* — момент времени. Соответствующие погрешности приведены для треугольных сеток с размером h и равномерных квадратных сеток $n \times n$ в Таблице 1.

Таблица 1

Время t	Сетка	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.005$	$\tau = 0.0025$
	5×5	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$
	25×25	$2.2 \cdot 10^{-16}$	$2.2 \cdot 10^{-16}$	$2.2 \cdot 10^{-16}$
0.05	50×50	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
	$h = 0.04$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$
	$h = 0.02$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$
	5×5	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$
	25×25	$2.2 \cdot 10^{-16}$	$2.2 \cdot 10^{-16}$	$2.2 \cdot 10^{-16}$
0.1	50×50	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
	$h = 0.04$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$6.5 \cdot 10^{-4}$
	$h = 0.02$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSN-2023-0012).

Список литературы

1. Андриевский Р.А., Рагуля А.В. Наноструктурные материалы. Москва: Издательский центр Академия, 2005.
2. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. М.: Физматлит, 2005. 416 с.
3. Пул-мл. Ч. Оуэнс Ф. Нанотехнологии. Москва: Техносфера, 2006.
4. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Mathematical model of a nonlocal medium with internal state parameters. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 86 (4), pp. 820-826.
5. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Kuvshynnikova D.A. Mathematical model of the heat transfer process taking into account the consequences of nonlocality in structurally sensitive materials. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 991(1). DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012050
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 511 с.
7. Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 393 pp.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М: Мир, 1979. 393 с.

9. Kuvyrkin G.N., Zhuravskii A.V., Savel'eva I.Y. Mathematical Modeling of Chemical Vapor Deposition of Material on a Curvilinear Surface. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 89 (6), pp. 1374-1379.
10. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Mathematical model of a thermostating coating with a thermoelectric module. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 88 (6), pp. 1373-1380.

Сведения об авторах

Кувыркин Георгий Николаевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: fn2@bmstu.ru).

Савельева Инга Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: inga.savelyeva@gmail.com).

Сафронов Юрий Алексеевич — магистрант кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: safronovyurii2001@gmail.com).

Соколов Андрей Александрович — аспирант кафедры «Прикладная математика». МГТУ им. Н.Э. Баумана (105005, Москва, Российская Федерация, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, e-mail: zokolof@yandex.ru).

ВОЗДЕЙСТВИЕ КОРОТКОИМПУЛЬСНОГО ВЫСОКЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТРЕЩИНЫ В МЕТАЛЛЕ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Кукуджанов К.В.

Экспериментально исследуются механизмы залечивания трещин в поликристаллическом цинке под действием импульсного высокоэнергетического электромагнитного поля. Электрический ток в образце индуцируется генератором импульсов электромагнитного поля высокой энергии. Эволюция трещин в металле исследуется с помощью компьютерной томографии высокого разрешения.

Из экспериментов известно, что воздействие на металлы короткими импульсами тока высокой плотности могут приводить к увеличению их ресурса пластичности, ударной вязкости, усталостной долговечности, твердости, износостойкости или приводить к иным изменениям в отклике материала на нагружение на макроскопическом уровне. Однако физические механизмы, лежащие в основе этих изменений до сих пор не известны.

Гипотеза о том, что в металлах под действием кратковременных импульсов высокоэнергетического электромагнитного поля (далее – «ВЭМП») может происходить «залечивание» внутренних дефектов (трещин и пор) высказывалась в работах советских ученых Н.Н. Беклемишева, В.Д. Ключникова, В.Н. Кукуджанова и других исследователей, начиная с середины 80-х годов прошлого века. Предполагалось, что это залечивание является причиной улучшения макроскопических свойств, а именно, увеличения ресурса пластичности (предельной пластической деформации до разрушения) металлов, наблюдаемого экспериментально. При этом само понятие залечивания авторы или не конкретизировали или понимали в некотором вытекающем из теоретических представлений виде, например, в виде возникновения сжимающих напряжений в вершинах плоских трещин, которое могло сближать их берега. Такая расплывчатая трактовка объяснялась, во-первых, сложностями математического моделирования быстропротекающих электротермомеханических процессов, происходящих при воздействии импульсами ВЭМП на внутренние трещины/поры в металле и, как следствие, невозможности установить механизм залечивания, и, во-вторых, невозможностью экспериментально установить реализуемый в натуре вид залечивания дефектов внутри материала, и, как следствие, невозможности однозначно утверждать, что залечивание дефектов происходит на практике.

Первый вопрос о возможных механизмах и видах залечивания дефектов внутри металлов в общем удалось решить разработкой моделей [1-4]. Второй вопрос о реализуемых видах и механизмах залечивания, экспериментально подтверждаемый до настоящего времени лишь косвенным образом, рассматривается в настоящей работе. В работе экспериментально исследуются некоторые аспекты процесса эволюции дефектов структуры, таких как мезотрещины (мезопоры) размерами порядка 100 мкм, в поликристаллическом цинке при обработке его кратковременными импульсами ВЭМП.

Имеющееся экспериментальное оборудование позволяло создать в образцах мезодефекты различных форм и размеров (от нескольких 10 мкм до 1000 мкм) и исследовать их с помощью рентгеновского компьютерного микротомографа, после чего воздействовать на них короткоимпульсным ВЭМП и снова исследовать произошедшие изменения на томографе. Таким образом, формы и объемы одних и тех же мезотрещин/мезопор в образцах дважды исследовались в экспериментах: до и после воздействия ВЭМП.

Математическое моделирование воздействия импульсным ВЭМП на мезотрещины в металле осуществлялось на основе разработанной электротермомеханической модели, учитывающей зависимости всех физико-механических свойств металла от температуры, фазовые превращения, происходящие в металле в окрестности дефектов, возможности электрического пробоя диэлектрика между поверхностями дефектов, а также взаимного влияния дефектов друг на друга. Основные положения предлагаемой модели приведены в работах [1-4].

Решение начально-краевой задачи проводилось для определенного представительного элемента (ячейки периодичности) материала при выбранных граничных условиях на его поверхности [1-4].

Для решения получающейся системы уравнений применялся метод конечных элементов. Расчеты проводились для плоской деформации с использованием линейных четырехузловых

изопараметрических и трехузловых конечных элементов. Для вычислений использовался пакет программ АСТРА, разработанный в лаборатории моделирования в МДТТ ИПМех РАН. Применялось неравномерное разбиение области интегрирования со сгущением сетки в окрестности трещины и в направлении к ее вершине. Причем в окрестности трещины использовались четырехузловые элементы, в остальной области использовались трехузловые элементы. Начальный шаг сетки в окрестности трещины составлял 1/40 от радиуса кривизны в вершине трещины, в то время как в остальной части области изменялся (в зависимости от размера представительного элемента). Конечно-элементная сетка перестраивалась на основе смешанного Эйлера-Лагранжева метода.

Эксперименты по исследованию изменений формы и размеров монетоподобных мезотрещин до и после воздействия ВЭМП подтвердили возможность их залечивания. Такое залечивание при рассматриваемом воздействии может происходить в виде изменения формы трещин со значительным уменьшением их объема.

Численный анализ на основе предложенной модели физических полей и фазовых превращений в окрестности мезодефектов в зависимости от параметров импульса ВЭМП и взаимного расположения трещин друг относительно друга позволил установить механизм такого залечивания.

Таким образом, залечивание мезотрещин при воздействии импульсным ВЭМП может происходить в виде изменения формы трещин со значительным (десять процентов) уменьшением их объема. Такой вид залечивания является результатом концентрации электромагнитного поля в вершинах мезотрещин и взаимодействия соседних дефектов друг с другом. Моделирование показало, что концентрация электромагнитного поля в вершине (на ребре) монетоподобной трещины, находящейся в стесненных условиях, индуцирует сильный электрический ток, джоулев нагрев, интенсивное пластическое течение в окрестности дефекта, плавление и испарение металла и уменьшение ее линейных размеров. При этом после релаксации поля температуры (на интервале времени после окончания импульса ВЭМП) большие остаточные пластические деформации приводят к тому, что форма и объем залеченных мезотрещин остаются практически неизменными.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700050-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Кукуджанов. Моделирование воздействия высокоэнергетического импульсного электромагнитного поля на микротрещины в поликристаллическом металле // Вестник ПНИПУ. Механика. № 4. 2015. с. 138–158 DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.09
2. K. V. Kukudzhанov, A. L. Levitin. Modeling the Healing of Microcracks in Metal Stimulated by a Pulsed High-Energy Electromagnetic Field. Part II // Nanomech. Sci. Technol.: Int. J. V. 7, № 2. 2016. 123–148 DOI: 10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i2.30
3. К. В. Кукуджанов. О залечивании поврежденности металла высокоэнергетическим импульсным электромагнитным полем // Вестник ПНИПУ. Механика.. № 2. 2017. 99-124. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.06
4. K. V. Kukudzhанov, A. L. Levitin. Healing of damaged metal by a pulsed high-energy electromagnetic field // J. Phys.: Conf. Ser. Vol. 991. 2018. 012049. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012049

Сведения об авторе

Кукуджанов К. В. – ст.н.с., Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия, (7 495) 434 14 67
E-mail: kconstantin@mail.ru

ЗАЛЕЧИВАНИЕ ТРЕЩИНЫ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЬНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Кукуджанов К.К.

Численно исследуются механизмы заживания трещины в тонкой пластине из поликристаллического цинка под действием импульсов высокоэнергетического электромагнитного поля. Показано, что при рассматриваемом воздействии в вершине макротрещины образуется кратер, образующийся при микровзрыве, который тормозит дальнейшее распространение трещины. Проводится сравнение с имеющимися экспериментальными данными, которое показывает неплохое количественное согласование результатов моделирования и эксперимента.

Импульсное электромагнитное поле называется высокоэнергетическим электромагнитным полем (ВЭМП), если при электромагнитном воздействии на металл в течение $10^{-4} - 10^{-3}$ с величина рассеянной удельной электромагнитной энергии в материале q принимает значения $10^8 \leq q \leq 10^{10}$ Дж/м³ и индуцируется ток с плотностью от 10^8 до 10^{11} А/м².

При воздействиях импульсным ВЭМП на краевые макротрещины в тонких пластинах из цветных и черных металлов в окрестности их вершин наблюдался очень быстрый рост температуры, начиналось плавление, а затем испарением металла с микровзрывом [1]. Продукты микровзрыва выбрасывались из вершины трещины перпендикулярно плоскости пластины, при этом в вершине трещины образовывался кратер [1]. Радиус кривизны в вершине возрастал на несколько порядков, что приводило к фактическому заживанию трещины. Измеренные в вершинах трещин скорости нагрева были порядка 10^7 °С/с, градиенты температуры — $10^6 - 10^7$ °С/м, причем остальная пластина нагревалась не более 10 °С [1].

Рядом исследователей были предприняты попытки моделирования электрических, тепловых и механических процессов, происходящих при вышеописанном импульсном воздействии ВЭМП на трещины в пластинах. Данные процессы рассматривались как в квазистатике [3–7] так и в динамике [8]. Материал пластины предполагался термоупругим [3–7] или термоупруго-пластическим [8], а деформации - малыми. Процесс теплопроводности описывался законом Фурье. В [3] были учтены также возникающие магнитные эффекты. Между тем данные модели давали лишь качественное описание процесс воздействия ВЭМП. Скорости нагрева, градиенты температуры, времена начала плавления в вершине трещины, оказывались значительно отличающимися от измеренных в [1,2]. Температура в вершине трещины не достигала температуры испарения, соответственно модели [3–8] не воспроизводили микровзрыва в вершине и формирования кратера.

Такое положение дел, являлось следствием того, что данные модели не учитывали фазовые трансформации и связанных с ними изменений реологии. Также они в полной мере не учитывали зависимости свойств материала от температуры и не позволяли проследить обратного влияния НДС на электрические и тепловые процессы. Кроме того проведенные аналитические оценки показывают, что при импульсном воздействии ВЭМП плотность тока в окрестности вершины трещины оказываются такой, что относительное изменение температуры на расстояниях порядка длины свободного пробега фононов (и электронов) оказывается больше единицы. Использовать в этом случае закон теплопроводности Фурье не корректно. Более того, как указывалось выше, время воздействия ВЭМП мало. Поэтому процесс воздействия ВЭМП необходимо моделировать в адиабатическом приближении, исключив теплопроводность. В результате модели [3–8] не воспроизводили ключевые процессы, происходящие в окрестности трещины под воздействием импульса ВЭМП.

Для количественного описания рассматриваемых процессов в настоящей работе предлагается использовать конечно-элементную квазистационарную модель воздействия импульсным ВЭМП на трещины в металле.

На основе развитой модели решается задача о воздействии импульсом ВЭМП на краевую трещину в пластине. Задача численно воспроизводит эксперимент, выполненный в [1-2]. Исследуются электрические и тепловые процессы в пластине, изменения напряженно-деформированного и агрегатных состояний в окрестности трещины.

Изучение данных процессов позволит глубже понять механизм заживания макротрещин в пластинах при воздействии ВЭМП и приблизиться к объяснению экспериментально наблюдае-

мого залечивания усталостных трещин путем сварки их берегов. Кроме того получение количественного соответствия результатов расчетов эксперименту будет подтверждать, что модель может правильно воспроизводить электрическое и температурное поля, а также НДС в окрестности микротрещин внутри материала при воздействии на них импульсным ВЭМП.

Исследуются процессы локализации полей плотности тока и температуры, фазовых превращений (плавления и испарения) в вершине трещины, автоэлектронной и термоэлектронной эмиссий между свободными поверхностями трещины и влияние этих процессов на залечивание трещины. Результаты расчетов сравниваются с имеющимися данными эксперимента по воздействию сильным импульсным полем на краевую трещину в пластине.

Средняя скорость нагрева металла и градиенты температуры вблизи вершины трещины, а также температура пластины вдали от вершины трещины количественно согласуются с наблюдаемыми в эксперименте. Аналогично эксперименту моделирование показывает, что в вершине трещины начинается плавление, а затем испарение металла. Таким образом, при рассматриваемом воздействии током в вершине трещины происходит разрушение с образованием кратера, который препятствует дальнейшему распространению трещины, приводя к ее залечиванию.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700050-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Финкель В.М., Головин Ю.И., Слетков А.А. Разрушение вершины трещины силовым электромагнитным полем // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 2. С. 112–118.
2. Финкель В.М., Головин Ю.И., Слетков А.А. О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 4. С. 848–851.
3. Кудрявцев Б.А., Партон В.З., Рубинский Б.Д. Электромагнитное и температурное поле в пластине с разрезом конечной длины // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 110–118.
4. Cai G.X., Yuan F.G. Electric Current-Induced Stresses at the Crack Tip in Conductors // Int. J. Fract. 1999. Vol. 96. No. 3. P. 279–301. [https://doi.org/10.1016/S0965-9978\(97\)00078-1](https://doi.org/10.1016/S0965-9978(97)00078-1)
5. Liu T.J.C. Effects of Temperature-Dependent Material Properties on Stress and Temperature in Cracked Metal Plate under Electric Current Load // International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering. 2010. Vol. 4. No. 5. P. 418–423. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1072134>
6. Yu J., Zhang H., Deng D., Hao S., Iqbal A. Numerical calculation and experimental research on crack arrest by detour effect and joule heating of high pulsed current in remanufacturing // Chin. J. Mech. Eng. 2014. Vol. 27. No. 4. P. 745–753. <https://doi.org/10.3901/CJME.2014.0414.075>
7. Gallo F., Satapathy S., Ravi-Chandar K. Melting and crack growth in electrical conductors subjected to short-duration current pulses // Int. J. Fract. 2011. Vol. 167. No. 2. P. 183–193. <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9543-0>
8. Кукуджанов К.В., Левитин А.Л. Процессы деформирования упругопластического материала с дефектами при электродинамическом нагружении // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 1. С. 106–120. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.07>

Сведения об авторе

Кукуджанов Константин Константинович – аспирант, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия, (7 495) 434 14 67
E-mail: kkukudzhanov@yandex.ru

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧНОСТИ ФУНКЦИИ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ УПРУГИХ ЗВЕНЬЕВ МЕХАНИЗМОВ

Курдина С.П., Геворкян Г.А.

Как известно, упругие динамические системы с разомкнутыми кинематическими цепями, в частности — упругие манипуляторы, эффективным образом описываются рекурсивной моделью обобщенного метода Ньютона–Эйлера с обеспечением расчетных алгоритмов со степенью сложности, пропорциональной размерности этих систем, т.е. $O(n)$. При наличии у упругих динамических систем замкнутых кинематических цепей применение стратегии численного анализа без обращения матрицы масс оказывается крайне затруднительным. Анализ простейшего типа упругих механизмов с замкнутыми цепями, таких как кривошипно-ползунный механизм и механизм четырехшарнирника с упругими шатунами, выявил своеобразную картину периодичности функций упругих перемещений шатунов, существенно отличающуюся от периодов функционирования самих механизмов. Здесь предлагается исследование свойства периодичности функции упругого перемещения механизмов с упругими звеньями переменной длины на примерах численного динамического анализа кривошипно-коромыслового механизма.

1. Введение. В последние годы прошлого тысячелетия в ряде публикаций [1–5] появились обобщения классического метода Ньютона–Эйлера в форме наиболее эффективных формализмов (*very efficient formulations*) на случай динамических систем, содержащих в кинематических цепях упруго-деформируемые звенья. В публикации [6] рекурсивная символьная модель была распространена на случай смешанной (первой и второй) задачи динамики для простейшего класса упругих многозвенных систем. В дальнейшем [7] обобщенный метод Ньютона–Эйлера был успешно применен к численному решению смешанной задачи динамики упругих древовидных многозвенных систем без внешних связей с сохранением характеристики сложности, пропорциональной размерности [8], т.е. $O(n)$.

Сложнее всего дело обстоит с упругими динамическими системами, содержащими в своей структуре замкнутые кинематические цепи. Анализ показывает, что в таких случаях процедура обращения матриц масс данного класса динамических систем оказывается неизбежной. Это означает, что степень сложности наиболее эффективных алгоритмов, призванных к моделированию названных динамических систем, уже не может быть пропорциональной размерности этих систем. Тут находит применение идея гибридной стратегии динамического анализа, объединяющая в себе кинематический и отчасти динамический расчет, проводимые на основе метода Ньютона–Эйлера наряду с процедурой обращения матрицы масс, свойственной методу Лагранжа. Исследованию упругих динамических систем с замкнутыми кинематическими цепями и со всевозможными внешними голономными связями были посвящены работы [9–15]. Настоящая статья предполагает исследование периодичности функции упругих перемещений механизмов с переменными по длине упругими звеньями, к которым относятся, в частности, кривошипно-кулисный и кривошипно-коромысловый механизмы.

2. Постановка задачи и традиционное численное решение. Как известно, процесс динамического анализа упругих древовидных динамических систем сводится к численному решению системы нелинейных дифференциальных уравнений [9, 10]:

$$f_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \vec{\lambda}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad p = \sum_{j=1}^n N_j + n, \quad (1)$$

где n — число обобщенных координат, а N_j — число упругих степеней свободы звена C_j , связанного с предыдущим C_{j-1} и последующим C_{j+1} звеньями посредством одноподвижных кинематических пар V класса, совместно с алгебраическими уравнениями голономных связей

$$g_i(\vec{x}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

относительно обобщенного вектор-аргумента $\vec{x} = [\vec{x}_1^T, \vec{x}_2^T, \dots, \vec{x}_n^T]^T$ и вектора неопределенных множителей Лагранжа $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T$. Здесь $\vec{x}_i = [q_i^r, (\vec{q}_i^e)^T]^T$, $\vec{q}_i^e = [q_{i,1}^e, q_{i,2}^e, \dots, q_{i,N_i}^e]^T$, а символы r и e выражают сокращения от слов rigid (жесткий) и elastic (упругий).

Число m в уравнениях связей (2) выражает количество голономных ограничений, налагаемых на относительное движение звеньев упругой древовидной динамической системы,

состоящей из n линейно-упругих звеньев, связанных между собой вращательными или поступательными узлами [6].

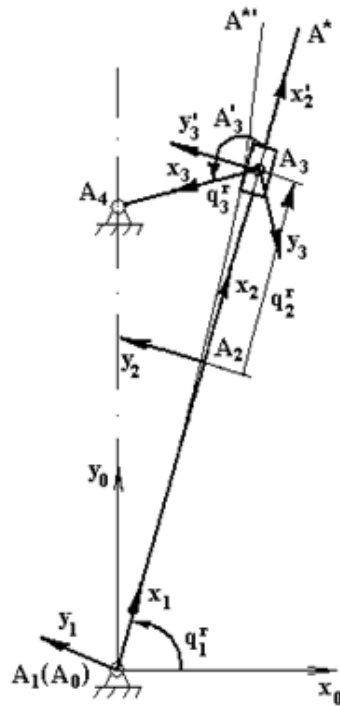


Рис. 1. Расчётная схема механизма с переменным по длине упругим звеном

Линеаризованная для момента времени $t \in [0, T]$ задача, аппроксимирующая систему нелинейных дифференциальных уравнений (1) при склерономных внешних связях (2), предполагает для каждого фиксированного момента времени t решение системы $p + m$ линейных алгебраических уравнений с таким же числом искоемых неизвестных [9]:

$$\begin{cases} F_i(\vec{x}, \vec{\lambda}) = 0, & i = 1, \dots, p, & p = \sum_{j=1}^n N_j + n, \\ \ddot{g}_k(\vec{x}) = 0, & k = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3)$$

где m символизирует количество дополнительных связей, налагаемых на всю древовидную динамическую систему в целом. Подразумевается наперед, что для рассматриваемого класса динамических систем имеет место неравенство: $m \leq 3\theta$ где θ — число входящих в состав динамической системы замкнутых кинематических контуров.

Формализация динамической модели упругих древовидных систем при наличии дополнительных голономных связей проведена на основе обобщенного формализма Ньютона–Эйлера и подробно излагается в публикации [14].

3. Общие свойства механизма с переменным по длине упругим звеном. Рассматривается механизм простой замкнутой кинематической цепи, в структуре которого один из элементов (призматическое звено A_3) выступает в роли камня (рис. 1). Упругим элементом механизма в зависимости от геометрических размеров его звеньев является либо коромысло, либо кулиса, формально-недеформированная и реально-деформированная конфигурации которых обозначаются на рис. 1 отрезком A_1A^* и дугой A_1A^{**} , соответственно [10].

Геометрические характеристики принимаются равными следующим значениям: $A_1A_4 = 5a$, $A_1A^* = 12a$, $A_1A_2 = \sqrt{25a^2 + l_3^2}$, где $a = l_3 = 0.1$ м; радиусы звеньев $r_1 = r_3 = 3 \cdot 10^{-3}$. Задаются также и физико-механические характеристики звеньев механизма: $\rho_1 = \rho_3 = 7800$ кг/м³, $E_1 = 200$ МПа, $m_2 = 0.1$ кг. Закон движения входного звена механизма выражается в виде некоторой периодической функции времени:

$$q_1^r(t) = \alpha + \beta l_3 \sin(\gamma t). \quad (4)$$

4. Математическая модель упругой динамической системы. Математическое описание исследуемой упругой динамической системы с внешними геометрическими связями (рис. 1) предполагает построение её кинематической и динамической моделей.

Формальная запись этих моделей в терминах современной записи законов классической механики в шестимерном пространстве сводится к составлению уравнений кинематических связей упругих звеньев [14], а именно,

$${}^i\vec{V}_i = {}^i\mathbf{T}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{V}_{i-1} + {}^i\mathbf{T}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\Phi_{i-1} \cdot \vec{q}_{i-1}^e + \dot{q}_i^r \vec{a}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$${}^i\vec{V}_i = {}^i\mathbf{T}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\vec{V}_{i-1} + {}^i\mathbf{T}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\Phi_{i-1} \cdot \vec{q}_{i-1}^e + \ddot{q}_i^r \vec{a}_i + {}^i\vec{h}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

в которых ${}^i\vec{V}_i$ и ${}^i\dot{V}_i$ — векторы обобщённых (линейных и угловых) скоростей и ускорений, \dot{q}_i^r и \ddot{q}_i^r — обобщённые скорости и ускорения, а \vec{q}_{i-1}^e и \vec{q}_i^e — векторы скоростей и ускорений упругих переменных [14].

Динамическая модель упругой многозвенной системы при наличии внешних голономных связей выражает в терминах заимствованной терминологии систему уравнений (3), из которых предварительно исключен вектор ускорений упругих переменных:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{r\lambda} \\ \mathbf{M}_{\lambda r} & \mathbf{M}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{Q}^r \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\Gamma} + \vec{E}_r \\ \vec{E}_\lambda \end{bmatrix}, \quad (7)$$

причем второе матричное уравнение в (7) выражает в дифференциальной форме систему алгебраических уравнений дополнительных геометрических связей исследуемого упругого механизма (рис. 1), т.е.

$$\begin{cases} 5a \cos q_1^r - l_3 \sin q_3^r = 0, \\ 5a \cos(q_1^r + q_3^r) + \left(\sqrt{25a^2 + l_3^2} + q_2^r \right) \sin q_3^r = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Пояснение остальных инерционных, геометрических и упругих характеристик твердых деформируемых тел, участвующих в математической модели (5)–(7), подробно приводится в публикации [14].

В прикладной интерпретации математическая модель (5)–(8) упругой динамической системы с простой замкнутой кинематической цепью преобразуется в алгоритм численного динамического анализа рассматриваемого класса упругих механизмов [9]:

1. Кинематический расчёт звеньев для множества $\{M\}$ в соответствии с (5) по первому восходящему рекурсивному обороту обобщённого метода Ньютона–Эйлера [9].

2. Определение на основании уравнений (7) обобщённых ускорений в кинематических парах системы, соответствующих подмножеству $\{M_1\}$, приводных усилий – в парах, отображаемых подмножеством $\{M_2\}$, а также множителей Лагранжа [9], т.е.

$$\vec{X} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \vec{E}, \quad \dim(\mathbf{R}) = (n+m) \times (n+m); \quad \dim(\vec{X}) = \dim(\vec{E}) = n+m \quad (9)$$

с учётом принятых в формулировке (9) условных обозначений [14].

3. Динамический расчёт звеньев согласно (6) для множества $\{M\}$ по третьему восходящему рекурсивному обороту обобщённого метода Ньютона–Эйлера [9].

5. Случай кривошипно-коромыслового механизма с упругим коромыслом. В первую очередь рассматриваем случай, когда $A_3 A_1 = a < A_1 A_4$, т.е. когда механизм с переменным по длине упругим звеном отождествляется с кривошипно-коромысловым механизмом. Движение механизма получает определенность в силу задания закона движения входного звена (1) при значениях постоянных $\alpha = \pi/2$ рад, $\beta = 1$ рад/м и $\gamma = 25$ рад/с, а также на основе фиксации начальных условий в обобщённых координатах $q_1^r = \pi/2$ рад, $q_2^r \approx 0.0901$ м, $q_3^r = \pi$ рад, $\vec{q}_1^e = 0$ и в обобщённых скоростях $\dot{q}_1^r = 2.5$ рад/с, $\dot{q}_2^r = \dot{q}_3^r = 0$, $\vec{q}_1^e = 0$.

Результаты тестирования сформулированной задачи предлагаются в форме графиков зависимостей обобщённых координат q_1^r , q_2^r и функции упругих перемещений u_3 точки A_3 в интервале функционирования $t \in [0, T]$ при $T = 1.25$ с (рис. 2).

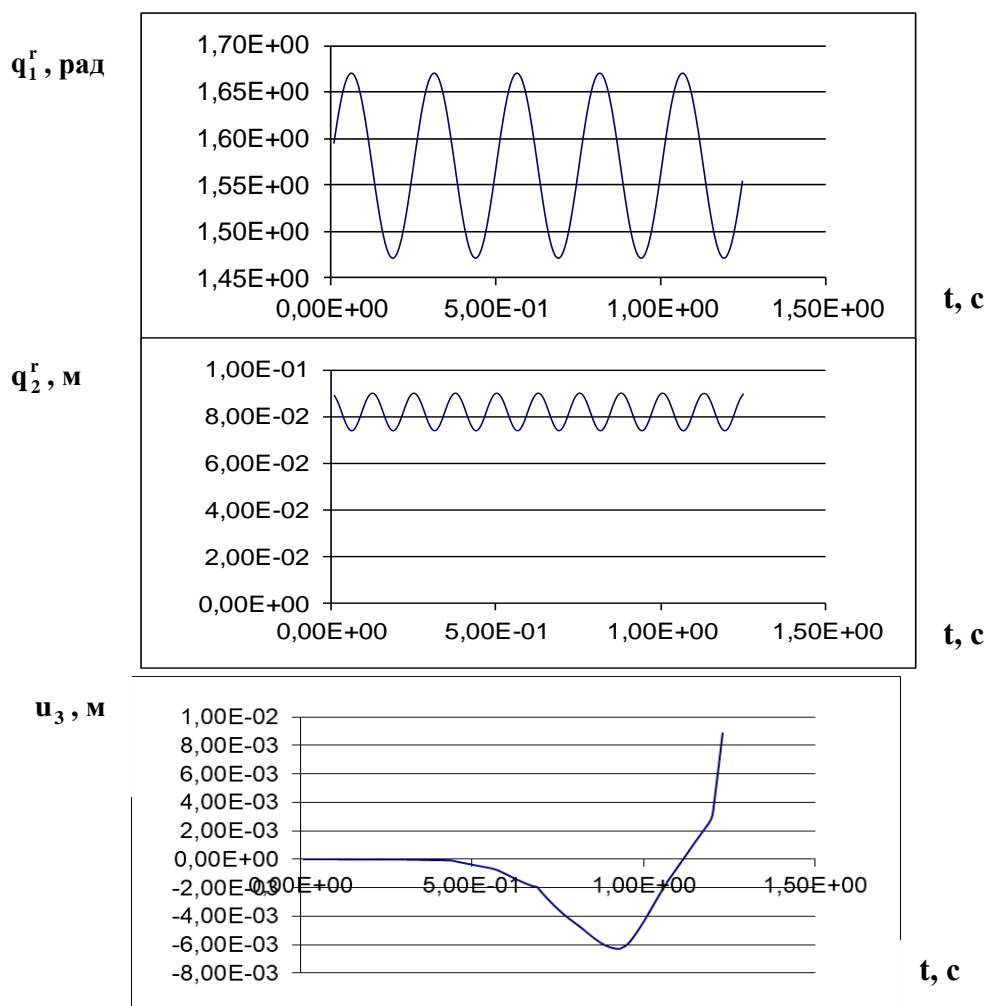


Рис. 2. Зависимости обобщённых координат и упругих перемещений от времени

Заключение. Проведенное численное исследование механизмов с переменными по длине упругими звеньями позволяет утверждать о квазипериодическом характере функции упругого перемещения, как это свойство было ранее установлено в процессе динамического анализа кривошипно-ползунного и кривошипно-шатунного механизмов с упругими шатунами. Следует также обратить внимание на сложность преодоления сингулярных положений механизмов, или так называемых «мёртвых точек», чрезвычайно затрудняющих вычислительный процесс симуляции рассматриваемого класса упруго-динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Verlinden O., Dehombreux P., Conti C., et al. A new formulation for the direct dynamic simulation of flexible mechanisms based on the Newton-Euler inverse method // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1994. V. 37. P. 3363–3387.
2. Fisette P., Samin J.-C. Symbolic generation of large multibody system dynamic equations using a new semi-explicite Newton-Euler recursive scheme // *Arch. Appl. Mech.* 1996. V. 66. P. 187–199.
3. Boyer F., Coiffet P. Generalization of Newton-Euler model for flexible manipulators // *Int. J. Robot. Syst.* 1996. V. 13. № 1. P. 11–24.
4. Boyer F., Coiffet P. Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton-Euler model // *Int. J. Mech. Mach. Theory.* 1996. V. 31. № 1. P. 45–56.
5. Boyer F., Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics // *Int. J. Robot. Res.* 1998. V. 17. № 3. P. 282–293.

6. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона–Эйлера // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. 2004. Т. 57. № 1. С. 3–10.
7. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. 2006. Т. 59. № 1. С. 3–9.
8. Геворкян Г.А. Моделирование динамики упругих звеньев исполнительных механизмов манипуляторов без обращения их матриц масс // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Ест. Науки. 2022. № 1 (100). С. 4–21.
9. Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей // Information Technologies and Management. – Encyclopedia-Armenica. 2004. № 4. С. 36–43.
10. Геворкян Г.А. Динамическое моделирование механизмов с упругими звеньями переменной длины // Вестн. ГИУА. Сер. Мех., Машинов., Машиностр. 2014. Выпуск 17. № 2. С. 34–41.
11. Геворкян Г.А. Приложение обобщенного метода Ньютона–Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов // Изв. АН РА и ГИУА. Сер. Т.Н. 2010. Т. 63. № 2. С. 133–138.
12. Геворкян Г.А. Динамическое моделирование механизма шарнирного четырехзвенника с упругим шатуном // Сб. тр. VIII межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», сентябрь 22–26, 2014, Горис-Степанакерт. Ереван. С. 143–147.
13. Геворкян Г.А. Анализ периодичности упругих перемещений шатуна в процессе движения кривошипно-ползунного механизма без учета диссипативных сил // Сб. тр. VI межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», октябрь 1–6, 2019, Дилижан. Ереван. С. 111–114.
14. Геворкян Г.А. Моделирование упругих древовидных динамических систем при наличии внешних голономных связей // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Ест. науки. 2020. № 2 (89). С. 4–24.
15. Геворкян Г.А. Высокоточное моделирование механизма шарнирного параллелограмма с упругим шатуном // Сб. тр. VII межд. н. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», октябрь 4 – 8, 2021, Цахкадзор. Ереван. С. 77–80.

Сведения об авторах

Курдина Светлана Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

E-mail: kurdinasp@bmstu.ru

Геворкян Грант Араратович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА.

E-mail: hrgevorkian@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ИНТЕНСИВНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛЮМИНИЕВОГО КОМПОЗИТА, ПОЛУЧЕННОГО МЕТОДОМ АДДИТИВНОЙ ПЕЧАТИ

Мавлютов А.М., Евстифеев А.Д., Смирнов И.В., Волосевич Д.В.

В работе исследован композитный материал на основе технически чистого алюминия (AA1050) и промышленного сплава системы Al–Mg (AA5056), полученный методом аддитивной печати. Получены экспериментальные зависимости о влиянии степени деформации методом кручения под давлением на механические свойства композитного материала. Выявлены режимы деформации, обеспечивающие оптимальное сочетание прочности и пластичности.

Традиционными методами повышения прочности алюминиевых сплавов являются легирование и деформационно-термическая обработка (ДТО). Однако эти методы ухудшают пластичность алюминиевых сплавов, поскольку практически все внесенные дефекты препятствуют пластическому течению в материале. Поиск путей одновременного повышения прочности и пластичности алюминиевых сплавов является актуальной задачей современного физического материаловедения. В ряде работ была предложена идея создания бимодальной зеренной структуры, в которой более крупные зерна обеспечивали бы повышенный уровень пластичности, а более мелкие зерна – необходимый уровень прочности [1]. Однако создание такой структуры невозможно при использовании традиционных методов ДТО. В связи с этим особый интерес представляют современные методы послойной печати, позволяющие создавать композитные материалы на базе двух или нескольких компонентов. К примеру, технически чистый алюминий в крупнозернистом состоянии обладает превосходной пластичностью, а сплавы системы Al–Mg отличаются повышенной прочностью и являются деформационно-упрочняемыми, следовательно, создание композитного материала на основе этих двух компонентов может стать решением проблемы несовместимости прочности и пластичности.

В настоящей работе исследован композитный материал на основе технически чистого алюминия (AA1050) и промышленного сплава Al–4.5Mg (AA5056), полученный методом аддитивной проволоочной печати. Методика аддитивной печати подробно описана в работе [2]. Композитный материал был произведен таким образом, что включал в себя 1, 2 или 3 полосы AA1050 в матрице сплава AA5056 (образцы 1L, 2L и 3L, соответственно). Полученный композитный материал был подвергнут отжигу при 450 °С в течение 1 ч. Для последующей интенсивной пластической деформации кручением под давлением (ИПДК) [3] были вырезаны образцы в форме дисков диаметром 10 мм и толщиной 1.5 мм. Обработка ИПДК была проведена на различное количество оборотов n (от 0.25 до 10) под давлением 6 GPa при комнатной температуре, методика ИПДК. Степень деформации фон Мизеса на расстоянии $r=5$ mm от центра диска определялась в соответствии с соотношением [3]:

$$\varepsilon_{vM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\pi r n}{h}, \quad (1)$$

где $h=1$ mm – толщина образца.

На рисунке 1 представлены результаты испытаний на одноосное растяжение композитного материала в исходном состоянии и при различных степенях деформации. В исходном состоянии (кривые 1L, 2L и 3L) прослеживается зависимость прочности и пластичности от соотношения количества материалов в составе композита. Материал с одной полосой AA1050 имеет наилучшее сочетание прочности и пластичности, поскольку оба компонента находятся в крупнозернистом состоянии и имеют высокую пластичность, а большая доля сплава AA5056 обеспечивает более высокие предел текучести и потенциал к деформационному упрочнению. Обработка ИПДК приводит к существенному увеличению прочности уже после 0.25 оборота (соответствует степени деформации 4.5), однако пластичность материала снижается (кривая 2L_НРТ_0.25). При увеличении степени деформации сохраняется тенденция повышения прочности и снижения пластичности как для образца 1L, так и для образца 2L. Для образца 2L показано, что увеличение степени деформации до $\varepsilon_{vM} \approx 18$ обеспечивает оптимальное сочетание предела прочности, условного предела текучести и пластичности (рисунок 2). Дальнейшее повышение степени деформации приводит к снижению пластических свойств, по-видимому,

вследствие сильного перемешивания компонентов материала. При максимальной степени деформации $\varepsilon_{VM} \approx 181$ материал все ещё сохраняет пластические свойства и демонстрирует прочность $\sigma_{UTS} \approx 620$ МПа. Полные результаты механических испытаний образцов представлены в Таблице 1.

Известно, что аналогичная обработка ИПДК приводит к измельчению зеренной структуры до ~ 800 нм в технически чистом Al [4] и до ~ 200 нм в сплаве Al–4.5Mg [5]. Как было показано ранее, сплав Al–4.5Mg полученный традиционным способом и подвергнутый аналогичной обработке ИПДК демонстрирует хрупкое поведение, имея при этом предел прочности 725 МПа [5]. Значение предела прочности для технически чистого алюминия при аналогичной обработке ИПДК составило 185 МПа, при этом значение равномерной деформации составило 2% [6]. В данной работе удалось получить материал, сочетающий в себе прочность наноструктурного промышленного сплава и пластичность наноструктурного технически чистого алюминия, а также показана возможность создания более пластичного материала без существенной потери прочностных характеристик. Выявление особенностей микроструктуры, обеспечивающих такое сочетание механических свойств композитного материала является целью дальнейших исследований.

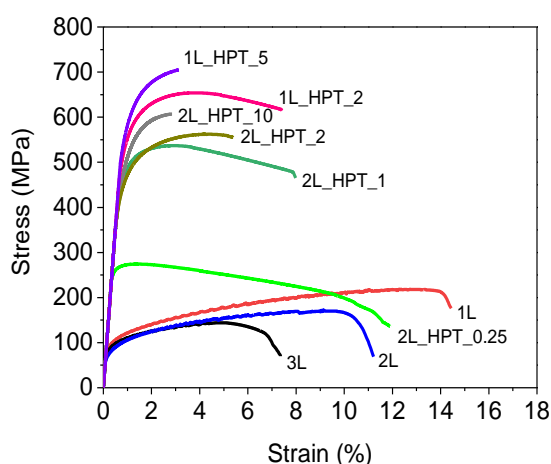


Рис. 1. Диаграммы напряжение–деформация для образцов композитного материала с различной степенью деформации

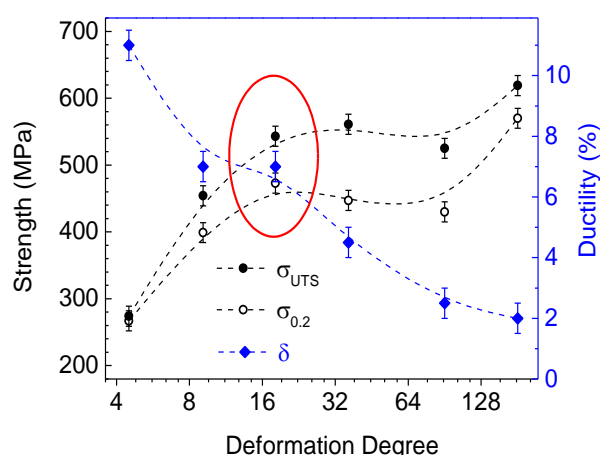


Рис. 2. Зависимости условного предела текучести ($\sigma_{0.2}$), предела прочности (σ_{UTS}) и пластичности (δ) от степени деформации для образцов композитного материала с исходной конфигурацией 2L

Таблица 1. Механические свойства композитного материала

Состояние	ε_{VM}	σ_{UTS} (МПа)	$\sigma_{0.2}$ (МПа)	δ (%)
1L_HPT_2	36	664±10	570±10	7±1
1L_HPT_5	91	705±11	587±10	2±0.5
1L_HPT_10	181	611±15	590±5	~0.5
2L_HPT_0.25	4.5	274±10	267±10	11±1
2L_HPT_0.5	9	454±15	399±15	7±2
2L_HPT_1	18	543±5	473±10	7±1
2L_HPT_2	36	561±5	447±5	4.5±0.5
2L_HPT_5	91	525±15	430±15	2.5±0.5
2L_HPT_10	181	619±15	570±5	2±0.5

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант №22-79-10043)

ЛИТЕРАТУРА

1. Sabirov I., Murashkin M. Y., Valiev, R. Z. Nanostructured aluminium alloys produced by severe plastic deformation: New horizons in development. MSEA, 560, 1-24, 2013.
2. Mavlyutov A., Evstifeev A., Volosevich D., Gushchina M., Voropaev A., Zotov O., Klimova-Korsmik O. The Effect of Severe Plastic Deformation on the Microstructure and Mechanical Properties of Composite from 5056 and 1580 Aluminum Alloys Produced by Wire Arc Additive Manufacturing. Metals, 13, 1281, 2023
3. Valiev R., Islamgaliev R., Alexandrov I. Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation. Prog. Mater. Sci., 45(2), 103, 2000.
4. Orlova T., Mavlyutov A., Bondarenko A., Kasatkin I., Murashkin M., Valiev R. Influence of grain boundary state on electrical resistivity of ultrafine grained aluminium. Philos. Mag., 96(23), 2429, 2016.
5. Evstifeev A., Smirnov I. Effect of annealing and additional deformation on the microstructure and mechanical properties of ultrafine-grained Al5083 alloy. Mater. Phys. Mech. 2023, in press.
6. Mavlyutov A., Latynina T., Murashkin M., Valiev, R., Orlova, T. Effect of annealing on the microstructure and mechanical properties of ultrafine-grained commercially pure Al. Phys. of the Solid State, 59, 1970, 2017.

Сведения об авторах

Мавлютов А.М. – старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет
a.m.mavlyutov@gmail.com

Евстифеев А.Д. – старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет
ad.evstifeev@gmail.com

Смирнов И.В. – старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет
i.v.smirnov@spbu.ru

Волосевич Д.В. – инженер, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
dasha.volosevich@mail.ru

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ СПЛАВА СИСТЕМЫ Al-Mg-Si В КРУПНОЗЕРНИСТОМ И УЛЬТРАМЕЛКОЗЕРНИСТОМ СОСТОЯНИИ

Магомедова Д.К.

Процесс разрушения крупнозернистых материалов (КЗ) при статических нагрузках изучен достаточно подробно и продолжает дополняться различными данными, более полно описывающими поведение материала на микро- и макроуровнях. Менее изученным является процесс разрушения ультрамелкозернистых (УМЗ) сплавов, включая этап образования пор внутри материала, когда превышены пределы прочности, но само разрушение ещё не наступило. Изучение особенностей поведения материала на данном этапе разрушения важно для более полного описания свойств УМЗ материалов. В представленной работе исследованы особенности разрушения УМЗ сплава Al-6101 и сравнение их с особенностями разрушения сплава Al-6101 после стандартных обработок, т.е. в КЗ состоянии.

Материал и методы обработки.

В качестве материала исследования был выбран технический термоупрочняемый алюминиевый сплав 6101, относящийся к системе Al—Mg—Si. Экспериментальные образцы изготавливали из катанки, полученной горячей прокаткой, в виде прутков диаметром 10 мм.

Применяли два способа обработки исходного сплава для повышения прочностных свойств:

- *искусственное старение (ИС)*- отжиг при температуре 550°C 2 часа с последующей закалкой в воде комнатной температуры, далее на протяжении 12 часов материал подвергался старению путем отжига при температуре 170°C;
- *метод РКУП- конформ*: отжиг 550° С на 2 часа, закалка в воде комнатной температуры, и сразу проводилось 4 цикла РКУП- К при комнатной температуре по маршруту Вс, угол сопряжения каналов 130°. Сплав подвергался методу РКУП- К в свежезакаленном состоянии твердого раствора и далее претерпевал естественное старение.

Из полученных катанок двух типов структур изготавливались цилиндрические образцы с винтовыми захватами с диаметром поперечного сечения 5 мм и длиной рабочей части 5 мм.

Механические испытания.

Механические испытания на статическое растяжение цилиндрических образцов проводились на машине Shimadzu AG-50kNX со скоростью растяжения $1,4 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, при комнатной температуре. Изменение длины образцов регистрировалось с помощью видеоэкстензометра Shimadzu TRViewX. Часть образцов растягивалась до разрушения. Часть образцов растягивалась без разрушения до этапа образования пор с целью выявления момента зарождения пор в шейке, как первого этапа процесса разрушения.

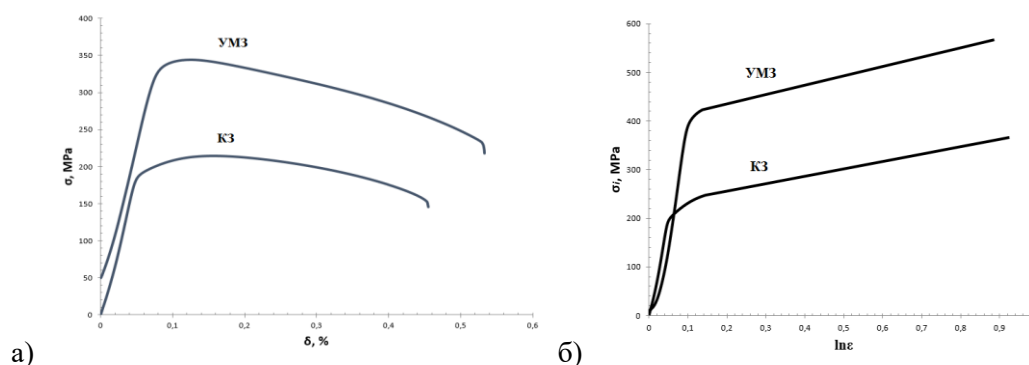


Рис. 1. Диаграммы для состояний искусственного старения (КЗ) и ультрамелкозернистого зерна (УМЗ) : а) инженерная, б) истинная деформация - истинное напряжение.

На Рис.1 и в Таб.1 представлены данные, полученные в результате механических испытаний.

Таблица 1. Механические характеристики сплава 6101 в состояниях КЗ и УМЗ [3-5].

Состояние структуры	$\sigma_{0,2}$, МПа/МПа	$\sigma_{в}$, МПа/МПа	$\delta_{рав}$, %	δ , %	$\sigma_{разруш}$, МПа/	$\epsilon_{разр}$
КЗ	230	265	12	42	365	0,92
УМЗ	304	351	5	48	565	0,95

Определение начального этапа разрушения – начала формирования пор.

Образцы в разных состояниях растягивались до различных значений напряжений, т.е. экспериментальным путём определяли напряжения/деформации, при которых образцы начинали разрушаться путём образования пор внутри них, без образования трещин.

Первоначально наличие пор было оценено методом оптической микроскопии и, если поверхность среза была без дефектов, следовательно, поры ещё не образовались, и выбранный режим остановки механического испытания не подходил для поставленной задачи. Далее увеличивали напряжение на 50 МПа с каждым шагом до тех пор, пока не обнаружались дефекты в виде пор при осмотре осевых срезов на микроскопе. После этого осевые срезы детально исследовались методами СЭМ.

Если растяжение проводили до $\sigma_{\text{макс}}$ и эксперимент останавливали, а внутри не обнаружили поры, значит, образцы ещё не достигли первой стадии процесса разрушения. Если же растяжение проводили до $\varepsilon^* \approx 40\%$ что в пересчете на истинную деформацию составляет $\varepsilon^* \approx 0,7$, то образцы ещё не разрушались, но внутри образцов уже образовывались трещины, что символизировало собой вторую стадию разрушения – когда поры уже объединились/слились в трещины.

Исследование структуры.

Исходный сплав, обработанный по традиционной технологии закалки и старения, согласно СЭМ имел микроструктуру со средним размером зерна 100 мкм, также в структуре присутствовали интерметаллидные частицы первичной фазы Al-Fe на основе примесного Fe кристаллизационного происхождения, размер ≈ 5 мкм. Исследования с помощью ПЭМ сплава в КЗ состоянии выявили также очень мелкие дисперсные частицы размером от 3 до 20 нм – дисперсные частицы вторичной упрочняющей β' -фазы Mg_2Si . Согласно данным ПЭМ, в результате РКУП-К в сплаве сформировалась УМЗ структура с размером зерна Al-матрицы от 400 до 600 нм. Формирование УМЗ-структуры при РКУП-К сопровождалось распадом твердого раствора и формированием дисперсных частицы второй фазы также размером от 3 до 20 нм за счет динамического старения (ДС).[1,2]

СЭМ исследование частиц Al-Fe

На Рисунке 2 представлена область образца с белыми частицами, которые представляют собой частицы на основе железа. Данное утверждение сделано на основе рентгеновской энерго-дисперсионной спектроскопии, которые указывают на повышенное содержание частиц железа по светлым областям, указанным на Рисунке 2.

Интерметаллид образуется как тройное соединение AlFeSi , с учетом что содержание кремния в частицах (в сканируемых областях) так же заметно повышено относительно среднего по сплаву (0,60 %). Данные частицы не растворяются и не изменяются в процессе отжига под закалку и не изменяются при последующих термообработках (отжигах на старение) [2]. Размеры частиц Al-Fe в КЗ имеют размеры до 7 μm (Рис.2.а).

EDX – анализ (аналитический метод элементного анализа твёрдого вещества) частиц показал наличие в частицах повышенного относительно матрицы содержания Fe, Si.

На основе данных, полученных для УМЗ структуры, можно сделать вывод, что размеры частиц Al-Fe в УМЗ материале имеют размеры до 2 μm (Рис.2.б).

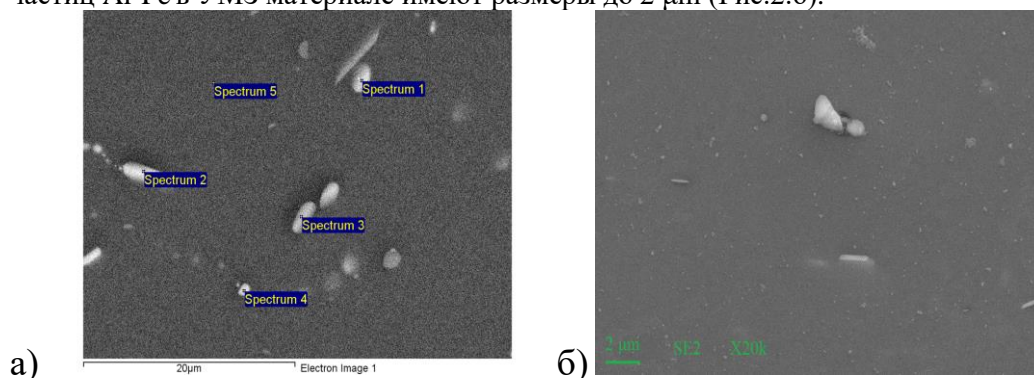


Рисунок 2. Поверхность осевого среза образца с : а) КЗ и б) УМЗ структурой.

Исследование осевого сечения образцов Al 6101, полученных при статическом растяжении до деформации $\epsilon \approx 40\%$

Образцы, растянутые до ϵ^* , разрезались вдоль оси на электро-эрозионном станке ARTA 123-PRO с прецизионной точностью 1-2 мкм. Поверхность среза была подвергнута шлифовке и полировке до шероховатости поверхности в 50 нм и далее исследовалась с помощью электронной микроскопии.

Для сравнения на Рисунке 3 представлено два снимка: для образца с КЗ структурой и образца с УМЗ структурой. Хорошо видно наличие и расположение пор в обоих типах структур, а также различие их размеров, согласно маркерам.

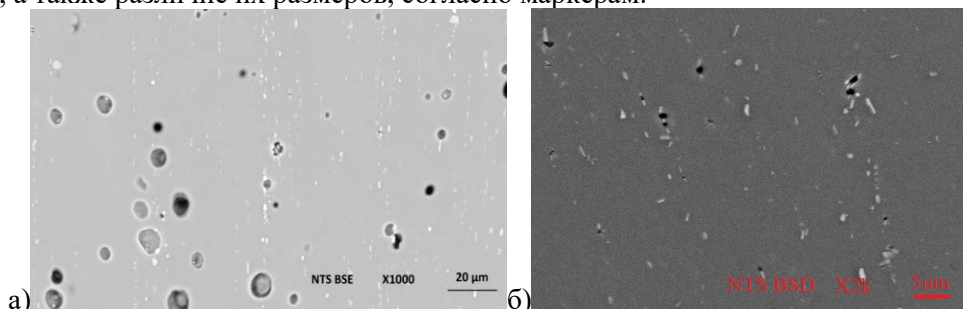


Рисунок 3. Снимок осевой поверхности образца с: а) КЗ, б) УМЗ структурой с порами после растяжения до ϵ^* .

Исследование поверхности изломов образцов

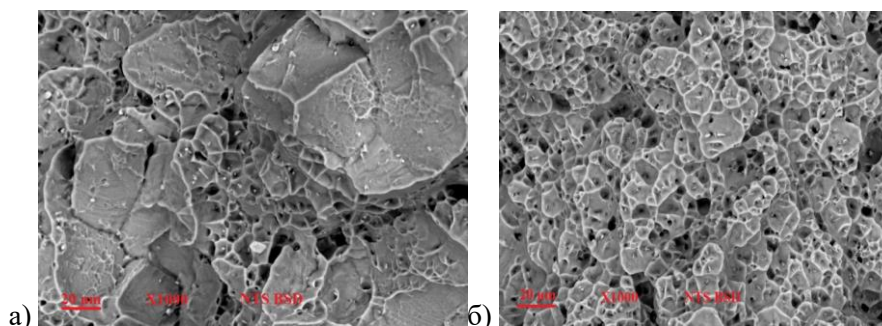


Рисунок 4. Общий вид области разрушения образцов с: а) КЗ; б) УМЗ структурой.

Рисунок 4 показывает, что поверхность излома образцов после статического растяжения при комнатной температуре образована ямками и носит преимущественно вязкий характер. Изломы имеют в целом однородную структуру.

Ямки представляют собой места первичного образования пор при растяжении материала, которые в дальнейшем объединялись и образовывали трещины, которые сливались в большие трещины, по которым образцы и разрушились. Ямки излома являются центрами зарождения «разрушения» и их исследование представляет особый интерес.

Таблица 2. Среднее содержание элементов в ямках излома КЗ и УМЗ образцов по данным спектрального анализа.

	Mg (wt.%)	Si (wt.%)	Fe (wt.%)
Среднее содержание элементов в КЗ материале	1,5	2,97	4,74
Среднее содержание элементов в УМЗ материале	0,93	0,46	0,45

Показано, что содержание Fe на поверхности излома в УМЗ состоянии заметно ниже, чем в КЗ. Предположительно это объясняется тем, что после РКУП меняется характер разрушения, т.к. областями зарождения пор и последующего разрушения могут являться другие элементы структуры, например, области более высокой плотности дислокаций, дефекты, сформированные при РКУП, и интерметаллиды железа уже не играют определяющую роль на формирование поверхности разрушения, либо они также несколько измельчаются при РКУП, что и приводит к их меньшему вкладу в разрушение.

Анализ роста истинного напряжения разрушения образцов для УМЗ состояния относительно его КЗ состояния.

В вопросах порообразования распространена модель Зинера -Строте, представляющая собой критерий порообразования, согласно которому пора на частице образуется при условии достижения напряжением σ некоторого критического значения σ_r : $\sigma > \sigma_r$.

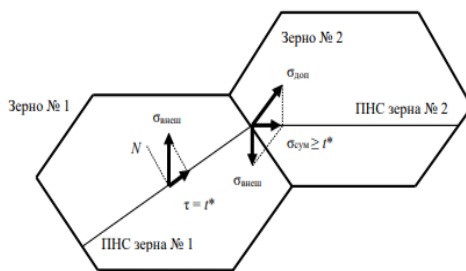


Рисунок 5. Схема, иллюстрирующая эстафетную передачу пластической деформации в поликристалле, определяющую закон Холла-Петча.

Модель холла-Пэтча для напряжения разрушения: некоторое число дислокаций n_p , что скапливаются на границе зерно/частица, возрастает с ростом длины пробега дислокаций, т.е. с увеличением размера зерна. А уже на границе зерно/частица скопления дислокаций n_p , дают напряжения σ_{pp} . Чтобы достичь некоторого критического напряжения σ_r , что вызывает разрыв на границе материал/частица, и сформировать поры, вполне применимо использование уравнения из модели дислокационных скоплений: $\sigma_r \sigma_{fail} = \sigma_c - \sigma_{pp}$, где $\sigma_{pp} = (2Gb_L \sigma_c / \alpha \pi)^{1/2} d^{1/2}$.

Соответственно, чем меньше размер зерна, тем скопление дислокаций меньшей плотности скапливается на границе частица/зерно, и тем большее внешнее напряжение требуется для разрыва на границе зерна матрицы – частица и образования поры.

Разрушение же будет происходить посредством формирования и объединения возникающих при деформации пор, и, следовательно, σ_r определяет σ_{fail} как: $\sigma_r \sim \sigma_{fail}$.

Можно сделать вывод, что одновременное применение модели дислокационных скоплений с моделью Зинера –Строте помогает разъяснить повышенное истинное напряжение разрушения для ультрамелкозернистых материалов.

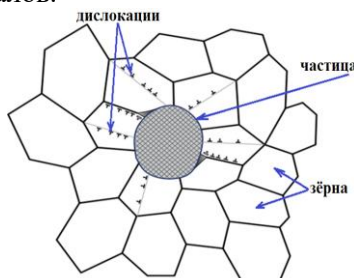


Рисунок 6. Диаграмма, объясняющая повышенное истинное напряжение разрушения в материалах с меньшим размером зерна.

Выводы.

- Содержание Fe на поверхности излома УМЗ состояния заметно ниже, чем в КЗ состоянии, т.к. после РКУП-К меняется характер разрушения.
- РКУП-К обработка приводит к измельчению частиц Al-Fe от 7 до 2 μm в сплаве 6101, относительно состояния сплава в его крупнозернистом состоянии.
- Образцы с УМЗ структурой показывают прочность на 25 % выше, чем КЗ состояние, а предел текучести на 50 % выше, чем КЗ состояние. Это объясняется зернограницным упрочнением: зернограницное упрочнение - результат измельчения зерна при РКУП-К складывается с дисперсионным упрочнением (являющимся результатом естественного старения после РКУП-К).
- Повышенное истинное напряжение разрушения УМЗ состояния определяется его повышенной устойчивостью к формированию трещин.

- Размер ямок на поверхности изломов у образцов с КЗ структурой можно оценить размером до 10 μm , у образцов с УМЗ структурой – до 5 μm . Это свидетельствует, что в УМЗ состоянии при разрушении было задействовано сразу большое количество центров зарождения микродефектов, относительно состояния КЗ.
- Крупнозернистому состоянию соответствуют поры размером 3-7 мкм, для УМЗ – 1-2 мкм. Наибольшая концентрация пор располагается в центре образца, что соответствует области концентрации максимальных напряжений.
- Качественный анализ экспериментальных и теоретических результатов позволяет предположить, что величина критического напряжения при образовании пор в УМЗ материале имеет более высокие значения.
- Рост предела текучести и связанного с ним предела прочности в УМЗ состоянии объясняется законом Холла-Петча: при уменьшении размера зерна требуется большее внешнее напряжение для задания течения дислокаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Enhanced mechanical properties and electrical conductivity in ultrafine-grained Al alloy processed via ECAP-PC / M.Y. Murashkin, I. Sabirov, V.U. Kazykhanov, E.V. Bobruk, A.A. Dubravina, R.Z. Valiev // Special Issue: Nanostructured Materials; Guest Editor: Yuntian T Zhu. 13 ed: Springer Netherlands; 2013. -pp. 4501-4509.
2. Ultrafine-grained materials prepared by severe plastic deformation / ed. by R. Z. Valiev. - Annales de Chemie. Science des Materiaux, 1996. - 21(6-7). - pp. 369.
3. Распределение напряжений при статическом растяжении цилиндрических образцов из мелко- и крупнозернистого алюминиевого сплава 6101 / Магомедова Д.К., Чуракова, А. А. // Наноиндустрия.- 2021.- Выпуск 1.
4. Magomedova, D.K. Investigation of mechanical properties and fracture surface of cylindrical samples Al-6101 under static tension / Magomedova D.K., Churakova A.A., Gunderov D. V. // Journal of Physics: Conference Series.- 2022. -012023.
5. True fracture stress of UFG samples of Al 6101 alloy / Gunderov D.V., Gunderova S.D., Magomedova D.K. // Letters on Materials.- 2022.- 12(4s).- pp. 424-427.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования выполнены при поддержке проекта Мегагрант №075-15-2022-1114.

Сведения об авторе:

Магомедова Дарья Курбановна – научный сотрудник лаборатории «Динамика и экстремальные характеристики перспективных наноструктурированных материалов» СПбГУ, 8(950)0149254

E-mail: magmedva.dasha@mail.ru

СВЕРХЗВУКОВАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ ПАНЕЛИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, ПЕРВОНАЧАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: СЖАТОЙ ПО ПОТОКУ ГАЗА И РАСТЯНУТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартirosян С.Р.

В статье, в линейной постановке, исследуется задача статической устойчивости прямоугольной пластинки, первоначально нагруженной по двум направлениям сжимающими и растягивающими силами, соответственно, по потоку газа и в перпендикулярном направлении, в предположении, что сверхзвуковой поток газа набегаёт на её свободный край. Получено аналитическое решение задачи.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая прямоугольная пластинка, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V . Течение газа предполагается плоским и потенциальным.

Пусть край $x = 0$ пластинки свободен, а края $x = a$, $y = 0$ и $y = b$ закреплены идеальными шарнирами.

Будем полагать, что первоначально, ещё до обтекания, пластинка подвержена действию сжимающих $N_x = 2h\sigma_x$ и растягивающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, равномерно распределённых, соответственно, по кромкам пластинки $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y)$ [1, 2].

Прогиб пластинки $w = w(x, y)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой “поршневой теории” [3]: $\delta p = -a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x}$, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа. При этом предполагается, что прогибы $w = w(x, y)$ малы относительно толщины пластинки $2h$.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривлённая форма равновесия (изогнутая пластинка) в случае, в котором изгиб пластинки обусловлен одновременно соответствующими аэродинамическими нагрузками Δp и первоначально приложенными к кромкам пластинки силами N_x , N_y .

Тогда, в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной прямоугольной пластинки описывается соотношением [1, 2]:

$$D\Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y); \quad (1.1)$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = a \quad \text{и} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b; \quad (1.3)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа в сверхзвуковом и гиперзвуковом интервале скоростей [1, 2]:

$$V_{cr.} \in (a_0 M_0, a_0 M_{2cosm.}), M_0 = \sqrt{2}, M_{2cosm.} \approx 33.85; \quad (1.4)$$

приводящую к потере статической устойчивости состояния равновесия системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}, \sigma_y < (\sigma_y)_{pr.}, \quad (1.5)$$

$(\sigma_x)_{cr.}$ – критические напряжения, которые могут произвести выпучивание пластинки в отсутствии обтекания ($V = 0$) [7]; $(\sigma_y)_{pr.}$ – усилие, начиная с которого имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [5].

Введём обозначение

$$\gamma = ab^{-1} \in (0, \infty), \quad (1.6)$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b .

В соответствии с обозначением (1.6), значениям $\gamma = 0$ и $\gamma = \infty$ соответствуют два предельных случая прямоугольной пластинки, соответственно, бесконечно удлинённая пластинка и полубесконечная пластина–полоса.

Задачу устойчивости системы “пластинка–поток” (1.1) – (1.3) будем исследовать по методу Эйлера для всех значений $\gamma \in [0, \infty]$.

2. Общее решение задачи устойчивости. Для получения достаточного признака потери статической устойчивости системы «пластинка –поток» общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде двойного ряда [1, 6]:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_{nk} \exp(\mu_n r_k x) \cdot \sin(\mu_n y), \mu_n = \pi n b^{-1}, \quad (2.1)$$

C_{nk} – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки; r_k – корни характеристического уравнения

$$r^4 - 2 \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 + \beta_y^2) = 0, \quad (2.2)$$

которые в соответствии с методом решения Феррари определяются выражениями [7, 8]:

$$r_{1,2} = -0.5 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}, r_1 < 0, r_2 < 0; \quad (2.3)$$

$$r_{3,4} = 0.5 \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i \sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}. \quad (2.4)$$

Здесь,

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in a_0^2 \rho_0 D^{-1} \mu_n^{-3} (M_0, M_{2cosm.}); \quad (2.5)$$

$$\beta_x^2 = 1/2 \cdot N_x D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < h (\sigma_x)_{cr.} D^{-1} \mu_n^{-2} = (\beta_x^2)_{cr.} [7];$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2} < 2h (\sigma_y)_{pr.} D^{-1} \mu_n^{-2} = (\beta_y^2)_{pr.};$$

согласно ограничениям (1.4) и (1.5);

$q = q(V)$ – параметр скорости потока газа V – действительный корень кубического уравнения

$$8 \cdot (q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0, \quad (2.6)$$

удовлетворяющий условию:

$$q \in (q_0, q(a_0 M_{2cosm.})), q_0 = \left((\beta_x^2 - 1) + 2 \sqrt{(\beta_x^2 - 1)^2 + 3(1 + \beta_y^2)} \right) / 3, \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr.}, \beta_y^2 < (\beta_y^2)_{pr.}. \quad (2.7)$$

Условие (2.3) определяет необходимый признак потери статической устойчивости невозмущённого равновесного состояния достаточно широкой пластинки ($\gamma \geq \gamma_{gr.}$) в виде локализованной дивергенции; $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(\beta_x^2, \beta_y^2, \nu)$ – предельное значение параметра отношения сторон прямоугольной пластинки $\gamma = ab^{-1}$, разграничивающее области эйлеровой дивергенции

панели ($\gamma < \gamma_{gr.}$) и локализованной дивергенции ($\gamma \geq \gamma_{gr.}$) в пространстве «существенных» параметров задачи устойчивости (1.1)–(1.3) [4, 7].

Учитывая обозначения (1.6) и (2.5), из соотношения (2.6), находим формулу зависимости скорости потока газа V от параметров системы «пластинка-поток»:

$$V(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2) \cdot (q^2-1-\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}, \quad \gamma = ab^{-1}, \quad (2.8)$$

для удлинённых и прямоугольных пластинок умеренных размеров ($\gamma < \gamma_{gr.}$);

$$V(q, n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2) = 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2) \cdot (q^2-1-\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D(a_0 \rho_0 b^3)^{-1} \quad (2.9)$$

для достаточно широких пластин ($\gamma \geq \gamma_{gr.}$).

3. Достаточный признак потери статической устойчивости системы «пластинка-поток». **3.1. Прямоугольные пластинки** ($\gamma \in (0, \infty)$). Подставляя общее решение (2.1) уравнения (1.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно постоянных C_{nk} . Приравненный нулю определитель этой системы приводит к дисперсионному уравнению эйлеровой дивергенции панели:

$$F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2) = \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ (q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})^2 - 2(q+1) \cdot \nu - (1-\nu)^2 - 2\beta_x^2 (q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}) \right\} B_1 B_2 - \\ &- \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \left\{ (q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})^2 - 2(q+1) \cdot \nu - (1-\nu)^2 - 2\beta_x^2 (q+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}) \right\} B_1 B_2 \cdot \\ &\exp(-2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) + 2 \left\{ [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - (2q^2-4q+1)(q+1) + \right. \\ &+ (q-1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}) \cdot \beta_y^2 - (2q^2+4q-1+2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_y^2 - 2q\beta_x^2)\beta_x^2 - \\ &- 2((2q-1)(q+1) - q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_y^2 - q\beta_x^2)\nu + (q+1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_x^2)\nu^2] \cdot sh(\pi n \gamma B_1) + \\ &+ 2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}(q^2-1-\beta_y^2)(q+1-\beta_x^2) B_1 ch(\pi n \gamma B_1) \left. \right\} B_2 \cos(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) + \\ &+ 2 \left\{ -B_1 [(4q^2+2q-1)\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + (2q^2-4q+1)(q+1) - (q-1+\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})\beta_y^2 + \right. \\ &+ (2q^2+4q-1-2q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_y^2 - 2q\beta_x^2)\beta_x^2 + 2((2q-1)(q+1) + q\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_y^2 - q\beta_x^2)\nu - \\ &- (q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - \beta_x^2)\nu^2] \cdot ch(\pi n \gamma B_1) - \left. \sqrt{2(q+1-\beta_x^2)}(q^2-1-\beta_y^2) \cdot \right. \\ &\left. \cdot (3(q^2-1) - 2\beta_y^2 + (2-\beta_x^2)\beta_x^2) \cdot sh(\pi n \gamma B_1) \right\} \cdot \sin(\pi n \gamma B_2) \exp(-\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pi n \gamma) = 0; \end{aligned}$$

$$B_1 = \sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad B_2 = \sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + 0.5(q-1+\beta_x^2)}, \quad B_1 > 0, \quad B_2 > 0.$$

3.2. Достаточно широкие пластинки ($\gamma \geq \gamma_{gr.} \approx 2,8$). Можно показать, что для всех n справедливо:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{gr.}} (F(q, n, \gamma, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2) = 0) = (F_{loc.div.}(q, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2) = 0), \quad \beta_y^2 < (\beta_y^2)_{pr.}, \quad \beta_x^2 < (\beta_x^2)_{cr.} \quad [7]; \quad (3.2)$$

$$F_{loc.div.} = (q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2})^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 - 2\beta_x^2 (q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}) = 0, \quad \gamma \geq \gamma_{gr.} \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) тождественно дисперсионному уравнению локализованной дивергенции полубесконечной пластины – полосы ($\gamma = \infty$), полученному из условия затухания колебаний на крае $x = a$ [4, 7].

Очевидно, что в пространстве «существенных» параметров системы «пластинка–поток» для всех $\gamma < \gamma_{gr.}$ гиперповерхность (3.1) при $q = q_{cr.div}$ разграничивает области устойчивости ($F > 0$) и эйлеровой дивергенции панели ($F < 0$), а гиперповерхность (3.3) при $q = q_{loc.div}$ разграничивает для всех $\gamma \geq \gamma_{gr.}$ области устойчивости ($F_{loc.div} > 0$) и локализованной дивергенции ($F_{loc.div} < 0$). Подставляя значения $q_{cr.div}$ и $q_{loc.div}$, соответственно, в выражения (2.8) и (2.9), получаем критические скорости дивергенции панели $V_{cr.div.}$ и локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$. При скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$ прямоугольная пластинка ($\gamma < \gamma_{gr.}$) теряет устойчивость в виде дивергенции панели, а при скоростях $V \geq V_{loc.div.}$ достаточно широкая пластинка ($\gamma \geq \gamma_{gr.}$) теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции: в обоих случаях переходы из области устойчивости в область неустойчивости – «мягкие».

3.3. Бесконечно удлиненная пластинка ($\gamma = 0$). Дисперсионное уравнение будет описываться соотношением [7]:

$$FU(\tilde{q}, \tilde{\beta}_x^2) = \left(-\exp(-1.5\sqrt{2(\tilde{q} - \tilde{\beta}_x^2)}) + \cos\sqrt{0.5(3\tilde{q} + \tilde{\beta}_x^2)} \right) \cdot \sqrt{(3\tilde{q} + \tilde{\beta}_x^2) \cdot (\tilde{q} - \tilde{\beta}_x^2)^3} - (3\tilde{q}^2 - \tilde{\beta}_x^4) \cdot \sin(\sqrt{0.5(3\tilde{q} + \tilde{\beta}_x^2)}) = 0, \quad \tilde{q} > \tilde{\beta}_x^2, \quad \tilde{\beta}_x^2 < (\tilde{\beta}_x^2)_{cr.}; \quad (3.4)$$

$$\tilde{q} \in R - \text{корень уравнения } 8\tilde{q}^2(\tilde{q} + \tilde{\beta}_x^2) - S^6 = 0, \quad \tilde{\beta}_x^2 = h\sigma_x D^{-1}a^2, \quad S^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}a^3.$$

Отсюда получаем формулу

$$V = 2\tilde{q}\sqrt{2(\tilde{q} - \tilde{\beta}_x^2)} \cdot D(a_0\rho_0 a^3)^{-1} \geq a_0 M_0 D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}, \quad (\gamma = 0). \quad (3.5)$$

Из соотношения (3.4) очевидно, что первоначальные растягивающие усилия σ_y , а также коэффициент Пуассона ν не оказывают влияние на устойчивость системы «бесконечно удлиненная пластинка–поток».

4. Основные результаты и заключение. Анализ численных результатов показал следующее.

Невозмущенное состояние равновесия системы «пластинка–поток» в случае удлиненных пластинок ($\gamma \in [0, 0.33)$) относительной толщины $2ha^{-1} \in [0.006, 0.015]$ вблизи $a_0\sqrt{2}$ является неустойчивым. При скоростях $V \geq V_0$, больших $a_0\sqrt{2}$ примерно 1.5–7 раз в зависимости от β_x^2 и ν , система становится устойчивой. А при скоростях потока газа $V \geq V_{cr.div.}$, превышающих V_0 в 5 раз и более, система при $2ha^{-1} < 0.009$, теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели: $V_{cr.div.}$ является медленно убывающей функцией от β_x^2 , а от ν и β_y^2 зависит исчезающе мало при всех $\gamma \in (0, 0.33)$, и не зависит, когда $\gamma = 0$.

На интервале $\gamma \in [0.33, 0.87)$ система является устойчивой вблизи $a_0\sqrt{2}$, когда $2ha^{-1} \geq 0.009$; при скоростях $V \geq V_{cr.div.}^{(1)}$, больших $a_0\sqrt{2}$ в 2–3 раза, теряет устойчивость в виде эйлеровой дивергенции панели. При этом критическая скорость дивергенции $V_{cr.div.}^{(1)}$ убывает в интервале $\beta_x^2 < 0.6$, примерно, в 2–2.5 раза, а на промежутке $\beta_y^2 \in [0, 2]$ – возрастает в 1.5–3.5 раза. Система в случае более тонких пластинок, когда $2ha^{-1} < 0.009$, теряет устойчивость при скоростях $V \geq V_{cr.div.}^{(2)}$, больших $V_{cr.div.}^{(1)}$ примерно на порядок. Здесь, $V_{cr.div.}^{(2)}$ – медленно убывающая функция от β_x^2 , ν и медленно возрастающая от β_y^2 .

Система “пластинка–поток” при значениях $\gamma \in [0.87, \gamma_{gr.})$ и $\gamma \in [\gamma_{gr.}, \infty)$ в случае, когда $2ha^{-1} < 0.01$, теряет устойчивость, соответственно, в виде дивергенции панели при $V \geq V_{cr.div.}^{(1)}$ и локализованной дивергенции при $V \geq V_{loc.div.}$. А в случае $2ha^{-1} \geq 0.01$, система будучи устойчивой вблизи $a_0\sqrt{2}$, не теряет её и в дальнейшем при больших скоростях потока газа.

Найдены область определения и область значений функции $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(\beta_x^2, \beta_y^2, \nu) : \gamma_{gr.} \in [1.96, 3)$.

Как оказалось, $\gamma_{gr.} = \gamma_{gr.}(\beta_x^2, \beta_y^2, \nu)$ является монотонно возрастающей функцией от β_x^2 : в интервале $\beta_x^2 \in [0, 0.7)$ возрастает примерно 1,47 раз; а от ν и β_y^2 зависит неощутимо мало. Тем самым, с ростом β_x^2 область дивергенции панели расширяется, а область локализованной дивергенции, наоборот, сужается, что свидетельствует о понижении устойчивости.

При определённом соотношении усилий, растягивающих и сжимающих, наблюдается эффект их «взаимной компенсации», наиболее ярко проявленный в случае пластинок, у которых $\gamma \geq 0.33$ (табл. 1).

Таблица 1.

γ	0.4	0.5	0.8	1.0	$\geq \gamma_{gr.}$
$(\beta_{xc}^2; \beta_{yc}^2)$	(0.1; 0.079)	(0.1; 0.060)	(0.1; 0.050)	(0.1; 0.051)	(0.1; 0.063)
$(\beta_x^2; \beta_y^2)$	(0.5; 0.360)	(0.5; 0.286)	(0.5; 0.248)	(0.5; 0.300)	(0.5; 0.380)

В данной постановке, вопреки ожиданиям, первоначальные растягивающие усилия, направленные перпендикулярно скорости потока газа, нагруженной пластинки в двух направлениях растягивающими и сжимающими усилиями, в целом ненамного повышают статическую устойчивость системы «пластинка–поток», в отличие от случая, в котором они направлены по потоку газа [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Ильющин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733-755.
4. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126.
5. Алфутов Н.А. Расчёт на устойчивость упругих систем.–М.:Машиностроение.1978.312 с.
6. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 – 42.
7. Белубекян М.В. Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на ее свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
8. Martirosyan S.R. Supersonic divergence of a panel with a free edge initially loaded in two directions tensile and compressive forces // 2022. Journal of Physics: Conference Series 2231 012030. IP address 93.187.163.146. DOI: 10.1088/1742–6596/2231/1/012030.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890 E-mail: mechinsstella@mail.ru

ЭФФЕКТ КАПИЛЛЯРНОЙ АДГЕЗИИ В КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ КАСАТЕЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Маховская Ю.Ю.

В работе представлены решения контактных задач с учетом капиллярной адгезии под действием касательной силы. Рассмотрены случаи частичного проскальзывания и установившегося скольжения индентора по поверхности упругого полупространства. Проведен расчет и анализ величин сил трения покоя и скольжения, обусловленных вкладом капиллярной адгезии.

1. Введение. Большинство поверхностей, контактирующих при обычных условиях, покрыты пленками воды, адсорбированной из атмосферы. Это приводит к образованию менисков, связывающих выступы поверхностей. Понижение давления под искривленной поверхностью мениска p_0 можно рассчитать по формуле Лапласа:

$$p_0 = \gamma(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \quad (1.1)$$

где γ — поверхностное натяжение жидкости, R_1, R_2 — радиусы кривизны мениска в двух взаимно ортогональных плоскостях, определяемые начальной геометрией и упругой деформацией взаимодействующих поверхностей. Капиллярные силы вызывают адгезию, которая может оказывать значительное влияние на контактные характеристики и силу трения между поверхностями [1,2].

Решение задачи о контакте с частичным проскальзыванием для двух упругих тел было получено в [3] и обобщено в [4] в предположении идентичности материалов контактирующих тел. В [5] получено решение контактной задачи о капиллярной адгезии для индентора и упругого полупространства в условиях частичного проскальзывания. В разделе 2 настоящей работы это решение использовано для расчета и анализа предельной силы трения, при этом мениск жидкости влияет на эту силу через перераспределение контактных давлений.

Капиллярная адгезия может быть и самостоятельным механизмом, вызывающим трение поверхностей, как следствие гистерезиса угла смачивания. В [6] представлены результаты эксперимента, показывающего влияние гистерезиса смачивания на конфигурацию области контакта при скольжении сферы по плоской поверхности упругого образца. В [7] получено решение контактной задачи с учетом гистерезиса угла смачивания, приводящего к появлению силы сопротивления скольжению (капиллярной силы трения), расчет и анализ которой представлен в разделе 3 настоящей работы.

2. Контакт в условиях частичного проскальзывания. Пусть упругое полупространство контактирует с упругим осесимметричным индентором, форма которого описывается степенной функцией $f(x, y) = A(x^2 + y^2)^n$, где $n \geq 1$ — целое число, при наличии мениска жидкости, стягивающего поверхности вне области контакта (рис. 1).

Внутри области Ω_c поверхности находятся в контакте, а мениск занимает область Ω_m . Граничные условия при $z = 0$ для давления и перемещения в направлении оси z определяются формой индентора $f(x, y)$ в области контакта и постоянным капиллярным давлением p_0 (1.1) в области мениска:

$$\begin{aligned} u_z(x, y) &= -f(x, y) + \delta_z, & (x, y) \in \Omega_c \\ p(x, y) &= -p_0, & (x, y) \in \Omega_m \\ p(x, y) &= 0, & (x, y) \notin \Omega_c \cup \Omega_m \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u_z = u_{z1} + u_{z2}$ — смещение поверхностей взаимодействующих тел за счет их деформирования, δ_z — внедрение индентора в полупространство в направлении оси z .

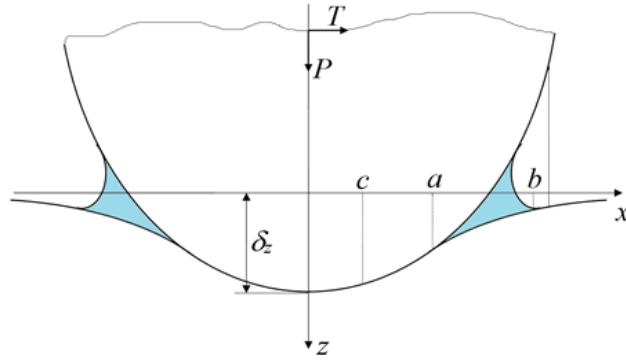


Рис. 1. Схема контакта в условиях частичного проскальзывания

Величина тангенциальной силы T недостаточна для того, чтобы вызвать полное скольжение, поэтому область Ω_c делится на области сцепления Ω_{st} и проскальзывания Ω_{sl} . Граничные условия в направлении оси x определяются тангенциальным перемещением δ_x индентора в области сцепления и двучленным законом трения $\tau = \tau_0 + \mu p$ в области проскальзывания:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \delta_x, & (x, y) \in \Omega_{st} \\ \tau(x, y) &= \tau_0 + \mu p(x, y), & (x, y) \in \Omega_{sl} \\ \tau(x, y) &= 0, & (x, y) \notin \Omega_c \end{aligned} \quad (2.2)$$

Условия равновесия в нормальном и тангенциальном направлении имеют вид

$$P = \iint_{\Omega_c \cup \Omega_m} p(x, y) dx dy, \quad T = \iint_{\Omega_c} \tau(x, y) dx dy, \quad (2.3)$$

Решение задачи строится в предположении, что упругие постоянные материалов индентора и полупространства одинаковы, и уравнения, связывающие контактные напряжения и перемещения в нормальном и тангенциальном направлениях не зависят друг от друга. Тогда задача является осесимметричной: форма индентора описывается функцией $f(r) = Ar^{2n}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, контактное давление p и перемещение u_z также являются функциями радиальной координаты r , область контакта Ω_c представляет собой круг $r \leq a$, а область мениска Ω_m — кольцо $a \leq r \leq b$.

Решение задачи о нормальном нагружении осесимметричного индентора, форма которого описывается степенной функцией, с учетом формулы Лапласа (1.1) и условий (2.1) представлено в работе [2], в которой получены аналитические выражения для распределения нормальных давлений в контакте, а также для внешней нормальной силы, определяемой первым из соотношений (2.3),

$$P = \frac{2AE^* na^{2n+1}}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} - 2p_0 b^2 \left(\arccos \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right). \quad (2.4)$$

Также получено уравнение

$$\frac{Aa^{2n}}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi^{1/2} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} - \frac{b^{2n}}{a^{2n}} \right] \arccos \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{a^{2(n-k)}}{b^{2(n-k)}} \right\} + \frac{2bp_0}{\pi E^*} \left[1 - \frac{a}{b} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right] + \frac{2\gamma}{p_0} = 0 \quad (2.5)$$

Соотношения (2.4) и (2.5) служат системой уравнений для численного определения неизвестных радиуса области контакта a и внешнего радиуса мениска b .

Решение задачи о касательном нагружении индентора также зависит только от радиальной координаты r , в силу осесимметричности решения задачи о нормальном нагружении. Пусть область сцепления Ω_{st} представляет собой круг $r \leq c$, а область проскальзывания Ω_{sl} — кольцо $c \leq r \leq a$ (см. рис. 1).

Решение поставленной задачи о касательном нагружении с граничными условиями (2.2) построено в [5] с использованием метода Каттанео-Миндлина [3,4]. В частности, получено

аналитическое выражение для распределения касательных напряжений $\tau(r)$ в зоне сцепления, которое не приводится в силу его громоздкости. Из построенного решения следует выражение для тангенциальной силы:

$$T = \frac{2\mu AE^* n\Gamma(n+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(n+3/2)} (a^{2n+1} - c^{2n+1}) - 2\mu p_0 b^2 \left(\arccos \frac{a}{b} - \arcsin \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} + \frac{c}{b} \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} \right) + 2a^2(\tau_0 + \mu p_0) \left(\arccos \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right) + \pi\mu p_0 (b^2 - 2a^2), \quad (2.6)$$

Предельная тангенциальная сила, при которой начинается полное скольжение индентора относительно полупространства, получается из (2.6) при $c=0$:

$$T_{\text{lim}} = \mu P + \pi a^2 \tau_0 + \pi \mu p_0 (b^2 - a^2), \quad (2.7)$$

где P определяется выражением (2.4).

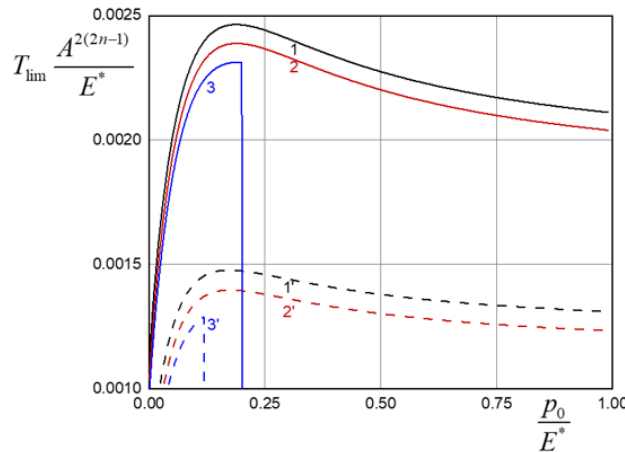


Рис. 2. Предельная тангенциальная сила в зависимости от капиллярного давления

Безразмерная величина $T_{\text{lim}} A^{2/(2n-1)} / E^*$, определяемая выражением (2.7), показана на рис. 2 как функция капиллярного давления p_0 / E^* для трех значений нормальной нагрузки – $P A^{2/(2n-1)} / E^* = 10^{-4}$ (кривые 1, 1'), 0 (кривые 2, 2'), -10^{-4} (кривые 3, 3') и двух значений безразмерного поверхностного натяжения жидкости $\gamma A^{1/(2n-1)} / E^* = 10^{-3}$ (кривые 1-3) и 10^{-4} (кривые 1'-3'). Зависимость силы трения покоя от капиллярного давления немонотонна. Контакт существует при нулевых и отрицательных нагрузках благодаря действию капиллярной адгезии. Однако, при отрицательной нагрузке увеличение капиллярного давления p_0 / E^* может приводить к разрыву контакта (кривые 3, 3').

3. Контакт в условиях полного скольжения. Пусть жесткий цилиндр радиуса R , скользит по поверхности упругого полупространства с постоянной скоростью под действием внешней нормальной силы P и касательной силы T (рис. 3).

Задача рассматривается в плоской постановке. Учитывается гистерезис смачивания, который приводит к различным значениям угла смачивания на входе и выходе из контакта. Вследствие этого расположение области контакта и менисков становится несимметричным: контакт цилиндра и полупространства происходит по области $(-a, b)$, а мениски занимают области $(-a_1, -a)$ на выходе из контакта и (b, b_1) на входе в контакт.

Выполняется условие контактирования для нормальных смещений поверхности u_y

$$u_y = -\frac{x^2}{2R} + D, \quad x \in (-a, b) \quad (3.1)$$

где D – константа. В областях менисков на поверхность упругого полупространства действует капиллярное давление $-p_0$:

$$p = -p_0, \quad x \in (-a_1, -a) \cup (b, b_1) \quad (3.2)$$

Величина давления p_0 определяется формулой Лапласа (1.1).

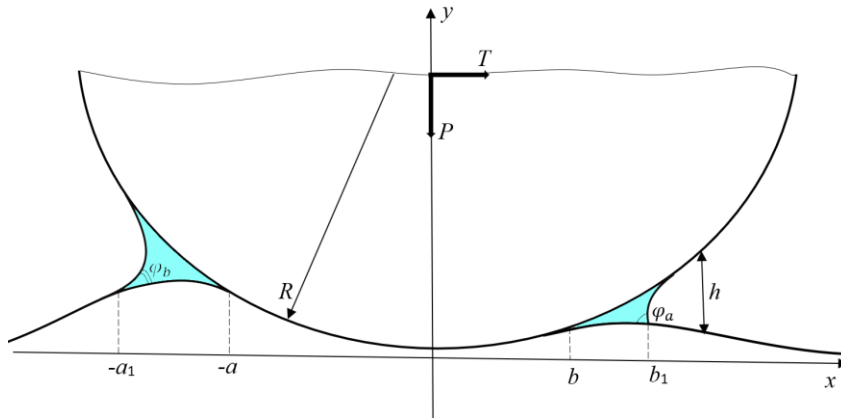


Рис. 3. Схема контакта в условиях полного скольжения

Угол смачивания жидкостью цилиндра одинаков по обеим сторонам контакта и равен стационарному углу смачивания; положим его равным нулю. Пусть стационарный угол смачивания жидкостью упругого основания равен φ , а гистерезис этого угла равен $\Delta\varphi$, при этом угол смачивания основания на выходе из контакта равен $\varphi_a = \varphi - \Delta\varphi/2$, а на входе $\varphi_b = \varphi + \Delta\varphi/2$. Максимальные величины зазора, до которых доходит мениск на входе и выходе из контакта, из геометрических соображений вычисляются как

$$h(-a_1) = \rho(1 + \cos(\varphi - \Delta\varphi/2)), \quad h(b_1) = \rho(1 + \cos(\varphi + \Delta\varphi/2)) \quad (3.3)$$

где ρ – радиус менисков в вертикальной плоскости, считающийся малым ($\rho \ll a_1, \rho \ll b_1$), а зазор между поверхностями цилиндра и основания определяется выражением $h = u_y + x^2/2R - D$.

Решение поставленной задачи построено методом сведения к задаче Римана-Гильберта в работе [7], в которой получены аналитические выражения для распределения контактного давления $p(x)$ и производной нормального перемещения du_y/dx . Эти выражения не приводятся здесь в силу их громоздкости. Кроме того, получена система из двух пар уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\pi E^*}{8R} (a+b)^2 &= 2P + 2p_0 \left[\sqrt{Z^+(-a_1)} + \sqrt{Z^+(b_1)} \right] \\ \frac{\pi E^*}{4R} (b-a) &= 2p_0 \left(\ln \frac{\sqrt{a_1+b} - \sqrt{a_1-a}}{a+b} + \ln \frac{\sqrt{b_1+a} - \sqrt{b_1-b}}{a+b} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $Z(z) = (z+a)(z-b)$, $Z^+(x) = |(x+a)(x-b)|$, и

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{du_y}{dx} dx = -\frac{\gamma(1 + \cos(\varphi - \Delta\varphi/2))}{p_0} + \frac{a_1^2 - a^2}{2R}, \quad \int_b^{b_1} \frac{du_y}{dx} dx = \frac{\gamma(1 + \cos(\varphi + \Delta\varphi/2))}{p_0} - \frac{b_1^2 - b^2}{2R} \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.4) и (3.5) служит для численного определения неизвестных a, b, a_1, b_1 .

На основе полученного решения можно рассчитать тангенциальную силу T , которую необходимо приложить к цилиндру, чтобы обеспечить его движение с постоянной скоростью по границе упругого полупространства (капиллярную силу трения). Эта сила равна компоненте силы реакции полупространства вдоль оси x . Поскольку размер области взаимодействия считается много меньшим радиуса цилиндра, $a_1 + b_1 \ll R$, справедливо соотношение

$$T = \frac{1}{R} \int_{-a}^b xp(x) dx - \frac{P_0}{2R} (a^2 - a_1^2 + b_1^2 - b^2) \quad (3.6)$$

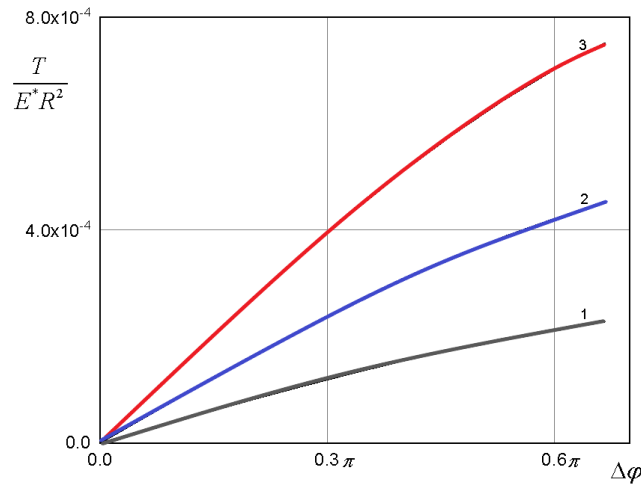


Рис. 4. Капиллярная сила трения в зависимости от гистерезиса угла смачивания

На рис. 4 представлены зависимости силы трения $T/(E^*R^2)$, рассчитанной согласно (3.6), от гистерезиса угла смачивания $\Delta\varphi$. Кривые 1, 2 и 3 построены при безразмерном капиллярном давлении $p_0/E^* = 0.8$ и поверхностном натяжении жидкости $\gamma/(E^*R) = 1.5 \cdot 10^{-4}$, $3 \cdot 10^{-4}$ и $5 \cdot 10^{-4}$, соответственно. Как возрастание гистерезиса угла смачивания, так и возрастание поверхностной энергии жидкости приводит к заметному увеличению силы трения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-58-52006.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology, Elsevier, 2022. 220 p.
2. Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y. Capillary adhesion effect in contact interaction of soft materials, in Contact Problems for Soft, Biological and Bioinspired Materials, Springer, 2022.
3. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. ASME Trans. J. Appl. Mech., vol.16 1949.
4. Ciavarella M. Tangential loading of general three-dimensional contacts. ASME Trans. J. Appl. Mech., vol. 65, 1998.
5. Маховская Ю.Ю. Капиллярная адгезия упругих тел в условиях частичного проскальзывания. ПММ, том 86, 2022.
6. Popov V.L., Lyashenko I.A., Starcevic J. Shape of a sliding capillary contact due to the hysteresis of contact angle: Theory and experiment. Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering, vol. 19, 2021.
7. Маховская Ю.Ю. Влияние капиллярной адгезии на скольжение цилиндра по поверхности упругого тела с учетом гистерезиса смачивания. Изв. РАН. МТТ, в печати.

Сведения об авторе

Маховская Юлия Юрьевна – ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, лаборатория трибологии.
E-mail: makhovskaya@mail.ru

ПСЕВДОСКАЛЯРНЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ МИКРОДЛИНЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.

В работе рассматривается модель связанной микрополярной термоупругости, представленная в терминах контравариантного вектора перемещений и ковариантного псевдовектора микроповорота отрицательного веса. Обсуждаются термодинамические потенциалы состояния гемитропного термоупругого континуума в терминах абсолютного асимметричного тензора деформации, псевдотензора изгиба–кручения отрицательного веса и инкремента энтропии (температурного инкремента), пригодные для моделирования адиабатических и изотермических процессов. Общие алгебраически предпочтительные координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга рассматриваются в терминах метрического тензора, а определяющие гемитропные псевдоинварианты заменяются конвенциональными определяющими псевдоскалярами. Получены связанные дифференциальные уравнения гемитропной термоупругости в терминах перемещений и псевдоповоротов.

1. Кинематика микрополярного континуума отличается от классических континуальных моделей сплошной среды способностью элемента континуума совершать не только поступательное, но и вращательное движение. Поступательное движение характеризуется тем, что в процессе движения любая прямая проходящая через любые две точки элемента континуума остается параллельной сама себе. Движение элемента микрополярного континуума можно рассматривать как поступательное движение полюса и поворот вокруг оси, проходящей через полюс. В качестве теоретической основы для описания движения микрополярного континуума можно воспользоваться известной теоремой Шаля [1]. С точки зрения тензорной алгебры [2] базовые микрополярные кинематические переменные должны трактоваться следующим образом: поступательные перемещения — контравариантный абсолютный вектор, микроповороты — контравариантный (или ковариантный) псевдовектор целого веса. Известные до сих пор исследования (см., например, [3, 4, 5]) в основном касаются абсолютных тензорных формулировок микрополярной упругости. Лишь несколько публикаций (см. [6, 7]) посвящены теории гемитропного микрополярного континуума, развитой в рамках контравариантного псевдовектора микроповорота положительного веса $+1$. Ни одна из публикаций не затрагивает ковариантный псевдовектор микроповорота отрицательного веса -1 , введенный в [8]. Целью настоящей работы является устранение этого пробела в механике сплошных сред.

При моделировании термодинамических процессов можно выделить адиабатические и изотермические процессы. Адиабатическое приближение используется, когда исследуемый термодинамический процесс протекает значительно быстрее чем происходит теплообмен с окружающей средой (например, теории распространения сверхзвуковых ударных волн). В этом случае, в качестве термодинамического потенциала состояния используется внутренняя энергия. Для изотермического приближения характерная скорость протекания термодинамического процесса близка или существенно меньше скорости теплообмена с окружающей средой, как и скорость необратимого формоизменения (см. модель математической теории пластичности [9]). Для описания изотермических процессов используют свободную энергию Гельмгольца. Термодинамические потенциалы состояния являются функциями базовых термодинамических переменных состояния (асимметричный тензор деформации, псевдотензор изгиба–кручения и взаимная пара: инкременты энтропии и температуры). Определяющие тензоры и псевдотензоры различных рангов и целых весов участвуют при формулировке квадратичных энергетических форм термодинамических потенциалов состояния. В случае гемитропного тела они должны быть чувствительны к зеркальным преобразованиям и инверсиям трехмерного пространства. Основной характеристикой гемитропного континуума, обладающей такой чувствительностью, является характерная микродлина, алгебраически связанная с псевдовектором микроповорота. Простейшей адекватной моделью с параметрами, чувствительными к зеркальным преобразованиям, является гемитропная (полуизотропная, демитропная) термоупругая среда, определяемая двенадцатью определяющими псевдоинвариантами.

В настоящей работе терминология и обозначения в целом соответствуют публикациям [2, 5-8]. Предварительные сведения и предпосылки, связанные с псевдотензорной алгеброй, можно

найти в [10]. Приложения псевдотензорной алгебры к различным задачам механики сплошных сред и микрополярной упругости обсуждаются в недавних работах [6, 7]

2. Полные абсолютные векторы микровращения в микрополярных теориях определяются как модулированные векторы вращения [10]:

$$\phi^h = -\frac{1}{2} e^{hkl} \lambda_{[kl]}, \quad \phi_h = -\frac{1}{2} e_{hkl} \lambda^{[kl]}. \quad (1)$$

где e_{hkl} — дискриминантный e -тензор, $\lambda^{[kl]}$ — кососимметричная часть одноточечного тензора поворота Эйлера.

Полные псевдовекторы микроповорота положительного и отрицательного весов определяются с помощью символов перестановок (ϵ^{hkl} и ϵ_{hkl}) согласно

$$\phi^{[+1]h} = -\frac{1}{2} \epsilon^{hkl} \lambda_{[kl]}, \quad \phi^{[-1]h} = -\frac{1}{2} \epsilon_{hkl} \lambda^{[kl]}. \quad (2)$$

Ковариантный псевдовектор вихря $\omega_h^{[-1]}$ отрицательного веса имеет вид:

$$\omega_h^{[-1]} = \frac{1}{2} \epsilon_{h-l}^{[-1] \cdot k} \nabla_k u^l, \quad \epsilon_{h-l}^{[-1] \cdot k} = g^{ks} \epsilon_{hsl}. \quad (3)$$

где ∇_k обозначает ковариантную производную, $\epsilon_{h-l}^{[-1] \cdot k}$ — специальный псевдотензорный символ.

Ковариантный псевдовектор относительного микроповорота $\phi_h^{[-1]}$ отрицательного веса -1 определяется по формуле:

$$\phi_h^{[-1]} = \phi_h^{[-1]} - \omega_h^{[-1]}. \quad (5)$$

В настоящей работе систематически используется бесконечно малый относительный псевдовектор микроповорота.

3. Рассмотрим термодинамическую систему, характеризующуюся некоторым набором термодинамических переменных (параметров состояния). Термодинамический базис в случае микрополярного термоупругого континуума составляют следующие термодинамические переменные состояния: s — энтропия в расчете на единицу массы; $\epsilon_{\cdot l}^{k \cdot} = \nabla_l u^k - \epsilon_{\cdot l}^{k \cdot h} \phi_h^{[-1]}$ —

асимметричный тензор деформации; $\kappa_{lk}^{[-1]} = \nabla_l \phi_k^{[-1]}$ — псевдотензор изгиба-кручения.

Специальный символ перестановок $\epsilon_{\cdot l}^{k \cdot h}$ в определении асимметричного тензора деформации имеет положительный вес $+1$ и может быть определен согласно

$$\epsilon_{\cdot l}^{k \cdot h} = g_{ls} \epsilon^{ksh}. \quad (6)$$

Отметим, что асимметричный тензор деформации можно определить следующим образом:

$$\epsilon^{kl} = \epsilon^{(lk)} + \epsilon^{[lk]} = \nabla^{(l} u^{k)} - \epsilon^{klh} \phi_h^{[-1]} = \nabla^l u^k - \epsilon^{klh} \phi_h^{[-1]}. \quad (7)$$

Линеаризованная внутренняя энергия для анизотропного микрополярного термоупругого континуума с учетом абсолютной инвариантности свободной энергии Гельмгольца \bar{u} может быть принята в виде

$$2\rho\bar{u} = h_{1 \cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot} \epsilon_{i \cdot}^{\cdot s} \epsilon_{l \cdot}^{\cdot m} + h_{2 \cdot}^{[+2] islm} \kappa_{is}^{[-1]} \kappa_{lm}^{[-1]} + h_{3 \cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot lm} \epsilon_{i \cdot}^{\cdot s} \kappa_{lm}^{[-1]} + q_{1 \cdot s}^{i \cdot} \epsilon_{i \cdot}^{\cdot s} s + q_{2 \cdot}^{[+1] is} \kappa_{is}^{[-1]} s + fs^2, \quad (9)$$

где $h_{1 \cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot}$, $h_{2 \cdot}^{[+2] islm}$, $h_{3 \cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot lm}$, $q_{1 \cdot s}^{i \cdot}$, $q_{2 \cdot}^{[+1] is}$, f — определяющие тензоры и псевдотензоры, $s \rightarrow s - s_0$ — малый энтропийный инкремент, s_0 — референциальное значение энтропия.

Свободная энергия Гельмгольца удобна для моделирования изотермических процессов и определяется преобразованием Лежандра [12] внутренней энергии согласно

$$-\bar{\psi}(\theta, \epsilon_{i \cdot}^{\cdot k}, \kappa_{kl}^{[-1]}) = \theta s - \bar{u}(s, \epsilon_{i \cdot}^{\cdot k}, \kappa_{kl}^{[-1]}), \quad \theta = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}. \quad (10)$$

Линеаризованная свободная энергия для анизотропного микрополярного термоупругого континуума с учетом абсолютной инвариантности свободной энергии Гельмгольца $\bar{\psi}$ может быть представлена в виде

$$2\rho\bar{\psi} = H_{1 \cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot} \epsilon_{i \cdot}^{\cdot s} \epsilon_{l \cdot}^{\cdot m} + H_{2 \cdot}^{[+2] islm} \kappa_{is}^{[-1]} \kappa_{lm}^{[-1]} + H_{3 \cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot lm} \epsilon_{i \cdot}^{\cdot s} \kappa_{lm}^{[-1]} + G_{1 \cdot s}^{i \cdot} \epsilon_{i \cdot}^{\cdot s} \theta + G_{2 \cdot}^{[+1] is} \kappa_{is}^{[-1]} \theta + F\theta^2, \quad (11)$$

где $H_{1 \cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot}$, $H_{2 \cdot}^{[+2] islm}$, $H_{3 \cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot lm}$, $G_{1 \cdot s}^{i \cdot}$, $G_{2 \cdot}^{[+1] is}$, F — определяющие тензоры и псевдотензоры, $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент, θ_0 — референциальная температура.

Для определяющих псевдотензоров $H_{1 \cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot}$, $H_{2 \cdot}^{[+2] islm}$, $H_{3 \cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot lm}$ выполняются условия симметрии

$$H_{1 \cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot} = H_{1 \cdot m \cdot s}^{l \cdot i \cdot}, \quad H_{2 \cdot}^{[+2] islm} = H_{2 \cdot}^{[+2] lmis},$$

что позволяет нам определить число независимых микрополярных модулей термоупругости, а именно $171+19=190$. Существует ровно 9 определяющих модулей, связанных с линейным законом теплопроводности.

4. Определяющие уравнения для любого изотермического процесса при учете (11) примут вид:

$$\begin{aligned} t_{i \cdot s}^{\cdot} &= H_{1 \cdot s \cdot m}^{i \cdot l \cdot} \epsilon_{l \cdot}^{\cdot m} + \frac{1}{2} H_{3 \cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot lm} \kappa_{lm}^{[-1]} + \frac{1}{2} G_{1 \cdot s}^{i \cdot} \theta, \\ \mu^{is} &= H_{2 \cdot}^{[+2] islm} \kappa_{lm}^{[-1]} + \frac{1}{2} H_{3 \cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot lm} \epsilon_{lm}^{[-1]} + \frac{1}{2} G_{2 \cdot}^{[+1] is} \theta, \\ 2\rho s &= -G_{1 \cdot s}^{i \cdot} \epsilon_{i \cdot}^{\cdot s} - G_{2 \cdot}^{[+1] is} \kappa_{is}^{[-1]} - 2F\theta, \\ h^i &= -G_{3 \cdot}^{is} \nabla_s \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что соотношения (12) легко преобразуются в определяющие соотношения для адиабатических процессов, заменой изотермических модулей на — адиабатические и температурного инкремента на — энтропийный.

Основная энергетическая форма (11) обычно используется в моделях гемитропной микрополярной термоупругости. Компоненты определяющих тензоров и псевдотензоров для линейного гемитропного микрополярного термоупругого континуума нечувствительны к поворотам системы координат, поэтому в произвольной криволинейной системе координат справедливы следующие координатные представления [10]:

$$\begin{aligned}
H_1^{ism} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}, \\
H_2^{ism} &= a_2^{[+2]} g^{is} g^{lm} + b_2^{[+2]} g^{il} g^{sm} + c_2^{[+2]} g^{im} g^{sl}, \\
H_3^{ism} &= a_3^{[+1]} g^{is} g^{lm} + b_3^{[+1]} g^{il} g^{sm} + c_3^{[+1]} g^{im} g^{sl}, \\
G_1^{is} &= g^{is} d_1, \quad G_2^{is} = g^{is} d_2^{[+1]}, \quad G_3^{is} = g^{is} d_3.
\end{aligned} \tag{13}$$

Заменяя определяющие псевдоинварианты a, b, c, d ($\alpha = 1, 2, 3; g = 0, +1, +2$) конвенциональными определяющими псевдоскалярами [12]: G — упругий модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — физически безразмерные константы; α — коэффициент линейного теплового расширения; β — коэффициент термической кривизны; λ — коэффициент теплопроводности; c — теплоемкость на единицу массы при $\epsilon^{is} = 0$; мы можем переформулировать определяющие уравнения (13).

Заметим, что характеристическая микродлина L , в рассматриваемом случае, является псевдоскаляром положительного веса $+1$, в отличие от случая, рассмотренного в [6, 7]. Соотношения между определяющими псевдоскалярами в уравнениях (12) и конвенциональными определяющими псевдоскалярами имеют вид

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2G\nu(1-2\nu)^{-1}, & b_1 &= G(1+c_1), & c_1 &= G(1-c_1), \\
a_2^{[+2]} &= 2G L L c_3^{[+1][+1]}, & b_2^{[+2]} &= G L L (1+c_2)^{[+1][+1]}, & c_2^{[+2]} &= G L L (1-c_2)^{[+1][+1]}, \\
a_3^{[+1]} &= 4G L c_6^{[+1]}, & b_3^{[+1]} &= 2G L (c_4+c_5)^{[+1]}, & c_3^{[+1]} &= 2G L (c_4-c_5)^{[+1]}, \\
d_1 &= -4G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha, & d_2^{[+1]} &= -4G L L \beta^{[+1][+1][-1]}, & d_3 &= \lambda, \quad F = -\frac{\rho c}{\theta_0}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Вводя новые определяющие скаляры $c'_4 = 2c_6 + c_4 - c_5$, $c'_5 = c_4 + c_5$, $c'_6 = 4c_5$, связанные уравнения термоупругости окончательно представляются в виде

$$\left\{ \begin{aligned}
&G[(1+c_1)\nabla^s \nabla_s u^i + (1-c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i \nabla_k u^k + 2c_1 \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l^{[-1]} + \\
&+ L c'_4 \nabla^i \nabla^k \phi_k^{[-1]} + L c'_5 \nabla^k \nabla_k \phi_i^{[-1]}] - 2G \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla^i \theta = 0, \\
&G L L [(1+c_2)\nabla^s \nabla_s \phi_i^{[-1]} + (1-c_2 + 2c_3)\nabla_i \nabla^k \phi_k^{[-1]} + L^{-1} c'_4 \nabla_i \nabla_k u^k + L^{-1} c'_5 \nabla_k \nabla^k u_i - \\
&- L^{-1} c'_6 \epsilon_{.i}^{s.l} \nabla_s \phi_l^{[-1]}] - 2G c_1 (2\phi_i + \epsilon^{k.l} \nabla_k u_l) - 2G L L \beta \nabla_i \theta = 0, \\
&\nabla_s \nabla^s \theta - \frac{\rho c}{\lambda} \partial \theta - 2G \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial u^s - 2G L L \beta \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial \phi_s + \frac{\rho q}{\lambda} = 0.
\end{aligned} \right.$$

Это — замкнутая система связанной гемитропной термоупругости, в общем случае пригодная для решения прикладных задач связанной микрополярной термомеханики.

6. В настоящей работе рассматривается формулировка связанной гемитропной термоупругости в терминах абсолютного контравариантного вектора перемещений и ковариантного псевдовектора микроповорота отрицательного веса. Этот вариант теории практически не применялся для вывода уравнений гемитропной термоупругости, как можно заключить из доступных литературных источников. Обсуждаются термодинамические потенциалы состояния, используемые при описании адиабатических (распространение сверхзвуковых ударных волн) и изотермических, либо атермических (интенсивное формоизменение, пластическое течение) процессов. Полученная система дифференциальных уравнений связанной гемитропной термоупругости может быть использована при описании адиабатических процессов. Для этого следует заменить изотермические модули на – адиабатические и температурный инкремент на – энтропийный.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00262 “Связанная термомеханика микрополярных полуизотропных сред”).

ЛИТЕРАТУРА

1. L.A. Pars, A treatise on analytical dynamics (London, Heinemann, 1965).
2. G.B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants (Groningen, Noordhoff, 1964).
3. W. Nowacki, Theory of asymmetric elasticity (Oxford, Pergamon Press, 1986).
4. H. Neuber, “On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua ” In: Applied Mechanics 153–158 (1966) https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16
5. Yu.N. Radayev, “The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories,” Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] **22** (3), 504-517 (2018) [in Russian]. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
6. E.V. Murashkin, Yu.N. Radayev, “On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames,” Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 25:3 (2021), 457-474
7. E.V. Murashkin, Yu.N. Radayev, “On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces,” Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.] **26** (3) 592-602 (2022) [in Russian]. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1941>
8. Yu.N. Radayev, “Two-point rotations in geometry of finite deformations,” In: H. Altenbach, S. M. Mkhitarian, V. Hakobyan, A. V. Sahakyan, (eds) Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials 275-283 (Cham, Springer, 2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_20
9. Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев, Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1999.
10. H. Jeffreys, Cartesian tensors (Cambridge, Cambridge University Press, 1931).
11. J.L. Synge, A. Schild, Tensor calculus (New York, Dover Publications, 1978).
12. Y.N. Radayev, Spatial problem of the mathematical theory of plasticity. (Samara, Samara University, 2006) [in Russian].

Сведения об авторах

Мурашкин Евгений Валерьевич – к.ф.-м.н., с.н.с. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
E-mail evmurashkin@gmail.com

Радаев Юрий Николаевич – д.ф.-м.н., проф., в.н.с. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
E-mail y.radayev@gmail.com

К ОБЪЕДИНЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МЕХАНИКАХ НЬЮТОНА, ДАЛАМБЕРА, ГАМИЛЬТОНА, ДЕ БРОЙЛЯ И ШРЕДИНГЕРА

Оганесян С. М., Карапетян Дж. К., Геодакян Э. Г., Саакян Б. В., Мкртчян М. А.

Показано, что система уравнения распространения изгибно-сдвиговых колебаний консольного стержня аналогичны системе телеграфных уравнений. При рассмотрении вопроса как возникает связанная пара $F(l,t)$ и $M(l,t)$ мы должны принять (сделать заключение), по аналогии как распространяется ток проводимости в однопроводной линии, что существуют "гравитационные заряды" которые на свободном конце стержня поляризуются и создают связанную пару $F(l,t)$ и $M(l,t)$. Далее показано, что существуют 3 независимых гравитационных заряда: чистый (импульсный) ν имеющий размерность сек^{-1} ; энергетический (линейный) λ , $[\lambda]=\text{м}$; силовой (ускоряющий) α , $[\alpha]=\text{м}\cdot\text{сек}^{-2}$, и их вихревые аналоги.

Для более полного раскрытия понятия массы, сил инерции и других фундаментальных проблем классической механики в работе [1] предложена новая модель массы (НММ) (рис.1б).

В основе НММ лежит гипотеза [1], что физическая масса любого тела равна нулю и состоит из двух гравитационно взаимосвязанных масс – положительной инертной $m_{\text{ин}}$ отрицательной активной (флуктуирующей) гравитационной $m_{\text{ак}}$, которая сферически симметрично распределена во всем мировом пространстве.

В результате внешнего воздействия в теле из-за возможного смещения кажущегося центра тяжести активной гравитационной массы (ЦТАГМ) относительно центра тяжести инертной массы (ЦТИМ) возникает дополнительная неизвестная сила. Эту силу в работе [1], следуя К. Максвеллу, предложено называть силой инерции смещения $F_{\text{см}}$.

Другим непосредственным поводом для изменения модели массы Ньютона (ММН) стала гипотеза о существовании неизвестной силы, которая проявляется при механических явлениях [2] и колебаниях зданий и сооружений во время сильных землетрясений [2]. Поэтому разработанная новая теория сейсмостойкости (НТС) может позволить решить проблему объединения моделей движения твердого тела в механиках Ньютона, Даламбера, Гамильтона, де Бройля и Шредингера.

Из разработанной новой гравитационно-вихревой теории сейсмостойкости следует, что при кинематическом возбуждения консольного стержня изгибно-сдвиговые колебания начинаются со свободного конца. При этом в стержне возникают внутренние объемные силы, которые противодействуют $1/2f(x,t)$ внешней силе, а на свободном конце стержня возникают связанная пара $F(l,t)$ и $M(l,t)$. Эта связанная пара является истинной причиной изгибно-сдвиговых колебаний. Вторая часть силы $f(x,t)$ идет на создание чисто сдвиговых колебаний, которые направлены противоположно $1/2f(x,t)$, т.е. $-1/2f(x,t)$. В процессе создания чисто сдвиговых колебаний принимают участие две силы: внутренние трения и импульса, которые направлены противоположно (рис.2б).

Для построения НТС важное значение имеют результаты полученные в работах [2,3] при колебания однородного консольного стержня постоянного сечения S длины l В работе [1] показано, что при колебании однородного консольного стержня длины l полное перемещение нейтральной линии $U(x,t)$ представимо в виде

$$U(x,t) = U_1(x,t) \square U_2(x,t) \square U_3(x,t),$$

где $U_1(x,t)$ - чистый изгиб, $U_2(x,t)$ - изгибно-сдвиг, $U_3(x,t)$ - чистый сдвиг, которые приведены в виде расчетных схем на рисунке 2. В работе [2] показано, что процесс начала изгибно-сдвиговых колебаний происходит со свободного конца консольного

стержня [2]. Поэтому на свободном конце стержня одновременно возникают сила $F(l, t)$ и момент силы $M(l, t)$ модули которых равны соответственно $1/2 f(x, t)$ и $1/2 I/S f'(x, t)$, образующую связанную пару. Потому что, действуя независимо друг от друга, они бы вызывали соответственно чисто сдвиговые и чисто изгибные колебания. В работах по исследованию механизма очагов землетрясений их рассматривают не как связанные пары, а как двойную силу с моментом [2].

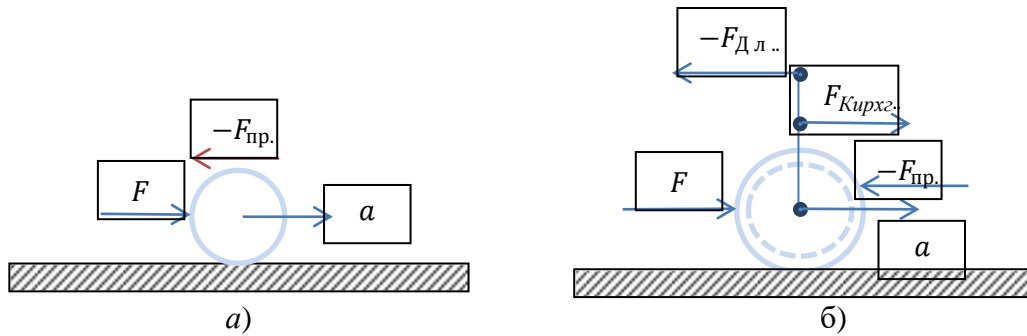


Рис.1 Движения твердого тела по: а) модели И.Ньютона, б)новой модели массы С.М.Оганесяна

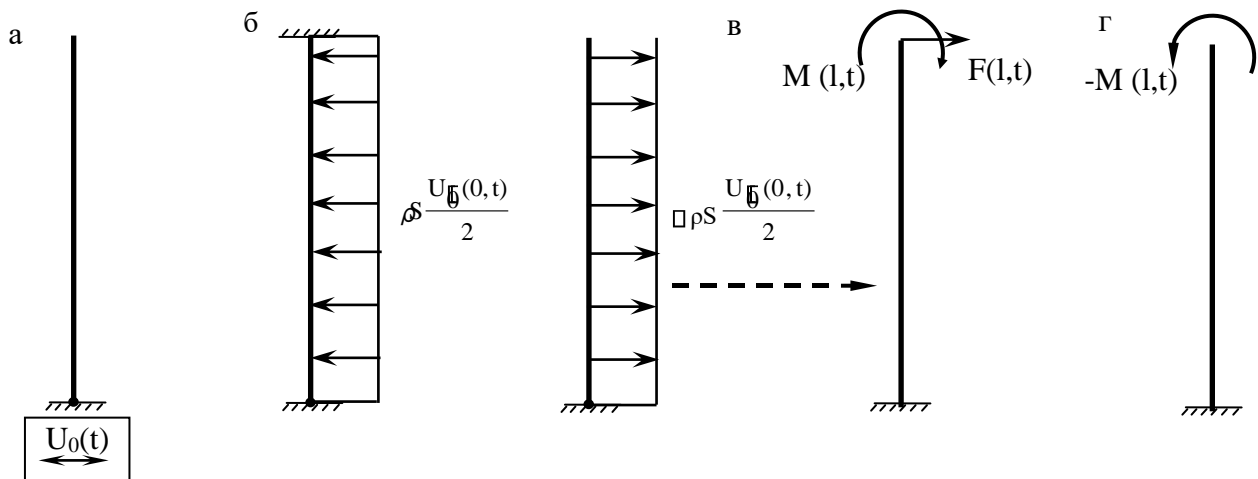


Рис.2 Расчетная схема чисто сдвиговых(б), изгибных(в) и чистый изгибных(г) колебаний для задачи 1

Естественно возникают вопросы как создаются: 1.внутренний распределенный импульс (количество движения) $p(x, t)$; 2.связанная пара $F(l, t)$ и $M(l, t)$.

При более внимательно интерпретации кинематики движения тела m на рис.1б, видно, что фактически к телу приложено не сила F , а сила $2F$. Первая сила F придает телу ускорение a , а второй силе F тела m оказывает внутреннее сопротивление (противодействие) с силой $-2F$. Если ограничить величину внешней силы значением F , то получим схему движения твердого тела массы m приведенные на рис.1б.

После опубликования работы [4] прошло три года. За этот промежуток времени понятие гравитационного заряда, благодаря работам Гамильтона, де Бройля, Эйнштейна, Шредингера и А. Г. Иосифьяна, получили дальнейшие развитие и уточнение. Стало понятно, что существуют одновременно три различных гравитационных зарядов: 1) чистый (импульсный) - ν имеющий размерность сек^{-1} ; 2)

энергетический (линейный) - λ , $[\lambda]=\text{м}$; силовой (ускоряющий) - α , $[\alpha]=\text{м}\cdot\text{сек}^{-2}$. При этом, существуют также их вихревые аналоги.

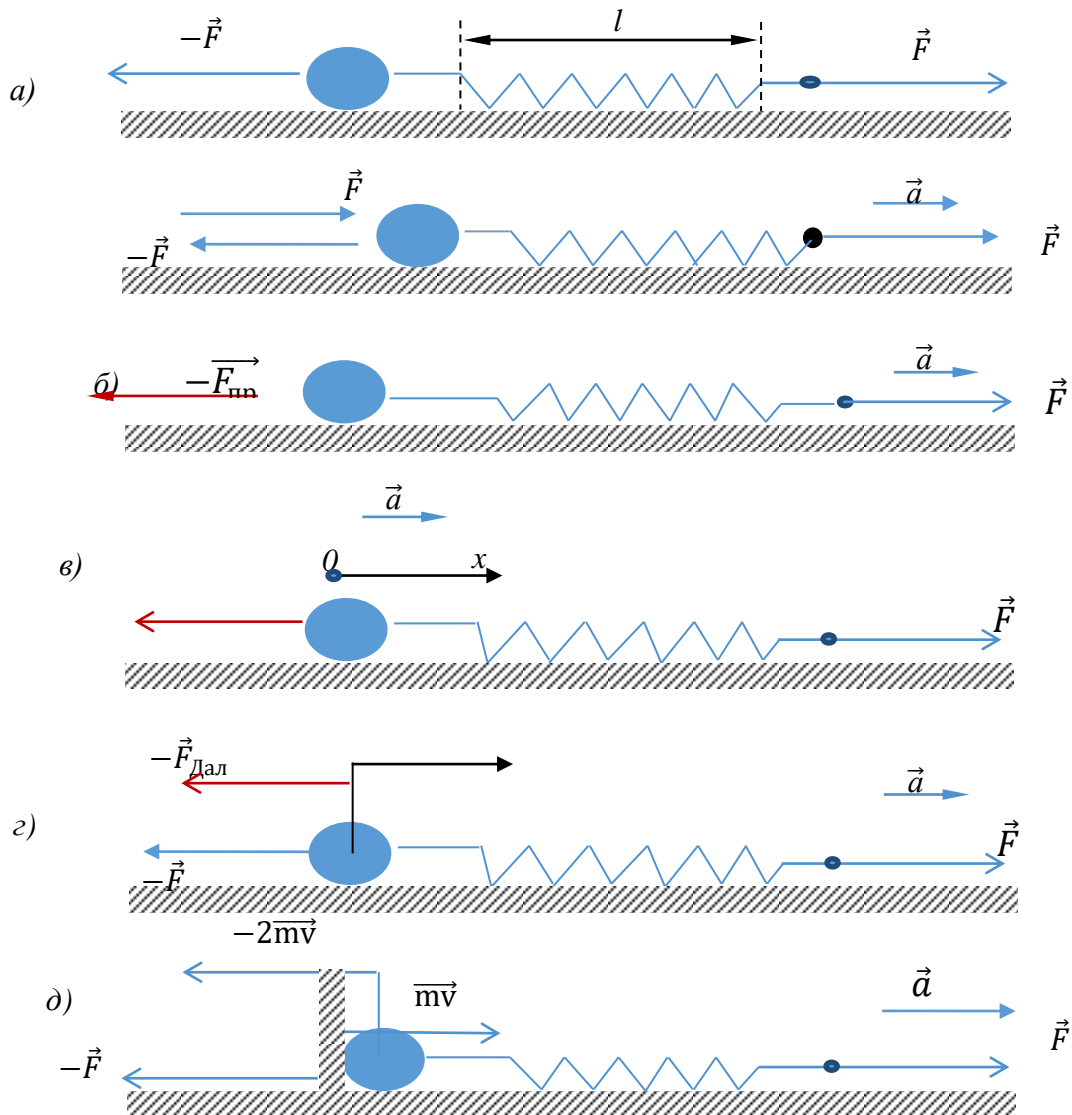


Рис.3 а) состояние покоя системы пружины и шара(тела), б) модель движения системы по Ньютона, в) модель движения системы по Даламберу, г) движения системы по НММ (С.М. Оганесяна), д) следствии из объединения движения системы по моделям Гамильтона, де Бройля, Шредингера и С.М. Оганесяна (ГБШО)

На основании этих понятий из формулы де Бройля $m \cdot v = h/\lambda$ и уравнения Шредингера для свободной равномерно прямолинейно движущегося тела массы m удалось записать следующее равенство.

$$2\lambda v_{\Gamma} \cdot \lambda v_{\Phi} = c^2 = V_{\Gamma} \cdot V_{\Phi} \quad (1)$$

На рис. 3 б, в, г приведены движения системы шар-пружина для моделей Ньютона, Даламбера и Оганесяна. Остается обосновать модель движения шар-пружина на рис. 3д.

Из равенства (1) следует, что при движении тела массы m в нем существуют (образуются) две различные волны де Бройля длины которых отличаются в два раза.

Из модели движения рис.1б следует, что они направлены противоположно, и их фазы сдвинуты на π радиан. Силы \vec{F} и $-2\vec{F}$ которые приведены на рис.3 д и приложенный к массе m получаются при дифференцировании по времени t импульсов mv и $-2mv$. Сила \vec{F} эквивалентна внешней приложенной силе, а $-2\vec{F}$ – внутренняя противодействующая сила. Для того, что бы тела массы m двигалось с ускорением \vec{a} , необходимо возникновение динамической устойчивой границы (ДУГ) за телом. На рис. 3д, ДУГ противодействует половина силы $-2\vec{F}$ и создается внутренняя сила \vec{F} , которая придает системе шар-пружина ускорения \vec{a} , а вторая половина силы идет на растяжку пружины

Заключение. Предложенная модель движения системы шар-пружина ГБШО после удаления пружины и переноса приложенной силы F на шар является результатом предпринятой попытки объединения моделей движения твердых тел в механиках Ньютона, Даламбера, Гамильтона, де Бройля и Шредингера.

Проведенные исследования открывают принципиальные возможности для продвижения в решении проблемы прогноза землетрясения, если удастся построить новые типы "гравиметров", которые смогут зафиксировать поля создаваемые зарядами λ и ν . Поле, соответствующее α зарядам, мы фактически умеем фиксировать гравиметрами. Было бы желательно сконструировать также новые типы чувствительных вариометров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оганесян С.М. К построению модели массы //Геофизический журнал, 1998, т.20, №5, с.3-5.
2. Оганесян С.М., Карапетян Дж. К., Геодакян Э.Г., Саакян Б.В. О необходимости изменения расчетных схем на сейсмостойкость в строительных нормах и правилах (СНиП). Сейсмостойкое Строительство. Безопасность Сооружений. Науч.-тех. журнал, 2021, №5, с. 23-35.
3. Оганесян С.М., Геодакян Э.Г., Карапетян Дж. К. Изгибная модель подготовки тектонического землетрясения /Сб. тр. XI Всероссийской съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: (Казань, 20-24 августа 2015г), Изд. Казанского: (Приволжнского) федерального ун-та, г. Казань, 2015, с.2833-2835.
4. Оганесян С.М. Масса тела не является источником гравитационного заряда, а является его носителем //Коллективная монография. Опасные природные и техногенные процессы в горных регионах: модели, системы, технологии. (VII международная научно-практическая конференция, Владикавказ, 30 сентября-02 октября 2019), Владикавказ, 2019, с. 465-474
5. Луи де Бройль. Становление квантовой физики - Избранные научные труды, том 1 – М.: Логос, 2010 -556 с.
6. Шредингер Э. Избранные научные труды – М.: Наука, 1964.-424с.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ЦИЛИНДРЕ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Оганесян Э. К.

Исследуется изгиб закрепленного по одному торцу однородного полого цилиндра из изотропного материала под действием собственного веса. Предполагается, что зависимость деформаций от перемещений нелинейная. Описан алгоритм построения решения методом конечных элементов. Приведен численный расчет конкретной задачи.

Большинство процессов и явлений в природе и технике по своему характеру являются нелинейными, только при достаточно малых нагрузках можно приближенно считать, что конструкции деформируются по линейным законам. Но, чтобы выявить истинный характер деформирования конструкций, необходимо учитывать нелинейные факторы.

Изучаемая конструкция представляет, один торец которого защемлен. Конструкция деформируется под действием собственного веса. Геометрическая нелинейность заключается в зависимости деформаций от перемещений. В этой работе использован метод конечных элементов. Представляем перемещения, вызванные объемной силой тяжести, в виде первой гармоники [1]:

$$U_r(r, z, \theta) = U(r, z) \cos \theta$$

$$U_\theta(r, z, \theta) = V(r, z) \sin \theta$$

$$U_z(r, z, \theta) = W(r, z) \cos \theta$$

С учетом геометрической нелинейности деформации выражаются через перемещения в виде [2]:

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta + \Delta\varepsilon_\theta, \quad \bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z + \Delta\varepsilon_z \quad (1)$$

$$\bar{\varepsilon}_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta} + \Delta\varepsilon_{r\theta}, \quad \bar{\varepsilon}_{rz} = \varepsilon_{rz} + \Delta\varepsilon_{rz}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta z} = \varepsilon_{\theta z} + \Delta\varepsilon_{\theta z}$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right], \quad \Delta\varepsilon_z = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$\Delta\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\Delta\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\Delta\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\Delta\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

Выделение линейной и нелинейной части в соотношениях (1) позволяет, используя закон Гука для изотропного материала, выразить напряжения через деформации следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \sigma_r + \Delta\sigma_r, & \bar{\tau}_{r\theta} &= \tau_{r\theta} + \Delta\tau_{r\theta} \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_\theta + \Delta\sigma_\theta, & \bar{\tau}_{z\theta} &= \tau_{z\theta} + \Delta\tau_{z\theta} \\ \bar{\sigma}_z &= \sigma_z + \Delta\sigma_z, & \bar{\tau}_{rz} &= \tau_{rz} + \Delta\tau_{rz} \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_r &= 2G\Delta\varepsilon_r + \lambda\Delta\Theta, & \Delta\tau_{r\theta} &= G\Delta\varepsilon_{r\theta}, \\
\Delta\sigma_\theta &= 2G\Delta\varepsilon_\theta + \lambda\Delta\Theta, & \Delta\tau_{z\theta} &= G\Delta\varepsilon_{z\theta}, \\
\Delta\sigma_z &= 2G\Delta\varepsilon_z + \lambda\Delta\Theta, & \Delta\tau_{rz} &= G\Delta\varepsilon_{rz}, \\
\Theta &= \Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_\theta + \Delta\varepsilon_z
\end{aligned} \tag{3}$$

Потенциальная энергия деформации будет представлена следующим образом:

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi} &= \Pi^{(0)} + \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} \\
\Pi^{(0)} &= \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{rz} \varepsilon_{rz} + \tau_{\theta z} \varepsilon_{\theta z} + \tau_{r\theta} \varepsilon_{r\theta}] dv \\
\Pi^{(1)} &= \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_r \Delta\varepsilon_r + \sigma_\theta \Delta\varepsilon_\theta + \sigma_z \Delta\varepsilon_z + \tau_{rz} \Delta\varepsilon_{rz} + \tau_{\theta z} \Delta\varepsilon_{\theta z} + \tau_{r\theta} \Delta\varepsilon_{r\theta}] dv \\
\Pi^{(2)} &= \frac{1}{2} \iiint_V [\Delta\sigma_r \Delta\varepsilon_r + \Delta\sigma_\theta \Delta\varepsilon_\theta + \Delta\sigma_z \Delta\varepsilon_z + \Delta\tau_{rz} \Delta\varepsilon_{rz} + \Delta\tau_{\theta z} \Delta\varepsilon_{\theta z} + \Delta\tau_{r\theta} \Delta\varepsilon_{r\theta}] dv \\
\Pi^{(3)} &= \frac{1}{2} \iiint_V [\varepsilon_r \Delta\sigma_r + \varepsilon_\theta \Delta\sigma_\theta + \varepsilon_z \Delta\sigma_z + \varepsilon_{rz} \Delta\tau_{rz} + \varepsilon_{\theta z} \Delta\tau_{\theta z} + \varepsilon_{r\theta} \Delta\tau_{r\theta}] dv
\end{aligned} \tag{4}$$

Для использования метода конечных элементов подставим (1), (2), (3) в (4) и, делая элементарные преобразования, можно представить выражения для компонент потенциальной энергии деформации в виде

$$\Pi^{(0)} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad \Pi^{(1)} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_\varepsilon] \{q\} \quad \Pi^{(2)} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_{\sigma\varepsilon}] \{q\} \quad \Pi^{(3)} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_\sigma] \{q\} \tag{5}$$

q – вектор узловых перемещений.

В качестве элемента в МКЭ выбраны кольцевые элементы, поперечное сечение которых имеет треугольный вид[3].

Основное уравнение МКЭ с учетом нелинейности будет иметь вид

$$[K + K_\varepsilon + K_\sigma + K_{\sigma\varepsilon}] \{q\} - \{P\} = 0 \tag{6}$$

где

$$\{P\} = \iiint (Ru + Zw + \Phi v) dv,$$

G – модуль сдвига, λ – коэффициент Ламе, R, Z, Φ – компоненты объемной силы, u, v, w – компоненты перемещения.

Численное решение задачи

В качестве примера рассмотрим деформацию полого цилиндра, который состоит из цилиндра длины $L=10R$, который изгибается только под действием собственного веса. Предполагаем, что внешний диаметр цилиндра равен $4R$, внутренний диаметр равен R . Далее предполагаем физико-механические характеристики материала цилиндра следующими:

$$E_1 = 0.51 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \quad \nu_1 = 0.2, \quad \gamma_1 = 2.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кГ}}{\text{см}^3}.$$

Задача решена в двух вариантах: в одном варианте осевое сечение полого цилиндра содержит 80 элементов с 55 узловыми точками, во втором варианте сечение содержит 100 треугольных элементов с 66 узловыми точками.

Представляя компоненты перемещения в треугольнике в виде

$$u = \sum_{i=1}^3 \frac{(a_i + b_i r + c_i z) \cos \theta}{2\Delta}, \quad v = \sum_{i=1}^3 \frac{(a_i + b_i r + c_i z) \sin \theta}{2\Delta}, \quad w = \sum_{i=1}^3 \frac{(a_i + b_i r + c_i z) \cos \theta}{2\Delta}$$

где Δ – площадь треугольника, a_i, b_i, c_i – неизвестные постоянные и учитывая, что в цилиндрической системе координат угол θ меняется от 0 до 2π , а также, равны нулю следующие интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin \theta)^3 d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta (\cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta (\sin \theta)^2 d\theta = 0$$

Обнаруживается, что в выражении (6) $K_\varepsilon = K_\sigma = 0$, откуда вместо (6) получаем

$$[K + K_{\sigma\varepsilon}]\{q\} - \{P\} = 0$$

Если обозначим $[K + K_{\sigma\varepsilon}]\{q\}$ через $\vec{G}(\vec{X})$, $\{P\}$ через \vec{D} , $\{q\}$ через \vec{X} , то система нелинейных уравнений примет вид:

$$\vec{G}(\vec{X}) = \vec{D} \quad (7)$$

Эту нелинейную систему уравнений решаем методом Ньютона. Формула, которая определяет итерационный процесс Ньютона для случая системы нелинейных уравнений, имеет вид [7]

$$\vec{Y}^{(k+1)} = \vec{Y}^{(k)} - \Gamma^{-1}(\vec{Y}^{(k)}) [\vec{G}(\vec{Y}^{(k)}) - \vec{D}]. \quad (8)$$

Здесь матрица $\Gamma(\vec{Y}^{(k)})$ получается из предположения, что найдено какое-то приближенное $\vec{Y}^{(k)}$ решения $\vec{X}^{(k)}$ системы $\vec{G}(\vec{X}) = \vec{D}$. Тогда решение \vec{X}^* можно представить в виде

$$\vec{X}^* = \vec{Y}^{(k)} + \vec{Z}^{(k)}, \quad (9)$$

где $\vec{Z}^{(k)}$ – погрешность приближения $\vec{Y}^{(k)}$.

Подставляя (9) в уравнение (7), находим

$$\vec{D} = \vec{G}(\vec{Y}^{(k)} + \vec{Z}^{(k)}) = \vec{G}(\vec{Y}^{(k)}) + \Gamma(\vec{U}^{(k)}_1, \vec{U}^{(k)}_2, \dots, \vec{U}^{(k)}_n) \vec{Z}^{(k)}. \quad (10)$$

Здесь через $\Gamma(\vec{U}^{(k)}_1, \vec{U}^{(k)}_2, \dots, \vec{U}^{(k)}_n)$ обозначена матрица Якоби вектор-функции $\vec{G}(\vec{X})$, аргументы которой $\vec{U}_i^{(k)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) принадлежат сфере радиуса $|\vec{Z}^{(k)}|$, т. е.

$|\vec{U}_i^{(k)} - \vec{Y}^{(k)}| = |\vec{Z}^{(k)}|$. Сокращенно матрицу $\Gamma(\vec{U}^{(k)}_1, \vec{U}^{(k)}_2, \dots, \vec{U}^{(k)}_n)$ обозначим через Γ_k . Из

(10) можно найти $\vec{Z}^{(k)}$

$$\vec{Z}^{(k)} = -\Gamma_k^{-1} [\vec{G}(\vec{Y}^{(k)}) - \vec{D}].$$

Подставляя это соотношение в (9), имеем

$$\vec{X}^* = \vec{Y}^{(k)} - \Gamma_k^{-1} [\vec{G}(\vec{Y}^{(k)}) - \vec{D}] \quad (11)$$

Поскольку векторы $\vec{U}_i^{(k)}$ – аргументы матрицы Γ_k – нам неизвестны, то мы приближенно заменим их на известный вектор $\vec{Y}^{(k)}$. После такой замены формула (11) даст нам не точное значение решения $\vec{X}^{(k)}$, а какое-то его приближение, которое обозначим через $\vec{Y}^{(k+1)}$. В результате получим

$$\vec{Y}^{(k+1)} = \vec{Y}^{(k)} - \Gamma^{-1}(\vec{Y}^{(k)}) [\vec{G}(\vec{Y}^{(k)}) - \vec{D}],$$

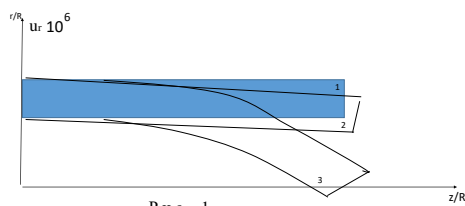
т.е. формулу (8). Однако вычисления вести по этой формуле сложно, так как она требует обращения матрицы такого же порядка, каков порядок системы нелинейных уравнений $\vec{G}(\vec{X}) = \vec{D}$.

Поэтому целесообразно формулу (8) записать в виде двух равенств

$$\Gamma(\vec{Y}^{(k)}) \vec{Z}^{(k)} = \vec{G}(\vec{Y}^{(k)}) - \vec{D} \quad \vec{Y}^{(k+1)} = \vec{Y}^{(k)} - \vec{Z}^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (12)$$

которые и составляют вычислительную схему итерационного процесса Ньютона.

Как видно из (12), на каждом шаге процесса необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений с матрицей $\Gamma(\vec{Y}^{(k)})$.



Р и с . - 1

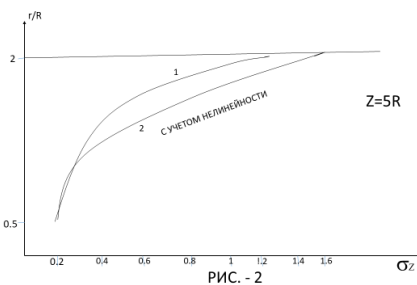


РИС. - 2

Несимметричная задача, когда цилиндр деформируется под действием собственного веса, разбивается на две отдельные задачи: 1) Задача об изгибе горизонтально расположенного упругого весомого изотропного полого цилиндра конечной длины с одним закрепленным торцом, рассматривая ее в рамках линейной теории упругости; 2) Задача приближения, или уточнения, полученных результатов в пункте 1) с помощью метода Ньютона.

Начальное приближение задачи в соответствии с пунктом 1) берется из линейной теории упругости. Обозначаем это решение через Y^1 . Остальные итерации проводим в соответствии с (12). Процесс итерации останавливается, когда разность двух последующих итераций не превосходит заранее заданное число $\varepsilon = 10^{-8}$. На рисунках показаны результаты как задачи 1), так и задачи 2). Так, на рис. 1 показаны перемещения узловых точек, умноженные на 10^6 , а на рис. 2 показаны графики нормальных напряжений в сечении $z = 5R$ с учетом и без учета нелинейности. С увеличением длины цилиндра при постоянстве остальных параметров нелинейность оказывает существенное влияние на значения узловых перемещений по сравнению с линейной теорией упругости. Такие же результаты получаются при увеличении диаметра цилиндра без изменения остальных характеристик цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. К.В. Соляник-Красса-К задаче об упругом равновесии тел вращения. ДАН СССР, 1957, т. 114, N1, с. 49-52
2. А.И. Лурье-Нелинейная теория упругости. М., 1980, с. 512.
3. О.К. Зенкевич-Метод конечных элементов в технике. М., 1975, с. 541.
4. Brebbia C., Connor J.-Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis.droc. Am. Soc. Civ. Eng., 95,EM2,463-483(1969)
5. Новожилов В.В.- Основы нелинейной теории упругости. М.,1948,с. 212. Truesdell C., Noll W.-Nonlinear Field Theory of Mechanics. Hand-buch der Physik, T.111, 3, 1965.
6. Шаманский В. Е.-Методы численного решения краевых задач. Киев, 1968, с. 242

Сведения об авторе:

Оганесян Эмин Казарович - к.ф.м.н., научный сотрудник, Институт Механики НАН Армении, Ереван, 375019, Пр Маршала Баграмяна 24Б. Тел: 26-46-99
E-mail: eogannisyan@ mail.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ОБЪЕДИНЕНИЕМ МЕТОДОВ ДВУХЭКСПОЗИЦИОННОЙ СПЕКЛ-ФОТОГРАФИИ И МУАРА

Осипов М.Н., Сергеев Р.Н.

В работе рассмотрены методы обработки спекл-фотографий двух экспозиций для получения деформированного состояния применительно к плоской задаче. Первый метод основан на обработке методом Юнга двухэкспозиционной «сэндвич» спекл-фотографии, при этом одна из фотопластинок из «сэндвич» блока смещена относительно другой на некоторую величину в их плоскости. В результате такой обработки возникают муаровые полосы, по которым определяют деформированное состояние объекта. Второй метод основан на цифровой обработке полос Юнга с учётом их геометрического наложения, в результате чего возникают также муаровые полосы, которые аналогично позволяют определять деформированное состояние объекта. Первый метод работает для случая, когда градиент деформаций большой, то есть частота полос Юнга в дифракционном гало велика, а второй метод работает в случае, когда частота полос Юнга мала.

1. Введение. Высокий потенциал современных численных методов анализа напряженно-деформированного состояния позволили вывести эксперимент на новый качественный уровень. Так, стало возможным ставить более корректно задачу экспериментального исследования, а также интерпретировать его результаты [1]. Тем не менее, экспериментальные методы остаются основным критерием истинности существующих математических моделей, несмотря на большие достижения в сфере развития вычислительной техники и математических методов численного моделирования, которые позволяют решать широкий класс задач механики [1, 2].

Огромное значение для механики деформируемого твердого тела остаются задачи, в которых функции зависят только от двух координат так называемые плоские задачи [3]. В решение данных задач могут помочь оптические методы, так как они позволяют регистрировать всё поле перемещений деформируемого объекта. Также оптические методы обладают таким важным свойством как бесконтактность, что не оказывает влияния на ход эксперимента, и в свою очередь приводит к повышению точности и достоверности получаемых результатов. Среди оптических методов высокими метрологическими характеристиками обладают когерентные методы, такие как голографическая интерферометрия, спекл-интерферометрия, спекл-фотография и аналогичные, а благодаря большому объему получаемых экспериментальных данных, данные методы не имеют какой-либо другой альтернативы [4, 5].

В силу низкой требовательности к стабильности оптической системы (в сравнении с голографической интерферометрией) для использования в промышленных условиях широкое распространение получает спекл-интерферометрия. Одним из таких методов является спекл-фотография с двойной экспозицией.

Двухэкспозиционная спекл-фотография – простой и универсальный метод для проведения измерений перемещений и деформаций в плоскости диффузно рассеивающих объектов, который не предъявляет жёстких требований к стабильности оптической системы записи информации [6]. Суть метода заключается в освещении шероховатой поверхности когерентным излучением при этом каждая точка поверхности, является точечным источником вторичных волн с различной фазой. За счет интерференции вторичных волн, прошедших через оптическую систему, в плоскости изображения образуется субъективная спекл картина, которая жёстко связана своими характеристиками с рассеивающей поверхностью исследуемого объекта. Образующая спекл-картина регистрируется на одну фотопластинку в двух состояниях объекта, в ненагруженном и нагруженном. Для измерения перемещений объекта проводят когерентно-оптическую обработку фотопластинки, в результате которой перемещения представляются в виде картины интерференционных полос. Интерференционные полосы образуются в результате того, что каждая пара соответствующих спеклов, зарегистрированных во время двух экспозиций, действует как пара идентичных источников когерентного света, которые интерферируя, образуют полосы Юнга [4, 7].

2. Муар в двухэкспозиционной «сэндвич» спекл-фотографии. С целью получения информации о плоском напряженном состоянии объекта в работе [8] предложен способ записи и обработки двухэкспозиционной «сэндвич» спекл-фотографии, который позволяет получать поле деформаций.

Суть метода заключается в регистрации оптической системой одновременно на две совмещённые фотопластинки двухэкспозиционные спекл-фотографии, для объекта находящегося в исходном, а затем нагруженном состояниях (рис.1). При этом две фотопластинки совмещены эмульсиями друг к другу. В оптической системе используется кольцевая апертура.

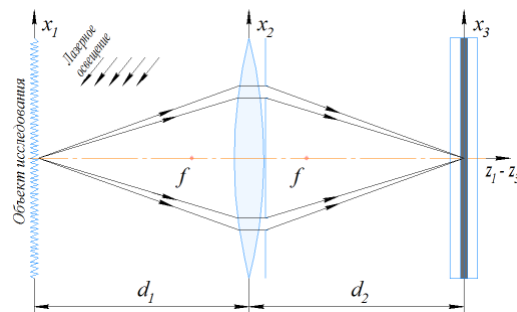


Рис. 1. Регистрация спекл-фотографии на две фотопластинки

Применение кольцевой апертуры позволяет увеличить чувствительность метода и расширить диапазон измеряемых перемещений, а также повышает качество спекл-фотографии и снижает влияние aberrаций оптической системы [6].

Проявленные фотопластинки 1, 2 (рис. 2) закрепляют в специальном устройстве 3 и плотно совмещают фотоэмульсиями 4, 5 друг с другом, после чего одна из фотопластинок может смещаться на некоторую величину h относительно другой в их плоскости.

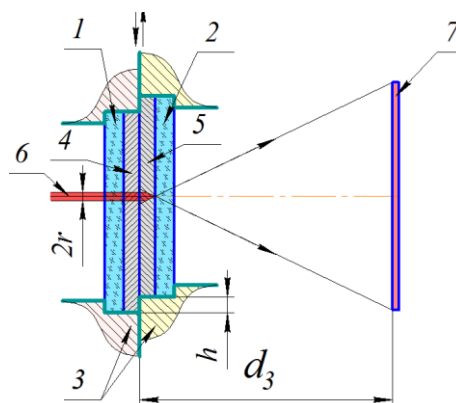


Рис. 2. Обработка «сэндвич» спекл-фотографии

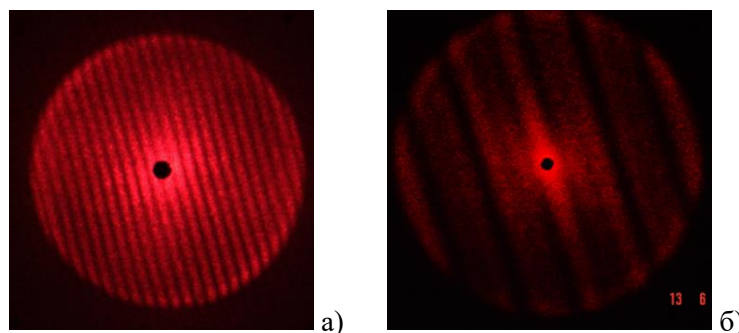


Рис. 3. Фотографии полос при: а) обработке одиночной спекл-фотографии с образованием полос Юнга; б) обработке двух спекл-фотографий с образованием муаровых полос

Далее фотопластинки одновременно сканируются узким пучком когерентного света 6. При этом каждая фотопластинка формирует свою картину полос Юнга (рис. 3а). Таким образом, в

плоскости экрана 7 происходит геометрическое наложение двух полос Юнга с образованием муаровых полос (рис. 3б).

В случае отсутствия смещения в «сэндвич» фотопластинках относительно друг друга в их плоскости, при сканировании узким лучом образуются стандартные полосы Юнга (рис. 3а), период и направление которых определяют величину и направление перемещения в сканируемой точке. Сканирование всего сфокусированного изображения позволяет определить поле перемещений исследуемого деформируемого объекта. Величина перемещения определяется выражением:

$$|L_i| = \frac{\lambda d_3}{m p_i}, \quad (1)$$

где p_i – период полос Юнга в i точки исследуемой поверхности объекта, m – увеличение оптической системы. Направление смещения поверхности в точке сканирования ортогонально к полосам Юнга. Знак смещения, как правило, известен из хода экспериментальных исследований.

Если сместить фотопластинки в «сэндвич» блоке относительно друг друга в их плоскости на некоторую небольшую величину h , то узкий лазерный луч будет дифрагировать на двух соседних спекл-структурах, зарегистрированных на двух фотопластинках, и каждая из которых создаст свою систему полос Юнга. Наложение двух систем полос Юнга приводит к образованию муаровой картины со своим периодом полос как показано на рис. 3б.

Муаровую картину регистрируют и по ней определяют деформацию между исследуемыми точками объекта расположенными на базе равной $H=h/m$, где m увеличение оптической системы при регистрации спекл-фотографий, которое может быть как больше единицы, так и меньше единицы.

Алгоритм расшифровки муаровых картин для нахождения деформаций в исследуемой точке заключается в следующем: в исследуемой точке получают две системы муаровых полос, которые получаются при смещении одной из фотопластинок из «сэндвич» блока в двух взаимно ортогональных направлениях на величину h_1 и h_2 . Значение компоненты тензора деформации для плоской задачи в механике определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda d_3}{m P_1 h_1} \sin \beta_1; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\lambda d_3}{m P_2 h_2} \sin \beta_2; \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\lambda d_3}{2m} \left(\frac{\sin \beta_1}{P_1 h_1} - \frac{\sin \beta_2}{P_2 h_2} \right), \quad (4)$$

где P_1, P_2 – период муаровых полос в двух исследуемых точках, расположенных на расстоянии h_1 и h_2 соответственно и во взаимно ортогональных направлениях; β_1 и β_2 – углы наклона муаровых полос относительно выбранной произвольно ортогональной системы координат; d_3 – расстояние от плоскости фотопластинок до экрана наблюдения полос Юнга.

3. Цифровой муар в двухэкспозиционной спекл-фотографии. Из теории муаровых полос следует, что шаг муаровых полос больше шагов полос растров образующих его [9, 10]. Таким образом, если шаги полос Юнга от двух смещённых относительно друг друга двухэкспозиционных спеклограмм на малую величину становятся соизмеримы, то шаг муаровых полос может превышать диаметр дифракционного гало, которое образуется при дифракции на спекл-структурах. Следовательно, наблюдать и фиксировать экспериментально муаровые полосы, полученные при этих условиях, становится не возможным. Следовательно, становится невозможным использовать метод муара для определения полей деформаций в двухэкспозиционной «сэндвич» спекл-фотографии, как описано в разделе 2.

Для определения поля деформаций в двухэкспозиционной спекл-фотографии при малом различии в шаге полос Юнга, полученных от двух соседних точек сканирования на двухэкспозиционной спеклограмме, рассмотрим цифровой метод обработки спеклограмм для получения муаровых полос.

На рисунке 4 приведена схема образования муаровых полос между двумя системами прямолинейных полос.

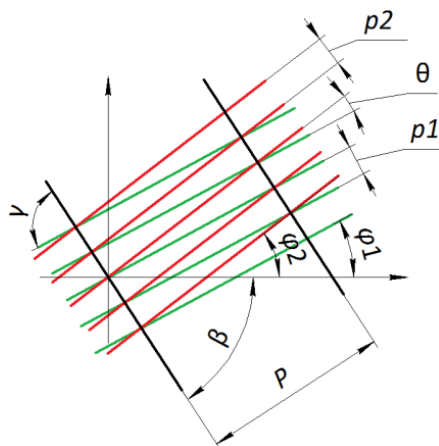


Рис. 4. Схема возникновения муаровых полос (чёрные) между двумя системами прямолинейных полос (красные и зеленые)

Шаг муаровой полосы P и её наклон γ относительно выбранной системы координат определяется по формуле [9, 10]:

$$P = \frac{p_1 p_2}{\sqrt{p_1^2 \sin^2 \theta + (p_1 \cos \theta - p_2)^2}}; \quad (5)$$

$$\sin \gamma = \frac{p_1 \sin \theta}{\sqrt{p_1^2 \sin^2 \theta + (p_1 \cos \theta - p_2)^2}}, \quad (6)$$

где p_1, p_2 – шаг образующих линейных растров; θ – угол между линейными растрами.

В этом случае нет необходимости использовать двухэкспозиционные «сэндвич» спекл-фотографии. Достаточно использовать стандартную двухэкспозиционную спекл-фотографию, проводят её сканирование методом Юнга по двум взаимно ортогональным направлениям в плоскости изображения с шагом h . Картины полос Юнга от каждой точки сканирования заносится в базу данных ЭВМ, где происходит их обработка для определения шага полос Юнга и их наклона относительно выбранной системы координат. Далее используя уравнения (5) и (6) вычисляют численным методом шаг муаровых полос P и их наклон γ относительно выбранной системы координат для двух пар во взаимно ортогональных направлениях точек сканирования на изображении объекта. Далее используя уравнения (2 – 4) определяют поле деформаций по всему исследуемому объекту. Следует отметить, что применения метода муара при обработке спеклограмм позволяет исключить смещение исследуемого объекта как целого, что увеличивает точность измерений.

Заключение. Описанный в работе способ позволяет определить компоненты деформаций в плоскости исследуемого объекта. Для получения полного значения компонент деформаций необходимо произвести расшифровку двухэкспозиционных спекл-фотографий сфокусированных изображений. При таком подходе обработки двухэкспозиционных спекл-фотографий можно изменять шаг сканирования методом Юнга, что позволяет определять поле деформаций при различных базах. Таким образом, двухэкспозиционная «сэндвич» спекл-фотография позволяет получать методом муара поле деформаций при большом градиенте поля

перемещений на исследуемом объекте. А метод цифрового муара в двухэкспозиционной спекл-фотографии позволяет получать поле деформаций при малых перемещениях по полю исследуемого объекта

ЛИТЕРАТУРА

1. Разумовский И. А. Одинцев И. Н. Экспериментальный анализ нелинейных динамических процессов с использованием оптико-интерференционных методов. Вестник научно-технического развития. № 8(60). 2012. С. 35-56.
2. Кармишин А. В., Лиходед А. И., Паничкин Н. Г., Сухинин С. Н. Основы отработки прочности ракетнокосмических конструкций М.: Машиностроение, 2007. 480 с
3. Горшков А. Г., Сторвойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. М.: Физмалит, 2002, 416 с.
4. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спекл-интерферометрия. М.: Мир, 1986. 328 с.
5. Осипов М. Н., Хохлов В. А., Чекменев А. Н. Развитие цифровой спекл-интерферометрии для исследования динамических процессов в реальном времени. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. № 9/2(110). 2013. С. 109-117.
6. Osipov M. N., Sergeev R. N. Digital speckle photography with the ring aperture diaphragm. Procedia Engineering. V. 201. 2017, pp. 155-163.
7. Клименко И. С. Голография сфокусированных изображений и спекл-интерферометрия. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. 224 с.
8. Осипов М. Н., Сергеев Р. Н. Патент РФ RU 2691765 С2. Способ определения деформаций на основе спекл-фотографии.
9. Дюрели А., Паркс В. Анализ деформаций с использованием муара. М.: Мир, 1974, 360 с.
10. Сухарев И. П., Ушаков Б. Н. Исследования деформаций и напряжений методом муаровых полос. М.: Машиностроение, 1969, 208 с.

Information about authors

Osipov Michael – associated professor, Samara National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics (846) 337 99 41, +7 927 26 35 777.

E-mail: osipov7@yandex.ru.

Sergeev Roman – senior lecturer, Samara National Research University, Faculty of Mechanics and Mathematics (846) 337 99 41, +7 927 767 86 52.

E-mail: romansr@yandex.ru.

НАХОЖДЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОМ ПОКРЫТИИ, ПОЛУЧЕННОМ В ПРОЦЕССЕ МНОГОСЛОЙНОГО НАНЕСЕНИЯ НА СТЕНКУ ТРУБЫ

Паршин Д.А., Казаков К.Е.

Рассматривается технологическая задача создания защитного покрытия произвольной толщины на рабочей поверхности стенки прямолинейного участка трубопровода за счет многослойного нанесения на нее материала, обладающего свойством вязкоупругости. Предполагается, что в процессе создания покрытие испытывает действие сил инерции вследствие относительно интенсивного вращения покрываемой стенки. Для определения остаточных напряжений в полученном покрытии используется неклассическая модель механики деформируемого твердого тела, основанная на представлениях о растущем континууме. С помощью разработанной модели формулируются краевые задачи, решения которых позволяют построить искомые распределения остаточных напряжений при произвольных программах изменения параметров реализуемого технологического процесса.

В данной работе процесс аддитивного изготовления изделия рассматривается с точки зрения механики деформируемого твердого тела. Как известно, классическими для механики континуума являются твердые тела постоянного материального состава. Такие тела уже приобрели свой окончательный вид к началу процесса деформирования. Этот вид представлен в конфигурации твердого тела, которая называется естественной и к которой затем относятся смещения точек твердого тела, вызывающие его деформацию под действием приложенных нагрузок. Основное различие между всяким классическим и аддитивно изготовленным твердым телом состоит в том, что последнее все еще продолжает пополняться новыми элементами материала в процессе своего деформирования и, таким образом, в целом лишено естественной конфигурации. Эта особенность, среди прочего, является причиной возникновения полей остаточных напряжений в аддитивно изготовленных твердых телах после завершения их изготовления и устранения нагрузок, сопровождавших процесс изготовления [1]. Представляемая работа посвящена анализу данного сорта напряжений на примере одной конкретной технологической задачи — задачи об аддитивном формировании цилиндрического слоя материала, проявляющего механические свойства вязкоупругости и старения, на поверхности некоторой осесимметричной подложки. Необходимость такого анализа продиктована актуальностью решения различных инженерных задач о контакте, износе и разрушении конструктивных элементов и деталей машин с покрытиями, обладающими сложными свойствами [2,3]. Очевидно, что на результаты соответствующих расчетов решающим образом должны влиять распределения напряжений в рассматриваемых изделиях, возникших в результате технологических особенностей их изготовления.

Адекватное механическое исследование аддитивных процессов требует правильного учета кинематических и силовых характеристик процесса пополнения твердого тела новым материалом. Такой учет не может иметь места в рамках классических уравнений и граничных условий механики твердого тела, даже если они сформулированы для изменяющейся во времени области пространства, связанной с растущим твердым телом. Это легко понять, если мы обратим внимание на тот факт, характерный для всех растущих твердых тел, что в то время как некоторые элементы материала только входят в состав такого тела, другие уже какое-то время деформируются совместно с ним. Этот основополагающий факт математически выражается в несовместности деформаций (в классическом понимании этого термина) внутри любого растущего твердого тела и порождает особый класс проблем в континуальной механике — проблемы механики растущих твердых тел. Математический подход к постановке и исследованию этого класса проблем активно развивается в рамках российской научной школы, основанной академиком Н.Х. Арутюняном совместно с его учеником профессором А.В. Манжировым. Некоторые результаты этой школы можно найти, например, в [4–20].

В работе, описанной в статье [18], была разработана математическая модель процесса изготовления аддитивными методами осесимметричных цилиндрических изделий с произвольной толщиной стенки из вязкоупругих стареющих изотропных материалов [21]. В качестве механических факторов, приводящих к деформированию изготавливаемого изделия, причем уже непосредственно в процессе его изготовления, данная модель учитывает:

- 1) центробежные силы инерции, вызванные достаточно интенсивным вращением используемой (абсолютно) жесткой подложки вокруг своей оси с произвольной (переменной) угловой скоростью $\omega(t)$;
- 2) произвольные начальные окружные напряжения $\sigma_{\varphi,0}(\rho)$, возникающие в (бесконечно тонких) слоях материала, последовательно наносимых на (внутреннюю) поверхность этой подложки.

За t , ρ и φ выше обозначены соответственно время и радиальная и окружная координаты во вращающейся системе отсчета, связанной с подложкой. Пусть рассматриваются две, вообще говоря, различные программы вращения подложки в процессе изготовления рассматриваемого изделия: $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$. Для этих программ будем иметь следующие начально-краевые задачи:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{1,2} + \mathbf{e}_\rho f_{1,2}(\rho, t) = 0, \quad a(t) < \rho < a_0, \quad t > t_0;$$

$$\frac{\mathbf{S}_{1,2}}{2} = \mathbf{D}_{1,2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}_{1,2}, \quad \mathbf{D}_{1,2} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}_{1,2}^{\operatorname{transp}} + \nabla \mathbf{v}_{1,2}); \quad (1)$$

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S}_{1,2} = \mathbf{e}_\rho g_{1,2}(t), \quad \rho = a(t); \quad \mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{0}, \quad \rho = a_0;$$

$$\mathbf{T}_{1,2} = \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \sigma_{\varphi,0}(\rho), \quad t = \tau_0(\rho).$$

Здесь индекс $i \in \{1; 2\}$ для всех переменных соответствует i -й программе вращения, и приняты следующие обозначения: \mathbf{T} , \mathbf{S} и \mathbf{D} — тензоры напряжений, скоростей операторных напряжений [17] и скоростей деформации, \mathbf{v} — вектор скорости, \mathbf{e} — орты координатных линий, ν — постоянный коэффициент поперечной деформации, a_0 — радиус подложки, a — радиус внутренней поверхности наносимого покрытия, τ_0 — момент присоединения к покрытию очередного материального слоя, $t_0 = \tau_0(a_0)$. Известные функции f_i и g_i определяются (с помощью достаточно громоздких выражений, которые здесь не приводятся) программой пополнения изделия дополнительным материалом и программой вращения подложки в процессе изготовления, а также плотностью используемого материала и его вязкоупругими свойствами и свойствами старения. Задача (1) описывает механическое поведение рассматриваемого изделия не только во время процесса изготовления (включая возможные паузы в нем), но и в течение сколь угодно длительного времени после момента $t = t_{\operatorname{fin}}$ окончательного завершения аддитивного нанесения материала на внутреннюю поверхность данного изделия, при условии, что в те промежутки времени, когда изделие не пополняется новым материалом, его внутренняя поверхность не нагружается [6]. Искомые тензорные функции \mathbf{T} , \mathbf{S} , \mathbf{D} и векторная функция \mathbf{v} зависят от положения точки и от времени t , причем во всех точках выполняется соотношение $t \geq \tau_0(\rho)$.

Предположим, что первая программа вращения $\omega_1(t)$ соответствует истинному изменению угловой скорости во время изготовления изделия, т.е. при $t \leq t_{\operatorname{fin}}$, а затем является произвольной. В частности, может быть $\omega_1(t) \equiv \omega = \operatorname{const}$ для любого $t \in (t_0, +\infty)$. При этом пусть вторая программа вращения $\omega_2(t)$ совпадает с первой при $t_0 < t < t_{\operatorname{stop}}$, где $t_{\operatorname{stop}} > t_{\operatorname{fin}}$ — некоторый произвольно фиксированный момент времени, и $\omega_2(t) \neq \omega_1(t)$ при $t \geq t_{\operatorname{stop}}$, а также

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_2(t) = 0.$$

В таком случае остаточные технологические напряжения в рассматриваемом готовом изделии, вызванные самим производственным процессом и действующие неопределенно долго в точках этого изделия после завершения изготовления и остановки вращения, будут равны

$$\mathbf{T}_{\operatorname{res}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{T}_2.$$

Ставится задача рассчитать эти остаточные напряжения в предположении, что

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_1(t) = \omega_\infty$$

и что мы нашли предельные значения

$$\mathbf{T}_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{T}_1 \quad (2)$$

напряжений, соответствующих решению задачи (1)₁.

В настоящей работе доказывается, что результирующее поле остаточных напряжений в рассматриваемой технологической задаче может быть рассчитано как

$$\mathbf{T}_{\text{res}} = \mathbf{T}_\infty + \Delta \mathbf{T}_\infty,$$

где тензорное поле \mathbf{T}_∞ находится по формуле (2) с использованием решения *неклассической* начально-краевой задачи механики растущих твердых тел (1)₁, а тензорное поле $\Delta \mathbf{T}_\infty$ — из решения следующей *классической* задачи теории упругости:

$$\nabla \cdot \Delta \mathbf{T}_\infty = \mathbf{e}_\rho \mu \rho \omega_\infty^2, \quad a_{\text{fin}} < \rho < a_0;$$

$$\frac{\Delta \mathbf{T}_\infty}{2G_\infty} = \Delta \mathbf{E}_\infty + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{1} \text{tr} \Delta \mathbf{E}_\infty, \quad \Delta \mathbf{E}_\infty = \frac{1}{2} (\nabla \Delta \mathbf{u}_\infty^{\text{transp}} + \nabla \Delta \mathbf{u}_\infty);$$

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \Delta \mathbf{T}_\infty = \mathbf{0}, \quad \rho = a_{\text{fin}}; \quad \Delta \mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}, \quad \rho = a_0.$$

Здесь μ — плотность используемого вязкоупругого стареющего материала, G_∞ — его модуль упругости второго рода в весьма большом возрасте, $a_{\text{fin}} = a(t_{\text{fin}})$.

Итак, при аддитивном изготовлении изделий с использованием интенсивно вращающихся подложек в этих изделиях возникают значительные технологические напряжения. После остановки вращения полностью изготовленного изделия эти напряжения не исчезают. Это происходит из-за несовместности деформаций в твердом теле, полученном путем аддитивного наращивания. Возникающие в результате технологические напряжения в готовом изделии трансформируются в остаточные напряжения. Рассмотренные в представляемой работе закономерности возникновения и трансформации напряжений в конкретных условиях организации технологического процесса при конкретных реологических особенностях механического поведения используемого материала описываются сформулированными начально-краевыми задачами. В результате проведенных в работе исследований предложена эффективная процедура прогнозирования распределений итоговых остаточных напряжений, которые будут сохраняться неопределенно долго в готовом цилиндрическом изделии из стареющего вязкоупругого материала после прекращения его вращения, когда на это изделие уже не действуют никакие внешние факторы.

Исследование выполнено по теме госзадания № 123021700050-1 (FFGN-2023-0005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bychkov P.S., Kozintsev V.M., Manzhairov A.V., Popov A.L. Determination of residual stresses in products in additive production by the layer-by-layer photopolymerization method // *Mechanics of Solids*, 2017, 52 (5), 524-529. doi: 10.3103/S0025654417050077
2. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Kazakov K.Ye. Axisymmetric stressed state of uniformly layered space with periodic systems of internal disc-shaped cracks and inclusions // *Herald Bauman Moscow State Technical University: Series Natural Sciences*, 2020, 89 (2), 25-40. doi: 10.18698/1812-3368-2020-2-25-40
3. Kazakov K.E., Sahakyan A.A. On the flat interaction of foundations and punches with complex forms of contacting surfaces // *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, 1474, 012023. doi: 10.1088/1742-6596/1474/1/012023
4. Arutyunyan N.Kh., Manzhairov A.V., Naumov V.E. *Contact Problems in Mechanics of Growing Solids*. Moscow: Nauka, 1991 [in Russian].
5. Manzhairov A.V., Chernysh V.A. Problem of a buried arch structure reinforcement by the accretion method // *Izv. Akademii Nauk. Mekhanika Tvyordogo Tela*, 1992, 27 (5), 25-37 [in Russian].
6. Manzhairov A.V. The general non-inertial initial-boundaryvalue problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 59 (5), 805-816.

7. Arutyunyan N.Kh., Manzhurov A.V. Contact Problems of the Theory of Creep. Erevan: Izdatelstvo Instituta Mekhaniki NAN RA, 1999 [in Russian].
8. Manzhurov A.V. Fundamentals of mechanical design and analysis for AM fabricated parts // Procedia Manufacturing, 2017, 7, 59-65. doi: 10.1016/j.promfg.2016.12.017
9. Manzhurov A.V. Advances in the theory of surface growth with applications to additive manufacturing technologies // Procedia Engineering, 2017, 173, 11-16. doi: 10.1016/j.proeng.2016.12.008
10. Manzhurov A.V. Mechanical analysis of an AM fabricated viscoelastic shaft under torsion by rigid disks // Lecture Notes in Engineering and Computer Science, 2017, 2230, 856-860.
11. Manzhurov A.V. Mechanical design of AM fabricated prismatic rods under torsion // MATEC Web of Conferences, 2017, 95, 12002. doi: 10.1051/mateconf/20179512002
12. Manzhurov A.V. Theory of continuous additive growth for solids // Mater. IUTAM Symp. on Mechanical Design and Analysis for AM Technologies 2018 (Moscow). Ed. by A.V. Manzhurov and E.V. Murashkin. Moscow: IPMech RAS, 2018. 27-29.
13. Manzhurov A.V. What is inside AM fabricated parts? The nature of residual stresses and shape distortion // International Journal of Advancements in Technology, 2018, 9, 38. doi: 10.4172/0976-4860-C1-001
14. Manzhurov A.V. Application of mechanics of surface growth to problems of additive manufacturing // Proc. 4th Int. Conf. on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry (MCSI) 2017 (Corfu). 2018, 86-91. doi: 10.1109/MCSI.2017.22
15. Manzhurov A.V. Some problems in mechanics of growing solids with applications to AM technologies // Journal of Physics: Conference Series, 2018, 991, 012056. doi: 10.1088/1742-6596/991/1/012056
16. Manzhurov A.V., Mikhin M.N. 2D problems of surface growth theory with applications to additive manufacturing // Journal of Physics: Conference Series, 2018, 991, 012057. doi: 10.1088/1742-6596/991/1/012057
17. Manzhurov A.V., Parshin D.A. Analytical solution of the mechanical problem on additive thickening of aging viscoelastic tapers under nonstationary longitudinal end forces // Engineering Letters, 2018, 26 (2), 267-275. https://www.engineeringletters.com/issues_v26/issue_2/EL_26_2_10.pdf
18. Manzhurov A.V., Parshin D.A. Mechanical modeling additive processes of rotational molding in case of viscoelastic behavior of the being manufactured articles // AIP Conference Proceedings, 2019, 2116, 380014. doi: 10.1063/1.5114395
19. Parshin D.A. Technological controlling the contact pressure onto a cylindrical substrate from a coating being formed additively on its outer surface // AIP Conference Proceedings, 2021, 2340, 040005. doi: 10.1063/5.0047838
20. Kazakov K.E., Parshin D.A. A model of mechanics of growing solids for the stress-strain analysis of wound composites reinforced with thin unidirectional fibers // Journal of Physics: Conference Series, 2022, 2231 (1), 012006. doi: 10.1088/1742-6596/2231/1/012006
21. Arutyunyan N.Kh. Some Problems in the Theory of Creep. Oxford: Pergamon Press, 1966.

Сведения об авторах

Паршин Дмитрий Александрович — старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела. E-mail parshin@ipmnet.ru

Казakov Кирилл Евгеньевич — старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела. E-mail kazakov@ipmnet.ru

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ НАКЛОННОЙ НАГРУЗКЕ ВИНТОВЫХ СТОМАТОЛОГИЧЕСКИХ ИМПЛАНТАТОВ

Перельмутер М.Н.

Исследование концентрации напряжений в винтовых дентальных имплантатах и костных тканях выполнено на модели винтового соединения имплантата и окружающих костных тканей при действии наклонной нагрузки, приложенной к имплантату. Расчеты выполнены методом граничных элементов в постановке плоской деформации. При построении расчетной модели полагалось: 1) углубления в губчатой кости, образующиеся при внедрении имплантата в костную ткань, соответствуют резьбе на имплантате; 2) костная ткань является изотропным и однородным линейно-упругим материалом; 3) на границе имплантата и кости выполняются условия идеального соединения, что соответствует полной остеоинтеграции в системе кость-имплантат.

1. Введение. Винтовая форма стоматологических имплантатов позволяет увеличить площадь контакта между имплантатом и костной тканью, оптимизировать передачу нагрузок в зоне контакта кость-имплантат. В сочетании со специальной обработкой поверхности имплантата винтовые имплантаты повышают эффективность остеоинтеграции на границе соединения имплантат - костная ткань. Винтовой имплантат позволяет ограничить микросдвиги во время начального этапа заживления и уменьшить сдвиговую нагрузку за счет увеличения областей сжатия вдоль имплантата [1, 2]. Наличие винтового соединения имплантата и костной ткани приводит, как и в машиностроительных конструкциях [3], к возникновению концентрации напряжений в областях с резким изменением формы поверхности соединения. Помимо прочих факторов [4], эффективность дентальной имплантации зависит также от плотности костной ткани, которая изменяется в широком диапазоне [5, 6]. Изменение плотности костной ткани является основным параметром, определяющим изменение её модуля упругости и прочности [7]. Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния костных тканей при изменении модуля упругости кости позволяет оценить влияние плотности костных тканей на распределение напряжений вблизи имплантата.

Систематические исследования концентрации напряжений в винтовых дентальных имплантатах и окружающих костных тканях начались в последние десятилетия. Влияние геометрических параметров имплантатов - длины, диаметра и формы винтового соединения на напряженное состояние исследовалось в работах [8-12] методом конечных элементов. В данной работе исследование влияния механических свойств костных тканей на распределение напряжений с учетом зон концентрации напряжений в винтовом соединении с дентальными имплантатами выполнено методом граничных элементов, который является наиболее эффективным методом решения таких задач.

2. Методика численного решения. Для численного анализа напряженно-деформированного состояния в работе используется прямой вариант метода граничных интегральных уравнений. Без учета массовых сил и тепловых воздействий граничное интегральное уравнение (ГИУ) теории упругости для каждой однородной подобласти конструкции имеет вид [13]

$$c_{ij}(p)u_i(p) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(p,q)t_j(q) - F_{ij}(p,q)u_j(q)]d\Gamma(q), \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

точки p и q принадлежат границе подобласти Γ , $u_i(q)$ перемещения и $t_i(q)$ усилия на границе подобласти, $c_{ij}(p)$ - функции, зависящие от локальной геометрии в точке p , для гладкой границы $c_{ij}(p) = 0.5\delta_{ij}$. Функции $G_{ij}(p,q)$ и $F_{ij}(p,q)$ являются фундаментальными решениями Кельвина для задачи теории упругости [13].

На участках идеального контакта подобластей полагаем, что выполняются условия непрерывности для перемещений и равновесия для усилий (k и n - номера соседних подобластей)

$$u_i^k(p) = u_i^n(p), \quad t_i^k(p) = -t_i^n(p) \quad (2)$$

Методика численного решения ГИУ (1) реализована в комплексе программ "МЕГРЭ" (Метод ГРаничных Элементов) [14-16], который использован для получения результатов,

приведенных в данной статье. Исследование зависимости напряженного состояния от модулей упругости костных тканей выполнено на модели винтового соединения дентального имплантата и костных тканей в постановке плоской деформации при допущении, что костная ткань является изотропным и однородным линейно-упругим материалом и на границе имплантата и кости выполняются условия идеального соединения, что соответствует полной остеоинтеграции в системе кость-имплантат. Внешняя часть конструкции имплантата (коронка и абатмент) была отсечена, и нагрузка прикладывалась непосредственно к корню имплантата. Полагалось, что углубления в губчатой кости, образующиеся при внедрении имплантата в костную ткань, соответствуют резьбе на имплантате. Форма поперечного сечения выступов винтового соединения, впадин между витками резьбы на имплантате и форма углублений в кости моделировались как равносторонний треугольник со стороной $a=0.93\text{мм}$ (при 12 зубцах по длине $L=14\text{мм}$ корня имплантата). Радиус закругления вершин выступов и впадин между витками (r) принимался равным половине радиуса окружности R , вписанной в равносторонний треугольник со стороной a , $R=0.5a \cdot \text{tg}(30^\circ)$, $r=0.5R$. Мелкая резьба в верхней части имплантата на участке контакта с кортикальной костью не моделировалась, участок контакта рассматривался как плоский с наложением условий (2). При выполнении расчетов полагалось, что модуль упругости губчатой костной ткани изменяется в интервале $E_{ГВБ}=0.5-8\text{ГПа}$, модуль упругости кортикальной костной ткани $E_{КОР}=6-18\text{ГПа}$, а имплантат изготовлен из титана ($E_T=110\text{ГПа}$). Расчеты выполнялись при фиксированном модуле упругости костной ткани одного типа и вариации модуля упругости костной ткани другого типа. Результаты представлены в виде эквивалентных напряжений σ_i (напряжений по Мизесу, интенсивности напряжений), используемых в биомеханике для характеристики напряженного состояния.

3. Результаты расчетов. Расчеты выполнены для модели винтового соединения имплантата и костной ткани, состоящей из трех подобластей (см. рис.1). Тонкая заштрихованная зона на рис. 1 показывает область заданных нулевых перемещений по внешней границе модели, это обозначение только на рисунке, не является частью модели. Наклонная нагрузка прикладывалась под углом $\varphi=45^\circ$ к плоскости сечения имплантата в форме двух компонент, действующих по направлениям осей координат $p_x = p_y = p \cos \varphi$, $p=10\text{МПа}$. Между имплантатом и костной тканью предполагалось идеальное сцепление (полная остеоинтеграция).

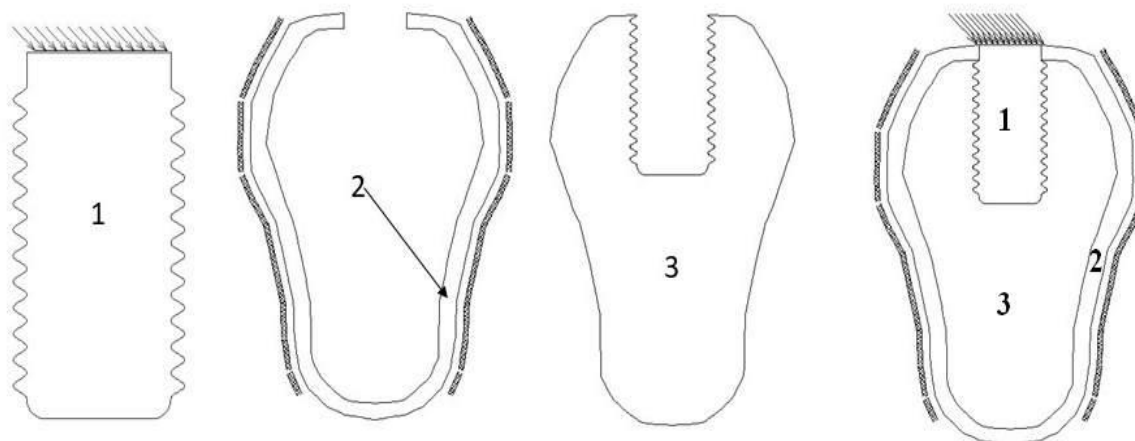


Рис. 1 Модель соединения имплантата и костной ткани, 3 подобласти, 1868 узлов, наклонная нагрузка; 1 - имплантат (748 узлов), 2 – внешний слой кортикальной кости (264 узла, средняя толщина слоя 1.7 мм), 3- губчатая кость (856 узлов)

Увеличение модуля упругости губчатой костной ткани $E_{ГВБ}$ приводит возрастанию максимальных напряжений в этой кости (рис.2). Напряжения в губчатой кости снижаются при

увеличении модуля упругости кортикальной кости $E_{КОР}$ (рис. 3). Аналогично, уровень напряжений в кортикальной кости возрастает при увеличении модуля упругости этой кости и снижается при увеличении модуля упругости губчатой кости (рис. 4-5).

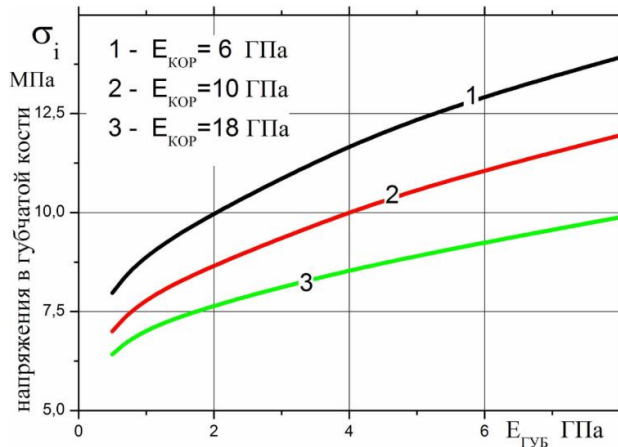


Рис. 2 Зависимость максимальных напряжений в губчатой кости от модуля упругости губчатой кости

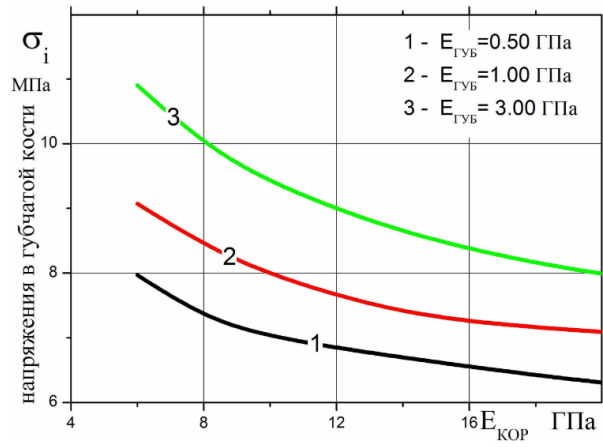


Рис. 3 Зависимость максимальных напряжений в губчатой кости от модуля упругости кортикальной кости

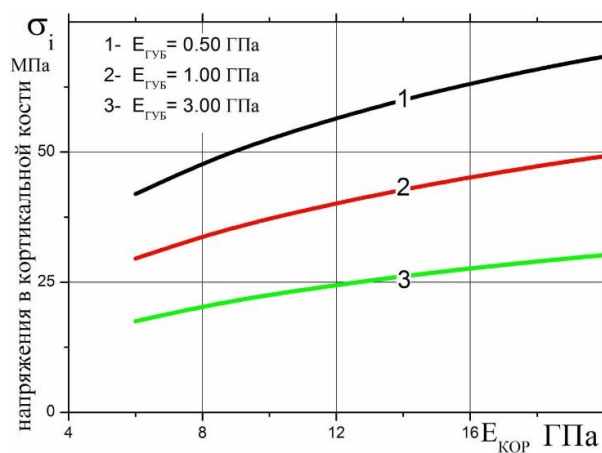


Рис. 4 Зависимость максимальных напряжений в кортикальной кости от модуля упругости кортикальной кости

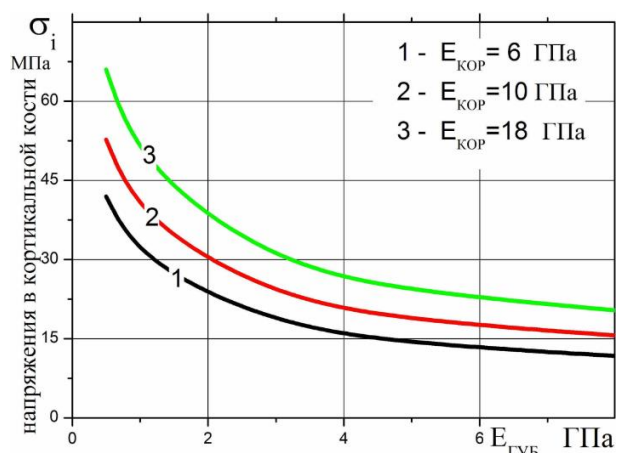


Рис.5 Зависимость максимальных напряжений в кортикальной кости от модуля упругости губчатой кости

Зависимости максимальных напряжений в имплантате от модулей упругости костных тканей приведены на рис. 6-7. При увеличении модуля упругости губчатой костной ткани максимальные эквивалентные напряжения в имплантате снижаются, так как при этом бóльшая часть нагрузки передается на губчатую кость (рис. 2). Распределение эквивалентных напряжений по длине имплантата становится более однородным с увеличением модуля упругости губчатой кости. Максимальные эквивалентные напряжения в имплантате наблюдаются со стороны сжатия в зоне контакта имплантата с губчатой и кортикальной костными тканями (см. рис. 8-9). Ввиду этого, при увеличении модуля упругости кортикальной костной ткани напряжения в имплантате также возрастают (см. рис.7). Отметим, что при малой величине модуля упругости губчатой кости различие между эквивалентными напряжениями в зоне растяжения и сжатия невелико (см. рис.8). При возрастании модуля упругости губчатой кости это различие становится существенным (см. рис.9).

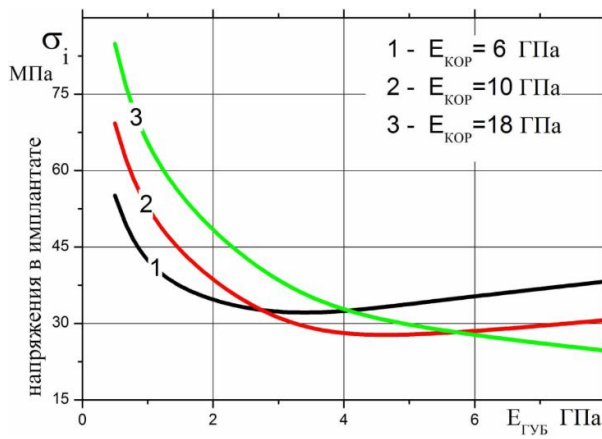


Рис. 6 Зависимость максимальных напряжений в имплантате от модуля упругости губчатой кости

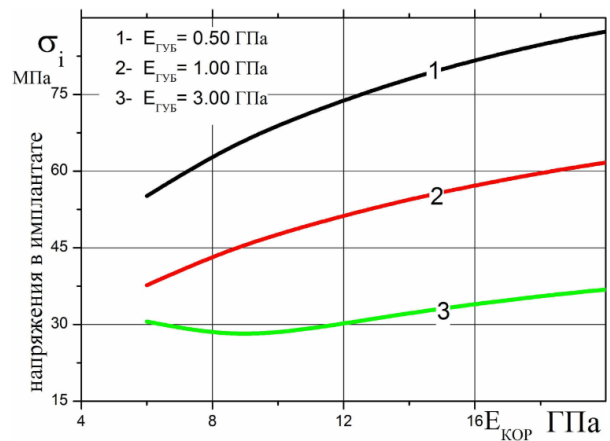


Рис.7 Зависимость максимальных напряжений в имплантате от модуля упругости кортикальной кости

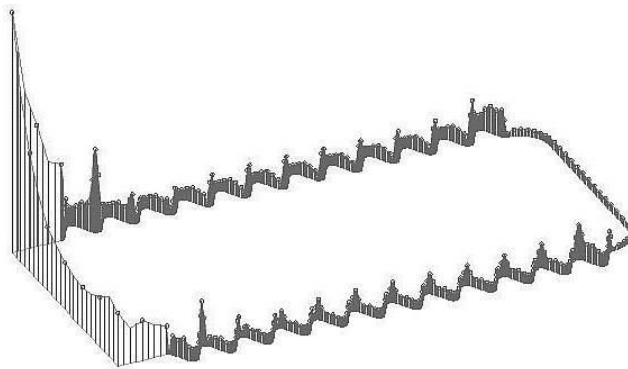


Рис. 8 Эпюры эквивалентных напряжений по границе имплантата, $\sigma_i^{\max} = 85 \text{ МПа}$, $E_{\text{ГУБ}} = 0.5 \text{ ГПа}$, $E_{\text{КОР}} = 18 \text{ ГПа}$

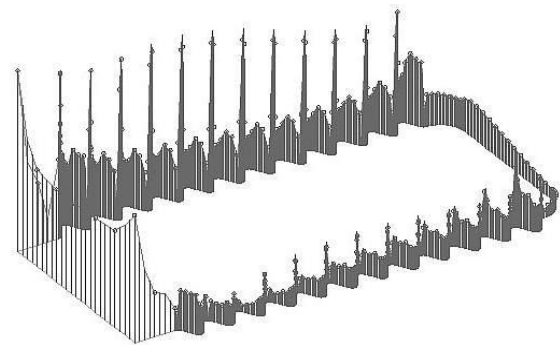


Рис.9 Эпюры эквивалентных напряжений по границе имплантата, $\sigma_i^{\max} = 25 \text{ МПа}$, $E_{\text{ГУБ}} = 8 \text{ ГПа}$, $E_{\text{КОР}} = 18 \text{ ГПа}$

4. Заключение. При увеличении модуля упругости губчатой костной ткани возрастает часть нагрузки, передаваемая на эту костную ткань. Ввиду этого, максимальные эквивалентные напряжения в губчатой костной ткани возрастают, что стимулирует процесс остеоинтеграции имплантата, сопровождающийся ростом плотности костной ткани [17]. Напряжения в кортикальной костной ткани при увеличении модуля упругости губчатой кости снижаются за счет уменьшения нагрузки, передаваемой на эту часть кости, что приводит к более однородному распределению напряжений в костных тканях при нагружении имплантата. С другой стороны, наличие слоя кортикальной кости с большим модулем упругости приводит к снижению напряжений в губчатой кости, что позволяет повысить надежность имплантации при ослабленной губчатой кости. При этом уровень максимальных напряжений в кортикальной кости возрастает и область максимальных напряжений наблюдается вблизи шейки имплантата (области контакта имплантата с губчатой и кортикальной костными тканями). Ввиду ряда упрощений при моделировании, расчетные напряжения отличаются от наблюдаемых в клинической практике, но относительные изменения напряженного состояния позволяют оценить влияние вариации модулей упругости костных тканей на напряженное состояние вблизи винтовых дентальных имплантатов.

Работа выполнена по программе госзадания № 123021700050-1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Haiat G., Wang H.-L., Brunski J. Effects of biomechanical properties of the bone-implant interface on dental implant stability: from in silico approaches to the patient's mouth // *Annual Review of Biomedical Engineering*. – 2014. – Vol. 16, No. 1. – P. 187-213.
2. Ryu H.-S., Namgung C., Lee J.-H., Lim Y.-J. The influence of thread geometry on implant osseointegration under immediate loading: a literature review // *The Journal of Advanced Prosthodontics*. – 2014. – Vol. 6, No. 6. – P. 547-554.
3. Биргер И. А., Иосилевич Г. Б. Резьбовые и фланцевые соединения. – М.: Машиностроение, 1990. – 368 с.
4. Параскевич В. Л. Дентальная имплантология: Основы теории и практики. – М.: ООО .Медицинское информационное агентство, 2011. – 400 с.
5. Chugh T., Jain A. K., Jaiswal R. K., Mehrotra P., Mehrotra R. Bone density and its importance in orthodontics // *Journal of Oral Biology and Craniofacial Research*. – 2013. – Vol. 3, No. 2. – P. 92–97.
6. Premnath K., Sridevi J., Kalavathy N., Nagaranjani P., Sharmila M. R. Evaluation of Stress Distribution in Bone of Different Densities Using Different Implant Designs: A Three-Dimensional Finite Element Analysis // *J Indian Prosthodont Soc*. – 2013. – Vol. 13, No. 4. – P. 555–559.
7. Zioupos P., Cook R. B., Hutchinson J. R. Some basic relationships between density values in cancellous and cortical bone // *Journal of Biomechanics*. – 2008. – Vol. 41, No. 9. – P. 1961–1968.
8. Shimada J, Tajima K, Kitagawa H. Three-dimensional FEM analysis of implant for controlling stress concentration on surrounding bone // *The Journal of the Kyushu Dental Society*. – 2001. – Vol.55, No.1 – P. 87 – 104.
9. Lee C.-C., Lin S.-C., Kang M.-J., Wu S.-W., Fu P.-Y. Effects of implant threads on the contact area and stress distribution of marginal bone // *Journal of Dental Sciences*. – 2010. – Vol. 5, No. 3 – P. 156-165.
10. Vootla N.R., Barla S.C., Kumar V.H.C., Surapaneni H., Balusu S., Kalyanam S. An evaluation of the stress distribution in screw retained implants of different crown implant ratios in different bone densities under various loads-A FEM study // *Journal of Clinical and Diagnostic Research*. – 2016 – Vol. 10, No. 6 – P. ZC96–ZC101.
11. Lee H., Jo M., Noh G. Biomechanical effects of dental implant diameter, connection type, and bone density on microgap formation and fatigue failure: A finite element analysis // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. – 2021. – Vol. 200. – P. 105863–8.
12. Niroomand M.R., Arabbeiki M., Rouhi G. Optimization of thread configuration in dental implants through regulating the mechanical stimuli in neighboring bone // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. – 2023. – Vol. 231. – P. 107376-88
13. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир. 1981. 494 с.
14. Перельмутер М. Н. Применение метода граничных элементов при исследовании пространственного напряженного состояния составных конструкций // *Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении* – 1989. Труды ЦИАМ №1237, Т. 4 – С. 74–99.
15. Перельмутер М. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантатов методом граничных интегральных уравнений // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2018 – №2. – С. 83–95.
16. Perelmutter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // *Computational Mechanics* – 2013. – Vol. 51, No. 4. –P. 523–534.
17. Lin D., Li Q., Li W., Duckmanton N., Swain M. Mandibular bone remodeling induced by dental implant // *Journal of Biomechanics*. – 2010. – Vol. 43, No. 2. – P. 287–293.

Сведения об авторе

Перельмутер Михаил Натанович – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия, E-mail: perelm@ipmnet.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАЛЕЧИВАНИЯ ТРЕЩИН ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Перельмутер М.Н., Дудченко А.В.

Разработана методика численного решения методом граничных интегральных уравнений задач термоупругости в осесимметричной постановке при учете взаимодействия берегов трещин. Для моделирования трещин на границе раздела материалов конструкция разделяется на подобласти. Методика позволяет исследовать процесс залечивания трещин в упругих телах конечных размеров, обладающих осевой симметрией, при действии осесимметричных температурных и статических нагрузок. Залечивание трещины моделируется как процесс формирования концевой области трещины. Выполнено параметрическое исследование влияния жесткости связей в концевой области трещины на величину модуля коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Введение. В последние десятилетия ведутся разработка и изучение материалов, обладающих свойствами залечивания и самозалечивания (восстановления начальных свойств материалов при возникновении дефектов и трещин) [1, 2]. Самозалечивание материалов особенно важно, когда вмешательство человека затруднено при удаленной эксплуатации изделия или при экстремальных условиях эксплуатации, а также при предотвращении разрушений в недоступных частях конструкций и внутри материала. Наибольший эффект самозалечивания проявляется на начальной стадии формирования трещин, на микро- и нано-уровнях.

Экспериментальное изучение процессов залечивания и самозалечивания материалов (как искусственных, так и природных и биологических материалов) может быть чрезвычайно длительным и трудоемким. Моделирование этих процессов позволяет дополнить экспериментальные исследования и заполнить пробелы в эксперименте. Проблемы, связанные с моделированием процессов залечивания материалов, являются многопрофильными и сопряженными, включают как физико-химические, технологические, так и механические задачи. Важным направлением является развитие моделей кинетики восстановления связей и оценки времени восстановления работоспособности материала и его времени "жизни" после восстановления в зависимости от температуры процесса восстановления и условий эксплуатации. Экспериментальные исследования выполнены по широкому кругу указанных проблем [2, 3], но механическо-математические модели и расчетные методики только начинают развиваться [4-8].

В данной работе представлены результаты численного моделирования этапа восстановления связей между берегами трещины (залечивания трещины при формировании концевой области трещины) при стационарном термическом нагружении. Расчетное исследование выполнено методом граничных интегральных уравнений для областей, обладающих осевой симметрией.

2. Граничные интегральные уравнения осесимметричных задач термоупругости. Для численного анализа теплового и напряженно-деформированного состояний в работе используется прямой вариант метода граничных интегральных уравнений. Без учета объемных источников тепла граничное интегральное уравнение (ГИУ) стационарной осесимметричной задачи теплопроводности для каждой однородной подобласти конструкции в цилиндрической системе имеет вид [9]

$$\beta(p)\theta(p) = 2\pi \int_{\Gamma} [F(p,q)\varphi(q) - G(p,q)\theta(q)]r(q)d\Gamma(q), \quad (1)$$

точки p и q принадлежат границе подобласти Γ (образующей осесимметричной подобласти), $r(q)$ - расстояние от оси вращения Z до точки q , $\theta(q)$ температура и $\varphi(q)$ тепловой поток на границе подобласти, $\beta(p)$ - функция, зависящая от локальной геометрии в точке p , для гладкой границы $\beta(p) = 0.5$. Функции $G(p,q)$ и $F(p,q)$ - фундаментальные решения для осесимметричной задачи теплопроводности [9].

Для осесимметричных стационарных задач несвязанной термоупругости ГИУ в цилиндрической системе координат при учете механических и тепловых нагрузок (без учета объемных массовых сил) имеет вид [9]

$$c_{ij}(p)u_j(p) = 2\pi \int_{\Gamma} [G_{ij}(p,q)t'_j(q) - F_{ij}(p,q)u_j(q)]r(q)d\Gamma(q) - \\ - \gamma \int_{\nu} G_{ij}(p,q)\theta_{,j}(q)r(q)dS(q), \quad i, j = r, z, \quad (2)$$

где $t'_i(q) = t_i(q) + \gamma n_i(q)\theta(q)$, $n_i(q)$ - компоненты вектора внешней нормали, $\gamma = \alpha E / (1 - 2\nu)$, α - коэффициент теплового расширения, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона подобласти, $u_i(q)$ - перемещения и $t_i(q)$ - усилия на границе подобласти Γ , $c_{ij}(p)$ - функции, зависящие от локальной геометрии в точке p , для гладкой границы $c_{ij}(p) = 0.5\delta_{ij}$, $dS(q)$ - элемент площади поперечного сечения подобласти. Функции $G_{ij}(p,q)$ и $F_{ij}(p,q)$ - фундаментальные решения для осесимметричной задачи теории упругости [9]. Остальные обозначения аналогичны (1). Последний интеграл в выражении (2) может быть преобразован к интегралу по границе Γ подобласти.

На участках идеального контакта подобластей полагаем, что выполняются условия непрерывности (3) для температуры и перемещений, а также условия сопряжения (4) для теплового потока и усилий (k и n - номера соседних подобластей)

$$\theta_i^k(p) = \theta_i^n(p), \quad u_i^k(p) = u_i^n(p) \quad (3)$$

$$\phi_i^k(p) = -\phi_i^n(p), \quad t_i^k(p) = -t_i^n(p) \quad (4)$$

На участках границ подобластей, содержащих трещины со свободными от связей берегами, перемещения в каждой подобласти рассматриваются как независимые переменные. Дополнительные условия вводятся при наличии связей между берегами в концевой области трещины (обобщенный закон деформирования связей)

$$t_i(p) = \kappa_i(p, \sigma) \Delta u_i(p), \quad \Delta u_i(p) = u_i^k - u_i^f, \quad \kappa_i(p, \sigma) = \gamma_i(p, \sigma) \frac{E_b}{H} \quad (5)$$

Здесь $i = r, z$ соответствует радиальному и нормальному к плоскости трещины направлениям, $t_i(p)$ и $\Delta u_i(p)$ - компоненты вектора усилий и раскрытия трещины в локальной системе координат, $\kappa_i(p, \sigma)$ - жесткость связей между поверхностями трещины, $\gamma_i(p, \sigma)$ - безразмерная функция, зависящая от положения точки p вдоль концевой области трещины и натяжения связей, H - линейный размер, пропорциональный толщине зоны связей в концевой области трещины, E_b - эффективный модуль упругости связей, σ - модуль вектора усилий в связях. Если жесткость связей в концевой области трещины не зависит от натяжения связи, то зависимости (5) определяют линейно-упругий закон деформирования связей. Залечивание трещины моделируется как процесс формирования концевой области трещины с увеличением длины концевой области и жесткости связей. Степень залечивания трещины определяется уменьшением величины модуля коэффициента интенсивности напряжений (КИН) [10]. Методика вычисления КИН рассмотрена в работе [11].

Для численного решения ГИУ используются изопараметрические квадратичные граничные элементы. Дискретизация границ подобластей и аппроксимация переменных позволяет заменить вычисление интегралов по всей поверхности подобласти в ГИУ (1,2) суммой интегралов по совокупности граничных элементов, представляющих границу подобласти, и получить для каждой точки коллокации p дискретное представление ГИУ. Сингулярное поведение фундаментальных решений в ГИУ (1,2) учитывается при вычислении интегралов по элементам, содержащим точку коллокации p . Рассматриваются два случая расположения точки p : а) $p \notin e$, б) $p \in e$, здесь e - граничный элемент, по которому выполняется интегрирование. Обходя последовательно узловые точки границ всех подобластей, получаем дискретное представление ГИУ. Учет граничных условий на внешних частях подобластей и

дополнительных условий (3,4) позволяет получить из системы дискретных ГИУ для всех подобластей конструкции систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых неизвестных задачи. Результаты решения задачи стационарной теплопроводности используются в качестве исходных данных при решении задачи термоупругости. Методика численного решения ГИУ реализована в комплексе программ "МЕГРЭ" (Метод ГРаничных Элементов) [11-14].

3. Результаты расчетов. Для оценки точности алгоритма выполнен расчет напряженно-деформированного состояния полого цилиндра (внутренний радиус $R_1 = 1m$, внешний радиус $R_2 = 2R_1$, высота цилиндра $H = 8R_1$) с полукруговым вырезом радиуса $R_3 = 0.25R_1$, расположенным на середине высоты, с внешней стороны цилиндра. При учете симметрии задачи моделировалась 1/4 часть меридионального сечения цилиндра (см. рис.1). Рассмотрены случаи механического и термомеханического нагружений. При механическом нагружении к торцевой поверхности цилиндра прикладывалось осевое растягивающее усилие $\sigma_0 = 100 MPa$. Задачи теплопроводности и термоупругости решались при наличии перепада температур между внутренней и внешней поверхностями цилиндра $T_2 - T_1 = 100^\circ C$, торцевые поверхности цилиндра полагались термоизолированными, модуль упругости материала $E = 207 GPa$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, коэффициент теплового расширения $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} град^{-1}$.

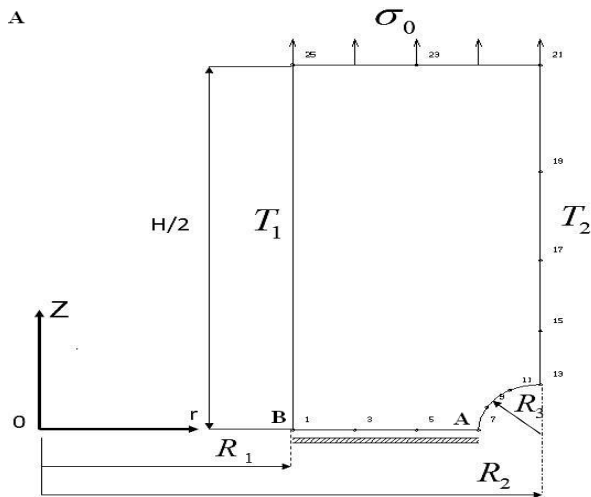


Рис. 1 Цилиндр с полукруговым вырезом при действии механической и термической нагрузок.

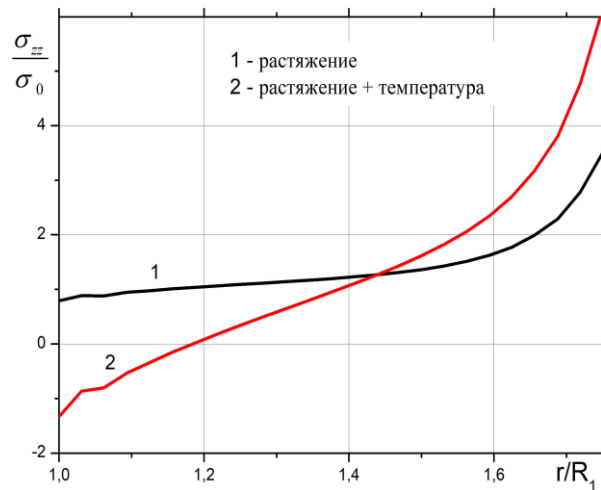


Рис.2 Распределение осевых напряжений по толщине стенки цилиндра при термомеханическом нагружении.

Распределения осевых напряжений в поперечном сечении цилиндра, проходящем через середину полукругового выреза (вдоль линии В-А), для содержащей 66 узлов на границе области дискретной модели, приведены на рис.2. Коэффициент концентрации напряжений (ККН) на краю выреза (т. А) составляет при механическом нагружении $K_m = \sigma_{zz} / \sigma_0 = 3.50$, а при термомеханическом нагружении $K_m = \sigma_{zz} / \sigma_0 = 6.13$. Данная задача рассматривалась также в работе [15], где для аналогичной дискретной модели цилиндра (66 узлов) получены значения $K_m = 3.52$ и $K_m = 6.19$.

Рассмотрим задачу о залечивании дискообразной трещины радиуса ℓ в круговом цилиндре радиуса R ($\ell/R = 0.3$, см. рис. 3) в предположении, что на внешней поверхности цилиндра и на поверхности трещины заданы значения температур T_1 и T_2 , соответственно, $T_1 - T_2 = \Delta T > 0$. Процесс залечивания трещины (формирования концевой области) начинается от периферии трещины ($r = \ell$) под действием высокой температуры. В данной задаче, как и предыдущем примере, моделировалась 1/4 часть меридионального сечения сплошного цилиндра, ось

которого совпадает с направлением оси OZ (см. рис.3). Результаты решения стационарной задачи теплопроводности использовались при решении задачи термоупругости.

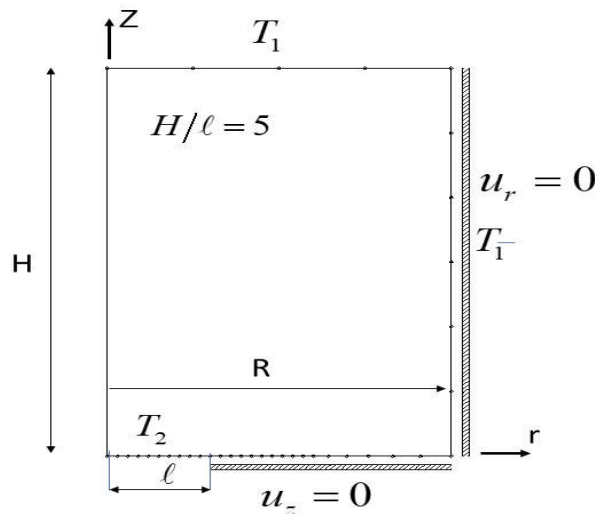


Рис. 3 Дiskoобразная трещина радиуса ℓ в круговом цилиндре, $\ell/R = 0.3$.

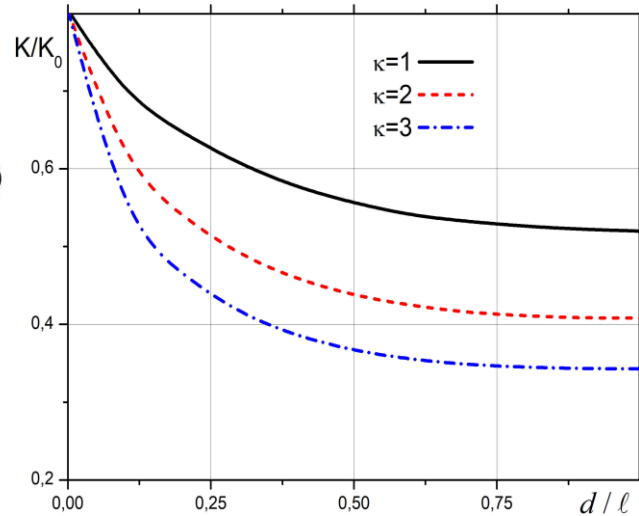


Рис.4 Зависимость модуля КИН от относительной ширины зоны связей.

При расчете радиальная компонента жесткости связей полагалась равной нулю ($\kappa_r = 0$). Относительная жесткость связей в осевом направлении определялась при условии $E_b = E$ (здесь E_b модуль упругости связей, см. (5), E - модуль упругости материала цилиндра)

$$\kappa = \kappa_z(p, \sigma) \left(\frac{E}{\ell} \right)^{-1} = \frac{\ell}{H}$$

Результаты расчета зависимости модуля КИН K от относительной ширины зоны связей для трех значений относительной жесткости связей в концевой области трещины приведены на рис.4, где K_0 - коэффициент интенсивности напряжений для дискообразной трещины в пространстве при перепаде температур на поверхности трещины ΔT [16]

$$K_0 = \frac{\alpha E \Delta T}{1 - \nu} \sqrt{\frac{\ell}{\pi}}$$

Снижение КИН при формировании связей может использоваться как критерий эффективности процесса залечивания трещины. Из полученных результатов (см. рис.4) следует, что эффективность снижения КИН при $d/\ell \geq 0.5$ (площадь трещины заполнена связями не менее, чем на $\frac{3}{4}$) слабо различается. Таким образом, достаточная эффективность залечивания трещины достигается уже при $d/\ell = 0.5$.

4. Заключение. В работе приведена методика численного решения задач стационарной теплопроводности и термоупругости в осесимметричной постановке методом граничных интегральных уравнений при учете взаимодействия берегов трещин в концевой области. Представлены результаты решение тестовых задач, подтверждающих эффективность разработанной методики. В осесимметричной постановке рассмотрена задача о залечивании дискообразной трещины заполнителями различной жесткости при различной степени заполнения трещины (размере концевой области).

Разработанная методика позволяет решать в осесимметричной постановке задачи, связанные с расчетом теплового и термонапряженного состояний и КИН при моделировании процессов залечивания трещин в композиционных материалах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант №23-29-00524).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ситников Н.Н., Хабибуллина И.А., Мащенко В.И., Ризаханов Р.Н. Оценка перспектив применения самовосстанавливающихся материалов и технологий на их основе // Перспективные материалы. – 2018. – № 2. – С. 5-16.
2. Snoeck D., Malm F., Cnudde V., Grosse C.U., Van Tittelboom, K. Validation of Self-Healing Properties of Construction Materials through Nondestructive and Minimal Invasive Testing // Adv. Mater. Interfaces. – 2018. – V. 5. – No.17. – P. 1-28.
3. Lucas S. S. Tapavicza M., Schmidt A. M., Bertling J., Nellesen A. Study of quantification methods in self-healing ceramics, polymers and concrete: A route towards standardization // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2016. – No.1. – P.1-22.
4. Ural A., Krishnan V. R., Papoulia K. D. A cohesive zone model for fatigue crack growth allowing for crack retardation // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – V. 46. – P. 2453–2462
5. Mergheim J., Steinmann P. Phenomenological modeling of self-healing polymers based on integrated healing agents // Computational Mechanics. – 2013. – V. 52. – P.681–692.
6. Alshegri A. A., Abu Al-Rub R. K. Finite element implementation and application of a cohesive zone damage-healing model for self-healing materials // Engineering Fracture Mechanics. – 2016 – V. 163. – P. 1-22.
7. Ozaki, S., Osada, T., Nakao, W. Finite element analysis of the damage and healing behavior of self-healing ceramic materials // Int. J. Solids Struct. – 2016. – V. 100 – P.307–318.
8. Ponnusami S. A., Krishnasamy J., Turteltaub S., Zwaag S. A cohesive-zone crack healing model for self-healing materials // International Journal of Solids and Structures. – 2018 –V. 134. – P. 249–263.
9. Becker A. A. The boundary elements method in engineering: a complete course, McGraw-Hill International, UK, 1992.
10. Перельмутер М. Н. Моделирование кинетики самозалечивания трещин // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22. № 4. С. 47–55.
11. Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // Computational Mechanics – 2013. – Vol. 51, No. 4. –P. 523–534.
12. Перельмутер М. Н. Применение метода граничных элементов при исследовании пространственного напряженного состояния составных конструкций // Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении – 1989. Труды ЦИАМ №1237, Т. 4 – С. 74–99.
13. Перельмутер М.Н. Анализ напряженного состояния в концевой области трещины на границе раздела материалов методом граничных элементов Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 415-426.
14. Perelmuter M. Analysis of interaction of bridged cracks and weak interfaces, International Journal of Mechanical Sciences - 2018.- Vol. 149. P. 349–360
15. Bakr A.A., Fenner R.T. Boundary integral equation analysis of axisymmetric thermoelastic problems //J. of Strain Analysis -1983.-Vol. 18. No. 4.-P.239-251.
16. Das B.R. Thermal stresses in a long cylinder containing a penny-shaped crack // International Journal of Engineering Science - 1968. –Vol. 6. – P.497–516.

Сведения об авторах

Перельмутер Михаил Натанович – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия, E-mail: perelm@ipmnet.ru

Дудченко Александр Владимирович – к.т.н., научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ И УПРУГИХ СВОЙСТВ РЕШЕТЧАТЫХ БИМЕДИЦИНСКИХ СКАФФОЛДОВ

Пирогова Ю.В., Ташкинов М.А., Еленская Н.В., Тарасова А.С., Виндокуров И.В., Шалимов А.С., Зильбершмидт В.В

Работа посвящена разработке методов проектирования и создания скаффолдов для регенерации костной ткани на основе аддитивных технологий, а также исследованию их механического поведения и свойств с точки зрения локальных физико-механических и морфологических характеристик. Была рассмотрена трехмерная геометрия микроструктуры трабекулярной кости, которая имеет случайную пористую структуру. В качестве искусственных заменителей рассмотрены трехмерные структуры, спроектированные на основе различных концепций. Прототипы представительных объемов модельных структур были изготовлены из полилактида (PLA) методом послойного наплавления (FDM). Выполнен численный расчет напряженно-деформированного состояния в них при условиях сжимающей нагрузки, проведен анализ критических областей и возможных паттернов разрушения на основе модели деградации упругих свойств. Изучено влияние изменения параметров структурной морфологии на появление концентраторов напряжений, а также на процессы зарождения и распространения разрушения. Распределения полей деформаций на поверхности, наблюдаемые в экспериментах, хорошо согласуются с данными, полученными в результатах численного моделирования. Сопоставление механического поведения и характеристик прототипов с поведением представительного объема трабекулярной кости позволяет сделать выводы об оптимальном морфологическом строении.

1. В качестве решения проблем повреждения структуры костной ткани, связанные с морфологией и целостностью могут быть применены инородные структуры – биосовместимые имплантаты (фиксаторы, эндопротезы, остеосинтез). Они могут помочь не только в восстановлении кости, но и её механических свойств [3]. Скаффолды — это клеточные матрицы, которые вводятся с целью регенерации костей. Они используются в сочетании с биологическими носителями, которые ускоряют процессы заживления и регенерации костной ткани. Скаффолд, замещающий фрагмент костной ткани или участвующий в её регенерации, должен обладать не только биосовместимостью, но и иметь схожее механическое поведение при сжимающих нагрузках. В настоящее время нет общепринятого дизайна искусственного пористого скаффолда, который в совокупности отвечал бы вышеперечисленным требованиям. Благодаря способности быстро изготавливать уникальные продукты, технологии аддитивного производства (АП) все чаще используются в медицинских приложениях [1, 2, 4].

2. В качестве референтной модели исследованы представительные объемы структуры реальных образцов трабекулярной кости. Трехмерная геометрия структур была получена с использованием метода HR-рОСТ. Исследование на сжатие структур производилось в двух ориентациях, осевой и трансверсальной (Рисунок 1). Далее принимаются следующие обозначения: трабекулярная структура №1 с объемной долей 55,2% в осевой ориентации (вдоль оси Y) – T1-L, в трансверсальной ориентации (вдоль оси Z) – T1-T; трабекулярная структура №2 с объемной долей пор 56,8% в осевой ориентации (вдоль оси Y) – T2-L, в трансверсальной ориентации (вдоль оси X) – T2-T.

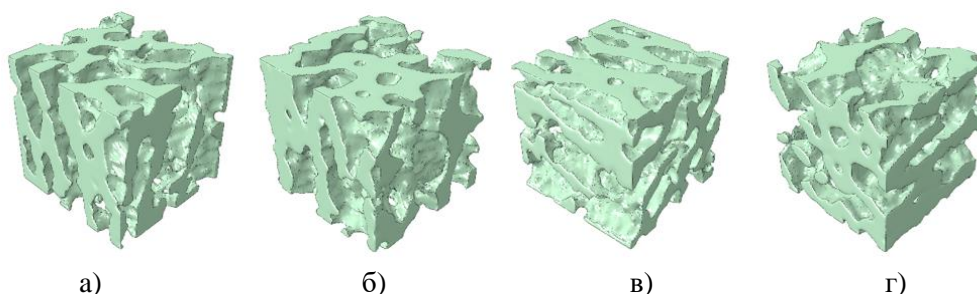


Рисунок 1 – Геометрия биомиметических структур а) T1-L, б) T1-T, в) T2-L и г) T2-T

В качестве прототипных моделей было рассмотрено 4 группы: периодические центрированные; структуры, построенные на основе трижды периодических минимальных поверхностей; двунепрерывные и структуры, построенные на основе диаграмм Вороного (см. Рисунок 2). Периодические центрированные структуры являются решетчатыми и основаны на повторении

в пространстве элементарной ячейки с определенной композицией. В данной работы были использованы кубическая гранецентрированная (C1) и кубическая объемноцентрированная (C2) элементарные ячейки. Рассматривались модели с периодической структурой, для генерации которых использовались аналитические выражения трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП), содержащие сумму произведений тригонометрических функций. В качестве таких структур рассмотрены алмазная (P1), традиционная гироидная (P2) структуры, структура, построенная на основе вариации поверхности гироида (P3), плотно-упакованная (P4) и примитивная (P5) структуры. Геометрия модели случайной двунепрерывной структуры открытого типа (B) получена на основе алгоритма разделения фаз с использованием случайных Гауссовских полей. Диаграмма (тесселяция) Вороного – это разбиение области на подобласти, близкие к каждому из заданного конечного числа точек. Были исследованы решетчатые структуры, связность структурных элементов в которых определена на основе конфигурации стандартной диаграммы Вороного (V1), а также диаграммы Вороного с релаксацией Ллойда (V2). Релаксация Ллойда представляет собой алгоритм для нахождения равномерно расположенных множеств точек в подмножествах евклидова пространства и разбиения этих подмножеств на выпуклые ячейки правильной формы и равномерного размера.

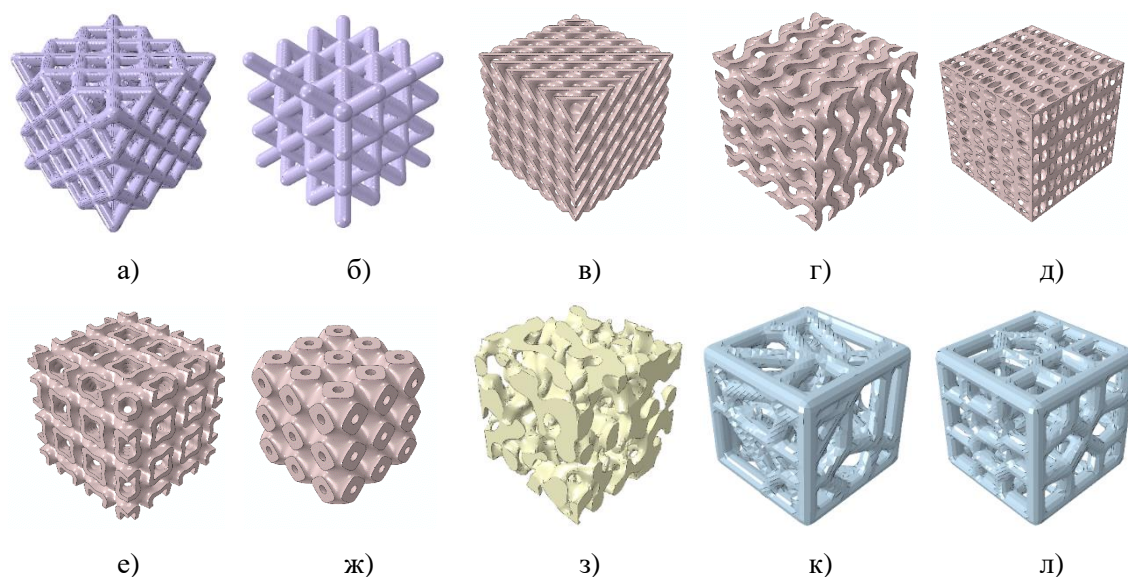


Рисунок 2 - Геометрия кубических структур (а) C1 and (б) C2; решетчатых структур (в) P1, (г) P2, (д) P3, (е) P4, (ж) P5; структура (з) B; (к) структуры, построенные на основе тесселяции Вороного V1 л) and V2.

Все модели были созданы с помощью аддитивных технологий методом наплавления (FDM). В качестве материала выбран биосовместимый полимер - полилактид (PLA). Для упрощения решаемой задачи предполагалось, что материал ведет себя как квази-изотропный. Для изучения поверхностных деформаций была использована бесконтактная система Vic-3D Micro-DIC.

3. Для описания трабекулярных структур, а также описания их изменений часто используются морфометрические характеристики. В данной работе были рассчитаны некоторые самые частоупомягаемые в литературе параметры. Для их расчета использован плагин BoneJ в программе ImageJ. Данный анализ показал, что по всем параметрам структура B близка к параметрам, которые рассчитаны для трабекулярных моделей. Наибольшую толщину лигаментов имеют структуры V1 и V2, что может говорить о преимуществе в вопросах прочности и устойчивости данных моделей. Однако показатели расстояния между лигаментами данных моделей тоже выше, в 3.32 раза относительно значения, полученного для трабекулярной структуры, что противоречит сделанному выше предположению. Это может быть объяснено меньшим количеством лигаментов, расположенных внутри модели.

Далее модели исследованы на механический отклик системы. Таким образом, рассчитан эффективный модуль Юнга численно, а также получен экспериментально. В большинстве случаев экспериментальные данные выше численных. Наибольшее значение экспериментального упругого модуля зафиксировано у структуры T2-L, что отличается от эффективного модуля T1-L на 13,9%, однако численные значения отличны лишь на 3,1%. Эффективные характеристики образцов со структурой трабекулярной костной ткани демонстрируют выраженную анизотропию. Экспериментальное значение эффективного модуля упругости для V2 и P3, ближе остальных к значениям, полученным для трабекулярных структур, что говорит о схожей жесткости при сжимающих нагрузках. Трабекулярные структуры костной ткани T1-T и T2-T, а также C2 показали самое податливое поведение.

С использованием системы бесконтактного измерения деформаций на основе корреляции цифровых изображений в процессе нагружения были исследованы локальные элементы структуры, такие как элементарная ячейка, находящаяся в середине структуры (в случае периодических структур), либо одна из центральных областей соединения связок (для случайных структур). Результат сравнения позволяет говорить о возможности применения полученных модельных закономерностей при анализе реальных объектов. Рассмотренные структуры имеют разный характер деформирования (Рисунок 3). Например, в структуре P5 сжатие подвергаются в большей степени края поверхности наблюдения, расположенные ортогонально направлению нагружения. Наименьшие концентрации деформаций при заданных условиях в структурах V2, P3 и P1.

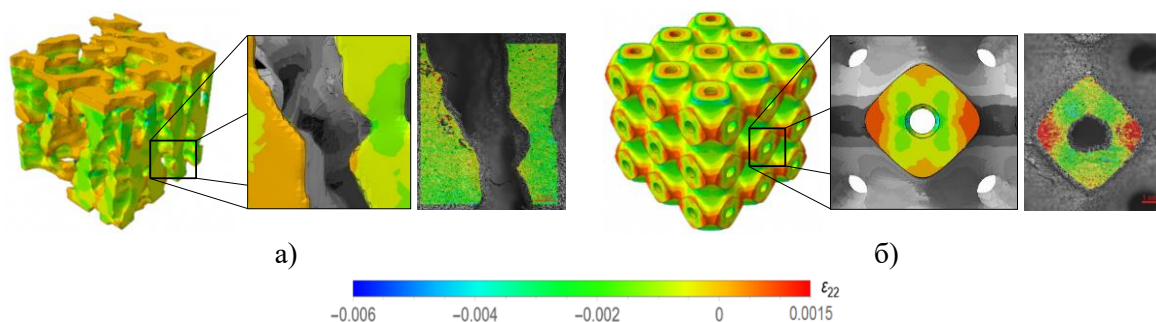


Рисунок 3 - Поля деформаций для структур (а) T1-L и (б) P5 при нагружении 500 Н, полученные численным и экспериментальным путем соответственно

Во всех моделях проводился анализ распределений напряжений с использованием методов математической статистики. В качестве визуализации распределения напряжений по объему КЭ модели были использованы сглаженные гистограммы. Все модели исследуются в условиях нагружения верхней грани силой 4 кН. Для оценки количества потенциально разрушившихся конечных элементов на графике вертикальной линией отмечено значение предела прочности материала, равного 55 МПа. При сравнении трабекулярных структур наблюдается различие характера распределений напряжений по объему: структуры, лигаменты которых были ориентированы преимущественно в осевом направлении, имеют четко выраженный пик напряжений, в то время как структуры в трансверсальной ориентации демонстрируют более равномерное распределение напряжений от близких к 0 до превышающих предел прочности материала. Все модели, рассматриваемые в качестве прототипных разделены на 2 группы. В первую группу входят структуры, распределение которых похоже на нормальное. К графику трабекулярной структуры в осевой ориентации ближе всех по расположению графики структур P5 и P3. Во-вторую группу попали случайные структуры, которые рассмотрены и на предмет анизотропии, то есть расчеты проведены для всех трех направлений нагружения. В ходе анализа была отмечена структура V2. Также заметна явная анизотропия структуры В.

Механическое поведение всех структур было также исследовано с учетом процедуры деградации упругих свойств, реализованной при моделировании методом конечных элементов (Рисунок 4).

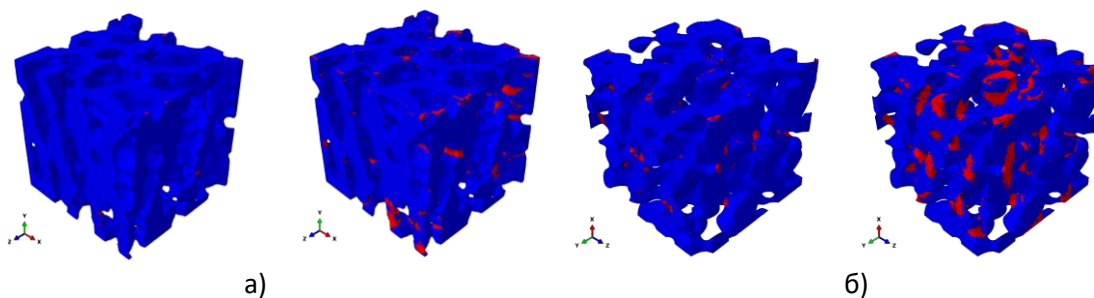


Рисунок 4 – Сравнение полей выполнения критерия деградации упругих свойств в структурах (а) T1-L и б) B при сжимающей нагрузке 2000 Н и 4000 Н соответственно

Повреждения зарождаются сначала в самых тонких связках (лигаментах), а лишь потом в более крупных связках. Для структур с со случайным дизайном зарождение повреждений при 2000 Н почти не заметно. Для периодических решетчатых структур, а также для структур на основе стандартной диаграммы Вороного заметно распространение повреждений происходит в местах изгибов решетки и соединении нескольких структурных элементов. По результатам анализа процентного содержания разрушившихся элементов структуры P1-P5 показали самое лучшее сопротивление сжатию.

4. Анализ данных структур был направлен на поиск трехмерной структуры, которая оптимально смогла бы заменить структуру трабекулярной кости. Были изучены механические свойства, морфологические параметры, проведен статистический анализ напряженного состояния, а также оценка разрушения структур с применением процедуры деградации упругих свойств. На основе данных о деформировании внутренних структурных элементов, установлены преимущества биомиметических структур перед искусственными периодическими решетчатыми структурами с точки зрения способности к сопротивлению сжимающей нагрузке.

Таким образом, резюмируя все полученные результаты, можно выделить структуру, построенную на основе вариации гироида. Данная модель показала наиболее близкое механическое поведение к поведению биомиметических структур и наибольшее сопротивление сжимающим нагрузкам, в том числе разрушению. Также в качестве замены костной структуре может быть рассмотрена структура, построенная на основе диаграмм Вороного с применением релаксации Ллойда, показавшая схожую с ними упругую характеристику, хорошее сопротивление разрушению, а также схожую удельную площадь поверхности, что напрямую связано с количеством взаимодействующих с интегрированной структурой биологически активных веществ.

Искусственно созданные на основе различных методов (либо стохастических генераторов) структуры полезны тем, что, применяя к ним параметрический анализ, можно подобрать оптимальные параметры для необходимой комбинации механического отклика, морфологических параметров и физических свойств структуры. Полученные в ходе выполнения работы результаты могут быть полезны при проектировании и создании функциональных пористых скаффолдов для замещения и восстановления костной ткани.

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете в рамках гранта, выделяемого для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных организациях высшего образования, научных учреждениях и государственных научных центрах Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-578 от 31.05.2021 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mallya P. K., Juneja M. Rapid prototyping of orthopedic implant materials for cranio-facial reconstruction: A Survey // *Materials Today: Proceedings*, vol.45, 2021.
2. Barbin T. [и др.]. 3D metal printing in dentistry: An in vitro biomechanical comparative study of two additive manufacturing technologies for full-arch implant-supported prostheses // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 108, 2020
3. Liu Y. [и др.]. Role of implants surface modification in osseointegration: A systematic review. // *Journal of biomedical materials research. Part A*, vol. 108, 2020.
4. Ranuša M. [и др.]. Optimal design and fabrication of scaffolds to mimic tissue properties and satisfy biological constraints // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 1132, 2022.

Информация об авторах

Пирогова Ю.В. – лаборант-исследователь НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail yu.pirogova@pstu.ru

Ташкинов М.А. – ведущий научный сотрудник НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail m.tashkinov@pstu.ru

Еленская Н.В. – младший научный сотрудник НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail n.elenskaya@pstu.ru

Тарасова А.С. – лаборант-исследователь НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail a.tarasova@pstu.ru

Виндокуров И.В. – младший научный сотрудник НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail ivv@pstu.ru

Шалимов А.С. – младший научный сотрудник НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail Shalimov96@pstu.ru

Зильбершмидт В.В. – научный руководитель НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет
E-mail V.Silberschmidt@lboro.ac.uk

ОСРЕДНЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЛИБРИРУЮЩЕМ ПЛОСКОМ СЛОЕ С ГРАНИЦАМИ РАЗЛИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рысин К.Ю.

Изучается теплоперенос и структура течения в вертикальном плоском слое, вращающемся вокруг горизонтальной оси, ориентированной перпендикулярно плоскости слоя. Границы слоя изотермические и поддерживаются при заданных различных температурах. Рассматривается случай модулированного вращения полости (периодически изменяющейся скорости вращения), когда варьировались частота и амплитуда модуляции скорости вращения. Показано, что неравномерное вращение полости приводит к возбуждению осредненной конвекции жидкости из состояния квазиравновесия. Течение, развивающееся в либрирующем слое, имеет вид азимутального вихря.

Конвективное движение жидкости, вызванное градиентом температуры и подверженное вращению, является частым явлением в природных процессах и в промышленных задачах. Достаточно подробно исследованы различные способы управления конвективными течениями для слоя жидкости, равномерно вращающегося вокруг вертикальной оси [1, 2] и горизонтальной [3, 4]. В текущей работе представлено экспериментальное исследование влияния модуляции скорости вращения (либраций) на теплоперенос во вращающемся вокруг горизонтальной оси плоском слое.

Изучены пороги возбуждения осредненной конвекции во вращающемся вокруг горизонтальной оси плоском слое при либрациях полости. Обнаружено, что либрации полости генерируют в слое, вблизи боковой границы, осредненное течение в виде тороидального вихря. Показано, что с увеличением скорости вращения, действие либраций на теплоперенос усиливается – порог возбуждения осредненной конвекции смещается в области меньших амплитуд либраций полости. Проведен анализ порогов осредненной конвекции на плоскости безразмерной скорости вращения и безразмерного пульсационного числа Рейнольдса. Показано, что с повышением скорости вращения, пороговое значение числа Рейнольдса возрастает.

Сложность исследования течения, вызванного периодически изменяющейся скоростью вращения, заключается в том, что механизм, приводящий в движение жидкость, наиболее интенсивно проявляет себя при высоких скоростях вращения, вызывая тем самым в тонком пограничном слое центробежную неустойчивость. Это затрудняет определение вклада в развитие осредненного течения каждого механизма в отдельности. Природа этой задачи отражает конкуренцию и нелинейные взаимодействия между центробежным и вибрационным [3] конвективными механизмами, а также неустойчивостью вызванную циркуляцией жидкости вследствие модулированного вращения полости. Изучение вращающейся системы, подверженной периодически изменяющейся скорости вращения, имеет большую прикладную направленность в инженерных целях, где контроль неустойчивости и теплопереноса в жидкостных системах является весьма важным.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-71-00086.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University Press, p.656, 1961.
2. Rossby H.T. A study of Benard convection with and without rotation. J. Fluid Mech., vol.36, no.2, pp.309-335, 1969.
3. Kozlov V. G. Thermal vibrational convection in rotating cavities. Fluid Dynamics, vol.39, no.1, pp.3–11, 2004.
4. Vjatkin A. A., Ivanova A. A., Kozlov V. G., Rysin K. Yu. Effect of the tangential component of a force field on convection in a rotating plane layer. Izv. Atmos. Ocean. Phys., vol.53, pp.187-194, 2017.

Сведения об авторе

Рысин Кирилл Юрьевич – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Пермский Государственный Гуманитарно-Педагогический Университет, Лаборатория Вибрационной гидромеханики, г. Пермь, Россия. E-mail rysin@pspu.ru

О СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ НА ЗАЩЕМЛЕННОМ КОНТУРЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

Сейранян С.П.

Рассматривается задача изгиба прямоугольной защемленной на контуре пластины при симметричной относительно осей симметрии прямоугольника поперечной нагрузке. Ранее автором [1], представляя изгибающие моменты на контуре прямоугольной пластины предположительно сходящимися тригонометрическими рядами, содержащими неизвестные коэффициенты, и применяя метод С.П.Тимошенко [2] модифицированным способом, получена бесконечная вполне регулярная система линейных алгебраических уравнений. Однако при выводе бесконечной системы принимается предположение типа С.П.Тимошенко о допустимости изменения порядка суммирования в возникающих повторных рядах. В представляемой работе доказано, что при принятого типа, но произвольной механической нагрузке: а) существует стремящееся к нулю (одновременно единственное) решение бесконечной системы, которое может быть получено методом редукции в сочетании с методом последовательных приближений, б) исходные предположения о сходимости тригонометрических рядов изгибающих моментов на контуре пластины и об изменении порядка суммирования в названных повторных рядах выполняются.

Решению задачи изгиба прямоугольной защемленной на контуре пластины посвящены работы, нашедшие свое отражение в обзоре [3], а также в обзорных частях книг [2], [4] и др. Одним из известных и универсальных методов решения данной задачи является метод С.П. Тимошенко [2], который, тем не менее, как отмечено в [5], относится к математически нестрогую методу. В настоящей работе в продолжение работы [1] восполняется возникший пробел.

1. Исходные известные авторские результаты. Решение задачи изгиба прямоугольной защемленной на контуре пластины при симметричной относительно осей симметрии прямоугольника поперечной нагрузке $q(x,y)$ для прогиба $w(x,y)$ в прямоугольнике $(x, y) \in [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$, отправляясь от работы [2], в работе [1] отыскивалось в виде

$$w(x, y) = \frac{1}{D} \sum_{i=1,3,\dots} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{q_{im} \cos \lambda_i x \cos \mu_m y}{(\lambda_i^2 + \mu_m^2)^2} + \frac{1}{2D} \sum_{i=1,3,\dots} E_i \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{\lambda_i^2 \operatorname{ch} \alpha_i} (\alpha_i \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i y - \lambda_i y \times$$

$$\times \operatorname{sh} \lambda_i y) \cos \lambda_i x + \frac{1}{2D} \sum_{m=1,3,\dots} F_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{\mu_m^2 \operatorname{ch} \beta_m} (\beta_m \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch} \mu_m x - \mu_m x \operatorname{sh} \mu_m x) \cos \mu_m y \quad (1)$$

Здесь D – изгибная жесткость пластины, $\lambda_i = i\pi/a$, $\mu_m = m\pi/b$, $\alpha_i = i\pi b/(2a)$, $\beta_m = m\pi a/(2b)$,

$$q_{im} = \frac{4}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q(x, y) \cos \lambda_i x \cos \mu_m y \, dx \, dy \quad (2)$$

Представление (1) изначально удовлетворяет уравнению Софи Жермен – Лагранжа с правой частью – нагрузкой $q(x,y)$ и условиям опирания торцов, изгибаемых моментами

$$M_y(x, \pm b/2) = \sum_{i=1,3,\dots} (-1)^{(i-1)/2} E_i \cos \lambda_i x, \quad M_x(\pm a/2, y) = \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{(m-1)/2} F_m \cos \mu_m y \quad (3)$$

Далее $w(x,y)$ на сторонах пластины подчиняется условиям защемления краев. Принимая предположения о сходимости рядов (3) и о допустимости изменения порядка суммирования во встречающихся повторных тригонометрических рядах, в [1] модификацией метода С.П.Тимошенко получена вполне регулярная бесконечная система линейных алгебраических уравнений [6] относительно неизвестных $\hat{E}_i = \sqrt{a/b} E_i$, $\hat{F}_i = \sqrt{b/a} F_i$

$$\begin{cases} \hat{E}_i = - \frac{8}{\pi (\operatorname{th} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i)} \left(\frac{ib}{a} \right)^2 \sum_{m=1,3,\dots} \frac{m}{[(ib/a)^2 + m^2]^2} \hat{F}_m + b_i^{(1)} \\ \hat{F}_i = - \frac{8}{\pi (\operatorname{th} \beta_i + \beta_i / \operatorname{ch}^2 \beta_i)} \left(\frac{ia}{b} \right)^2 \sum_{m=1,3,\dots} \frac{m}{[(ia/b)^2 + m^2]^2} \hat{E}_m + b_i^{(2)} \end{cases} \quad \text{, где } 0 < \frac{b}{a} < \infty, i=1, 3, \dots, \quad (4)$$

$$b_i^{(1)} = \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{2 (\operatorname{sh} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch} \alpha_i)} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_{-a/2}^{a/2} \cos \lambda_i x \int_{-b/2}^{b/2} q(x, y) (2y/b \operatorname{sh} \lambda_i y - \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i y) \, dx \, dy, \quad (5)$$

$$b_i^{(2)} = \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{2(\operatorname{sh} \beta_i + \beta_i / \operatorname{ch} \beta_i)} \sqrt{\frac{a}{b}} \int_{-a/2}^{a/2} (2x/a \operatorname{sh} \mu_i x - \operatorname{th} \beta_i \operatorname{ch} \mu_i x) \int_{-b/2}^{b/2} q(x, y) \cos \mu_i y dx dy, \quad (6)$$

2. Анализ исходной бесконечной системы. Пусть $q(x, y) = \bar{q} = \text{const}$. Тогда с использованием (5), (6) для свободных членов получаем

$$b_i^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{ab} \lambda_i^3} \left(\frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2 \alpha_i} - \operatorname{th} \alpha_i \right) \frac{\bar{q}}{(\operatorname{th} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i)}, \quad b_i^{(2)} = \frac{4}{\sqrt{ab} \mu_i^3} \left(\frac{\beta_i}{\operatorname{ch}^2 \beta_i} - \operatorname{th} \beta_i \right) \frac{\bar{q}}{(\operatorname{th} \beta_i + \beta_i / \operatorname{ch}^2 \beta_i)} \quad (7)$$

которые совпадают с учетом произведенных в [1] преобразований со свободными членами бесконечной системы в [2].

Рассмотрим теперь случай нагружения пластины четырьмя сосредоточенными силами величины $P/4$ внутри прямоугольника пластины

$$q(x, y) = P/4 [\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) + \delta(x - \xi)\delta(y + \eta) + \delta(x + \xi)\delta(y - \eta) + \delta(x + \xi)\delta(y + \eta)] \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), (6), приходим к результатам

$$b_i^{(1)} = P \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{(-1)^{(i-1)/2} \cos \lambda_i \xi}{2(\operatorname{sh} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch} \alpha_i)} \left(\frac{2\eta}{b} \operatorname{sh} \lambda_i \eta - \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i \eta \right), \quad (9)$$

$$b_i^{(2)} = P \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{(-1)^{(i-1)/2} \cos \mu_i \eta}{2(\operatorname{sh} \beta_i + \beta_i / \operatorname{ch} \beta_i)} \left(\frac{2\xi}{a} \operatorname{sh} \mu_i \xi - \operatorname{th} \beta_i \operatorname{ch} \mu_i \xi \right) \quad (10)$$

Далее предположим, что $q(x, y)$ – распределенная ограниченная нагрузка: $|q(x, y)| \leq q^* = \text{const}$.

Тогда, принимая во внимание в (5), что при $-b/2 \leq y \leq b/2$

$$2y/b \operatorname{sh} \lambda_i y - \operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i y = \operatorname{ch} \lambda_i y (2|y|/b \operatorname{th} \lambda_i |y| - \operatorname{th} \alpha_i) \leq \operatorname{ch} \lambda_i y (\operatorname{th} \lambda_i |y| - \operatorname{th} \alpha_i) \leq 0 \quad (11)$$

приходим к оценке

$$\begin{aligned} |b_i^{(1)}| &\leq \frac{1}{2(\operatorname{sh} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch} \alpha_i)} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_{-a/2}^{a/2} |\cos \lambda_i x| \int_{-b/2}^{b/2} q^* (\operatorname{th} \alpha_i \operatorname{ch} \lambda_i y - 2y/b \operatorname{sh} \lambda_i y) dx dy = \\ &= \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{4q^* \operatorname{th} \alpha_i - \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i}{\pi \lambda_i^2 \operatorname{th} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i} \leq \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{4q^*}{\pi \lambda_i^2} \quad \text{Аналогично, } |b_i^{(2)}| \leq \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{4q^*}{\pi \mu_i^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим теперь, что $q(x, y)$ общего вида состоит из суммы распределенной ограниченной нагрузки и конечного числа нагрузок типа (8). Но из (9) и (10) имеем, что при нагрузке (8) [7, 707]

$$|b_i^{(1)}| = O(e^{\lambda_i(\eta - b/2)}), \quad |b_i^{(2)}| = O(e^{\mu_i(\xi - a/2)}), \quad \text{где } 0 \leq \eta < b/2, \quad 0 \leq \xi < a/2, \quad \text{т.е. стремятся к нулю при}$$

стремлении $i \rightarrow \infty$ быстрее, чем в случае (12). Значит, свободные члены бесконечной системы (4) и при общего вида нагрузке стремятся к нулю не медленнее, чем $O(1/i^2)$. Отсюда

$$|b_i^{(1)}| \leq K_1 / i^2, \quad |b_i^{(2)}| \leq K_1 / i^2, \quad \text{где } K_1 > 0 - \text{некоторая константа.} \quad (13)$$

Используя лишь ограниченность свободных членов, приходим к выводу о существовании главного решения \tilde{E}_i, \tilde{F}_i вполне регулярной бесконечной системы (4) [6].

3. О существовании сходящегося к нулю решения исходной бесконечной системы.

Рассмотрим прежде просуммированный в [2] (стр.165) косинусный ряд

$$I_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n z}{(\alpha^2 + n^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{4\alpha^3} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi - z)}{\operatorname{sh} \pi \alpha} - \frac{\pi(\pi - z)}{4\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha(\pi - z)}{\operatorname{sh} \pi \alpha} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi - z) \operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh}^2 \pi \alpha} \quad (14)$$

где $\alpha \neq 0, 0 \leq z \leq 2\pi$

Тогда

$$\frac{I_1(0) - I_1(\pi)}{2} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2} = \frac{\pi}{8\alpha^3} \frac{\operatorname{ch} \alpha \pi - 1}{\operatorname{sh} \pi \alpha} + \frac{\pi^2}{8\alpha^2} \left(\frac{\operatorname{ch}^2 \alpha \pi - \operatorname{sh}^2 \alpha \pi}{\operatorname{sh}^2 \pi \alpha} - \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh}^2 \pi \alpha} \right) = \frac{\pi}{8\alpha^3} \operatorname{th} \frac{\alpha \pi}{2} -$$

$$\frac{\pi^2}{8\alpha^2} \frac{2\operatorname{sh}^2(\alpha\pi/2)}{4\operatorname{sh}^2(\pi\alpha/2)\operatorname{ch}^2(\alpha\pi/2)} = \frac{\pi}{8\alpha^3} \left(\operatorname{th} \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2\operatorname{ch}^2(\alpha\pi/2)} \right) \quad (15)$$

Отсюда

$$\frac{8\alpha^3}{\pi(\operatorname{th}(\alpha\pi/2) + \alpha\pi/(2\operatorname{ch}^2(\pi\alpha/2)))} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2} = \frac{\operatorname{th}(\alpha\pi/2) - \alpha\pi/(2\operatorname{ch}^2(\pi\alpha/2))}{\operatorname{th}(\alpha\pi/2) + \alpha\pi/(2\operatorname{ch}^2(\pi\alpha/2))} < 1 \quad (16)$$

Отметим, что неравенство (16), в частном случае $\alpha = i = 1, 3, \dots$ получено в [6], но другим способом.

Положим далее $\zeta(\alpha) = \operatorname{th}(\alpha\pi/2) + \alpha\pi/(2\operatorname{ch}^2(\alpha\pi/2))$. Тогда с применением неравенства Коши – Буняковского для бесконечных рядов [7, 133, 375], неравенств (16) и в п.3 в [8] получаем

$$\begin{aligned} \frac{8\alpha^{5/2}}{\pi\zeta(\alpha)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{(\alpha^2 + n^2)^2} &= \frac{8\alpha^{5/2}}{\pi\zeta(\alpha)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^2 + n^2} \frac{n^{1/2}}{\alpha^2 + n^2} \right) \leq \frac{8\alpha^{5/2}}{\pi\zeta(\alpha)} \sqrt{\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2}} \times \\ &\times \sqrt{\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n}{(\alpha^2 + n^2)^2}} = \sqrt{\frac{8\alpha^3}{\pi\zeta(\alpha)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2}} \sqrt{\frac{8\alpha^2}{\pi\zeta(\alpha)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2}} \leq \sqrt{0.829} < 0.911 \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим теперь, что замена неизвестных в системе (4)

$$\widehat{E}_i = \widetilde{E}_i(a/b)^{1/4} / i^{1/2}, \widehat{F}_i = \widetilde{F}_i(b/a)^{1/4} / i^{1/2} \quad (18)$$

вновь при $i = 1, 3, \dots, 0 < b/a < \infty$ приводит к вполне регулярной бесконечной системе

$$\begin{cases} \widetilde{E}_i = -\frac{8}{\pi(\operatorname{th}\alpha_i + \alpha_i/\operatorname{ch}^2\alpha_i)} \left(\frac{ib}{a}\right)^{5/2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m^{1/2}}{[(ib/a)^2 + m^2]^2} \widetilde{F}_m + \left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} b_i^{(1)} i^{1/2} \\ \widetilde{F}_i = -\frac{8}{\pi(\operatorname{th}\beta_i + \beta_i/\operatorname{ch}^2\beta_i)} \left(\frac{ia}{b}\right)^{5/2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m^{1/2}}{[(ia/b)^2 + m^2]^2} \widetilde{E}_m + \left(\frac{a}{b}\right)^{1/4} b_i^{(2)} i^{1/2} \end{cases} \quad (19)$$

Так как (17) при значении $\alpha = ib/a$ и $\alpha = ia/b$ – выполненное условие вполне регулярности [6] для первого и второго уравнений системы (19). Но свободные члены названной системы ограничены, ибо с учетом (13) $|b_i^{(1)}|(b/a)^{1/4} i^{1/2} \leq K_1(b/a)^{1/4} / i^{3/2}$, $|b_i^{(2)}|(a/b)^{1/4} i^{1/2} \leq K_1(a/b)^{1/4} / i^{3/2}$.

Значит, полученная система имеет главное ограниченное решение $\widehat{E}_i, \widehat{F}_i$ [6]. Поэтому главное решение $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i$ исходной системы (4) с учетом (18) удовлетворяет неравенствам

$$|\widetilde{E}_i| \leq K_4 / i^{1/2}, |\widetilde{F}_i| \leq K_4 / i^{1/2}, \text{ где } K_4 > 0 - \text{ некая константа.} \quad (20)$$

Следовательно, $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, причем другого, стремящегося к нулю, решения системы (4) не существует [6].

4. Об изменении порядка суммирования в повторных рядах.

В работе [1] вывод вышеприведенной системы [4] сопровождался предположением типа С.П. Тимошенко [2] об изменении порядка суммирования в повторных рядах

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2} \widehat{F}_i m i}{[(ma/b)^2 + i^2]^2} \cos \lambda_i x = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2} \widehat{F}_i m i}{[(ma/b)^2 + i^2]^2} \cos \lambda_i x \quad (21)$$

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2} \widehat{E}_i m i}{[(mb/a)^2 + i^2]^2} \cos \mu_i y = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2} \widehat{E}_i m i}{[(mb/a)^2 + i^2]^2} \cos \mu_i y \quad (22)$$

Докажем теперь, что равенства (21), (22) верны. Подставляя решение $\widetilde{E}_i, \widetilde{F}_i$ системы (4) в левые части (21), (22), оценим модули общих членов рядов с учетом (20) и неравенства Юнга в преобразованной в [9] форме

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq C \alpha^\gamma \beta^{2-\gamma}, \text{ где } 0 \leq \gamma \leq 2, \alpha, \beta \geq 0, C > 0 - \text{ некая константа.} \quad (23)$$

Получаем

$$\left| \frac{(-1)^{(i-1)/2} \widehat{F}_i m i}{[(ma/b)^2 + i^2]^2} \cos \lambda_i x \right| \leq \frac{|\widehat{F}_i| m i}{[(ma/b)^2 + i^2]^2} \leq \frac{K_4 m i^{1/2}}{[(ma/b)^2 + i^2]^2} \leq \frac{K_4 m i^{1/2}}{C^2 (ma/b)^{2\gamma} i^{4-2\gamma}} \Bigg|_{\gamma=9/8} =$$

$$= \frac{K_4}{C^2 (a/b)^{9/4} m^{5/4} i^{5/4}} \text{ Аналогично, } \left| \frac{(-1)^{(i-1)/2} \widehat{E}_i m i}{[(mb/a)^2 + i^2]^2} \cos \mu_i y \right| \leq \frac{K_4}{C^2 (b/a)^{9/4} m^{5/4} i^{5/4}} \quad (24)$$

Отсюда, замена общих членов в повторных рядах слева в (21), (22) их модулями приводит к сходящимся рядам, что по теореме 3 [7, 394] и приводит к равенствам (21), (22).

5. О сходимости рядов изгибающих моментов на контуре пластины. Приводится доказательство сходимости рядов (3). Заметим прежде, что при $x=\pm a/2$, $y=\pm b/2$ сумма данных рядов равна нулю. Пусть теперь $-a/2 < x < a/2$, $-b/2 < y < b/2$. Положим

$$c_i = (ia/b)^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \tilde{F}_m m / \Lambda_{mi}^2, \text{ где } \Lambda_{mi} = (ma/b)^2 + i^2 \quad (25)$$

Тогда с использованием (24) имеем

$$|c_i| \leq \left(\frac{ia}{b} \right)^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{|\tilde{F}_m| m}{\Lambda_{mi}^2} \leq \left(\frac{b}{a} \right)^{1/4} \frac{K_4}{C^2 i^{1/4}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^{5/4}} = \frac{K_5}{i^{1/4}}, \lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0 \quad (26)$$

Поэтому

$$\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} c_i \cos \lambda_i x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1,3,\dots}^N (-1)^{(i-1)/2} c_i \cos \lambda_i x = \frac{1}{2 \cos \lambda_1 x} \lim_{N \rightarrow \infty} [c_1 + (-1)^{(N-1)/2} c_N \cos \lambda_{N+1} x +$$

$$+ \sum_{i=2,4,\dots}^{N-1} (-1)^{i/2} (c_{i+1} - c_{i-1}) \cos \lambda_i x] = \frac{1}{2 \cos \lambda_1 x} [c_1 + \sum_{i=2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{i/2} (c_{i+1} - c_{i-1}) \cos \lambda_i x] \quad (27)$$

Здесь мы использовали (26) и сходимость ряда справа, откуда последовала сходимость ряда слева. Действительно, с применением (20), (23) и операции **Together** в пакете **Mathematica7** имеем

$$|c_{mi+1} - c_{mi-1}| \leq |c_i| \leq \left(\frac{a}{b} \right)^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\tilde{F}_m| m \left| \frac{(i+1)^2}{(\Lambda_{mi} + 2i + 1)^2} - \frac{(i-1)^2}{(\Lambda_{mi} - 2i + 1)^2} \right| \leq \left(\frac{a}{b} \right)^2 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |\tilde{F}_m| m i \times$$

$$\times \left| \frac{4\Lambda_{mi}^2 - 8i^2(\Lambda_{mi} - 1) - 4}{((\Lambda_{mi} + 1)^2 - 4i^2)^2} \right| \leq \left(\frac{a}{b} \right)^2 K_4 K_6 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{mi^{1/2}}{\Lambda_{mi}^2} \leq \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{K_4 K_6}{C^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{mi^{1/2}}{(a/b)^{2\gamma} m^{2\gamma} i^{4-2\gamma}} \Bigg|_{\gamma=9/8} =$$

$$= \left(\frac{b}{a} \right)^{1/4} \frac{K_4 K_6}{C^2} \frac{1}{i^{5/4}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^{5/4}}, \quad (28)$$

где $\left| \frac{4\Lambda_{mi}^2 - 8i^2(\Lambda_{mi} - 1) - 4}{((\Lambda_{mi} + 1)^2 - 4i^2)^2} \right| = O\left(\frac{1}{\Lambda_{mi}^2}\right) \leq \frac{K_6}{\Lambda_{mi}^2}$, $K_6 > 0$ – некоторая константа [7, 707].

Оценка (28) показывает, что ряд справа в (27) мажорируется числовым сходящимся рядом, а значит, сходится [7, 430]. Поэтому, с учетом отмеченного выше замечания, сходится и ряд слева в (27). Заметим теперь, что

$$\frac{1}{\text{th } \alpha_i + \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i} = \left(\frac{1}{\text{th } \alpha_i + \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i} - 1 \right) + 1 = \frac{e^{-\alpha_i} - \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i}{\text{th } \alpha_i + \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i} + 1 \quad (29)$$

$$\text{Причем } \left| \frac{e^{-\alpha_i} - \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i}{\text{th } \alpha_i + \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i} \right| = O(e^{-\alpha_i}) \leq \frac{K_7}{e^{\alpha_i}}, \text{ где } K_7 > 0 \text{ – некоторая константа.} \quad (30)$$

Тогда, используя (29), получаем

$$\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2} c_i \cos \lambda_i x}{\text{th } \alpha_i + \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i} = \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_i} - \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i}{\text{th } \alpha_i + \alpha_i / \text{ch}^2 \alpha_i} (-1)^{(i-1)/2} c_i \cos \lambda_i x + \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} c_i \cos \lambda_i x < \infty \quad (31)$$

Действительно, здесь второй ряд справа – ряд (27), по доказанному выше, сходится. Первый же ряд справа мажорируется числовым сходящимся рядом, так как с использованием (26), (30) имеем

$$\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \left| \frac{e^{-\alpha_i} - \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i}{\operatorname{th} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i} (-1)^{(i-1)/2} c_i \cos \lambda_i x \right| \leq \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \left(\left| \frac{e^{-\alpha_i} - \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i}{\operatorname{th} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i} \right| |c_i| \right) \leq \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{K_5 K_7}{i^{1/4} e^{\alpha_i}} < \infty \quad (32)$$

Отсюда, утверждение (31) верно [7, 430]. Заметим теперь, что

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} b_i^{(1)} \cos \lambda_i x < \infty \quad (33)$$

Ибо с учетом (13) [7, 430]

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left| (-1)^{(i-1)/2} b_i^{(1)} \cos \lambda_i x \right| \leq \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} |b_i^{(1)}| \leq K_1 \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty \quad (34)$$

Отсюда, подставляя, по доказанному, единственное стремящееся к нулю решение \tilde{E}_i, \tilde{F}_i бесконечной системы (4) в первое уравнение системы (4), умножая данное уравнение на $(-1)^{(i-1)/2} \cos \lambda_i x$, суммируя по i при значениях $i = 1, 3, \dots$ и учитывая (31), (33) и (3), приходим к требуемому доказательству

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \tilde{E}_i \cos \lambda_i x &= -\frac{8}{\pi} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2} \cos \lambda_i x \left(\frac{ib}{a} \right)^2}{\operatorname{th} \alpha_i + \alpha_i / \operatorname{ch}^2 \alpha_i} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m}{[(ib/a)^2 + m^2]^2} \tilde{F}_m + \\ + \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} b_i^{(1)} \cos \lambda_i x &= M_y(x, \pm b/2) < \infty \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично приходим к доказательству, что и ряд изгибающих моментов $M_x(\pm a/2, y)$ в (3) сходящийся. Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сейранян С.П. К решению задачи изгиба прямоугольной защемленной по контуру пластины методом С.П. Тимошенко // Материалы XXII Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Алушта, 4 – 13 сентября, М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 276 – 279.
2. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
3. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Математические методы и физ.-мех. поля, 2004, т.47, № 3. С. 45–63.
4. Сухотерин М.В. Метод суперпозиций исправляющих функций. Санкт-Петербург: Изд. Политехнического университета, 2009. 265 с.
5. Даревский В.М., Шаринов И.Л. Новое решение задачи об изгибе защемленной по краям прямоугольной пластинки // В сб. Успехи механики деформируемых сред. М., Наука, 1975. С.183 – 194.
6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л., М., ГИТТЛ, 1949. 695 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, т. II, 2003. 863 с. / т. III, 2008. 727 с.
8. Сейранян С.П. Об одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений в первой краевой плоской задаче теории упругости для прямоугольника // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Труды IX Международной конференции, Горис, 1– 6 октября, Ереван: Изд-во НУАС, 2018. С. 283 – 287.
9. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично нагруженной прямоугольной пластины // Вестник Томского госунта. Математика и механика, 2009, № 1(5). С. 82 – 95.

Сведения об авторе

Сейранян Сурен Паруйрович – канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел. (+374 55) 54 28 38, E-mail: seysuren@yandex.ru.

ОБ ОСРЕДНЁННЫХ ПОТОКАХ В ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ КАПЕЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ

Субботин С.В.

Развивается экспериментальное исследование потоков в модели осциллирующей капли. Рассмотрены ситуации упругих колебаний капли, поверхность которой насыщена сурфактантом, а также колебаний капли в тонком канале кругового сечения. Основное внимание уделено изучению структуры осреднённого течения в зависимости от безразмерной частоты. В области высоких безразмерных частот колебания приводят к возбуждению осредненной циркуляции в виде двух пар согласованно вращающихся вихрей. При понижении безразмерной частоты структура течения трансформируется и в области низких частот принимает форму двух пар вихрей, направление движения в которых противоположно случаю высоких безразмерных частот.

1. Введение. В последнее время интенсивно развивается направление, посвященное исследованию движения жидкости в капельных включениях, в том числе в микрожидкостных устройствах проточного типа. Большая популярность обусловлена потребностями современной химической промышленности. В частности речь идет о повышении интенсивности жидкостной экстракции, которая используется для выделения химических элементов в чистом виде. Наиболее распространенной является конфигурация, состоящая из двух параллельных потоков, обмен веществом между которыми происходит посредством диффузии [1]. Для увеличения скорости экстракции размеры каналов уменьшают до микрометрических масштабов. Это связано с тем, что явления переноса в микросистемах происходят гораздо быстрее: диффузионные времена пропорциональны квадрату размера системы [2]. Поэтому в микроканалах более эффективным оказывается покапельная подача дисперсионной фазы в экстрагент [3, 4]. В случае, когда капля занимает всю ширину канала, смачивание границ обеспечивает поддержание внутренней циркуляции. Вихревое движение способствует быстрой доставке реагентов к границе раздела, где происходит химическая реакция, после чего продукты реакции смываются с границы в объем капли. Применение этой технологии значительно увеличивает скорость массопереноса, который также может быть ускорен вибрационной конвекцией. Так, в работах [5–8] было показано, что в осциллирующих каплях существуют мощные осредненные течения, способные переносить вещество из объема капли к ее границе. Настоящая работа посвящена исследованию осреднённого движения жидкости в осциллирующих капельных включениях в различных конфигурациях.

2. Результаты. Развивается экспериментальное моделирование течений внутри осциллирующей капли, поверхность которой насыщена сурфактантом [7, 8]. В качестве модели используется сфероидальная кювета с эластичной упругой стенкой, зажатой между двумя границами. В качестве основного метода измерений используется методика трассерной визуализации – Particle Image Velocimetry (PIV). Структура осредненного течения сильно зависит от безразмерной частоты $\omega = \Omega R^2 / \nu$, характеризующей отношение размера полости к толщине пограничного слоя $\delta = \sqrt{2\nu / \Omega}$; здесь R – радиус полости в недеформированном состоянии, Ω – частота колебаний, а ν – кинематическая вязкость жидкости. В области высоких безразмерных частот (толщина пограничных слоев мала по сравнению с размерами полости) и относительно малых амплитуд вибраций осциллирующее движение возбуждает осредненные крупномасштабные вторичные течения в виде двух пар согласованно вращающихся продольных вихрей (рис. 1). С увеличением амплитуды вибраций наблюдается возрастание осредненной скорости движения жидкости в вихрях по квадратичному закону. Механизм генерации течения связан с возбуждением осциллирующего движения в пограничных слоях Стокса. При этом касательные к поверхности слоя напряжения увлекают жидкость во всем объеме полости. В области высоких безразмерных частот $\omega \ll 1$ скорость осредненного движения определяется пульсационным числом Рейнольдса $Re_p = \Delta\varphi^2 R^2 \Omega / \nu$. С уменьшением безразмерной частоты ω увеличивается относительная толщина пограничных слоев, при этом интенсивность движения во вторичных вихрях уменьшается. В пределе низких значений безразмерных частот ($\omega \sim 10$) вторичные вихри отсутствуют. В этом случае структура течения определяется вязкими силами. Это приводит к тому, что осредненное течение принимает вид

форму двух пар вытянутых вдоль оси вибраций вихрей, при этом направление циркуляции противоположно тому, что наблюдается в высокочастотном пределе.

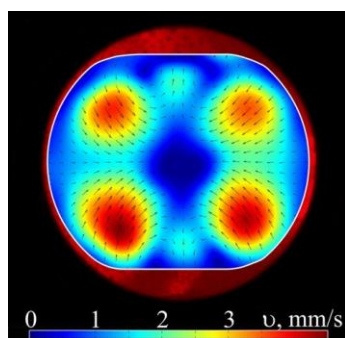


Рис. 1. Пример осредненного поля скорости в экваториальной плоскости капли в области высоких безразмерных частот ($\omega = 3.2 \cdot 10^3$); цветом показана величина скорости жидкости

Исследованы осреднённые течения в цилиндрическом канале круглого сечения диаметром ~ 5 мм, заполненном перемежающимися фрагментами двух несмешивающихся жидкостей. Объёмы жидкостей неравны, поэтому можно говорить, что одна из жидкостей является включением, а другая окружающей средой. Включения полностью перекрывают канал, на концах которого задан переменный перепад давления. В качестве пар жидкостей используются водные растворы глицерина и масла. Эксперименты показывают, что структура течения внутри капли и в окружающей жидкости представляет систему тороидальных вихрей и также сильно зависит от безразмерной частоты ω . Для выяснения роли этого параметра исследования выполнены при различных значениях вязкостей внешней и внутренней жидкостей, а также частот вибраций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00242).

ЛИТЕРАТУРА

1. Squires T.M., Quake S.R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 77, P. 977 (2005).
2. Nguyen N.T. Wu Z. Micromixers – a review. *Micromech. Microeng.*, Vol, 15, R1 (2005).
3. Burns J.R., Ramshaw C. The intensification of rapid reactions in multiphase systems using slug flow in capillaries. *Lab Chip*, Vol. 1, P. 10–15 (2001).
4. Mary P., Studer V., Tabeling P. Microfluidic Droplet-Based Liquid–Liquid Extraction. *Anal. Chem.* 80, 2680–2687 (2008).
5. Trinh E., Zwern A., Wang T.G. An experimental study of small-amplitude drop oscillations in immiscible liquid systems. *J. Fluid Mech.*, Vol. 115, P. 463–474 (1982).
6. Kozlov V.G., Kozlov N.V., Schipitsyn V.D. Steady flows in an oscillating deformable container. Effect of the dimensionless frequency. *Phys. Rev. Fluids*, Vol. 2. P. 094501 (2017).
7. Kozlov V.G., Sabirov R.R., Subbotin S.V. Steady flows in oscillating spheroidal cavity with elastic wall. *Fluid Dynamics*, Vol. 53, No. 2, P. 16 – 26 (2018).
8. Kozlov V.G., Subbotin S.V., Sabirov R.R. Steady flows in deformed elastic sphere subject to rotational oscillations. *Phys. Fluids*, Vol. 30, No. 9, P. 093606 (2018).

Сведения об авторе

Субботин Станислав Валерьевич – к.ф.-м.н., в.н.с. лаборатории вибрационной гидромеханики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет +7 952 326 54 17, E-mail subbotin_sv@pspu.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОКУСИРОВКИ ВОЛН ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ ИСКРИВЛЕННЫХ ГРАНИЦ

Сумбатян М.А., Боев Н.В., Бараева Д.С.

Проблема отражения от твердых искривленных поверхностей является классической в волновых задачах. В то же время, она не решена полностью. В случае криволинейных вогнутых отражателей возможны эффекты фокусировки, которые в строгой постановке исследованы недостаточно. В данной работе показывается, что в случае определенного взаимного расположения источника и приемника волн, а также специфической геометрии отражателя, появляются сингулярные эффекты фокусировки, которые приводят к тому, что амплитуда отраженной волны может иметь различный порядок роста при возрастании волнового числа. Полученные асимптотические результаты сопоставлены с результатами прямых численных расчетов дифракционных интегралов.

1. Введение. В работах [1-4] при исследовании рассеяния коротких акустических и упругих волн на препятствиях указывается на возможность фокусировки волновых полей в сплошных средах. Математически фокусировка появляется, когда в точке отражения стационарная точка дифракционного интеграла Кирхгофа становится вырожденной. Для преодоления сложностей, связанных с нерегулярностью фазы, необходимо учитывать слагаемые более высокого порядка малости в ее разложении в окрестности точки отражения. В такой постановке задача ранее не исследовалась. Мы ограничиваемся плоской задачей для отражения внутри дуги круговой формы.

2. Постановка задачи. Пусть из точки x_0 двумерной (2d) акустической среды на препятствие, ограниченное гладкой кривой ℓ , падает сферическая (в 2d случае – круговая) монохроматическая волна (рис.1). Зависимость от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$, где ω – частота колебаний.

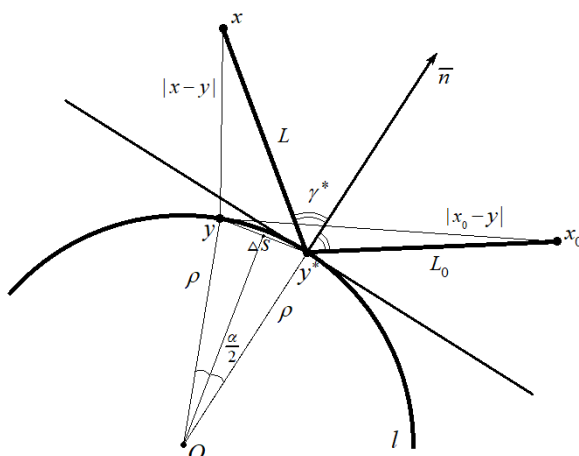


Рис. 1. Схема отражения волны, сгенерированной в точке x_0 и пришедшей в точку x после отражения в точке y^*

Пусть $k = \omega/c$ – волновое число, c – скорость звука в среде. Рассматриваем высокочастотный режим колебаний, поэтому ω и k – большие. Асимптотически амплитуда давления в произвольной точке y среды, порожденного волной от точечного источника в точке x_0 , задается соотношением:

$$p^{inc}(y) = e^{ik|y-x_0|} / |y-x_0|^{1/2} \quad (1)$$

Будем рассматривать распространение волны в направлении $\bar{q} = x_0y^* / |x_0y^*|$, ($y^* \in \ell$). При взаимодействии падающей волны с контуром ℓ формируется отраженная волна.

3. Метод решения. Высокочастотное решение, построенное ниже при $k \rightarrow \infty$, дает главный асимптотический член амплитуды луча, вышедшего из точки x_0 , отразившегося в точке y^* и пришедшего в точку x [1,4,6]. Согласно теории дифракции Кирхгофа, давление $p(x)$ в отраженной волне в точке x среды определяется следующим интегралом [5-7]

$$p(x) = \int_{\ell} 2p^{inc}(y) \frac{\partial \Phi(y, x)}{\partial n_y} d\ell_y \quad (2)$$

если граница абсолютно твердая: $(\partial p / \partial n)_{\ell} = 0$. Здесь $\Phi(y, x) = (i/4)H_0^{(1)}(k|y-x|)$ – функция Грина для двумерного уравнения Гельмгольца, n_y – внешняя нормаль к контуру ℓ в точке y , $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля 1-го рода нулевого порядка.

Ограничимся вычислением главного члена асимптотики дифракционного интеграла Кирхгофа (2) при $k \rightarrow \infty$. Для этого воспользуемся методом стационарной фазы [8]. Обозначим $r = |y-x|$. Тогда с учетом асимптотики функции Ханкеля, для $\partial \Phi(y, x) / \partial n_y$ в (2) асимптотически получим:

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)}, \Rightarrow 2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} e^{i(kr - \pi/4)} \cos \gamma \left[1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right], \quad (kr \rightarrow \infty) \quad (3)$$

Здесь γ – угол между направлением падения волны $x_0 y$ и нормалью n_y . Подставляя (1) и (3) в формулу (2), получаем следующее интегральное представление:

$$p(x) = e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{\ell} \frac{\cos \gamma}{\sqrt{r r_0}} e^{ik\varphi(y)} d\ell_y \quad (4)$$

где фазовая функция $\varphi(y) = r_0 + r$ равна сумме расстояний $r_0 = |y - x_0|$ и $r = |y - x|$.

В высокочастотном режиме колебаний давление в отраженной волне определяется направлением падения волны и малой окрестностью ℓ^* точки зеркального отражения $y^* \in \ell^*$. Введем обозначения: $L_0 = |y^* - x_0|$ – расстояние от источника до точки зеркального отражения, $L = |y^* - x|$ – расстояние от точки зеркального отражения до приемника. Функция $\cos \gamma / \sqrt{r r_0}$ является слабо изменяющейся в малой окрестности ℓ^* и может быть заменена на ее значение в точке зеркального отражения $\cos \gamma^* / \sqrt{L_0 L}$. Вынося эту постоянную за знак интеграла в (4), получаем:

$$p(x) = e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{\cos \gamma^*}{\sqrt{L_0 L}} \int_{\ell^*} e^{ik\varphi(y)} d\ell_y \quad (5)$$

где γ^* – угол падения волны (равный углу отражения). Отнесем малую окрестность точки зеркального отражения y^* к локальной декартовой системе координат. Ось Ox направим вдоль касательной к контуру ℓ , ось Oy – по нормали n_y в точке зеркального отражения $y = y^*$. С каждой точкой кривой в малой окрестности ℓ^* свяжем приращение дуги $\tau = \Delta S$, отсчитываемой вдоль кривой от точки зеркального отражения. Значение $\tau = 0$ соответствует точке зеркального отражения. В случае кругового отражателя разложение фазовой функции $\varphi(y)$ по τ имеет следующий вид:

$$\varphi = L_0 + L + A_2 \tau^2 + A_3 \tau^3 + O(\tau^4), \quad A_2 = \frac{\cos^2 \gamma^*}{2} \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L} + \frac{2}{\rho \cos \gamma^*} \right), \quad (6a)$$

$$A_3 = -\frac{\sin \gamma^* \cos^2 \gamma^*}{2} \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L} + \frac{1}{\rho \cos \gamma^*} \right), \quad (6b)$$

где ρ – кривизна граничной кривой в точке отражения.

Заметим, что в разложении (6) отсутствует первая степень приращения дуги $\tau = \Delta S$. Это подтверждает, что точка зеркального отражения y^* является стационарной точкой фазы. Выпишем общий вид главного члена асимптотики интеграла (5) методом стационарной фазы [8]:

$$\int_{\ell^*} e^{ik\varphi(y)} d\ell_y = \sqrt{\frac{2\pi}{k|\varphi''(y^*)|}} \exp\left[ik\varphi(y^*) + \frac{\pi i}{4}\delta\right], \quad \delta = \text{sign}[\varphi''(y^*)], \quad (k \rightarrow \infty) \quad (7)$$

где вторая производная от фазовой функции применяется по переменной τ и берется в точке зеркального отражения, то есть при $\tau = 0$. В частном случае, когда фаза имеет вид (6), очевидно, что

$$\varphi''(y^*) = \varphi''(\tau = 0) = \cos^2 \gamma^* \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L} + \frac{2}{\rho \cos \gamma^*} \right), \quad \delta = \text{sign} \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L} + \frac{2}{\rho \cos \gamma^*} \right) \quad (8)$$

и тогда формулы (5), (7), (8) приводят к следующему асимптотическому представлению:

$$p(x) = \frac{\exp[ik(L_0 + L) + \pi i(\delta - 1)/4]}{|L_0 + L + (2L_0L)/(\rho \cos \gamma^*)|^{1/2}}, \quad (k \rightarrow \infty) \quad (9)$$

Любопытно, что амплитуда давления $|p(x)|$ в формуле (9) не зависит от волнового числа k . Заметим, что при отражении от выпуклых препятствий кривизна граничной кривой в формуле (9) положительна: $\rho > 0$, поэтому знаменатель дроби там не может обращаться в ноль, и главный член асимптотики давления (9) регулярен. Для вогнутых границ кривизна является отрицательной, и знаменатель дроби в (9) может обратиться в ноль. Это и соответствует фокусировке при отражении.

4. Примеры отражения с фокусировкой и без нее.

Пример 1. Начнем с рассмотрения регулярного случая (без фокусировки) при отражении от нижней точки вогнутого полукруга, как показано на рис.2.

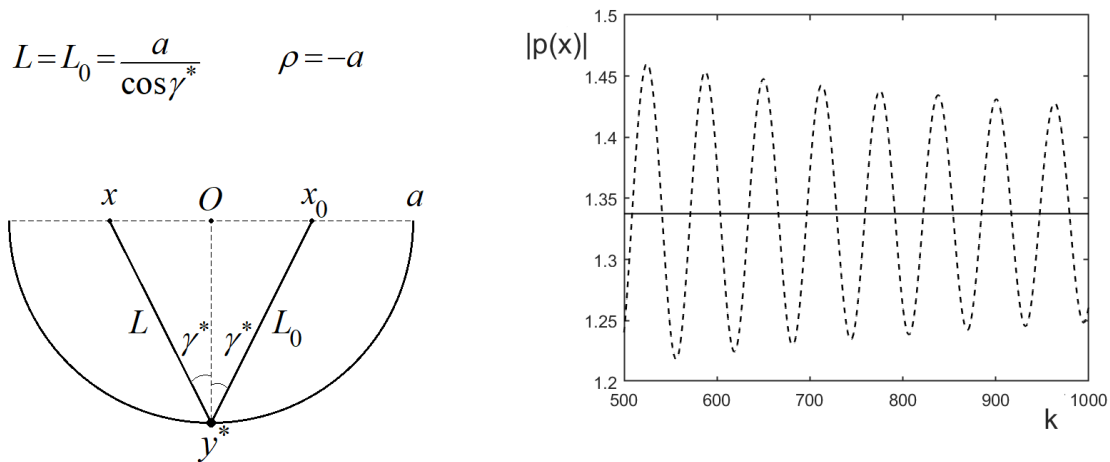


Рис. 2. Отражение от нижней точки полукруга без фокусировки. Сравнение асимптотического (сплошная линия) и численного (штриховая линия) расчета дифракционного интеграла (5)

Если, например, принять расстояние Ox_0 равным половине радиуса a , то тогда для угла падения $\gamma^* = \theta$ имеем $\text{tg} \gamma^* = 1/2$, $\cos \gamma^* = 2/\sqrt{5}$. При $a = 1$ по формуле (9) получаем, что главный член асимптотики давления равен $|p(x)| = 2/\sqrt[4]{5} = 1.33748$. На рис.2 справа для

амплитуды давления как функции волнового числа показано сравнение с прямым численным расчетом интеграла (5) при изменении параметра k от 500 до 1000.

Пример 2. На рис.3 показан пример отражения от нижней точки при $\theta=\gamma^*=\pi/3$, $L_0=a$, $L=a/3$. При этом коэффициент A_2 , определяющий главный член асимптотики (9) в регулярном случае, исчезает: $A_2=0$, но $A_3\neq 0$. В этом случае, согласно общей идее метода стационарной фазы [8], главный вклад в интеграл (5) определяет коэффициент A_3 (значение интеграла взято из [9]):

$$\int_{\ell^*} e^{ik\varphi(y)} d\ell_y \sim \int_{\ell^*} e^{ik(L_0+L+A_3\tau^3)} d\tau \sim e^{ik(L_0+L)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikA_3\tau^3} d\tau = e^{ik(L_0+L)} \left(\int_0^{\infty} e^{ikA_3\tau^3} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-ikA_3\tau^3} d\tau \right) = \quad (10)$$

$$= e^{ik(L_0+L)} 2 \int_0^{\infty} \cos(kA_3\tau^3) d\tau = \left(\tau^3 = t, d\tau = \frac{dt}{3t^{2/3}} \right) = e^{ik(L_0+L)} \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \cos(kA_3t) \frac{dt}{t^{2/3}} = \frac{e^{ik(L_0+L)}}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(1/3)}{(k|A_3|)^{1/3}}$$

Таким образом, если принять $a=1$, то главный член асимптотики давления в этом случае определяется по формуле (5) в следующем виде:

$$p(x) \sim e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{\cos \gamma^*}{\sqrt{L_0 L}} \times \frac{e^{ik(L_0+L)}}{\sqrt{3}} \frac{\Gamma(1/3)}{(k|A_3|)^{1/3}} = e^{ik(L_0+L)-\pi i/4} \frac{k^{1/6}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(1/3)}{|A_3|^{1/3}}, \quad (11)$$

$$|p(x)| = \frac{k^{1/6}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(1/3)}{|A_3|^{1/3}}, \quad \Gamma(1/3) = 2.67894$$

Очевидно, здесь давление растет с ростом частоты, что совершенно неожиданно. Сравнение с прямым численным расчетом интеграла в формуле (5) приведено на рис.3.

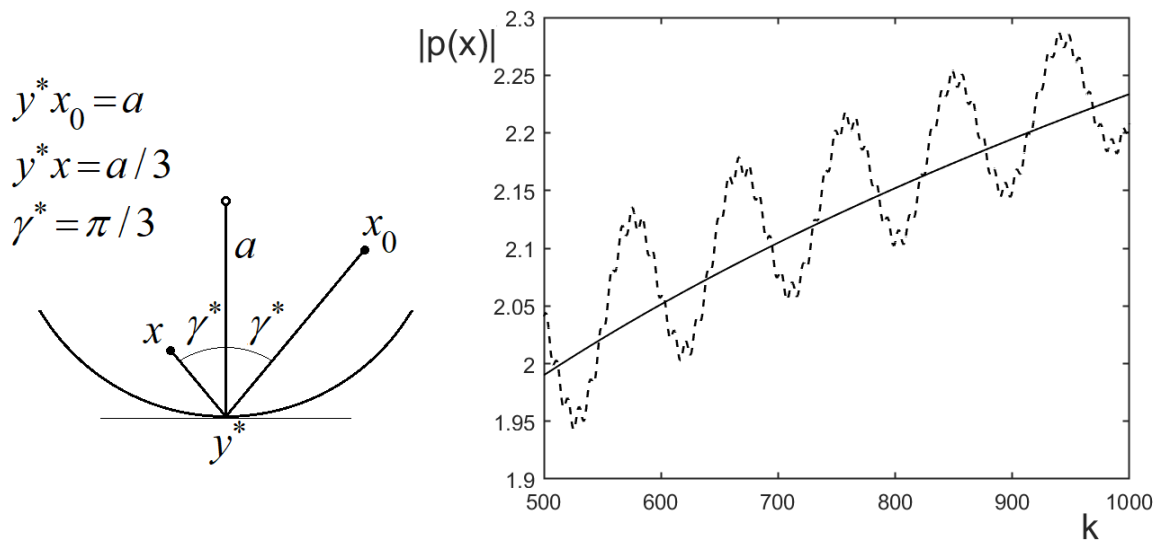


Рис. 3. Фокусировка при отражении. В (б) стационарная точка – вырожденная: $A_2=0$, $A_3\neq 0$.
Сплошная линия – асимптотика, штриховая линия – численный расчет

5. Заключение. В работе построена высокочастотная асимптотика при отражении волны от искривленной границы в случае фокусировки. Ранее в литературе подобные задачи исследовались лишь на основе расчета дифракционного интеграла. Показано, что в случае регулярной стационарной точки фокусировка отсутствует, и давление асимптотически выходит с ростом частоты на постоянное значение. В случае вырожденной стационарной точки появляется фокусировка, асимптотика которой построена для частной геометрии вогнутой круговой границы (2d задача). При этом амплитуда отраженной волны растет с частотой. Дается сравнение с прямым численным расчетом дифракционного интеграла. И в регулярном (без фокусировки) и в вырожденном (с фокусировкой) случае численное решение осциллирует

вокруг асимптотического. С ростом частоты отклонение осциллирующего численного значения дифракционного интеграла от постоянного (в случае без фокусировки) или монотонно возрастающего (в случае фокусировки) асимптотического решения уменьшается с ростом волнового числа k . Это подтверждает корректность асимптотики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sumbatyan M.A., Boyev N.V. High-frequency diffraction by nonconvex obstacles, Journal of the Acoustical Society of America, 1994, V. 95, No. 5. (Part 1), p. 2347–2353.
2. McNamara D.A., Pistorius C.W.I., Malherbe I.A.G. Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction, Artech House: Norwood, 1990.
3. Pompei A., Sumbatyan M.A., Boyev N.V. Reflection of high-frequency elastic waves from a non-plane boundary surface of the elastic medium, Journal of Sound and Vibration, 2007, V. 302, No. 4–5, p. 925–935.
4. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, Москва: Наука, 1972.
5. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики, Москва: Судостроение, 1972.
6. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции, Москва: Связь, 1978.
7. Sumbatyan M.A., Boyev N.V., Brigante M. Explicit short-wave representations and Ray Tracing method for reflections from curved surfaces in room acoustics, Journal of Sound and Vibration, 2022, V. 523, Article 116723.
8. Федорюк М.В. Метод перевала, Москва: Наука, 1977.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Элементарные функции, Москва: Наука, 1981.

Сведения об авторах

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики. E-mail: masumbatyan@sfedu.ru

Боев Николай Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений. E-mail: nyboev@sfedu.ru

Бараева Дарья Сергеевна – аспирант, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики.
E-mail: d.orsa@yandex.ru

Все авторы из Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов на-Дону, Россия.

О МЕТОДЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Сумбатян М. А. , Закарян Р. М.

Рассматривается двумерная задача теории гидродинамики – нестационарное обтекание круглого цилиндра потоком вязкой несжимаемой жидкости. Определяющими уравнениями являются уравнение Навье-Стокса и неразрывности, записанные в терминах функция тока – вихрь, при этом нестационарный член представлен в виде простейшей неявной итерационной схемы. Задача решается в рамках метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), на основе построения специальных функций Грина для внешней части цилиндра уравнений Пуассона и Гельмгольца. Из предположения о начальном невозмущенном потоке (во всей области $\omega = 0$) на первом временном шаге получено решение, которое описывает уже возмущенный поток. Результаты расчетов приводятся в виде графиков.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача плоского нестационарного обтекания круглого цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Актуальность данной задачи, с одной стороны, обусловлена сложностью нелинейных уравнений Навье-Стокса, описывающих такое течение, а с другой стороны, простой геометрией обтекаемого тела, позволяющей быстрее отработать новый полуаналитический метод решения. Обычно такая задача решается с помощью конечно элементных или конечно объемных методов [1,2], но она также может быть решена методом ГИУ [3-5]. Применение метода ГИУ определяется следующими факторами: 1) выбор переменных (скорость – давление, функция тока – вихрь), 2) форма представления нестационарной части уравнения (стационарная задача - отсутствует, нестационарная – интегральная или разностная), 3) форма представления конвективных членов уравнения Навье-Стокса (полное пренебрежение, пренебрежение малыми членами, разностная схема, штрафная функция), 4) способы преобразования дифференциальных уравнений в систему интегральных уравнений.

Решаем поставленную задачу в переменных функция тока – вихрь. Уравнение неразрывности тогда выполняется автоматически. Любую физическую величину, относящуюся к полному полю потока, будем обозначать с нижним индексом f (full) и выражать через сумму соответствующих величин набегающего потока (отмеченного индексом 0) и возмущенного потока (без индекса):

$$v_{f1} = v_0 + v_1, \quad v_{f2} = v_2, \quad \psi_f = \psi_0 + \psi, \quad \omega_f = \omega, \quad \psi_0 = v_0 x_2 \quad (1)$$

где v_0 – скорость однородного набегающего потока, параллельного оси x_1 . Определяющими уравнениями являются уравнение Навье-Стокса, а также уравнение связи функции тока и вихря, которые запишем в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial \omega_f}{\partial t} = -v_{f1} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - v_{f2} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \nu \Delta \omega_f \quad (2)$$

$$v_{f1} = \frac{\partial \psi_f}{\partial x_2}, \quad v_{f2} = -\frac{\partial \psi_f}{\partial x_1}, \quad \omega_f = \frac{\partial v_{f1}}{\partial x_2} - \frac{\partial v_{f2}}{\partial x_1}, \quad \Delta \psi_f = \omega_f$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости.

Нестационарный член уравнения Навье-Стокса представим в виде простейшей неявной итерационной схемы в приближении Эйлера $(\partial \omega / \partial t)_n \approx (\omega_n - \omega_{n-1}) / \tau$, где τ – выбранный шаг по времени, n – номер текущего временного слоя. В соответствии с этим, конвективный член уравнения (2) будем брать на «предыдущем» временном слое, чтобы избежать нелинейной краевой задачи. Такой подход дает следующие итерационные уравнения для функций ω_n и ψ_n :

$$\omega_f^n - \varepsilon \Delta \omega_f^n = g_f^{n-1} \rightarrow \Delta \omega_f^n - k^2 \omega_f^n = -\frac{g_f^{n-1}}{\varepsilon} \quad (3)$$

$$g_f^{n-1} = \omega_f^{n-1} + \tau \left(\frac{\partial \psi_f}{\partial x_1} \frac{\partial \omega_f}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_f}{\partial x_2} \frac{\partial \omega_f}{\partial x_1} \right)_{n-1}, \quad \Delta \psi_f^n = \omega_f^n, \quad (\varepsilon = \nu \tau, \quad k^2 = 1 / \varepsilon).$$

Известно [6], что такой подход обеспечивает условную сходимость итераций по времени. В отличие от безусловной сходимости (сходимость при любом значении шага τ), здесь итерационный процесс сходится только для достаточно малого τ . Используя стандартные методы классической теории потенциала [7] из двух эллиптических уравнений в частных производных (4) получим, для любой выбранной точки $x = (x_1, x_2)$ в жидкости, справедливы следующие интегральные представления для функций ω_n и ψ_n :

$$\omega_n(x) = \int_l \left[\frac{\partial G_\omega(y, x)}{\partial n_y} \omega_n(y) - G_\omega(y, x) \frac{\partial \omega_n(y)}{\partial n_y} \right] dl_y + \frac{1}{\varepsilon} \iint_S G_\omega(y, x) g_f^{n-1} ds_y, \quad (4)$$

$$\psi_n(x) = \int_l \left[\frac{\partial G_\psi(y, x)}{\partial n_y} \psi_n(y) - G_\psi(y, x) \frac{\partial \psi_n(y)}{\partial n_y} \right] dl_y - \iint_S G_\psi(y, x) \omega_n(y) ds_y, \quad (5)$$

где S – область внешней части цилиндра, заполненная жидкостью, l – граница круга, dl_y – длина элементарной дуги на границе окружности, ds_y – элементарная площадь в жидкости, n_y – единичная нормаль к l , направленная от окружности в сторону, внешнюю к области потока, точка $y = (y_1, y_2)$ – точка либо в области потока, либо на границе окружности, отличная от точки x . Кроме того, для функции тока можно записать граничные условия непроницаемости и прилипания:

$$\psi_f^n(x)|_l = 0, \Rightarrow \psi_n(x)|_l = -\psi_0(x)|_l, \quad \frac{\partial \psi_f^n(x)}{\partial n_x} \Big|_l = 0, \Rightarrow \frac{\partial \psi_n(x)}{\partial n_x} \Big|_l = -\frac{\partial \psi_0(x)}{\partial n_x} \Big|_l. \quad (6)$$

Перейдем к полярной системе координат:

$$x_1 = r_0 \cos \theta_0, \quad x_2 = r_0 \sin \theta_0, \quad y_1 = r \cos \theta, \quad y_2 = r \sin \theta, \quad \eta_1 = \rho \cos \beta, \quad \eta_2 = \rho \sin \beta, \quad (7)$$

и, следуя классической книге [8], построим функции Грина для уравнения Пуассона и уравнения Гельмгольца, которые удовлетворяют однородному краевому условию Дирихле на границе круга:

$$\Delta G_\psi = \frac{\partial^2 G_\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G_\psi}{\partial \theta^2} = -\delta(y-x) = -\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)}{r} \quad (8)$$

$$\Delta G_\omega - k^2 G_\omega = \frac{\partial^2 G_\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G_\omega}{\partial \theta^2} - k^2 G_\omega = -\delta(y-x) = -\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)}{r} \quad (9)$$

где функции $G_\psi = G_\psi(y, x) = G_\psi(r, \theta; r_0, \theta_0)$ и $G_\omega = G_\omega(y, x) = G_\omega(r, \theta; r_0, \theta_0)$ рассматриваются как функции $y = (r, \theta)$ для любой фиксированной точки $x = (r_0, \theta_0)$ жидкости с граничным условием $G_\psi|_{r=a} = 0$ и $G_\omega|_{r=a} = 0$, где a – радиус цилиндра. Известно [8], что

$$\delta(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos[m(\theta - \theta_0)], \quad a_0 = 1, \quad a_m = 2, \quad (m \geq 1), \quad (10)$$

тогда G_ψ и G_ω в силу ортогональности тригонометрических функций можно искать в следующем виде:

$$G_\psi = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^\psi(r, r_0) \cos[m(\theta - \theta_0)], \quad G_\omega = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^\omega(r, r_0) \cos[m(\theta - \theta_0)]. \quad (11)$$

Теперь уравнения (8) и (9) сводятся к неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) второго порядка:

$$\frac{\partial^2 G_m^\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_m^\psi}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} G_m^\psi = -a_m \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 G_m^\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_m^\omega}{\partial r} - \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) G_m^\omega = -a_m \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}, \quad (13)$$

решение которых, ограниченное на бесконечности и удовлетворяющее граничному условию $G_m^\psi(a) = 0$ и $G_m^\omega(a) = 0$, можно построить в следующем виде:

$$G_m^\psi(r, r_0) = \frac{1}{2\pi m} \left[-\left(\frac{a^2}{r_0 r} \right)^m + H(r-r_0) \left(\frac{r_0}{r} \right)^m + H(r_0-r) \left(\frac{r}{r_0} \right)^m \right], \quad (m \geq 1) \quad (14a)$$

$$G_0^\psi(r, r_0) = \frac{1}{2\pi} \left[H(r - r_0) \ln \frac{r_0}{a} + H(r_0 - r) \ln \frac{r}{a} \right], \quad (14b)$$

$$G_m^\omega(r, r_0) = \frac{a_m}{4\pi} \left[-\frac{K_m(kr_0)}{K_m(ka)} K_m(kr) I_m(ka) + H(r - r_0) K_m(kr) I_m(kr_0) + \right. \\ \left. + H(r_0 - r) I_m(kr) K_m(kr_0) \right], \quad (m \geq 0). \quad (15)$$

Теперь, используя построенные функции Грина и граничные условия, основные интегральные представления (4) и (5) могут быть записаны в упрощенном виде:

$$\omega_n(x) = \int_l \frac{\partial G_\omega(y, x)}{\partial n_y} \omega_n(y) dl_y + \frac{1}{\varepsilon} \iint_s G_\omega(y, x) g_f^{n-1} ds_y, \quad (16)$$

$$\psi_n(x) = -\iint_s G_\psi(y, x) \omega_n(y) ds_y. \quad (17)$$

Проведем замену переменной в формуле (16): x заменим на y , а y на η и подставим выражение для ω_n в формулу (17). Далее, перейдем к полярным координатам (7) и найдем выражение для нормальной производной от функции тока, тогда получим следующее представление:

$$\frac{\partial \psi_n(a, \theta_0)}{\partial r_0} = -\int_0^{2\pi} K(\beta - \theta_0) \omega_n(a, \beta) d\beta - \int_0^{2\pi} \int_a^\infty K_g(\rho, \beta - \theta_0) g_f^{n-1}(\rho, \beta) \rho d\rho d\beta \quad (18)$$

где

$$K(\beta - \theta_0) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{K_{m-1}(ka)}{K_m(ka)} \cos[m(\beta - \theta_0)], \quad K_g(\rho, \beta - \theta_0) = \frac{1}{4\pi a} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[\frac{a^m}{\rho^m} - \frac{K_m(k\rho)}{K_m(ka)} \right] \cos[m(\beta - \theta_0)].$$

Теперь, принимая во внимание, что $\psi_0 = v_0 \cdot x_2 = v_0 r_0 \sin \theta_0$, и удовлетворяя граничному условию $\partial \psi_n(a, \theta_0) / \partial r_0 = -\partial \psi_0(a, \theta_0) / \partial r_0 = -v_0 \sin \theta_0$, соотношение (18) можно свести к основному ГИУ первого рода для граничного значения вихря на каждом шаге итерации ($0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$):

$$\int_0^{2\pi} K(\beta - \theta_0) \omega_n(a, \beta) d\beta = v_0 \sin \theta_0 - \int_0^{2\pi} \int_a^\infty K_g(\rho, \beta - \theta_0) g_f^{n-1}(\rho, \beta) \rho d\rho d\beta. \quad (19)$$

Как только это граничное значение $\omega(a, \beta)$ найдено, функция тока и вихрь легко определяются во всем объеме, занимаемом потоком жидкости – по формулам (16) и (17) соответственно.

2. Численное решение методом ГИУ на первом временном шаге

Найдем решение поставленной задачи на первом временном шаге, предполагая, что вначале поток не возмущен (во всей области $\omega = 0$ и $g_f = 0$). Тогда основные соотношения (19), (17) и (18) примут соответственно следующий вид:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{K_{m-1}(ka)}{K_m(ka)} \int_0^{2\pi} \cos[m(\beta - \theta_0)] \omega_n(a, \beta) d\beta = v_0 \sin \theta_0, \quad (20)$$

$$\omega_n(r_0, \theta_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m K_m(kr_0)}{4\pi K_m(ka)} \int_0^{2\pi} \cos[m(\beta - \theta_0)] \omega_n(a, \beta) d\beta, \quad (21)$$

$$\psi_n(r_0, \theta_0) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon a_m}{4\pi} \left[\left(\frac{a}{r_0} \right)^m - \frac{K_m(kr_0)}{K_m(ka)} \right] \int_0^{2\pi} \cos[m(\beta - \theta_0)] \omega_n(a, \beta) d\beta \quad (22)$$

Зададим дискретизацию пространства по углу и радиусу следующим образом:

$$\beta_j = (j - 1/2)h, \quad \theta_0^i = (i - 1/2)h, \quad (1 \leq i, j \leq N); \quad h = 2\pi / N, \quad r_1 = a, \quad r_p = a + (p - 1)h_p \quad (23)$$

В дискретной форме уравнения (20), (21) и (22) приобретают следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{K_{-1}(ka)}{4K_0(ka)} h + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_{m-1}(ka)}{mK_m(ka)} \sin \frac{mh}{2} \cos[m(j-i)h] \right\} \omega_{(1,j)}^n = F_i, \quad (F_i = kv_0 \sin \beta_i, \quad k^2 = 1/\varepsilon), \quad (24)$$

$$\omega_{(p,i)}^n = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left[\frac{h K_0(kr_p)}{4 K_0(ka)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{K_m(kr_p)}{K_m(ka)} \cos[mh(j-i)] \sin\left(\frac{mh}{2}\right) \right] \omega_{(1,j)}^n, \quad (2 \leq p \leq M) \quad (25)$$

$$\Psi_{(p,i)}^n = -\frac{\varepsilon}{\pi} \sum_{j=1}^N \left(\frac{h}{4} \left[1 - \frac{K_0(kr_p)}{K_0(ka)} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\frac{a}{r_p} \right)^m - \frac{K_m(kr_p)}{K_m(ka)} \right] \sin \frac{mh}{2} \cos[mh(j-i)] \right) \omega_{(1,j)}^n. \quad (26)$$

Уравнение (24) представляет собой систему N линейных уравнений с N неизвестными значениями функции завихренности на границе обтекаемого круга. По найденным значениям вихря на границе тела с помощью уравнений (25) и (26) находим значения вихря и функции тока во всей области в узлах расчетной сетки. С целью тестирования разработанного алгоритма были выбраны следующие значения основных параметров задачи:

$$a = 1; \quad \tau = 0.1; \quad \nu = 1; \quad \varepsilon = \nu\tau = 0.1; \quad k = \sqrt{1/\varepsilon} \approx 3.1623; \quad ka = 3.1623; \quad h_p = 0.02a, \quad (1 \leq p \leq M).$$

Перейдем к анализу полученных результатов. Значения вихря и функции тока представлены в относительных безразмерных единицах, т.е. отнесены к наибольшему полученному значению во всем пространстве расчета соответственно. Зависимость вихря от угла при фиксированном значении r соответствует графику функции $y = \sin(x)$. На рис. 1 представлена такая зависимость на границе круга. По мере удаления от границы круга величина максимума вихря сначала резко, что обусловлено граничным переходом, а затем медленнее уменьшается (см. рис. 2) и на расстоянии $r = 1.5$ становится меньше в 30 раз. Зависимость функции тока от угла при фиксированном значении r соответствует графику функции $y = -\sin(x)$ (см. рис. 3). Значения функции тока на границе круга равны нулю, это легко видно из формулы (26) при $p = 1$. По мере удаления от границы значение функции тока в максимумах сначала увеличивается и достигает наибольшего значения при $r = 1.62$, а затем плавно уменьшается (см. рис. 4). Главным результатом тестирования нового метода является то, что из предположения о начальном невозмущенном потоке (во всей области $\omega = 0$) на первом временном шаге получено решение, которое описывает уже возмущенный поток.

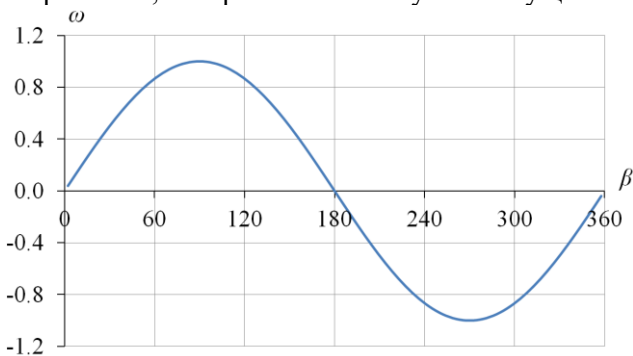


Рис. 1

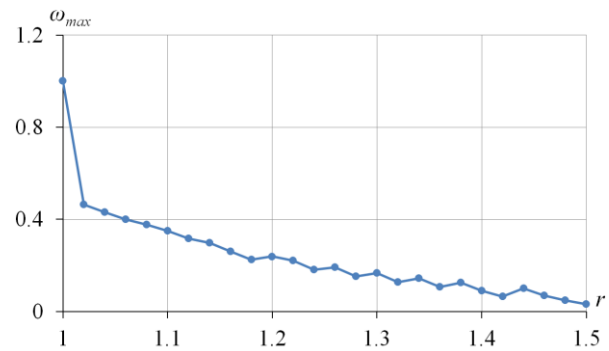


Рис. 2

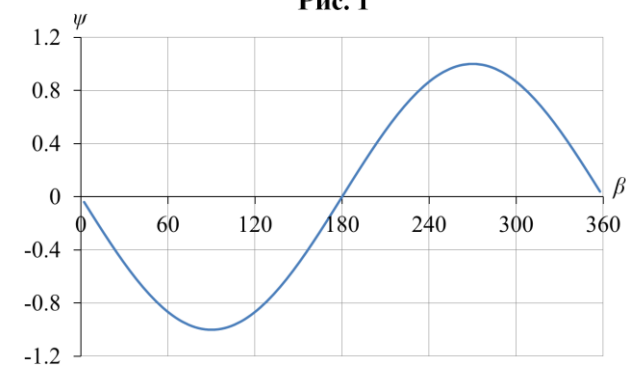


Рис. 3

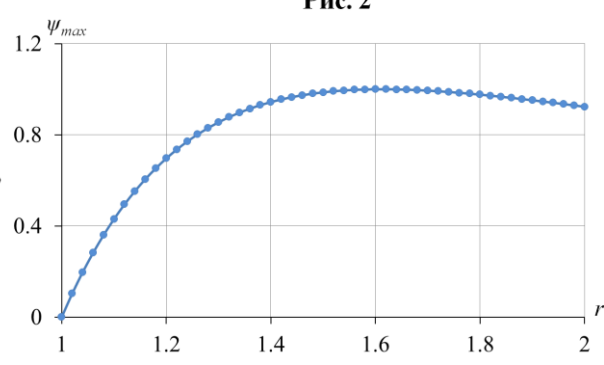


Рис. 4

Рис. 1. Зависимость величины вихря на границы круга ($r = a$) от угла в относительных единицах.

Рис. 2. Изменение максимальной величины вихря при удалении от границы круга ($a = 1$).

Рис. 3. Зависимость значений функции тока в относительных единицах от угла на расстоянии $r = 1.62$, где максимум функции тока достигает наибольшего значения.

Рис. 4. Изменение максимальной величины функции тока при удалении от границы круга.

Заключение

1) Исследована задача нестационарное обтекание круглого цилиндра потоком вязкой несжимаемой жидкости. Представлен новый метод ГИУ и его тестирование на первом временном шаге.

2) Решение поставленной задачи методом ГИУ строится в терминах функция тока – вихрь, используется неявная разностная схема по времени, а конвективный член берется на «предыдущем» временном слое. В результате построен итерационный процесс, где на каждом шаге возникают два линейных уравнения в частных производных – уравнение Лапласа для функции тока и уравнение Гельмгольца для вихря.

3) Функции Грина для уравнений Пуассона и Гельмгольца, удовлетворяющие однородному краевому условию Дирихле на цилиндре, сводят задачу к одному интегральному уравнению, что позволяет преодолеть известную трудность, связанную с отсутствием подходящего граничного условия для функции завихренности.

4) Дискретизация интегрального уравнения приводит к СЛАУ для значений функции завихренности на границе круга, по которым находятся значения завихренности и функции тока во всем потоке.

5) Представлены тестовые результаты применения нового метода ГИУ на первом временном шаге. Из предположения о начальном невозмущенном потоке (во всей области $\omega = 0$) на первом временном шаге получено решение, которое описывает уже возмущенный поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. The Finite Element Method. Vol. 3: Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann: Oxford, 2000.
2. F. Moukalled, L. Mangani, L. Mangani. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab. Springer International: Heidelberg, 2019.
3. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L.C. Wrobel, Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 1984.
4. G.F. Dargush, P.K. Banerjee. A time-dependent incompressible viscous BEM for moderate Reynolds numbers, Int. J. Numer. Meth. Enging, 1991, V. 31, p. 1627–1648.
5. M. Aydin, R.T. Fenner. Boundary element analysis of driven cavity flow for low and moderate Reynolds numbers, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2000, V. 37, p. 45–64.
6. П. Роуч. Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980.
7. D. Colton, R. Kress. Integral Equations Methods in Scattering Theory, Wiley: New York, 1983.
8. D.G. Duffy. Green's Functions with Applications, Chapman & Hall / CRC: Boca Raton, Florida, 2001.

Сведения об авторах

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, Россия. E-mail: masumbatyan@sfedu.ru

Закарян Рафаэл Михайлович – аспирант, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: zak.rafik@gmail.com

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ПОВЕДЕНИЕ СРЕДЫ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ ДЛЯ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД В ОБСТАНОВКЕ СЖАТИЯ

Татаурова А.А., Стефанов Ю.П.

В работе рассматривается влияние механических параметров на распределение необратимой деформации внутри осадочного клина, который подвергается горизонтальному сжатию и скользит по жесткому основанию фундамента. Проведен анализ конфигурации полос локализованного сдвига в зависимости от коэффициента внутреннего трения и величины трения скольжения.

Геомеханические модели все чаще используются для решения как производственных задач, связанных с добычей и разработкой полезных ископаемых, так и для формирования представления о процессах, происходящих в геологических средах на разных масштабных уровнях. Такой подход требует расширения представления о механизмах и закономерностях деформирования горных пород, а также распределения поля напряжения в зависимости от приложенных нагрузок.

В геологии наиболее мощные деформации фиксируются в горных и предгорных зонах [1]. Считается, что эти области подвергаются горизонтальному сжатию в результате которого формируются разломы и надвиговые структуры. В работе рассмотрено влияние механических параметров и трения скольжения в основании моделируемой толщи на распределение необратимой деформации.

Численная модель представляет собой клин, сложенный осадочными породами, который залегают на жестком основании. В основании клина задается трение скольжения μ_b . Нагружение происходит в два этапа: сначала среда нагружается под действием гравитационных сил, при этом вертикальные боковые границы остаются зафиксированными $u_x|_{A,B} = 0$. После полного нагружения по вертикали, осуществляется смещение левой вертикальной границы $u_x|_{A,B} = u(t)$. При этом на правой границе напряжения сохраняется равным значению, полученному на первом этапе решения задачи: $\sigma_x|_B = \sigma_{x0}$ (рис.1).

Для описания поведения пород за пределом упругости в расчетах использовалась модель Друккера-Прагера-Николаевского с неассоциированным законом течения [2-3]:

$$f = \alpha p + Y - \tau \quad (1)$$

где α , Y – коэффициенты модели выраженные через внутреннее трение и когезию, p – давление, τ – интенсивность касательного напряжения. Задача решалась с применением явной конечно-разностной схемы [4].

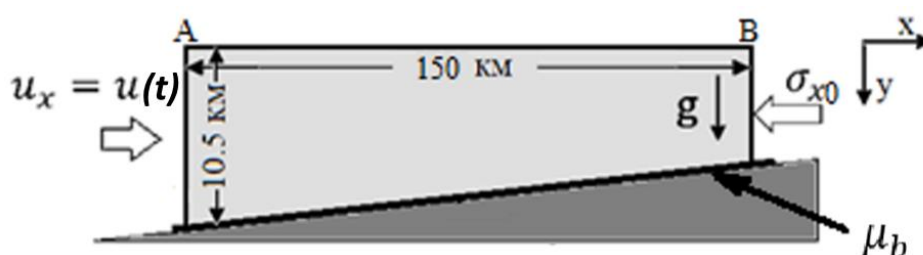


Рис. 1 Схема нагружения осадочного клина, залегающего на жестком основании с граничными условиями

Было установлено, что уже на этапе нагружения среды под действием гравитационных сил отмечается переход породы в неупругое состояние, при этом глубина перехода зависит от коэффициента Пуассона, а также параметров α и Y . Чем выше параметр α , тем больше значение глубины перехода среды в неупругое состояние. В тоже время при равных условиях, и более высоком значении Пуассона, точки перехода также принимают большее значение по глубине.

В случае, сжатия среды, горизонтальная компонента напряжений приводит к быстрому росту интенсивности касательных напряжений в верхней части среды, при значительно меньшем увеличении давления. В то же время в нижних слоях на первых этапах горизонтального сжатия, пока горизонтальные напряжения меньше вертикальных происходит обратный процесс, интенсивность касательных напряжений снижается при росте средних напряжений или давления среды. Это приводит к тому, что на этом этапе нагружения интенсивное развитие псевдопластической деформации происходит в верхней части среды с ее поверхности, в то время как развитие необратимой деформации на глубине тормозится. Лишь после того, как горизонтальные напряжения становятся больше вертикальных, увеличение интенсивности касательных напряжений по всей глубине происходит равномерно.

Стоит отметить, что в процессе сжатия также формируются зоны локализации пластической деформации, которые можно ассоциировать с разломными структурами. Их конфигурация во многом определяется параметром α . Так в случае высоких значений параметра $\alpha \geq 0,5$ полосы локализованного сдвига формируются в верхней части разреза (рис.2а). При более низких значениях, обычно наблюдаются сопряженные полосы локализации, такие структуры в геологии носят название рор-уп (рис. 2б). В свою очередь предполагается, что разломы в земной коре чаще имеют листрическую форму. Но полосы локализованного сдвига такой формы образуются лишь в случае, когда параметр $\alpha \leq 0,3$, а трение скольжение в основании слоя снижается при росте пластической деформации.

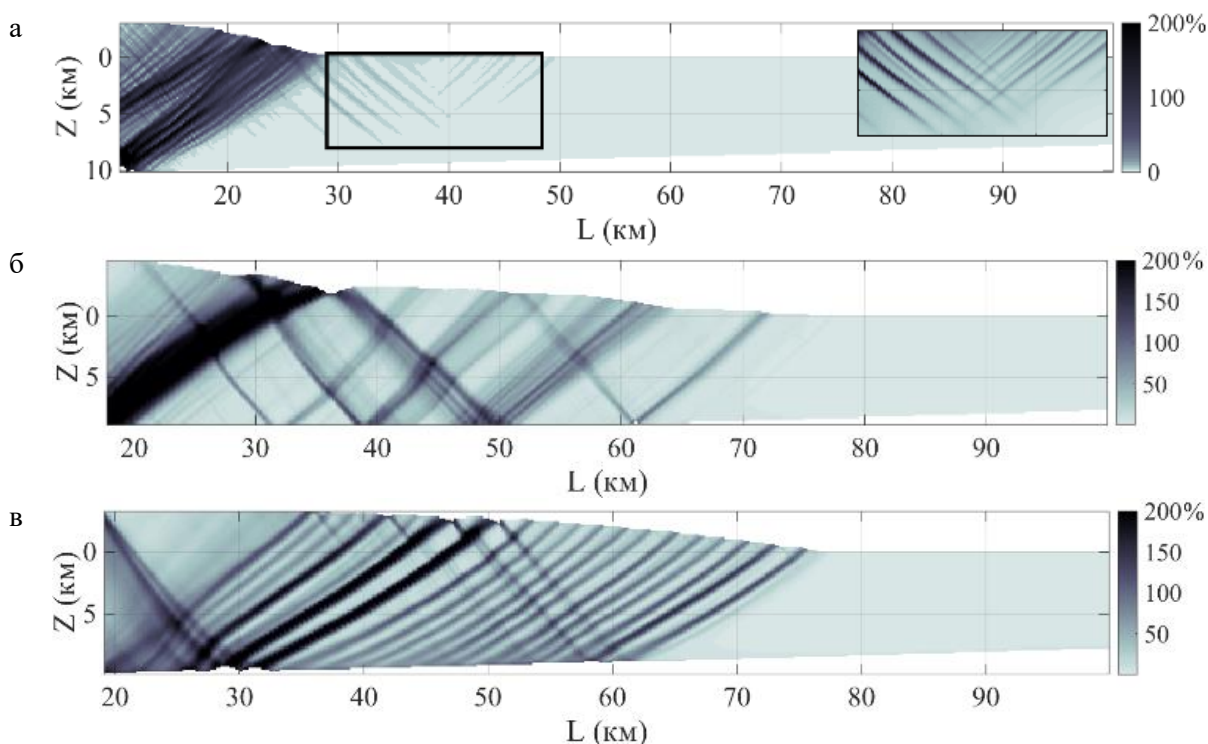


Рис.2 Распределение интенсивности пластической деформации при постоянном трении в основании слоя: а) $\alpha = 0,5$, $Y = 10$ МПа, $\mu_b = 0,2$. б) $\alpha = 0,3$, $Y = 5$ МПа, $\mu_b = 0,15$ в) $\alpha = 0,1$, $Y = 5$ МПа, $\mu_b = 0,25-0,1$ (трение скольжение понижается)

Анализ полученных результатов показал, что на конфигурацию полос локализованного сдвига в первую очередь влияет параметр α , который выражается через коэффициент внутреннего трения. Он также контролирует зону зарождения полос локализованного сдвига при постоянной величине трения на основании толщи. Снижение трения скольжения в процессе нагружения приводит к формированию полос сдвига листрической формы, при этом их зарождение и развитие происходит от подошвы слоя в направлении к дневной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ruh J.B., Kaus B.J. Numerical investigation of deformation mechanics in fold-and-thrust belt: influence of rheology of single and multiple decollements. *Tectonics*, V. 31, 2012.
2. Simpson, G.D.H., Modelling interactions between fold-and-thrust belt deformation, foreland flexure and surface mass transport. *Basin Research*, V.18, 2006.
3. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование, М.: Мир, Вып. 2., 1975.
4. Николаевский В.Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды. *ПММ*, Т. 35, Вып. 6, 1971.
5. Wilkins M.L. *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag. 1999, 246 p.

Сведения об авторах

Татаурова Антонина Андреевна – научный сотрудник, Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН

E-mail: anttat2@gmail.com

Стефанов Юрий Павлович – доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН

E-mail: yu_st@mail.ru

МНОЖЕСТВЕННЫЙ КОНТАКТ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Торская Е.В., Морозов А.В., Степанов Ф.И.

В работе представлены результаты испытаний на трение тротуарной плитки в контакте с резиной. Шероховатость поверхности плит формируется дробеструйной обработкой. Некоторые образцы были слегка отполированы для имитации износа. Результаты измерения шероховатости были приняты для моделирования и использованы для анализа влияния обработки поверхности на составляющую деформации при трении скольжения. Результаты моделирования и экспериментов при комнатной температуре показали, что изменение шероховатости поверхности влияет на деформационный механизм трения скольжения. Показано, что деформационный механизм трения при контакте тротуарной плитки с резиной усиливается с увеличением параметров шероховатости по высоте.

1. При трении резины по шероховатой поверхности принято выделять два механизма диссипации энергии [1]; энергия расходуется на преодоление сил адгезии в контакте и на циклическое вязкоупругое передеформирование резины неровностями поверхности.

При контакте резины со смоченной или загрязненной поверхностью, а также при значительном снижении температуры окружающей среды, роль деформационного механизма трения растет. В настоящей работе рассматривается данный механизм, так как практической мотивацией является исследование сцепных свойств поверхности тротуарных плит, уменьшающихся при эксплуатации в условиях дождя, в особенности в условиях загрязнения смоченной каплями дождя дорожной пылью.

Деформационный механизм трения напрямую связан с реальной шероховатостью поверхности, которую трудно математически описать, поскольку она имеет сложную многомасштабную природу. В последнее время появились значимые работы для описания самоподобных шероховатых поверхностей [2–3], которые обычно образуются при случайном характере формирования шероховатой поверхности. В случае, когда поверхность была создана искусственным методом, например, шлифованием, шероховатость поверхности не описывается нормальным распределением Гаусса, поэтому модель контакта, опирающуюся на предположение об около-фрактальной природе поверхности сложно брать в расчет [4]. Поэтому для описания шероховатости поверхностей со случайным рельефом, которые не подчиняется нормальному распределению Гаусса в данной работе будет использован общий подход описания случайных шероховатостей поверхности [5], который лежит в основе ISO стандарта 25178-2014.

Для моделирования гистерезисного трения используются различные подходы. Следует отметить работы, которые посвящены решению контактных задач о скольжении периодических систем из жестких инденторов с различной формой по вязкоупругому материалу, так называемые *asperity model theories* [5], которые позволяют описать поверхности с искусственно заданным макрорельефом (текстурой), а также могут служить качественными моделями для понимания основных закономерностей фрикционного взаимодействия.

В данной работе предложены результаты экспериментального исследования и моделирования, призванные показать, как процесс шлифования, т.е. создания микрорельефа со срезанными, плоскими вершинами неровностей, влияет на коэффициент трения скольжения и на сцепление резины с данной шероховатой поверхностью. Моделирование основано на методах и подходах, предложенных в [6-8].

2. Для экспериментальных исследований были выбраны две группы образцов тротуарной плитки, имеющие различную шероховатость на поверхности. Поверхность первой группы образцов (№1) была получена дробеструйной обработкой и имеет грубый развитый рельеф. Вторая группа образцов (№2) была изготовлена из образцов первой группы путем шлифования их лицевых поверхностей. Топографии исследуемых образцов приведены на рис. 1.

В качестве контрольного образца была выбрана протекторная резина легковой автомобильной шины, в основе которой заложена комбинация ДССК+СКД каучуков. Контрольный образец был вулканизирован в виде кольца, имеющего внутренний диаметр 40 мм, наружный 55 мм и высоту 7 мм. Кольцо приклеивалось на металлическую подложку, которая в свою очередь фиксировалась на держателе трибометра.

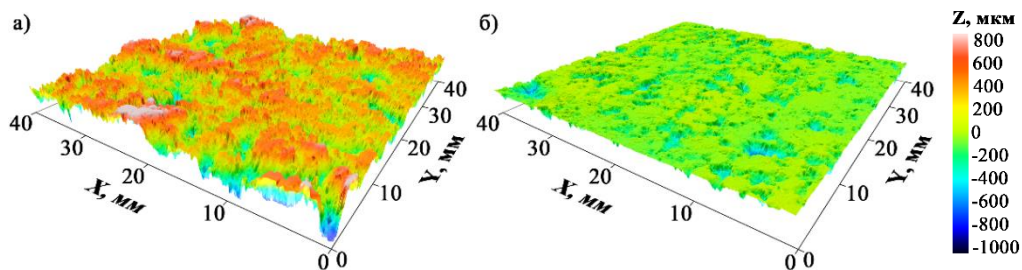


Рис. 1. 3D изображения топографии поверхности для образцов 1 (а) и 2 (б).

Измерение топографии поверхности образцов было выполнено на типично-повторяющихся участках поверхности, при этом с целью получения надежных и достоверных результатов было проведено по три измерения в различных областях исследуемого образца. Исследования проводились при помощи 3D бесконтактного профилметра S Neox (Sensofar, Испания). Оценка параметров шероховатости осуществлялась по стандарту ISO 25178-2014, который позволяет определить трехмерные (по площади) высотные и гибридные параметры рельефа при помощи инструментов, входящих в программное обеспечение прибора.

Экспериментальное изучение коэффициента трения проводилось на лабораторном трибометре UMT-2 (CETR, USA) по кинематической схеме контакта “резиновое кольцо – диск”. Для испытания одного образца тротуарной плитки в автоматическом режиме по заданной оператором программе был выполнен 21 тест, соответствующий 3 уровням давлений и 7 скоростям скольжения. Диапазон скоростей скольжения варьировался от 0,1 до 100 мм/с и был задан исходя из соображений минимизации разогрева поверхностного слоя резины, а также с целью приближения к скоростям смещения, которые задаются в двух близких по области применения друг к другу стандартах по определению сцепных свойств поверхностей, а именно: DIN51131:2008-08 – сцепные свойства напольных покрытий по методу наклонной плоскости и ГОСТ 12.4.083-80 – сцепные свойства подошвы обуви по методу однонаправленного скольжения на лабораторной установке. Нормальная удельная нагрузка P варьировалась в диапазоне от 0,1 до 0,7 МПа. Нижнее значение было выбрано исходя из условия обеспечения среднего контактного давления между обувью и опорной поверхностью при ходьбе взрослого человека с умеренной опорой на одну ногу. Для проведения испытаний при низких температурах трибометр UMT-2 оснащен выполненной из фторопласта термокамерой с вмонтированной в нее термопарой, которая фиксирует температуру окружающей среды в камере. Путь трения образца тротуарной плитки задавался равным 37 мм, что соответствует 1/4 оборота предметного столика трибометра. Результатом выполнения одного теста является зависимость коэффициента трения от времени испытания. Среднее значение коэффициента трения определяется на участке с установившемся режимом трения.

3. Рассмотрим задачу о скольжении жесткого гладкого индентора по границе вязкоупругого полупространства. Сила трения, обусловленная действием адгезионных сил, наличием абразива и д.п. не рассматривается.

Для моделирования трения воспользуемся известным допущением теории моделей неровностей [5], из которого следует, что гистерезисные потери в основном определяются формой и периодом неровностей. Затем мы аппроксимируем форму, используя следующую двумерную функцию:

$$f(x) = A \cdot \sin^{2n}(2\pi x / L), \quad (3.1)$$

где A – высота профиля; L — расстояние между канавками; n — параметр, задающий радиус кривизны канавки (выпуклости), $n > 0$. При $n = 1$ профиль представляет собой синусоиду. С увеличением n увеличивается плоскостность выступов, а бороздки сужаются. При $n \rightarrow \infty$ поверхность приближается к гладкой, бороздки исчезают.

Пусть индентор, нагруженный вертикальной силой Q , движется с постоянной скоростью V вдоль оси Ox (рис.2).

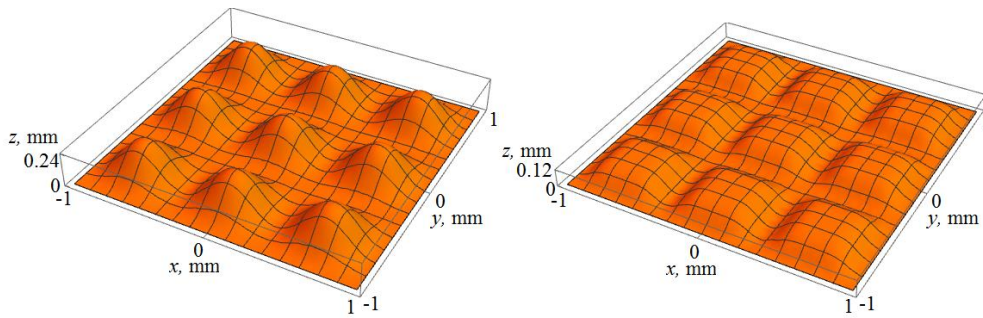


Рис. 2. Вид поверхности, которая моделируется функцией (3.1), где слева – $n=1$, справа – $n=3$.

Система координат (x,y,z) связана с индентором, ось z направлена по нормали к плоскости скольжения в противоположную полупространству сторону. Начало системы координат находится в точке первоначального касания индентора с полупространством. Рассматриваются следующие граничные условия при $z=0$:

$$w(x, y) = f(x, y) + D, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\sigma_z = 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \quad (3.2)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

Здесь Ω – область контакта, $w(x, y)$ – нормальные смещения поверхности, D – внедрение индентора, $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – нормальные и касательные напряжения. Контактные давления и область контакта неизвестны. Система замыкается условием равновесия:

$$Q = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy \quad (3.3)$$

Механические свойства полупространства описываются соотношениями между деформациями и напряжениями, получаемыми из уравнений закона Гука заменой модулей упругости соответствующими интегральными операторами Вольтерра. Например, зависимость между напряжением сдвига $\gamma(t)$ и деформацией сдвига $\tau(t)$ может быть записана в следующем виде:

$$\gamma(t) = \frac{1}{G} \tau(t) + \frac{1}{G} \int_{-\infty}^t \tau(\tau) K(t-\tau) d\tau; \quad K(t') = (1/\lambda_1) \exp(-t'/\lambda_2), \quad (3.4)$$

Здесь G – мгновенный модуль сдвига. Ядро ползучести $K(t')$ является экспоненциальной функцией, зависящей от времен релаксации λ_1 и последствия λ_2 . Коэффициент Пуассона полагается константой.

В [9] показано, что контактная задача может быть сведена к следующему интегральному уравнению:

$$w(x, y) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{V} k I_1 \left(\frac{\xi-x}{\lambda V}, \frac{\eta-y}{\lambda V} \right) \right] d\xi d\eta, \quad (3.5)$$

$$I_1(\alpha, \beta) = e^\alpha \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{\sqrt{u^2 + \beta^2}}, \quad u = \frac{\xi-x-V\tau}{\lambda V}, \quad R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$$

Метод граничных элементов и итерационная процедура используются для определения площади контакта, а также распределения контактного давления. Метод решения подробно описан в [9]. Деформационная составляющая силы трения определяется следующим образом:

$$\mu^* = \frac{T}{Q} = \frac{\int_{\Omega} x p(x, y) dx dy}{R' \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy}, \quad (3.6)$$

здесь R' – средняя кривизна индентора в области контакта.

4. Данное исследование направлено на исследование влияния различной шероховатости поверхности тротуарной плиты в паре с резиной, характеристики которой считаются не

зависимыми от условий нагружения. В работе используется резина легкой автомобильной шины. Длительный модуль упругости резины был измерен при помощи нанотвердомера NanoScan (Тиснум, Россия) методом инструментального индентирования при вдавлении сферического шарика радиусом 4 мм в резину на глубину 50 мкм с силой равной 450 мН. Модуль упругости, рассчитанный по Герцу составил $E=14.4$ МПа.

Нагрузка при расчете была выбрана постоянной и составляла $Q = 0.001$ Н на единичную неровность. Для получения среднего давления равное $P=0.1$ МПа, характерного в контакте резины с реальной шероховатой поверхностью, количество неровностей было увеличено до 1000. Количество неровностей в расчете было выбрано таким, чтобы среднее давление в контакте с резиной было равным среднему давлению, которое характерно при ходьбе человека с попеременной нагрузкой на одну ногу ($P = 0.1$ МПа).

Скорость скольжения, при которой рассчитывался коэффициент трения соответствовала диапазону, выбранному в эксперименте, $V = 0,1 \dots 100$ мм/с.

Характерное время релаксации для данной резины составляет 0.0006 с, а коэффициент Пуассона равен 0.48. Среднее давление в расчетах равно $P = 0.1$ МПа, что и имеет место в нашем экспериментальном исследовании. Таким образом, средняя нагрузка, приходящаяся на одну неровность, составляет $Q = 0.041$ Н.

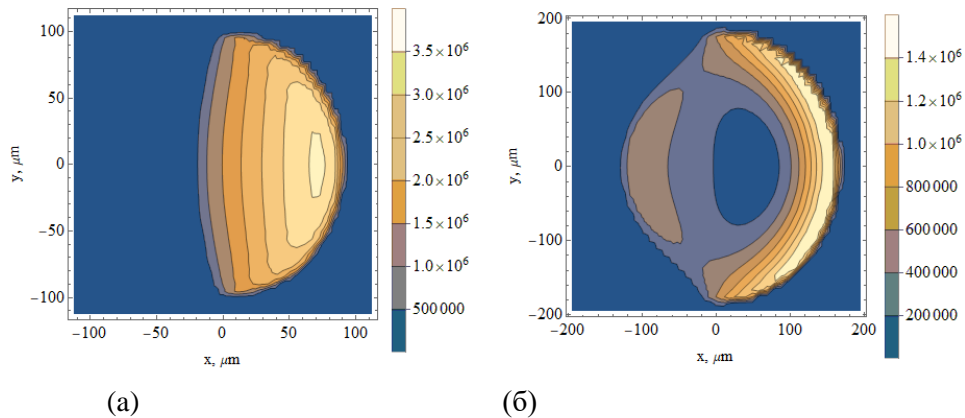


Рис. 3. Распределение контактного давления при $n=1$ (а), $n=3$ (б); $V= 3.98$ мм/с

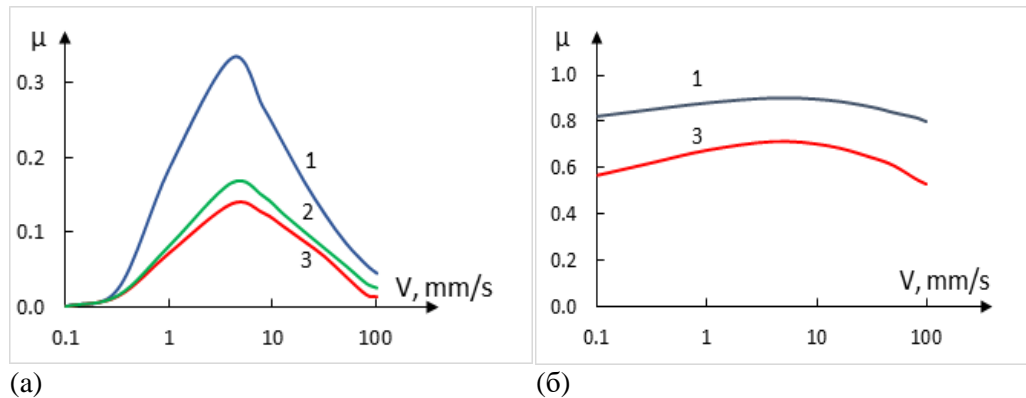


Рис.4. Расчетные (а) и экспериментальные (б) зависимости коэффициента трения от скорости скольжения при комнатной температуре, где кривая 1 – соответствует поверхности с дробеструйной обработкой без шлифовки, 2 – слабая шлифовка, 3 – значительная шлифовка

При рассматриваемом номинальном давлении контакт происходил только по вершинам неровностей для всего диапазона скоростей. Контактные характеристики и сила трения были найдены для всех неровностей, но проанализированы только для центральной (для адекватного учета эффекта взаимного влияния). Важно, что краевой эффект для рассматриваемой нагрузки достаточно мал.

На рис. 3 показаны распределения контактного давления для двух форм поверхности. Скорость выбрана такой, чтобы заметно проявлялись вязкоупругие свойства материала. Это

приводит к значительной асимметрии распределения давления в обоих случаях. Именно эта асимметрия свидетельствует о наличии деформационного механизма диссипации энергии при скольжении. Расчетная и экспериментальная зависимости коэффициента трения от скорости скольжения представлены на рис. 4. Расчетные зависимости построены для трех вариантов формы поверхности, экспериментальные – для двух. Существенная разница в значениях связана с наличием в эксперименте сил адгезии, а также с тем, что резина в целом является нелинейным материалом. Линейные модели можно использовать в ограниченных пределах. Тем не менее в нашем случае локализация максимумов совпадает. Также в области максимума разница между значениями коэффициента трения в теории и эксперименте совпадает и составляет около 0.2. Отсюда можно сделать вывод, что это различие обусловлено деформационной составляющей силы трения.

Таким образом, шлифование поверхности тротуарной плитки приводит к снижению гистерезисных потерь на трение, сохранение которых важно в условиях загрязнения или намокания контактных поверхностей.

Исследования проводились в рамках гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00484). Расчетные алгоритмы для определения свойств материала разработаны при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-4458.2022.1.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bowden F.P., Tabor D. The friction and lubrication of solids. Part II. Clarendon Press, UK, 1964. 534 p.
2. Borodich F.M., Onishchenko D.A. Similarity and fractality in the modelling of roughness by a multilevel profile with hierarchical structure. International Journal of Solids and Structures, vol. 36, 1999.
3. Klüppel M., Heinrich G. Rubber Friction on Self-Affine Road Tracks. Rubber Chemistry and Technology, vol. 73, 2000.
4. Villani M.M., Artamendi I., Kane M., Scarpas A.(Tom) The contribution of the hysteresis component of the tire rubber friction on stone surfaces. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, vol. 2227(1), 2011.
5. Barber J.R. Contact Mechanics. Springer, Netherlands, 2018. 585 p.
6. Nettingsmeier J., Wriggers P. Frictional contact of elastomer materials on rough rigid surfaces. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 4, 2004.
7. Carbone G., Putignano C. Novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: theory and experiments. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 61, 2013.
8. Carbone G., Putignano C. Rough viscoelastic sliding contact: Theory and experiments. Physical Review E, vol. 89(2), 2014.
9. Aleksandrov V.M., Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Sliding contact of a smooth indenter and a viscoelastic half-space (3D problem). Doklady Physics, vol. 55, 2010.

Information about authors

Torskaya E.V. – D.Sc., Professor of RAS, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Laboratory of Tribology (7 495) 434 2090.

E-mail torskaya@mail.ru

Morozov A.V. – Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Laboratory of Tribology (7 495) 434 1587

E-mail morozovalexey@mail.ru

Stepanov F.I. – Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Laboratory of Tribology (7 495) 434 3692

E-mail stepanov_ipm@mail.ru

О ВЫПОЛНЕНИИ ГИПОТЕТИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОНОМ-КАТАПУЛЬТОЙ ФУНКЦИЙ РЕАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОНА

Хачикян А.С.

Применительно к эфиру предлагается гипотетическая модель электрона в виде механической самозаряжающейся и автоматически разряжающейся катапульти. Показано, что некоторые из основных свойств электрона могут объясняться предлагаемой моделью.

В докладах на конференциях [1, 2] были изложены представления автора о структуре и роли эфира и об устройстве гипотетической модели электрона в виде механической упругой катапульти в среде эфира. Здесь предлагаются сравнения некоторых известных функциональных свойств реального электрона и соответствующих реакций на эти процессы модели электрона. Дается заключение о перспективности модели.

Хотя некоторые электрические явления были известны уже в Древней Греции, они были по возможности подробно изучены и вошли в практическую жизнь человечества только в последние два-три столетия [3].

Установлены следующие основные и непреложные экспериментальные факты [4]:

1. Электрон обладает некоторым количеством энергии;
2. Одновременно заряженные электрические частицы взаимно отталкиваются известными кулоновскими силами;
3. Разноименно заряженные электрические частицы взаимно притягиваются теми же силами;
4. Два параллельных прямолинейных провода, по которым текут однонаправленные электрические постоянные токи, взаимно притягиваются;
5. Во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении магнитной индукции, проходящей через площадку, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток.
6. Электрон обладает магнитным моментом.
7. Электрон способен испускать электромагнитные волны.
8. Имеет место гипотеза де Бройля о дискретном (порциями, цугами волн) испускании и поглощении электромагнитных волн.

Приведенные свойства касаются отдельного электрона или несколько обособленной струи частиц, состоящей из электронов, что и есть постоянный электрический ток.

Конечно, составленный список свойств электрона неполон. Но включенные в список свойства в каком-то смысле являются основными.

Ответы модели электрона-катапульти на перечисленные вызовы:

1. Модель электрон-катапульти в среде эфира непрерывно заряжается автоматически и разряжается упругой энергией. Следовательно, почти в любой момент времени в нем содержится какое-то количество энергии.

2. Предлагаемая модель электрона представляет собой механический агрегат (катапульта), который, существуя в эфире, отстреливает частицы. Поэтому естественно и очевидно, что любые два электрона в этом квазистатическом состоянии будут взаимно отталкиваться.

Мы пока не знаем, равны ли возникающие таким образом силы кулоновским силам или нет, что зависит от многих факторов, но действуют они в правильном (в том же) направлении.

3. Как известно, электроны считаются отрицательно заряженными частицами. Положительно заряженными считаются протон и позитрон. Протон массивнее электрона почти в $2 \cdot 10^3$ раз. Позитрон имеет массу, равную электрону. Устройство и свойства протона и позитрона в этой работе не рассматриваются. Это – предмет исследования следующей работы. Здесь же только напомним, что аэрогидродинамика богата процессами и устройствами, такими как источники, стоки, круговые и винтовые движения, ламинарное и турбулентное движения, процессы обтекания тел в среде, солитоны, вихри и многое другое [5]. Успехи в этой работе весьма вероятны.

Ясно, что если позитрон отличается от электрона только направлением вращения вокруг собственной оси, то, например, взаимное отталкивание позитронов, а также взаимное

притягивание разноименно заряженных частиц (электрона и позитрона) обеспечено. Ясно также, что если их отличие только в направлении вращения, то где-то в космосе должен быть мир с их обратным вращением, так как правое и левое вращение, в принципе, должны быть равны.

Но не будем забегать вперед. Напомним также, что позитрон – редкая и мало действующая частица в нашем мире, а протон, вместе с нейтральным нейтроном, составляет основу ядра атома.

4. В гидродинамике известен эффект взаимного притяжения двух параллельно и однонаправленно плывущих кораблей в море. Этот эффект является следствием распределений скоростей движения частиц и напряжений в среде обтекания корпусов кораблей и составляет основу воздухоплавания вообще. В нашем случае имеем две несколько обособленных струи частиц (постоянный электрический ток), движущихся в эфире, или обтекаемые эфиром. То же взаимное притяжение будет иметь место для струи наших моделей электрон-катапулт. Конечно, величина этого притяжения и величина кулоновских сил отталкивания и притяжения заряженных частиц, которые зависят от различных факторов и которые можно измерить на опыте, надо еще исследовать. И эти струи электронов находятся в проводящих ток проводниках, изолированных от остальной среды непроводящим слоем, делающим среду неоднородной. Но все они находятся в среде эфира и общие взаимодействия, мы надеемся, остаются в силе.

Заметим, что требования к электрону под номерами 2 и 4 противоположны. Первое из них гласит, что в квазистатическом состоянии эти частицы друг от друга отталкиваются, а второе – что струи от этих частиц взаимно притягиваются. Такие требования сильно осложняют моделирование этих частиц. И, тем не менее, модель электрон-катапульта выполняет оба эти требования. Однако так как эти силы зависят от разных факторов, то можно воспользоваться этим фактом для обнаружения условий, при которых по величине один из них превосходит другой. Взаимное отталкивание электронов зависит в основном от массы и скоростей отстреливаемых ими частиц, а взаимное притягивание постоянных токов, – в основном, от скоростей их прямолинейного движения относительно эфира и геометрии процесса. Здесь необходимо учесть, конечно, уравновешенность положительных и отрицательных электрических зарядов в проводнике [1]. Обе эти силы можно, в принципе, измерить, что дает возможность их сравнивать.

5. Процесс, соответствующий этому требованию, есть тот же процесс, описанный в предыдущем пункте, только происходящий в обратном отсчете времени. Это видно и в уравнениях Максвелла-Фарадея [1], где электрическое напряжение и магнитное напряжение входят симметрично. Из этой симметрии следует, что внешнее электрическое напряжение создает в проводнике постоянный электрический ток, который создает в окружающей среде поле магнитных напряжений, а изменение поля внешних магнитных напряжений создает в проводнике постоянный электрический ток и, соответственно, электрическое напряжение.

Вышесказанное, совместно со сказанным чуть выше, представляет возможность выполнения электроном-катапульта требования пункта 5 в положительном смысле, хотя автор и отдает себе отчет в том, что обоснование этого недостаточно четко и наглядно.

6. Обладание электроном магнитного момента может объясниться отстреливанием электроном крестовидных (звездообразных) частиц. Такие частицы благодаря своему вращению вокруг собственной оси одновременно с прямолинейным движением способны создавать возмущения в направлении, перпендикулярном направлению своего прямолинейного движения, создавая тем самым напряжения в этом направлении (магнитные напряжения).

7. Нам также следует выяснить, какое отношение к электромагнитным волнам имеют отстреливаемые электроном-катапультай частицы. Они вносят некоторые возмущения в среду, создавая при этом волновое движение. Еще не выяснен механизм и сущность (образование) электромагнитных волн. Но качественно они к ним имеют какое-то отношение. Весьма возможно, что именно отстреливаемые электроном-катапультай частицы образуют электромагнитные волны.

Здесь открывается возможность понять, что такое упругая волна в эфире (электромагнитная волна), так же как мы понимаем другие обычные волны – волны напряжений в разных средах, жидкие волны, воздушные волны и т. д. А в метафизических электромагнитных волнах мы не

знаем, что меняется, что с чем связано, что колеблется и почему, что движется и, наконец, во всем этом нет никакой ясности.

8. Отстреливаемые частицы как источник образования электромагнитных волн вполне соответствуют идее де Бройля о дискретном испускании в природе электромагнитных волн. Отметим, что эта гипотеза де Бройля помогла решить проблему абсолютно черного тела и стала основой возникновения квантовой механики, хотя дальнейшее развитие квантовой механики пошло не очень верным, метафизическим, путем.

Рассмотренные свойства электрона не отличаются полнотой и не окончательны, но достаточно хорошо демонстрируют многогранные возможности этой модели отвечать на разные вызовы. Хорошее впечатление оставляет, например, положительное решение противоречивых требований пунктов 2 и 4. В частности, положительно решенные вопросы достаточны для обеспечения работы электрона в таких устройствах, как магниты, соленоиды, электродвигатели. В целом представленную модель можно считать вполне надежной и перспективной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачикян А. С. Об уравнениях Максвелла: Материалы VII международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван, 2021. 236-238с.
2. Хачикян А. С. Гипотеза о механической модели электрона: Материалы VI международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван, 2019. 345-347 с.
3. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества: классические теории. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 512 с.
4. Фриш С. Е. и Тиморева А. В. Курс общей физики, т. 2, М. 1957 г.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.

Сведения об авторе:

Хачикян Альберт Серобович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2 Тел.: (37410) 74-02-8

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДАМИ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

Шишкина С.И., Сердюков В.И., Сердюкова Н.А.

В статье предлагается использование методов гомологической алгебры и алгебраической квазифрактальной техники для описания состояния замкнутой ассоциативной интеллектуальной системы на микроуровне. Выделены этапы формирования замкнутой ассоциативной СМАРТ системы из хаотического состояния. Вводится понятие системы, аналогичной хаотической предсистеме. Рассмотрены различные подходы к понятию состояния системы для описания функционирования системы. Инвариант состояния системы S определяется с помощью квазифрактального оператора QF . Понятие состояния для темпоральной логики определяется с помощью [1]. Это понятие может помочь повысить точность моделей нейронных сетей.

1. Состояние системы. Предсистема. Хаотическая предсистема

Эволюция систем важна при изучении перехода состояний системы из одного в другое. По Пригожину, [2] эволюция системы происходит по схеме:

Хаос \rightarrow Система

Добавим в эту схему следующие пункты:

Хаос \rightarrow Предсистема \rightarrow Предсистема, подобная хаотической \rightarrow Система \rightarrow СМАРТ система
Ниже даются определения предсистемы и предсистемы, подобной хаотической, см. определение 1.2, 1.3. Понятие состояния системы рассматривалось ранее в работах [3-7].

Попытаемся уточнить понятие состояния системы в зависимости от фактора времени. Для этого необходимо определение квазифрактального оператора QF и понятие квазифрактальной функции, [6,8]. Итак, мы можем сформулировать понятие состояния системы и дать следующее определение.

Определение 1.1 Состояние системы $QF_{k < \omega_\gamma}^\alpha (A_k^\alpha = (\langle A_k^\alpha; \Omega_k \rangle, \alpha \in \Lambda_k))$ есть квази – фрактальная функция $f = QF_{k < \omega_\gamma}^\alpha (f_k^\alpha) = QF_{k < \omega_\gamma}^\alpha (f: A_k^\alpha = \langle A_k^\alpha; \Omega_k \rangle \rightarrow M)$, $\alpha \in \Lambda_k$, где M есть \widehat{Z}_{2^∞} , $f_k^\alpha: A_k^\alpha = (\langle A_k^\alpha; \Omega_k \rangle \rightarrow M)$ функция цифровизации для $A_k^\alpha = \langle A_k^\alpha; \Omega_k \rangle$ на каждом уровне $k < \omega_\gamma$.

Согласно [2], хаос характеризуется отсутствием связей между элементами. Кроме того, будем считать, что взаимодействие между элементами хаотической предсистемы S удовлетворяет ассоциативному закону: $(\forall a, b, c \in S)(a^\circ b)^\circ c = a^\circ (b^\circ c)$. Итак, под предсистемой мы понимаем замкнутую совокупность хаотических частиц и их взаимодействий, как это сделано нами в [6].

Определение 1.2 Предсистема S представляет собой замкнутое множество хаотических частиц и их пересечений. Взаимодействие между элементами хаотической системы S удовлетворяет ассоциативному закону: $(\forall a, b, c \in S)(a^\circ b)^\circ c = a^\circ (b^\circ c)$.

Если это так, то модель замкнутого множества хаотических частиц может быть описана как свободная неабелева группа F_{ω_γ} ранга ω_γ , где ω_γ есть ординал (конечный или нет). Пусть F_{ω_γ} есть свободная неабелева группа со свободными образующими $\{a_i | i < \omega_\gamma\}$. F_{ω_γ} записывается в алфавите $\{a_i | i < \omega_\gamma\} \cup \{a_i | a_i^{-1} i < \omega_\gamma\} \cup \{\emptyset\}$, $F_{\omega_\gamma} = \langle F_{\omega_\gamma}, \cdot^{-1}, e \rangle$. Также можно рассматривать квази-фрактальную модель $QF_{k < \omega_\delta}^\alpha (F_{\omega_\gamma} = \langle F_{\omega_\gamma}, \cdot^{-1}, e \rangle_k)$, $\alpha \in \Lambda_k$, $k < \omega_\delta$ для уточнения модели.

Определение 1.3. Хаотически замкнутая ассоциативная предсистема S есть система, моделируемая свободной неабелевой группой факторов F_{ω_γ} ранга ω_γ , где ω_γ есть ординал.

1.2.1 Моделирование движения системы с помощью группы автоморфизмов $Aut(G_S)$ группы G_S . Системы, подобные хаотической предсистеме. Системы с аналогом свойства топологического смешивания

Движения системы есть процесс последовательного изменения ее состояний. Движение системы можно рассматривать как переход из одного состояния системы в другое. Пусть S – замкнутая ассоциативная система, моделируемая группой факторов G_S . Изменение состояний предсистемы S можно моделировать группой автоморфизмов $Aut G_S = \langle Aut G_S, *$

, $^{-1}, e$) группы факторов G_S . Кроме того, в качестве модели движения для системы S , моделируемой группой факторов G_S , можно рассматривать группу автоморфизмов $Aut G_S = \langle Aut G_S, *, ^{-1}, e \rangle$. Действительно, при $x \in G_S$ элемент $f(x) \in G_S$ можно рассматривать как результат движения в системе S , моделируемой группой факторов G_S . Пусть $Aut G_S = \{f_i | i \in I\}$. Все движения системы S можно смоделировать с помощью группы всех эндоморфизмов $End(G_S) = \langle End(G_S), *, ^{-1}, e \rangle$ группы G_S . Таким образом, $e: G_S \rightarrow G_S$ такое, что $e(g) = e$ для всех $g \in G$, можно рассматривать как цель функционирования системы S , моделируемой группой факторов G_S поскольку после e система S прекращает свое функционирование. Если рассматривать индексы $i \in I$ как момент времени $End(G_S) = \{\varphi_i: G_S \rightarrow G_S | i \in I\}$, то $End(G_S) = \langle End(G_S), *, ^{-1}, e \rangle$ можно рассматривать как динамическую темпоральную модель системы S , моделируемую группой факторов G_S . В соответствии с [11] можно объяснить существование броуновского движения в хаотической предсистеме S , моделируемой группой факторов G_S .

Теорема 1.4. Существует броуновское движение в хаотической предсистеме S , моделируемой группой факторов G_S .

Поскольку $Aut(F_2)$ содержит подгруппу, изоморфную F_2 , утверждение теоремы 1.4 верно.

Теорема 1.5. Существует не только броуновское движение в хаотической предсистеме S , моделируемой группой факторов G_S .

Согласно [11], $Aut(F_2)$ содержит подгруппы, не являющиеся свободными неабелевыми группами.

Следующей целью этого пункта является доказательство теоремы.

Теорема 1.6. В любой замкнутой ассоциативной системе, моделируемой с помощью полной группы факторов, определяющих систему, существует предсистема, подобная хаотической предсистеме, и если порядок группы четный, то детерминированная часть моделируется циклической группой порядка 2.

Определение 1.4. Система S , моделируемая группой факторов G_S , называется подобной хаотической предсистеме, если $AutG_S$ имеет подгруппу, изоморфную G_S .

Примеры

1. Система S , моделируемая группами без центра G_S , подобна хаотической предсистеме, см. [12]. Каждая хаотическая предсистема, моделируемая свободной неабелевой группой конечного ранга F_n , подобна хаотической предсистеме, потому что для свободной группы F_n имеем $Aut(F_n)$, которая содержит подгруппу, изоморфную F_n . В [13] доказано, что $Inn(F_n)$ — единственная нормальная свободная подгруппа группы $Aut(F_n)$, ранг которой совпадает с n , [14].

Всякая бесцентровая полная группа подобна хаотической предсистеме. Группа G называется полной, если каждый ее автоморфизм внутренний и группа без центра. Эквивалентно, группа является полной, если отображение $G \rightarrow Aut(G)$, переводящее каждый элемент группы G в элемент, сопряженный с ним посредством g , является изоморфизмом, [15].

2. Все симметрические группы S_n полны, за исключением случаев, когда $n \in \{2, 6\}$. Для случая $n = 2$ группа имеет нетривиальный центр, а для случая $n = 6$ существует внешний автоморфизм. Известно, [16], что группа автоморфизмов простой группы является почти простой группой; для неабелевой простой группы G группа автоморфизмов группы G полна. Итак, все симметрические группы S_n , за исключением случаев, когда $n \in \{2, 6\}$, подобны хаотическим предсистемам. Для группы S_2 имеем $S_2 \cong Z_2$, поэтому $AutZ_2 \cong E$. Для группы S_6 у нас есть S_6 имеем $AutS_6$. Отсюда следует теорема 1.6. Теорема 1.6 объясняет детерминистский и динамический подходы к изучению теории систем. Теперь воспользуемся понятием топологического смешивания, [17], которое поможет нам построить примеры систем, моделируемых группами, обладающими свойством подобия топологическому смешиванию. Приведем конструкцию.

Если X — топологическое пространство, то $T: X \rightarrow X$ — динамическая система. Если система S моделируется группой факторов G_S , то гомоморфизм $f: G_S \rightarrow G_S$ является динамической замкнутой ассоциативной системой, $f \in EndG_S$.

Динамическая замкнутая ассоциативная система $f: G_S \rightarrow G_S$ обладает свойством подобия топологическому смешиванию, если для любых подгрупп $U, V \triangleleft G_S$ группы G_S таких что

$U, V \neq E$, существует $N_{U,V} = N$ такое, что $f^n(U) \cap V \neq E$ для всех $n \geq N$. Каждая простая группа является обладает свойством подобия топологическому смешиванию.

1.2.2 Моделирование состояния смарт системы. Сравнительный анализ моделей системы, заданных с использованием различных групп факторов, определяющих систему. Моделирование квазифрактального состояния системы. Инвариант состояния смарт - системы.

Ключевым моментом в определении состояния системы является понятие отображения. Группу $Hom(\mathbf{G}_S, A)$ можно рассматривать как модификацию состояния системы S , моделируемую группой факторов \mathbf{G}_S . В связи с этим необходимо напомнить, что гомология дает алгебраическую «картину» топологических пространств, сопоставляя каждому пространству X семейство абелевых групп $H_0(X), \dots, H_n(X), \dots$ и каждому непрерывному отображению $f: X \rightarrow Y$ семейство гомоморфизмов групп $f_n: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. Свойства пространства или отображения можно получить из свойств групп $H_n(X)$ и гомоморфизмов f_n . Рассмотрим системы, моделируемые группами факторов. Одномерная группа гомологий группы G — это факторгруппа $G/[G, G]$ группы G по ее коммутанту $[G, G]$. Отображение $f: G \rightarrow H$ продолжается до функтора из категории всех групп в категорию абелевых групп. Любая другая группа с универсальным свойством изоморфна $G/[G, G]$. Универсальность позволяет установить взаимно однозначное соответствие между всеми гомоморфизмами из группы G в некоторую абелеву группу A и всеми гомоморфизмами из абелианизации $G/[G, G]$ в группу A . При таком соответствии каждый гомоморфизм $g: G/[G, G] \rightarrow A$ соответствует композиции $g \circ ab: G \rightarrow A$, здесь $ab: G \rightarrow G/[G, G]$ — естественная проекция. Это соответствие реализует изоморфизм групп гомоморфизмов

$$Hom(G, A) \cong Hom(G/[G, G], A) \quad (1.1)$$

Возникает вопрос: если P — унарный предикат, заданный на классе всех групп, такой, что он замкнут относительно взятия подгрупп и факторгрупп, $P(A)$ истинен, то найти такую группу $B_P(G)$ $Hom(G, A) \cong Hom(G/B_P(G), A)$.

Попытаемся связать группу гомологии с топологическими искажениями состояний системы S , определяемыми различными моделями групп факторов, определяющих систему S . Примем следующее: $Aut(G_S)$ — модель состояний системы S , $Hom(G_S, A_S)$ — отображение / \equiv описание состояния системы S с помощью модели A_S , $Hom(G_S, A_R)$ — отображение / \equiv описание состояний системы S с помощью модели A_R системы R . Мы свяжем группу гомологии с топологическими искажениями состояний системы S , определяемыми различными моделями групп факторов, определяющих систему. Итак, из (1.1) имеем: описание S - состояний системы с помощью модели A_S , которая является абелевой группой $Hom(G_S, A_S)$, совпадает с описанием S - состояний системы с помощью абелианизации $G_S/[G_S, G_S]$ группы G_S с помощью модели A_S .

Обобщим эту конструкцию следующим образом. Пусть P — такой унарный предикат, заданный на классе всех групп, что $P(A)$ истинно тогда и только тогда, когда

$$A = \langle \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} w_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \mid w_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = w_\alpha(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(n)}); \alpha \in \Lambda, \tau \in S_n \rangle,$$

где $w_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ это слово в алфавите $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\} \cup \{x_1^{-1}, \dots, x_i^{-1}, \dots, x_j^{-1}, \dots, x_n^{-1}\} \cup \{e\}$

Построим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & B_P(G) & \xrightarrow{\varepsilon} & G & \xrightarrow{\pi} & G/B_P(G) \rightarrow 1 \\ & & & & \downarrow f & \searrow \varphi & \\ & & & & A & & \end{array}$$

$$(\forall f: G \rightarrow A)(\exists \varphi: G/B_P(G) \rightarrow A)(f = \varphi\pi)$$

Через $B_P(G)$ обозначим нормальную подгруппу G такую, что $B_P(G) \models P$.

Пусть $w(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = w(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(n)})$, где $\tau \in S_n$.

$B_P(G) = \langle w(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \mid w \text{ является словом от переменных } x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n \rangle,$

$$B_P(G) = \langle w_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \mid w_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = w_\alpha(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(n)}); \alpha \in \Lambda \rangle \quad (1.2)$$

Или рассмотрим то же отношение, записанное в следующем виде: $B_P(G) = \langle \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} w_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) | w_\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = w_\alpha(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(n)}); \alpha \in \Lambda, \tau \in S_n \rangle$

Кроме того, $g^{-1}wg \in B_P(G)$ для любого g из G . Здесь S_n — группа перестановок степени n . Соотношение (1.2) выполняется на каждом гомоморфном образе группы $B_P(G)$, поэтому получаем

Теорема 1.11. Описание $Hom(G_S, A_S)$ состояний системы S с помощью модели A_S , являющуюся такой группой, что $P(A_S)$ истинно, совпадает с описанием состояний системы S с помощью модели $G_S/B_P(G)$ группы G_S по модели A_S .

Рассмотрим квази-фрактальное состояние системы S , моделируемое группой факторов $G_S = \langle G_S; \cdot, {}^{-1}, e \rangle$. Для этого прежде всего следует записать группы G_S и $A = \langle A; \cdot, {}^{-1}, e \rangle$ в виде квазифракталя с помощью оператора QF . Напомним, что каждый элемент из $G_{S_k}^\alpha$ сам является группой, каждый элемент из A_k^α сам является группой. Итак, пусть $QF_{k < \omega_\gamma}^\alpha(G_{S_k}^\alpha = \langle G_{S_k}^\alpha; \cdot, {}^{-1}, e \rangle, \alpha \in \Lambda_k)$ и $QF_{k < \omega_\gamma}^\alpha(A_k^\alpha = \langle A_k^\alpha; \cdot, {}^{-1}, e \rangle, \alpha \in \Lambda_k)$. Рассмотрим $QF(Hom_k^\alpha(G_S, A) = \langle Hom_k^\alpha(G_{S_k}^\alpha, A_k^\alpha); \cdot, {}^{-1}, e \rangle, \alpha \in \Lambda_k) = \langle A_1, \Omega_1 \rangle$. Здесь $f_k^\alpha: G_{S_k}^\alpha \rightarrow A_k^\alpha, \alpha \in \Lambda_k, k < \omega_\gamma$.

Состоянием квазифрактальной системы S относительно квазифрактальной группы $A = \langle A; \cdot, {}^{-1}, e \rangle = \langle A_1, \Omega_1 \rangle$ называется квазифрактальная группа гомоморфизмов $QF(Hom_k^\alpha(G_S, A) = \langle Hom_k^\alpha(G_{S_k}^\alpha, A_k^\alpha); \cdot, {}^{-1}, e \rangle, \alpha \in \Lambda_k) = \langle A_1, \Omega_1 \rangle$. Группа $QF(Hom_k^\alpha(G_S, A) = \langle Hom_k^\alpha(G_{S_k}^\alpha, A_k^\alpha); \cdot, {}^{-1}, e \rangle, \alpha \in \Lambda_k) = \langle A_1, \Omega_1 \rangle$ называется квази-фрактальным состоянием системы S относительно квази-фрактальной группы $A = \langle A; \cdot, {}^{-1}, e \rangle = \langle A_1, \Omega_1 \rangle$.

Определим метрическое пространство на множестве индексов $\{\Lambda_k, k < \omega_\gamma\}$. Тогда теорема о неподвижной точке определяет уровень k , который мы будем называть инвариантом состояния системы S .

2. Приложения. В динамической системе состояние системы меняется со временем. В темпоральной логике состояния также изменяются во времени. Это не полностью учитывается используемыми в настоящее время моделями нейронных сетей. В [1] теория гомологии строится с помощью вспомогательной категории \mathfrak{S} и представления булевых алгебр с замыканием. Это позволяет определить понятие состояния для темпоральной логики, а затем учитывать его при построении нейронных сетей для повышения точности нейросетевых моделей. Свяжем эту конструкцию с узким исчислением предикатов. Точнее, рассмотрим элементарную теорию $Th(G_S)$ группы G_S , то есть замкнутые формулы узкого исчисления предикатов сигнатуры $\Omega = \langle \cdot, {}^{-1}, e \rangle$, истинные на G_S . Тогда $Th(G_S)$ образует булеву алгебру $B_{Th(G_S)}$. Элементарной моделью состояний системы S первого порядка, моделируемой группой факторов G_S является булева алгебра $B_{Th(G_S)}$. Элементарной моделью состояний системы S первого порядка, моделируемой группой факторов G_S относительно \equiv через модель A_S системы S , является булева алгебра $B_{Th(Hom(G_S, A_S))}$

Необходимо отметить, что алгебраические методы начинают использоваться в нейронных сетях. Например, нейронная сеть является трехосновной алгеброй, [19].

Дальнейшие практические приложения предложенной нами теории можно строить на основе работ [20-23]

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунятов М.Р. Гомологии Александра–Чеха абстрактной булевой алгебры с замыканием, Докл. АН СССР, 1977, т.237, №1, с.17–20
2. Prigogine I and Stengers I Order out of chaos (Toronto, New York, London, Sydney: Bantam books) 1984. 385 p.
3. Massri C, Holik F, Plastino A States in Generalized Probabilistic Models: An Approach Based in Algebraic geometry *Math. Slovaca* 2019, 69, No. 1, 53, 70
4. Wiegers K Modeling System States: State-Transition Diagrams and State Tables, 2020 Feb 18 <https://medium.com/analysts-corner/modeling-system-states-state-transition-diagrams-and-state-tables-d37fe908ff23>

5. Baduel R, Bruel J M, Ober I, Doba E Definitions of states and modes as general concepts for system design and validation, *12th International Conference on Modeling, Optimization and SIMulation - MOSIM18* – 2018, June 27-29 Toulouse - France "The rise of connected systems in industry and services"
6. Serdyukova N A, Serdyukov V I Algebraic Quasi – fractal Logic, *Preprint*, 2022
7. R'edei M Quantum logic in algebraic approach, (The Netherlands: Kluwer Academic Publishers) 1998. 252 p
8. Serdyukova N A, Serdyukov V I, Kusminova O A, Kusnetsov A N, Shishkina S I Temporal Logic Usage in Control and Planning Models of Smart Systems *Smart Education and e-Learning – Smart Pedagogy* 2022, pp 427–435
9. Serdyukova N A, Serdyukov V I Digitalization of Propositional Algebra and NPC, *25th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems (KES 2021)*, Procedia Computer Science 00(2021) 000-000, 2021.
10. Serdyukova N, Serdyukov V Algebraic Identification of Smart Systems. Theory and Practice, *Intelligent Systems Reference Library*, 191 (Switzerland: Springer Nature), 2021.
11. Lubotzky A, Grunewald F Linear Representations of the Automorphism Group of a Free Group 2018, arxiv.org/pdf/math/0606182.pdf
12. <http://halgebra.math.msu.su/wiki/lib/exe/fetch.php/staff:bunina:lecture4.pdf>, p.9
13. Formanek E Characterizing a free group in its automorphism group, *J. Algebra*, 1990, 133, pp 424–432.
14. Tolstykh V A Groups of automorphisms, *Abstract of dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences*, 2006.
15. https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
16. https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_group
17. Karopa G N Problems of natural science and natural science education from the point of view of mathematical chaos theory (Gomel: Gomel State University named after F Skaryna), 2012.
18. Serdyukova N, Serdyukov V Algebraic Formalization of Smart Systems. Theory and Practice *Smart Innovation, Systems and Technologies* 2018, vol 91, (Switzerland: Springer Nature),
19. Слеповичев И. И. Алгебраические свойства абстрактных нейронных сетей, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*. 2016, т.16, вып.1, с. 96–103
20. Зарубин, В. С. О возможностях метода граничных элементов при моделировании континуальных систем / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин // Информационные технологии. 1997. № 3. С. 18-20.
21. Зарубин В.С. Математическое моделирование процессов в континуальных системах. Информационные технологии, 1995. №0. С.11.
22. Колин К.К., Норенков И.П., Нариньянин А.С., Зарубин В.С. Состояние и перспективы развития информационных технологий, Информационные технологии. 1999. №1., С.44.
23. Зарубин, В. С. Физические и математические модели микромеханики : Учебное пособие / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин, И. Ю. Савельева. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. 192 с.

Сведения об авторах

Сердюков Владимир Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, ведущий специалист Федерального института цифровой трансформации в сфере образования, Москва +7 915 242 14 01, e-mail: wis24@yandex.ru

Сердюкова Наталья Александровна - кандидат физико-математических наук, доктор экономических наук, профессор кафедры финансового менеджмента, Российская таможенная академия, Люберцы, Россия +7 915 146 42 51, e-mail: nsns25@yandex.ru

Шишкина Светлана Ивановна– кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, (+7) 910 435 47 05, e-mail: shish-bmstu@mail.ru

PECULIARITIES OF ICING IN A FLOW WITH SUPERCOOLED DROPLETS AND ICE CRYSTALS

Amelyuhskin I.A., Druzhinin O.V., Kudrov M.A., Kuleshov P.S.

New results of aircraft icing are obtained. New mathematical models of physical phenomena are formulated. Original construction of adaptive wing was invented, developed and prototypes were built. New algorithm of aircrafts' surface with nanorelief are developed. Parametric studies of aircraft icing peculiarities were carried out.

Introduction

Modeling of the physical processes accompanying aircraft icing is of great interest both from the point of view of creating programs for reliable modeling and forecasting of ice formation areas, and from the point of view of solving one of the most important flight safety problems. An experimental study and modeling of the impact of supercooled drops on a relief surface is necessary to select the surface properties that provide protection against icing of aircraft, which are characterized by large values of Weber, capillarity and Stokes numbers, which describe the penetration of liquid into the pores of a hydrophobic coating depending on the flight speed and radius of the front wing edges. At the same time, when controlling the drift of the air flow and the transformation of the liquid film into separate drops, one should take into account the washing out of the air lubrication layer from the pores of the hydrophobic coating when the liquid moves through it. In this work, based on the developed model of the state of the air lubrication layer in the pores of a hydrophobic coating, the dimensionless values of the mass flow and the change in the sliding length of the liquid as it moves along the surface in the process of changing the amount of air in the pores of the coating are calculated.

In addition, modeling of the mechanisms of ice destruction in a flow and heat and mass transfer of ice crystals of ice with heated surfaces is far from being completed. In this work, a physical and mathematical model and a method for calculating the modes of interaction of ice crystals with a heated surface of a streamlined body are developed. The method is used to calculate the occurrence of stresses and destruction of ice on the wing under the action of aerodynamic and mechanical loads. The developed method and numerical algorithm for its implementation can be used in the calculation of icing for cases of a long time of ice build-up and in the calculation of the parameters of mechanical anti-icing systems.

In present paper, a passive method of anti-icing by applying a nanorelief to the protected surface is considered in order to make it superhydrophobic and ice-phobic [1, 2]. Hydrophobic coatings perform effectively under conditions of an approximate balance between the forces of inertia and the forces of surface tension of the liquid near the relief of the streamlined body [2], however, when the critical value of the surface density of the kinetic energy of the supercooled drop is exceeded, a negative effect arises associated with the penetration and solidification of the supercooled liquid in the pores of the relief. In other words, during the contact interaction of a supercooled drop with a relief surface, if the critical impact velocity is exceeded, the drop can be deformed, and its individual elements can move into the pores of the relief, followed by their freezing. In [1], based on the balance of surface tension forces and inertial forces, a necessary condition was formulated for the absence of droplet penetration into relief depressions. In the present work, a similar necessary condition is derived from the droplet fragmentation mechanism described in [3, 4].

Estimates of Geometric Parameters of an Ice-Phobic Coating

Let the radius of the initial round supercooled droplet be much larger than the spatial period of the relief: $R \gg \lambda$. Let us consider the tangential motion of a drop with a velocity across the crests of the relief. The relief will interact with the drop with a periodic force with a time period $T = \lambda/v_\tau$. This driving force will cause deformation waves propagating in the drop at the speed of sound c , the maximum amplification of which occurs when their frequency (the frequency of the driving force) coincides with the frequency of the first harmonic ($k = 1$) of the natural acoustic oscillations of the drop. Resonance condition: $v_\tau / \lambda \approx kc / 2R$. On the other hand, the same frequency will also be observed for capillary oscillations of the droplet shape, which is known for the principal tone of oscillations: $[2\sigma/(\rho\pi^2R^3)]^{1/2}$, where σ , ρ are the surface tension coefficient and the liquid density, respectively. As a result of such interaction with the relief surface, the drop may begin to break up into

separate fragments of radius r . In this case, according to [3, 4], the radius of the fragment and the radius of the initial drop can be related through the equality of the acoustic and capillary frequencies: $r \approx [(R/kc)^2(\sigma/\rho)]^{1/3}$. Taking into account the above expressions, we obtain the estimate $\lambda < 2\sigma/(\rho V_\tau^2)$, which is in good agreement with the formula from [1, 2], where, to take into account the influence of R , the Stokes number (Stk) is introduced, which makes it possible to distinguish the droplet velocity near the streamlined surface from the flow velocity. Nevertheless, for the water droplet radii $\sim 20 \mu\text{m}$ which typical in aviation applications and the streamlined surface's curvature radius $\sim 0.1 \text{ m}$, the estimates give $\text{Stk} \gg 1$, i.e. the differences between the velocities of the undisturbed flow $\sim 100 \text{ m/s}$, the impact of the drop, and its tangential projection are insignificant.

The choice of the number of the excited harmonic k is possible using another formula for the fragmentation part with a radius r which was obtained in [3, 4, 5] from the law of conservation of energy under the condition $r \ll R$: $r = 6^{1/2}\sigma V/W$, where $V = 4\pi R^3/3$ is the transformed volume, $W = \eta\rho Vv^2/2$ is the energy consumption for the increase in surface energy during the decay of the volume V into fragments of radius r , $\eta < 1$ is the efficiency of the transformation of the kinetic energy of the drop into the surface energy of the fragments during its transformation. Based on the above considerations, the expression for the number of the excited harmonic has the following form:

$$k = (2\sqrt{6})^{-3/2} \cdot R\rho\eta^{3/2}v^3 / (c\sigma).$$

Description of experiments on creating a nanorelief during laser ablation

In experiments [6] on laser ablation, the repetition frequency of laser pulses generated at the fundamental harmonic of a titanium-sapphire laser with a central wavelength of $\lambda_{em} = 790 \text{ nm}$, pulse duration $\tau = 130 \text{ fs}$, scanning speed 0.6 mm/s , laser spot diameter on the surface targets $l \sim 2.2 \text{ mm}$, and nickel (Ni) and iron (Fe) were used as the target material. The thickness of the metal layer of the Ni target in [6] is $h = 15 \mu\text{m}$, and for Fe $h \gg 10 \mu\text{m}$. The target is placed in a liquid – isopropyl alcohol. The length of frozen capillary waves (relief period) formed on the surface of targets after exposure to a laser, according to electron photographs, is $0.5\text{--}1 \mu\text{m}$ (Ni) and $1\text{--}1.5 \mu\text{m}$ (Fe). This experiment is well described by the formula for the spatial period, derived earlier in [5], which depends on the number of the excited harmonic k or the supplied laser radiation intensity I :

$$\lambda_H \sim \left(\frac{\sigma}{\rho} \sqrt{a_m \tau}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{8\pi s}{(2k-1)c}\right)^{1/2} \text{ or } \lambda_H \sim I^{-3/4} \cdot \tau^{-5/8}. \text{ Here } a_m \text{ is the thermal diffusivity of the metal, } s \text{ is the}$$

resonator scale.

Adaptive wing mechanics.

One of the promising areas for improving aircraft aerodynamic characteristics is the development and implementation of mechanical systems capable of adapting the shape of the wing profile to various flight modes, while maintaining the weight and strength parameters of the structure within the allowable limits for aircraft of practical configurations. Parametric studies of the aerodynamic features of the developed [1] adaptive wing with a variable curvature profile and with a smooth skin of constant area were carried out. At the same time, unlike many analogues, the movable covering ensures the smoothness and inextensibility of the structural elements, and a kind of mechanical system of rods and movable elements allows to place loads inside the wing. Life-size prototypes were created, mechanical studies and tests were carried out. In addition, the possibility of ice crushing from the wing surface [1] is considered when its shape and the radius of curvature of the covering change [2].

Adaptive wing with a variable curvature profile (Fig. 1) consists of a strength element 1, whose structure is truss, mechanical chains 2 are attached to this element (Fig. 1). In this case, a rib with a profile of variable curvature is formed by movable support-levers 3, which are attached to a mechanical chain 2, each adjacent is connected to each other by rods 4. At the same time, the nose and two adjacent supports-lever 5 in the bow of the rib are motionlessly connected to mechanical chain 2. Fig. 1 shows a typical mechanical chain consisting of a nose link 11, power links 12, a tail link 13 and a transmission 14. The covering 6 is a flexible, but not extensible, sheet body attached to ribs with a profile of variable curvature through the ends of the support arms 3. Ends skin 6 in the tail region of the wing can move freely relative to each other, but almost tightly adjacent to each other. To do this, on the tail link 13 of the mechanical chain 2 there are guides 7, along which the couplings 8 slide, to which the ends of the skin 6 are attached.

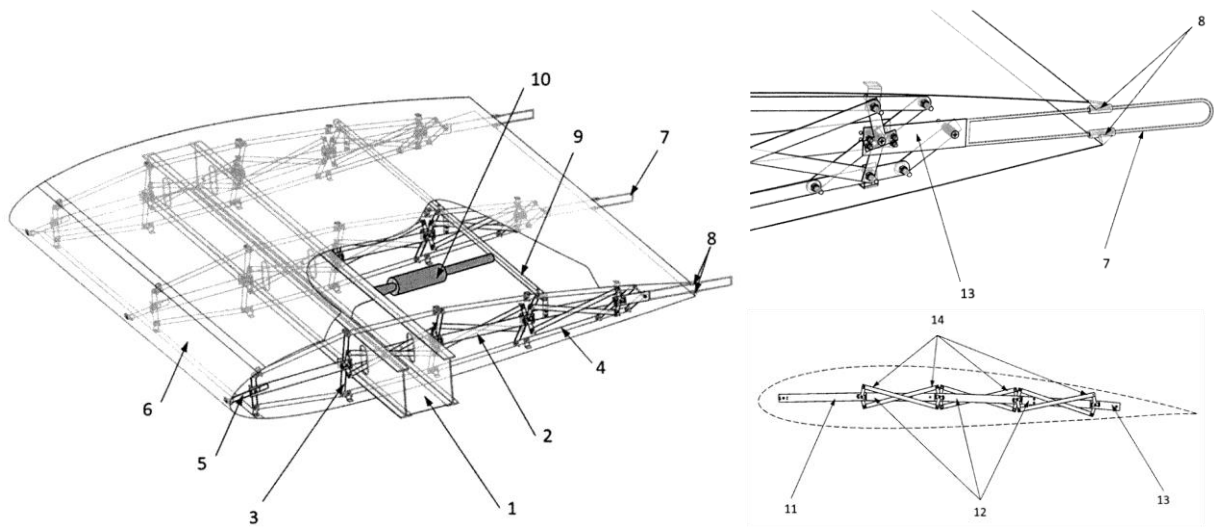


Fig. 1: Adaptive wing configuration: 1 – strength element, 2 – mechanical chains, 3 – support-level arm, 4 – rods, 5 – supports-lever, 6 – covering, 7– guide rod, 8 – sliding sleeves, 9 – synchronizer beam, 10 – drive, 11 – nose nose, 12 – power links, 13 – tail link, 14 – transmission

Support-levers 3 are attached to the links of the mechanical chain 11, 12, 13 in any quantity and in any place. But at the same time, they cannot be attached to its transmission 14. The number and type of power elements 1 depends solely on the nature of the loads on the wing in all its shape variations, the design features of a particular aircraft and on weight efficiency. Fuel tanks and large equipment located inside the wing are attached to the power elements by means of hinges, levers and sliding sleeves. For synchronous bending of all wing profiles, at least one power synchronizer beam 9 is used, which transmits and balances torques on all mechanical chains 2. In certain cases, the second spar can play its role. Drives 10, carrying out the bending of the wing, there may be at least one for each wing console. They are linear actuators that can make linear movements. They are located in a way as distribute their actions as steadily as possible on all mechanical circuits 2 and minimize the torques on the power elements 1 and synchronizer beams 9. Drives 10 are attached on the one hand to the power element 1, on the other - to the synchronizer beam 9 .

Conclusion

The analysis performed showed that the necessary criterion for the superhydrophobicity and ice-phobicity of the surface relief, which follows from the condition that the Laplace pressure of a drop exceeds its velocity head, can be obtained from the condition that the sizes of fragments of drop fragmentation, determined by the amplification of capillary disturbances in it at a frequency specified by the relief period, exceed the transverse dimensions relief depressions. However, this criterion turns out to be excessively stringent ($\lambda < 15 \text{ nm}$ at a droplet radius $R = 20 \text{ }\mu\text{m}$ and its velocity $\sim 100 \text{ m/s}$) and does not satisfy the necessary energy condition, i.e. the kinetic energy of the drop is not enough to increase its surface energy during fragmentation. Therefore, the criterion was corrected by refusing to specifying the frequency of capillary disturbances in the drop during its tangential flight over the surface relief, since the drop at the first interaction with the relief should break up into fragments. According to calculations for cylindrical bodies with a large blunt radius $R = 200 \text{ mm}$, the nanorelief period required to achieve ice-phobicity depends on the angular coordinate on the surface and can vary by an order of magnitude. With a constant relief period, it is necessary to choose its minimum value corresponding to the maximum intensity of laser radiation. By tuning the laser intensity during scanning during the manufacture of a nanostructured surface, it is possible to change the relief period depending on the angular coordinate, thereby achieving $\sim 60\%$ laser energy savings.

REFERENCE

1. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA, vol. 93, 1917.
2. Novatsky V. Theory of elasticity, M.: Mir, 1975. 872 p.
3. Amelyushkin I.A., Miller A.B., Stasenko A.L. // Vestnik MGOU: Physics-Mathematics Series, 2021. P. 54–63.
4. Amelyushkin I.A., Kudrov M.A., Morozov A.O., Stasenko A.L., Shcheglov A.S. // Proceedings of ISP RAS, V. 32, No 4, 2020. P. 235–244.
5. Kuleshov P.S., Combustion and explosion, V. 12, No 3, 2019. P.118.
6. Kuleshov P.S., Kobtsev V.D. // Physics of Combustion and Explosion, 56:5 2020. P. 80–90.
7. Amelyushkin I.A., Druzhinin O.V. Adaptive wing with variable curvature profile // Patent for invention 2777139 C.1, date of issue 08/01/2022, Application No. 2021119711 dated 07/06/2021.
8. Amelyushkin I.A. Similarity criteria and peculiarities of ice accretion on bodies in air flows which containing supercooled droplets // TsAGI Science Journal, 2023, No. 3. P. 22–41.

Information about authors

Amelyushkin Ivan Alexeevich – senior researcher, PhD in physics and mathematics, Central Aerohydrodynamic Institute (+79096241543)

E-mail Amelyushkin_Ivan@mail.com

Druzhinin Oleg Vladimirovich – engineer, Central Aerohydrodynamic Institute

E-mail Oleg_Druzhinin_88@mail.com

Kudrov Maxim Alexandrovich – director of Aeromechanics and Flight Engineering department, director of the laboratory, PhD in technical sciences, Moscow Institute of physics and technology

E-mail MKudrov@mail.ru

Kuleshov Pavel Sergeevich – senior researcher, PhD in physics and mathematics, Central Institute of Aviation Motor Development

E-mail KuleshovPS@yandex.ru

MACRO LEVEL BEHAVIOR OF SANDWICH PANELS WITH TETRAHEDRAL CORE UNDER BENDING LOADING

Antonova O.V., Ivanov M.V., Mikhailov A.A., Kuzmin V.A.

Sandwich panels with complex core structure can respond differently to tension and compression, that leads to the use a bi-modulus theory of elasticity to describe the behavior at the macro level. Effective physical and mechanical characteristics were determined, representing the body as a homogeneous anisotropic continuum. The results of the numerical analysis of sandwich panels in case of bending were performed using ANSYS software. The effective elastic characteristics analysis for the periodicity cell of a sandwich panel shows that, to describe the stress-strain state of a panel with a similar tetrahedral core at the macro level, in addition to the orthotropic behavior in the panel plane, different elastic behavior occurs under tension and compression.

To design structures with a complex core structure [1-3], traditional approaches to describing the stress-strain state are not always correct. In this case, we could use the approach of describing the deformed behavior at the macro level. For this, effective physical and mechanical characteristics [4] are determined, representing the body as a homogeneous anisotropic continuum.

The fig. 1 shows the design of a tetrahedral core. This type of sandwich panels is used in the building to decorate the architectural facades of buildings or other architectural structures [5]. Taking into account the ratio of the dimensions of the structural elements of the internal structure of the core and the external overall dimensions of the sandwich panel, the transfer to the macro level makes it possible to determine the deformed state of the building facade with lower requirements for computing resources. The analysis of effective elastic characteristics for the periodicity cell of a sandwich panel shows that, to describe the stress-strain state of a panel with a similar tetrahedral core at the macro-level, in addition to the orthotropic behavior in the panel plane, different elastic behavior occurs under tension and compression [6–8].

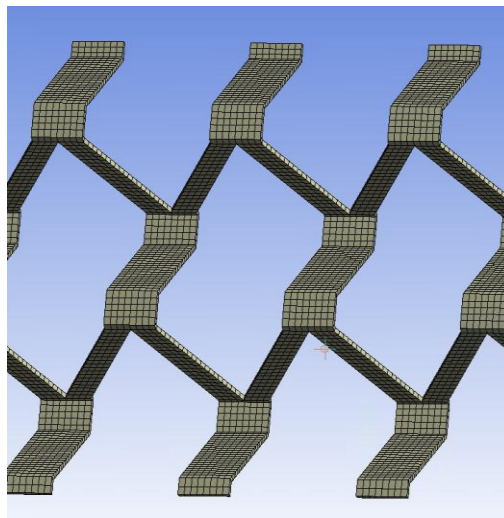


Fig. 1. Design of a tetrahedral core

The numerical solution of the problem of bi-modulus elasticity theory in a static formulation is accompanied by an iterative procedure for determining the boundaries of regions with different elastic behavior and updating mechanical properties. Depending on the type of the realized stress state at the considered point of the computational domain, the moduli of elasticity for tension or compression are used.

On fig. 2 shows the displacement of the sandwich panel under bending loading. The shell finite element model was developed and numerical analysis was performed using the ANSYS finite element analysis system [9].

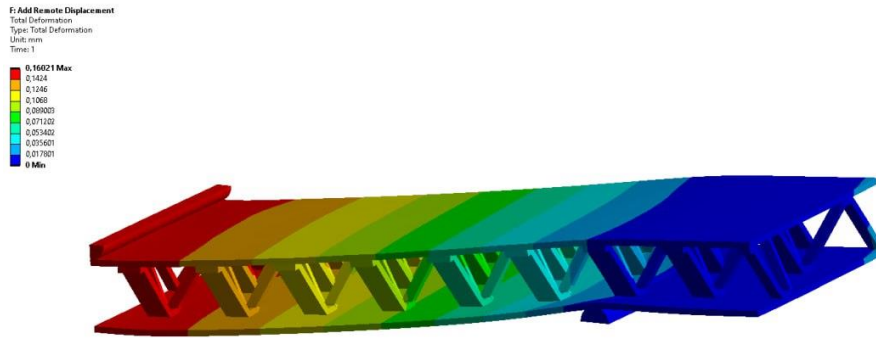


Fig. 2. Displacement of sandwich panel under bending loading

Since during the operation of the panel, the loads applied to the ends and causing compression and tension of the plate in the plane are insignificant, then, taking into account the method of constrain the panel, the main loading factors will be the loads that cause bending of the plate and transverse shear.

REFERENCE

1. Wadley Haydn N.G 2006 Multifunctional periodic cellular metals *Phil. Trans. R. Soc. A*.36431–68
2. Feng Y, Qiu H, Gao Y, Zheng H, Tan J. Creative design for sandwich structures: A review. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2020;17(3).
3. Sahu, S.K.; Sreekanth, P.S.R.; Reddy, S.V.K. A Brief Review on Advanced Sandwich Structures with Customized Design Core and Composite Face Sheet. *Polymers* 2022, 14, 4267.
4. A. I. Borovkov, Homogenization of unidirectional fibrous and granular elastic composites / A. I. Borovkov, D. Aleman Meza // Scientific and technical statements of the St. Petersburg State Polytechnic University. - 2009. - No. 3 (84). - S. 135-153.
5. A method for manufacturing a core with a truss volumetric structure and multilayer panels based on it (patent RU 2710177 C1, published on December 24, 2019, IPC B32B 7/00 (2006/01), B32B 15/00 (2006/01), B32B 3 /12 (2006/01), B21D 47/00 (2006/01)
6. M.V. Ivanov, A.A. Mikhailov, O.V. Antonova, V.A. Kuzmin Mathematical modeling of the behavior of sandwich panels with tetrahedral core using the principles of bi-modulus theory of elasticity // Tez. report conf. "XXIII Winter School on Continuum Mechanics", February 13-17, 2023, Perm
7. S.A. Ambartsumyan., A.A. Khachatryan Basic Equations of the Theory of Elasticity for Materials Differently Resistant to Tension and Compression // *Inzh. magazine Mechanics of a rigid body*. 1966. No. 2. S. 44–53
8. Tselodub, I. Yu. On the bi-modulus theory of elasticity / I. Yu. Tselodub // *Applied Mechanics and Technical Physics*. - 2008. - T. 49, No. 1 (287). - S. 157-164.
9. ANSYS, Inc. Release Notes, Release 17 – SAS IP, Inc.

Information about authors

Olga V. Antonova – Associate Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Physics and Mechanics Institute +79213078560 E-mail antonova_ov@spbstu.ru

Maksim V. Ivanov – Engineer, Engineering Center of Computer Engineering, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

Aleksandr A. Mikhailov – Head of department, Institute of Advanced Manufacturing Technologies Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

Valeriy A. Kuzmin – CEO, Project «Tetra», Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

WEAKENED BY AN INFINITE SYSTEM OF TRANSVERSE PERIODIC CRACKS PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE AS A FILTER OF ELECTROACOUSTIC WAVES

Avetisyan A.S., Khachatryan V.M.

The problem of propagation of an electroactive unidirectional elastic shear wave signal in an infinite piezoelectric waveguide weakened by a periodic system of transverse cracks is considered. Wave formation is investigated in cases of different anisotropies of the piezoelectric material, under different electromechanical conditions on the waveguide surfaces. In contrast to the case of a homogeneous waveguide, the presence of a system of periodic cracks leads to the formation of Floquet waves with a periodic structure. Different anisotropies and asymmetric electromechanical conditions on the waveguide surface lead to different localization of wave energy over the thickness of the waveguide, as well as to the presence of different zones of acceptable frequencies. A comparative analysis of the influence of the presence of a periodic system of transverse cracks on the frequency transmittance of the waveguide is carried out

Introduction

Propagation of an electroacoustic three-component wave in a homogeneous two-dimensional waveguide in the case of a vibrated crystallographic plane of a piezoelectric material and the distribution of wave characteristics over the thickness of the waveguide is a well-studied problem of the linear theory of electroacoustic waves [1], [2], [3]. The phase and group velocities of the formed electroacoustic three-component wave, as well as the possible localization of the wave energy of high-frequency (short) waves in this case, are determined by the anisotropy of the piezoelectric material and the electromechanical conditions on the surfaces of the piezoelectric waveguide [3]. Permissible frequencies of generated electroacoustic waves in homogeneous waveguides have a continuous spectrum. At the same time, different electromechanical conditions on the surfaces of a homogeneous waveguide lead, respectively, to different localizations along these surfaces.

It is known that the periodic transverse inhomogeneity of the waveguide leads to the propagation of waves of the Floquet -Bloch type, which are periodic in structure [4].

In the presented work, the introduced structural inhomogeneity of a piezoelectric waveguide, weakened by an infinite system of paired transverse cracks, is considered.

1. Problem Formulation.

Let us consider the propagation of a normal wave signal $F(x, y, t) = f(x, y) \cdot \exp(i\omega t)$, that induces in a homogeneous piezoelectric waveguide $\Omega(x, y) = \{|x| < \infty, y \in [0; h], |z| < \infty\}$ a three-component electroelastic wave $\{w(x, y, t); e_x(x, y, t); e_y(x, y, t)\}$, in which $e_x(x, y, t) = -(\partial\varphi(x, y)/\partial x)$, and $e_y(x, y, t) = (\partial\varphi(x, y)/\partial y)$.

The waveguide is referred to the orthogonal coordinate system $Oxyz$ (Fig. 1a). As a waveguide material, two different cases of anisotropy of a homogeneous piezoelectric material will be considered: a hexagonal symmetry **6mm** class piezoelectric and a cubic symmetry **43m** class piezoelectric.

In both cases of selected waveguide media, on a mechanically rigidly clamped and electrically shielded surface $y = 0$, the electromechanical conditions are written in the form

$$w(x, y)|_{y=0} = 0, \quad \varphi(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (1.1)$$

In the case of a hexagonal symmetry **6mm** class piezoelectric, on a mechanically free and electrically open surface $y = h$, the electromechanical conditions will be written as

$$[c_{44} (\partial w(x, y)/\partial y) + e_{15} (\partial\varphi(x, y)/\partial y)]_{y=h} = 0, \quad [e_{15} (\partial w(x, y)/\partial y) - \varepsilon_{11} (\partial\varphi(x, y)/\partial y)]_{y=h} = 0. \quad (1.2)$$

In the case of a cubic symmetry **43m** class piezoelectric, on a mechanically free and electrically open surface $y = h$, the electromechanical conditions will be written as

$$[c_{44} (\partial w(x, y)/\partial y) + e_{14} (\partial\varphi(x, y)/\partial x)]_{y=h} = 0, \quad [e_{14} (\partial w(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11} (\partial\varphi(x, y)/\partial y)]_{y=h} = 0 \quad (1.3)$$

The systems of quasi-static equations for a three-component electroelastic wave, will also be different:

- In case of hexagonal symmetry piezoelectric class **6mm** the system has the form

$$w''(y) - k^2 \alpha_i^2 \cdot w(y) = 0$$

$$\varphi''(y) - k^2 \cdot \varphi(y) = (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot [w''(y) - k^2 \cdot w(y)] \quad (1.4)$$

- In case of cubic symmetry piezoelectric class **43m** the system has the form

$$w''(y) - k^2 \alpha_i^2 \cdot w(y) + 2i(e_{14}/c_{44})k \cdot \varphi'(y) = 0$$

$$-2i(e_{14}/\varepsilon_{11})k \cdot w'(y) + \varphi''(y) - k^2 \cdot \varphi(y) = 0 \quad (1.5)$$

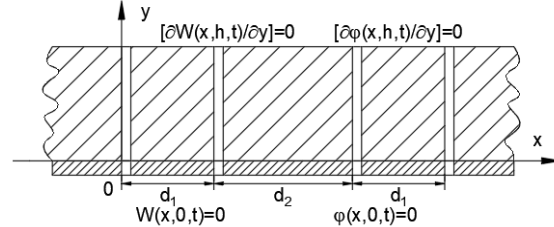
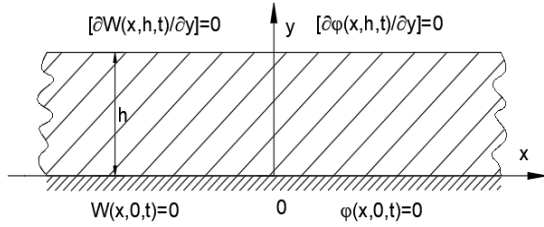


Fig. 1a Homogeneous piezoelectric waveguide
 $\Omega(x, y) = \{|x| < \infty, y \in [-h; h]\}$

Fig. 1b Inhomogeneous piezoelectric waveguide,
 with the unit periodic composite cell
 $\Omega_0(x, y) = \Omega_{01}(x, y) \cup \Omega_{02}(x, y)$

In equations (1.4), $\tilde{C}_i = \sqrt{c_{44}(1 + \chi^2)}/\rho$ is the velocity of the volumetric electroactive elastic shear wave, c_{44} is the shear rigidity, $\chi^2 = (e_{15})^2/(c_{44}\varepsilon_{11})$ is the electromechanical coupling coefficient, e_{15} is the piezoelectric modulus, ε_{11} is the relative dielectric constant and ρ is the density of the hexagonal symmetry, piezoelectric class **6mm** material.

In equations (1.5), $C_i = \sqrt{c_{44}/\rho}$ is the velocity of the volumetric non-electroactive elastic shear wave, c_{44} is the shear rigidity, e_{14} is the piezoelectric modulus, ε_{11} is the relative dielectric constant and ρ is the density of the cubic symmetry, piezoelectric class **43m** material.

In the systems of equations (1.4) and (1.5), the coefficient $k\alpha_i = \sqrt{k^2 - (\omega^2/\tilde{C}_i^2)}$ corresponds to the damping rate of slow wave amplitudes deep into a homogeneous waveguide.

When a homogeneous waveguide is weakened by a system of transverse periodic cracks, a periodically inhomogeneous waveguide is obtained, with a unit-periodic composite cell of width $d = d_1 + d_2$

$$\Omega_{01}(x, y) = \{0 < x < d_1, y \in [0; h]\}, \quad \Omega_{02}(x, y) = \{d_1 < x < d_2, y \in [0; h]\} \quad (1.6)$$

Due to the conjugation of the electric field on the free faces of the cracks, non-acoustic contact occurs between homogeneous interlayers $\Omega_{01}(x, y)$ and $\Omega_{02}(x, y)$. With different anisotropy of piezoelectrics, considering the material ratios of the media, the conjugation conditions of the electric field on the free faces of transverse cracks $x_{0n} = 0 + n \cdot (d_1 + d_2)$, $x_{1n} = d_1 + n \cdot (d_1 + d_2)$ for $n \in \mathbb{N}^+$, will also be written in different ways. Considering the periodicity of waveguide structures weakened by systems of transverse cracks, electromechanical conditions on the free faces of transverse cracks $x = x_{0n}$ and $x = x_{1n}$, for a three-component electroelastic wave will be written as:

- In the case of a piezoelectric class **6mm** of hexagonal symmetry it has a form

$$[c_{44} \partial w_{0n}(x, y)/\partial x + e_{15} \partial \varphi_{0n}(x, y)/\partial x]_{x=x_{jn}} = 0 \quad (1.7)$$

- In the case of a piezoelectric class **43m** of cubic symmetry it has a form

$$[c_{44} \partial w_{0n}(x, y)/\partial x + e_{14} \partial \varphi_{0n}(x, y)/\partial y]_{x=x_{jn}} = 0 \quad (1.8)$$

On the front surface $x = d_1$, the conditions for conjugation of the electric field can be written as

i) In case of hexagonal symmetry piezoelectric class **6mm**

$$[\varphi_{01}(x, y) - \varphi_{02}(x, y)]_{x=d_1} = 0 \quad (1.9)$$

$$[e_{15} (\partial w_{01}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11} (\partial \varphi_{01}(x, y)/\partial x)]_{x=d_1} = [e_{15} (\partial w_{02}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11} (\partial \varphi_{02}(x, y)/\partial x)]_{x=d_1} \quad (1.10)$$

ii) In the case of a piezoelectric class **43m** of cubic symmetry

$$[\varphi_{01}(x, y) - \varphi_{02}(x, y)]_{x=d_1} = 0 \quad (1.11)$$

$$[e_{14}(\partial w_{01}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11}(\partial \varphi_{01}(x, y)/\partial y)]_{x=d_1} = [e_{14}(\partial w_{02}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11}(\partial \varphi_{02}(x, y)/\partial y)]_{x=d_1} \quad (1.12)$$

According to the Floquet-Lyapunov theory, the periodicity of the longitudinal inhomogeneity of a composite waveguide, the conditions for conjugation of the electric field on the end surfaces $x=0$ and $x=d=d_1+d_2$ can be written as

i) In case of hexagonal symmetry piezoelectric class **6mm**

$$\varphi_{01}(x, y)|_{x=d} = \mu \cdot \varphi_{01}(x, y)|_{x=0} \quad (1.13)$$

$$[e_{15}(\partial w_{01}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11}(\partial \varphi_{01}(x, y)/\partial x)]_{x=d} = \mu \cdot [e_{15}(\partial w_{01}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11}(\partial \varphi_{01}(x, y)/\partial x)]_{x=0}$$

ii) In the case of a piezoelectric class **43m** of cubic symmetry

$$\varphi_{01}(x, y)|_{x=d} = \mu \cdot \varphi_{01}(x, y)|_{x=0} \quad (1.14)$$

$$[e_{14}(\partial w_{01}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11}(\partial \varphi_{01}(x, y)/\partial y)]_{x=d} = \mu \cdot [e_{14}(\partial w_{01}(x, y)/\partial x) - \varepsilon_{11}(\partial \varphi_{01}(x, y)/\partial y)]_{x=0}$$

2. Formation and propagation of a high-frequency three-component electroacoustic wave in homogeneous piezoelectric waveguides.

A high-frequency, electroacoustic three-component wave in a homogeneous piezoelectric waveguide made of a **6mm** class piezoelectric with hexagonal symmetry is represented as a solution to the mathematical boundary value problem (1.1), (1.2) and (1.4) considering the approximation $kh \gg 1$ (or $2\pi/k = \lambda \ll h$). The components of an electroacoustic wave in the short-wavelength approximation are written in the form

$$w(x, y, t) = A_w sh(\alpha ky) \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.1)$$

$$e_x(x, y, t) = (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot kA_w \cdot sh(\alpha ky) \cdot \exp(\pi/2 + ikx - i\omega t) \quad (2.2)$$

$$e_y(x, y, t) = (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot \alpha kA_w \cdot sh(\alpha ky) \cdot \exp(ikx) \cdot \exp(-i\omega t)$$

In the case of a piezoelectric class **6mm** of hexagonal symmetry, the phase velocity $V_{1\phi}(k_{1m}(\omega))$, for each form with wavelength $\lambda_m \leq h\sqrt{2}/(2m+1)$, will be defined from dispersion equation

$$\alpha_{1n}(\omega) \left[\alpha_{1n}(\omega) \cdot \frac{\tan[2\alpha_{1n}(\omega) \cdot k_{1n}(\omega)h]}{\tan[2k_{1n}(\omega)h]} - \chi_1^2 \right] = 0 \quad (2.3)$$

A high-frequency, electroacoustic three-component wave in a homogeneous piezoelectric waveguide made of a cubic symmetry **43m** class piezoelectric with hexagonal symmetry is represented as a solution to the mathematical boundary value problem (1.1), (1.3) and (1.5) considering the approximation $kh \gg 1$ (or $2\pi/k = \lambda \ll h$). The components of an electroacoustic wave in the short-wavelength approximation are written in the form

$$w(x, y, t) = \left[A_w \cdot \sin(k\lambda_1 y) - \frac{2i \cdot (e_{14}/c_{44}) \lambda_2}{\lambda_2^2 - \alpha^2} \cdot A_\phi \cdot \sin(k\lambda_2 y) \right] \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.4)$$

$$e_x(x, y, t) = \left[\frac{2 \cdot (e_{14}/\varepsilon_{11}) k \lambda_1}{\lambda_1^2 - 1} \cdot \sin(k\lambda_1 y) \cdot A_w + ik \cdot \sin(k\lambda_2 y) \cdot A_\phi \right] \cdot \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.5)$$

$$e_y(x, y, t) = \left[-\frac{2i \cdot (e_{14}/\varepsilon_{11}) k \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - 1} \cdot \sin(k\lambda_1 y) \cdot A_w + k \lambda_2 \cdot \sin(k\lambda_2 y) \cdot A_\phi \right] \cdot \exp[i(kx - \omega t)]$$

In the case of a piezoelectric class **43m** of cubic symmetry, the phase velocity of high-frequency waves, with a wavelength $\lambda_m \leq h\sqrt{2}/(2m+1)$ is determined from the dispersion equation

$$\frac{ctg(k\lambda_2 y) - (\lambda_2^2 - \alpha^2)/\lambda_2^2}{ctg(k\lambda_1 y) - 2\chi^2/(\lambda_1^2 - 1)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdot (\lambda_1^2 - 1) [1 - (\lambda_2^2 - \alpha^2)/2\chi^2]}{\lambda_2^2 \cdot [(\lambda_1^2 - 1) + 2\lambda_1^2]} \quad (2.6)$$

The change in the phase velocity depending on the wavelength of the wave signal is shown in Fig. 3b. In equation (2.6) and in solutions (2.4), (2.5), $\lambda_1(\omega)$ and $\lambda_2(\omega)$ these are solutions of the characteristic equation

$$\lambda^4(\omega) - (1 + \alpha^2(\omega) - \chi_1^2) \cdot \lambda^2(\omega) + \alpha^2(\omega) = 0 \quad (2.7)$$

In equations (2.6) and (2.7), the coefficient $\alpha = \sqrt{1 - (\omega^2 \rho / k^2 c_{44})}$ corresponds to the decay rate of slow wave amplitudes along the depth of a homogeneous waveguide.

From relations (2.1) to (2.7), it is obvious that in piezoelectric waveguides of different anisotropy, the changes in the amplitudes of elastic displacements along the thickness, as well as the wave propagation velocity, are significantly different.

3. Formation and propagation of a high-frequency three-component electroacoustic wave in piezoelectric waveguides weakened by a system of transverse cracks.

The patterns of propagation of electroelastic wave forms localized near the surfaces of waveguides are determined using the Floquet-Lyapunov theory, considering the periodic inhomogeneity of the waveguide structure.

Non-acoustic contact on the face surfaces of the periodic structure $x=0$, $x=d_1$ and $x=d=d_1+d_2$, simplifies the corresponding surface conditions.

This makes it possible to use the conditions of a mechanically free surface on the frontal surfaces of the composite interlayers (1.7) and (1.8). The fulfillment of the conditions of mechanically free surfaces allows the propagation of waves of length $\lambda_{1m}(\omega)$ and $\lambda_{2m}(\omega)$ along the transverse layers, respectively

$$\lambda_{1m}(\omega) = 2/md_1 = 2\pi d_1 \omega / C_{1r}, \quad k_1(\omega) = C_{1r} / (d_1 \omega), \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

$$\lambda_{2m}(\omega) = 2/md_2 = 2\pi d_2 \omega / C_{2r}, \quad k_2(\omega) = C_{2r} / (d_2 \omega), \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

The electric field conjugation conditions (1.9) and (1.10), together with the electric field conjugation conditions, taking into account the periodicity of the waveguide structure (1.11), lead to a dispersion equation for the propagation of a three-component electroelastic wave in a waveguide cut by cracks.

i) In case of hexagonal symmetry piezoelectric class **6mm**, the dispersion equation for frequency filtering of electroelastic waves is obtained from conditions (1.9), (1.10) and (1.13)

$$k(\omega) = \frac{1}{d} \cdot \text{Arccos} \left[\frac{k_1(\omega)}{2k_2(\omega) \cdot \delta(\omega)} + \frac{k_2(\omega) \cdot \delta(\omega)}{2k_1(\omega)} \right], \quad \text{where } \delta(\omega) = \left[4 \frac{\cos[k_2(\omega)d_2]}{\cos[k_1(\omega)d_1]} - 1 \right]. \quad (3.3)$$

ii) In the case of a piezoelectric class **43m** of cubic symmetry, the dispersion equation for frequency filtering of electroelastic waves is obtained from conditions (1.11), (1.12) and (1.14)

$$k(\omega) = \frac{1}{d} \cdot \text{Arccos} \left[\frac{k_1^2(\omega) - k_2^2(\omega)}{2k_1(\omega)k_2(\omega)} + \frac{2k_2(\omega) \cdot \cos[k_2(\omega)d_2]}{k_1(\omega) \cdot \cos[k_1(\omega)d_1]} \right] \quad (3.4)$$

The allowable frequency zones in a homogeneous piezoelectric waveguide of different anisotropy weakened by transverse cracks are shown in Fig. 2a and Fig. 2b.

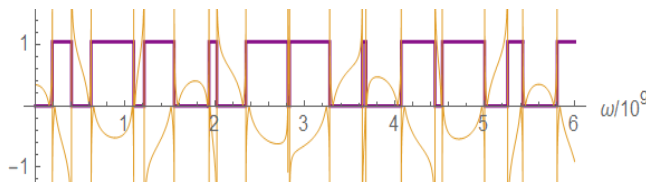


Fig. 2a. Allowable frequency zones in a homogeneous piezoelectric waveguide of hexagonal symmetry piezoelectric **6mm** class

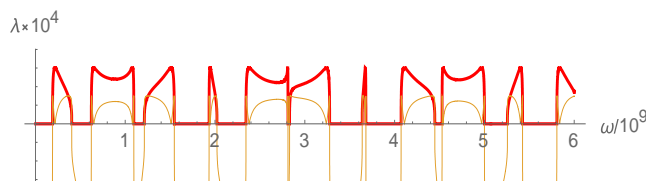


Fig. 2b. Allowable frequency zones in a homogeneous piezoelectric waveguide of cubic symmetry piezoelectric **43m** class

Conclusion.

A high-frequency signal of a three-component electroacoustic wave propagating in a homogeneous piezoelectric waveguide weakened by transverse cracks is converted into an inhomogeneously localized electroactive wave of antiplane deformation when an inhomogeneous periodic cell in the waveguide consists of interlayers of different widths. In the dependence of the widths of the transverse layers, zones of admissible frequencies of the propagating wave appear. Propagation of a convolution of electroactive waves of the Gulyaev-Bluestein type of different lengths is formed.

REFERENCES

1. Avetisyan Ara S., Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites, (2023), *Advanced Structured Materials*, vol.182, Springer, p.235, <https://doi.org/10.1007/978-3-031-26731-4>
2. Piliposyan G. T., Avetisyan A.S., Ghazaryan K. B., Shear wave propagation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium, (2012), *International Journal Wave Motion*, Elsevier publisher, v. 49, iss. 1, pp. 125-134, <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2011.08.001>,
3. Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Propagation of hybrid electroelastic waves in a transversally inhomogeneous periodic piezoelectric structure. *Proceed. of NAS of Armenia, Mechanics*, (2020), vol. 73, №1, pp. 6-22. <http://doi.org/10.33018/73.1.1>
4. Avetisyan Ara S., Khachatryan V. M. , and Mkrtychyan M. H., Formation of a hybrid of electroacoustic waves in piezoelectric layered composites, (2022) *J. Phys.: Conf. Ser.* 2231 012025, <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2231/1/012025>
5. Adams S, Craster R., Guenneau S., Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides, *Proceedings Royal Society London A* 464 (2008) p.2669-2692, <http://doi.org.10.1098/rspa.2008.0065>,
6. Piliposyan D.G., Ghazaryan K.B., Piliposyan G.T. and Avetisyan A.S., Wave Propagation in Periodic Piezoelectric Elastic Waveguides, (2012), *ASME Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, pp. 1-9., <https://doi.org/10.1115/SMASIS2012-7911>,

Information about authors

Ara S. Avetisyan– Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of the NAS of Armenia,

E: mail ara.serg.avetisyan@gmail.com .

Vazgen M. Khachatryan – Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of the NAS of Armenia,

E: mail - khachvaz@gmail.com

MECHANICAL PROPERTIES OF POLYMER COMPOSITE FILMS WITH ZnO NANOPARTICLES SYNTHESIZED IN LOW-TEMPERATURE PLASMA UNDER ULTRASONIC CAVITATION

Butusova O.A., Kolesnik S.A., Bulychev N.A.

In this study, polymer composite materials based on a copolymer of polyethylene and vinyl acetate and zinc oxide nanoparticles were obtained and examined by physicochemical and mechanical methods. Zinc oxide nanoparticles were synthesized in a plasma discharge under the action of ultrasonic cavitation. To create composites with a homogeneous distribution of nanoparticles, solution technology was used, and then melt compounding technology, and nanoparticles treated and non-treated with ultrasound were applied. The obtained samples of films of composite materials were studied by X-ray phase analysis, X-ray fluorescence analysis and scanning electron microscopy. It was shown that there are differences between the samples: in the case of nanoparticles without ultrasonic treatment, the particles are more strongly aggregated inside the composite material and their average size is visually larger than in the case of a sample with nanoparticles subjected to ultrasonic treatment. Finally, studies of the tensile strength and relative deformation of the samples were carried out. From the results of mechanical tests, it can be seen that, according to both studied parameters, there is an optimal concentration of ZnO nanoparticles. For tensile strength, the highest result was obtained at a concentration of nanoparticles of 3%, and for the relative elongation to rupture of the sample, the highest value was achieved at a concentration of nanoparticles of 2%.

Currently, composite materials based on various classes of polymers reinforced with nanosized fillers of various compositions and geometries (in the form of spheres, fibers, planar two-dimensional structures, etc.) are actively used in various fields of science and technology, representing a very competitive alternative to materials from metals and alloys. High specific mechanical characteristics make this class of materials extremely valuable when used as structural materials in industry (aerospace, automotive), as well as in a number of other areas [1-3].

For a significant number of materials, weak adhesion of the matrix material to the filler material leads to the inability of the bulk polymer compound to distribute the load over the reinforcing inclusions, and therefore prevents the implementation of high mechanical characteristics of the filled material. This is due to the fact that the degree of achievement of the strength characteristics of composite materials depends mainly on the nature and strength of the adhesive interaction between the material of the polymer matrix and reinforcing fillers [1]. The most advantageous mechanism from this point of view is the chemical interaction of the functional groups of the components (chemisorption), which ensures the maximum strength of the interfacial boundary, and in this case the composite material is a single continuous multicomponent system, and not a simple mechanical mixture of two or more incompatible components, as it occurs in the case of physical adsorption, that is, a purely adhesive interaction due to the forces of mechanical adhesion [2].

When developing methods, technologies and equipment for obtaining functional and structural composite materials, as well as functional elements from filled polymers, it is also necessary to ensure the physicochemical and mechanical characteristics of the materials obtained, which is determined both by the properties of the dispersed filler and by the interaction of the filler and the matrix [4].

Therefore, in the framework of this work, zinc oxide nanoparticles were synthesized in a plasma discharge under the action of ultrasonic cavitation, and samples of polymer composite materials filled with these nanoparticles were obtained and studied.

Zinc metal electrodes were used as starting materials for the synthesis of nanoparticles [5,6]. Synthesis was carried out in various liquid media - water, alcohols (ethanol, isopropanol). The nanometer size and high resistance of nanoparticles to aggregation made it possible to obtain relatively stable aqueous disperse systems (suspensions) of nanoparticles without the use of any stabilizing compounds.

At the next stage of the work, research has been aimed toward the introduction of zinc oxide nanoparticles synthesized in a plasma discharge into a polymer matrix to obtain polymer composite materials and study their physical and mechanical properties. At this stage, a copolymer of polyethylene (72 % wt.) and vinyl acetate (28 % wt.) was used as a matrix. Composite materials based on zinc oxide nanoparticles were obtained, using nanoparticles not treated with ultrasound and treated with ultrasound.

Identification of the phase composition of the obtained samples was carried out on a Bruker D8 Advance unit operating in reflection mode on Cu-K α radiation (40 kV, 40 mA, $\lambda=1.54056 \text{ \AA}$).

Qualitative determination of the metal in the obtained samples of materials by X-ray fluorescence analysis was carried out on the analyzer Olympus Vanta (Japan) in the GeoChem mode with a 3-beam mode (scanning time: 45 s on each beam). Morphology was studied by scanning electron microscopy on a Carl Zeiss Supra 40-30-87 instrument.

According to X-ray diffraction data, the sample contains at least two phases. A strongly broadened peak at $2\theta = 22^\circ$ corresponds to the phase of a complex polymer. Also, on the diffraction pattern there are peaks at 2θ values: 31.29° ; 34.68° and 36.50° corresponding to the zinc oxide phase (JCPDS # 36-1451, wurtzite structure). In a material sample obtained with ZnO nanoparticles after ultrasonic treatment, there is a slight decrease in the intensity of the peak corresponding to the polymer, as well as a slight decrease in the intensity of the peaks corresponding to the zinc oxide phase. This may indicate an increase of the interaction of the nanoparticle surface with the polymer when ultrasound is used, as well as a decrease in the size of the filler nanoparticles themselves.

X-ray fluorescence analysis also qualitatively confirmed the presence of zinc oxide in the film sample. In this case, the intensity of the peak increases in comparison to the sample obtained with nanoparticles without ultrasonic treatment. Scanning electron microscopy confirms that the zinc oxide nanoparticles are impregnated into the polymer film. In this case, there are differences between the samples: in the case of nanoparticles without ultrasonic treatment, the presence of large agglomerates of particles is observed, and the size of such agglomerates is much larger than in the case of a sample with nanoparticles subjected to ultrasonic treatment.

Films made of a composite material with different contents of zinc oxide nanoparticles were selected for mechanical tests. The concentration of nanoparticles has been varied in the range from 0.5 to 5% wt. relative to the weight of the sample. In this case, nanoparticles were used without sonication and after sonication. For comparison, control samples of the polymer film without nanoparticles were prepared and studied.

To reveal the effect of nanoparticles in the structure of the composite material, studies of the tensile strength and relative deformation of the samples were carried out. From the results of mechanical tests, it can be seen that, according to both studied parameters, there is an optimal concentration of ZnO nanoparticles. For tensile strength, the highest result was obtained at a concentration of nanoparticles of 3%, and for the relative elongation to rupture of the sample, the highest value was achieved at a concentration of nanoparticles of 2%. It should also be noted that in the case of using nanoparticles after ultrasonic treatment, the limiting values of tensile strength and relative deformation are slightly higher than for particles without sonication. This confirms the earlier conclusions about the effect of ultrasound on the strength of the interaction between the filler and the material of the organic matrix.

Thus, as a result of the studies carried out by the methods of physicochemical analysis, it was shown that the activation of the surface of particles using the methods of physical and physicochemical effects is an important factor that can significantly increase the efficiency of interaction between filler particles and the polymer matrix [6]. Among the physical methods, first of all, the effect of intensive ultrasound should be noted. The use of methods that would allow the synthesis of filler particles with an activated surface can give a great impulse to the fabrication of composite materials with improved physical and mechanical characteristics.

CONCLUSIONS

In the present work, composite materials based on a copolymer of polyethylene and vinyl acetate and zinc oxide nanoparticles were obtained, and nanoparticles with and without ultrasonic treatment were applied. The obtained samples of composite materials were studied by X-ray phase analysis, X-ray fluorescence analysis and scanning electron microscopy. It was shown that there are differences between the samples: in the case of nanoparticles without ultrasonic treatment, the particles are more strongly aggregated inside the composite material and their average size is visually larger than in the case of a sample with nanoparticles subjected to ultrasonic treatment. From the results of mechanical tests, it can be seen that, according to both studied parameters, there is an optimal concentration of ZnO nanoparticles. It should also be noted that in the case of using nanoparticles after ultrasonic treatment, the limiting values of tensile strength and relative deformation are slightly higher than for particles without sonication.

This work has been carried out with the financial support of Russian Science Foundation, project No. 23-19-00540.

REFERENCE

1. Sai Krishna Samudrala C., Krishna Sai Radhi P., Murthy B.S. Metal, ceramics and polymer nano-composites for various applications: A review. *Materials Today: Proceedings*. 2022, vol. 56 (3), pp. 1120-1128.
2. Nanda T., Singh K., Shelly D., Mehta R. Advancements in multi-scale filler reinforced epoxy nanocomposites for improved impact strength: A review. *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences*. 2021, vol. 46, pp. 281-329.
3. Pavlović V.B., Pavlović V.P. Polymer-ceramic nanocomposites and converging technologies. *Encyclopedia of Materials: Composites*. 2021, vol. 2, pp. 134-144.
4. Bulychev N.A., Kolesnik S.A. Reinforcement of Polymer Composite Materials by Titanium Dioxide Nanoparticles Synthesized in Plasma Discharge under Ultrasonic Cavitation. *IOP Conference Proceedings*, 2022, vol. 2231, article number 012012.
5. Bulychev N.A. Preparation of Stable Suspensions of ZnO Nanoparticles with Ultrasonically Assisted Low-Temperature Plasma. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2021, vol. 12, no. 3, pp. 91-97.
6. Bulychev N.A. Study of Interaction of Surface-Active Polymers with ZnO Nanoparticles Synthesized in Ultrasonically Assisted Plasma Discharge. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 55-65.

Information about authors

Butusova O.A. – junior researcher, Moscow Aviation Institute (National Research University), 125993, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, Russia. E-mail: gxtl@mail.ru

Kolesnik S.A. – senior researcher, Moscow Aviation Institute (National Research University), 125993, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, Russia. E-mail: ksa@mai.ru

Bulychev N.A. (corresponding author) – head of the department, Moscow Aviation Institute (National Research University), 125993, Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, Russia. Phone: +79161376586, E-mail: nbulychev@mail.ru

CAPILLARY AND GRAVITY SURFACE WAVES WITH ACCOMPANIED LIGAMENTS: ASYMPTOTIC THEORY AND DROP IMPACT EXPERIMENT

Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A.

Capillary, gravity, and capillary-gravity surface periodic flows in different fluid models are analytically asymptotically investigated using singular perturbations theory. Models of viscous and ideal liquids, homogeneous or uniformly stratified fluids are considered. It is shown that the periodic surface flow in the viscous fluid model contains, in addition to wave components, a fine structure formed by ligaments. Approximate expressions of the dispersion relations for all flow components in the models under consideration are obtained. The studied flow components are observed experimentally at all stages of the drop impact flow evolution.

1. Introduction. Usually, only the analysis of wave motion in the study of periodic flows along the free surface of the liquid is carried out. At the same time, fine structure of the fluid flows is ignored. In the drop impact flows, in addition to capillary-gravitational waves, at all stages of the evolution of the phenomenon various fine structures arise, which determine the transfer of matter and energy [1]. Attention to search complete solutions to the equations of motion was drawn in [2]. The wave components of the flow in ideal single-layer and double-layer stratified fluids were analyzed in detail in [3] – [4]. Surface and internal waves and the accompanying fine structure of flows in viscous liquids were studied in [5] – [6]. In this paper models of viscous and ideal, homogeneous or stratified liquids are considered. The change in the meaning of the dispersion relations during the transition to simpler models is shown. The results of an experiment on the observation of waves and the fine structure of the impact of a drop at different stages of the evolution of the phenomenon are discussed.

2. Mathematical formulation of the problem. We consider an unbounded viscous fluid with kinematic viscosity ν in a Cartesian coordinate system $Oxyz$. The gravity acceleration \mathbf{g} is directed vertically downwards against the direction of the axis Oz . Analyzed 2-D motion does not depend on the horizontal coordinate y . The axis Ox coincides with the equilibrium level of the liquid free surface $z=0$. The surface energy of a liquid is characterized by the surface tension coefficient σ , kinematic viscosity by coefficient ν . The free surface shape is determined by the deviation function from the equilibrium position $\zeta(x,t)$. With small variations in density $\tilde{\rho}$ relative to the reference ρ_{00} , the density profile is represented as:

$$\rho = \rho_{00} (r(z) + \tilde{\rho}(x, z, t)) \quad (2.1)$$

Here the function $r(z)$ defines the initial stratification. In this paper, the exponentially stratified fluid model is used $r(z) = \exp(-z/\Lambda)$. Stratification is characterized by the buoyancy scale Λ and frequency $N = \sqrt{g/\Lambda}$. The problem is considered in a simplification, which does not specify the nature of the fluid stratification. In this case, the state equation is replaced by the expression for density (2.1). The basic equations of motion include the Navier-Stokes and the continuity equations:

$$z < \zeta : \begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \rho \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Here $\mathbf{u} = (u, w)$ is the fluid velocity, and the pressure P is a sum of atmospheric P_0 , hydrostatic and periodic \tilde{P} pressure:

$$P = P_0 + \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}(x, z, t) \quad (2.3)$$

Problem (2.1) – (2.3) is supplemented by standard boundary conditions on the liquid free surface:

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_t (z - \zeta) + \mathbf{u} \cdot \nabla (z - \zeta) = 0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0 \\ P - P_0 - \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} - 2\rho_{00} (r(z) + \tilde{\rho}) \nu \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z-\zeta)}{|\nabla(z-\zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1+(\partial_x \zeta)^2}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{e}_x + \partial_x \zeta \mathbf{e}_z}{\sqrt{1+(\partial_x \zeta)^2}}$$

Here \mathbf{n} and $\boldsymbol{\tau}$ are vectors of the external normal and tangent to the free surface, respectively. The problem is solved by the small parameter decomposition method using the theory of singularly perturbations [5].

3. First order problem. In the Boussinesq approximation, the fluid is considered incompressible and a current function ψ can be introduced, the spatial derivatives of which determine the components of the velocity vector:

$$u = \partial_z \psi, \quad w = -\partial_x \psi \quad (3.1)$$

With the made assumptions and for infinitesimal waves in a linear approximation, the mathematical formulation of the problem will be written as follows:

$$z < 0: \begin{cases} \rho_{00} g \partial_x \zeta + \rho_{00} g \int_z^\zeta \partial_x \tilde{\rho}(x, \xi, t) d\xi + \rho_{00} \partial_{tz} \psi - \rho_{00} \nu \partial_z \Delta \psi + \partial_x \tilde{P} = 0 \\ -\rho_{00} \partial_{tx} \psi + \rho_{00} \nu \partial_x \Delta \psi + \partial_z \tilde{P} = 0 \\ \partial_t \tilde{\rho} + \frac{\exp(-z/\Lambda)}{\Lambda} \partial_x \psi = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$z = 0: \begin{cases} \tilde{P} + 2\rho \nu \partial_{zx} \psi + \sigma \partial_{xx} \zeta = 0 \\ \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0 \\ \partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

For surface periodic perturbations with frequency $\omega > 0$ the solution is sought in the form:

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \zeta \\ \tilde{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_m \exp(k_z z) \\ A_m \\ P_m \exp(k_z z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x - i\omega t) + C.C. \quad (3.4)$$

Here the symbol $C.C.$ denotes complex conjugate terms, and the amplitudes of the corresponding quantities are denoted by symbols Y_m, A_m, P_m . The symbols $k_{x,z}$ define the components of a complexly defined wave vector $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2 = (k_x, k_z)$. From (3.2) we obtain the dispersion relations connecting the components of the wave vector:

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega) - N^2 k_x^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) = 0 \quad (3.5)$$

Expression (3.5) belongs to the class of singularly perturbed equations. This can be seen if we consider its dimensionless appearance. Let's choose as the dimensionalization parameters the scales that are determined by the problem. The time scale is the inverse frequency of buoyancy $\tau_b = N^{-1}$. The spatial scale are a viscous wave scale $\delta_N^v = (\nu g)^{1/3}/N$ and viscous length $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2/g}$. With this choice of a dimensionalization parameters, a parameter $\varepsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N\nu^{1/3}/g^{2/3}$ is naturally formed.

For most fluids this parameter takes small values $\varepsilon \ll 1$. And the expression (3.5) connecting the dimensionless components of the wave vector $k_{*,x,z}$ and the frequency ω_* is represented by:

$$i\varepsilon(k_{*,x}^2 - k_{*,z}^2)^2 \omega_* + (k_{*,x}^2 - k_{*,z}^2) \omega_*^2 - k_{*,x}^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) = 0 \quad (3.6)$$

Equation (3.6) has four roots. Two solutions are found using regular decomposition. Such solutions $k_{*,z}$ are regular or wave solutions. They describe the wave component of the flow. The other two ones are found using singular value decomposition. Such solutions are singular or ligament solutions and introduce a reassignment for such roots $k_{*,*}$. Singular solutions describe the behavior of the fine structure of the fluid flow. Ligaments appear in the form of thin highly gradient streams accompanying surface waves. The solution of equation (3.6) is given in [5].

The boundary conditions (3.3) define the dispersion equation, which in dimensional form is:

$$\begin{aligned} & (k_x^2 + k_z^2) \left(k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega v k_l (3k_x^2 - k_l^2) \right) - \\ & - (k_x^2 + k_l^2) \left(k_z \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega v k_z (3k_x^2 - k_z^2) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

The symbol $\gamma = \sigma/\rho_{00}$ indicates the surface tension coefficient of the liquid normalized to the equilibrium density value. In dimensionless form, the dispersion relation (3.7) is rewritten as follows:

$$\begin{aligned} & (k_{*l}^2 + k_{*x}^2) \left(\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*z} (k_{*z}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2 - \varepsilon k_{*z} \omega_*^2 \right) - \\ & - (k_{*z}^2 + k_{*x}^2) \left(\delta^2 \varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{*l} (k_{*l}^2 - 3k_{*x}^2) + k_{*x}^2 - \varepsilon k_{*l} \omega_*^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

The symbol $\delta = \delta_g^\gamma / \delta_N^v = \sqrt{N\gamma/vg}$ denotes a dimensionless parameter that characterizes the ratio of the proper parameters of the problem: the capillary length $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}$ and the Stokes microscale $\delta_N^v = \sqrt{\nu/N}$. The parameter δ is not necessarily small and takes values of the order $\delta \sim 1$ for a wide class of liquids. By substituting approximate values and leaving only the main terms, we obtain an approximate dispersion relation [5]. The amount of roots of equation corresponds to the order of the system of initial equations. Due to the cumbersomeness of expressions, non-trivial solutions are not given in this paper.

4. Reduced models. The density is assumed to be a constant in a model of a homogeneous viscous liquid $\rho \equiv \rho_{00} = \text{const}$. The equations of motion are simplified. However, at the same time the fluid substance disappears from consideration. The bulk density characterizing the medium problem parameters characterizing stratification are disappeared from the equations of motion. This leads to a decrease in the number of parameters that determine the characteristic scales. The dispersion relation (3.6) is simplified:

$$(k_x^2 - k_z^2) (i\nu k_x^2 - i\nu k_z^2 + \omega) = 0 \quad (3.9)$$

Equation (4.2) also has four roots. Regular wave solutions are found using regular decomposition, and singular ligament solutions are found using singular decomposition:

$$k_z = \pm k_x, \quad k_l = \pm \sqrt{k_x^2 - i \frac{\omega}{\nu}} \quad (3.10)$$

Taking into account (3.10), the dispersion relation (3.5) simplifies:

$$k_x \left[2k_x (k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega v k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2) (\omega^2 - gk_x - \gamma k_x^3 + 2i\omega v k_x^2) \right] = 0 \quad (3.11)$$

In the model of a viscous homogeneous liquid, both wave and ligament solutions are present, but some of the proper parameters of the problem that determine the nature of the fluid flow disappear.

In the model of an ideal liquid, ligament solutions degenerate. In the case of an exponentially stratified fluid, the dispersion relations have a form:

$$k_z^2 = k_x^2 (1 - N_\omega^2) \exp(-z/\Lambda), \quad N_\omega = N/\omega, \quad \gamma k_x^3 + gk_x - \omega^2 \sqrt{1 - N_\omega^2} = 0 \quad (3.12)$$

In a homogeneous ideal fluid, the dispersion equations are reduced even more:

$$k_z^2 = k_x^2, \quad \gamma k_x^3 + gk_x - \omega^2 = 0 \quad (3.13)$$

The relations (3.9) – (3.13) can be obtained from (3.5), (3.9) using the corresponding limit transitions. Reducing the order of the system of equations leads to the loss of part of the solutions.

5. Ligaments and waves in drop impact experiment.

In drop impact experiment the capillary waves, supplemented by a fine internal flows are observed in many stage of pattern evolution: at an early stage around the crown, on the walls of the crown and cavity (Fig. 1a), in the trough around the sinking splash (Fig. 1b) and on the walls of the secondary cavity formed after the splash subsided. Capillary waves play an important role in the distribution of the momentum of a drop over the surface of a liquid. They promote the formation of a gas bubbles cloud when a rough wavy surface is covered by fast internal flows. Waves produce the distortion of the shape of primary and secondary cavities, which also contribute to the formation and detachment of

gas bubbles of complex shape. The gas cavities that break away with the formation of a bridge emit acoustic signals that are common in natural conditions (“rain noise”) and are actively studied experimentally and theoretically.

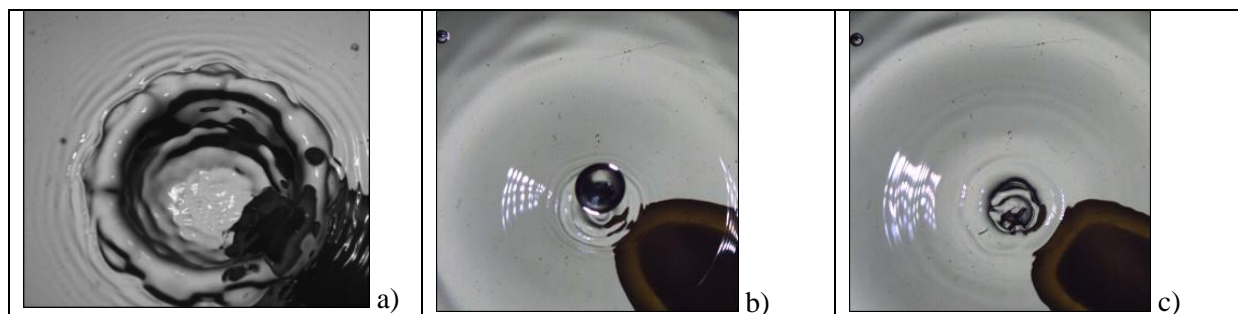


Figure 1. Different shapes of circular capillary waves in a drop impact flow

6. Conclusions. The problem parameters and the spatial and temporal scales of the flow components formulate requirements for the accuracy and resolution of the experiment. Considering simple fluid models, leads to the fact that some of the solutions that determine the processes occurring in fluid flows are lost.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-19-00598-P "Hydrodynamics and energetics of drops and droplet jets: formation, motion, break-up, interaction with the contact surface" <https://rscf.ru/en/project/19-19-00598/>).

REFERENCE

1. Chashechkin Yu.D. Packets of capillary and acoustic waves of drop impact. Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences, No. 1 (94), pp. 73–92, 2021 [in Russian]
2. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows. Axioms, vol. 10, p. 286, 2021
3. Ochirov A.A., Chashechkin Y.D. Two-Dimensional Periodic Waves in an Inviscid Continuously Stratified Fluid. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, vol. 58, No. 5, pp. 450–458, 2022
4. Chashechkin Y., Ochirov A., Lapshina K. Y. Surface Waves Along the Interface of Stably Stratified Liquids. Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics., vol. 23, No 6, 2022 [in Russian]
5. Chashechkin Y.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field. Axioms, vol. 11, No 8, p. 402, 2022.
6. Chashechkin, Y.D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation. Mathematics, vol. 9. No. 586, 2021.

Information about authors

Chashechkin Yuli Dmitrievich – D.Sc., Professor, Head of Laboratory of Fluid Mechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

Phone: 8-495-434-01-92

e-mail: yulidch@gmail.com

Ochirov Artem Alexandrovich – Ph.D. researcher of Laboratory of Fluid Mechanics Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

Phone: 8-920-119-30-80; 8-901-275-00-99

E-mail otchirov@mail.ru

ASYMPTOTICS OF LONG STANDING WAVES IN ONE-DIMENSIONAL BASINS WITH SHALLOW COASTS: THEORY AND EXPERIMENT

Dobrokhotov S.Yu., Kalinichenko V.A., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E.

We construct time-periodic asymptotic solutions of the one-dimensional system of nonlinear shallow water equations in a basin of variable depth with two shallow coasts (which means that the depth function vanishes at the points defining the coast) or with one shallow coast and a vertical wall and compare them with experimental results.

The nonlinear shallow water equations describe long nonbreaking waves of various nature, including waves in bounded basins. In the case of elongated basins, one can restrict oneself to a spatially one-dimensional system, which in the simplest case has the form

$$\eta_t + ((D(x) + \eta)u)_x = 0, \quad u_t + g\eta_x + uu_x = 0.$$

Here the unknowns are the free surface elevation η and the horizontal flow velocity component u , g is the free fall acceleration, and the function $D(x)$ describes the basin depth. We assume that $D(x)$ is a smooth function. In the presence of a sloping beach, the function $D(x)$ vanishes at some points $x = a$ and $x = b$, which specify the basin boundary in the absence of perturbations; the solutions describe waves inside the basin at the points where $D(x) > 0$ and the run-up of waves on the coast where $D(x) < 0$. The system is considered on the variable interval $\Omega_t = (a(t), b(t))$ determined by the relations

$$\eta(a(t), t) + D(a(t)) = 0, \quad \eta(b(t), t) + D(b(t)) = 0.$$

The shallow water equations provide a good model of phenomena such as tsunami and seiches, and the one-dimensional system can be used to describe waves in elongated basins such as lake Baikal. Time-periodic solutions describe standing waves like the well-known Faraday waves in basins with vertical walls and are particularly suitable for the approximate description of seiches in elongated basins. The construction of such solutions consists of two stages. First, time-harmonic exact and asymptotic solutions of the linearized system generated by the eigenfunctions of the operator $\frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx}$ are determined, and then, using a recently developed approach based on the simplification and modification of the Carrier--Greenspan transformation, solutions of the nonlinear equations are reconstructed in parametric form. The resulting asymptotic solutions are compared with experimental results based on the parametric resonance excitation of waves in a bench experiment. The results are published in [1].

This work was financially supported by the Russian Science Foundation, project no. 21-11-00341, <https://rscf.ru/en/project/21-11-00341/>

REFERENCES

1. Dobrokhotov S.Yu., Kalinichenko V.A., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E. Asymptotics of long standing waves in one-dimensional basins with shallow coasts: theory and experiment. *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 87, no. 2, 2023, pp. 157–175.

Information about authors

Dobrokhotov S.Yu. – Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
E-mail s.dobrokhotov@gmail.com

Kalinichenko V.A. – Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
E-mail yakalin@mail.ru

Minenkov D.S. – Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
E-mail minenkov.ds@gmail.com

Nazaikinskii V.E. – Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
E-mail nazaikinskii@yandex.ru

SHEAR SURFACE WAVE IN HOMOGENEOUS SEMI-SPACE WITH PERIODIC INTERFACES OF IMPERFECT ELASTIC CONTACT

Ghazaryan K., Ghazaryan R., Terzian S.

The shear elastic surface wave existence is investigated in a semi-infinite media with periodically oriented stack of interfaces of imperfect bonded contact. The transfer matrix method in conjunction with Bloch-Floquet's approach is extended to study the problem of the surface wave existence. It is shown that this periodic structure support the surface wave.

Introduction

The elastic surface waves are waves travelling along the interface of elastic media with the energy localized in a band of a width of the order of several wavelengths and decaying from the interface. The classic results concerning the shear surface wave propagation were published in [1-4]. The numerous results devoted to surface shear wave propagation in piezoelectric composite media are presented in [5]. The surface waves in an elastic bi-material periodic semi-space are studied in [6, 7]. A model of an imperfectly bonded interface between two elastic media is proposed in [8] where the displacement discontinuity (slip) is taken to be linearly related to the stress traction which is continuous across the interface. The surface shear waves in stratified media, semi space separated by layer with imperfectly bonded slip interface, are considered in [9].

Statement of the problem

In Cartesian coordinate system (x, y, z) we consider the shear wave propagation in elastic semi-space $(x \in (0, \infty), |y| < \infty, |z| < \infty)$ with periodic interfaces of imperfect bonded contact.

The anti- plane equations of motion and material relations are given by

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}; \quad \sigma_{xz} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial x}; \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial U_z}{\partial y} \quad (1)$$

Here U_z is the elastic displacement, σ_{xz}, σ_{yz} are the shear stresses, ρ is the mass density and μ is the shear elastic modulus, respectively.

The interfaces of imperfect elastic bonded contact are located parallel to semi – space surface $x = 0$ at $x = a + d(n - 1), n = 1, 2, \dots, \infty, \quad a < d,$

The model of the imperfect “slip” interface will be used [8,9].

The semi-space surface is traction free at $x = 0$

$$\sigma_{xz} = 0 \quad (2)$$

We consider harmonic wave travelling along the y direction, $U_z(x, y, t) = U(x) \exp[i(py - \omega t)]$, where ω is the wave angular frequency, p is the wave number.

Introducing the column vectors $\mathbf{U}(x) = \left(U(x), \mu \frac{dU(x)}{dx} \right)^T$, the solutions of (1) in the bands of the periodic structure unit cell $x \in ((n-1)d, nd)$ can be cast as

$$\mathbf{U}_n(x) = \mathbf{F}(x) \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = (C_1, C_2)^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{pmatrix} \exp(ix), & \exp(-ix) \\ i\mu r \exp(ix), & -i\mu r \exp(-ix) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{In (3, 4) } C_1, C_2 \text{ are constants, } r = \sqrt{\rho\omega^2/\mu - p^2}, \quad (5)$$

Solutions, matrix procedure and Floquet approach

Based on the procedure of transfer matrix approach [10] considering any two points x_1, x_2 in the regions of the sub-sell $x \in ((n-1)d, (n-1)d+a)$ or, $x \in ((n-1)d+a, nd)$ the following link between $\mathbf{U}_n(x_2)$ and $\mathbf{U}_n(x_1)$ can be obtained

$$\mathbf{U}_n(x_2) = \mathbf{T}(x_2 - x_1) \mathbf{U}_n(x_1), \quad (6)$$

where

$$\mathbf{T}(x_2 - x_1) = \mathbf{F}(x_2) \mathbf{F}^{-1}(x_1)$$

$$\mathbf{T}(x_2 - x_1) = \begin{pmatrix} \cos(r(x_2 - x_1)), & (\mu r)^{-1} \sin(r(x_2 - x_1)) \\ -\mu r \exp(r(x_2 - x_1)), & \cos(r(x_2 - x_1)) \end{pmatrix} \quad (7)$$

From (6, 7) it follows that

$$\mathbf{U}_n((n-1)d+a) = \mathbf{T}(a) \mathbf{U}_n((n-1)d) \quad (8)$$

$$\mathbf{U}_n(nd) = \mathbf{T}(d-a) \mathbf{U}_n((n-1)d+a)$$

$$\mathbf{T}(a) = \begin{pmatrix} \cos(ra), & (\mu r)^{-1} \sin(ra) \\ -\mu r \sin(ra), & \cos(ra) \end{pmatrix}; \quad (9)$$

$$\mathbf{T}(d-a) = \begin{pmatrix} \cos(r(d-a)), & (\mu r)^{-1} \sin(r(d-a)) \\ -\mu r \sin(r(d-a)), & \cos(r(d-a)) \end{pmatrix}$$

On the imperfect interfaces the following slip contact conditions are valid [8, 9]

$$\sigma^+(a+d(n-1)) = \sigma^-(a+d(n-1)) \quad (10)$$

$$U^+(a+d(n-1)) - U^-(a+d(n-1)) = s\sigma^+(a+d(n-1))$$

where $\sigma(x) = \mu \frac{dU(x)}{dx}$, s is the slip coefficient.

In matrix form these contact conditions can be written as

$$\mathbf{U}^+((n-1)d+a) = \mathbf{S} \mathbf{U}^-((n-1)d+a) \quad (11)$$

$$\text{where } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Taking into account (8, 9, 11) we can obtain the following relations

$$\mathbf{U}_n(nd) = \mathbf{M} \mathbf{U}_n((n-1)d) \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(d-a) \mathbf{S} \mathbf{T}(a)$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos(q) - \theta q \sin(\beta q) \cos(q - \beta q) & \frac{d}{2\mu q} (\theta q (\cos(q - 2\beta q) + \cos(q) + 2\sin(q))) \\ \frac{\mu q}{d} (\theta q \sin(\beta q) \sin(q - \beta q) - \sin(q)) & \cos(q) - \theta q \sin(q - \beta q) \cos(\beta q) \end{pmatrix} \quad (13)$$

In (13) $q = rd = \sqrt{\Omega^2 - \kappa^2}$, $\beta = a/d$, $\Omega = \omega d \sqrt{\rho/\mu}$ is the dimensionless frequency, $\kappa = pd$ is the dimensionless wave number, $\theta = s\mu/d$ is the dimensionless slip coefficient.

Analysis of the surface wave's existence will be carry out in the framework of the Floquet theory [10]. The existence of a surface wave can be explained as follows: in an infinite periodic medium there are regions of "forbidden" frequencies ω , for which Bloch-Floquet number k is complex and where exist the inadmissible exponentially damped solutions. If the periodic medium is a semi-infinite then, as it will be stated later, exponentially damped solutions can be legitimate solutions.

Using formality of the Floquet theory [10] we have

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n(nd) &= \lambda \mathbf{U}_{n-1}((n-1)d), & \mathbf{U}_{n-1}((n-1)d) &= \lambda \mathbf{U}_{n-1}((n-2)d) \\ \mathbf{U}_n(nd) &= \lambda^n \mathbf{U}_1(0) \end{aligned} \quad (14)$$

where $\lambda = \exp(ikd)$, k is the Bloch-Floquet number.

In the case of the real $|\lambda| < 1$, (complex k) according to (14) we have the exponentially damped solution corresponding to surface waves.

Taking into account (12) the following matrix equation can be obtained

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{U}((n-1)d) = 0 \quad (15)$$

where \mathbf{I} is the identity matrix.

Using this equation for the $n=1$ unit cell, which top surface is traction free, we come to the matrix equation

$$\begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

From the non-trivial solutions of (16) $U_1(0) \neq 0$ one can find the following two equations

$$m_{11} - \lambda = 0, \quad m_{21} = 0; \quad (17)$$

The equation

$$m_{21}(\Omega, \kappa) = 0 \quad (18)$$

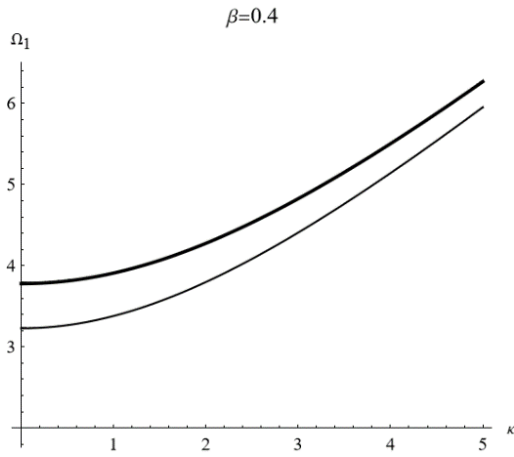
for a given wave number κ defines the countable set solutions of $\Omega_{j_0}(\kappa)$, $j = 1, 2, \dots$ determining the surface wave frequencies.

Relation

$$\lambda(\kappa, \beta, \theta) = m_{11}(\Omega_{j_0}(\kappa), \beta, \theta) \quad (19)$$

determines the damping amplitude of the surface wave

Discussion and numerical results



On Fig.1 the first dispersion curves $\Omega_1(\kappa)$, solutions of the equation (18), are presented in the case of $\beta = 0.4$. The thin curve corresponds to $\theta = 0.05$, the thick curve to $\theta = 0.4$.

In Fig.2 the damping amplitudes $\lambda(\beta, \theta, \kappa)$ versus $\beta = a/d$ are shown for different three values $\kappa = 1, \kappa = 3, \kappa = 5$ of wave number. All plots are calculated in the range of the first dispersion curve according to minimal frequencies $\Omega_1(\kappa)$ at

$\theta = 0.05, \theta = 0.4$.

Fig.1 Dispersion curves $\Omega_1(\kappa)$

The parameter $\beta = a/d \leq 1$ determines the distance from the first imperfect interface to semi-space surface. From Fig.2 it follows that even in the case of the very small slip coefficient $\theta = 0.05$, there exist the surface wave with minimal amplitude equal to $\lambda(0.3, 0.05, 3) = 0.73$. For slip parameter $\theta = 0.4$ the stronger localisation of surface wave occur with minimal damping amplitude equal to $\lambda(0.6, 0.4, 1) = 0.27$. As it follows from Fig.2 the localisation of the wave occurs not for all values of parameter β .

The positive $\lambda(\beta, \theta, \kappa) < 1$ corresponds to the wave numbers $k = ik_0 + 2\pi m, k_0 > 0, m = 0, 1, 2, \dots$, the negative $\lambda(\beta, \theta, \kappa) > -1$ corresponds to the wave numbers $k = ik_0 + \pi(2m + 1), k_0 > 0, m = 0, 1, 2$.

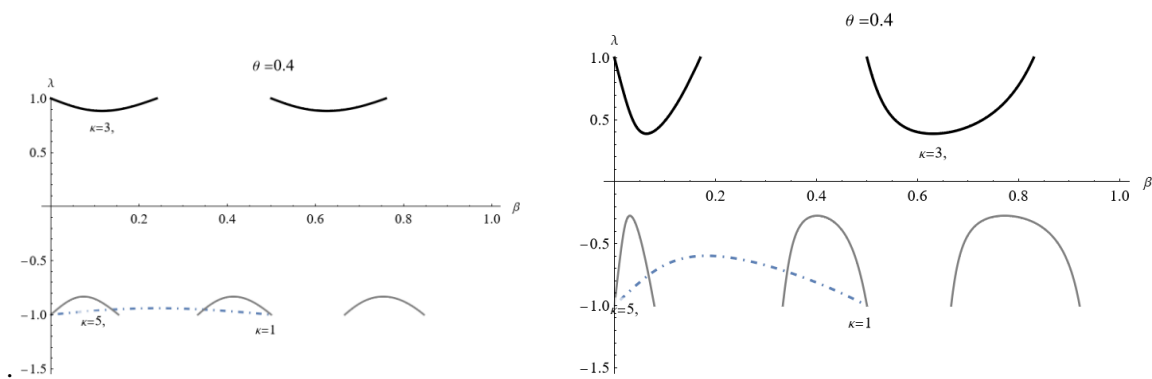


Fig.2. Plot of the damping coefficients, black curves correspond to $\kappa = 3$, grey curves to $\kappa = 5$, dashed curves to $\kappa = 1$.

Conclusions

Based on the transfer matrix method in conjunction with the Bloch-Floquet's approach the problem of the existence of the shear surface wave is studied in a semi-infinite media with periodically oriented stack of interfaces of imperfect elastic bonded contact. It is shown that

this periodic structure supports the surface wave. The amplitude of surface wave depend both of split coefficient and coefficient characterising the distance from first imperfect interface to semi-space traction free surface. The surface wave exists even in the case of very small split coefficient. The localization of surface waves significantly increases with increasing of slip coefficient.

REFERENCES

1. Love AEH., Some problems of geodynamics. UK: Cambridge University Press; 1911. pp. 89-104 , 149-152
2. Stoneley R., Elastic waves at the surface of separation of two solids, Proceeding of the Royal Society, v, 106, issue 738, (1924). 416-428.
3. Brehovskikh L. Godin O. Acoustics of layered media, 1989, p.268, Nauka, Moskva, (In Russian),
4. Belubekyan M., Surface waves in elastic medium. In: Problems of solid deformable body mechanics, Institute of Mechanics of NAS Armenia, Yerevan, 1997, p. 79–100 (in Russian).
5. Avetisyan A. (2023). Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites (vol. 182). Springer Nature.
6. Camley R., Djafari-Rouhani, B., Dobrzynski, L., & Maradudin, A. (1983). Transverse elastic waves in periodically layered infinite and semi-infinite media. *Physical Review B*, 27(12), 73187..
7. Shuvalov A. L., Poncelet, O., & Golkin, S. (2009). Existence and spectral properties of shear horizontal surface acoustic waves in vertically periodic half-spaces. *Proc. Royal. Soc. A* (2009) 465, p.1489–1511
8. Schoenberg M. Elastic wave behaviour across linear slip interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America* 68.5 (1980): 1516-1521.
9. Ghazaryan K., Mozharovsky, V., Sarkisyan, S., Ohanyan, S. (2021) ‘Shear surface wave propagation in stratified media with slip interfaces’, *International Journal of Materials and Structural Integrity*, vol. 14, 2/3/4, p. 120–126.
10. Hussein M, Leamy M., Ruzzene M. (2014) Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4). 040802

Information about authors

Ghazaryan K. Institute of mechanics NAN of Armenia,
E-mail: ghkarren@gmail.com, Phone 374 99 227395

Ghazaryan R. Institute of mechanics NAN of Armenia,
E-mail: rafaelghazaryan52@gmail.com, Phone 374 99 396344

Terzian S. Institute of mechanics NAN of Armenia,
E-mail: sat_and_21@yahoo.com, Phone 374 99 340432

CHARACTERISTICS OF SLIDING DEFORMATION IN SWELLING CLAYS CONDITIONED WITH THE CHANGE IN SWELLING CONSISTENCY

Hayroyan S.H.

In swelling soils the mechanism of the land slide process development essentially depends as on the conditions of the occurrence, as well as on the further post-genetic processes. Due to the decondensation of swelling soils, due to the swelling their rheological features essentially change (slide resistance, creep properties).

In the Armenian Republic territory ultra-dense argillaceous, reddish clay formations of montmorillonite composition, widespread in Erebuni and Nubarashen areas, are the typical representatives of the swelling soils. Those clay formations, which during the history of their geological development as a result of sediment accumulation were subjected to higher natural pressures than they are at present, are considered to be ultra-dense. In the conditions of natural humidity they have high structural cemented bonds, resulting in high sliding resistance, in the areas of those soils distribution of the creep processes development in them is mostly absent. : When the noted soils are moisturized, they are subjected to swelling, as a result of which the slide resistance gets sharply smaller, resulting in landslide phenomena.

In over-dense argillaceous clays as a result of weathering processes, periodically multiple swelling-shrinking, an elimination of rigid structural bonds takes place and this causes their decondensation over the time, as well as embrittlement in a certain soil area. As a result of the further hydration, in the certain area of the upper horizons, the embrittled soil is in soft-plastic, fluid-plastic state, as a result of which in the gummy-plastic soil mass plastic landslides, landslide-flows develop.

Let us refer to the characteristics of sliding deformation in swelling clays, connected with their consistation changes due to hydration.

The methodology of research

The slide resistance values of the soil are the main ones, with which we make the estimation of the natural slopes stability. Due to hydration, with the consistency change, for the purpose of revealing the mechanism of soil mass slide deformation, in Erebuni-Nubarashen area for three different consistency states GT 1.2.11 of the reddish over-dense swelling clays with a single-deck automated cutting tester the experiments of the slide resistance determination were realized, the diameter of the test samples is $d=71,4$, the height is $h=35$ mm. The clays of hard consistency, GT1.2.11 with a single-deck automated cutting tester were tested for 0,5mm/min with the slide speed movement and the water saturated samples with soft-plastic consistency were tested in the conditions of unconsolidated fast mode with 1,0 mm/min speed movement[4].

In order to reveal the mechanism of slide movement, besides the experiments with single deck automated cutting tester GT1.2.11, slide tests have been done with M-5 testing machines of torsion. Tests with M-5 testing machine of torsion gives us an opportunity to follow the slide deformation process with all height of the sample. With M-5 testing machine of torsion, with standard testing mode, the quenching process of slide deformation was tested (the samples height is $h=24$ mm, the diameter is $d=101$ mm) [1,6].

The samples were tested:

- in natural humidity;
- after the swelling deformation stabilization, caused by the additional humidity;
- in the embrittled state of the soil, due to swelling shrinking, with multiple intervals after the additional humidity.

The values of the soil hydrophysical properties are brought in Table 1.

Table 1

Borehole/ depth	Density g/sm ³			Porosity ratio , e	Humidity W	Plasticity			Consistence · I _L
	Soil ρ	Mineral ρ _s	Skeleton ρ _d			W _L	W _P	I _P	
1/8,0-9,0	2,05	2,66	1,67	0,593	0,227	0,482	0,257	0,241	<0
1/8,0-9,0	1,77	2,68	1,23	1,170	0,435	-	-	-	0,739
1/1,5-2,0	1,28	2,68	1,16	1,310	0,101	-	-	-	<0
1/1,5-2,0	1,67	2,68	1,15	1,330	0,456	-	-	-	0,826

As it is seen from Table 1, the soil, taken from the depth of 8,0-9,0meters, where swelling shrinking opportunities are absent, under natural installation conditions it is in a super dense state. In

the noted soils in water saturated state the consistency index is small from 0 ($I_L=(W-W_p)/(W_L-W_p)<0$), in other words, in water saturated state it is in a state of rigid consistency[2,3].

The relative free swelling deformations of super dense clays were determined. Free swelling relative deformations results are brought in Table 2.

Table 2.

Borehole/	Swelling relative deformation δ_{sw}
1/8,0-9,0	0,175
1/8,0-9,0	0,185
1/8,0-9,0	0,175

In Figure 1 we have the diagram of the slide resistance.

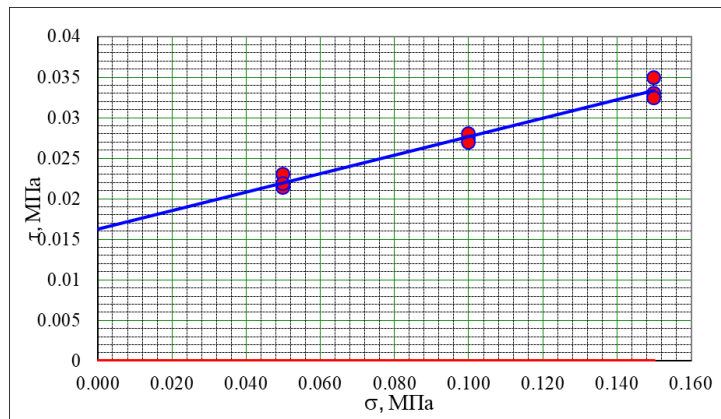


Figure 1 – The diagram of sliding resistance tested in kinematic mode after water saturation of reddish swelling clay soil in an embrittled state, as a result of regular swelling shrinking.

The equation of the sliding resistance will be expressed in the following way $\tau_f=0,114 \text{ tg}\varphi+0,0163$ MPa. The results of the sliding resistance test in torsion method, standard way, are given in Figure 2.

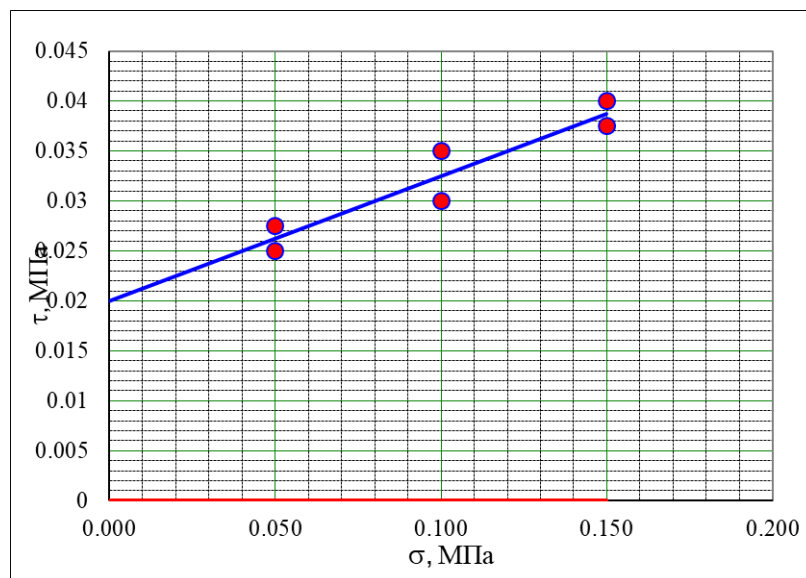


Figure 2. The diagram of sliding resistance determined by torsion method standard mode.

The equation of the sliding resistance determined by torsion method will be expressed in the following way: $\tau_{st}=0,125 \text{ tg}\varphi+0,02 \text{ MPa}$

2. The Test Results of the Sliding Resistance by Kinematic Mode and Torsion Method after Stabilization of swelling deformation from water saturation of reddish swelling clays
 In Figure 3 the diagram of sliding resistance is brought.

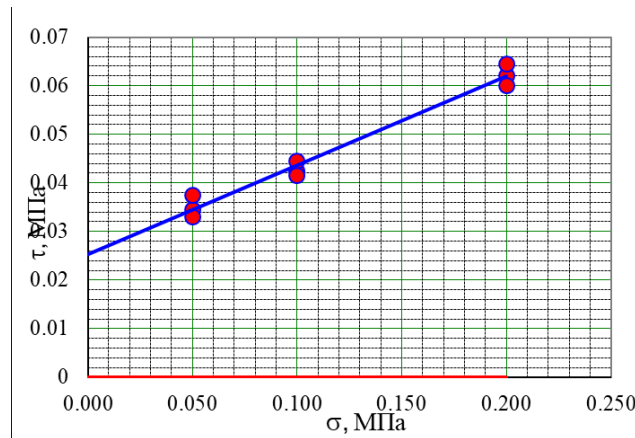


Figure 3 The diagram of sliding resistance by kinematic mode after water saturation free swelling deformation stabilization.

The equation of sliding resistance will be expressed in the form of $\tau_r = 0,183 \text{ tg}\varphi + 0,0253 \text{ MPa}$

Tests of determination sliding resistance in swelling state were realized by M-5 type torsion test machine. The results of the sliding resistance determination by torsion method are brought in Figure 4.

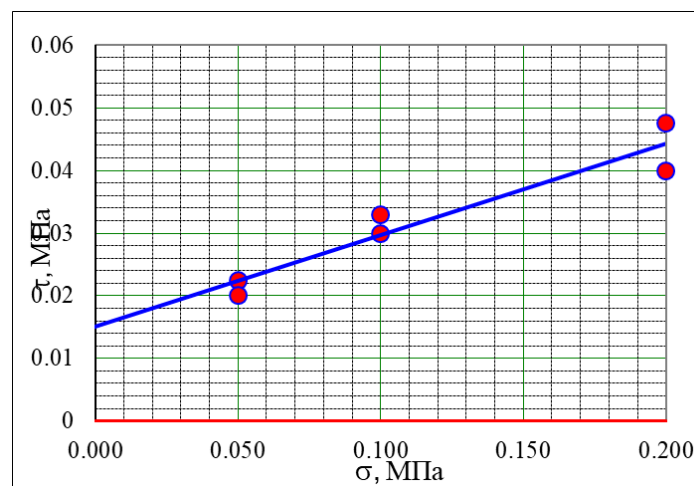


Figure 4. The diagram of the sliding standard resistance, determined by torsional method after stabilization of the swelling deformation free from water saturation.

The normal stress dependence equation of the sliding resistance, determined in standard mode by torsional method, will be expressed in the form of $\tau_{st} = 0,146 \text{ tg}\varphi_{st} + 0,0151 \text{ MPa}$

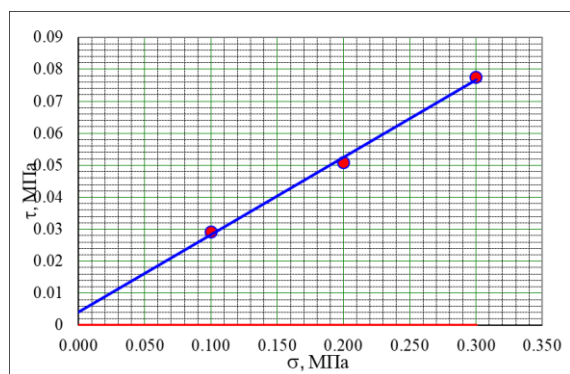
In the whole process of torsion all the observations of the deformation process show that plastic deformations occur along the entire height of the specimen, the localization of the sliding deformation is missing. Comparing the sliding resistance values determined by the kinematic mode test with the sliding resistance values, determined by standard method with torsion mode, we come to conclusion, that the values of the sliding resistance soil, tested by torsion method, with standard mode are small from the values of the sliding resistance determined by kinematic mode test.

3. The test results of the sliding by kinematic mode and torsion method of the swelling reddish clays taken from 8,0 -9,0 meters depths in ultra - dense (ultra - consolidated) state.

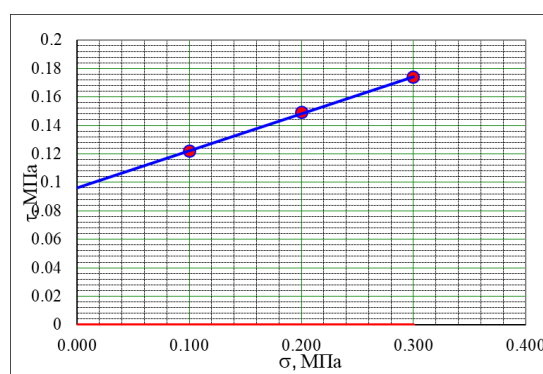
In Table 3 the results of the sliding peak and residual resistance are brought, in Figure 4. the diagrams of sliding peak and residual resistance diagrams are brought.

Table 3

Normal stress σ , MPa	Peak sliding resistance τ_{\max} , MPa	Residual sliding resistance τ_{\min} , MPa	Peak interior friction coefficient $\text{tg}\varphi_{\max}$	Residual interior friction coefficient $\text{tg}\varphi_{\min}$	Peak connectivity c_{\max} , MPa	Residual connectivity c_{\min} , MPa
0,1	0,122	0,0292	0,260	0,242	0,0963	0,0042
0,2	0,149	0,0525				
0,3	0,174	0,0775				



a



b

Figure 5. The diagrams of sliding resistance, a) peak sliding resistance, b) residual sliding resistance

Tests to determine the sliding resistance were carried out in a standard way with M-5 type torsion tester. The results of the determination of the sliding resistance, determined by the torsion method are brought in Table 4, and the diagram of the sliding resistance is brought in Figure 5

Table 4

Normal stress σ , MPa	Sliding resistance, MPa τ_{st}	Interior friction coefficient $\text{tg}\varphi_{st}$	Connectivity, MPa C_{st}
0,1	0,0575	0,300	0,0292
0,2	0,0925		
0,3	0,1175		

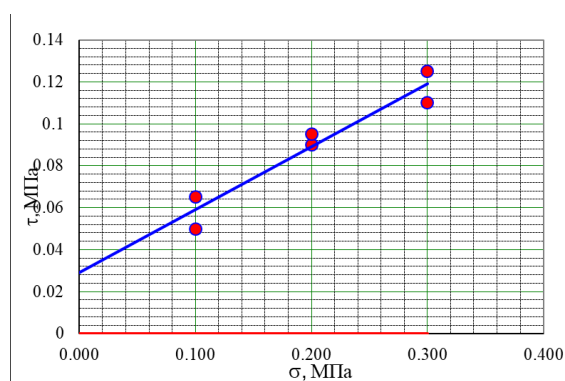


Figure 6. The diagram of the sliding resistance determined by M-5 type torsion tester with standard way

The views of the torsion tests, the whole process of the deformation show that the accumulations of torsional deformation along the entire height of the sample, reaching a certain critical value, the localization of sliding deformation takes place, after which along the localized slip plane a displacement of the upper layer with respect to the lower part is observed. Moreover, the upper part and the lower part of the displacement zone are not subjected to sliding deformations. Comparing the values of sliding resistance determined by the kinematic mode test with the values of sliding resistance

determined by the standard torsional method, come to conclusion, that the values of the sliding resistance determined by the standard torsional method are small from the values of the sliding resistance determined by the kinematic mode test.

As it is seen from Table 1, the soils taken from depths of 8.0-9.0 meters in natural installation conditions are in ultra – dense (ultra – consolidated) state. In Table 5 the parameters of the swelling soils sliding resistance in three different states, interior friction coefficient ($tg\phi$) and connectivity (c) are brought, in Table 6 the values of the sliding resistance relativities are brought.

Table 5

The values of the reddish clay sliding resistance being in an ultra-dense state , sliding peak and residual resistance				Reddish clays sliding resistance values, as a result of periodic swelling deformation swelling—shrinking, embrittled, water saturated		Reddish clays sliding resistance values, after the water saturation swelling deformation	
$tg\phi_{max}$	c_{max}	$tg\phi_{min}$	c_{min}	$tg\phi_{sat.}$	c_{sat}	$tg\phi_{sat,sw}$	$c_{sat,sw}$
0,260	0,0963	0,242	0,0042	0,114	0,0163	0,183	0,0253

Table 6

Correlations of the reddish clay sliding resistance values in ultra-dense state(sliding peak and residual resistance values) ($tg\phi_{max}$, c_{max} , $tg\phi_{min}$, c_{min}) the sliding resistance values because of periodically swelling-shrinking embrittled , water saturation				The correlations of the sliding resistance values of reddish clay in the super-dense state (peak sliding resistance values ($tg\phi_{max}$, c_{max})swelling-sliding resistance values in water saturated state		The correlation between the sliding resistance values after the reddish clay water saturated state and the values of the sliding resistance in swelling-shrinking water saturated state	
$tg\phi_{max}/tg\phi_{sat.}$	c_{max}/c_{sat}	$tg\phi_{min}/tg\phi_{sat.}$	c_{min}/c_{sat}	$tg\phi_{max}/tg\phi_{sat,sw}$	$c_{max}/c_{sat,sw}$	$tg\phi_{sat,sw}/tg\phi_{sat.}$	$c_{sat,sw}/c_{sat}$
2,28	5,9	2,12	0,258	1,42	3,8	1,60	1,55

As it is seen from Table 6, because of swelling, comparing with natural form of ultra – dense clay, the interior friction coefficient decreases for 1,42 times, connectivity decreases for 3,8 times, as a result of swelling – shrinking embrittled, water saturated state tested soil interior friction coefficient decreases for 2,12 time, the connectivity decreases for 5,9 times. Test researches have shown that after the periodically swelling – shrinking determined interior friction coefficient, comparing after water saturated swelling stability clay interior friction coefficient, it gets smaller for 1,60 times, connectivity gets smaller for 1,55 times. From here, it follows that the ultra – dense clays of Erebuni, in the presence of water as a result of swelling, swelling – shrinking, from a hard consistency passes to a soft – plastic consistency, the sliding resistance values decrease sharply. Due to this, landslide phenomena with a viscous – plastic mechanism are spread widely, where sliding surfaces are absent. In order to escape the landslide processes development, it is suggested to create protective from waters soil layers for the noted soils.

REFERENCE

1. Meschyan S R 2008 Experimental Rheology of Clayey Soil (Yerevan: Gitutyun NAN RA) p. 495
2. Trofimov V. T, Korolev V A, Voznesensky E A, et al. 2005 Soil Science (M.: Izdat. MGU) p. 1024
3. Hairoyan S.G Impact Shrinkable Fracturing of Shear Strength in Clay, Madrid, 2005, 6-14G-005
4. Болдырев Г.Г. Методы определения механических свойств грунтов Состояния вопроса
5. Маслов Н.Н., Физико-техническая теория ползучести глинистых грунтов в практике строительства, М.: Изд. Стройиздат, 1984, с.176
6. Месчян С.Р. Реологические процессы в глинистых грунтах. Ереван: «Айастан».- 1992г.- 395 с.

Information about author

Hayroyan S.H. D. of geol. sciences, Prof. of Yerevan State University, **E-mail:** hairoyan@ysu.am

SOME CONTACT PROBLEMS FOR A HALF-PLANE WITH NON-LINEAR ELASTIC STRINGER

Jokhadze O., Kharibegashvili S., Shavlakadze N.

Some contact problems of determining the mechanical field in a homogeneous half-plane supported by a finite homogeneous stringer, the material of which is subject to the nonlinear Hooke's law, are investigated. The condition of both rigid contact and the conditions of with a thin glue layer are considered. The problems are equivalently reduced to the non-linear singular integro-differential equations. Using the Schauder fixed point principle, the existence of a solution to the original problems is proved. The uniqueness of the stated problems is proved also. Using the small parameter method, systems of recurrent linear singular integral equations of the first kind are obtained. Effective conditions for the convergence of the corresponding series are obtained.

Acknowledgement. This work is supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (Project No. FR-21-7307)

Information about authors

Jokhadze Otar - Iv. Javakhishvili Tbilisi State University A.Razmadze Mathematical Institute, Professor, Tamarashvili str. 6, 0177, Tbilisi, Georgia.

E-mail: otar.jokhadze@tsu.ge

Kharibegashvili Sergo - Iv. Javakhishvili Tbilisi State University A.Razmadze Mathematical Institute, Professor, Tamarashvili str. 6, 0177, Tbilisi, Georgia.

E-mail: khar@rmi.acnet.ge

Shavlakadze Nugzar – Iv. Javakhishvili Tbilisi State University A.Razmadze Mathematical Institute, Head of Department of Mathematical Theory of Elasticity, Professor, Tamarashvili str. 6, 0177, Tbilisi, Georgia.

E-mail: nusha@rmi.ge

CONTROL OF ELECTROACTIVE SHEAR WAVES IN A PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE BY DIFFERENT SURFACE ACTIONS

Mkrtchyan M.H., Avetisyan L.V.

In various cases of electromechanical surface actions, the problems of surface control of the propagation of an electroactive transverse wave in a piezoelectric waveguide (piezoelectric class 6mm of hexagonal symmetry) are considered. In both problems, one of the surfaces of the piezoelectric waveguide is mechanically free, and an electrical displacement normal to the surface acts. The second surface of the waveguide is firmly clamped and grounded, in one task, or there is a drift of electrons over the surface and there are no mechanical effects, in another task. The formulated initial boundary value problems are solved by the method of Fourier series. True electromechanical fields are built in the form of series of eigenmodes of electroacoustic oscillations in accordance with the harmonics of surface effects. Analytical and numerical calculations of the control process in cases of surface action are given.

Introduction

In 1969, Gulyaev Yu.V. discovered an increase in the localization of the wave energy of an electroactive shear wave near a mechanically free smooth surface of the piezoelectric environment due to the drift of electrons along this surface [1]. This is a good illustrative example of controlling the localization of the wave energy of the electroacoustic wave by surface action in nonacoustic contact of different environment.

The controllability of electroactive surface acoustic waves with the help of boundary actions expands the possibilities to study the nature of surface waves in the piezoelectric environment [2]. The variety of conjugation conditions for electromechanical fields on the surface of a piezoelectric makes it possible to set various mathematical boundary-value problems of electro acoustics. The possibility of nonacoustic surface action on coupled electroacoustic fields appears [3].

The book [4] describes the possibilities of using the Green's function method in problems of exact or approximate analysis of the controllability of dynamic systems and processes. In the proposed work, the study of the formation and propagation of an electroacoustic wave is carried out using the Fourier series method. In the proposed work, the problems are formulated as a system of homogeneous quasi-static electro elasticity equations with various inhomogeneous surface conditions (various types of unknown surface actions). Following [3, 5, 6], studies of the formation and propagation of electroacoustic waves are carried out using the Fourier series method.

1. Formulating and modeling a mathematical boundary value problem.

The problems of controlling the shaping and propagation of an electroacoustic shear wave in a piezoelectric waveguide are studied in two different cases of surface action by an electric field voltage. *Problem 1.* Both surfaces of the waveguide are mechanically free. One surface of the waveguide is electrically transparent, and the other surface is affected by a parallel intensity of a time-varying electric field (or there is a surface drift of electrons along the surface).

The surface of the waveguide $y=0$ is free from mechanical loads $\sigma_{yz}(x,0,t)=0$ and actions of the perpendicular component of the displacement of the electric field $D_y(x,h,t)=0$ to the free surface.

Considering the material relations for non-zero characteristics of the electromechanical characteristics [4], on this surface of the piezoelectric layer, we will have the second kind inhomogeneous surface conditions

$$[\partial w(y,t)/\partial y]_{y=0} = 0, \quad [\partial \varphi(y,t)/\partial y]_{y=0} = 0. \quad (1.1)$$

The other surface of the waveguide $y=h$ is under the action of a variable electric field strength component parallel to the free surface $E_x(x,h,t) = E_{0r}(t) \cdot \exp(ikx)$ and is free from mechanical action. Then, considering the material relations, on this surface of the piezoelectric layer, we will have the mixed surface conditions:

$$w(y,t)|_{y=h} = 0, \quad \varphi(y,t)|_{y=h} = \phi(t) \quad (1.2)$$

Problem 2. When one surface of the waveguide is mechanically free and the action on this surface is given by the normal component of the displacement of the electric field and the other surface of the waveguide is rigidly clamped and grounded by the electrode.

The conditions for surface action by the electric field displacement function $E_y(x, h, t) = E_{0n}(t) \cdot \exp(ikx)$, through a mechanically free surface are written as

$$[\partial w(y, t) / \partial y]_{y=0} = 0, \quad [\partial \varphi(y, t) / \partial y]_{y=0} = \delta(t). \quad (1.3)$$

The conditions on the pinched surface of the piezoelectric layer free from electrical loads are written as

$$w(y, t)|_{y=h} = 0, \quad \varphi(y, t)|_{y=h} = 0 \quad (1.4)$$

In both problems, as the waveguide material a piezoelectric material of class **6mm** with hexagonal symmetry is considered. In it, the system of quasistatic equations for the formation of an electroacoustic wave $\{W(x, y, t); \varphi(x, y, t)\} = \{w(y, t); \varphi(y, t)\} \cdot \exp(ikx)$, has the form

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_{44}\epsilon_{11}(\partial^2/\partial y^2 - k^2) \cdot \theta(t) + \rho \cdot \ddot{\theta}(t) & 0 \\ (e_{15}/\epsilon_{11}) \cdot (\partial^2/\partial y^2 - k^2) \cdot \theta(t) & -(\partial^2/\partial y^2 - k^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w(y) \\ \varphi(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

In relations (1.1) ÷ (1.5), $w(y, t)$ is elastic shear distribution function over the waveguide thickness, $\varphi(y, t)$ is distribution function of the accompanying electric field potential over the waveguide thickness.

According to the quasi-static problem statement, the accompanying electrical potential vibrations $\varphi(x, y, t)$ have the same dynamics $\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t)$, as electroactive unidirectional elastic deformation waves $W(x, y, t)$.

Formally, the initial conditions of the electroacoustic wave field characteristics at a moment are written in the form

$$w(y, 0) = \xi(y), \quad \dot{w}(y, 0) = \zeta(y), \quad \varphi(y, 0) = \eta(y), \quad \dot{\varphi}(y, 0) = \vartheta(y) \quad (1.6)$$

The final state conditions for the electroacoustic wave field characteristics at a moment are written in the same manner

$$w(y, T_0) = \tilde{\xi}(y), \quad \dot{w}(y, T_0) = \tilde{\zeta}(y), \quad \varphi(y, T_0) = \tilde{\eta}(y), \quad \dot{\varphi}(y, T_0) = \tilde{\vartheta}(y) \quad (1.7)$$

2.1 Solution of the problem of controlling the propagation of an electroelastic shear wave by the action of an electric field displacement on the surface

The mathematical boundary value problem of controlling the propagation of an electroelastic shear wave by the action of a surface displacement of an electric field is formed by a system of equations (1.5) and boundary conditions (1.3) and (1.4). It determines the effect on the propagation of an electroactive shear wave corresponding to a surface disturbance $\delta(t)$.

By introducing a new function for the electric potential $\psi(y, t) = \varphi(y, t) + [(y-h)^2/2h] \cdot \delta(t)$, the mathematical boundary value problem is represented as a system of inhomogeneous equations, with homogeneous boundary conditions regarding both of the distributions of the elastic shear $w(y, t)$ and the introduced potential of the electric field $\psi(y, t)$, over the layer thickness.

The elastic shear displacement and the potential of the electric field over the thickness of the piezoelectric layer are represented as

$$w(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n \alpha_n y) \cdot [A_{\theta n} \cdot \cos(\omega_{\theta n} t) + B_{\theta n} \cdot \sin(\omega_{\theta n} t)] \quad (2.1)$$

where $k_n \alpha_n = (1+2n)\pi/2h$, $\alpha_n^2 = \omega_{\theta n}^2 / (k_n^2 \tilde{C}_t^2) - 1 \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}^+$.

$$\begin{aligned} \varphi(y,t) = & M_n(\alpha_n = 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cos(k_n y) \cdot [A_{\delta_n} \sin(\omega_{\delta_n} t) + B_{\delta_n} \cos(\omega_{\delta_n} t)] + \\ & + (e_{15}/\varepsilon_{11}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n \alpha_n y) \cdot [A_{\theta_n} \cdot \cos(\omega_{\theta_n} t) + B_{\theta_n} \cdot \sin(\omega_{\theta_n} t)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

For the true harmonics of the controlled process $f_n(t) = \ddot{\theta}_{0n}(t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 M_n \cdot \ddot{\delta}_n(t)$, we obtain an equation that characterizes the combination of the natural harmonics of the system $\theta_{0n}(t)$ and the harmonics of the surface action $\delta_n(t)$

$$\left[\ddot{\theta}_{0n}(t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 M_n \cdot \ddot{\delta}_n(t) \right] + \omega_{\theta_n}^2 \cdot \left[\theta_{0n}(t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 M_n \cdot \delta_n(t) \right] = \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 M_n \cdot (\omega_{\theta_n}^2 - \omega_{\delta_n}^2) \cdot \delta_n(t) \quad (2.3)$$

For true harmonics of medium oscillations, the solution of this control equation is obtained in the following form

$$f_n(t) = A_{\theta_n} \cdot \cos(\omega_{\theta_n} t) + B_{\theta_n} \cdot \sin(\omega_{\theta_n} t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 M_n \cdot [A_{\delta_n} \cos(\omega_{\delta_n} t) + B_{\delta_n} \sin(\omega_{\delta_n} t)] \quad (2.4)$$

In relations (2.2) ÷ (2.4), $M_n = \int_0^h \left[(1/h^2) - k_n^2 \cdot [(y-h)^2/2h^2] \right] \cdot \cos(k_n \alpha_n y) \cdot dy$ are the Fourier coefficients, and $\omega_{\delta_n}^2 = \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 M_n$ is the frequency, correspond to the surface action $\delta(t)$.

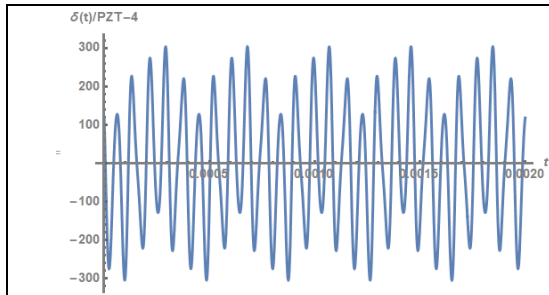


Fig. 1. Graph of the control function change $\delta(t)$

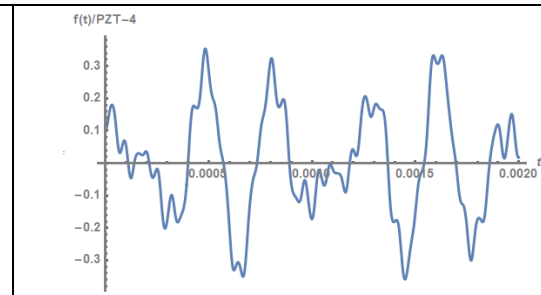


Fig. 2. Graph of the change in the function of harmonics of actual oscillations $f(t)$

For calculation, in the case of choosing descriptions of the initial $\xi(y) = \text{Cos}(10y)$, $\zeta(y) = 0$, and the final states $\bar{\xi}(y) = \text{Sin}(2y)$, $\bar{\zeta}(y) = \text{Cos}(2y)$, graphical representations of the surface control and the true harmonic functions of the wave process, are respectively shown in Fig. 1 and in Fig. 2.

2.2. Solution of the problem of controlling the propagation of a shear electroelastic wave by the action of the voltage of the surface electric field

The mathematical boundary value problem of controlling the propagation of an electroelastic shear wave by the action of a surface displacement of an electric field is formed by a system of equations (1.5) and boundary conditions (1.1) and (1.2). It determines the effect on the propagation of an electroactive shear wave corresponding to a surface disturbance $\phi(t)$.

By introducing a new function for the electric potential $\psi(y,t) = \varphi(y,t) - (y/h)^2 \cdot \phi(t)$, the mathematical boundary value problem is represented as a system of inhomogeneous equations with homogeneous boundary conditions both with respect to distributions over the layer thickness, elastic shear $w(y,t)$, and the introduced potential of the electric field $\psi(y,t)$.

The distributions over the thickness of the piezoelectric layer of the elastic shear displacement and the electric field potential are formally like (2.1) and (2.2)

$$w(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n \alpha_n y) \cdot [A_{\theta_n} \cdot \cos(\omega_{\theta_n} t) + B_{\theta_n} \cdot \sin(\omega_{\theta_n} t)] \quad (2.5)$$

where $k_n \alpha_n = (1+2n)\pi/2h$, $\alpha_n^2 = \omega_{\theta_n}^2 / (k_n^2 \tilde{C}_t^2) - 1 \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}^+$.

$$\begin{aligned} \varphi(y, t) = N_n(\alpha_n = 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cos(k_n y) \cdot [A_{\delta_n} \sin(\omega_{\delta_n} t) + B_{\delta_n} \cos(\omega_{\delta_n} t)] + \\ + (e_{15} / \varepsilon_{11}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n \alpha_n y) \cdot [A_{\theta_n} \cdot \cos(\omega_{\theta_n} t) + B_{\theta_n} \cdot \sin(\omega_{\theta_n} t)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

For the true harmonics of the controlled process $\theta_n(t) = \theta_{0n}(t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 N_n \cdot \phi_n(t)$, we obtain an equation that characterizes the combination of the natural harmonics of the system $\theta_{0n}(t)$ and the harmonics of the surface action $\phi_n(t)$.

$$\left[\ddot{\theta}_{0n}(t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 N_n \cdot \ddot{\phi}_n(t) \right] + \omega_{\theta_n}^2 \cdot \left[\theta_{0n}(t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 N_n \cdot \phi_n(t) \right] = \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 N_n \cdot (\omega_{\theta_n}^2 - \omega_{\phi_n}^2) \cdot \phi_n(t) \quad (2.7)$$

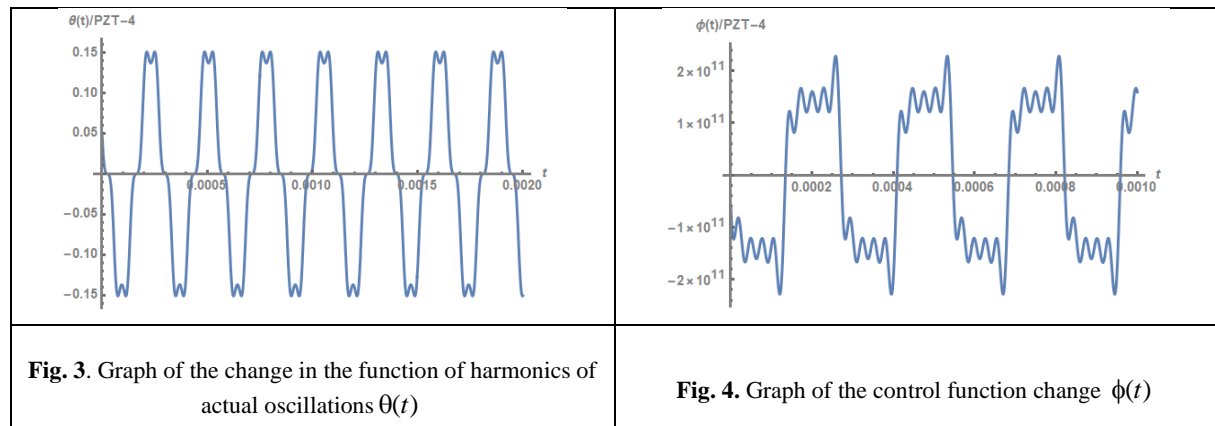
For true harmonics of medium oscillations, the solution of this control equation is obtained in the following form

$$\theta_n(t) = A_{\theta_n} \cdot \cos(\omega_{\theta_n} t) + B_{\theta_n} \cdot \sin(\omega_{\theta_n} t) + \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 \cdot N_n \cdot [A_{\phi_n} \cos(\omega_{\phi_n} t) + B_{\phi_n} \sin(\omega_{\phi_n} t)] \quad (2.8)$$

In relations (2.5) ÷ (2.8), $N_n = \int_0^h \left[(1/h^2) - k_n^2 \cdot (y/h)^2 \right] \cdot \cos(k_n \alpha_n y) \cdot dy$ are the Fourier coefficients, and

$\omega_{\delta_n}^2 = \chi_1^2 \tilde{C}_t^2 N_n$ is the frequency, correspond to the surface action $\phi(t)$.

For calculation, in the case of choosing descriptions of the initial $\xi(y) = \text{Cos}(10y)$, $\zeta(y) = 0$, and the final states $\bar{\xi}(y) = \text{Sin}(2y)$, $\bar{\zeta}(y) = \text{Cos}(2y)$, graphical representations of the surface control and the actual harmonic functions of the wave process, are respectively shown in Fig. 1 and in Fig. 2.



Conclusion

On a finite time, the problem of controlling the propagation of an electroactive elastic shear wave in an infinite piezoelectric waveguide with different electrical surface effects is considered.

The electroacoustic state functions describing the initial and final states are derived from the basic equations.

Due to the expansion of functions of two variables in Fourier series and the use of harmonics of the surface action, boundary value problems are reduced to infinite systems that describe the formation and propagation of eigenmodes of electroactive transverse waves.

The solution of infinite systems of algebraic equations gives us the surface action function and the true harmonics of wave oscillations in each problem. Graphic representations of surface control functions and actual harmonics are given in the case of both types of surface control.

Acknowledgments

The authors thanks to Professor A.S. Avetisyan for discussions, suggestions and the project management.

This work was supported by the Science Committee of RA, in the frames of the research project № 21T-2C130.

REFERENCES

1. Gulyaev Yu.V., Surface electroacoustic waves in solids, *Sov. Phys. JETP Lett*, (1969), vol.9, pp. 37-38, [in Russian]
2. Avetisyan, A.S. Controllability of Electroacoustic Wave Process. In Book: Electroacoustic Waves. in Piezoelectric Layered Composites. *Advanced Structured Materials*, (2023), vol 182. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26731-4_6
3. Avetisyan Ara S., On Formulating Problems of Contactless Surface Control of Electroacoustic Wave Propagation. *Acoustical Physics*, (2022), vol. 68, No. 3, pp. 227–234, <http://doi.org/10.1134/S1063771022030022>
4. Ara S. Avetisyan, Asatur Zh. Khurshudyan, Controllability of Dynamic Systems: The Green's Function Approach, 2018, Cambridge Scholars Publishing, 203p.
5. Avetisyan Ara S., Mkrtchyan M. H. and Avetisyan L. V., Variety of Surface Actions in Problems of Surface Control of the Three-Component Electroacoustic Waves in a Piezoelectric Waveguide. Non-Acoustic Surface Actions, *Acoustical Physics*, (2023), vol. 69, pp. 478–486, [in Press].

Information about authors

Mkrtchyan Manuk H. Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of the NAS of Armenia,
E-mail: mknmanuk@gmail.com,

Avetisyan Levon V. – Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled Fields, Institute of Mechanics of the NAS of Armenia, E-mail: levon.avetisyan97@gmail.com

ON SOME APPROACHES TO THE RECONSTRUCTION OF ELASTIC BODY MATERIAL INHOMOGENEITY IN 2D STATEMENTS

Nedin R.D., Gukasyan L.S.

In the present research, some approaches to studying the problem of analyzing variable physical and mechanical properties of an inhomogeneous body in one- and two-dimensional formulations are presented. The general statements of direct and inverse problems on vibration of inhomogeneous elastic body are presented. The problem of in-plane oscillations of 2D region with variable mechanical properties, characterized by the laws of inhomogeneity for the Lamé coefficients, is studied in the framework of the plane deformation model of elasticity theory. In addition, a similar problem for elastic foundation is considered, where it is required to recover two variable parameters characterizing the bedding coefficients. Several techniques are proposed for building proper solutions to the inverse problems on reconstructing inhomogeneity laws for the material characteristics in elastic isotropic body within in-plane oscillations and in elastic foundation. A series of computational experiments has been carried out to restore the desired functions of various types in classes of smooth functions.

With the development of modern medicine technologies, research in biomechanics related to the problems of monitoring the state of various living structures in human body is becoming increasingly popular. For instance, the possibility of identification of uncharacteristic deformations as a result of invasive or non-invasive procedures for assessing mechanical properties allows one to judge possible causes and pathologies. Particularly relevant are non-invasive approaches to the study of the mechanical properties of tissues that do not require surgical intervention. Such techniques include various types of acoustic and ultrasound diagnostics, magnetic resonance imaging, etc.

When studying the mechanical deformation of living structures (including soft tissues, skin, bone tissue), researchers often limit themselves to one-dimensional models of the elasticity theory, however, to take into account a complex stress state, which includes, for example, in addition to tension and torsion, shear or bending states, it is required to employ more complex two-dimensional and three-dimensional elasticity models. In this research, some approaches to studying the problem of analyzing variable physical and mechanical properties of an inhomogeneous body in a two-dimensional formulation are presented. The general statements of direct and inverse problems on vibration of inhomogeneous elastic body are presented. The problem of in-plane oscillations of 2D region with variable mechanical properties, characterized by the laws of inhomogeneity for the Lamé coefficients, is studied in the framework of the plane deformation model of elasticity theory. The direct problem of determining strain and stress fields in flat regions of various geometries is solved on the basis of projection and the finite element methods; a comparative analysis of the two solution methods is carried out. Generalizing conclusions about the effectiveness of the proposed methods are made on the basis of the computational experiments performed. The statement of a linear inverse problem of reconstructing the variable properties of an elastic body in the framework of a non-destructive acoustic approach based on additional data on given displacements at a certain discrete set of points at one oscillation frequency under the action of some probing mechanical load is considered. The ill-posedness of the inverse problem for the flat region within in-plane vibrations is related to the calculation of derivatives of functions given in a set of points. In addition, a similar problem for elastic foundation is considered, where it is required to recover two variable parameters characterizing its material properties (shear and compression coefficients forming bed coefficients). Several regularization techniques are proposed for building proper solutions to the inverse problems on reconstructing 1D and 2D inhomogeneity laws for the material characteristics in elastic isotropic body within in-plane oscillations and in elastic foundation. A series of computational experiments has been carried out to restore the desired functions of various types in classes of smooth functions. An analysis of the numerical results is carried out, conclusions are drawn about the effectiveness of the proposed computational scheme and methods of acoustic sounding.

1. General formulations of direct and inverse problems on vibrations of an isotropic elastic body.

Consider small oscillations of an elastic isotropic body under the action of a periodic load of amplitude \mathbf{p} , applied to the surface part S_σ in the current configuration. The corresponding complete tensor-wise boundary value problem takes the form

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \omega^2 \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u}|_{S_u} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{S_\sigma} = \mathbf{p} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Here \mathbf{u} – small displacement vector, $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{E} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$ – symmetric Cauchy stress tensor, $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ – linear strain tensor, λ, μ – the Lamé coefficients, ρ – density, ω – oscillation frequency, \mathbf{n} – the unit vector of the outer normal to the surface of the body. The weak statement of the problem takes the form:

$$\int_V \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon}^v dV - \omega^2 \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dS = 0, \quad \mathbf{v}|_{S_u} = 0 \quad (1.2)$$

where the test vector functions \mathbf{v} are introduced, satisfying the main boundary conditions from (1.1); V – volume occupied by the body; $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ – linear strain tensor in terms of the test functions.

The direct problem consists in finding the components of the displacement vector \mathbf{u} under known smooth or piecewise-smooth inhomogeneity laws; the existence and uniqueness theorems have been proved for it, and efficient computational schemes for solving direct problems have been developed. Such schemes are most often based on finite element or finite difference approaches.

At the same time, within the framework of this model, inverse problems of determining the material characteristics λ, μ , depending generally on the coordinates \mathbf{x} , based on some additional data on the solution are rather relevant [1-3]. In this research, we consider the formulation of the inverse problem, when information on the measured displacements is provided everywhere in the region at a certain oscillation frequency. Thus, the purpose of the general 3D inverse problem is to determine the functions λ, μ from the known displacement fields \mathbf{u} in the set of points of the region and on its boundary.

2. The inverse problem of determining inhomogeneous material characteristics in a two-dimensional formulation.

Based on the general model (1.1)-(1.2), we consider in-plane oscillations of the flat region S with the boundary $\partial S = l_u \cup l_\sigma$. The corresponding boundary value problem is described by the following two equations of motion (hereinafter, the comma index means the derivative with respect to the corresponding coordinate)

$$\begin{cases} (\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}))_{,1} + (\mu(u_{1,2} + u_{2,1}))_{,2} + 2(\mu u_{1,1})_{,1} + \rho \omega^2 u_1 = 0 \\ (\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}))_{,2} + (\mu(u_{1,2} + u_{2,1}))_{,1} + 2(\mu u_{2,2})_{,2} + \rho \omega^2 u_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

and a set of boundary conditions

$$\begin{cases} u_1|_{l_1} = 0, \quad u_2|_{l_1} = 0 \\ (\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1})n_1 + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})n_2|_{l_2} = p_1 \\ (\lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2})n_2 + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})n_1|_{l_2} = p_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

The inverse problem is to determine the positive functions $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$, satisfying (2.1)-(2.2), given the known functions $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$. This problem is ill-posed as far as the input information on the functions is presented as a certain data set, and therefore the inverse problem is to be solved in two stages [1]: 1) for both sets of values $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, two-dimensional spline interpolations are built, and thereby the ill-posedness of calculating derivatives of functions given in a table is overcome; 2) further, the projection method is used, in which the desired functions are represented as linear combinations of some smooth basis functions, for instance, polynomials [4].

As a result of using a weak statement, the inverse problem was reduced to the study of a system of linear algebraic equations for unknown expansion coefficients of functions describing the distribution of material characteristics. In this case, the corresponding direct problems were solved both by projection and finite element methods; a comparative analysis of the obtained solutions was carried out. Computational experiments on the reconstruction of the functions $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$ defined in the classes of monotone and nonmonotone smooth functions are conducted for a rectangular domain.

When performing acoustic probing by applying periodic loads applied to the edges of the rectangular region under consideration, the best reconstruction results were obtained when selecting vibration frequencies in the vicinity of the first three resonances. It was found that when restoring monotone smooth laws of inhomogeneity, the considered scheme gave less than 1% error (in the absence of the input noise in the initial measurement data).

3. Inverse problem on identification of variable bedding coefficients of an inhomogeneous elastic foundation.

As an additional problem, consider an elastic foundation with inhomogeneous material parameters subjected to the distributed load p acting on a circular area $|r| \leq r_0$. We accept the following assumptions: $A_1 = A_1(r)$ and $A_2 = A_2(r)$ are the shear and compression coefficients, respectively, that form the bedding coefficients. Considering axisymmetric solution, we assume that $w = w(r)$ – foundation sediment. As boundary conditions, we take the conditions at infinity:

$$w|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, A_1|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow A_1^0 = const, A_2|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow A_2^0 = const \quad (3.1)$$

In this case, the sedimentary dimple takes the form of a surface of revolution with a meridian described by a non-homogeneous second-order differential equation in partial derivatives; in polar coordinates, this equation takes the form [5-6]

$$(A_2 w')' + \frac{1}{r} A_2 w' - A_1 w = p, \quad (3.2)$$

where the prime denotes the derivative with respect to the coordinate r .

The direct problem is to find the function w from the known coefficients A_1 , A_2 and the given load p . Since the equation (3.2) contains variable coefficients, it does not have an analytical solution, as in the case of constant coefficients; in the general situation, one of the possible ways to overcome this difficulty is to employ the Galerkin method. On the basis of this method, the problem is solved

with the selection of the basis functions in the form $\varphi_k = r^{2(k-1)}e^{-r^2}$, satisfying the boundary conditions (3.1). Additionally, the direct problem was studied numerically on the basis of the finite element method. The results obtained by different methods have been compared.

In the inverse problem, the input information was simulated by the results obtained when solving the corresponding direct problem and modeling the data of field measurements of the foundation settlement. The movement on the foundation surface was measured in a set of points, after which a cubic spline interpolation of the settlement function was built on the basis of these data. Further, the resulting spline function was used to solve the system of linear equations obtained using the projection method from the original equation (3.2) [5].

Computational experiments were carried out to solve the inverse problem and revealed that the law of change in the bedding coefficient A_2 was usually recovered worse than that for A_1 . From the results of the reconstruction of the law A_2 , it was concluded that, despite the rather large error in some nodal values (up to twenty percent), in the integral sense, the reconstructed curve was very close to the true inhomogeneity law. At the same time, far from those nodes in which the accuracy of the reconstruction was noticeably impaired, the identification error usually varied from two to six percent.

The authors are grateful to DSc Prof. A.O. Vatulyan for attention to work.

The study was carried out by the grant of the Russian Scientific Foundation, No 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, Southern Federal University.

REFERENCE

1. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики, М.: Физматлит, 2019. 272 с.
2. A.O. Vatulyan, V.V. Dudarev, R.M. Mnukhin, R.D. Nedin. [Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data](#). European J of Mechanics – A/Solids **81** (2020) 103939
3. Dudarev V.V., Vatulyan A.O., Mnukhin R.M., Nedin R.D. [Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder](#). Math. Methods in the Appl. Sciences **43**(11) (2020) 6861-6870
4. А.О. Ватульян, Л.С. Гукасян, Р.Д. Недин. [О задаче Коши в теории коэффициентных обратных задач для упругих тел](#). Владикавказский математический журнал **18**(2) (2016) 31-40
5. А.О. Ватульян, Л.С. Гукасян, Р.Д. Недин. [Об одном подходе к восстановлению неоднородных свойств упругого основания под распределенной нагрузкой](#). Вестник РГУПС **4** (2016) 130-136
6. Wolf, J.P. Foundation vibration analysis using simple physical models, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1994. 423 p.

Information about authors

Rostislav Dmitrievich Nedin – Associate Professor, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University +7 (863) 2975 111
E-mail rdn90@bk.ru

Lusine Surenovna Gukasyan – Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Don State Technical University 8 800 100-19-30
E-mail lusine.gukasian@mail.ru

LIMIT ELASTIC DEFORMATION OF A MULTILAYERED CONCRETE ROD

Nemirovskii Yu.V., Tikhonov S.V.

A multilayered concrete rod is considered in the problem of its transverse bending by the quasi-static uniformly distributed load. It is assumed that the rod has the constant symmetrical cross-sectional shape along its axis, each of the layers can have its own brand of concrete. The classical Kirchhoff-Lyav hypotheses are accepted as valid, and it is assumed that there is a uniaxial stress state. The analytical solutions of rod deflections, the boundaries between elastic and nonlinear areas, and the values of limit loads are obtained.

Concrete products currently take one of the leading positions in the construction industry due to their low cost and easeful manufacture. The application of modern technologies to manufacture of the multilayered reinforced concrete structures [1] can significantly improve the performance characteristics of manufactures. The papers [2-3] present the examples of increasing the bearing capacity of concrete and reinforced concrete rods in the case of change of the shape of a transverse product and combinations of phase materials. In most cases, the concrete products are taken in calculation as elastic materials [4-7], but the actual tension and compression diagrams of concrete demonstrate significant nonlinearity [8-10].

Let us consider a multilayered concrete rod of constant cross-section, which is symmetrical to the axes Oy, Oz (Fig. 1), where Δ_1, Δ_2 indicate the thickness, as well as b_1, b_2 indicate the width of the corresponding layers, the axis Oz is directed vertically upwards, and the axis Oy is directed along the axis of the rod. Assume that the rod of length l is hinged (Fig. 2), and it is affected by the uniformly distributed load q and the load q_s caused by the action of mass forces.

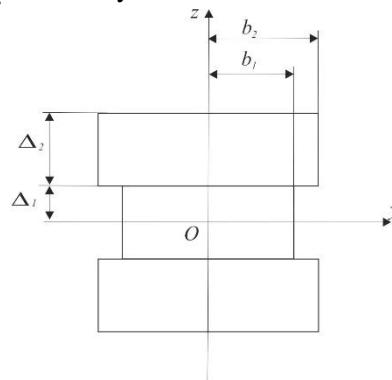


Fig. 1. Cross-section of a concrete rod.

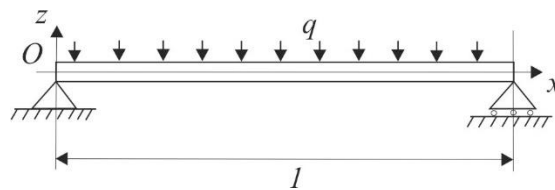


Fig. 2. Hinge fastening of the rod

where $\varepsilon_{0i}^+, -\varepsilon_{0i}^-$ denote the limit elastic deformations of concrete at tension and compression of the i -th layer of the rod, $\varepsilon_{*i}^+, -\varepsilon_{*i}^-$ denote the corresponding limit deformations of concrete strengthening (Fig. 3).

For each phase material, the dependence between stresses and strains is taken as

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon \text{ if } -\varepsilon_{0i}^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{0i}^+, \quad \sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2 \text{ if } -\varepsilon_{0i}^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{0i}^+, \quad (1)$$

where E_i is the modulus of concrete elasticity in the corresponding layer, A_{1i}, A_{2i} are the physical coefficients determined by the actual concrete tension and compression diagram [4].

In further calculations, we turn to dimensionless quantities

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{\sigma_{1*}}, \quad \tilde{l} = 1, \quad b_i = \frac{b_i}{l}, \quad \Delta_i = \frac{\Delta_i}{l}, \quad q = q \frac{1}{l\sigma_{1*}}, \quad N = N \frac{1}{l^2\sigma_{1*}}, \quad M = M \frac{1}{l^2\sigma_{1*}}, \quad w = \frac{w}{l}, \quad (2)$$

where N is the quantity of longitudinal force, w is the quantity of rod deflection, σ_{1*}^- is the tensile strength of B10 concrete grade. For the convenience of further notation, the symbol "~" over dimensionless quantities is omitted.

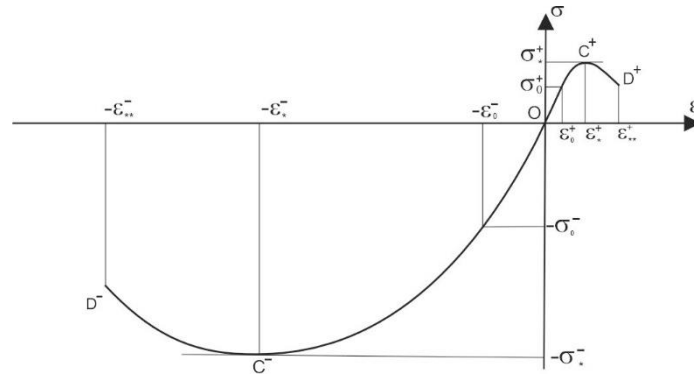


Fig. 3. Concrete tension and compression diagram

Let us consider the Kirchhoff-Love hypotheses to be valid

$$\varepsilon(x, z) = -z\kappa_z(x), \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad (3)$$

where $\kappa_z(x)$ is the quantity of curvature of the axial line of the rod.

The differential equations of equilibrium for the case of direct bending of the rod have the form

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q + q_s. \quad (4)$$

Taking into account the hinge fastening of the rod, we have

$$w(0) = w(0,5) = 0, \quad M(0) = M(1) = 0. \quad (5)$$

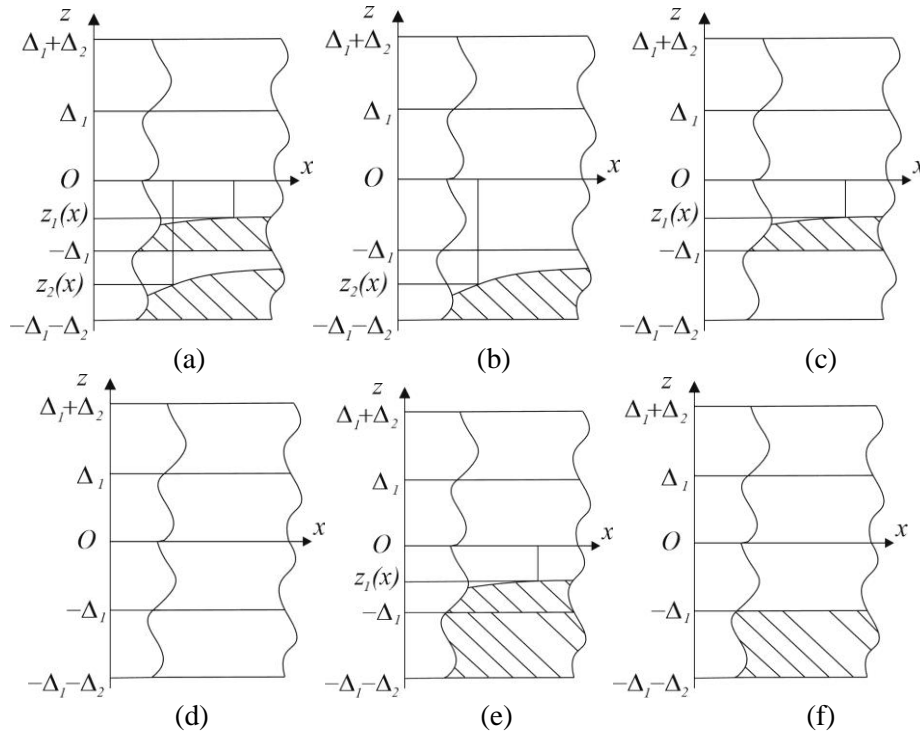


Fig. 4. Possible cases of the mutual arrangement of elastic and nonlinear inelastic deformation areas in the rod layers

Depending on the parameters of the rod, the concrete grades of the layers and the affecting loads, there can be cases of combination of the areas of elastic and non-linear deformation of concrete in different sections of the rod (Fig. 4), and the shaded line indicates the area of nonlinear inelastic deformation of the rod. It is taken into account, that at $z=0$ the deformation is zero and, consequently, the area of nonlinear-inelastic deformation cannot occur under any loads.

This research is restricted to the case when the area of nonlinear inelastic deformation occurs only in the section of rod tension.

Consider the case corresponding to Fig. 4c, then from the ratios (1)-(3) we can get a differential equation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4) - (q + q_s) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) + \\ & + \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \left(2E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + E_1 b_1 \Delta_1^3 + (A_{11} b_1 - E_1 b_1) z_1^3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

From (6) and the equation

$$-z_1(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \varepsilon_{01}^+,$$

we can get an equation to define the boundary $z_1(x)$

$$z_1^4(x) + b(x)z_1^2(x) + cz_1(x) + d = 0, \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{3q(x^2 - x)}{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_4 + \varepsilon_{01}^+ f_2}, \quad c = \frac{\varepsilon_{01}^+ f_1}{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_4 + \varepsilon_{01}^+ f_2}, \quad d = -\frac{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_3}{(\varepsilon_{01}^+)^2 f_4 + \varepsilon_{01}^+ f_2}, \\ f_1 &= 8E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3) + 4A_{11} b_1 \Delta_1^3 + 4E_1 b_1 \Delta_1^3, \quad f_2 = 4b_1 (A_{11} - E_1), \\ f_3 &= 3A_{21} b_1 \Delta_1^4, \quad f_4 = 3A_{21} b_1. \end{aligned}$$

Using the Ferrari method, we have the solution of equation (7)

$$z_1(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{\xi_i(x) - b(x)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\xi_i(x) - b(x) - 2\xi_i(x) - \frac{2c}{\sqrt{\xi_i(x) - b(x)}}}, \quad (8)$$

where $\xi_i(x)$ is an any valid solution determined by the ratios

$$\begin{aligned} \xi_i(x) &= \mu_i(x) + b(x) / 3, \quad \mu_1(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad \mu_{2,3}(x) = -\frac{\alpha(x) + \beta(x)}{2} \pm i \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{2} \sqrt{3}, \\ \alpha(x) &= \sqrt[3]{-\frac{72b(x)d - 2b^3(x) - 27c^2}{54} + \sqrt{f_5(x)}}, \quad \beta(x) = \sqrt[3]{-\frac{72b(x)d - 2b^3(x) - 27c^2}{54} - \sqrt{f_5(x)}}, \\ \alpha(x)\beta(x) &= \frac{12d + b^2(x)}{9}, \quad f_5(x) = -\left(\frac{12d + b^2(x)}{9} \right)^3 + \left(\frac{72b(x)d - 2b^3(x) - 27c^2}{54} \right)^2. \end{aligned}$$

From the condition

$$z_1(x_1) = -\Delta_1,$$

and the ratios (6), it is possible to get the expression for x_1

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{q_{11}}{q}}}{2}. \quad (9)$$

To determine the deflection, we solve the equation with respect to the second derivative of deflection, along with that the solution corresponds to the positive second derivative of deflection

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = \frac{f_1 + f_2 z_1^3}{2f_4 z_1^4 - 2f_3} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{f_1 + f_2 z_1^3}{f_4 z_1^4 - f_3} \right)^2 - \frac{4(q + q_s)(x^2 - x)}{A_{21} b_1 (\Delta_1^4 - z_1^4)}}. \quad (10)$$

The cases Fig. 4 b,d,e,f has solutions like Fig. 4c.

For the case corresponding to Fig. 4a, we have two unknown boundaries $z_1(x)$, $z_2(x)$. Then, the expression to determine the moment has the form

$$M_y(x) = \frac{2}{3} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \left\{ E_1 b_1 \Delta_1^3 + E_2 b_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - 2\Delta_1^3) + A_{11} b_1 \Delta_1^3 + A_{12} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^3 + z_1^3 (A_{11} b_1 - E_1 b_1) + z_2^3 (A_{12} b_2 - E_2 b_2) \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \right)^2 \left\{ A_{21} b_1 \Delta_1^4 + A_{22} b_2 (\Delta_1 + \Delta_2)^4 - A_{21} b_1 z_1^4 - A_{22} b_2 z_2^4 \right\}. \quad (11)$$

The unknown boundaries $z_1(x)$, $z_2(x)$ can be determined, taking into account that the strain at these points is equal to the limit elastic for the corresponding layer material

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{01}^+}{z_1(x)}, \quad \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\varepsilon_{02}^+}{z_2(x)}. \quad (12)$$

From the equations (12) it is possible to obtain the correlation between $z_1(x)$ and $z_2(x)$

$$z_1(x) = \frac{\varepsilon_{01}^+}{\varepsilon_{02}^+} z_2(x),$$

then the expression for the moment (11) has the form

$$\left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 + \frac{f_{2,1} + f_{2,2} z_2^3}{f_{2,3} - f_{2,4} z_2^4} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{3q(x-x^2)}{f_{2,3} - f_{2,4} z_2^4} = 0.$$

Taking into account the hinge fastening of the rod, we have

$$w(0) = w(0,5) = 0, \quad M(0) = M(1) = 0. \quad (13)$$

If we assume that the loads are of such magnitude that all layers of the rod are elastically deformed, then for the quantity of bending moment at uniaxial stress state it is true that

$$M(x) = -4 \sum_{i=1}^2 z \sigma_i dS_i, \quad (14)$$

This problem is statically determinable, then integrating the equilibrium equations (4) with the boundary conditions (13) and equating the resulting expression of bending moment to the expression of the moment obtained from the ratios (1), (14), we have

$$\frac{d^2 w_{0e}(x)}{dx^2} = \frac{3}{8} \frac{q}{b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 ((\Delta_1 + \Delta_2)^3 - \Delta_1^3)} (x^2 - x). \quad (15)$$

Integrating the expression (15) and taking into account the boundary conditions of the rod (13), we obtain the deflection and strain expressions

$$w_{0e}(x) = \frac{q + q_s}{32 (3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2 + E_2 b_2 \Delta_2^3 + E_1 b_1 \Delta_1^3)} (x^4 - 2x^3 + x), \quad (16)$$

$$\varepsilon(x, z) = -\frac{3}{8} \frac{q}{b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2} z (x^2 - x). \quad (17)$$

The expressions (16)-(17) are valid if the strain does not exceed the limit elastic values for each layer, that is

$$q > -\frac{32}{3} (b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} - q_s, \quad (18)$$

$$q > -\frac{32}{3} (b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2} - q_s. \quad (19)$$

If the ratio (18) or (19) is violated, a nonlinear deformation area occurs in the first or second layer of the rod, respectively.

The ratio (18) or (19) can demonstrate that if the rod parameters satisfy the ratios

$$\frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} < \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad (20)$$

the area of nonlinear deformation occurs in the first layer of the rod while the second layer is elastically deformed.

If we assume that the loss of bearing capacity corresponds to the strain in any layer of the limit elastic, then for the case (12), the limit elastic load is determined by the ratios

$$q_{11} = -\frac{32}{3}(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{01}^+}{\Delta_1} - q_s. \quad (21)$$

The case of exceeding the strain of the elastic limit value ε_{02}^+ in the second layer of the rod corresponds to the limit load

$$q_{12} = -\frac{32}{3}(b_1 E_1 \Delta_1^3 + b_2 E_2 \Delta_2^3 + 3E_2 b_2 \Delta_1^2 \Delta_2 + 3E_2 b_2 \Delta_1 \Delta_2^2) \frac{\varepsilon_{02}^+}{\Delta_1 + \Delta_2} - q_s.$$

In this case, the optimal ratio of the dimensions of cross-section of the rod and the materials of layers is determined by the equal sign in the expression (20).

The obtained ratios allow to determine the rod deflections, bending moments at any point of the rod. The expressions to define the boundaries of nonlinear and elastic deformation areas are obtained. Based on the fact, that the deformation should not exceed the limit elastic and limit strain strengthening, the corresponding loads can be determined.

REFERENCE

1. Mut A.R. Concrete and reinforced concrete. Equipment. Materials. Technologies, 2009, pp. 20-23
2. Mishchenko A.V., Nemirovsky Y.V., Vokhmyanin, I.T. Rational and optimal design of layered bar systems, Novosibirsk: NGASU, 2004.
3. Karpenko N.I. General models of reinforced concrete mechanics, Moscow: Stroyizdat, 1996.
4. Nemirovsky Y.V., Tikhonov S.V. Bearing capacity of multilayer concrete bars, Cheboksary: CHGU, 2022.
5. Nemirovskii Yu.V., Tikhonov S.V. The limit state of concrete and reinforced concrete rods at complex and longitudinal-transverse bending. PNRPU Mechanics Bulletin, 2020, no. 1, pp. 60-73
6. Nemirovskii Yu.V., Tikhonov S.V. Transverse-longitudinal bending of multilayered concrete rods and steel fiber reinforced concrete rods. Izvestiya of Altai State University, 2021, no. 1, pp. 40-46.
7. Nemirovsky Y.V., Tikhonov S.V. Bearing capacity of a physically non-linear composite concrete bar under central tension. Fundamental and Applied Problems of Deformable Solid Mechanics and Advanced Technologies in Metallurgy and Mechanical Engineering: Proceedings of the VI Far East Conference with International Participation, Komsomolsk-on-Amur, 2022, pp. 192-199.
8. Nemirovsky Y.V., Tikhonov S.V. Determination of limit loads at transverse bending of multilayer ultimate elastic concrete rods. Vestnik of the Chuvash State Pedagogical University. I. Ya. Yakovleva. Series: Mechanics of the Limit State, 2023, no. 1, pp. 86-101.
9. Plevkov V. S., Baldin I. V., Baldin S. V., Plevkov R. A. Strength and crack resistance analysis of steel elements under axial load, flexure moment, and torque. Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 133-146.
10. Mishchenko A.V. Direct and inverse problems of deformation of layered bars taking into account physical nonlinearity. Numerical methods for solving problems in the theory of elasticity and plasticity: Proceedings of the XIX All-Russian Conference August 28-31, Biysk, 2005, pp. 184-188

Information about authors

Nemirovskii Yuri Vladimirovich – Leading Researcher Physics of Fast Processes Laboratory, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Institutskaya str., 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia, 8 (383) 330 23 24 E-mail nemiryury@mail.ru

Tikhonov Sergey Vladimirovich – Associate Professor Faculty of Information and Computer Systems, I. Ulianov Chuvash State University, 15, Moskovskiy pr., Cheboksary, Chuvash Republic, 428015, Russia, 8 937 012 5432. E-mail strangcheb@mail.ru

ON OPTIMAL STABILIZATION OF PART OF VARIABLES OF ROTARY MOVEMENT OF A RIGID BODY WITH ONE FIXED POINT IN SOPHIA KOVALEVSKAYA'S CASE.

Shahinyan S. G.

An optimal stabilization problem for part of variables of rotary movement of a rigid body with one fixed point in Sophia Kovalevskaya's case is discussed in this work. The differential equations of motion of the system are given and it is shown that the system may rotate around Ox with constant angular velocity. Accepting this motion as an unexcited motion, the differential equations of the corresponding excited motion were drawn up. Then the system was linearized and a control action was introduced along one of the generalized coordinates. The optimal stabilization problem for part of the variables was stated and solved. The graphs of optimal trajectories and optimal control were constructed and shown.

Dynamics of the rigid body. Let us consider a rigid body which rotates around a fixed point. Suppose the body is affected only by its own gravity, and its ellipsoid of inertia is a squeezed ellipsoid of rotation, which means $A = B = 2C$. Also let us assume that the center of mass of the body lies in the central plane of the ellipsoid of the inertia (Sophia Kovalevskaya's case) [1]. To examine the dynamics of the body let us choose a coordinate system $O\xi\eta\zeta$ which is fixed to the earth such that the $O\xi$ axis is directed upwards vertically. Let us fix the axis of the system $Oxyz$ along the main axis of inertia of the body so that the Oz axis is directed along the dynamical symmetry axis of the body and the Oxy plane coincide with the central plane of the ellipsoid of inertia in such a way that the Ox axis passes through the center of mass of the body C . Thus, the Oy axis can be positioned uniquely.

Let $\vec{OC} = \vec{a}(a; 0; 0)$ be the radius vector of C about the point O . Let the direction cosines of $O\xi$ axis about the axis Ox, Oy, Oz be denoted as $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Then the dynamical equations of Euler under the condition $A = B = 2C$ will have the following form [1]

$$2 \frac{dp}{dt} - qr = 0, \quad 2 \frac{dq}{dt} + rp = n\gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = -n\gamma_2 \quad (1)$$

Where $\frac{Pa}{C} = n$.

Let us add Poisson's equations to the system (1). We will have

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \quad (2)$$

(1) and (2) together are a system of ordinary differential equations with 6 variables which are $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

It is easy to show that the systems (1) and (2) have a solution

$$p = \omega = const, \quad q = r = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0 \quad (3)$$

Which means that the body can rotate around Ox with a constant angular velocity ω .

Let us construct the system of excited motion of the body by introducing the following notations:

$$x_1 = p - \omega, \quad x_2 = q, \quad x_3 = r, \quad x_4 = \gamma_1 - 1, \quad x_5 = \gamma_2, \quad x_6 = \gamma_3$$

Thus, we will have:

$$\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}\omega x_3, \dot{x}_3 = -nx_5, \dot{x}_4 = 0, \dot{x}_5 = \omega x_6 - x_3, \dot{x}_6 = x_2 - \omega x_5 \quad (4)$$

Here (4) will be linear approximation of differential equations of motion of the rigid body for the solution (3). In [2] the stability of (3) of the system (1), (2) is examined and it is shown that the solution (3) is unstable [2, 3].

Optimal stabilization of motion. Let us introduce the control action u along the generalized coordinate x_2 in (4). Then we can write the system (4) in the following form:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}\omega x_3 + u, \dot{x}_3 = -nx_5, \dot{x}_5 = \omega x_6 - x_3, \dot{x}_6 = x_2 - \omega x_5 \quad (5)$$

and

$$\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_4 = 0 \quad (6)$$

It is not difficult to see that system (5) is fully controllable [4].

So let us define the following problem:

Problem: Find an optimal control action u^0 such that the solution $x_1 = \dots = x_6 = 0$ of (5)-(6) becomes asymptotically stable for the variables x_2, x_3, x_5, x_6 (for part of variables) [5] while minimizing the following functional:

$$J[\bullet] = \int_0^{\infty} (u^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2) dt \quad (7)$$

We will solve the problem using Lyapunov-Belman's method [6,7]. As there are two parameters in (5) which are n and ω then Lyapunov's optimal function and the optimal control action will both be functions containing the same parameters. From $\frac{Pa}{C} = n$ it is obvious that the value of n depends on the shape of the rigid body and ω may have different values. To solve the problem to the end, let's take $n=10$.

Now we can solve the optimal stabilization problem and for the Optimal Lyapunov function we will have:

as for the optimal control actions we will have:

$$u^0 = -(c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{25}x_5 + c_{11}x_6). \quad (8)$$

The minimum value of the functional will be as follows:

$$J[\bullet] = \frac{1}{2}(c_{22}x_{20}^2 + c_{33}x_{30}^2 + c_{55}x_{50}^2 + c_{66}x_{60}^2 + 2c_{23}x_{20}x_{30} + 2c_{25}x_{20}x_{50} + 2c_{26}x_{20}x_{60} + 2c_{35}x_{30}x_{50} + 2c_{36}x_{30}x_{60} + 2c_{56}x_{50}x_{60})$$

where, $x_{i0} = x_i(0)$, $i = 2, 3, 5, 6$,

$$c_{22} = -2 \times 10^{-7} \omega^6 + 2 \times 10^{-5} \omega^5 - 0.0007 \omega^4 + 0.0089 \omega^3 - 0.0149 \omega^2 - 0.2255 \omega + 9.6116$$

$$\begin{aligned}
c_{33} &= 5 \times 10^{-7} \omega^6 - 8 \times 10^{-5} \omega^5 + 0.0051 \omega^4 - 0.1608 \omega^3 + 2.5579 \omega^2 - 18.178 \omega + 62.659 \\
c_{55} &= 6 \times 10^{-7} \omega^6 - 9 \times 10^{-5} \omega^5 + 0.0536 \omega^4 - 1.5505 \omega^3 + 23.449 \omega^2 - 171.74 \omega + 498.06 \\
c_{66} &= -8 \times 10^{-6} \omega^6 + 9 \times 10^{-5} \omega^5 - 0.0327 \omega^4 + 0.4815 \omega^3 - 1.8421 \omega^2 - 4.1251 \omega + 35.141 \\
c_{23} &= 8 \times 10^{-6} \omega^5 - 0.0009 \omega^4 + 0.0352 \omega^3 - 0.6605 \omega^2 + 5.3425 \omega - 28.62 \\
c_{25} &= 0.1 \times 10^{-7} \omega^6 - 10^{-4} \omega^5 + 0.0076 \omega^4 - 0.1929 \omega^3 + 2.6003 \omega^2 - 19,369 \omega + 85.943 \\
c_{26} &= -10^{-6} \omega^6 + 10^{-4} \omega^5 - 0.0033 \omega^4 + 0.0417 \omega^3 - 0.0312 \omega^2 - 1.3467 \omega + 22.506 \\
c_{35} &= -2 \times 10^{-6} \omega^6 + 0.0003 \omega^5 - 0.0196 \omega^4 + 0.5518 \omega^3 - 8.0446 \omega^2 - 56.764 \omega + 176.92 \\
c_{36} &= 2 \times 10^{-6} \omega^6 - 0.0002 \omega^5 + 0.0053 \omega^4 - 0.0314 \omega^3 - 0.8817 \omega^2 + 9.8418 \omega - 46.894 \\
c_{56} &= -10^{-6} \omega^6 + 4 \times 10^{-5} \omega^5 + 0.0027 \omega^4 - 0.1963 \omega^3 + 4.1351 \omega^2 - 33.889 \omega + 132.19
\end{aligned}$$

Thus, having the value of parameter n we can construct Lyapunov's optimal function and the optimal control actions as functions of ω .

Construction of Optimal trajectories. Let us complete the solution of the problem for exact values of n and ω . To obtain the numerical solution of the system let us assume $n = 1s^{-2}$, $\omega = 10s^{-1}$.

Hence, we will get

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 3.7653, c_{22} = 180.937, c_{33} = 28.3935, c_{44} = 30.9565, c_{12} = -20.4556, c_{13} = -2.6166, \\
c_{14} &= 2.5444, c_{23} = -1.3302, c_{24} = -22.301, c_{34} = 0.0618;
\end{aligned}$$

as the solution of the system, which also makes Lyapunov's function positive definit.

So Lyapunov's optimal function will be

$$\begin{aligned}
V^0(x_2, x_3, x_5, x_6) &= \frac{1}{2} (c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{55}x_5^2 + c_{66}x_6^2 + 2c_{23}x_2x_3 + 2c_{25}x_2x_5 + 2c_{26}x_2x_6 + \\
&2c_{35}x_3x_5 + 2c_{36}x_3x_6 + 2c_{56}x_5x_6)
\end{aligned} \tag{9}$$

So,

$$\begin{aligned}
u^0 &= -\frac{1}{2} (3.7653x_2 - 20.4556x_3 - 2.6166x_5 + 2.5444x_6) = \\
&-1.8827x_2 + 10.2278x_3 + 1.3083x_5 - 1.2722x_6
\end{aligned} \tag{10}$$

Let us substitute the expression of u^0 from (10) into (5). Thus, we will get the following system

$$\left\{ \begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 0 \\
&\dot{x}_2 = -1.8827x_2 + 5.2278x_3 + 1.3083x_5 - 1.2722x_6 \\
&\dot{x}_3 = -x_5 \\
&\dot{x}_4 = 0 \\
&\dot{x}_5 = 10x_6 - x_3 \\
&\dot{x}_6 = x_2 - 10x_5
\end{aligned} \right. \tag{11}$$

Let us solve (11) for $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.2, x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = 0.1$. We will obtain the following solutions:

$$x_1(t) = 0.2$$

$$x_2(t) = -0.6875e^{-1.8117t} \left(e^{0.4463t} - 1.3119e^{1.4364t} + 0.0211e^{1.7408t} \cos[9.9753t] - 0.0104e^{1.7408t} \sin[9.9753t] \right)$$

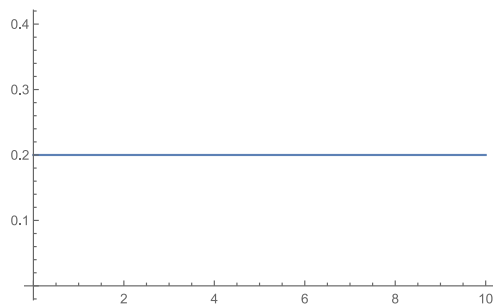
$$x_3(t) = -0.0499e^{-1.8117t} \left(e^{0.4463t} - 4.8551e^{1.4364t} - 0.1514e^{1.7408t} \cos[9.9753t] + 0.1539e^{1.7408t} \sin[9.9753t] \right)$$

$$x_4(t) = 0.1 \tag{12}$$

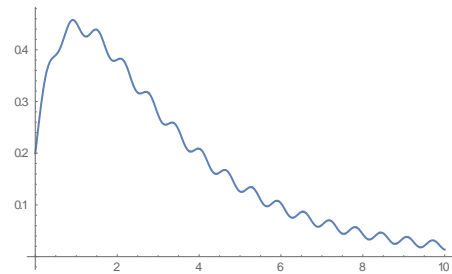
$$x_5(t) = -0.0682e^{-1.8117t} \left(e^{0.4463t} - 1.3348e^{1.4364t} - 1.1323e^{1.7408t} \cos[9.9753t] - 1.0979e^{1.7408t} \sin[9.9753t] \right)$$

$$x_6(t) = 0.0043e^{-1.8117t} \left(e^{0.446t} + 4.8254e^{1.4364t} + 17.35034e^{1.7408t} \cos[9.9753t] - 18.1445e^{1.7408t} \sin[9.9753t] \right)$$

We can now construct the graphs of the optimal trajectories $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, 6$) using Wolfram Mathematics. In the picture 1 and 2 graphs of the optimal trajectories $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are shown:



Pic.1 Graph of function $x_1(t)$



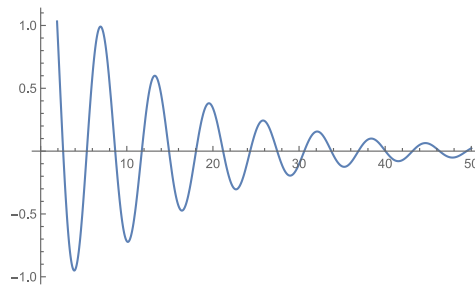
Pic.2 Graph of function $x_2(t)$

The graphs show that the optimal trajectories are approaching to the solution (3) which means the system (5) is asymptotically stable of part of variables x_2, x_3, x_5, x_6 .

To get the exact expression of $u^0(t)$ we will substitute $x_i(t)$ ($i = 2, 3, 5, 6$) from (12) into (10). Then we will have

$$u^0(t) = 0.6893e^{-1.3657t} + 0.8725e^{-0.3753t} + 1.1042e^{-0.0709t} \text{Cos}[t] + 1.0495e^{-0.0709t} \text{Sin}[t].$$

Let us now construct the graphs of the optimal control $u^0(t)$ using Wolfram Mathematics.



Pic.3 Graph of function $u^0(t)$.

CONCLUSION

An optimal stabilization problem for part of variables of rotary movement of a rigid body with one fixed point in Sophia Kovalevskaya's case is discussed in this work. The differential equations of motion of the system are given and it is shown that the system may rotate around Ox with constant angular velocity. Accepting this motion as an unexcited motion, the differential equations of the corresponding excited motion were drawn up. Then the system was linearized and a control action was introduced along one of the generalized coordinates. The optimal stabilization problem for part of the variables was stated and solved. The graphs of optimal trajectories were constructed and shown.

REFERENCES

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972, ч. 2, 332с.
2. Шагинян С.Г., Аветисян Л.М. Об одной задаче оптимальной стабилизации вращательного движения твердого тела имеющую неподвижную точку. Труды IX международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 01-06 октября 2018, Горис, Армения, стр. 306-310.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, с. 475-514
4. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории управления движением. М.: Наука, 1968. – 475 с.
5. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256с.
6. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В книге Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966, с.475-515.
7. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск, 1972, 274с.

Information about author

Smbat G. Shahinyan – associate professor, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics (374 10) 66 37 41, (374 91) 21 55 82

E-mail shahinyan@ysu.am

EFFECT OF NANOCLAY ON TENSILE, FLEXURAL, AND IMPACT CHARACTERISTICS OF SANDWICH PANELS WITH COMPOSITE FACE SHEET AND EPOXY-MONTMORILLONITE CLAY CORE

A.P. Sharma, M. Purusothaman, R. Velmurugan, K. Kanny

A sandwich composite consists of high stiffness and high strength outer layers called face sheets and low-density inner layers called core. In the present study, the sandwich composites comprising glass fabric/epoxy face sheets and epoxy modified with montmorillonite (MMT) nanoclay core are fabricated by a co-curing method. The sandwich panels show higher static tensile and three-point flexural properties such as breaking strength, elastic modulus, and breaking strain on the addition of up to 3 wt. % of MMT nanoclay than pristine samples. The former properties reduce at 4 and 5 wt. % of clay owing to the clustering of clay particles within the matrix. For low-velocity single impact perforation load, the maximum force of sandwich panels improves on the infusion of up to 3 wt. % of clay while maximum displacement decreases. The ballistic limit velocity and energy absorption of panels improve on adding up to 3 wt. % of clay.

1. Introduction

Lightweight materials resistant to extreme loads are required for modern defense, aerospace, and naval applications. Projectiles and debris impact is one such instance. The above necessities are found to be satisfied by composite materials [1]. Sandwich composites with epoxy/montmorillonite (MMT) nanoclay are thought to be cost-effective than those with carbon nanotubes, and graphene. Areas where good flexural, and impact properties are required usually consider lightweight sandwich structures. Here, the flexural stiffness is increased upon joining two thin and stiff face sheets to a lightweight and thick core. The glass fiber reinforced polymer (GFRP) and carbon fiber reinforced polymer (CFRP) are extensively used face sheets. The honeycomb, foam, and balsa among many are the most extensively used cores [2, 3]. The core is having lower density than face sheets, resulting in sandwich panels with high strength and stiffness to weight ratio [4]. The nanoclay fillers in the polymer composites facilitates better mechanical, thermal, flame retardant and gas barrier properties of the subsequent composites [5].

Liang et al. [6] have shown that the strengthening and toughening of polyimide/MMT nanocomposites occur at below 3 wt. % of MMT content. Anbusagar et al. [5] have reported that the static flexural strength, stiffness ratio and Charpy impact strength of sandwich composites with MMT nanoclay are improved by about 60, 21, and 43 % at 4 wt. % of nanoclay (optimum loading), respectively. Rao et al. [7] have reported that the static flexural strength and modulus of carbon/phenolic resin composites increases with 2 wt. % of organically modified MMT nanoclay which is optimum. Paul et al. [1] have shown that the ballistic limit of sandwich composites with GFRP face sheets is decreased by adding glass micro-balloons with volume fractions of 0.1, 0.2, and 0.3. Energy absorption is more for samples with more GFRP layers in the rear face sheet. Chowdary et al. [8] have reported that the static tensile strength of epoxy/Glass/Sisal/Sisal/Glass fibers (GSSG) and polyester/GSSG hybrid composites, each reinforced with 4 wt. % of nanoclay, is improved by 18 and 16 %, respectively. The static flexural strength of former composites with 2 wt. % of nanoclay is improved by 16 and 24 %, respectively. Other studies on composites with nanoclay under mechanical loads are mentioned in. Refs. [9-12].

It is clear that the mechanical properties of fiber-reinforced polymer/nanoclay composites have been studied mainly. The static tensile, three-point flexural, and impact behavior of sandwich panels with epoxy/MMT clay core and GFRP face sheets are not reported. Thus, the effect of addition of 0, 1, 2, 3, 4, and 5 wt. % of MMT nanoclay contents on above behavior and damage mechanisms of sandwich composites manufactured by a co-curing method is explored in the present study.

2. Experimental method

Unidirectional E-glass fiber mat, epoxy with Araldite LY 556 and Aradur HY 951 hardener, and montmorillonite (MMT) surface modified (nanoclay, nanomer I.31PS, 682632) comprising 15-35 wt. % Octadecylamine, 0.5-5 wt. % Aminopropyltriethoxysilane are used. Sandwich panels with three layers are prepared by a co-curing procedure, for which each layer is prepared before the previous layer is completely cured. The top and bottom face sheets have one GFRP layer each, with fibers along 0° direction. For core, MMT clay content of 0, 1, 2, 3, 4, and 5 % of the weight of epoxy is dispersed in epoxy resin using a mechanical stirrer with temperature close to 50-60 °C. This reduces

viscosity and provides identical dispersion. The core, and sandwich panel is about 3, and 4 mm thick, respectively. A rectangular sandwich panels of 100 mm gauge length, 25 mm width, 300 mm total length and 50 mm loading span, 13 mm width, 120 mm total length with 0-5 wt. % of MMT clay contents are subjected to quasi-static tensile and three-point flexural loads as per ASTM D3039/D3039M-08, and ASTM D790-10, respectively using universal testing machine. The panels of 150 mm length and 100 mm width with 0-3 wt. % of MMT clay are subjected to low-velocity single impact perforation loads at the center as per ASTM D7136 using an in-house drop tower. The impactor assembly of near 7 kg weight and hemispherical steel impactor of 12.7 mm tip diameter are used. The panels with 0-3 wt. % of clay of 145 x 145 mm² area are subjected to high-velocity ballistic impact load at the center using an air gun setup. A hardened hemispherical steel projectile with 11.4 g mass and 11.24 mm diameter is used. The effective portion of the sample is 100 x 100 mm² which is firmly clamped by two square steel plates with above opening. The projectile incident velocity is acquired from a Phantom high-speed camera. The energy absorption of panels is obtained from former velocity and projectile mass.

3. Results and discussion

3.1 Tensile behavior

The static stress-strain curve of sandwich panels with 0, 1, 2, 3, 4, and 5 wt. % of MMT clay contents is presented in Fig. 1a. Initially, the linear elastic behavior of core and face sheet layers occurs. After this, an interfacial debonding between the epoxy and MMT nanoclay occurs, resulting in their cracking. This causes a small variation with the slope of stress-strain curve. The former cracking occurs at various positions inside the core, which cause core/face sheet delamination. This increases with loading till the maximum stress of the sample. After the cracking initiation within the core, the majority of the load till the failure of sandwich panel is experienced by glass fiber/epoxy layers which are of high strength. Here, the longitudinal splitting of fibers takes place through gauge length and width of the sample. This ultimately results in fracture of fibers, which causes an extensive face sheet/core delamination. The strength and modulus of panels with 3 and 4 wt. % of MMT clay are 27, and 17 % higher (maximum) than pristine panels, respectively, which is shown in Fig. 1b. The strength and modulus of panels with 4, 5 and 5 wt. % of MMT contents exhibit reductions than that with 3, and 4 wt. % of clay, respectively. This is owing to the weak bonding across the MMT clay/epoxy interfaces. The higher filler loading increases the probability of agglomeration of MMT nanoclay within the epoxy and stress concentration of fiber. This causes a small energy necessary for crack propagation and breakage of material [5]. The failure strain and toughness of panels with 3 wt. % of MMT clay are 17, and 50 % higher (maximum) than pristine samples, respectively, which is shown in Fig. 1c. This is because, nanoclay has extremely high surface to volume ratios and disperses with nanometer size in epoxy. The former parameters of panels with 4 and 5 wt. % of MMT clay decrease than with 3 wt. % of clay. This is due to the formation of agglomeration of clay particles at higher contents within the epoxy.

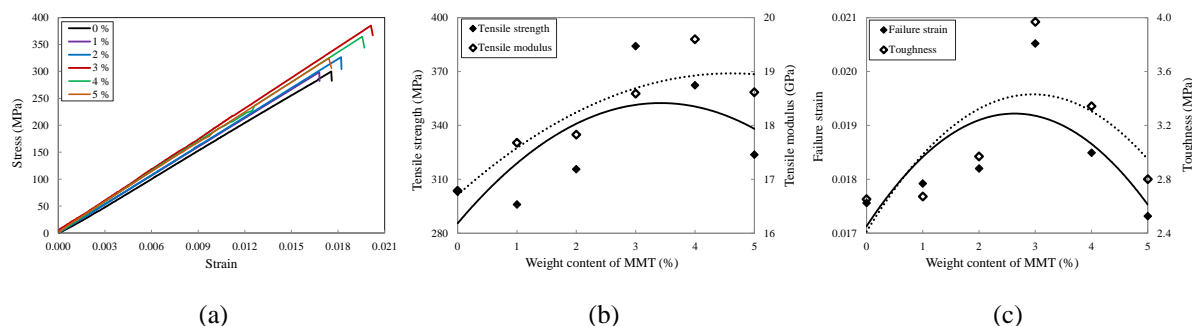


Fig. 1 Tensile behavior of sandwich panels (a) stress-strain curve (b) strength and modulus and (c) failure strain and toughness

3.2 Flexural behavior

The static stress-strain curve of sandwich composites with 0, 1, 2, 3, 4, and 5 wt. % of MMT nanoclay contents is presented in Fig. 2a. At first, the core and the face sheets show linear elastic behavior. Afterwards, epoxy resin and MMT clay exhibit shear failure with cracking nearby the loading roller. This results in a small change of slope of stress-strain curve and core/face sheet delamination close to shear crack. The top face sheet exhibits failure along the fiber direction particularly around the center. Along with the shear crack, fresh minor cracks form with loading, resulting in core/face sheet delamination at dissimilar places. Finally, the bottom face sheet shows additional damage along the fiber direction, causing core/face sheet continuous extensive delamination than core/top face sheet delamination. This makes maximum stress to drop. The above damage mechanisms appear to decrease with 1, 2, and 3 wt. % of MMT nanoclay content within the epoxy (core). While damage increases with 4 and 5 wt. % of MMT clay owing to agglomeration of nanoclay within the epoxy. Stiffer face sheets take high bending load and less stiff core takes more shear load. The strength, modulus, and rigidity of panels with 3 wt. % of MMT clay are 24, 19, and 39 % higher (maximum) than pristine samples, respectively, which can be seen in Fig. 2b, c. The failure strain and toughness of panels with 2 wt. % of clay are 11, and 15 % higher (maximum) than pristine samples, respectively, which are shown in Fig. 2d. The former parameters decrease with 4 and 5 wt. % of clay content owing to the formation of agglomeration of clay particles within the epoxy system [5].

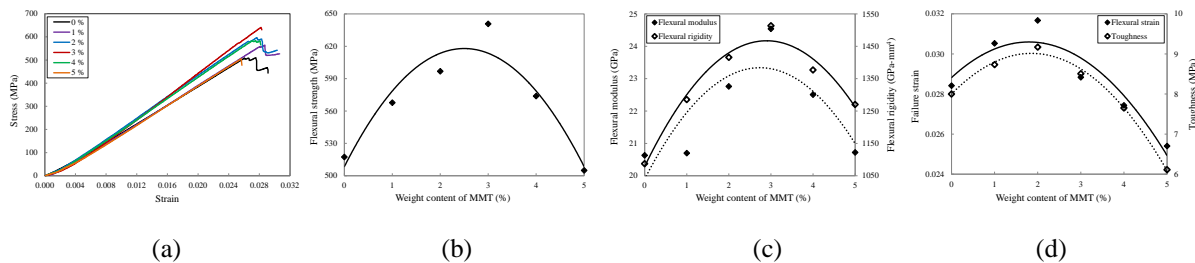


Fig. 2 Three-point flexural behavior of sandwich composites (a) stress-strain curve (b) strength (c) modulus and rigidity and (d) failure strain and toughness

3.3 Low- and high-velocity impact behavior

In case of low-velocity single impact perforation load, the force-displacement behavior of sandwich composites with 0, 1, 2, and 3 wt. % of MMT nanoclay contents is shown in Fig. 3a. After the maximum force, a more gradual decrease of force is noticed for panels with 1, 2, and 3 wt. % of MMT clay with increasing displacement than baseline samples. Local indentation, interfacial debonding and breakage of epoxy/clay, the face sheet/core delamination, and splitting and breakage of fibers are noticed from impacted panel shown in Fig. 3b. The bottom surface of panels shows higher damage area due to higher bending stresses than the top surface. The damage area of sandwich composite appears to decrease with 1, 2, and 3 wt. % of MMT clay contents than without clay. The bottom surface of sandwich panel without clay exhibits peanut shaped damage area with a similar two leaf clovers at face sheet/core interface [13]. The bottom surface of sandwich panels with MMT clay indicates a reduced separation of vertical area of fibers mainly spreading along the length and reaching boundary than panel without clay. The prior failure represents the region after the maximum force of force-displacement behavior of panels. The force-displacement curves of panels show nearly open areas and extensive relaxation after continuous force drop. This is due to energy dissipation in friction till the impactor stops. Panels with 1, 2, and 3 wt. % of MMT clay display plateau after 11.8, 8.7, and 10.8 mm displacements, respectively, which does not seem to be real. The final displacement of former panels is 11.8, 13.4, and 10.8 mm, respectively, representing perforation. Panel without clay does not show plateau. Bending stiffness which is a slope of initial linear portion of force-displacement curve of sandwich panels with 1, 2, and 3 wt. % of MMT clay is higher than panels without clay. The maximum force and displacement of panels with 1, 2, and 3 wt. % of MMT clay are 12, 6, 20 % and 15, 30, 32 % higher (maximum), and lower than panels without clay, respectively (Fig. 3c). The contact duration and perforation energy of panels with 1, 2, and 3 wt. % of MMT clay are 14, 50, 71 %, and 28 % lower, and higher (maximum) than pristine panels, respectively, which is

shown in Fig. 3d. Thus, the perforation resistance of panels with MMT clay is higher than without clay. In case of high-velocity impact, the damage of top and bottom surfaces of sandwich panel without clay at the ballistic limit is shown in Fig. 3e, f. Here, the projectile is trapped within the plate. Small indentation, interfacial debonding and crushing of epoxy/MMT clay, face sheet/core delamination, splitting and fracture of fibers are observed visually. The bottom surface of sandwich panel with 1, 2, and 3 wt. % of MMT clay displays condensed isolation of a vertical area of fibers mainly propagating along the fiber direction than panel without clay. The ballistic limit velocity and energy absorption of sandwich panels with 1, 2, 3 wt. % of MMT clay is 7 % higher, similar, 3 % higher and 9, 4, and 12 % higher (maximum) than panels without clay, respectively (Fig. 3g). Thus, damage and ballistic resistance of sandwich composites with MMT clay are higher than without clay.

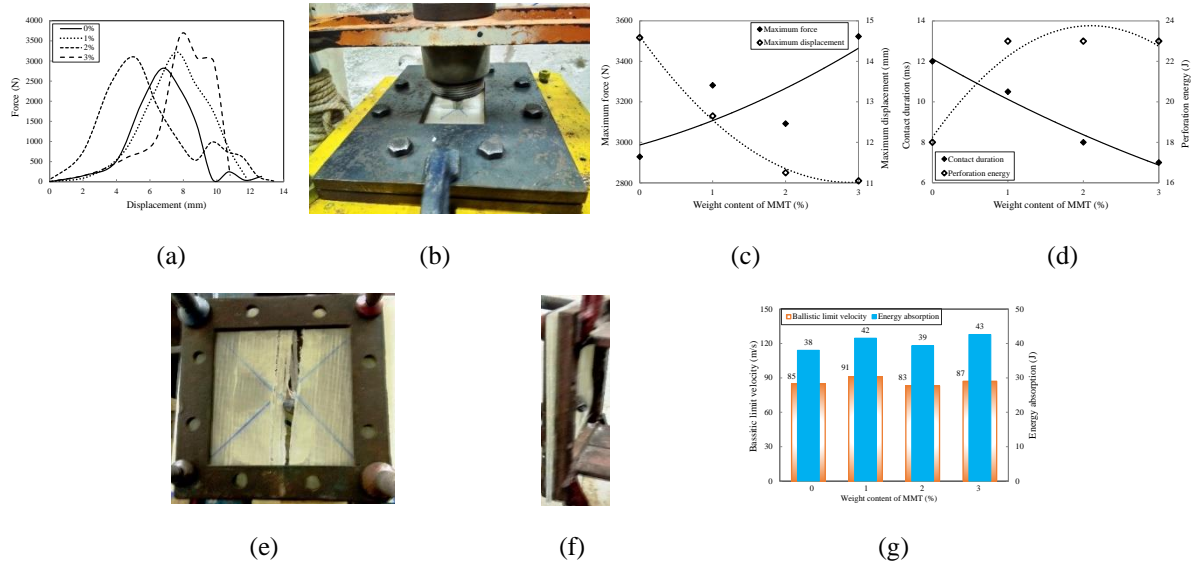


Fig. 3 Low-velocity impact behavior of sandwich panels (a) force-displacement curve (b) damage (c) maximum force, displacement (d) contact duration, perforation energy; high-velocity impact behavior of panels (e) damage (front) (f) damage (side and back) and (g) ballistic limit and energy absorption

4. Conclusions

Sandwich composites with epoxy/montmorillonite nanoclay core and glass fiber-reinforced epoxy face sheets are studied under static tensile, three-point flexural, low- and high-velocity impact loads. The sandwich panels are manufactured by a co-curing method, which delays face sheet/core debonding and improves bending resistance. The tensile strength, failure strain and toughness of sandwich panels with 3 wt. % of MMT clay (optimum loading) are 27, 17, and 50 % higher (maximum) than pristine panels, respectively. The tensile modulus of panels with 4 wt. % of MMT clay is 17 % higher than without clay. The flexural strength, modulus, and rigidity of sandwich panels with 3 wt. % of MMT clay are 24, 19, and 39 % higher than pristine panels, respectively. Maximum low-velocity impact perforation force, displacement, and contact duration of sandwich composites with 3 wt. % of MMT are 20, 32, and 71 % higher than without clay, respectively. The ballistic limit velocity and energy absorption of sandwich panels with 1 and 3 wt. % of MMT clay are 7, and 12 % higher than baseline samples, respectively. The panels with 4 and 5 wt. % of MMT clay show reductions in above parameters than with 3 wt. % of clay, which is owing to the formation of agglomeration of clay particles within the epoxy. Thus, sandwich panels with MMT clay exhibit reasonable improved performance than pristine panels.

REFERENCES

1. Paul D., Velmurugan R., Gupta N. K. Experimental and analytical studies of syntactic foam core composites for impact loading. *International Journal of Crashworthiness*, vol. 27, 2022.
2. Shahdin A., Mezeix L., Bouvet C., Morlier J., Gourinat Y. Fabrication and mechanical testing of glass fiber entangled sandwich beams: A comparison with honeycomb and foam sandwich beams. *Composite Structures*, vol. 90, 2009.

3. Gupta N., Maharsia R. Enhancement of energy absorption in syntactic foams by nanoclay incorporation for sandwich core applications. *Applied Composite Materials*, vol. 12, 2005.
4. Fajrin J., Zhuge Y., Bullen F., Wang H. Flexural behaviour of hybrid sandwich panel with natural fiber composite as the intermediate layer. *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, vol. 10, 2016.
5. Anbusagar N. R. R., Palanikumar K., Giridharan P. K. Study of sandwich effect on nanoclay modified polyester resin GFR face sheet laminates. *Composite Structures*, vol. 125, 2015.
6. Liang Z.-M., Yin J., Xu H.-J. Polyimide/montmorillonite nanocomposites based on thermally stable, rigid-rod aromatic amine modifiers. *Polymer*, vol. 44, 2003.
7. Golla Rama Rao, Ivautri Srikanth, K. Laxma Reddy. Effect of organo-modified montmorillonite nanoclay on mechanical, thermal and ablation behavior of carbon fiber/phenolic resin composites. *Defence Technology*, vol. 17, 2021.
8. Chowdary M. S., Raghavendra G., Niranjana Kumar M. S. R., Ojha S., Kiran P. M., Panchal M. A comparison of the effect of nano clay addition on microstructures and mechanical properties of epoxy and polyester reinforced glass/sisal hybrid polymer composites. *Polymer Composites*, vol. 43, 2022.
9. Mohammed Z., Tcherbi-Narteh A., Jeelani S. Effect of graphene nanoplatelets and montmorillonite nanoclay on mechanical and thermal properties of polymer nanocomposites and carbon fiber reinforced composites. *SN Applied Sciences*, vol. 2, 1959, 2020.
10. Withers G. J., Yu Y., Khabashesku V.N., Cercone L., Hadjiev V.G., Souza J.M., Davis D.C. Improved mechanical properties of an epoxy glass–fiber composite reinforced with surface organomodified nanoclays. *Composites Part B: Engineering*, vol. 72, 2015.
11. Bozkurt E., Kaya E., Tanog˘lu M. Mechanical and thermal behavior of non-crimp glass fiber reinforced layered clay/epoxy nanocomposites. *Composites Science and Technology*, vol. 67, 2007.
12. Avila A. F., Soares M. I., Neto A. S. A study on nanostructured laminated plates behavior under low-velocity impact loadings. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 34, 2007.
13. Sharma, A. P., Khan S. H., Velmurugan R. Effect of through thickness separation of fiber orientation on low velocity impact response of thin composite laminates. *Heliyon*, vol. 5, 2019.

Information about authors

A. P. Sharma- Post Doctoral Fellow, Indian Institute of Technology Madras, Department of Aerospace Engineering

E-mail ankushsharma1000@gmail.com

M. Purusothaman- Project Associate, Indian Institute of Technology Madras, Department of Aerospace Engineering

E-mail Purusothamanm121@gmail.com

R. Velmurugan- Professor, Indian Institute of Technology Madras, Department of Aerospace Engineering

E-mail ramanv@iitm.ac.in

K. Kanny- Professor, Durban University of Technology, Department of Mechanical Engineering

E-mail kannyk@dut.ac.za

DYNAMICAL BOUNDARY-CONTACT VALUE PROBLEMS FOR VISCOELASTIC HALF-SPACE WITH AN ELASTIC INCLUSION OR CUT

Shavlakadze Nugzar, Pachulia Bachuki

The dynamical contact problem for a viscoelastic half-space which is reinforced by an elastic inclusion in the form of a strip and the dynamical boundary value problem for viscoelastic half-space with cut are considered. The solutions of the problems are reduced to the integro-differential equation with corresponding boundary value condition. Using the method of orthogonal polynomials the integro-differential equations are reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The quasi-completely regularity of the obtained systems is proved and the method of reduction for approximate solution is developed.

Acknowledgement. This work is supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia (Project No. FR-21-7307)

Information about authors

Shavlakadze Nugzar – Iv. Javakhishvili Tbilisi State University A.Razmadze Mathematical Institute, Head of Department of Mathematical Theory of Elasticity, Professor, Tamarashvili str. 6, 0177, Tbilisi, Georgia.

E-mail: nusha@rmi.ge

Pachulia Bachuki - Georgian Technical University Kostava str. 77, 0160 Tbilisi, Georgia

E-mail: pachulia.b@gtu.ge

DYNAMICS OF MONOLAYER BLACK PHOSPHORENE UNDER LONGITUDINAL COMPRESSION

Shepelev I.A., Dmitriev S.V.

The dynamics of acoustic waves in black phosphorus under continuous longitudinal compression are being studied. Various wave processes occur in solid materials during continuous compression, including those related to the nonlinear nature of atomic interactions. Slow compression in a solid material excites acoustic waves that propagate at the speed of sound. However, if the compression rate exceeds the speed of sound, shock waves are excited, which have completely different properties compared to acoustic waves. In this study, the wave dynamics in a two-dimensional layer of black phosphorus undergoing continuous compression in one of two crystallographic directions, zigzag or armchair, are examined. Black phosphorus has a more complex spatial geometry of the atomic lattice compared to graphene, making wave propagation dynamics more complex. Molecular dynamics methods were used to model and analyze dynamic processes. Acoustic and shock waves were excited using a piston moving at a constant velocity. The characteristics of wave propagation from atom to atom, oscillations arising in atoms during wave propagation, wave energy evolution, and other characteristics were analyzed at various piston velocities. These results contribute to a better understanding of the nonlinear dynamics of shock and acoustic waves in two-dimensional materials.

1. Introduction

The exfoliation of graphene [1], the first widely studied two-dimensional (2D) material, opened up a new area of research into various 2D materials [2]. Advances in thin-layer processing methods, including exfoliation, have led to the development of new single-layer materials, including a renewed interest in black phosphorus and its 2D version, phosphorene. Like graphite, black phosphorus is one of the few layered crystals composed of the same atoms. Despite being the most stable allotrope, this high-density phase was synthesized centuries after the discovery of phosphorus as an element.

In 2014, theoretical and experimental work [3] revealed the electronic properties of monolayer or few-layer black phosphorus. It was shown that phosphorene has a direct bandgap and high carrier mobility. Although phosphorene as a 2D material has only recently become the subject of study, there are already numerous reviews describing its properties, production, and device design [4]. Additionally, phosphorene demonstrates unique thermal properties that differ from bulk black phosphorus [5]. In [6], it was predicted that phosphorene could be an effective thermoelectric material with high electrical conductivity and low thermal conductivity.

Molecular dynamics simulations are a highly effective tool for studying structural transformations in 2D materials, including graphene nanoribbon exfoliation and sliding [7], thermally and mechanically induced pulsation [8], surface oscillation and twiston dynamics [9], soliton creation and annihilation, shock wave propagation, second sound modeling in graphene, and carbon nanotube multistability, ballistic heat transfer, and energy equilibration in a 2D harmonic graphene lattice, shock and vibration damping, spatially localized high-amplitude oscillatory modes called discrete breathers, and extreme behavior.

2D materials in devices can be subjected to extreme dynamic loads. For this reason, it is necessary to thoroughly investigate the mechanisms of energy transfer in them, including those caused by nonlinear effects. It has been established that the properties of 2D materials under high-speed loading are significantly different from those under normal deformation speeds [10]. Carbon nanotubes compressed by shock waves are significantly more damaged than under static compression, despite the same pressure level. Graphene is a potential material for absorbing shock waves without destruction or as a layer for reflecting and attenuating shock waves. Phosphorene has a more complex structure with two subatomic layers compared to graphene or boron nitride. Additionally, phosphorene is a highly anisotropic material, for example, its Young's moduli are 90-166 GPa and 40-44 GPa in the zigzag and armchair directions, respectively. Graphene has a much higher (1 TPa) and isotropic Young's modulus. Thus, the question arises about the difference in the dynamics of acoustic waves in these materials.

2. Methodology

Phosphorene is a two-dimensional material composed of phosphorus atoms with a structure shown in Figure 1. There are four atoms in each elementary cell. The phosphorus atoms are arranged in two layers parallel to the XY plane. Atoms in the upper layer are denoted as P1, and those in the lower layer are denoted as P2. There are two inequivalent types of interatomic bonds, one parallel to the XY plane (l_{in} , inner bond) and the other connecting P1 and P2 atoms (l_{out} , outer bond), as shown in Figure 1(b). Therefore, there are two types of bond angles denoted as θ_{in} (inner angle) and θ_{out} (outer angle).

As shown previously, the interatomic interactions in phosphorene can be described using the Stillinger-Weber (SW) potential, which was previously applied to Si. This potential with specially fitted parameters can reproduce the crystal structure, sound velocity, and phonon dispersion obtained from ab-initio calculations.

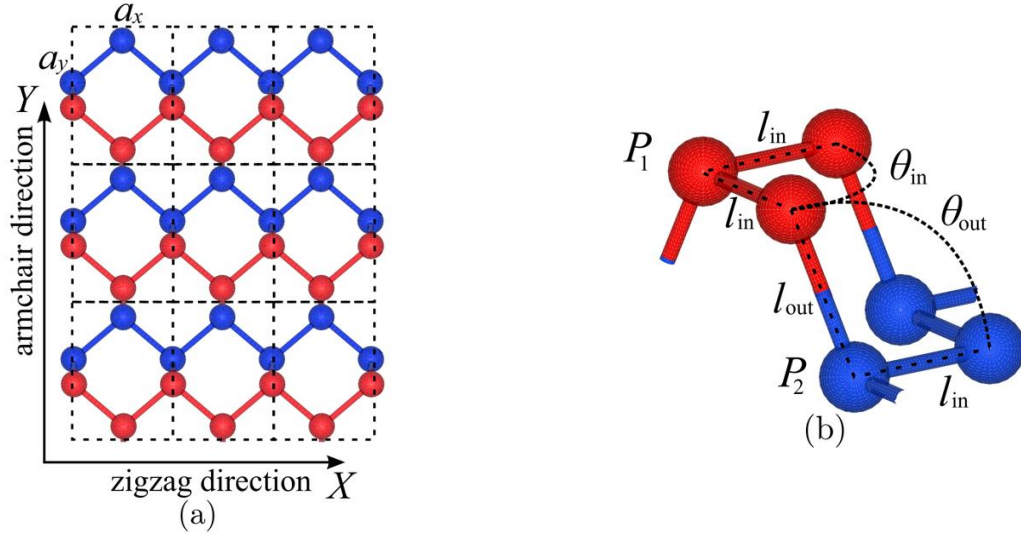


Figure 1. Schematic representation of the phosphorene lattice. (a) Top view of the supercell consisting of a 3×3 translation cell with four phosphorus atoms in each. Dotted lines separate the translation cells. The X and Y axes are oriented along the zigzag and armchair directions, respectively. (b) View of one translation cell in 3D perspective. The upper (red) and lower (blue) layers of phosphorene are denoted as P1 and P2, respectively.

During the simulation, the crystal lattice of phosphorene is continuously compressed with a constant velocity v_0 (piston velocity). As a result of this compression, the lattice is intensely heated, and compression leads to the excitation of acoustic waves when the piston velocity is less than the speed of sound in the crystal or shock waves when the piston velocity exceeds the speed of sound. In this work, we consider only the case of exciting acoustic waves in the material. We also do not consider the effects of finite temperature of the crystal, assuming it to be 0 K at the initial stage.

3. Results

As a result of the piston movement compressing the lattice below the speed of sound, an acoustic wave is formed in the lattice after a short time, propagating along one of the crystallographic directions - either the armchair or zigzag direction, along which the material is compressed.

In the first stage, we consider compression of the lattice along the armchair direction with a piston velocity from $v_0 = 0.05-0.5$ km/h. To compare the dynamics of the acoustic wave, we fix the piston velocity at both $v_0 = 0$ and $v_0 = 0.5$ km/h. Figure 2 shows the dynamics of the change in atom energies in the atomic row in the armchair direction as the acoustic wave passes through them.

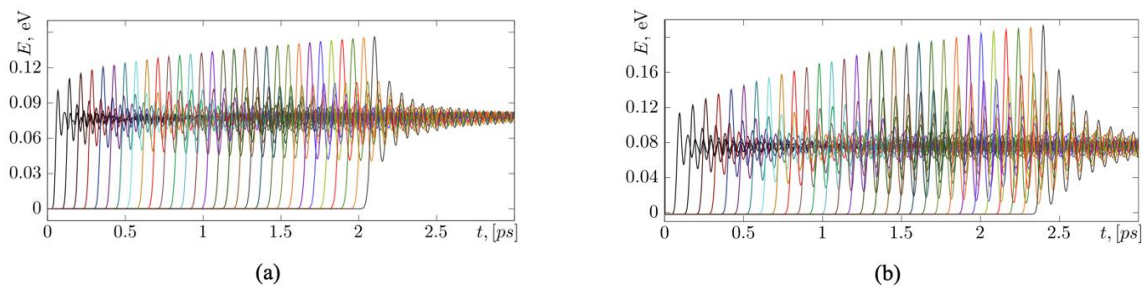


Figure 2. Evolution of the total energy of atoms $E_i(t)$ in the atomic row in the armchair direction (a) and zigzag direction (b) as the acoustic wave passes through them, initiated by piston compression with a velocity of $v_0 = 0.3$ km/h.

From the graphs, it can be seen that when the wave propagates through an atom, its energy increases abruptly for a short time, after which it quickly decreases to a certain non-zero level that does not change over time. This level is determined by the piston velocity - the higher it is, the higher the residual energy of the atoms. It can also be noted that with time, each subsequent atom through which the wave propagates receives increasingly more energy, which is due to the fact that the lattice compression is continuous and has an accumulative effect. Additionally, it is noticeable that when the wave propagates in the zigzag direction (Figure 2(b)), the maximum energy of the atoms increases much more intensively than when moving in the armchair direction (Figure 2(a)). The maximum energy of the atoms at any given time characterizes the energy of the acoustic wave.

It was found that despite the significantly different piston velocities, the velocity of the acoustic wave propagation is almost the same and equals the speed of sound in the selected direction. The dynamics of atom displacement and oscillation during wave propagation were also studied in detail. It turned out that when transitioning to a moving coordinate system, the passage of the wave is accompanied by oscillation of the atom positions, with the properties of these oscillations significantly differing depending on the distance of wave propagation and the direction of propagation. For example, when propagating in the armchair direction, at the beginning of the lattice, the oscillations have higher frequency components in their frequency spectrum, which then significantly decrease in intensity. At the same time, the spectral composition remains practically unchanged. In contrast, oscillations of atoms in the zigzag direction do not have high-frequency components in the spectrum.

4. Conclusion

Molecular dynamics simulations and analysis of acoustic wave dynamics were conducted on monolayer black phosphorene excited by continuous compression of the crystal lattice at a constant velocity. Compression was performed along either the zigzag or armchair direction. As a result of compression, acoustic waves were excited, propagating at the same velocity determined by the speed of sound in the selected crystallographic direction, regardless of the compression piston velocity. Significant differences in the properties of the acoustic waves were identified depending on the direction, which are attributed to the pronounced anisotropy of black phosphorene. Vibrational processes in the atoms during the propagation of the acoustic waves through them were analyzed in detail.

This work was supported by a grant from the Russian President's Council for Grants for State Support of Young Candidates of Sciences, grant No. MK-891.2022.1.2.

REFERENCE

1. Geim A. K., Novoselov K. S. The rise of graphene //Nature materials. – 2007. – T. 6. – No. 3. – C. 183-191.
2. Kang J. et al. Graphene and beyond-graphene 2D crystals for next-generation green electronics //Micro-and Nanotechnology Sensors, Systems, and Applications VI. – SPIE, 2014. – T. 9083. – C. 20-26.
3. Li L. et al. Black phosphorus field-effect transistors //Nature nanotechnology. – 2014. – T. 9. – No. 5. – C. 372-377.
4. Ling X. et al. The renaissance of black phosphorus //Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2015. – T. 112. – No. 15. – C. 4523-4530.
5. Yang N. et al. Thermal transport in nanostructures //Aip Advances. – 2012. – T. 2. – No. 4. – C. 041410.
6. Zhang J. et al. Sulfur nanocrystals anchored graphene composite with highly improved electrochemical performance for lithium-sulfur batteries //Journal of Power Sources. – 2014. – T. 270. – C. 1-8.
7. Xue Z. et al. Peeling and sliding of graphene nanoribbons with periodic van der Waals interactions //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2022. – T. 158. – C. 104698.
8. Thiemann F. L. et al. Machine learning potential for hexagonal boron nitride applied to thermally and mechanically induced rippling //The Journal of Physical Chemistry C. – 2020. – T. 124. – No. 40. – C. 22278-22290.
9. Savin A. V., Korznikova E. A., Dmitriev S. V. Twistons in graphene nanoribbons on a substrate //Physical Review B. – 2020. – T. 102. – No. 24. – C. 245432.
10. Botella P. et al. Single- Walled Carbon Nanotubes Shock- Compressed to 0.5 Mbar //physica status solidi (b). – 2017. – T. 254. – No. 11. – C. 1700315.

Information about authors

Shepelev Igor A. – senior researcher, Almet'yevsk State University, +79042441654
E-mail igor_sar@li.ru

Dmitriev Sergey V. – Head of Department, Institute of Molecule and Crystal Physics, UFIC RAS, +79875961463, E-mail dmitriev.sergey.v@gmail.com

INTERFACE CRACKS AND DELAMINATION OF COATINGS. SOME ANALYTICAL SOLUTIONS

Ustinov K.B.

A number of problems of theory of elasticity are considered related to interface cracks in isotropic and anisotropic media. In particular, problems of semi-infinite crack in elastic bi-layer and composed half-plane, problems of central semi-infinite crack in anisotropic bi-layers are addressed. The method of solving consisted in application of integral transform (Bi-lateral Laplace, Fourier or Mellin transforms to the system of equations of elasticity and boundary conditions, followed by reducing the problems in question to scalar or matrix Riemann boundary value problems. Application of Wiener-Hopf method allowed obtaining closed form solutions of the formulated problems. One of the main advantages of the method is that the obtained solutions are valued for any range of parameters, including extreme values, where researches usually face the difficulties when applying conventional numerical methods. Meanwhile due to inherent limitation of the method the solutions were obtained only for vanishing second Dundur's parameter of elastic mismatch. For all mentioned problems closed forms analytical expressions were obtained for stress intensity factors. Besides asymptotics of displacements far from the crack tip were obtained allowing posing adequate boundary conditions when modeling delaminations in the frame of structural theories. Some solutions of problems of corner cracks are also discussed.

1. Introduction. The problems associated with the appearance and growth of cracks along the boundaries of materials are given serious attention in fracture mechanics, primarily due to their importance for applications, among which we note the problems of delamination of multilayer structures and delamination of coatings in a wide range of scales.

Among the works devoted to interface cracks, one should especially note the fundamental works [1, 2]; in [1] the distribution of stresses near the crack tip was obtained for the first time, and the type of singularity was described, in [2] the generalization of Irwin formula i.e. the relation between the stress intensity factors (SIF) and the energy release rate (ERR) was obtained. The work [3] should also be noted, where it was shown that the nature of the distribution of stress fields for a wide class of problems in the two-dimensional isotropic case, including problems on interface cracks, is determined by only two combinations of elastic parameters, which were later called Dundurs parameters.

An important factor that complicates the analysis of the behavior of interface cracks is the oscillation of stresses and displacements near the crack tip [1]. Sufficient attention was paid to the study of the mathematical aspects of this fact and ways to overcome this "non-physical" behavior. However, the presence of oscillations in the solution, as well as the presence of stress singularity in the solution of a crack in a homogeneous elastic medium, is caused by the mathematical formulation of the problem, in particular, by the assumptions about linear elasticity for any arbitrarily large stresses, continuity on arbitrarily small scales, zero radius rounding at the crack tip. In reality, all these conditions are satisfied only approximately and only within certain limits. Therefore, the solutions obtained are valid only for those scales and up to the extent for which the specified conditions are valid. Solutions of problems with such singularities can be considered as external asymptotics for internal problems, the solutions of which will give the necessary criteria of fracture. However, for any such internal problem, all external (boundary) conditions will be determined only by the coefficient at the singularity for the external problem, which will play the role of the critical value.

Fracture parameters (SIF and ERR) do not exhaust the range of problems on interface cracks. For sufficiently extended delaminations, when the sizes of cracks become much larger than the thicknesses of the structural layers, it becomes attractive to use the theory of plates (or shells, for curved sections) to describe the deformation of the delaminations [4–7]. If the base is sufficiently rigid, the plate simulating the delamination is usually considered as rigidly clamped [4], allowing quite easy modeling of the delamination evolution [5]. More accurate solutions are obtained using elastic clamping as boundary conditions, when the kinematic quantities at the clamping point (longitudinal and transverse displacements and angle of rotation) are considered as depending on the force parameters acting in a given section - longitudinal and transverse (symmetric and asymmetric) force and bending moment by means of the compliance matrix 3×4 [15]. Previously [6, 8–14], similar boundary conditions of a simpler form were considered (2×2 matrix, accounting for only the influence of force factors on rotation). Compliance matrix components cannot be calculated from elementary considerations. FEM [6, 10–13], numerical methods for solving integral equations [9], and asymptotic analytical methods [8, 15] can be used to calculate them.

2. Application of integral transformations and reduction to the matrix Riemann problem as a method for solving problems of separation along the interface. One of the effective methods for solving problems of theory of elasticity related to interface cracks, in particular, related to delamination of multilayer structures and delamination of coatings, is the reduction of them to scalar or matrix Riemann problems [16, 17, 8, 15, 18].

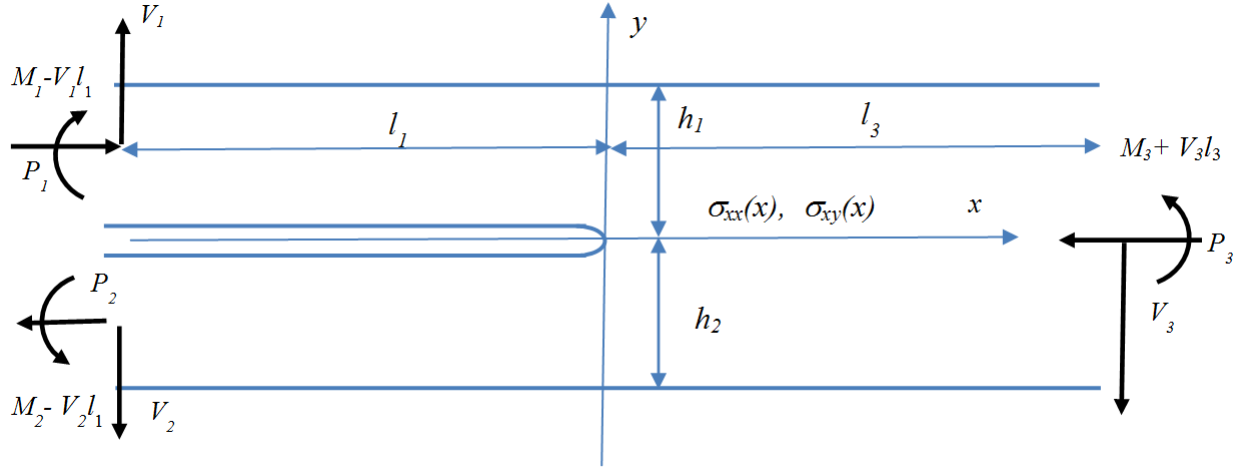


Figure 1. Geometry and applied loading.

Consider elastic layer $-h_2 < y < h_1$ composed by two layers $-h_2 < y < 0$ and $0 < y < h_1$ of different elastic properties, separated by a semi-infinite crack $y=0, x < 0$ (Fig. 1). Case $h_2 \rightarrow \infty$ corresponds to half-plane. Plane strain (or plane stress) conditions are supposed to be satisfied. Mechanical behavior is determined by equations of elasticity

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{11,22} = 2\varepsilon_{12,12}, \quad \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

Here σ_{ij} are components of stress tensor; ε_{ij} are components of strain tensor; u_i are components of displacement vector; s_{ijkl} are components of tensor of compliance (the inverse of tensor of elasticity).

Boundaries $y = h_1, y = -h_2$ and $y = 0, x < 0$ are free of stresses

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \text{for } y = \pm h, \quad \text{and for } y = 0, \quad x < 0 \quad (2)$$

The load is applied at infinity in the form of bending moments, M_i , longitudinal and transverse forces $P_i, V_i, i = 1 \div 3$ (Fig. 1). Additional moments $V_i l_i$ ($l \rightarrow \infty$) are applied to compensate moments due to the transverse forces.

Among nine introduced values only six are independent due to the global equilibrium:

$$P_3 = P_1 - P_2, \quad M_3 = M_1 - M_2 + \frac{P_1 h_1 + P_2 h_2}{2} + P_3 \Delta_h, \quad V_3 = V_1 - V_2, \quad \Delta_h = h_1 \frac{1 - \Sigma \eta^2}{2\eta(1 + \Sigma \eta)} \quad (3)$$

Here and η and Σ are ratios of thicknesses of the layers and elastic constants

$$\eta = h_1 / h_2, \quad \Sigma = s_{1111}^{(2)} / s_{1111}^{(1)} \quad (4)$$

Note that there exist two combinations of loads that do not affect the stress intensity [5], thus 4 independent values determining stress intensity is chosen in the form of [15]:

$$M = -\int_0^{\infty} x \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad N = \int_0^{\infty} \sigma_{yy}(x, 0) dx, \quad T = \int_0^{\infty} \sigma_{xy}(x, 0) dx, \quad \tau_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{xy}(x, 0) \quad (5)$$

Their relations to the values depicted in Fig. 1 are

$$\begin{aligned}
M &= \frac{M_1(3\eta^2\Sigma + 4\eta\Sigma + 1) + M_2\eta^2\Sigma(3 + 4\eta + \eta^2\Sigma)}{\Delta} + \frac{(P_1 + \eta\Sigma P_2)(1 - \eta^2\Sigma)h}{2\Delta} \\
T &= \frac{(P_1 + \eta\Sigma P_2)(\eta^3\Sigma + 1)}{\Delta} + \frac{(M_2 - M_1)6\eta^2(\eta + 1)\Sigma}{h\Delta} \\
N &= \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \frac{(\Sigma^2\eta^4 + 4\Sigma\eta^3 - 4\Sigma\eta - 1)}{\Delta}, \quad \tau_\infty = \frac{6\Sigma\eta^2(\eta + 1)}{h\Delta}(V_2 - V_1) \\
\Delta &= \eta^4\Sigma^2 + 4\eta^3\Sigma + 6\eta^2\Sigma + 4\eta\Sigma + 1
\end{aligned} \tag{6}$$

For each half-layer (or half-plane) the solution relating derivatives of displacements and stresses along the internal boundary is obtained. Those relations may be written in the form of systems of integral equations, and after performing an integral (Fourier [18], or bi-lateral Laplace [8, 15]) in the form of a system of ordinary differential equations. Summing the values for the transforms of the derivative displacements, we obtain the desired system corresponding to the matrix Riemann problem (in the case of applying the Laplace transform - on the imaginary axis, Fourier - on the real one).

$$\mathbf{F}_-(p) = \mathbf{K}(p)\mathbf{F}_+(p)$$

$$\mathbf{F}_-(p) = \frac{E^{(1)}}{2(1+\Sigma)} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ v^{(1)}(x,0) - v^{(2)}(x,0) \right\} e^{-px} dx, \quad \mathbf{F}_+(p) = \int_0^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{yy}(x,0) \\ \sigma_{xy}(x,0) \end{matrix} \right\} e^{-px} dx \tag{7}$$

Here matrix-functions $\mathbf{F}_\pm(p)$ are holomorphic in the left and right half-planes of complex plane p . Matrix-function (the problem coefficient) $\mathbf{K}(p)$ is known for particular configurations. To pose the problem it is also necessary to restrict behavior of the solution at the key points, which is done by using "physical" consideration [16, 8]

$$\mathbf{F}_+(p) = \left\{ \begin{matrix} N + Mp + o(p) \\ \tau_\infty p^{-1} + T + o(1) \end{matrix} \right\}, \quad \text{Re } p \rightarrow 0+, \quad \mathbf{F}_+(p) = O(p^{1-\nu}), \quad \nu < 1, \quad \text{Re } p \rightarrow \infty \tag{8}$$

3. Solution of the matrix Riemann problem. The key part of the solution consists in factorization of the coefficient $\mathbf{K}(p)$, i.e. its representations as a product of matrix-functions holomorphic in the left and right parts of the complex plane. At present, the general solution to this problem is still unknown. For the problems under consideration, in a number of special cases, the form of the matrix makes it possible to apply the Khrapkov method [16], or to reduce the coefficient of the problem to a diagonal form. In particular, solutions were obtained for the following problems:

- A layer on a half-plane when the second Dundurs parameter is equal to zero [8].
- Two layers of the same thickness when the second Dundurs parameter is equal to zero [15].
- Orthotropic layer with a central semi-infinite crack, the principle axes of elasticity tensor being aligned with the external boundaries of the layer [19].
- A layer with a central semi-infinite crack composed by two orthotropic elastic half-layers of the same material but with the principle axes of elasticity tensor aligned at the opposed angles (to be published).

For the first mentioned problem, three independent solutions were obtained, corresponding to the bending moment and the longitudinal and transverse forces applied to the peeling section of the layer. For the other three problems, four independent solutions were obtained, corresponding to bending moments, pairs of longitudinal and transverse forces applied to the peeling areas, and asymmetrically applied transverse forces. Also solution for particular combination of elastic properties and thicknesses of parts of bilayer was obtained by scaling technique [20].

This used method is efficient for obtaining the values of interest: SIF and compliance coefficients. The asymptotics of the Laplace images of the found matrix functions at infinity correspond to the behavior of the originals at zero, which makes it possible to obtain the SIF.

$$\left\{ \begin{matrix} K_I \\ K_{II} \end{matrix} \right\} = \mathbf{k}_M M + \left(\mathbf{k}_T + \frac{\alpha}{2} \mathbf{k}_M \right) T + \mathbf{k}_N N + \mathbf{k}_A \tau_\infty \tag{9}$$

$$\mathbf{k}_M = \sqrt{12} \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix}, \mathbf{k}_T = \sqrt{4-3\alpha^2} \begin{pmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \end{pmatrix}, \mathbf{k}_N = \delta \mathbf{k}_M - \frac{\alpha\sqrt{3}}{\sqrt{4-3\alpha^2}} \mathbf{k}_T \quad (10)$$

$$\mathbf{k}_A = \frac{\alpha}{2} \left(\delta - \frac{\sqrt{4-3\alpha^2}}{\sqrt{12}} \right) \mathbf{k}_M + \left(\delta_p - \frac{\sqrt{3}\alpha^2}{2\sqrt{4-3\alpha^2}} \right) \mathbf{k}_T$$

The asymptotics of the Laplace transforms of the found matrix-functions at zero correspond to the displacements of the crack edges far from the tip [15], and their finding allows one to extract the required coefficients of the compliance matrix. For the kinematic values corresponding to the relative displacement of the inner banks, after correcting typos [15], the coefficients of the compliance matrix have the form (for the same problem)

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v' h \\ \Delta v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E^{(1)}} + \frac{1}{E^{(2)}} \right) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ Mh^{-1} \\ N \\ \tau_\infty \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$g_{11} = \frac{4-3\alpha^2}{2} \delta_p + \frac{3\alpha^2}{2} \delta - \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} \alpha^2, \quad g_{12} = \alpha \left(3\delta - \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} \right),$$

$$g_{13} = \frac{\alpha}{8} \left(\sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 - \frac{1}{5} \alpha,$$

$$g_{14} = \frac{1}{15} + \delta_p^2 + \frac{\alpha^2}{4} (1+3\delta^2 - 3\delta_p^2) - \frac{\alpha^2}{4} \sqrt{12-9\alpha^2} (\delta + \delta_p)$$

$$g_{21} = \left(\frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} - 3\delta \right) \alpha, \quad g_{22} = -6\delta, \quad -g_{23} = \frac{3}{5} + 3\delta^2 + \frac{3}{4} \alpha^2,$$

$$g_{24} = \alpha \left(\frac{7}{10} - \frac{9}{8} \alpha^2 - \frac{3}{2} \delta^2 + \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} \delta_m \right),$$

$$g_{31} = \frac{\alpha}{8} \left(\sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 + \frac{1}{5} \alpha, \quad g_{32} = -\frac{3}{5} + 3\delta^2 + \frac{3}{4} \alpha^2,$$

$$g_{33} = \delta_v = 2\delta^3 - \frac{24\zeta(3)}{\pi^3} + \frac{3\alpha^2}{2} (2\delta - \delta_p) - (J_3 + \beta_3),$$

$$g_{34} = \alpha\delta^3 - \frac{12\alpha\zeta(3)}{\pi^3} + \frac{3\alpha^3}{4} (2\delta - \delta_p) + \frac{\alpha^3 - 4\alpha\delta\delta_p}{8} \sqrt{12-9\alpha^2} - \frac{\alpha}{2} (J_3 + \beta_3) \quad (12)$$

$$2A(s) = \tanh s \left(\tanh s + s\sqrt{1+\alpha^2 s^2} \cosh^{-2} s \right) / (1-s^2 \sinh^{-2} s)$$

$$2B(s) = \left(1 - s\sqrt{1+\alpha^2 s^2} \sinh^{-1} \cosh^{-1} s \right) / (1-s^2 \sinh^{-2} s)$$

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left\{ \ln \sqrt{A(s)B(s)} \right\} \frac{ds}{s}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left\{ (1+\alpha^2 s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2} + 1} \right] \right\} \frac{ds}{s} \quad (13)$$

$$J_3 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3} \left\{ \ln \sqrt{A(s)B(s)} \right\} \frac{ds}{s}, \quad \beta_3 = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3} \left\{ (1+\alpha^2 s^2)^{-1/2} \ln \left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}} \frac{\alpha s \operatorname{coth} s}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2} + 1} \right] \right\} \frac{ds}{s}$$

$$\delta = \frac{4 \log 2}{\pi} + J_1 + \beta_1, \quad \delta_p = \frac{4 \log 2}{\pi} + J_1 - \beta_1, \quad \zeta(3) \approx 1.2021$$

4. Problems for composed wedges. A set of analytical solutions has been obtained for problems of composed wedges with interface cracks: an edge crack between a wedge and half-plane of different elastic isotropic materials, an edge crack in a half-plane composed by two wedges, a kinked crack in a plane composed by two wedges. The solutions have been obtained with the help of Mellin transform

and reducing the problem to the matrix Wiener-Hopf problem. The coefficients of the problems allowed factorization by Khrapkov's technique, however also for zero second Dundurs parameter only.

The work has been done under financial support of Russian State Assignment under contract No. 123021700046-4.

REFERENCE

1. Williams M.L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, vol. 49, 199–204, 1959.
2. Salganik R.L. The brittle fracture of cemented bodies. *J. Appl. Math. Mech.*, 27, 1468–1478, 1963.
3. Dundurs J. Discussion: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 36, 650–651, 1969.
4. Kachanov L.M. *Delamination Buckling of Composite Materials*. Kluwer, 1988. 95 p
5. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. *Int. J. Fract.*, 43, 1–18, 1990.
6. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *Int. J. Fracture.*, vol. 104 (2), 169–179, 2000.
7. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates. *J. Mech. Phys. Solids.*, vol. 50, 1847–1864, 2001.
8. Ustinov K. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mech. Solid.* 50 (1), 62–80, 2015.
9. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *Int. J. Fract.*, vol. 113, 39–55, 2002.
10. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, 2700–2720, 2007.
11. Barbieri L., Massabò R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 201, 298–321, 2018.
12. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 52, 193–214, 2004.
13. Thouless M. The effects of transverse shear on the delamination of edge-notch flexure and 3-point bend geometries. *Compos. B Eng.* vol. 40 (4), 305–312, 2009.
14. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic Analysis of Extensive Crack Growth Parallel to Free Boundary. In *3rd Int. Conf. Localized Damage 94*, Southampton: Comput. Mech. Publ., 623–630, 1994.
15. Ustinov, K. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer. *Eur. J. Mech. A Solids*, vol. 75, 56–69, 2019.
16. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. Semi-infinite crack parallel to the boundary of an elastic half-plane. *Sov. Phys. Dokl.*, 31, 1009, 1986.
17. Khrapkov A. *Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems*. Ed. B.E. Vedeneev, VNIIG Publishing House, 2001.
18. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (Plane Strain). *Mech. Solids*, 47, 415–425, 2012.
19. Ustinov, K., Massabò, R., Lisovenko, D., 2020. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution. *Eng. Failure Anal.* 110, 104410.
20. Ustinov K.B., Idrisov D.M. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: Exact analytical solutions for some particular cases *ZAMM*, 2021, 101(4),
21. Ustinov, K.B. Certain cases of elastic equilibrium of a composed wedge with an interface crack. *Mathematics and Mechanics of Solids* 25(12), 2199–2209 (2020).

Information about author

Ustinov Konstantin Borisovich – Leading Researcher, Laboratory of Geomechanics, A. Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.

E-mail ustinov@ipmnet.ru

THE BENDING OF THE RECTANGULAR ISOTROPIC PLATE BY CUTTING FORCES ALONG THE EDGE

Vasilyan Narine

In this article is investigated bending problem of the isotropic rectangular plate, when two edges of the plate are hinged, in fixed edge are investigated different boundary conditions. The plate is free from distributed loads and opposite side fixed edge is loaded by cutting forces. Are received generalized cutting forces and investigated condition of equilibrium for generalized cutting forces for each case. This article is dedicated to identify solution difference, which is obtained is due to the transformation of Kirchhoff and Thomson-Tait [6].

1. Introduction. Nearly two hundred years ago have been first formulation of the plate bending boundary problem by Poisson [9]. The solution of biharmonic equation of four degree for that formulation must satisfy three boundary conditions in each edge of plate. But this disagrees the order of the equation. This contradiction didn't appear in problem, which investigated Poisson for plate bending problem with fixed edge and free support boundary conditions. In that problem three boundary conditions coming to two conditions that is why does not lead to discrepancy of account with boundary conditions. To solve this discrepancy, Kirchhoff proposed to modify the boundary conditions. He proved that the three conditions are very much and for a complete definition of the displacement, is enough two conditions [2,5,6,7]. He showed, that two conditions of Poisson, related to twisting moment and cutting forces, must be replaced with one condition. Physical meaning of this transformation of condition was spilled by Thomson and Tait. They say, that displacement of plate will not be changed if horizontal forces constituting twisting pair replace with two vertical forces in same length. This replacement didn't act in value of twisting moments and will cause only local redistribution of stresses in the edge of plate, which didn't reflect on distribution of stresses on the other place of the area. But because of this transformation in corner of the rectangular plate are formed concentrated forces, interpretation of which does not exist yet. In this many year discussion were participate V.Thomson, P.Tait, M.Bussinesk, M.Levi and the other scientist [1]. The discussion, particularly, has been completed by Thomson and Tait. Nevertheless have many excluding interpretations, which one allows existing concentrated forces, the other contradict the physical mean of this transformation [2, 6].

In this article shows that this two interpretations may exist depending from boundary conditions.

2. Bending of isotropic plate by classical theory of Kirchhoff.

Is investigated rectangular plate with parameters a and b . Surface of plate is free from distributing loads. Boundary conditions are: $y = 0, b$ edges are hinged, $x = a$ edge is loaded by cutting forces and in $x = 0$ edge are investigated different boundary conditions [8].

Isotropic plate bending equation by Kirchhoff theory [4] is

$$\Delta^2 w = 0 \tag{2.1}$$

with boundary conditions:

$$y = 0, b \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

$$x = a \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -\frac{Q}{D}. \tag{2.3}$$

The solution for this differential equation will be represented

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad Q = Q(y) = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b} \tag{2.4*}$$

for satisfaction of boundary condition (2.2).

In this article investigated a special case

$$w(x, y) = f(x) \sin \lambda y, \quad Q = Q_0 \sin \lambda y, \quad \lambda = \frac{\pi}{b}. \tag{2.4}$$

Substituting (2.4) in (2.1) and solving the differential equation will be obtained for $f(x)$:

$$f(x) = Ae^{\lambda x} + Bxe^{\lambda x} + Ce^{-\lambda x} + Fxe^{-\lambda x} \quad (2.5)$$

From the boundary conditions in the edge $x=a$ (1.3), may be find relations between unknown coefficients (A, B, C, D):

$$B = Ae^{2\lambda a} - 2Fa - \frac{Q_0 e^{\lambda a}}{2D\lambda^3}(\lambda a + 1), \quad C = -\frac{Q_0 e^{-\lambda a}}{2D\lambda^2} - Fe^{-2\lambda a}, \quad (2.6)$$

where $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, is coefficient of bending stiffness.

Unknown coefficient B, C are represented from A, F , which can be found from boundary condition in side $x=0$. In this article, cutting forces and generalized cutting forces are investigated, which is accounted from the formulation:

$$Q_x(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad Q_y(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w. \quad (2.7)$$

$$V_x(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad V_y(x, y) = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].$$

3. Investigation for different boundary conditions for classical theory.

A problem (2.1)-(2.2)-(2.3) for different boundary conditions in side $x=0$, is investigated[2,3,4].

Hinge joined:

$$x=0; \quad w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1)$$

or $f(x)=0, f''(x)=0$.

From satisfactions of this conditions will be found unknown coefficients. The function of displacement for the plate bending problem, when the edge of plate is acted by cutting forces in $x=a$ side and hinge joined in the other sides, will be:

$$w(x, y) = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} \frac{1}{ch^2\lambda a} [(\lambda a sh\lambda a + ch\lambda a) sh\lambda x - \lambda x ch\lambda a ch\lambda x] \sin \lambda y. \quad (3.2)$$

For this case of boundary conditions, have been obtained cutting forces and generalized cutting forces from formulation (2.7):

$$Q_x(x, y) = \frac{Q_0}{ch\lambda a} ch\lambda x \cos \lambda y, \quad Q_y(x, y) = \frac{Q_0}{ch\lambda a} sh\lambda x \cos \lambda y. \quad (3.3)$$

$$V_x(x, y) = \frac{Q_0}{2ch\lambda a} (2ch\lambda x + (1-\nu)\lambda(-x sh\lambda x + a ch\lambda x th\lambda a)) \sin \lambda y, \quad (3.4)$$

$$V_y(x, y) = \frac{Q_0}{2ch\lambda a} ((3-\nu)sh\lambda x + (1-\nu)\lambda(x ch\lambda x - a sh\lambda x th\lambda a)) \cos \lambda y,$$

Condition for equilibrium for cutting forces is satisfied: $R_1 - R_2 + R_3 - R_4 = 0$, where R_i are integrals of cutting forces along the contour of the plate. But for generalized cutting forces this condition doesn't satisfy.

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 = \frac{2Q_0 a(1-\nu)}{ch^2\lambda a} sh\lambda a. \quad (3.5)$$

Is obtained, that equilibrium condition is satisfied for generalized cutting forces, when is investigated bending problem hinge joined in three edges and under action of cutting forces in third edge (and free from distributed loads), when investigated square plate. Therefore, classical theory is applicable for this problem when is investigated square plate. In corner points of plate generalized cutting forces are equal: $V_x = V_y = 0$

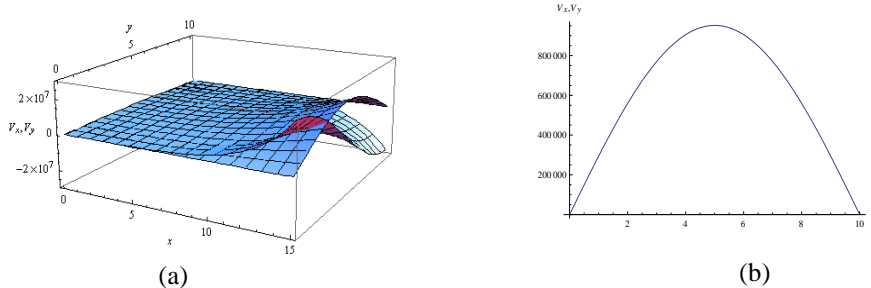


Figure. 3.1.

- Generalized cutting forces V_x, V_y , for plate bending problem, when three edges are hinge joined and in fourth edge is acting cutting forces,
- Generalized cutting forces in $x=0$ edge for correct material.

Fixed edge: $x=0$.

$$x=0 \quad w=0, \quad \partial w / \partial x = 0. \quad (3.6)$$

$$\text{or } f(x) = 0, \quad f'(x) = 0. \quad (3.7)$$

From satisfying conditions in $x=a$ is obtained (2.6) connection between four unknown coefficients. From this two conditions will be found unknown coefficients:

$$F = -\frac{Q_0}{2D\lambda^2} \left[\frac{sh\lambda a + \lambda a e^{\lambda a}}{sh 2\lambda a + 2\lambda a} \right], \quad C = -\frac{Q_0}{2D\lambda^2} \left[\frac{sh\lambda a + \lambda a e^{-\lambda a}}{sh 2\lambda a + 2\lambda a} \right], \quad (3.8)$$

$$A = -B = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} \left[\frac{\lambda a ch\lambda a + sh\lambda a}{sh 2\lambda a + 2\lambda a} \right]. \quad (3.9)$$

For displacement, therefore, will be obtained

$$w(x, y) = \frac{Q_0}{D\lambda^3} \frac{1}{\zeta} \left[sh\lambda a ch\lambda x - \lambda x ch\lambda x sh\lambda a + \lambda a ch\lambda a sh\lambda x - \lambda^2 a x ch\lambda(a-x) \right] \sin \lambda y \quad (3.10)$$

With taking into account (2.7), will be obtained cutting forces and generalized cutting forces for the isotropic plate bending problem, when two opposite edges are hinge joined, the third page is fixed and in fourth page is acting a cutting forces.

$$Q_x(x, y) = \frac{2Q_0}{sh 2\lambda a + 2\lambda a} (sh\lambda a ch\lambda x + \lambda a ch\lambda(a-x)) \sin \lambda y, \quad (3.11)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{2Q_0\lambda}{sh 2\lambda a + 2\lambda a} (sh\lambda a sh\lambda x - \lambda a sh\lambda(a-x)) \cos \lambda y,$$

$$V_x(x, y) = \frac{Q_0}{sh 2\lambda a + 2\lambda a} \left[(\lambda a(1-\nu) ch\lambda a + 2 sh\lambda a) ch\lambda x + \lambda a(1+\nu) ch\lambda(a-x) + (1-\nu)\lambda^2 a x sh\lambda(a-x) - \lambda x(1-\nu) sh\lambda a sh\lambda x \right] \sin \lambda y \quad (3.12)$$

$$V_y(x, y) = -\frac{Q_0\lambda}{sh 2\lambda a + 2\lambda a} \left[-(3-\nu)(\lambda a ch\lambda a + sh\lambda a) sh\lambda x + \lambda(2a(2-\nu) - x(1-\nu)) sh\lambda a ch\lambda x - \lambda^2 a x(1-\nu) ch\lambda(a-x) \right] \cos \lambda y$$

In fig. 3.2 are graphics of generalized cutting forces: $R_1 - R_2 + R_3 - R_4 = 0$. Condition of equilibrium are satisfied for cutting forces and generalized cutting forces $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 = 0$

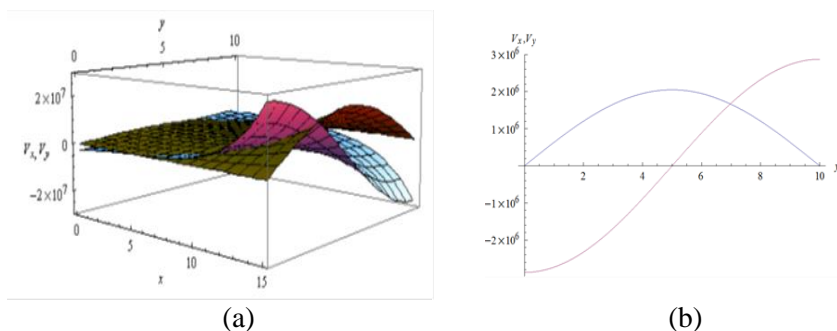


Figure. 3.2

- (a) Generalized cutting forces V_x, V_y , for plate bending problem, when two edges are hinge joined, third is fixed and in fourth edge is acting cutting forces,
 (b) Generalized cutting forces in $x=0$ edge for correct material.

Conclusion: Therefore, for the plate bending problem, when two edges are hinge, third edge is fixed and in fourth edge are acting cutting forces, is obtained that Kirchhoff theory is true, despite the fact that we take into account the Kirchhoff and Thomson-Tat transformation.

4. Investigation of isotropic plate bending problem by improved theory of S.A.Ambartsumyan [1].

The bending problem is investigated by improved theory of higher degree - by theory of S.A.Ambartsumyan. For this theory the displacements are accepted in that form:

$$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{G} g(z) \varphi_1, \quad u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{G} g(z) \varphi_2, \quad u_3 = w, \quad (4.1)$$

where u, v, w - displacements of middle surface, φ_1, φ_2 - are functions, which didn't depend from

z coordinate, G - shear modulus; $g(z) = z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right)$.

Main difference of this theory from other improved theories consists in that displacements in this form of theory of S.A.Ambartsumyan are satisfying to equal zero shear stresses in the surface of plate due to higher degree by z .

The solution for problem by improved theory

$$w(x, y) = \frac{Q_0}{2D} \frac{\lambda^2 + \beta^2}{\lambda^3 \beta^2} \frac{1}{ch^2 \lambda a} \left[(ch \lambda a + \lambda a sh \lambda a) sh \lambda x - \lambda x ch \lambda a ch \lambda x \right] \sin \lambda y,$$

$$\varphi_1(x, y) = \frac{3Q_0}{4h} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{ch \beta a ch \lambda a} \left[-2\lambda^2 ch \lambda a ch \beta x + (\lambda^2 + \beta^2) ch \beta a ch \lambda x \right] \sin \lambda y, \quad (4.2)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{3Q_0}{4h} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{ch \beta a ch \lambda a} \left[-2\lambda \beta ch \lambda a sh \beta x + (\lambda^2 + \beta^2) ch \beta a sh \lambda x \right] \cos \lambda y.$$

For this case of boundary conditions, have been obtained cutting forces: $N_1 = \frac{4h}{3} \Phi_n, \quad N_2 = \frac{4h}{3} F_n.$

Fixed edge:

$$x=0 \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{5G} \varphi_1, \quad \varphi_2 = 0. \quad (4.3)$$

From satisfaction of boundary conditions (4.10) is obtain unknown functions $w(x, y), \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y).$

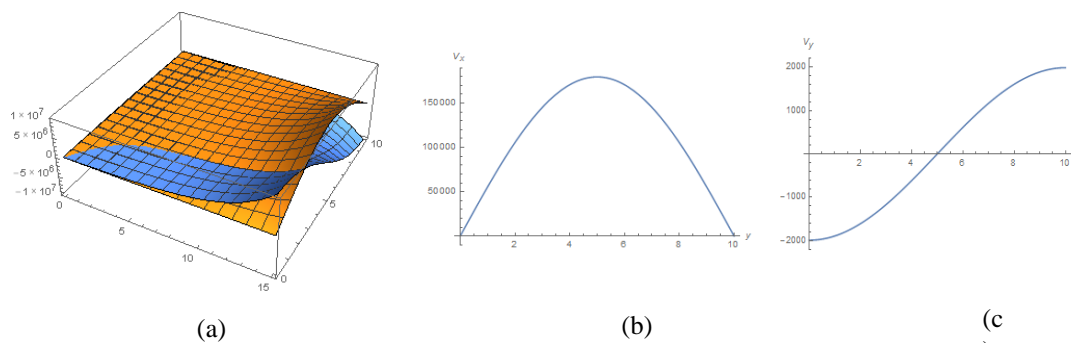


Figure. 3.1.

- a. Cutting forces, for plate bending problem, when three edges are hinge joined and in forth edge is acting cutting forces,
- b. Cutting force V_x in $x=0$ edge for correct material,
- c. Cutting force V_y in $x=0$ edge for correct material.

REFERENCES

1. Ambartsumyan S.A. Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, and Vibrations (Moscow: Nauka). 1987.p 360 [in Russian]
2. Belubekyan M.V. On the equations of plate theory taking into account transverse shear stresses In Problems of mechanics of thin deformable bodies: Collection of Papers, Devoted to the 80th Anniversary of Academician of NAS of Armenia S. A. Ambartsumyan) (Yerevan: Inst. Mekh. NAN RA).2002, p.67–88.
3. Vasil'ev V.V. Kirchhoff and Thomson–Tait Transformations in the Classical Theory of Plates. Mech. Solids No. 5, 2012, p. 98-107.
4. Lehnitsky S.G. Anisotropic Plates (Moscow–Leningrad: OGIZ GITTL).1947, p 355.
5. Meleshko V.V.. Biharmonic problem for rectangular: History and modernity. Mat. Met. Fiz. Mekh. Polya 47 (3) 2004 45–67.
6. Timoshenko S.P. and Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells (New York: McGraw-Hill) 1963.
7. Nadai A. Die elastischen Platten (Berlin: Verlag von Julius Springer). 1925.
8. Vasilyan N.G. Investigation of stress concentration at corner points for orthotropic plate bending problem. Journal of Physics: TPCM-2017. IOP Publishing.

Information about author:

Vasilyan Narine – researcher, Institute of Mechanics of NAS RA,
E-mail: nvasilyan@yahoo.com

ON THE IDENTIFICATION OF RHEOLOGICAL PROPERTIES OF INHOMOGENEOUS MATERIALS

Vatulyan A.O., Varchenko A.A., Yurov V.O.

Inverse problems solutions on determining variable rheological properties of functionally graded beams are discussed based on additional data on the rotation angle of the end section in the framework of the Euler – Bernoulli and Timoshenko models. Within the framework of the complex modules concept, operator relations linking the given and unknown functions are obtained, and the iterative process is implemented. Functions representing the laws of change for the long-term and instantaneous modules have been restored. The results of computational experiments are presented.

In recent years, new materials have been increasingly used in practice, among which let us particularly note functionally graded composites [1-3]. Most of them have pronounced rheological properties due to the presence of polymer components [4-5]. To describe deformations of structural elements made of such materials, it is necessary to take into account rheology on the basis of determining relations of linear inhomogeneous viscoelasticity in the form of integral operators of the Volterra type or linear differential relations. It should be noted that such forms of determining ratios are quite successfully used in the implementation of calculations for strength, stability and vibrations in structural elements [1-3]. At the same time, the most important stages of using such models are the determination of the kernels of the Volterra integral operators or coefficients-coordinate-dependent functions for differential models [6]. In this study, the concept of complex modules for the model of the standard viscoelastic body is used to simulate the oscillations of functionally graded composites with rheological properties [7]. Thus, when studying the deformation of structural elements of such composites, it is required to develop techniques for solving the arising coefficient inverse problems and numerical methods for solving complex-valued boundary problems with variable coefficients [8-9].

In the present research, one-dimensional direct and inverse problems on bending vibrations of an inhomogeneous beam made of a functionally graded material are considered [10]. Next, we assume that the left end of the beam is clamped, and the right end is subjected to the torque M , periodically changing in time with ω frequency. To account for rheology, the correspondence principle generalized to the case of inhomogeneous structures is used. According to this principle, when analyzing steady-state oscillations, it is sufficient to replace elastic characteristics in the corresponding boundary value problem of the elasticity theory with complex functions with respect to the oscillation frequency and coordinates. At the same time, two deformation models are considered – the classical Euler–Bernoulli model and the Timoshenko model taking into account transverse shifts. The boundary value problems arising after the separation of the time multiplier are and reduced to dimensionless canonical systems of differential equations of the 1st order with variable complex coefficients and solved on the basis of the shooting method [7].

1. Problem statement:

Model 1.

The dimensionless oscillation equation in the framework of the Euler-Bernoulli model and the corresponding boundary conditions have the form:

$$(G(x, k)w''(x, k))'' - k^4w(x, k) = 0, \quad (1)$$

$$w(x, k)|_{x=0} = 0, w'(x, k)|_{x=0} = 0, G(x, k)w''(x, k)|_{x=1} = 1, (G(x, k)w''(x, k))'|_{x=1} = 0 \quad (2)$$

where the complex module is represented in the form

$$G(x, k) = (i\tau k^2g(x) + h(x))/(1 + i\tau k^2) \quad (3)$$

$h(x)$, $g(x)$ – dimensionless functions that characterize the laws of variation of long-term and instantaneous elastic modules depending on the dimensionless coordinate x and satisfy the inequality

$g(x) > h(x) > 0$, τ – dimensionless relaxation time, k – the frequency parameter associated with the geometric characteristics of the cross section and the density, which we assume to be constant.

Model 2.

For the Timoshenko model, after dimensionalization, we obtain the following system of differential equations [4]:

$$\begin{cases} -(G(x, k)(\theta'(x, k)))' + smG(x, k)(w'(x, k) + \theta(x, k)) - \theta(x, k)k^4m^{-1} = 0 \\ sm(G(x, k)(w'(x, k) + \theta(x, k)))' + k^4w(x, k) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

where $s = k^*\mu_0/E_0$, $m = F_0L^2/I_0$ – dimensionless parameters, $\theta(x, k)$ is the angle of rotation, $w(x, k)$ is the deflection of the neutral line.

The corresponding boundary conditions have the form:

$$\begin{aligned} w(x, k)|_{x=0} = 0, \theta(x, k)|_{x=0} = 0, \\ G(x, k)(\theta(x, k) + w'(x, k))|_{x=1} = 0, G(x, k)\theta'(x, k)|_{x=1} = -1 \end{aligned} \quad (5)$$

2. Direct problems solution

The direct problem is reduced to a canonical system and solved by means of the shooting method. The canonical system corresponding to the oscillation equation (1) has the following form:

$$\begin{aligned} U_1' = U_2, U_2' = U_3/G, U_3' = U_4, U_4' = k^4U_1 \\ U_1(0) = 0, U_2(0) = 0, U_3(1) = 1, U_4(1) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

For the oscillation equation (4), the corresponding canonical system has the form:

$$\begin{aligned} V_1' = V_3/G - V_2, V_2' = V_4/G, V_3' = -k^4V_1/sm, V_4' = smV_3 - k^4V_2/m \\ V_1(0) = 0, V_2(0) = 0, V_3(1) = 0, V_4(1) = -1 \end{aligned} \quad (7)$$

To implement the shooting method, the auxiliary Cauchy problems are formulated and solved, and the amplitude-frequency dependences for different models are investigated.

3. Approaches to the inverse problems solving

The inverse problem is formulated as follows: using the known complex function of the angle of rotation $\varphi(k)$, it is required to restore two real functions $g(x)$, $h(x)$, characterizing the change in the long and instantaneous modules.

Due to the significant nonlinearity of the inverse problems, when solving them, it is necessary to form iterative processes based on the linearization method [9-10].

Model 1.

Let some initial approximation $G_0(x, k)$ be known. The linearization method allows us to formulate boundary value problems for the initial approximation $G_0(x, k)$, $w_0(x, k)$ and the corrections $G_1(x, k)$, $w_1(x, k)$. These corresponding problems have the form:

$$\begin{aligned} (G_0w_0'')'' - k^4w_0 = 0 \\ w_0|_{x=0} = 0, w_0'|_{x=0} = 0, (G_0w_0'')|_{x=1} = 1, (G_0w_0'')'|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (G_1w_0'')'' + (G_0w_1'')'' - k^4w_1 = 0 \\ w_1|_{x=0} = 0, w_1'|_{x=0} = 0, (G_1w_0'' + G_0w_1'')|_{x=1} = 0, (G_1w_0'' + G_0w_1'')'|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

The problem (8) is solved on the basis of a complex variant of the shooting method, the problem (9) is similar to (8), however, contains unknown characteristics $G_1(x, k)$, $w_1(x, k)$ and therefore the shooting method cannot be used directly for it. At the same time, it is possible to exclude $w_1(x, k)$ by analyzing the problems (8), (9) and obtain the Fredholm operator equation of the 1st kind with a continuous complex-valued kernel [8], which is found by means of solving the problem (8) and using the 5th order spline approximation.

$$\int_0^1 (G_1(x, k)(w_0''(x, k))^2 dx = -(\varphi(k) - w_0'(1, k)) \quad (10)$$

where $k \in [k_1; k_2]$

The equation (10) is reduced to a system of the real Fredholm integral equations of the 1st kind with continuous kernels, which is solved using the A.N. Tikhonov regularization method [6].

To assess the accuracy of the approximation, the residual functional is introduced:

$$\Phi = \int_{k_1}^{k_2} |\varphi(k) - w_0'(1, k)|^2 dk \quad (11)$$

which characterizes the proximity of the found solution to the exact one. An iterative process is constructed to refine the functions of the initial and further approximations [10]. The process stopped either by the number of iterations, or when the threshold value of the functional (11) was reached.

Model 2.

The solution of the inverse problem for the model 2 is carried out similarly to the solution corresponding to the Euler-Bernoulli model. The linearization method is used to determine the corrections; the complex-valued Fredholm integral equation of the 1st kind with a continuous complex kernel is obtained, from which the functions of the first approximation are derived [8]:

$$\int_0^1 G_1(x, k)(\theta_0'^2(x, k) + sm(\theta_0^2(x, k) + w_0'^2(x, k)))dx = -(\theta_0(1, k) - \varphi(k)) \quad (12)$$

Note that if we put $s = 0$, then the equation (12) degenerates into the equation (10). Separating the real and imaginary parts of the integral expression of equation (12), we obtain a system of real integral equations with continuous kernels, the regularized solution of which is similarly constructed using the regularization method, and the first approximation functions are found.

The initial approximation is found from the condition of the minimum of the residual functional

$$\Phi = \int_{k_1}^{k_2} |\varphi(k) - \theta_0(1, k)|^2 dk \quad (13)$$

4. Computational experiments

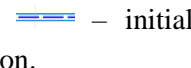




A number of computational experiments for a rod made of viscoelastic functionally graded material have been carried out. A number of numerical experiments have been carried out for monotonic and non-monotonic functions characterizing instantaneous and long-term modules within the framework of two models.

As an example, the decreasing functions of the long and instantaneous module were chosen as:

$$h(x) = 2 - 4x/3, g(x) = 2 - 3x^2/4 \quad (14)$$

relaxation time is $\tau = 0.01$.

For the model 1, according to the calculated amplitude-frequency characteristics, the frequency range is selected in the region between 1st and 2nd resonances: $[k_1; k_2] = [2.5; 3.6]$. From the minimum condition of the functional (11), the values of the initial approximations in the class of constants are found: $g_0 = 1.80, h_0 = 1.25$. Two iterations are sufficient to restore the linear function $h(x)$, and 4 iterations – for the function $g(x)$.

Figure 1 shows the results of the functions $h(\xi)$ and $g(\xi)$ reconstruction:  – initial approximation,  2 iteration,  4 iteration,  7 iteration,  exact function.

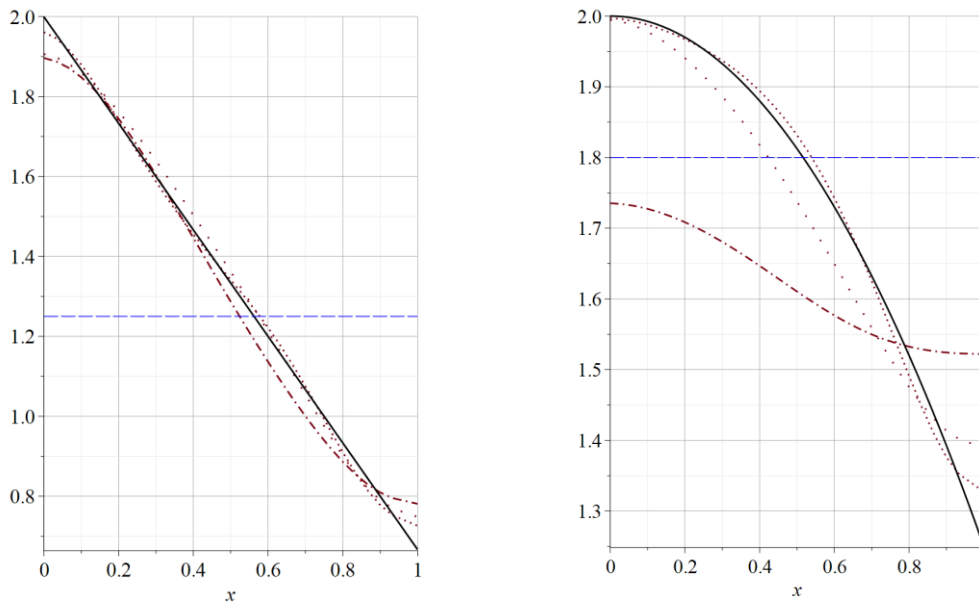


Fig. 1 On the left: the function $h(x)$, on the right: the function $g(x)$ (the Euler-Bernoulli model).

Similarly, a number of computational experiments were carried out for a rod made of viscoelastic material for the Timoshenko model for various laws of change of long-term and instantaneous modules. From the minimum condition of the functional (13), the following values of the initial approximations are found:

$$g_0 = 1.5, h_0 = 1.1$$

An iterative process is constructed to refine the functions of the initial approximations.

According to the calculated amplitude-frequency characteristics, the frequency range is selected as follows (between 1 and 2 resonances): $[k_1; k_2] = [2.5; 3.6]$.

Fig.2 shows the results of the reconstruction for $h(\xi)$ and $g(\xi)$: --- – initial approximation, - - - – 2 iteration, $\cdot \cdot \cdot$ – 4 iteration, $\cdot \cdot \cdot \cdot$ – 7 iteration, — – exact function..

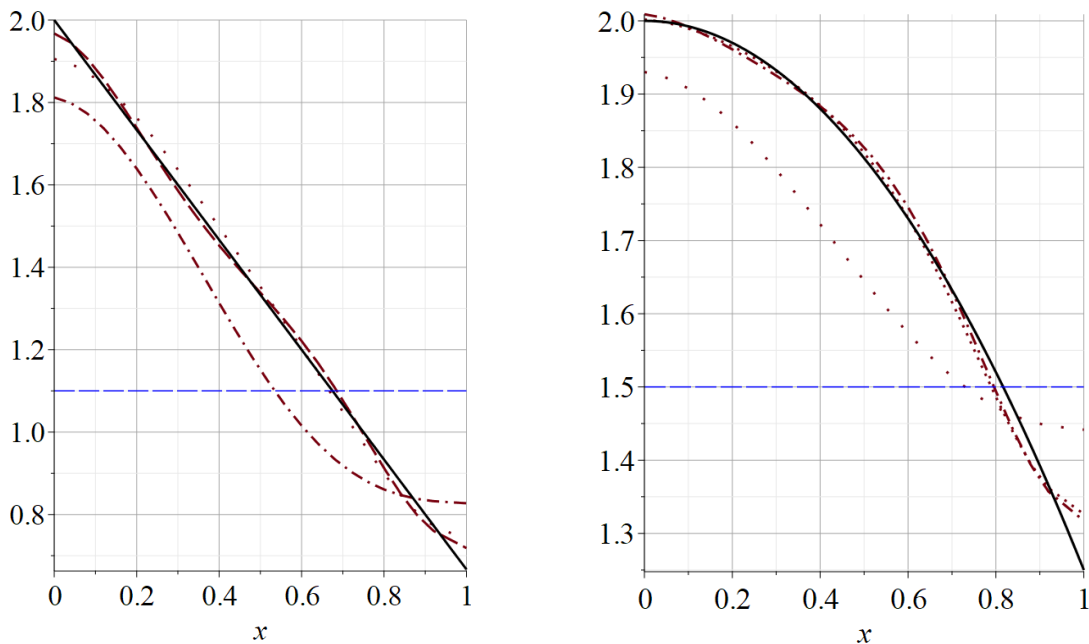


Fig. 2 On the left: the function $h(x)$, on the right: the function $g(x)$ (the Timoshenko model).

From Fig. 1-2, it can be concluded that the function of the long module is restored better than the instantaneous one for both models considered. Reconstruction of the functions included in the representation of the complex module using the Euler-Bernoulli model is more accurate than of those in the case of the Timoshenko model.

The study was partially supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265> / at the Southern Federal University.

REFERENCE

1. Dai H.L., Rao Y.N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015 // *Composite Structures*. 2016. Vol. 152. P. 199–225.
2. Nedin R., Vatulyan A., Nesterov S. Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019. Vol. 128. P. 1157–1167.
3. Christensen R., *Introduction to the theory of viscoelasticity*, M. Mir, 1974. 228c.
4. Vatulyan A. O., Varchenko A. A. Investigation of beam vibrations from a functionally gradient material taking into account attenuation // *News of universities. The North Caucasus region. Natural sciences*. 2021. No. 4. P. 10-18.
5. Vatulyan A.O. Coefficient inverse problems of mechanics. Moscow, Publishing House "Physico-mathematical literature", 2019. 272 p. Bui H.D. *Fracture Mechanics: Inverse Problems and Solutions (Solid Mechanics and Its Applications)*. Springer, 2006. 375 p.
6. Bui H.D. *Fracture Mechanics: Inverse Problems and Solutions (Solid Mechanics and Its Applications)*. Springer, 2006. 375 p.
7. Vatulyan A.O., Varchenko A.A., Yurov V.O. Investigation of coefficient inverse problems taking into account rheology for functional gradient rods // *News of universities. The North Caucasus region. Natural sciences*. 2023. No. 3. P. 4-9.
8. Pouria Hajikarimi, Fereidoon Moghadas Nejad. *Applications of Viscoelasticity Bituminous Materials Characterization and Modeling*. 2021. 244 p.
9. Oscar Zi Shao Ong, Mergen H. Ghayesh, Dusan Losic. Vibrations of porous functionally graded CNT reinforced viscoelastic beams connected via a viscoelastic layer // *International Journal of Engineering Science*. 2023. Vol. 191. 103917.
10. Chang-song Zhu, Xue-qian Fang, Jin-xi Liu. Relationship between nonlinear free vibration behavior and nonlinear forced vibration behavior of viscoelastic plates, // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2023. Vol. 117. 106926

Information about authors

Vatulyan A.O. - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University.

E-mail aovatulyan@sfnu.ru

Varchenko A.A. - Master, Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences.

E-mail aner@sfnu.ru

Yurov V.O. - PhD in Physics and Mathematics, senior researcher, department of differential equations of SMI VSC RAS, Vladikavkaz; senior lecturer of the Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University;

E-mail vyurov@sfnu.ru

COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS FOR ELASTIC AND ELECTROELASTIC BODIES

Vatulyan A.O., Yurov V.O.

Some aspects of coefficient inverse elasticity and electroelasticity problems for operators with variable coefficients are considered. General and weak formulations of electroelasticity problems are presented. Sensitivity characteristics of amplitude fields with respect to the inhomogeneity functions for mechanical and electrical characteristics are studied. An example of the reconstruction of the material inhomogeneity laws for an electroelastic rod under two probing regimes is given.

Introduction. Coefficient inverse problems (CIP) of mathematical physics is an intensively developing area of mathematics, which is devoted to the study of problems related to determining coefficients of boundary value problems for some mathematical model from additional information. For example, additional information for elasticity and electroelasticity models is often provided in the form of the data on displacement fields, electric fields measured either at the boundary or inside the region. As a rule, identification of such coefficients refers to ill-posed problems, which are characterized by possible non-uniqueness and instability with respect to small input perturbations [1]. At present, there are quite a lot of works devoted to various aspects of formulating and treating CIP. Elasticity and thermoelasticity CIP have been studied in most detail [2]. Among many works, we shall mention [3-8] which are devoted to the formulation and analysis of nonlinear ill-posed problems, and [9-11], in which various aspects of numerical implementation are discussed.

The development of new production technologies, including manufacturing functionally graded materials and piezocomposites, required the improvement of techniques for determining their physical properties and are based not on direct experimental methods for their determination within homogeneous models, but on other ways of loading and processing experimental data, primarily on inverse problem computational aspects.

Note that in order to analyze equilibrium or oscillations and use the model of inhomogeneous elasticity theory, it is necessary to know three functions in the simplest case of a continuously inhomogeneous (or piecewise homogeneous) isotropic body (the Lamé coefficients and density of the medium). For electroelasticity models, the number of functions required to perform proper strength or optimization calculations is significantly higher even for rod or disk models. In this case, the variable physical characteristics must be preliminarily determined from the CIP solution. Most often, such dependencies are assumed to be one-dimensional, and the most common way to determine them is to analyze the response of the object under study with a possible variation in the loading method. Note that the piecewise-constant nature of the change in the desired characteristics, which is quite often accepted, is justified in a number of situations, since this assumption significantly narrows the search area and greatly simplifies the study of inverse problems but can lead to a significant distortion of the reconstruction results, and, as a result, to errors in forecasting design resource. In the framework of this approach, the solution of the original inverse problem is reduced to the determination of a finite number of parameters in some limited region of the n -dimensional search space. It should be noted that iterative schemes similar to elastic models are usually used to solve electroelasticity CIP for bounded bodies; at each step a direct problem with known characteristics is solved, and corrections are determined from the solution of a system of operator equations with compact operators.

This research is devoted to some aspects of formulating and studying CIP for inhomogeneous elasticity and electroelasticity models.

Direct problem statement. Let us consider oscillations of an electroelastic body of volume V with a frequency ω with a piecewise-smooth boundary $S = S_u \cup S_\sigma$, $S = S_\pm \cup S_H$; on S_u the components of the displacement vector are set, on S_σ the components of the stress vector are given, on S_\pm – the electric potential, the surface S_H is not electroded. The component-wise oscillation equation has the form:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad D_{j,j} = 0 \quad (1)$$

and the constitutive relations are representable in the form:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij} \varphi_{,k}, \quad D_i = e_{ikl} u_{k,l} - \varepsilon_{kl} \varphi_{,k} \quad (2)$$

The boundary conditions describe the excitation of the body by applying a known potential difference to the electrodes (1st type):

$$D_n|_{S_H} = 0, \varphi|_{S_{\pm}} = \pm\varphi_0, u_i|_{S_u} = 0, \sigma_{ij}n_j|_{S_{\sigma}} = 0 \quad (3)$$

or when specifying the load (2nd type):

$$D_n|_{S_H} = 0, \varphi|_{S_{\pm}} = \pm\varphi_0, u_i|_{S_u} = 0, \sigma_{ij}n_j|_{S_{\sigma}} = p_i \quad (4)$$

where φ_0 is determined from the conditions of connecting the piezoelectric element in the circuit. Here σ_{ij} are the stress tensor components, u_i are the displacement vector components, C_{ijkl} are the elastic constant tensor components, ρ is the density, e_{ikl} are the piezoelectric constants, φ is the electric field potential, D_i are the electric displacement vector components, ε_{kl} are the dielectric constant tensor components, n_j are the components of the unit vector of the outer normal to S , p_i are the components of the active load applied to the body.

The weak statement of the problem is formulated similarly to [10] and leads to

$$A(a, u, v) = \int_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho) dV = F(v) \quad (5)$$

where $A(a, u, v)$ is a trilinear form;

$$2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, e_{kij}, \varphi, \psi, \varepsilon_{ij}, \rho) = C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} + e_{kij}(\varphi_{,k}v_{i,j} + \psi_{,k}u_{i,j}) - \varepsilon_{ij}\varphi_{,i}\psi_{,j} - \rho\omega^2u_iv_i,$$

$$F(v) = \int_{S_{\sigma}} p_iv_i ds + \int_{S_+} D_n\varphi_0 ds - \int_{S_-} D_n\varphi_0 ds - \text{linear form.}$$

In the isotropic elastic case, for the constitutive relations of the form $\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$, from the weak statement (5), assuming $v_i = u_i^{(m)}$, a system of nonlinear integral equations of the Urysohn type can be obtained [12]. By using the Fréchet derivatives [13], we can introduce and analyze the following sensitivity characteristics, which reflect the influence of the desired characteristics on the CIP additional data.

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial a_k} = \xi_{ij}^{(k)}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial a_k} = \zeta_i^{(k)}, \quad a_1 = \lambda, \quad a_2 = \mu, \quad a_3 = \rho \quad (6)$$

In [12], relations were obtained that allow one to study the characteristics (6) for various types of probing loads and to identify the optimal probing modes and frequency ranges.

The CIP on the determination of unknown variable characteristics of an electroelastic body can be considered as the problem of determining the coefficients included in the original boundary value problem (1)-(3), depending on the given additional information.

Inverse problem statement.

Let the boundary values of the field characteristics (displacements, electric field) be given as a function of the oscillation frequency. We will assume that they are given at the same region as the probing loads or, may be, at the larger region. Note that when specifying boundary fields outside the loading area, other approaches to the reconstruction procedure are required. When probing by applying a potential difference to the electrodes, the dependence of the current on frequency is used as input data. The solution of the inverse problem is understood as displacements, electric potential and desired coefficients – elastic moduli, piezoelectric constants, etc., satisfying the equality (5) for any test functions ψ and v_i . Note that the formulated problem is nonlinear and ill-posed.

The initial approximation for the desired functions can be searched in the class of simple functions, e.g. constant or linear functions. The initial approximation satisfies the operator equation $A(a_0, u_0, v) = b(v)$, and the solution at the n -th iteration satisfies $A(a_n, u_n, v) = b(v)$. The linearized equation with a compact operator for finding correction $a - a_n$ has the form $A(a - a_n, u_n, u_n) = b(f - f_n)$.

As an example, consider the problem of reconstructing two variable characteristics of an inhomogeneous electroelastic rod [14] of length l ; it is assumed that the inhomogeneity of a longitudinally polarized rod is described by two functions of the axial coordinate – the piezoelectric modulus d and elastic compliance s . The probing of the rod is carried out by the loads of two types; under mechanical loading, one of the rod's ends is fixed, and an oscillating load is applied to another one, and under electrical loading, electrodes are applied to both rod's ends, and the left electrode has a zero potential, and an oscillating potential is applied to the right electrode. After nondimensionalization, the following two boundary value problems arise, corresponding to mechanical and electrical loadings, respectively:

$$T' = -\kappa^2 U, \quad U' = (f(y) - k^2 q^2(y))T, \quad U(0) = 0, \quad T(1) = 1 \quad (7)$$

$$S'' = -\kappa^2 [(f(y) - k^2 q^2(y))S + q(y)], \quad S(0) = S(1) = 0, \quad (8)$$

where $x = ly$, $d^* q(y) = d(yl)$, $s^* f(y) = s(yl)$, $\kappa^2 = \rho \omega^2 l^2 s^*$, $k^2 = \frac{(d^*)^2}{\mathfrak{e}_{33} s^*}$, $S = \frac{\sigma_{33} s^* \mathfrak{e}_{33}}{d^* D_{30}}$,

$T = s^* \sigma_{33}$. d^* , s^* – characteristic values of the piezoelectric modulus and compliance, S , T – dimensionless stress, k – electromechanical coupling coefficient.

Additional information for solving the inverse problem of restoring functions $f(y)$, $q(y)$ is represented by two functions of the frequency parameter $J(\kappa) = \left(k^2 \int_0^1 q(y) S(y, \kappa) dy - 1 \right)^{-1}$,

$F(\kappa) = U(1, \kappa)$, where the first one describes the amplitude of the current oscillations, and the second one represents the oscillation amplitude of the free end. Since the problems (7), (8) contain the function $q(y)$ and its squared values, in order to ensure the uniqueness of the solution of the inverse problem, it is necessary to assume that $q(y) > 0$.

The solution of the inverse problem is constructed in an iterative manner. If the solution is found at the n -th iteration, then the CIP solution at the $n+1$ iteration is sought in the form $f_{n+1}(y) = f_n(y) + \delta f_n(y)$, $q_{n+1}(y) = q_n(y) + \delta q_n(y)$, where $\delta f_n(y)$, $\delta q_n(y)$ form the solution of the following system of the Fredholm integral equations of the first kind with smooth kernels

$$\int_0^1 \delta f_n(y) K_1(\kappa, y) dy + \int_0^1 \delta q_n(y) K_2(\kappa, y) dy = J - J_n, \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2] \quad (9)$$

$$\int_0^1 \delta f_n(y) K_3(\kappa, y) dy + \int_0^1 \delta q_n(y) K_4(\kappa, y) dy = F - U_n(1), \quad \kappa \in [\kappa_3, \kappa_4]$$

where $K_1 = -k^2 J_n^2 S_0^2$, $K_2 = -2k^2 J_n^2 [1 - k^2 q_0(y) S_0] S_0$, $K_3 = T^2$, $K_4 = -2k^2 q_0(y) T^2$

In the problem under consideration, let us define the sensitivities by the following expressions

$$\Theta_1 = \frac{\partial J}{\partial f} = \int_0^1 K_1(\kappa, y) dy, \quad \Theta_2 = \frac{\partial J}{\partial q} = \int_0^1 K_2(\kappa, y) dy, \quad (10)$$

$$\Theta_3 = \frac{\partial U}{\partial f} = \int_0^1 K_3(\kappa, y) dy, \quad \Theta_4 = \frac{\partial U}{\partial q} = \int_0^1 K_4(\kappa, y) dy;$$

Note that the kernels K_1 , K_3 , K_4 are sign-definite, the kernel K_2 is such only in the low-frequency range; the kernels K_1 , K_2 vanish at the ends of the rod, which leads to the fact that the maximum reconstruction error is observed at the ends; the relations (10) make it possible to determine the frequency range. A series of computational experiments was carried out for various functions of

inhomogeneity and frequency ranges, which showed that the most informative are the ranges in the vicinity of the first and second resonances. Fig. 1 shows the results of sensitivity characteristics (10) for the following functions and parameters: $k = 0.2$, $f(y) = 2(1+y)/3$, $q(y) = (1+y^2)/2$.

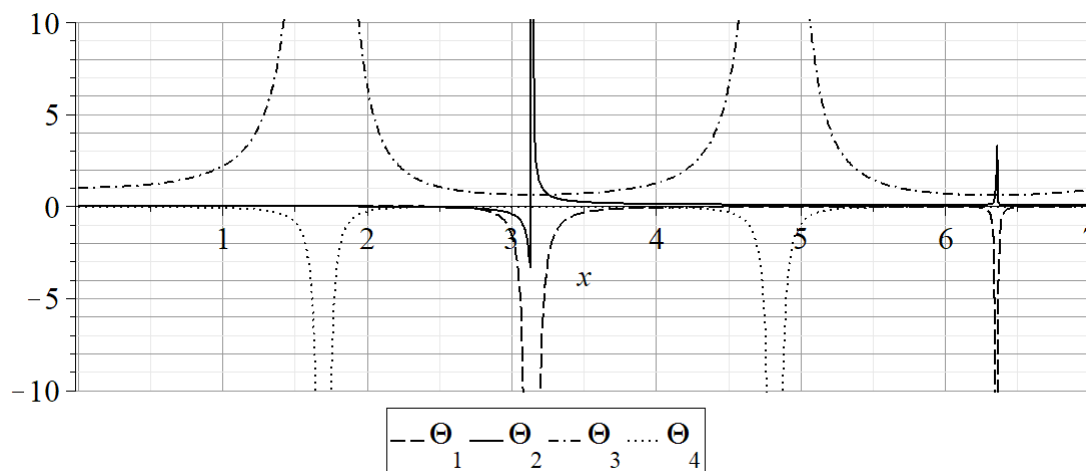


Fig.1

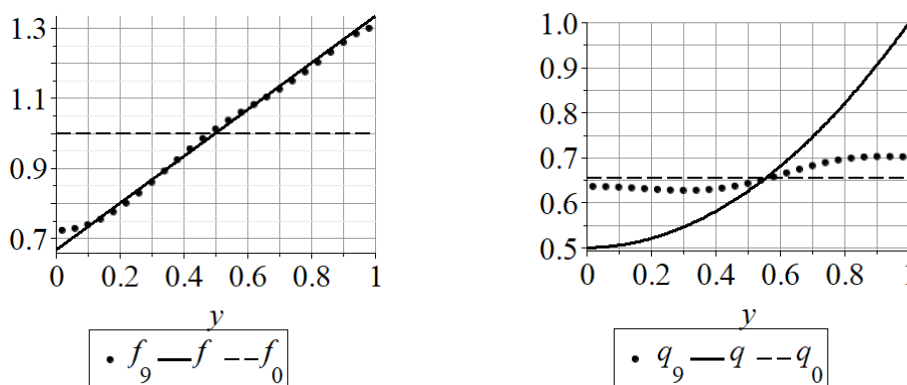


Fig.2

Computational experiments reveal that the function $f(y)$ is restored with a smaller error than the function $q(y)$, which can be observed from Fig. 2, where the exact solution is given by a solid line, the reconstruction result – dots, the initial approximation – dashed line. This difference is due to the higher sensitivity of the corresponding direct problems to the changes in the function $f(y)$.

The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, Southern Federal University.

REFERENCE

1. Tihonov A.N., Arsenin V.YA. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems], M.: Nauka, 1986. 288s.
2. Vatul'yan A.O., Nesterov S.A. *Koefficientnyye obratnye zadachi termomekhaniki* [Coefficient inverse problems of thermomechanics], Rostov-na-Donu; Taganrog: Izdatel'stvo YUzhnogo federal'nogo universiteta, 2022. 176p.
3. Yahno V.G. *Obratnye koefficientnyye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenij uprugosti* [Inverse coefficient problems for differential equations of elasticity]. Novosibirsk: Nauka, 1990. 304p.

4. Gledvell G.M.L. Inverse Problems in Vibration. Springer Science & Business Media/ 2004. 457p.
5. Bal G. Introduction to Inverse Problems. New York: Columbia University, 2012. 205p.
6. Neto F.D.M., Neto A.J.S. An Introduction to Inverse Problems with Applications. Berlin: Springer, 2013. 255p.
7. Kabanihin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: FGUP "Izdatel'stvo SO RAN", 2018. 512s.
8. Vatulyan A.O. On coefficient inverse problems and their applications in mechanics and biomechanics // Mechanics - Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia 2022. V. 75, №1-2. P.36-47.
9. Tihonov A.N., Goncharskij A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach [Numerical methods for solving ill-posed problems]. M.: Nauka, 1990. 230p.
10. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Walter de Gruyter, 2007. 438p.
11. Vatul'yan A.O. Koefficientnye obratnye zadachi mekhaniki [Coefficient inverse problems of mechanics]. M.: Fizmatlit, 2019. 272p.
12. Vatul'yan A.O., Yurov V.O. On the Estimation of the Sensitivity of the Coefficients of Models for Inhomogeneous Solids // Mechanics of Solids, 2023, Vol. 58, No. 3, P. 793–801.
13. V. Hutson, J. Pym, M. Cloud Applications of Functional Analysis and Operator Theory, 2005. 426p.
14. Vatul'yan A.O., Yurov V.O. On the vibrations of functionally graded electroelastic rods // Problems of Strength and Plasticity. 2022. V. 84. No 3. P. 351-363.

Information about authors

Vatulyan Alexander – Head of Department of Elasticity Theory, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Rostov-on-Don
E-mail aovatulyan@sfedu.ru

Yurov Victor – Senior Researcher, Department of Differential Equations of Southern Mathematical Institute, VSC RAS, Vladikavkaz, senior lecturer of the department of elasticity theory, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Rostov-on-Don
E-mail vyurov@sfedu.ru

EXPERIMENTAL INVESTIGATION ON THE EFFECT OF MMT NANOCLAY ON THE MECHANICAL AND THERMAL CHARACTERIZATION OF GLASS FIBER COMPOSITES

Velmurugan R., Chinnapandi M., Sharma A.P., Ashok Kumar Reddy B.

The effect of montmorillonite (MMT) nanoclay on mechanical and thermal characterization of glass fiber-reinforced polymer (GFRP) composites is studied. The static tensile properties of epoxy/MMT nanoclay are also studied. The elastic modulus and tensile strength of epoxy infused with 3 wt. % of nanoclay are 74 % and 230 % higher than neat epoxy. In the case of GFRP composites with 0, 1 and 3 wt. % of MMT nanoclay contents, the tensile strength enhances from 558 to 591 and 628 MPa, flexural strength from 625 to 726 and 905 MPa, interlaminar shear strength from 23 to 26 and 33 MPa, and Izod impact strength from 83 to 94 and 207 kJ/m². For GFRP composites with 0 and 1 wt. % of MMT nanoclay, the glass transition temperature improves from 91 to 101 °C, and storage modulus from 35 to 41 GPa. The thermal conductivity of GFRP composites with 0, 1, and 3 wt. % of MMT nanoclay is 0.30, 0.33, and 0.42 W/m.K. Thus, the above parameters of composites are affected significantly on infusion of MMT nanoclay contents.

1. Introduction

In recent years, most of the metal components in the aerospace, marine, and automotive structures have been replaced with fiber-reinforced polymer composites. Composites have high strength-to-weight ratio, high stiffness-to-weight ratio, good corrosion resistance and are lightweight. Rafiq et al. [1] have found that for low-velocity impact of glass fiber reinforced polymer (GFRP) with 1.5 wt. % of nanoclay, the stiffness shows maximum improvement of 11 % and peak load of 23 %. A physical damage is significantly reduced for hybrid nanocomposites than GFRP. Samples with 3 wt. % loading cause clay agglomeration, which mitigates the enhancement in impact resistance. Gurusideswar et al. [2] have investigated that the low strain rate tensile longitudinal strength and stiffness of GFRP composites increase for 1.5, 3 and 5 wt. % of MMT nanoclay contents. The tensile modulus of epoxy increases with increasing clay contents. Jayakumar et al. [3] have reported that for GFRP composites with 5 wt. % of nanoclay loading, the tensile strength and modulus are increased by 24 % than pristine samples, while the former parameters decrease on adding 7 wt. % of nanoclay. For GFRP composite with 5 wt. % of nanoclay loading, the flexural strength and modulus are increased by 34.1 % and 54 % and impact strength by 30 % than control samples however the former properties decrease for all other nanoclay contents. Sharma et al. [4] have shown that for GFRP composites, the tensile strength and micro-hardness improve on infusion of up to 3 wt. % nanoclay, the values reduce on further infusion of up to 5 wt. % nanoclay. The flexural strength improves considerably on infusion of 5 wt. % of nanoclay. Bozkurt et al. [5] have reported that the tensile properties of non-crimp GFRP composites are affected marginally on clay loading while flexural characteristics of laminates enhance. The glass transition temperature (T_g) of nanocomposites obtained from differential scanning calorimetry is affected on adding modified clay. Moreover, the dynamic mechanical properties of nanocomposites increase on inclusion of surface treated clay particles. It is found from the above studies that the characterization of GFRP composites with montmorillonite (MMT) nanoclay under static tensile, flexural, interlaminar shear, Izod impact, and thermal loads is studied less. The data will be useful to model mechanical characterization of composites. The present study focuses on this direction.

2. Experimental technique

The unidirectional glass fiber mat of 900 GSM, epoxy system of Araldite LY 556 and Aradur HY 951 hardener and montmorillonite (MMT) nanoclay filler are used. The glass fiber reinforced epoxy composites [0]₃ with 0, 1, and 3 wt. % of MMT nanoclay are fabricated by hand layup technique followed by curing in autoclave machine at room temperature. The static tensile tests are conducted on composites with nanoclay of length 300 mm and width 25 mm, as per ASTM D3039. The static three-point flexural tests are conducted on composites of length 120 mm and width 13mm as per ASTM D790. The flexural stress and strain of composites are calculated as per this standard. The static interlaminar shear test is conducted on composites of length, and width of 30 mm and 6 mm as per ASTM D2344. The interlaminar shear strength of composites is determined following this ASTM standard. The Izod impact tests are performed on composites of size 65 × 13 × 2.2 mm. Here, a 25 J pendulum is released from a height of 0.91 m, which then swings down, strikes and breaks the specimens. The

dynamic mechanical analysis (DMA) tests are carried out on composites with length 50 mm, width 10 mm, and thickness 2.2 mm under a three-point bending mode using a dynamic mechanical analyzer. The under-oscillating frequency of 1Hz is measured by recording the temperature ranging from ambient to 110 °C at a heating rate of 3 °C/min. The signals of composites are studied by plotting their loss modulus, storage modulus, and tan delta function against temperature. Further, GFRP composites of diameter 12.7 mm and thickness 2.2 mm and temperature ranging from 30 to 110 °C are tested using light flash apparatus (LFA) technique, which provides a quick, non-detracting, and absolute approach to determine thermophysical parameters. At every 30 °C, the flash signal determines the thermal conductivity, diffusivity, and specific heat of composites. The thermal conductivity of composites is obtained by combining the above thermophysical parameters with the density, $\lambda(T) = a(T) \cdot C_p(T) \cdot \rho(T)$, where, λ is thermal conductivity W/(m.K), a is thermal diffusivity mm²/s, C_p is specific heat J/(g.K), and ρ is bulk density [g/cm³].

3. Results and discussion

3.1 Tensile behavior

The static stress-strain behavior of epoxy infused with 0-5 wt. % of MMT nanoclay is presented in Fig. 1a. It is obtained from measured stress-strain behavior of sandwich composites comprising GFRP face sheets and epoxy/MMT nanoclay core using rule of mixture approach [6]. It is noticed from Fig. 1a that the elastic modulus and strength of epoxy increase significantly with up to 3 wt. % of MMT nanoclay and thereafter it decreases owing to the agglomeration of nanoclay within the epoxy. Particularly, the modulus of epoxy shows an increase of 37 %, 48 %, 74 %, 70 % and 68 % on addition of 1, 2, 3, 4, and 5 wt. % of MMT nanoclay when compared to that of neat epoxy. The strength of epoxy shows an increment of 19 %, 47 %, 230 %, 171 % and 69 % on adding of MMT nanoclay of 1, 2, 3, 4, and 5 wt. % with respect to that of neat epoxy. The failure strain of epoxy increases by 90 %, 60 %, at 3 and 4 wt. % of nanoclay compared to that of epoxy without nanoclay. The stress-strain curve of glass fiber reinforced epoxy composite along the fiber direction shown in Fig. 1(b) seems to follow linear-elastic behavior till the failure. The longitudinal strength and modulus of composites with 0 wt. % of nanoclay content are 558 MPa and 38.7 GPa whereas the values of specimens with 1, and 3 wt. % clay loading are 591 MPa, 36.9 GPa, and 628 MPa, and 41.9 GPa. Thus, the strength is improved by 20 % on addition of 1 wt. % of nanoclay. While, the strength and modulus are improved by 12 % and 8 % on addition of 3 wt. % of MMT nanoclay loading compared to reference specimens.

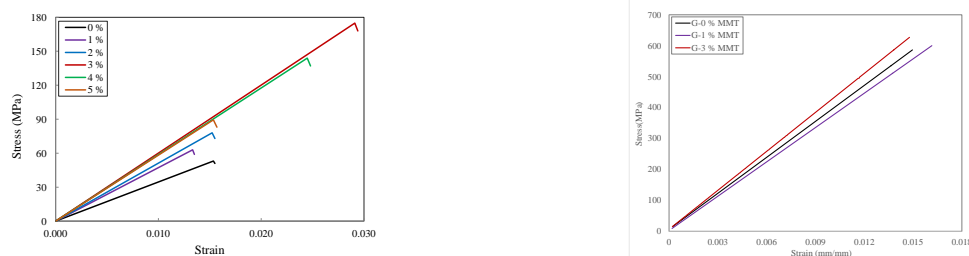


Fig. 1(a) Tensile stress-strain curves of epoxy samples (b) Tensile stress-strain curves of glass fiber/epoxy composites

3.2 Three-point flexural behavior

A three-point flexural stress-strain behavior of glass/epoxy composites with 0, 1, and 3 wt. % of nanoclay loading along the fiber direction is shown in Fig. 2. The stress-strain curve seems to be linear with a slight non-linear behavior up to the maximum stress owing to the formation of matrix cracks. During this, the compression side (top side) of specimen starts to fail. Thereafter, the stress-strain curve drops instantaneously owing to complete fracture of fibers on tension side (bottom side) of specimen. The flexural strength and modulus of GFRP samples is 625MPa, 726MPa, and 905 MPa, and 29 GPa, 33 GPa, and 50 GPa on incorporation of 0, 1, and 3 wt. % of nanoclay loading, respectively. This shows an improved values of strength and modulus of composite by 16 %, 18 % , and 45 % and 72 % on adding 1, and 3 wt. % of nanoclay contents than control specimen.

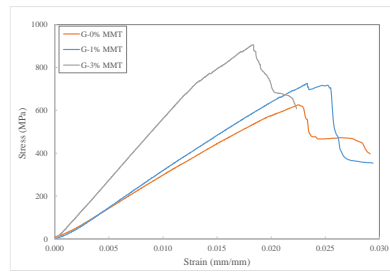


Fig 2. The flexural stress-strain curves of glass fiber/epoxy composites

3.3 Interlaminar shear behavior

The load versus deflection curves of glass/epoxy composites obtained from short-beam shear tests is shown in Fig. 3. The failure is analyzed from five specimens with 0, 1, and 3 wt. % of MMT nanoclay. Before fiber fracture, free edge delamination occurs. The specimen fails through the shear mode. The interlaminar shear strength (ILSS) of glass/epoxy composites describing the shear strength between the glass fibers and the epoxy is obtained from Eq. (2). The ILSS of glass/epoxy composites is found to have significantly improved by 13 % and 44 % on infusion of 1 and 3 wt. % of nanoclay loadings than pristine sample. The maximum deflection of former composites is improved by 1.6 and 2 times on addition of 1 and 3 wt. % of MMT nanoclay than control sample. Higher interlaminar shear strength increases the laminate's tensile strength [3].

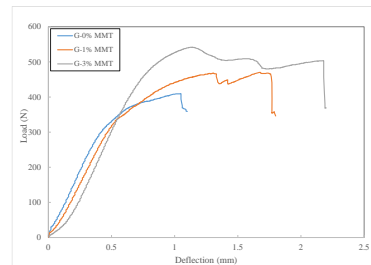


Fig. 3 Short beam shear curves of glass fiber/epoxy composites

3.4 Izod impact behavior

The average Izod impact strength of glass/epoxy composites with 0, 1, and 3 wt. % of MMT clay loading is shown in Fig. 4. The impact strength of specimen without clay is 83.2 kJ/m² and the strength is 94.3 kJ/m², and 207 kJ/m² on addition of 1 wt. % and 3 wt. % of nanoclay. Thus, a strength is improved by 13 % on insertion of 1 wt. %, and 47 % on 3 wt. % of MMT nanoclay than baseline sample.

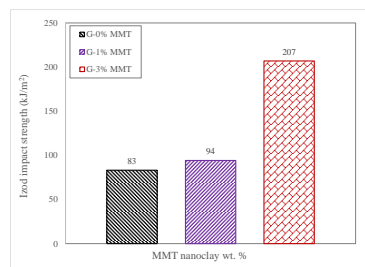


Fig. 4 Izod impact strength of glass fiber/epoxy composites

3.5 Thermal characterization

3.5.1 Dynamic mechanical analysis

DMA measures the mechanical properties of a sample as a function of temperature, frequency, and time under an oscillating load. The glass transition temperature represents the transition from a glassy to a rubbery solid state and is associated with a significant drop in mechanical properties, particularly stiffness, and strength. When a polymer is heated into the glass transition (T_g) zone, the storage modulus declines rapidly while $\tan \delta$ (loss factor) increase [7]. Storage modulus and loss modulus curves of

glass/epoxy composites with 0, and 1 wt. % of nanoclay against temperature at 1 Hz frequency are plotted in Fig. 5. (a) and (b). Storage modulus of specimen improves with 1 wt. % of MMT nanoclay. The storage modulus of neat glass/epoxy is 35 GPa, and the addition of 1 wt. % of MMT nanoclay content leads to a sample modulus of 41 GPa, showing an improvement of 17 %. Similarly, an inclusion of 1 wt. % nanoclay leads to T_g of 101 °C for glass/epoxy composite than without clay sample, having T_g of 91 °C. This shows an enhancement of T_g by 11 %.



Fig. 5(a) The storage modulus of GFRP composites at 1 Hz (b) The loss factor of GFRP composites at 1 Hz

3.5.2 Light Flash Apparatus (LFA)

The specimen front surface of samples is heated by a source of energy pulse. The thermal diffusivity and, if a reference specimen is employed, specific heat of both samples are calculated from the consequent temperature excursion of rear face recorded with an infrared detector. The thermal conductivity of composites is affected significantly by compositions, and surface treatment of fillers and polymers. With increased filler loading, the thermal conductivity and dielectric constant of composites improve [8]. Fig. 6. shows the thermal conductivity of surface of glass fiber composite with 0, 1, and 3 wt. % of MMT nanoclay content. The material's conductivity gradually decreases with increasing temperature. The thermal conductivity of 0 wt. % composite is measured to be 0.32 W/m.K, and the addition of 1 and 3 wt. % of nanofiller results in thermal conductivity of 0.36 W/m.K, and 0.42 W/m.K, at ambient temperature. Thus, thermal conductivity improves by about 13 % , and 31 % on inclusion of 1 and 3 wt. % of MMT nanoclay contents than pristine sample. The mechanical and thermal properties of GFRP composites are anticipated to reduce on further addition of MMT nanoclay loadings, viz. 4 and 5 wt. %.

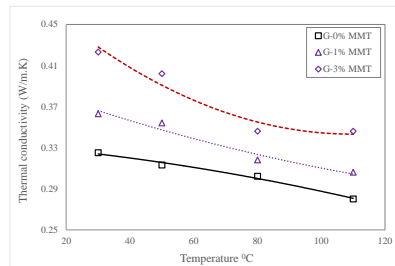


Fig. 6 Thermal conductivity of glass fiber/epoxy composites

4. Conclusions

The present study explores the effect of the addition of MMT nanoclay on the mechanical, and thermal behavior of glass fiber composites such as static tensile, flexural, interlaminar shear, izod impact, dynamic mechanical analysis, and thermal conductivity. Specifically, the glass fiber-reinforced epoxy composites are studied with 0, 1, and 3 wt. % of MMT nanoclay loadings. Further, the epoxy/MMT nanoclay is studied under static tensile loading to interpret the effect of addition of nanoclay on glass fiber composites. The improvements in mechanical properties of glass/epoxy composites with clay are summarized compared to control samples. The tensile modulus, strength and failure strain of epoxy with 3 wt. % of MMT nanoclay show an increment of 74 %, 230 % and 90 %, respectively when compared to neat epoxy. The tensile strength of glass/epoxy composite with 1 and 3 wt. % of MMT clay is improved by 20 and 12 %. The three-point flexural strength of glass fiber/epoxy composites with 1, and

3 wt. % of MMT clay shows a significant improvement of 16, and 18 %. The flexural modulus of former composites with same nanoclay contents is improved by 45 and 72 %. Interlaminar shear strength of former composites with 1, and 3 wt. % of MMT clay is improved by 13, and 44 %. While the maximum deflection of composites with same nanoclay content is increased by 1.6 and 2 times. The Izod impact strength of glass fiber/epoxy composites with 1, and 3 wt. % of MMT clay shows an improvement of 13, and 47 %. The storage modulus and glass transition temperature of glass fiber composites with 1 wt. % of MMT nanoclay show an improvement of 17, and 11 %, respectively. The thermal conductivity of glass fiber composites on addition of 1, and 3 wt. % of MMT nanoclay leads to a significant improvement of about 13, and 31%, at ambient temperature.

REFERENCES

1. Rafiq, A., Merah, N., Boukhili, R. and Al-Qadhi, M., 2017. Impact resistance of hybrid glass fiber reinforced epoxy/nanoclay composite. *Polymer Testing*, 57, pp.1-11.
2. Gurusideswar, S. and Velmurugan, R., 2014. Strain rate sensitivity of glass/epoxy composites with nanofillers. *Materials & Design*, 60, pp.468-478.
3. Jeyakumar, R., Sampath, P.S., Ramamoorthi, R. and Ramakrishnan, T., 2017. Structural, morphological and mechanical behaviour of glass fibre reinforced epoxy nanoclay composites. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 93, pp.527-535.
4. Sharma, B., Mahajan, S., Chhibber, R. and Mehta, R., 2012. Glass fiber reinforced polymer-clay nanocomposites: processing, structure and hygrothermal effects on mechanical properties. *Procedia chemistry*, 4, pp.39-46.
5. Bozkurt, E., Kaya, E. and Tanoğlu, M., 2007. Mechanical and thermal behavior of non-crimp glass fiber reinforced layered clay/epoxy nanocomposites. *Composites Science and Technology*, 67(15-16), pp.3394-3403.
6. Wu HF, Wu LL, Slagter WJ, Verolme JL, Use of rule of mixtures and metal volume fraction for mechanical property predictions of fibre-reinforced aluminium laminates, *Journal of Materials Science*, 29, 4583–4591, 1994.
7. Yang, S., Taha-Tijerina, J., Serrato-Diaz, V., Hernandez, K. and Lozano, K., 2007. Dynamic mechanical and thermal analysis of aligned vapour grown carbon nanofiber reinforced polyethylene. *Composites Part B: Engineering*, 38(2), pp.228-235.
8. Zhou, Y., Liu, F. and Wang, H., 2017. Novel organic–inorganic composites with high thermal conductivity for electronic packaging applications: A key issue review. *Polymer Composites*, 38(4), pp.803-813.

Information about authors

R. Velmurugan - Professor, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Madras, India, e-mail ramanv@iitm.ac.in

M. Chinnapandi - Project Associate, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Madras, India, e-mail chinnapandi31@gmail.com

A. P. Sharma - Post Doctoral Fellow, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Madras, India, e-mail ankushsharma1000@gmail.com

B.Ashok Kumar Reddy - Project Officer, Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Technology Madras, India, e-mail beri.kumar@gmail.com

CREATION OF A NICKEL COMPOSITE USING SURFACE STRUCTURING OF THE REINFORCING PHASE WITH TITANIUM CARBIDE NANOSTRUCTURES TO IMPROVE STRENGTH PROPERTIES

Zemtsova E.G., Kudymov V.K., Sidorov Yu.V., Morozov N.F., Smirnov V.M.

As a result of the study, an approach was developed to obtain a material based on nickel using the surface structuring process. The developed approach made it possible to obtain the composite structure, where an intercalation network of nanostructured titanium carbide is formed in the bulk nickel matrix. A technique was also developed for the uniform introduction of a reinforcing dispersed phase of the metal-carbide composition into the bulk composite. It was shown that the strength properties of the obtained composite materials based on nickel with a dispersed phase of core-shell particles Al@TiC in mass ratios of 1 and 5 wt.% are 1.5 times better than those of pure nickel.

The use of high performance heat resistant metallic materials is increasing despite high prices. The reason is a significant economic gain, which is possible due to the small zone of the highest temperatures in the power plant. According to experts' forecasts, increasing the operating temperature and improving the mechanical characteristics of the metal parts of the combustion chamber and turbine is the main way for the efficiency of heat engines. To improve the strength characteristics, it is necessary to further enhance the structure of nickel materials obtained both by casting and by powder metallurgy with dispersion-hardened nanoparticles (in terms of creating a large number of dislocation pinning centers). This is closely related to the development of new approaches and methods for obtaining metallic materials and composites [1].

Note that for conventional composite materials (matrix with macrofiller), both components of the composite material have different thermal expansion coefficients and different elasticity moduli, which leads to uneven stresses distribution. For these materials, it is important to choose both elements correctly, which is not always possible.

To create a new generation of heat-resistant metallic materials, it is necessary to take into account the properties of its constituents, as well as the structural features of the material at the atomic level. In order to create a heat-resistant material (nickel matrix) with improved strength properties, it is necessary to form it not in the process of melt crystallization or exposure to microcrystalline powder by powder metallurgy methods, but in the course of nanostructuring a metal matrix based on a series of chemical transformations at a temperature below the melting point of the initial matrices. A feature of such a composite material is that the structuring of the nickel matrix with carbide structures is carried out at the nanolevel (3-10 nm).

An important feature of the resulting material is the absence of obvious interfaces between the nickel matrix and reinforcing carbide nanostructures and the binding of the components into a single whole. This is achieved due to the fact that the carbide nanostructures of the reinforcing element are chemically bonded to the metal matrix. The atoms of the reinforcing material and the matrix material, connected to each other by chemical bonds through a conditional interface plane, simultaneously belong to two consistent structures, as a result of which the resulting conditional interface is characterized by low energy and, therefore, high strength.

To create a nanocomposite based on nickel reinforced with titanium carbide nanostructures (nickel-ceramic system), we used the powder metallurgy method and ALD method. The main technological chain for obtaining materials of the metal-ceramic system implied: firstly, obtaining a nanostructured carbide phase on aluminum particles ASP-50 of the core-shell composition (Al@TiC) in nickel matrix bulk, and secondly, compacting the workpiece from Ni powder PNE-1 with a particle size of 70 μm and a reinforcing phase by cold pressing and sintering. After the pressing/sintering procedure, the samples were pressed with torsion at a pressure of 1.5 GPa to homogenize the material,

i.e., to uniformly distribute titanium carbide nanostructures over the entire volume of the nickel matrix.

The work also describes synthetic approach for the uniform introduction of a nanodispersed carbide phase into the Ni matrix bulk. The approach is based on the creation of an intercalation mesh of titanium carbide in a bulk of nickel by the ALD method. This helps to obtain nickel composites with high strength characteristics. Carbide nanostructures are localized at the grain boundaries of the nickel composite and thereby strengthen them at room temperature and higher temperatures.

Aluminum particles are also valuable as alloying additive in Ni-based alloys and lead to improved material ductility. The simultaneous introduction of titanium and aluminum carbide into a Ni-based composite material helps to control the mechanical properties of the material in a targeted manner and to obtain a dispersion-strengthened material [2].

In this work, composites with different ratios of the Ni matrix and the reinforcing phase consisting of aluminum with a carbide phase on the surface (Al@TiC) were obtained with subsequent analysis of their microstructure and mechanical properties.

Table 1. Fabricated composite samples based on a Ni matrix.

Sample No.	Matrix	Reinforcing phase	Reinforcing phase content, wt. %	TiC content, wt. %	σ , MPa at 20°C
1	Ni	No	-	-	700
2	Ni	Al@TiC	1	0.0004	980
3	Ni	Al@TiC	5	0.002	1070

Despite the small volume fraction of titanium carbide in the Ni composite structure, carbides have a significant effect on the strength properties..

The samples produced by us with a reinforcing phase of the core-shell structure (Al@TiC) showed strength characteristics significantly superior to samples with micron-sized reinforcing carbide phases. This is due to the fact that the titanium carbide shell obtained by molecular deposition on ASP-50 aluminum was destroyed during pressing with torsion at a pressure of 1.5 GPa. And as a result, we are no longer dealing with a micron-sized reinforcing phase based on ASP-50 particles with a diameter of 50-80 microns, coated with a titanium carbide layer, which would not give such a significant increase in the strength properties of the material, but with a nanosized fraction of titanium carbide, uniformly crushed and distributed over the nickel composite bulk. In this case, the dispersed reinforcing phase will have a directed effect on the mechanical properties of the resulting composite.

Conclusion. In this work, a method was developed for obtaining a Ni composite with a reinforcing phase based on the surface structuring of aluminum particles with nanosized titanium carbide with a core-shell structure and with a uniform introduction of the reinforcing phase into the Ni matrix. Studies of the mechanical strength of composites at room temperature showed an increase in the ultimate strength of the obtained composites by 1.5 times compared to pure Ni.

The study was financially supported by the Russian Science Foundation, agreement No. 23-21-00421. The authors express their gratitude to the Science Park of St. Petersburg State University, RC "Center for the Study of Extreme States of Materials and Structures", RC "Nanotechnology".

REFERENCE

1. Jorge M. Cubero-Sesin, Zenji Horita (2012). Mechanical Properties and Microstructures of Al-Fe Alloys Processed by High-Pressure Torsion. vol. 43(13), 2012. doi:10.1007/s11661-012-1341-z.
2. Mohanakumara, K. C., Rajashekar, H., Ghanaraja, S., & Ajitprasad, S. L. (2014). Development and mechanical properties of SiC reinforced cast and extruded Al based metal matrix composite. Procedia Materials Science, 5, 934-943.

Information about Authors

Zemtsova Elena Georgievna – Associate Professor, St. Petersburg State University, Institute of Chemistry (7(812)4284033)

E-mail: ezimtsova@mail.ru

Kudymov Vladimir Konstantinovich – student, St. Petersburg State University, Institute of Chemistry (7(812)4284033)

E-mail: v.k.kudymov@gmail.com

Sidorov Yury Viktorovich – Senior Researcher, St. Petersburg State University, Institute of Chemistry (7(812)4284033)

E-mail: si_dorov@mail.ru

Morozov Nikita Fedorovich – Professor, St. Petersburg State University, Faculty of Mathematics and Mechanics (7 9219405031)

E-mail: n.morozov@spbu.ru

Smirnov Vladimir Mikhailovich - Professor, Saint Petersburg State University, Institute of Chemistry (7(812)4284033)

E-mail: vms11@yandex.ru

Contents and Abstracts

1. **Avetisyan V.V. *Control of a Single-Link Manipulator with Consideration of Limits on Voltage and Heat Release Power*** For a system simulating the dynamics of a single-link electromechanical manipulator, the problem of constructing a control voltage and determining the areas of final states is solved, the transition to each point of which from the initial state of rest using the constructed control occurs in a finite time without violating the specified restrictions on the voltage and heat release power in the winding of the rotor of the electric motor.5
2. **Agabekyan P.V., Harutyunyan L.A. *Flat Problem of the Theory of Elasticity for a Composite Region Bounded by Arcs of Intersecting Circles*** We consider a plane problem in the theory of elasticity about the smooth contact of two bodies of finite dimensions occupying areas in the form of circular segments of different radii, having identical bases. On each of the free boundaries, normal pressure forces are specified, the resultants of which are equal to each other, as well as tangential stresses, the resultants of which are equal to zero. Using bipolar coordinates and the apparatus of the Fourier integral, the solution to the problem posed is reduced to the solution of a singular integral equation on an infinite interval.....9
3. **Aghayan K.L., Atoyán L.A., Sahakyan S.L. *Shear Vibrations of Stamps at the Edges of the Piezoelectric Layer***. The problem of directed propagation of harmonic waves in a piezoelectric waveguide layer, the boundaries of which are grounded, is considered. It is assumed that the waveguide layer along the boundaries is reinforced with inextensible tapes, which have different lengths, do not resist bending, and are located symmetrically on top of each other. Assuming that the layer is under conditions of antiplane deformation, the electroelastic wave field in the layer, the amplitudes of contact stresses under the tapes, as well as the number of reflected and transmitted waves and their wave characteristics are determined depending on the physical and geometric parameters of the waveguide and incident waves.12
4. **Aghayan K.L., Zakaryan V.G. *Plane Shear Wave in an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions*** The problem of directed propagation of elastic shear waves in a waveguide (layer) under mixed boundary conditions on boundary planes is considered. The solution of the problem in the general case is reduced to the solution of two integral equations, the kernels of which are represented as the sum of hypersingular, logarithmic and regular parts. Explicit expressions for the wave functions representing the field of elastic displacements in all regions of the layer are obtained. The number and wave characteristics of reflected and transmitted waves are determined.17
5. **Aizikovich S.M., Lapina P.A. *On the Question of Equivalence of Models of Inhomogeneous Elastic Media***. As part of solving contact problems about the action of a rigid stamp on the surface of inhomogeneous media (inhomogeneous half-space, inhomogeneous layer on an elastic base, inhomogeneous layer on a rigid base), a comparative analysis of models of inhomogeneous elastic bases was carried out. When constructing solutions to integral equations of the corresponding contact problems, approximate analytical methods are used (Wiener-Hopf method, large parameter method, two-sided asymptotic method). Based on the proximity of the transformants of the kernels of the integral equations, regions of parameters of the elastic moduli of models of inhomogeneous media were identified for which the values of contact stresses also turned out to be close. This ensures the equivalence of the models under consideration in the resulting parameter range.....22
6. **Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Hakobyan L.V. *On a Contact Problem for a Homogeneous Plane with Finite Crack under Dry Friction, the Coefficient of which Depends on the Coordinate*** An exact solution of the contact problem on the indentation of an absolutely rigid punch with a straight base into one of the banks of a finite crack, located in a homogeneous elastic plane, is constructed. It is assumed that the tangential contact stresses are related to normal pressure by the Coulomb law, the friction coefficient of which is directly proportional to the coordinate of the contact points of the contacting surfaces.27
7. **Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Dashtoyan L.L. *Axisymmetric Contact Problem for a Homogeneous Space with a Circular Disk-Shaped Crack under Generalized Dry Friction*** The paper considers an axisymmetric stress state of a homogeneous elastic space with a circular disc-shaped crack, into one of the edges of which a cylindrical circular punch (stamp) is pressed with

- friction. Assuming that the law of dry friction is in the contact zone, in which the friction coefficient depends on the radial coordinates of the contacting surfaces and is directly proportional to them, an exact solution of the problem is constructed.....30
8. **Amirjanyan H.A., Grigoryan A.H. *On Contact of an Absolutely Rigid Stamp with a Half-Plane with Friction Included*** The plane-strained state of an elastic half-plane into which an absolutely rigid stamp with friction is pressed is considered. Assuming that the shear stresses acting in the contact zone are related to the normal pressure according to the law of dry friction, the coefficient of which is a linear function of the coordinates of the contacting points of the contacting bodies, a closed solution of the problem is constructed in quadratures.....33
 9. **Arutyunyan A.R., Petruchok A.I., Sudenkov Yu.V. *Investigation of Changes in the Modules and Energy Balance of Polymer Materials During Mechanical Experiments.*** In this paper, the evolution of elastic characteristics, as well as the energy balance of structural materials in the process of mechanical experiments are experimentally investigated. The optical-acoustic method was used for the research. Experimental curves of variation of coefficients of transverse deformations, velocities of longitudinal and transverse waves for caprolon specimens during experiments were plotted. A study of the energy balance in a series of tensile and creep experiments of caprolon specimens is given.....37
 10. **Arutyunyan A.R., Saitova R.R. *Description of Step Loads at High Temperature Creep of Metallic Materials*** In conditions of high-temperature creep, the evolution of the damage of metallic materials occurs. To describe it, the damage conception of Kachanov-Rabotnov is used. In this paper, the damage parameter is defined as the relative change of the material density, which is an integral characteristic of damage. Taking into account this parameter and the mass conservation law, interrelated kinetic equations for creep deformation and damage parameter are formulated. Analytical solutions of these equations are obtained for the case of two-stage loading. Analytical solutions and experimental results on the creep of duralumin of D16T mark under variable loads at 150°C are compared. A good agreement of the obtained theoretical curves with the experimental results is observed.42
 11. **Astafiev V.I., Gubanov S.I. *Mathematical Model of a Viscous Incompressible Fluid Flow for Horizontal Pipes with Permeable Walls*** The basic equations for the stationary flow of a single-phase viscous incompressible fluid through horizontal permeable pipelines and methods from the solution are formulated. The basic equations are based on the law of conservation of mass, the equation of continuity and the constitutive relationship in the form of Starling's law, which relates the value of the rate of fluid inflow through the permeable wall of the pipeline and the pressure drop in the reservoir and inside the pipeline.....46
 12. **Akhunova A.Kh., Baimova Yu.A. *Effect of Test Temperature on the Strength of Graphene with Defects under Uniaxial Extension*** The theoretical study of defects in graphene makes it possible to predict its physical and mechanical properties, which ultimately contributes to the expansion of the field of its practical application. The molecular dynamics method was used to study the mechanical properties of graphene in the temperature range. Dislocation dipoles consisting of two combined defects 5-7 (dislocations) located at different distances from each other have been studied. The effect of temperature on the mechanical properties of graphene with a dislocation dipole has been studied. It is shown that an increase in temperature has little effect on the strength of graphene with dislocation dipoles, regardless of the size of the dipole arm, in contrast to defect-free graphene and graphene with a Stone–Wales defect (zero-arm dipole).50
 13. **Baghdasaryan G.E., Panteleev A.V. *Supersonic Flutter of a Composite Cylindrical Shell*** The proposed work is devoted to the stability of a layered cylindrical shell of monolayers of an orthotropic composite material (CM) in a supersonic gas flow. The study was carried out in a linear formulation in the case of a closed elongated shell. A formula for determining the critical flutter velocity is obtained. The extreme values of the critical velocity are found from the wavenumbers depending on the reinforcement angles of the layers of the shell material. The results obtained greatly facilitate the study of the issues of optimal control of the value of the minimum critical speed by choosing the angle of reinforcement and the physical and mechanical parameters of the problem under consideration. They emphasize ways of researching these issues.....54

14. **Barseghyan V.R., Matevosyan A.G. *On One Problem of Controlling an Airplane-type Unmanned Aerial Vehicle with Given Intermediate Values of Different Parts of Coordinates*** The mathematical model of spatial flight of an unmanned airplane-type vehicle is considered. For a linearized mathematical model of an unmanned aerial vehicle the problem of synthesis of control laws with given initial, finite values of the phase vector and intermediate values of different parts of coordinates at different moments of time is solved. A necessary and sufficient condition for the existence of program control and the corresponding motion is formulated. The control functions and corresponding phase trajectories of motion are constructed. As an application of the proposed approach, explicit expressions of the program control function and program motion are constructed for specific numerical values.....59
15. **Bushueva A.V., Dyakova V.V., Polezhaev D.A. *Experimental Study of the Mass Transfer of a Substance Dissolved in Water in a Hele-Shaw Cell in the Presence of Water Vibrations*** The results of an experimental study of the mass transfer of a substance dissolved in water in a Hele-Shaw cell in the presence and absence of water oscillations are discussed. Experiments are carried out in an "empty" Hele-Shaw cell and in a cell filled with calibrated balls, the diameter of which is slightly less than the width of the gap between the glass plates forming the cell. In the absence of oscillations, the mass transfer of a substance dissolved in water is ensured only by molecular diffusion. Experiments with an oscillating liquid show that the rate of mass transfer increases and depends on the frequency and amplitude of oscillations. Presumably, the effect is associated with the appearance of Taylor dispersion and the appearance of averaged flows in the pores between the balls. The technique for measuring the mass transfer rate is original and is based on measuring the concentration of the solute - the fluorescent dye rhodamine B - by the intensity of fluorescent radiation. The results of measuring the molecular diffusion coefficient of rhodamine B in water are in good agreement with data obtained using other experimental techniques.....64
16. **Valesyan S.Sh., Sahakyan A.A. *An Experimental Research of the Hinge Supported Beam Deflection Subjected to Concentrated Force.*** An experimental research of the hinge supported beam maximal deflection subjected to concentrated force is carried. The influence of the force application point on the maximal deflection is studied. The comparison of experimentally obtained results with the theoretical ones is brought.....66
17. **Vasilyan T.G., Jilavyan S.H. *On Thermoelastic Vibrations of an Anisotropic Plate with Allowance for Shear Deformations.*** Thermoelastic vibrations of a homogeneous plate made of a transversely isotropic material are considered on the basis of an improved theory of plates. The effects of taking into account transverse shear deformations in the interrelated problem of thermoelasticity on the frequency and damping coefficient of vibrations are studied.....71
18. **Vindokurov I.V., Pirogova Yu.V., Tashkinov M.A., Zilbershmidt V.V. *Effect of Deformation Rate on Mechanical Properties and Surface Morphology of PLA Specimens During 3D Printing*** The study of the features of deformation of products created using additive technologies (AM) under different types of loading is of practical importance for optimizing printing processes and improving the quality and reliability of manufactured products. This allows you to predict and control the behavior of materials in operation and design stronger and more efficient structures. This paper presents the results of an experimental study of the mechanical properties of polylactic acid (PLA) cubic samples of different sizes, fabricated additively by layer-by-layer printing at different loading.....75
19. **Vlasova O.A. *Dynamics of a Pair of Free Cylinders in a Cavity Filled with Liquid and Performing Modulated Rotation*** The dynamics of a pair of cylindrical bodies in a cylindrical cavity with a fluid performing a modulated rotation around a horizontal axis is experimentally studied. A periodic change (modulation) of the cavity rotation velocity leads to the occurrence of azimuthal oscillations of bodies due to viscous interaction with the cavity boundary. It is shown that an averaged repulsive force directed from the cavity wall acts on a body oscillating near the cavity wall. As a result, a gap appears between the bodies and the wall of the cavity, which grows with the modulation amplitude. The repulsive force was measured by the method of suspension of bodies in a centrifugal field in a wide range of dimensionless frequencies. It is shown that the force manifests itself at a distance comparable to the thickness of the dynamic boundary layers.....80

20. **Gandilyan D.V., Ustinov K.B.** *The Problem of Detaching a Coating from a Cylindrical Substance Taken into Account of the Influence of its Curvature, Compliance, and also the Action of Transverse Forces.* The process of formation of delamination of a coating from a cylindrical substrate under the action of compressive stresses has been studied. Delaminations located in the axial and circumferential directions are considered. The problem was studied in the approximation of the theory of cylindrical shells with boundary conditions of the generalized elastic embedding type. Expressions were obtained for the rate of energy release during peeling along straight and curved boundaries, the angle of rotation at the embedding point, and profiles of the peeled section of the coating were also obtained.82
21. **Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z.** *On the Stability of Orthotropic Plates-Strips of Variable Thickness Taking into Account Transversal Effects* The problem of Euler stability of orthotropic plates-strips of variable thickness under plane deformation conditions is considered, taking into account the transverse shear and rotational inertia. The resulting equations make it possible to determine both the frequencies of natural oscillations and the critical values of the axial force at which the plate-strip loses its stability. The problems are solved by the modified collocation method under different boundary conditions at the ends and values of geometric and physical parameters that characterize the plate-strip of variable thickness87
22. **Geodakyan E.G., Karapetyan J.K., Sahakyan B.V., Mkrtchyan M.A., Oganesyanyan S.M., Mkrtchyan G.A.** *Fault Formation Process and Mechanical Model of the Focus of the East Turkish Earthquake February 06, 2023 Mw=7.8* In the present work, on the basis of instrumental data from seismic stations registering the Gaziantep (Turkey) earthquake Mw=7.8, kinematic, dynamic parameters and spectral characteristics of source radiation are determined. An analysis of the wave patterns of velocigram registration at the nearby Turkish and remote Garni (Armenia) geophysical stations revealed that the main rupture is a multi-act, consisting of 4 sub-foci, a complex nonlinear process of rupture formation. A comparative analysis of the formation of the main rupture was carried out, with the parameters of the source mechanism and the geological and tectonic structure of the epicentral region, and a geodynamic model of this earthquake was developed. The constructed geodynamic model makes it possible to identify the main regularities and characteristic features of the rupture formation of the source of strong earthquakes that occur in the region and to adequately assess the refined pattern of seismogenesis. Effect of Interionic Coulomb Interaction on the Dynamics of Oscillations of Ionic Crystals under Pulsed Loading.....92
23. **Gurgenyan N.V., Khachanova I.B.** *Influence of Strength and Elastic Modulus of Perlite Rock, Classified by Average Density, on the Process of its Grinding* The mechanism of grinding perlite rock of the Aragats deposit, classified by average density, has been studied. Two methods for the destruction of raw materials of uniform density were studied - in cone and laboratory jaw crushers, followed by analysis of the resulting product. On the example of a jaw crusher, the energy costs for crushing classified perlite are calculated. In this connection, a correlation was obtained between the strength, modulus of elasticity and the average density of the rock. On the basis of the data obtained, a more rational technology for the mechanical processing of perlite is recommended, separately by density.97
24. **Jilavyan S.H., Galichyan T.A.** *Localized Shear Waves in a Compound Piezoelectric Medium* Problems of existence of a shear surface electroelastic wave localized near a stress-free plane in a compound piezoelectric medium are considered.102
25. **Evstifeev A.D., Yakupov B.A., Smirnov I.V., Volosevich D.V., Voropaev A.A.** *Mechanical Properties of Layered Aluminum Composites Produced Using WAAM Technology Based on AA1050 and AA5056 Alloys* The paper investigates the possibility of creating layered aluminum materials using the technology of wire-arc additive manufacturing. The features of deformation of composites based on aluminum alloys AA1050 and AA5056 are considered. The results of experiments on the tension of samples with different orientations of AA1050 layers in the matrix of the AA5056 alloy are presented. The results obtained are analyzed taking into account the structural features of composite materials.....107

26. **Erofeev V.I., Leontieva A.V., Shekoyan A.V. *Influence of the Parameters of Point Defects on the Dispersion and Nonlinear Spatial Localization of Longitudinal Waves Propagated in Materials.*** This paper shows that a self-consistent mathematical model, which includes the equations of elasticity theory and kinetic equations for the densities of various types of point defects, can be reduced to a nonlinear evolution equation that combines the well-known equations of wave dynamics: Korteweg–de Vries–Burgers and Klein – Gordon. 111
27. **Zemtsova E.G., Morozov N.F., Semenov B.N., Smirnov I.V., Smirnov V.M. *Mechanical Properties of Aluminum Matrix Composite Reinforced with Titanium Carbide*** An original method for the manufacture of metal-matrix nanocomposites is proposed, which consists in applying the method of molecular layering to the surface of particles of aluminum powder of titanium carbide with a thickness of 4-12 nm, mixing the obtained dispersed particles with metal particles, subsequent pressing, sintering the resulting mixture and subjecting the obtained workpieces to severe plastic deformation by the torsion method. under high pressure, as a result of which not only porosity decreased, uniform distribution of reinforcing particles over the volume was ensured, and carbide shells on the surface of dispersed particles were destroyed, but aluminum particles were also crushed. Experimental curves of deformation σ - ε of samples from the synthesized composites are constructed. The possible contribution of various strengthening mechanisms to the final strengthening of aluminum matrix composites was assessed and compared with experimentally determined strengthening, on the basis of which the grain size of aluminum in the matrix was estimated. In metal composites synthesized by this method, with small fractions of the volume content of reinforcing titanium carbide particles (less than 0.5%), almost twofold strengthening and a threefold increase in the yield strength are observed with a slight reduction in plastic deformation before failure. 115
28. **Zimin V.N., Krylov A.V., Shakhverdov A.O. *Features of Simulation of the Drive for the Opening of Transformable Large Space Structures*** The development of information and transport space systems will require the creation of large-sized structures. A special class of such space structures is formed by transformable systems, the schemes of which are built on automatic configuration change. The dimensions of transformable space systems in the transport and deployed operating states, as a rule, can differ by dozens of times, while the procedure for deploying such systems occurs under the influence of power drives. The most rational power drive that can be used in transformable space structures is a drive with active elements made of titanium nickelide material with a shape memory effect, which have the ability to generate significant force, reliability, compactness, light weight and low power consumption. In the practice of creating large-sized transformable space systems, a significant role is given to full-scale experiments, for the reconstruction of which in terrestrial conditions, expensive stands are required. Therefore, a mathematical experiment using the developed computational models with identifiable parameters is an alternative way to test the functional suitability of the created large-sized transformable space system. The experimental and theoretical studies of the active elements of the power drive made of titanium nickelide material (wire with a diameter of 1.5 mm) confirmed the fundamental possibility of creating a drive for deploying large-sized transformable space structures. 120
29. **Zimin B.A., Sudenkov Yu.V., Yalych E.S. *The Effect of the Interionic Coulomb Interaction on the Dynamics of Vibrations of Ionic Crystals under Pulsed Loading*** Low-frequency (acoustic) vibrations of an ion crystal under pulsed loading are considered. Given the large contribution of Coulomb energy to the binding energy for ionic crystals, the dynamic oscillation equations are written using the Maxwell stress tensor, which is determined by the second moment $\langle E_i E_k \rangle$ of the electromagnetic stress field. The analysis of Maxwell's equations and Euler's equations make it possible to establish the dependence of elastic modules on the root-mean-square value of the electromagnetic stress field in ionic crystals. At the initial moment of loading, this value is equal to zero, and we get the value of the volumetric modulus of the liquid, which is confirmed by experiment. 125
30. **Kazakov K.E., Parshin D.A. *Contact Problem of the Interaction of a Bush with a Complex Internal Profile and a Coated Pipe Worn on a Shaft*** This work is devoted to the formulation and construction of an analytical solution to the problem of the contact of a rigid bush and a cylindrical viscoelastic aging pipe with an outer thin coating. In practice, the presence of additional coatings is required, for example, to protect the main structure from aggressive external or internal environments, for its electrical and thermal insulation, etc. A bush worn with tension on a two-layer

- pipe may have a complex profile, which is characterized by a rapidly changing function. Taking into account the complex profile of features is important when analyzing the stress-strain state of pipes. Using an approach based on the use of special basic functions and the type of solution, a representation is obtained for the contact stresses in the pipe in the area of its interaction with a rigid bush. The approach used makes it possible to identify functions describing the shape of the internal profile of the bush in the form of separate terms and multipliers in the expression for contact stresses. Therefore, in order to achieve high accuracy in the calculations, it is sufficient to limit ourselves to a relatively small number of members of the series..... 129
31. **Karapetyan K.A. *Dependence of Deformation Properties and Strength of Composites Based on Cement Binder on the Amount of Desorpted Moisture*** The paper discusses the results of a study of the dependence of the modulus of elasticity and strength of two series of structural cement lightweight concretes and cement soil on the duration of the process of desorption of chemically unbound moisture that has been preserved in their pores and capillaries for a long time. It is shown that when commenting on the results of studies of changes in the mechanical behavior of cement-soil elements of structures depending on various factors, it is advisable to take into account the loss of chemically unbound moisture due to these changes, since, in some cases, it may be dominant among other factors..... 134
32. **Kashtanova S.V., Rzhonsnitsky A.V. *On Natural Boundary Conditions and the Choice of a Basis in the Ritz Method*** In this paper, we study the question of methods for solving a variational problem by the Ritz method, in particular, the determination and influence of natural boundary conditions in the problem of buckling of a thin plate with an elliptical insert. It is investigated whether the natural conditions for the free edge should be taken into account and how this affects the convergence of successive approximations to the problem's answer. The paper also considers the question of the matrix approach in calculating the total energy and reasoning about the choice of the basis 139
33. **Kozlov V.G., Vlasova O.A., Dyakova V.V. *Oscillatory Excitation of Parametric Oscillations of the Interface of Immiscible Liquids*** The dynamics of an oscillating interface between two low-viscosity immiscible liquids of different densities in a vertical flat channel is studied experimentally. The column of liquids performs harmonic vertical oscillations of small amplitude, the interface is horizontal. It has been found that the oscillatory motion of liquids in a channel leads to threshold excitation of Faraday waves on the interface, which oscillate at a frequency half that of the boundary oscillations. The study of the dynamics of the liquid interface is carried out in a wide range of frequencies and amplitudes of liquid oscillations. The boundary fluctuations were studied by the high-speed video recording method, the structure of the averaged flows generated near the interface was studied by the PIV method. It is shown that the excitation of parametric oscillations leads to the generation of averaged flows near the boundary, which can be used to intensify mass transfer processes at the interface..... 141
34. **Kozlov V.G., Zimasova A.R., Kozlov N.V. *Stability of the Interface of Liquids with High Viscosity Contrast in a Non-Uniformly Rotating Horizontal Cylinder*** The effect of rotation velocity modulation on the shape of the interface between liquids of different densities in a rapidly rotating horizontal cylinder is studied experimentally. Liquids are characterized by a high contrast of viscosities; a more viscous liquid has a higher density and is located near the lateral boundary of the cavity. It has been found that modulation of the rotation velocity leads to the loss of stability of the initially axisymmetric liquid interface. The instability manifests itself in the development of a spatially periodic relief at the boundary. The phenomenon has a threshold character, the critical amplitude of velocity modulation depends on the rotation speed and frequency of velocity modulation. It is shown that the appearance of a "frozen" relief is associated with the oscillatory Kelvin-Helmholtz instability and is accompanied by the generation of intense vortex flows near the interface. In this case, the tangential velocity discontinuity at the boundary is determined by the contrast of fluid viscosities. The results of studies of the stability and supercritical dynamics of the interfacial boundary are generalized in the space of control dimensionless complexes..... 144
35. **Krylova K.A., Murzaev R.T., Baimova Yu.A. *Investigation of Mechanical and Thermal Properties of Composites of the Ni/Graphene System Using Molecular Dynamics*** We study the strength and thermal conductivity of Ni/graphene composites obtained by high-temperature

- compression. The combination of two dissimilar materials in one system leads to the emergence of new materials with a unique combination of mechanical and thermal properties. It is shown that changing the nickel content in the composite structure makes it possible to create materials with the required mechanical and thermal properties. An increase in the volume fraction of Ni atoms, on the one hand, increases the thermal conductivity, and, on the other hand, reduces the strength. The first is due to the presence of a conductive metal, and the second is determined by the graphene network. The results obtained open up the possibility of using composites of the Ni/graphene system for the production of new supercapacitors, flexible electronics, and storage batteries.146
36. **Kuvyrkin G.N., Rakhimov D.R. *Application of the Finite Element Method to the Endochronic Theory of Thermoplasticity for Isotropic Materials under a Plane Stress State*** To describe the nonlinear deformation of isotropic materials under nonisothermal loading conditions, it is proposed to use the relations of the endochronous theory of thermoplasticity. In the paper, the constitutive relations for the case of a plane stress state are obtained, the calculated dependences for the finite element method are given in relation to the theory under consideration, and computational methods of solution are presented. The last part shows an example of calculating a thin plate under complex loading. 150
37. **Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu., Safronov Yu.A., Sokolov A.A. *Mathematical Modeling of Non-Stationary Heat Conductivity in a Non-Local Environment Taken into Account Of The Body's Own Radiation***. The temperature state of structural elements of technical devices as solid bodies is determined by the process of thermal conductivity in these elements. For nanostructured, structure-sensitive materials, the classical formulation gives a significant difference at the boundary of the computational domain. Mathematical models that well describe such materials and are designed to eliminate these differences belong to the class of nonlocal models. At high temperatures, it is necessary to take into account the body's own radiation. The paper considers the nonlocal formulation of the nonstationary heat equation with nonlinear boundary conditions. A numerical algorithm was constructed using the finite element method. An analytical example is constructed and boundary conditions and an initial condition are found for it, under which a numerical algorithm taking into account nonlocality and radiation will converge to an exact solution of the problem. Comparisons of errors on different grids were made. 155
38. **Kukudzhanov K.V. *Impact of a Short-Pulse High-Energy Electromagnetic Field on Cracks in Metal (Experiment)*** The mechanisms of healing cracks in polycrystalline zinc under the influence of a pulsed high-energy electromagnetic field are experimentally studied. The electric current in the sample is induced by a high-energy electromagnetic field pulse generator. The evolution of cracks in metal is studied using high-resolution computed tomography..... 159
39. **Kukudzhanov K.K. *Healing a Crack in a Thin Plate under the Influence of a Strong Electromagnetic Field*** The mechanisms of crack healing in a thin polycrystalline zinc plate under the influence of high-energy electromagnetic field pulses are studied numerically. It is shown that under the influence under consideration, a crater is formed at the tip of the macrocrack, which is formed during a microexplosion, which inhibits further propagation of the crack. A comparison is made with the available experimental data, which shows good quantitative agreement between the modeling and experimental results.....161
40. **Kurdina S.P., Gevorgyan G.A. *Analysis of the Periodicity of the Function of Elastic Displacements of Variable Length of Elastic Links of Mechanisms*** As is known, elastic dynamical systems with open kinematic chains, in particular elastic manipulators, are effectively described by a recursive model of the generalized Newton—Euler method with the provision of computational algorithms with a degree of complexity proportional to the dimension of these systems, i.e. $O(n)$. In the presence of closed kinematic circuits in elastic dynamical systems, the application of a numerical analysis strategy without reversing the mass matrix is extremely difficult. The analysis of the simplest type of elastic mechanisms with closed circuits, such as a crank-slide mechanism and a four-pin mechanism with elastic connecting rods, revealed a peculiar pattern of the periodicity of the functions of elastic movements of connecting rods, significantly different from the periods of operation of the mechanisms themselves. Here we propose to study the periodicity properties of the elastic

- displacement function of mechanisms with elastic links of variable length using examples of numerical dynamic analysis of a crank-rocker mechanism..... 163
41. **Mavlyutov A.M., Evstifeev A.D., Smirnov I.V., Volosevich D.V. *Influence of Intense Plastic Deformation on the Mechanical Properties of Aluminum Composite Produced by the Method of Additive Printing*** In this work, a composite material based on commercially pure aluminum (AA1050) and an industrial alloy of the Al–Mg system (AA5056), obtained by additive printing, was studied. Experimental dependences on the influence of the degree of deformation by the method of torsion under pressure on the mechanical properties of the composite material are obtained. The deformation regimes providing the optimal combination of strength and plasticity are revealed. 168
42. **Magomedova D.K. *Fracture Regularities of the Al-Mg-Si System Alloy in the Coarse-Grain and Ultra-Fine-Grain State.*** The process of destruction of coarse-grained materials (CG) under static loads has been studied in sufficient detail and continues to be supplemented by various data that more fully describe the behavior of the material at the micro- and macrolevels. Less studied is the process of destruction of ultrafine-grained (UFG) alloys, including the stage of formation of pores inside the material, when the strength limits are exceeded, but the destruction itself has not yet occurred. The study of the behavior of the material at this stage of destruction is important for a more complete description of the properties of UFG materials. In the present work, the features of the fracture of the UFG Al-6101 alloy are studied and compared with the features of the fracture of the Al-6101 alloy after standard treatments, i.e. in short-circuit condition..... 171
43. **Martirosyan S.R. *Supersonic Divergence of a Panel with One Free Edge Initially Loaded in Two Directions, Compressed by the Gas Flow and Stretched in the Perpendicular Direction*** In the article, in a linear formulation, the problem of static stability of a rectangular plate is investigated, initially loaded in two directions by compressive and tensile forces, respectively, along the gas flow and in the direction perpendicular to the gas flow velocity, under the assumption that the gas flow runs on its free edge. An analytical solution to the problem is obtained..... 176
44. **Makhovskaya Yu.Yu. *Effect of Capillary Adhesion in Contact of Elastic Bodies under Tangent Loading*** The paper presents solutions to contact problems taking into account capillary adhesion under the action of a tangential force. The cases of partial slip and steady slip of an indenter over the surface of an elastic half-space are considered. The calculation and analysis of the forces of static and sliding friction due to the contribution of capillary adhesion has been carried out..... 181
45. **Murashkin E.V., Radaev Yu.N. *Pseudoscalar Characteristic Microlengths in Simulation of Micropolar Thermoelasticity*** The paper considers a model of coupled micropolar thermal elasticity presented in terms of a contravariant displacement vector and a covariant microrotation pseudovector of negative weight. The thermodynamic potentials of the state of a hemitropic thermoelastic continuum are discussed in terms of the absolute asymmetric strain tensor, the bending-torsion pseudotensor of negative weight, and the entropy increment (temperature increment), which are suitable for modeling adiabatic and isothermal processes. General algebraically preferred coordinate representations for defining tensors and pseudotensors of the fourth rank are considered in terms of the metric tensor, and defining hemitropic pseudo-invariants are replaced by conventional defining pseudoscalars. The coupled differential equations of hemitropic thermoelasticity are obtained in terms of displacements and pseudorotations. 186
46. **Hovhannisyan S.M., Geodakyan E.G., Karapetyan J.K., Sahakyan B.V., Mkrtchyan M.A. *To the Union of Models of Rigid Body Motion in the Mechanics of Newton, D’Alambert, Hamilton, De Broyle and Schroedinger*** It is shown that the system of equations for the propagation of flexural-shear vibrations of a cantilever rod is similar to the system of telegraph equations. When considering the question of how a connected pair $F(l,t)$ and $M(l,t)$ arises, we must accept (make a conclusion), by analogy with how the conduction current propagates in a single-wire line, that there are “gravitational charges” that are polarized at the free end of the rod and create a connected pair $F(l,t)$ and $M(l,t)$. It is further shown that there are 3 independent gravitational charges: pure (impulse) - v having the dimension sec^{-1} ; energy (linear)- λ , $[\lambda]=m$; force (accelerating)- α , $[\alpha]=m\cdot\text{sec}^{-2}$, and their vortex analogues..... 191
47. **Hovhannisyan E.K. *Geometrically Nonlinear Problem of a Cylinder in a Gravity Field*** The bending of a homogeneous hollow cylinder made of an isotropic material fixed at one end under the

- action of its own weight is studied. It is assumed that the dependence of deformations on displacements is nonlinear. An algorithm for constructing a solution by the finite element method is described. A numerical calculation of a specific problem is given.....195
48. **Osipov M.N., Sergeev R.N. *Deformation by Combining Two-Exposure Speckle Photography and Moire*** The paper considers methods for processing speckle photographs of two exposures to obtain a deformed state in relation to a plane problem. The first method is based on the processing by the Young method of a two-exposure "sandwich" speckle photograph, while one of the photographic plates from the "sandwich" block is shifted relative to the other by some amount in their plane. As a result of such processing, moiré fringes appear, which determine the deformed state of the object. The second method is based on the digital processing of Young's bands, taking into account their geometric superposition, as a result of which moiré bands also appear, which similarly allow one to determine the deformed state of an object. The first method works for the case when the strain gradient is large, that is, the frequency of Young's bands in the diffraction halo is high, and the second method works for the case when the frequency of Young's bands is low.....199
49. **Parshin D.A., Kazakov K.E. *Finding Residual Stresses in a Viscoelastic Coating, Produced in the Process of Multilayer Application on the Pipe Wall*** The technological problem of creating a protective coating of arbitrary thickness on the working surface of the wall of a straight section of the pipeline due to the multilayer deposition of a material with the property of viscoelasticity is considered. It is assumed that in the process of creation, the coating experiences the action of inertial forces due to the relatively intensive rotation of the coated wall. To determine the residual stresses in the resulting coating, a non-classical model of the mechanics of a deformable solid body based on the concept of a growing continuum is used. With the help of the developed model, boundary problems are formulated, the solutions of which make it possible to construct the desired distributions of residual stresses for arbitrary programs for changing the parameters of the technological process being implemented.....204
50. **Perelmuter M.N. *Stress Concentration under Inclined Load of Screw Dental Implants***. The study of stress concentration in screw dental implants and bone tissues was performed on the model of a screw connection between the implant and surrounding bone tissues under the action of an inclined load applied to the implant. The calculations were performed by the boundary element method in the formulation of plane deformation. When constructing the computational model, it was assumed that: 1) the depressions in the cancellous bone, which are formed when the implant is inserted into the bone tissue, correspond to the thread on the implant; 2) bone tissue is an isotropic and homogeneous linearly elastic material; 3) at the interface between the implant and the bone, the conditions for an ideal connection are fulfilled, which corresponds to complete osseointegration in the bone-implant system.208
51. **Perelmuter M.N., Dudchenko A.V. *Simulation of Healing of Cracks under Thermal Loading***. A technique has been developed for the numerical solution of thermoelasticity problems in an axisymmetric formulation by the method of boundary integral equations, taking into account the interaction of crack faces. To model cracks at the interface between materials, the structure is divided into subregions. The technique makes it possible to study the process of healing cracks in elastic bodies of finite dimensions with axial symmetry under the action of axisymmetric temperature and static loads. Crack healing is modeled as the process of formation of the end region of the crack. A parametric study of the influence of the stiffness of bonds in the end region of a crack on the magnitude of the modulus of stress intensity factors was carried out.....213
52. **Pirogova Yu.V., Tashkinov M.A., Yelenskaya N.V., Tarasova A.S., Vindokurov I.V., Shalimov A.S., Zilbershmidt V.V. *Investigation of the Configuration of the Internal Structure and Elastic Properties of Lattice Biomedical Scaffolds*** The work is devoted to the development of methods for designing and creating scaffolds for bone tissue regeneration based on additive technologies, as well as the study of their mechanical behavior and properties in terms of local physical, mechanical and morphological characteristics. The three-dimensional geometry of the trabecular bone microstructure was considered, which has a random porous structure. Three-dimensional structures designed on the basis of various concepts are considered as artificial substitutes. Prototypes of representative volumes of model structures were fabricated from polylactide (PLA) using the Fused Deposition Method

- (FDM). A numerical calculation of the stress-strain state in them under compressive load conditions was performed, an analysis of critical regions and possible fracture patterns was carried out on the basis of a model of degradation of elastic properties. The influence of changes in the parameters of structural morphology on the appearance of stress concentrators, as well as on the processes of nucleation and propagation of fracture, is studied. The distributions of deformation fields on the surface observed in experiments are in good agreement with the data obtained in the results of numerical simulation. Comparison of the mechanical behavior and characteristics of prototypes with the behavior of a representative volume of trabecular bone allows us to draw conclusions about the optimal morphological structure.218
53. **Rysin K.Yu. *Averaged Convection in a Librating Flat Layer with Different Temperature Boundaries*** Heat transfer and flow structure in a vertical flat layer rotating around a horizontal axis oriented perpendicular to the layer plane are studied. The layer boundaries are isothermal and are maintained at various predetermined temperatures. The case of modulated cavity rotation (periodically changing rotation speed) is considered, when the frequency and amplitude of rotation speed modulation were varied. It is shown that the uneven rotation of the cavity leads to the excitation of the averaged convection of the liquid from the state of quasi-equilibrium. The flow developing in the librating layer has the form of an azimuthal vortex.223
54. **Seyranyan S.P. *On the Convergence of Trigonometric Series of Bending Moments on a Clamped Contour of a Rectangular Plate***. The problem of bending a rectangular plate clamped on the contour under a symmetrical transverse load with respect to the symmetry axes of the rectangle is considered. Previously, the author, representing the bending moments on the contour of a rectangular plate by supposedly convergent trigonometric series containing unknown coefficients, and applying the method of S.P. Timoshenko in a modified way, obtained an infinite completely regular system of linear algebraic equations. However, when deriving an infinite system, an assumption of the type of S.P. Timoshenko is accepted about the admissibility of changing the order of summation in the appearing repeated series. In the presented work, it is proved that for the accepted type, but an arbitrary mechanical load: a) there is a solution (simultaneously unique) of the infinite system tending to zero, which can be obtained by the reduction method in combination with the method of sequential approximations, b) the initial assumptions about the convergence of trigonometric series of bending moments on the contour of the plate and about changing the order of summation in the named repeated rows are performed.224
55. **Subbotin S.V. *On Averaged Flows in Oscillating Droplet Inclusions*** An experimental study of flows in the model of an oscillating drop is being developed. The situations of elastic oscillations of a drop, the surface of which is saturated with surfactant, as well as oscillations of a drop in a thin channel of circular cross-section are considered. The main attention is paid to studying the structure of the averaged flow depending on the dimensionless frequency. In the region of high dimensionless frequencies, oscillations lead to the excitation of averaged circulation in the form of two pairs of coordinately rotating vortices. As the dimensionless frequency decreases, the flow structure transforms and in the region of low frequencies takes the form of two pairs of vortices, the direction of motion in which is opposite to the case of high dimensionless frequencies.229
56. **Sumbatyan M.A., Boyev N.V., Baraeva D.S. *Mathematical Foundations of Wave Focusing in Reflection from Curved Boundaries*** The problem of reflection from curved surfaces is a classical problem in wave dynamics. In the meantime, this is not resolved completely. In the case of curved concave reflectors there may appear focusing effects, which in the strict formulation are investigated poorly. In the present work there is shown that for a certain mutual location of the source and the receiver, as well as for a specific geometry of the reflector, there may appear singular effects of focusing, which lead to the phenomenon that the amplitude of the reflected wave may have various degrees of growth with increasing wave number. The obtained asymptotic231
57. **Sumbatyan M.A., Zakaryan R.M., *On the Method of Boundary Integral Equations in The Problem of Non Stationary Flow around a Circular Cylinder by a Viscous Flow*** A two-dimensional problem of the theory of hydrodynamics is considered - an unsteady flow of a viscous incompressible fluid around a round cylinder. The proposed method is based on the Navier-Stokes equations formulated in terms of vorticity and stream functions. The non-stationary term is presented as the

- simplest implicit iterative scheme. The problem is solved within the framework of the method of boundary integral equations (BIE), based on the construction of special Green's functions for the outer part of the cylinder, for the Poisson and Helmholtz equations. From the assumption of an initial unexcited flow (in the entire region $\omega = 0$), at the first time step, a solution is obtained, which describes the excited flow. The calculation results are presented as some diagrams.....236
58. **Tataurova A.A., Stefanov Yu.P. *Behavior of the Medium Beyond the Elastic Limit for Geological Medium in a Compression Setting*** The paper considers the influence of mechanical parameters on the distribution of irreversible deformation inside the sedimentary wedge, which is subjected to horizontal compression and slides along the rigid base of the foundation. The analysis of the configuration of localized shear bands depending on the coefficient of internal friction and the value of sliding friction has been carried out.....241
59. **Torskaya E.V., Morozov A.V., Stepanov F.I. *Multiple Contact of Viscoelastic Bodies under Sliding Friction: Theory and Experiment*** The paper presents the results of friction tests of paving slabs in contact with rubber. The surface roughness of the plates is formed by shot blasting. Some examples have been lightly polished to simulate wear. The results of the roughness measurements were taken for simulation and used to analyze the effect of surface treatment on the strain component in sliding friction. The results of modeling and experiments at room temperature showed that a change in surface roughness affects the deformation mechanism of sliding friction. It is shown that the deformation mechanism of friction in the contact of paving slabs with rubber increases with an increase in the height roughness parameters.244
60. **Khachikyan A.S. *On the Performance of the Functions of a Real Electron by a Hypothetical Electron-Catapult*** In relation to the ether, a hypothetical model of the electron is proposed in the form of a mechanical self-charging and automatically discharging catapult. It is shown that some of the basic properties of the electron can be explained by the proposed model.249
61. **Shishkina S.I., Serdyukov V.I., Serdyukova N.A. *Modeling the States of an Intelligent System Using Homological Algebra Methods*** The article proposes the use of methods of homological algebra and algebraic quasi-fractal techniques to describe the state of a closed associative intelligent system at the micro level. The stages of formation of a closed associative SMART system from a chaotic state are identified. The concept of a system similar to a chaotic presystem is introduced. Various approaches to the concept of system state to describe the functioning of the system are considered. The state invariant of the system S is determined using the quasi-fractal operator QF. The concept of state for temporal logic is defined. This concept can help improve the accuracy of neural network models.252
62. **Amelyuhskin I.A., Druzhinin O.V., Kudrov M.A., Kuleshov P.S. *Peculiarities of Icing in a Flow with Supercooled Droplets and Ice Crystals***. New results of aircraft icing are obtained. New mathematical models of physical phenomena are formulated. Original construction of adaptive wing was invented, developed and prototypes were built. New algorithm of aircrafts' surface with nanorelief are developed. Parametric studies of aircraft icing peculiarities were carried out.....257
63. **Antonova O.V., Ivanov M.V., Mikhailov A.A., Kuzmin V.A. *Macro Level Behavior of Sandwich Panels with Tetrahedral Core under Bending Loading*** Sandwich panels with complex core structure can respond differently to tension and compression, that leads to the use a bi-modulus theory of elasticity to describe the behavior at the macro level. Effective physical and mechanical characteristics were determined, representing the body as a homogeneous anisotropic continuum. The results of the numerical analysis of sandwich panels in case of bending were performed using ANSYS software. The effective elastic characteristics analysis for the periodicity cell of a sandwich panel shows that, to describe the stress-strain state of a panel with a similar tetrahedral core at the macro level, in addition to the orthotropic behavior in the panel plane, different elastic behavior occurs under tension and compression.....261
64. **Avetisyan A.S. and Khachatryan V.M. *Weakened by an Infinite System of Transverse Periodic Cracks Piezoelectric Waveguide as a Filter of Electroacoustic Waves*** The problem of propagation of an electroactive unidirectional elastic shear wave signal in an infinite piezoelectric waveguide weakened by a periodic system of transverse cracks is considered. Wave formation is investigated in cases of different anisotropies of the piezoelectric material, under different electromechanical

- conditions on the waveguide surfaces. In contrast to the case of a homogeneous waveguide, the presence of a system of periodic cracks leads to the formation of Floquet waves with a periodic structure. Different anisotropies and asymmetric electromechanical conditions on the waveguide surface lead to different localization of wave energy over the thickness of the waveguide, as well as to the presence of different zones of acceptable frequencies. A comparative analysis of the influence of the presence of a periodic system of transverse cracks on the frequency transmittance of the waveguide is carried out.....263
65. **Butusova O.A., Kolesnik S.A., Bulychev N.A. *Mechanical Properties of Polymer Composite Films with ZnO Nanoparticles Synthesized in Low-Temperature Plasma Under Ultrasonic Cavitation*** In this study, polymer composite materials based on a copolymer of polyethylene and vinyl acetate and zinc oxide nanoparticles were obtained and examined by physicochemical and mechanical methods. Zinc oxide nanoparticles were synthesized in a plasma discharge under the action of ultrasonic cavitation. To create composites with a homogeneous distribution of nanoparticles, solution technology was used, and then melt compounding technology, and nanoparticles treated and non-treated with ultrasound were applied. The obtained samples of films of composite materials were studied by X-ray phase analysis, X-ray fluorescence analysis and scanning electron microscopy. It was shown that there are differences between the samples: in the case of nanoparticles without ultrasonic treatment, the particles are more strongly aggregated inside the composite material and their average size is visually larger than in the case of a sample with nanoparticles subjected to ultrasonic treatment. Finally, studies of the tensile strength and relative deformation of the samples were carried out. From the results of mechanical tests, it can be seen that, according to both studied parameters, there is an optimal concentration of ZnO nanoparticles. For tensile strength, the highest result was obtained at a concentration of nanoparticles of 3%, and for the relative elongation to rupture of the sample, the highest value was achieved at a concentration of nanoparticles of 2%.....268
66. **Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. *Capillary and Gravity Surface Waves with Accompanied Ligaments: Asymptotic Theory and Drop Impact Experiment*** Capillary, gravity, and capillary-gravity surface periodic flows in different fluid models are analytically asymptotically investigated using singular perturbations theory. Models of viscous and ideal liquids, homogeneous or uniformly stratified fluids are considered. It is shown that the periodic surface flow in the viscous fluid model contains, in addition to wave components, a fine structure formed by ligaments. Approximate expressions of the dispersion relations for all flow components in the models under consideration are obtained. The studied flow components are observed experimentally at all stages of the drop impact flow evolution.271
67. **Dobrokhotov S.Yu., Kalinichenko V.A., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E. *Asymptotics of Long Standing Waves in one-Dimensional Basins with Shallow Coasts: Theory and Experiment*** We construct time-periodic asymptotic solutions of the one-dimensional system of nonlinear shallow water equations in a basin of variable depth with two shallow coasts (which means that the depth function vanishes at the points defining the coast) or with one shallow coast and a vertical wall and compare them with experimental results.....275
68. **Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Terzian S.H. *Shear Surface Wave in Homogeneous Semi-Space with Periodic Interfaces of Imperfect Elastic Contact*** The shear elastic surface wave existence is investigated in a semi-infinite media with periodically oriented stack of interfaces of imperfect bonded contact. The transfer matrix method in conjunction with Bloch-Floquet's approach is extended to study the problem of the surface wave existence. It is shown that this periodic structure support the surface wave.276
69. **Hayroyan S.H. *Characteristics of Sliding Deformation in Swelling Clays Conditioned with the Change in Swelling Consistency*** In swelling soils the mechanism of the land slide process development essentially depends as on the conditions of the occurrence, as well as on the further post-genetic processes. Due to the decondensation of swelling soils, due to the swelling their rheological features essentially change (slide resistance, creep properties). In the Armenian Republic territory ultra-dense argillaceous, reddish clay formations of montmorillonite composition, widespread in Erebuni and Nubarashen areas, are the typical representatives of the swelling soils. In the conditions of natural

- humidity they have high structural cemented bonds, resulting in high sliding resistance, in the areas of those soils distribution of the creep processes development in them is mostly absent. When the noted soils are moisturized, they are subjected to swelling, as a result of which the slide resistance gets sharply smaller, resulting in landslide phenomena. 281
70. **Jokhadze Otar, Kharibegashvili Sergo, Shavlakadze Nugzar** *Some Contact Problems for a Half-Plane with Non-Linear Elastic Stringer* Some contact problems of determining the mechanical field in a homogeneous half-plane supported by a finite homogeneous stringer, the material of which is subject to the nonlinear Hooke's law, are investigated. The condition of both rigid contact and the conditions of with a thin glue layer are considered. The problems are equivalently reduced to the non-linear singular integro-differential equations. Using the Schauder fixed point principle, the existence of a solution to the original problems is proved. The uniqueness of the stated problems is proved also. Using the small parameter method, systems of recurrent linear singular integral equations of the first kind are obtained. Effective conditions for the convergence of the corresponding series are obtained.286
71. **Mkrtychyan M.H., Avetisyan L.V.** *Control of Electroactive Shear Waves in a Piezoelectric Waveguide by Different Surface Actions* In various cases of electromechanical surface actions, the problems of surface control of the propagation of an electroactive transverse wave in a piezoelectric waveguide (piezoelectric class 6mm of hexagonal symmetry) are considered. In both problems, one of the surfaces of the piezoelectric waveguide is mechanically free, and an electrical displacement normal to the surface acts. The second surface of the waveguide is firmly clamped and grounded, in one task, or there is a drift of electrons over the surface and there are no mechanical effects, in another task. The formulated initial boundary value problems are solved by the method of Fourier series. True electromechanical fields are built in the form of series of eigenmodes of electroacoustic oscillations in accordance with the harmonics of surface effects. Analytical and numerical calculations of the control process in cases of surface action are given.287
72. **Nedin R.D., Gukasyan L.S.** *On Some Approaches to the Reconstruction of Elastic Body Material Inhomogeneity in 2D Statements.* In the present research, some approaches to studying the problem of analyzing variable physical and mechanical properties of an inhomogeneous body in one- and two-dimensional formulations are presented. The general statements of direct and inverse problems on vibration of inhomogeneous elastic body are presented. The problem of in-plane oscillations of 2D region with variable mechanical properties, characterized by the laws of inhomogeneity for the Lamé coefficients, is studied in the framework of the plane deformation model of elasticity theory. In addition, a similar problem for elastic foundation is considered, where it is required to recover two variable parameters characterizing the bedding coefficients. Several techniques are proposed for building proper solutions to the inverse problems on reconstructing inhomogeneity laws for the material characteristics in elastic isotropic body within in-plane oscillations and in elastic foundation. A series of computational experiments has been carried out to restore the desired functions of various types in classes of smooth functions.292
73. **Nemirovskii Yu.V., Tikhonov S.V.** *Limit Elastic Deformation of a Multilayered Concrete Rod* A multilayered concrete rod is considered in the problem of its transverse bending by the quasi-static uniformly distributed load. It is assumed that the rod has the constant symmetrical cross-sectional shape along its axis, each of the layers can have its own brand of concrete. The classical Kirchhoff-Love hypotheses are accepted as valid, and it is assumed that there is a uniaxial stress state. The analytical solutions of rod deflections, the boundaries between elastic and nonlinear areas, and the values of limit loads are obtained.296
74. **Shahinyan S.G.** *On Optimal Stabilization of Part of Variables of Rotary Movement of a Rigid Body with One Fixed Point in Sophia Kovalevskaya's Case.* An optimal stabilization problem for part of variables of rotary movement of a rigid body with one fixed point in Sophia Kovalevskaya's case is discussed in this work. The differential equations of motion of the system are given and it is shown that the system may rotate around Ox with constant angular velocity. Accepting this motion as an unexcited motion, the differential equations of the corresponding excited motion were drawn up. Then the system was linearized and a control action was introduced along one of the generalized

- coordinates. The optimal stabilization problem for part of the variables was stated and solved. The graphs of optimal trajectories and optimal control were constructed and shown.301
75. **Sharma A.P., Purusothaman M., Velmurugan R., Kanny K.** *Effect of Nanoclay on Tensile, Flexural, and Impact Characteristics of Sandwich Panels with Composite Face Sheet and Epoxy-Montmorillonite Clay Core* A sandwich composite consists of high stiffness and high strength outer layers called face sheets and low-density inner layers called core. In the present study, the sandwich composites comprising glass fabric/epoxy face sheets and epoxy modified with montmorillonite (MMT) nanoclay core are fabricated by a co-curing method. The sandwich panels show higher static tensile and three-point flexural properties such as breaking strength, elastic modulus, and breaking strain on the addition of up to 3 wt. % of MMT nanoclay than pristine samples. The former properties reduce at 4 and 5 wt. % of clay owing to the clustering of clay particles within the matrix. For low-velocity single impact perforation load, the maximum force of sandwich panels improves on the infusion of up to 3 wt. % of clay while maximum displacement decreases. The ballistic limit velocity and energy absorption of panels improve on adding up to 3 wt. % of clay.306
76. **Shavlakadze Nugzar, Pachulia Bachuki** *Dynamical Boundary-Contact Value Problems for Viscoelastic Half-Space with an Elastic Inclusion or Cut* The dynamical contact problem for a viscoelastic half-space which is reinforced by an elastic inclusion in the form of a strip and the dynamical boundary value problem for viscoelastic half-space with cut are considered. The solutions of the problems are reduced to the integro-differential equation with corresponding boundary value condition. Using the method of orthogonal polynomials the integro-differential equations are reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The quasi-completely regularity of the obtained systems is proved and the method of reduction for approximate solution is developed.311
77. **Shepelev I.A., Dmitriev S.V.** *Dynamics of Monolayer Black Phosphorene under Longitudinal Compression* The dynamics of acoustic waves in black phosphorus under continuous longitudinal compression are being studied. Various wave processes occur in solid materials during continuous compression, including those related to the nonlinear nature of atomic interactions. Slow compression in a solid material excites acoustic waves that propagate at the speed of sound. However, if the compression rate exceeds the speed of sound, shock waves are excited, which have completely different properties compared to acoustic waves. In this study, the wave dynamics in a two-dimensional layer of black phosphorus undergoing continuous compression in one of two crystallographic directions, zigzag or armchair, are examined. Black phosphorus has a more complex spatial geometry of the atomic lattice compared to graphene, making wave propagation dynamics more complex. Molecular dynamics methods were used to model and analyze dynamic processes. Acoustic and shock waves were excited using a piston moving at a constant velocity. The characteristics of wave propagation from atom to atom, oscillations arising in atoms during wave propagation, wave energy evolution, and other characteristics were analyzed at various piston velocities. These results contribute to a better understanding of the nonlinear dynamics of shock and acoustic waves in two-dimensional materials.312
78. **Ustinov K.B.** *Interface Cracks and Delamination of Coatings. Some Analytical Solutions* A number of problems of theory of elasticity are considered related to interface cracks in isotropic and anisotropic media. In particular, problems of semi-infinite crack in elastic bi-layer and composed half-plane, problems of central semi-infinite crack in anisotropic bi-layers are addressed. The method of solving consisted in application of integral transform (Bi-lateral Laplace, Fourier or Mellin transforms to the system of equations of elasticity and boundary conditions, followed by reducing the problems in question to scalar or matrix Riemann boundary value problems. Application of Wiener-Hopf method allowed obtaining closed form solutions of the formulated problems. One of the main advantages of the method is that the obtained solutions are valued for any range of parameters, including extreme values, where researches usually face the difficulties when applying conventional numerical methods. Meanwhile due to inherent limitation of the method the solutions were obtained only for vanishing second Dundur's parameter of elastic mismatch. For all mentioned problems closed forms analytical expressions were obtained for stress intensity factors. Besides asymptotics of displacements far from the crack tip were obtained allowing posing adequate boundary conditions when modeling delaminations in the frame of structural theories. Some solutions of problems of corner cracks are also discussed.316

- 79. Vasilyan N.G. *The Bending of the Rectangular Isotropic Plate by Cutting Forces Along the Edge***
 In this article is investigated bending problem of the isotropic rectangular plate, when two edges of the plate are hinged, in fixed edge are investigated different boundary conditions. The plate is free from distributed loads and opposite side fixed edge is loaded by cutting forces. Are received generalized cutting forces and investigated condition of equilibrium for generalized cutting forces for each case. This article is dedicated to identify solution difference, which is obtained is due to the transformation of Kirchhoff and Thomson-Tait.....321
- 80. Vatulyan A.O., Varchenko A.A., Yurov V.O. *On the Reconstruction of Instantaneous and Long Term Modules in the Analysis of Bending Vibrations of Functionally Graded Rods*** Inverse problems solutions on determining variable rheological properties of functionally graded beams are discussed based on additional data on the rotation angle of the end section in the framework of the Euler – Bernoulli and Timoshenko models. Within the framework of the complex modules concept, operator relations linking the given and unknown functions are obtained, and the iterative process is implemented. Functions representing the laws of change for the long-term and instantaneous modules have been restored. The results of computational experiments are presented.326
- 81. Vatulyan A.O., Yurov V.O. *Coefficient Inverse Problems for Elastic and Electroelastic Bodies***
 Some aspects of coefficient inverse elasticity and electroelasticity problems for operators with variable coefficients are considered. General and weak formulations of electroelasticity problems are presented. Sensitivity characteristics of amplitude fields with respect to the inhomogeneity functions for mechanical and electrical characteristics are studied. An example of the reconstruction of the material inhomogeneity laws for an electroelastic rod under two probing regimes is given.331
- 82. Velmurugan R., Chinnapandi M., Sharma A.P., Ashok Kumar Reddy B. *Experimental Investigation on the Effect of MMT Nanoclay on the Mechanical and Thermal Characterization of Glass Fiber Composites*** The effect of montmorillonite (MMT) nanoclay on mechanical and thermal characterization of glass fiber-reinforced polymer (GFRP) composites is studied. The static tensile properties of epoxy/MMT nanoclay are also studied. The elastic modulus and tensile strength of epoxy infused with 3 wt. % of nanoclay are 74 % and 230 % higher than neat epoxy. In the case of GFRP composites with 0, 1 and 3 wt. % of MMT nanoclay contents, the tensile strength enhances from 558 to 591 and 628 MPa, flexural strength from 625 to 726 and 905 MPa, interlaminar shear strength from 23 to 26 and 33 MPa, and Izod impact strength from 83 to 94 and 207 kJ/m². For GFRP composites with 0 and 1 wt. % of MMT nanoclay, the glass transition temperature improves from 91 to 101 °C, and storage modulus from 35 to 41 GPa. The thermal conductivity of GFRP composites with 0, 1, and 3 wt. % of MMT nanoclay is 0.30, 0.33, and 0.42 W/m.K. Thus, the above parameters of composites are affected significantly on infusion of MMT nanoclay contents..... 336
- 83. Zemtsova E.G., Kudymov V.K., Sidorov Yu.V., Morozov N.F., Smirnov V.M *Creation of a Nickel Composite Using Surface Structuring of the Reinforcing Phase with Titanium Carbide Nanostructures to Improve Strength Properties*** As a result of the study, an approach was developed to obtain an material based on nickel using the surface structuring process. The developed approach made it possible to obtain the composite structure, where an intercalation network of nanostructured titanium carbide is formed in the bulk nickel matrix. A technique was also developed for the uniform introduction of a reinforcing dispersed phase of the metal-carbide composition into the bulk composite. It was shown that the strength properties of the obtained composite materials based on nickel with a dispersed phase of core-shell particles Al@TiC in mass ratios of 1 and 5 wt.% are 1.5 times better than those of pure nickel.....341

СОДЕРЖАНИЕ

Аветисян В.В. Управление однозвенным манипулятором с учетом ограничений на напряжение и мощность тепловыделения.....	5
Агабекян П.В., Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, ограниченной дугами пересекающихся окружностей.....	9
Агаян К.Л., Атоян Л.А., Саакян С.Л. Сдвиговые колебания штампов на краях пьезоэлектрического слоя.....	12
Агаян К.Л., Закарян В.Г. Плоская сдвиговая волна в упругом слое со смешанными граничными условиями.....	17
Айзикович С.М., Лапина П.А. К вопросу эквивалентности моделей неоднородных упругих сред.....	22
Акопян В.Н., Амирджаниян А.А., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с конечной трещиной с учётом сухого трения, коэффициент которого зависит от координат.....	27
Акопян В.Н., Саакян А.В., Даштоян Л.Л. Осесимметричная контактная задача для однородного пространства с круговой дискообразной трещиной с учётом обобщённого сухого трения.....	30
Амирджаниян А.А., Григорян А.А. О контакте абсолютно жесткого штампа с полуплоскостью с учетом трения.....	33
Арутюнян А.Р., Петручок А. И., Судьенков Ю.В. Исследование изменения модулей и энергетического баланса полимерных материалов при механических испытаниях.....	37
Арутюнян А.Р., Саитова Р.Р. Описание ступенчатых нагружений при высокотемпературной ползучести металлических материалов.....	42
Астафьев В.И., Губанов С.И. Математическая модель течения вязкой несжимаемой жидкости по горизонтальным трубам с проницаемыми стенками.....	46
Ахунова А.Х., Баимова Ю.А. Влияние температуры испытания на прочность графена с дефектами при одноосном растяжении.....	50
Багдасарян Г.Е., Пантелеев А.В. Сверхзвуковой флаттер композиционной цилиндрической оболочки.....	54
Барсегян В.Р., Матевосян А.Г. Управление беспилотным летательным аппаратом самолетного типа с заданными промежуточными значениями разных частей координат.....	59
Бушуева А.В., Дьякова В.В., Полежаев Д.А. Экспериментальное изучение массопереноса растворенного в воде вещества в ячейке Хеле–Шоу при наличии колебаний воды.....	64
Валесян С.Ш., Саакян А.А. Экспериментальное исследование прогиба шарнирно-опертой балки, нагруженной сосредоточенной силой.....	66
Василян Т.Г., Джилавыян С.А. О термоупругих колебаниях анизотропной пластинки с учетом сдвиговых деформаций.....	71
Виндокуров И.В., Пирогова Ю.В., Ташкинов М.А., Зильбершмидт В.В. Влияние скорости деформации на механические свойства и морфологию поверхности образцов из PLA при 3D-печати.....	75
Власова О.А. Динамика пары свободных цилиндров в полости, заполненной жидкостью и совершающей модулированное вращение.....	80
Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Задача об отслоении покрытия от цилиндрической подложки с учетом влияния ее кривизны, податливости, а также действия поперечных сил.....	82
Геворгян Г.З., Дарбинян А.З. Об устойчивости ортотропных пластин-полос переменной толщины с учетом поперечных эффектов.....	87
Геодакян Э.Г., Карапетян Дж.К., Саакян Б.В., Мкртчян М.А., Оганесян С.М., Мкртчян Г.А. Процесс разрывообразования и механическая модель очага восточно турецкого землетрясения 06 февраля 2023г. $m_w=7.8$	92

Гургенян Н.В., Хачанова И.Б. Влияние прочности и модуля упругости перлитовой породы, классифицированной по средней плотности, на процесс ее измельчения.....	97
Джилавян С.А., Галичян Т.А. Локализованные волны в составной пьезоэлектрической среде.....	102
Евстифеев А.Д., Якупов Б.А., Смирнов И.В., Волосевич Д.В., Воропаев А.А. Механические свойства слоистых алюминиевых композитов, полученных с использованием технологии WAAM на основе сплавов AA1050 и AA5056	107
Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Шекоян А.В. Влияние параметров точечных дефектов на дисперсию и нелинейную пространственную локализацию продольных волн, распространяющихся в материалах.....	111
Земцова Е.Г., Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н., Смирнов И.В., Смирнов В.М. Механические свойства алюмоматричного композита, армированного карбидом титана	115
Зимин В. Н., Крылов А. В., Шахвердов А. О. Особенности моделирования привода для раскрытия трансформируемых крупногабаритных космических конструкций.....	120
Зимин Б.А., Судьенков Ю.В., Ялыч Е.С. Влияние межионного кулоновского взаимодействия на динамику колебаний ионных кристаллов при импульсном нагружении.....	125
Казakov К.Е., Паршин Д.А. Контактная задача взаимодействия втулки со сложным внутренним профилем и трубы с покрытием, надетой на вал	129
Карапетян К.А. Зависимость деформативных свойств и прочности композитов на основе цементного вяжущего от количества десорбированной влаги	134
Каштанова С.В., Ржонский А.В. О естественных граничных условиях и выборе базиса в методе Рунге.....	139
Козлов В.Г., Власова О.А., Дьякова В.В. Осцилляционное возбуждение параметрических колебаний границы раздела несмешивающихся жидкостей.....	141
Козлов В.Г., Зимасова А.Р., Козлов Н.В. Устойчивость границы раздела жидкостей с высоким контрастом вязкостей в неравномерно вращающемся горизонтальном цилиндре.....	144
Крылова К.А., Мурзаев Р.Т., Баимова Ю.А. Исследование механических и тепловых свойств композитов системы Ni/графен с помощью молекулярной динамики	146
Кувыркин Г. Н., Рахимов Д. Р. Применение метода конечных элементов к эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов при плоском напряженном состоянии	150
Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю., Сафронов Ю.А., Соколов А.А. Математическое моделирование нестационарной теплопроводности в нелокальной среде с учетом собственного излучения тела.....	155
Кукуджанов К.В. Воздействие короткоимпульсного высокоэнергетического электромагнитного поля на трещины в металле (эксперимент).....	159
Кукуджанов К.К. Залечивание трещины в тонкой пластине под действием сильного электромагнитного поля	161
Курдина С.П., Геворкян Г.А. Анализ периодичности функции упругих перемещений переменной длины упругих звеньев механизмов.....	163
Мавлютов А.М., Евстифеев А.Д., Смирнов И.В., Волосевич Д.В. Влияние интенсивной пластической деформации на механические свойства алюминиевого композита, полученного методом аддитивной печати.....	168
Магомедова Д.К. Закономерности разрушения сплава системы Al-Mg-Si в крупнозернистом и ультрамелкозернистом состоянии	171
Мартirosян С.Р. Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении.....	176

Маховская Ю.Ю. Эффект капиллярной адгезии в контакте упругих тел при касательном нагружении	181
Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Псевдоскалярные характерные микродлины в моделировании микрополярной термоупругости.....	186
Оганесян С. М., Карапетян Дж. К., Геодакян Э. Г., Саакян Б. В., Мкртчян М. А. К объединению моделей движения твердого тела в механиках Ньютона, Даламбера, Гамильтона, Де Бройля и Шредингера	191
Оганесян Э.К. Геометрически нелинейная задача о цилиндре в поле сил тяжести.....	195
Осипов М.Н., Сергеев Р.Н. Определение деформаций объединением методов двухэкспозиционной спекл-фотографии и Муара	199
Паршин Д.А., Казаков К.Е. Нахождение остаточных напряжений в вязкоупругом покрытии, полученном в процессе многослойного нанесения на стенку трубы.....	204
Перельмутер М.Н. Концентрация напряжений при наклонной нагрузке винтовых стоматологических имплантатов.....	208
Перельмутер М.Н., Дудченко А.В. Моделирование заживления трещин при термическом нагружении	213
Пирогова Ю.В., Ташкинов М.А., Еленская Н.В., Тарасова А.С., Виндокуров И.В., Шалимов А.С., Зильбершмидт В.В. Исследование конфигурации внутренней структуры и упругих свойств решетчатых биомедицинских скаффолдов.....	218
Рысин К.Ю. Осредненная конвекция в либрирующем плоском слое с границами различной температуры.....	223
Сейранян С.П. О сходимости тригонометрических рядов изгибающих моментов на защемленном контуре прямоугольной симметрично нагруженной пластины	224
Субботин С.В. Об осреднённых потоках в осциллирующих капельных включениях	229
Сумбатян М.А., Боев Н.В., Бараева Д.С. Математические основы фокусировки волн при отражении от искривленных границ	231
Сумбатян М.А., Закарян Р.М. О методе граничных интегральных уравнений в задаче нестационарного обтекания круглого цилиндра потоком вязкой жидкости.....	236
Татаурова А.А., Стефанов Ю.П. Оценка влияния механических параметров на поведение среды за пределом упругости для геологических среды в обстановке сжатия.....	241
Торская Е.В., Морозов А.В., Степанов Ф.И. Множественный контакт вязкоупругих тел в условиях трения скольжения: теория и эксперимент	244
Хачикян А.С. О выполнении гипотетическим электроном-катапультной функций реального электрона.....	249
Шишкина С.И., Сердюков В.И., Сердюкова Н.А. Моделирование состояний интеллектуальной системы методами гомологической алгебры.....	252
Amelyuhskin I.A., Druzhinin O.V., Kudrov M.A., Kuleshov P.S. Peculiarities of Icing in a Flow with Supercooled Droplets and Ice Crystals	257
Antonova O.V., Ivanov M.V., Mikhailov A.A., Kuzmin V.A. Macro Level Behavior of Sandwich Panels with Tetrahedral Core under Bending Loading	261
Avetisyan A.S., Khachatryan V.M. Weakened by an Infinite System of Transverse Periodic Cracks Piezoelectric Waveguide as a Filter of Electroacoustic Waves.....	263
Butusova O.A., Kolesnik S.A., Bulychev N.A. Mechanical Properties of Polymer Composite Films with ZnO Nanoparticles Synthesized in Low-Temperature Plasma under Ultrasonic Cavitation.....	268
Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Capillary and Gravity Surface Waves with Accompanied Ligaments: Asymptotic Theory and Drop Impact Experiment	271
Dobrokhotov S.Yu., Kalinichenko V.A., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E. Asymptotics of Long Standing Waves in One-Dimensional Basins with Shallow Coasts: Theory and Experiment.....	275

Ghazaryan K., Ghazaryan R., Terzian S. Shear Surface Wave in Homogeneous Semi-Space with Periodic Interfaces of Imperfect Elastic Contact	276
Hayroyan S.H. Characteristics of Sliding Deformation in Swelling Clays Conditioned with the Change in Swelling Consistency	281
Jokhadze O., Kharibegashvili S., Shavlakadze N. Some Contact Problems for a Half-Plane with Non-Linear Elastic Stringer	286
Mkrtchyan M.H., Avetisyan L.V. Control of Electroactive Shear Waves in a Piezoelectric Waveguide By Different Surface Actions	287
Nedin R.D., Gukasyan L.S. On Some Approaches to the Reconstruction of Elastic Body Material Inhomogeneity in 2D Statements	292
Nemirovskii Yu.V., Tikhonov S.V. Limit Elastic Deformation of a Multilayered Concrete Rod	296
Shahinyan S.G. On Optimal Stabilization of Part of Variables of Rotary Movement of a Rigid Body with one Fixed Point in Sophia Kovalevskaya's Case.	301
Sharma A.P., Purusothaman M., Velmurugan R., Kanny K. Effect of Nanoclay on Tensile, Flexural, and Impact Characteristics of Sandwich Panels with Composite Face Sheet and Epoxy-Montmorillonite Clay Core	306
Shavlakadze N., Pachulia B. Dynamical Boundary-Contact Value Problems for Viscoelastic Half-Space with an Elastic Inclusion or Cut	311
Shepelev I.A., Dmitriev S.V. Dynamics of Monolayer Black Phosphorene under Longitudinal Compression	312
Ustinov K.B. Interface Cracks and Delamination of Coatings. some Analytical Solutions	316
Vasilyan N.G. The Bending Rectangular Isotropic Plate By Cutting Forces Along the Edge	321
Vatulyan A.O., Varchenko A.A., Yurov V.O. On the Reconstruction of Instantaneous and Long Term Modules in the Analysis of Bending Vibrations of Functionally Graded Rods	326
Vatulyan A.O., Yurov V.O. Coefficient Inverse Problems for Elastic and Electroelastic Bodies	331
Velmurugan R., Chinnapandi M., Sharma A.P., Ashok Kumar Reddy B. Experimental Investigation On The Effect Of MMT Nanoclay On The Mechanical And Thermal Characterization Of Glass Fiber Composites	336
Zemtsova E.G., Kudymov V.K., Sidorov Yu.V., Morozov N.F., Smirnov V.M. Creation of a Nickel Composite Using Surface Structuring of the Reinforcing Phase with Titanium Carbide Nanostructures to Improve Strength Properties	341
Contents and Abstracts	344