IX международная конференция

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

сборник научных трудов

IX International Conference on

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

the proceeding

2025

TSAKHKADZOR, ARMENIA

22-26 SEPTEMBER

22-26 СЕНТЯБРЯ

ЦАХКАДЗОР, АРМЕНИЯ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Материалы IX международной конференции
22-26 сентября 2025, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН, Издательство «Гитутюн» НАН РА
2025

УДК 531/534(082)
ББК 22.25я43
А 437

Институт механики НАН РА
Южный федеральный университет России
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН
Национальный университет архитектуры и строительства Армении
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Дом творчества писателей в Цахкадзоре

Со-председатели оргкомитета: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян (Армения)
д.ф.-м.н. А.О.Ватульян (Россия)
к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения), д.ф.-м.н. М.А.Сумбатян (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. А.А.Камалян (Армения), к.ф.-м.н. Е.В.Мурашкин (Россия)

Международный редакционный совет:
Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Агаян К.Л., Айзикович С.М. (Россия), Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Д. (США), Бабешко В.А. (Россия), Барсегян В.Р., Вайсфельд Н.Д. (Украина), Вельмуруган Р. (Индия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Гукасян А.А., Гупта Н. (Индия), Джаниани Г. (Грузия), Жубер С. (ЮАР), Зимин В.Н. (Россия), Игумнов Л.А. (Россия), Казарян К.Б., Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Карапетян К.А., Карев В.И. (Россия), Климов Д.М. (Россия), Коссович Л.Ю. (Россия), Кудиш И.И. (США), Кушнир Р.М. (Украина), Ломакин Е.В. (Россия), Матвеенко В.П. (Россия), Мруз З. (Польша), Назайкинский В.Е. (Россия), Олиферук В. (Польша), Орелма Х. (Финляндия), Попов В.Г. (Украина), Радаев Ю.Н. (Россия), Саркисян С.О., Северина Н.С. (Россия), Сейранян А.П. (Россия), Цатурян А.К. (Россия), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Шаталов М. (ЮАР)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

А 437 Актуальные проблемы механики сплошной среды.-Ер.: Гитутюн, 2025 -370 с.

В сборник включены доклады, представленные на IX-ую международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды».

Конференция проводится при финансовой поддержке Госкомитета по высшему образованию и науке МОНКС Республики Армения

УДК 531/534(082)
ББК 22.25я43

ISBN 978-5-8080-1578-4
© ИМ НАН РА, 2025
© ИПМех РАН, 2025

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

IX միջազգային գիտաժողովի նյութեր
22-26 սեպտեմբերի 2025թ., Ծաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2025

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Proceedings of IX International Conference
22-26 September 2025, Tsaghkadzor, Armenia

YEREVAN – 2025

ОБ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПЛАСТИН, ИМЕЮЩИХ ПЛОСКОСТЬ УПРУГОЙ СИММЕТРИИ

Агаловян М.Л., Закарян Т.В., Товмасян А.Б.

Решена пространственная задача для пластин, имеющих плоскость упругой симметрии. Таким свойством, в частности, обладают кристаллы моноклинной системы (13 независимых постоянных упругости). Считается, что на лицевую поверхность пластины действуют нормальные и тангенциальные нагрузки, а основание пластины жёстко закреплено. Для решения подобных задач гипотезы классической и известных уточненных теорий неприменимы.

1. Постановка задачи, основные уравнения и соотношения

Пусть пластина занимает область $\mathrm{D} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}):\ 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{a},\ \ 0 \le \mathrm{y} \le \mathrm{b},\ \ -\mathrm{h} \le \mathrm{z} \le \mathrm{h},\ \ 2\mathrm{h} \ll l,$ $l = \min(\mathrm{a},\mathrm{b})\}$ (рис.1). Требуется найти в этой области решения уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{\mathrm{xx}}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{xy}}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{xz}}}{\partial \mathrm{z}} + F_x(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_{\mathrm{xy}}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{yy}}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{yz}}}{\partial \mathrm{z}} + F_y(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_{\mathrm{xz}}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{yz}}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \sigma_{\mathrm{zz}}}{\partial \mathrm{z}} + F_z(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

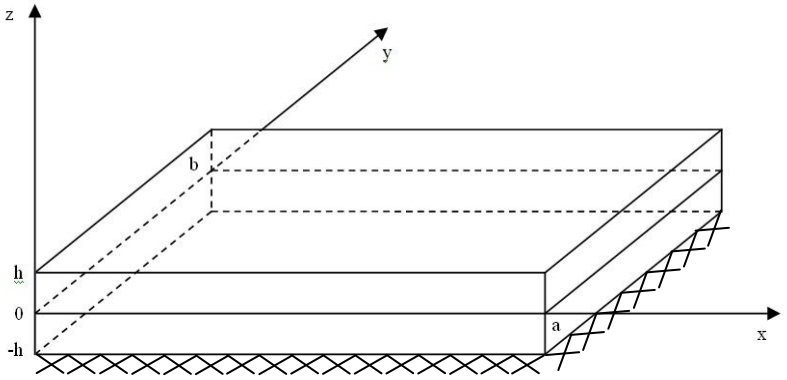


Рис.1. Структура пластинки

где $F_x, F_y, F_z -$ объемные силы, и соотношения упругости [1,2]:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{a}_{11}\sigma_{\mathrm{xx}} + \mathrm{a}_{12}\sigma_{\mathrm{yy}} + \mathrm{a}_{13}\sigma_{\mathrm{zz}} + \mathrm{a}_{16}\sigma_{\mathrm{xy}}, \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} = \mathrm{a}_{12}\sigma_{\mathrm{xx}} + \mathrm{a}_{22}\sigma_{\mathrm{yy}} + \mathrm{a}_{23}\sigma_{\mathrm{zz}} + \mathrm{a}_{26}\sigma_{\mathrm{xy}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}} = \mathrm{a}_{13}\sigma_{\mathrm{xx}} + \mathrm{a}_{23}\sigma_{\mathrm{yy}} + \mathrm{a}_{33}\sigma_{\mathrm{zz}} + \mathrm{a}_{36}\sigma_{\mathrm{xy}}, \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}} = \mathrm{a}_{44}\sigma_{\mathrm{yz}} + \mathrm{a}_{45}\sigma_{\mathrm{xz}},$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{a}_{45}\sigma_{\mathrm{yz}} + \mathrm{a}_{55}\sigma_{\mathrm{xz}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{a}_{16}\sigma_{\mathrm{xx}} + \mathrm{a}_{26}\sigma_{\mathrm{yy}} + \mathrm{a}_{36}\sigma_{\mathrm{zz}} + \mathrm{a}_{66}\sigma_{\mathrm{xy}} \qquad (2)$$

при следующих граничных условиях:

при $\mathrm{z} = \mathrm{h}$: $\quad \sigma_{\mathrm{xz}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{h}) = \sigma^{+}_{\mathrm{xz}}(x,y), \quad \sigma_{\mathrm{yz}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{h}) = \sigma^{+}_{\mathrm{yz}}(x,y), \quad \sigma_{\mathrm{zz}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{h}) = -\sigma^{+}_{\mathrm{zz}}(x,y)$ (3)

при $\mathrm{z} = -\mathrm{h}$: $\quad \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y},-\mathrm{h}) = 0,\ \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y},-\mathrm{h}) = 0,\ \mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y},-\mathrm{h}) = 0$ (4)

Граничные условия на боковых поверхностях пока не конкретизируем, ими обусловлено появление пограничного слоя, который, как обычно, может рассматриваться отдельно.

2. Асимптотическое решение задачи

Для решения поставленной задачи, в уравнениях (1) и соотношениях (2) перейдём к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad V = \frac{v}{l}, \quad W = \frac{w}{l}, \tag{5}$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = \frac{h}{l}$ систему.

Легко проверить, что известная асимптотика для напряжений и перемещений классической теории пластин приводит к противоречивой системе [3]. Для решения подобных классов задач (вторая и смешанная краевые задачи) установлена принципиально новая асимптотика [3,4].

Решение сингулярной возмущенной системы складывается из решений внешней задачи (I^{out}) и пограничного слоя (I_b): $I = I^{out} + I_b$.

Решение внешней задачи будем искать в виде [3,4]

$$\sigma_{ij}^{out} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\ i,j = 1,2,3,\ s = \overline{0,N}\ (U^{out}, V^{out}, W^{out}) = \varepsilon^{s}\left(U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}\right), \tag{6}$$

Подставив (6) в преобразованную, согласно (5), систему 2 и приравняв в каждом уравнении коэффициенты п

Из соотношений упругости этой системы все напряжения выражаются через компоненты вектора перемещения по формулам

$$\sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(a_{44}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} - a_{45}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + \sigma_{13*}^{(s)}\right),\ \sigma_{33}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(A_{33}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} + \sigma_{33*}^{(s)}\right),\quad \sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(A_{31}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} + \sigma_{11*}^{(s)}\right)$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(-a_{45}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + a_{55}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + \sigma_{23*}^{(s)}\right),\ \sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(A_{32}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} + \sigma_{22*}^{(s)}\right),\ \sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(A_{34}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} + \sigma_{12*}^{(s)}\right), \tag{7}$$

где

$$\sigma_{13*}^{(s)} = a_{44}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi} - a_{45}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}, \qquad \sigma_{23*}^{(s)} = -a_{45}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi} + a_{55}\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta},$$

$$\sigma_{11*}^{(s)} = A_{11}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} - A_{21}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} - A_{41}\left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{22*}^{(s)} = -A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + A_{22}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} + A_{42}\left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}\right), \tag{8}$$

$$\sigma_{33*}^{(s)} = A_{13}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} - A_{23}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} - A_{43}\left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{12*}^{(s)} = -A_{14}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} + A_{24}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} + A_{44}\left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$\sigma_{ij}^{(m)} = 0,\ U^{(m)} = V^{(m)} = W^{(m)} = 0$ при $m<0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{36} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{66} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = a_{44}a_{55} - a_{45}^2,$$

A_{ij} – соответствующий минор определителя Δ, где i- номер строки, j-номер столбца элемента определителя.

Для определения $U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}$ получаются следующие уравнения

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2} = \overline{F}_x^{(s)},\ \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} = \overline{F}_y^{(s)},\ \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2} = \overline{F}_z^{(s)}, \qquad W^{(s)} = \int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta \overline{F}_z^{(s)}d\zeta + C_5^{(s)}\zeta + C_6^{(s)}(\xi,\eta),\ U^{(s)} =$$

$$\int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta \overline{F}_x^{(s)}d\zeta + C_1^{(s)}\zeta + C_2^{(s)}(\xi,\eta), \qquad V^{(s)} = \int_0^\zeta d\zeta\int_0^\zeta \overline{F}_y^{(s)}d\zeta + C_3^{(s)}\zeta + C_4^{(s)}(\xi,\eta),$$

$$\overline{F}_x^{(s)} = -\mathrm{a}_{55}\left(F_x^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\sigma_{13*}^{(s)}}{\partial\zeta}\right) + \mathrm{a}_{45}\left(F_y^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\sigma_{23*}^{(s)}}{\partial\zeta}\right),$$

$$\overline{F}_y^{(s)} = \mathrm{a}_{45}\left(F_x^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\sigma_{13*}^{(s)}}{\partial\zeta}\right) - \mathrm{a}_{44}\left(F_y^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial\sigma_{23*}^{(s)}}{\partial\zeta}\right)$$

$$\overline{F}_z^{(s)} = -\left[\frac{\Delta}{A_{33}}\left(F_z^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial\sigma_{33*}^{(s)}}{A_{33}\,\partial\zeta}\right], \quad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(\mathrm{a}_{44}C_1^{(s)} - \mathrm{a}_{45}C_3^{(s)}\right) + d_1^{(s)}, \tag{9}$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(-\mathrm{a}_{45}C_1^{(s)} + \mathrm{a}_{55}C_3^{(s)}\right) + d_2^{(s)}, \quad \sigma_{33}^{(s)} = \frac{A_{33}}{\Delta}\left(\int_0^\zeta \overline{F}_z^{(s)}\mathrm{d}\zeta + C_5^{(s)}\right) + \frac{\sigma_{33*}^{(s)}}{\Delta}$$

Используя формулы (9) и удовлетворив граничным условиям (3), (4), определим значения неизвестых функций $C_j^{(s)}(\xi,\eta), j = 1,2,\ldots,6$

$$C_1^{(s)} = \mathrm{a}_{55}\sigma_{\mathrm{xz}}^{+(\mathrm{s})} + \mathrm{a}_{45}\sigma_{\mathrm{yz}}^{+(\mathrm{s})} - \left(\mathrm{a}_{55}d_1^{(s)} + \mathrm{a}_{45}d_2^{(s)}\right)_{\zeta=1}, \sigma_{\mathrm{xz}}^{+(0)} = \sigma_{\mathrm{xz}}^{+}, \sigma_{\mathrm{xz}}^{+(\mathrm{s})} = 0s \neq 0(x,y)$$

$$C_3^{(s)} = \mathrm{a}_{45}\sigma_{\mathrm{xz}}^{+(\mathrm{s})} + \mathrm{a}_{44}\sigma_{\mathrm{yz}}^{+(\mathrm{s})} - \left(\mathrm{a}_{45}d_1^{(s)} + \mathrm{a}_{44}d_2^{(s)}\right)_{\zeta=1}, \qquad C_5^{(s)} = -\frac{\Delta\sigma_{\mathrm{zz}}^{+(\mathrm{s})}}{A_{33}} - \frac{\sigma_{33*}^{(s)}}{A_{33}} - \int_0^1 \overline{F}_z^{(s)}\mathrm{d}\zeta,$$

$$C_2^{(s)} = \int_{-1}^0 \mathrm{d}\zeta\int_0^\zeta \overline{F}_x^{(s)}\mathrm{d}\zeta + C_1^{(s)}, \tag{10}$$

$$C_4^{(s)} = \int_{-1}^0 \mathrm{d}\zeta\int_0^\zeta \overline{F}_y^{(s)}\mathrm{d}\zeta + C_3^{(s)}, \qquad d_1^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(\mathrm{a}_{44}\int_0^\zeta \overline{F}_x^{(s)}\mathrm{d}\zeta - \mathrm{a}_{45}\int_0^\zeta \overline{F}_y^{(s)}\mathrm{d}\zeta + \sigma_{13*}^{(s)}\right)$$

$$C_6^{(s)} = \int_{-1}^0 \mathrm{d}\zeta\int_0^\zeta \overline{F}_z^{(s)}\mathrm{d}\zeta + C_5^{(s)}, \quad d_2^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(-\mathrm{a}_{45}\int_0^\zeta \overline{F}_x^{(s)}\mathrm{d}\zeta + \mathrm{a}_{55}\int_0^\zeta \overline{F}_y^{(s)}\mathrm{d}\zeta + \sigma_{23*}^{(s)}\right)$$

Используя значения функций $C_j^{(s)}(\xi,\eta)$, по формулам (7), (8) определятся все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения. Если функции $\sigma_{\mathrm{xz}}^{+}, \sigma_{\mathrm{yz}}^{+}, \sigma_{\mathrm{zz}}^{+}$ являются алгебраическими многочленами степени m итерационный процесс обрывается на приближении m+1. В результате получается математически точное решение во внешней задаче.

Найденное решение удовлетворяет граничным условиям (3), (4) и, как правило, не будет удовлетворять условиям на торцевых сечениях пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя. Величины пограничного слоя экспоненциально убывают при удалении от боковой поверхности во внутрь пластинки. Решение для пограничного слоя и его сопряжение (сращивание) с решением внешней задачи осуществляется изложенным в [3,4] способом. Поэтому найденное нами решение внешней задачи является математически точным решением для пространственного слоя.

3. О математически точных решениях

Если функции σ_{xz}^{+}, σ_{yz}^{+}, σ_{zz}^{+} являются алгебраическими многочленами соответствующее им решение является математически точным. Сказанное проиллюстрируем двумя примерами

а) Напряженно-деформированное состояние пластинки, вызванное весом пластинки. Для этого случая

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -pg,\ \ \sigma_{\mathrm{xz}}^{+} = 0,\ \sigma_{\mathrm{yz}}^{+} = 0,\ \sigma_{\mathrm{zz}}^{+} = 0 \tag{11}$$

Итерация обрывается на исходном приближении.

Согласно формулам (10) имеем

$$C_1^{(0)} = C_2^{(0)} = C_3^{(0)} = C_4^{(0)} = 0, \qquad C_5^{(0)} = -\frac{\rho g}{A_{33}},\ C_6^{(0)} = -\frac{3\rho g}{2A_{33}}, \quad \sigma_{13}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{23}^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = 0, \quad U^{(0)} = 0, \quad V^{(0)} = 0\,, \quad \sigma_{33}^{(0)} = \frac{\rho g h^2}{\Delta l}(\zeta - 1), \qquad W^{(0)} = \frac{\rho g h^2}{2A_{33}l}(\zeta^2 - 2\zeta - 3), \tag{12}$$

$$\sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{yz} = 0,\ \sigma_{xz} = 0, \quad u = 0,\ v = 0,$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\rho g h}{\Delta}(\zeta - 1), \quad w = \frac{\rho g h^2}{2A_{33}}(\zeta^2 - 2\zeta - 3),$$

б) Пусть

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad \sigma_{xz}^{+} = 0,\ \sigma_{yz}^{+} = 0,\ \sigma_{zz}^{+} = a_0 + a_1\xi + a_2\eta \tag{13}$$

Тогда при $s = 0$ $\quad \sigma_{13}^{(0)} = 0, \sigma_{23}^{(0)} = 0, \qquad \sigma_{33}^{(0)} = -(a_0 + a_1\xi + a_2\eta), \qquad \sigma_{12}^{(0)} = -\frac{A_{34}}{A_{33}}(a_0 + a_1\xi +$ $a2\eta$

$$\sigma_{11}^{(0)} = -\frac{A_{31}}{A_{33}}(a_0 + a_1\xi + a_2\eta), \qquad \sigma_{22}^{(0)} = -\frac{A_{32}}{A_{33}}(a_0 + a_1\xi + a_2\eta) \tag{14}$$

$$W^{(0)} = -\frac{\Delta}{A_{33}}(\zeta + 1)(a_0 + a_1\xi + a_2\eta), \qquad U^{(0)} = 0,\ V^{(0)} = 0$$

При $s = 1$

$$\overline{F}_x^{(1)} = \frac{1}{A_{33}}\left[a_{55}\left(A_{31}a_1 + A_{34}a_2 + \frac{\Delta}{\Delta_1}(a_{44}a_1 + a_{45}a_2)\right) - a_{45}\left(A_{34}a_1 + A_{32}a_2 + \frac{\Delta}{\Delta_1}(a_{45}a_1 + a_{55}a_2)\right)\right]$$

$$\overline{F}_y^{(1)} = \frac{1}{A_{33}}\left[a_{45}\left(A_{31}a_1 + A_{34}a_2 + \frac{\Delta}{\Delta_1}(a_{44}a_1 + a_{45}a_2)\right) - a_{44}\left(A_{34}a_1 + A_{32}a_2 + \frac{\Delta}{\Delta_1}(a_{45}a_1 + a_{55}a_2)\right)\right], \tag{15}$$

$$\overline{F}_z^{(1)} = 0,$$

$$C_1^{(1)} = -\overline{F}_x^{(1)} + \frac{2\Delta a_1}{A_{33}}, \quad C_2^{(1)} = \frac{\overline{F}_x^{(1)}}{2} + C_1^{(1)}, \ C_3^{(1)} = -\overline{F}_y^{(1)} + \frac{2\Delta a_2}{A_{33}}, \quad C_4^{(1)} = \frac{\overline{F}_y^{(1)}}{2} + C_3^{(1)}, \ C_5^{(1)} = 0, \quad C_6^{(1)} = 0$$

Согласно формулам (7), (8), (9)

$$W^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(1)} = 0, \ \sigma_{22}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = 0, \ \sigma_{33}^{(1)} = 0,$$

$$U^{(1)} \neq 0, \ V^{(1)} \neq 0, \ \sigma_{13}^{(1)} \neq 0, \ \sigma_{23}^{(1)} \neq 0,$$

В результате получим точное решение

$$w = lW^{(0)}, \ u = hU^{(1)}, \ v = hV^{(1)}, \sigma_{xx} = \varepsilon^{-1}\sigma_{11}^{(0)}, \quad \sigma_{yy} = \varepsilon^{-1}\sigma_{22}^{(0)}, \tag{16}$$

$$\sigma_{zz} = \varepsilon^{-1}\sigma_{33}^{(0)}, \quad \sigma_{xy} = \varepsilon^{-1}\sigma_{12}^{(0)}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{13}^{(1)}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{23}^{(1)}$$

Из формул (14), (16) следует, что неравномерность нормальной нагрузки σ_{zz}^{+} приводит к появлению тангенциальных перемещений и поперечных касательных напряжений, однако они на порядок меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука —1977. — 416с.
2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М. :Наука—1982. — 424с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем. // В сб. Механика 2009: Труды межд. школы – конференции молодых ученых. Ереван. Изд-во ЕГУАС, 2009. С.5-35.
4. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. World Scientific Publishing. 2015. 376 p. (Русское издание: Москва, Наука, Физматлит. 1997. 414 с.)

Сведения об авторах:

Агаловян Мгер Ленсерович- доктор физ.-мат. наук, доцент, Армянский государственный экономический университет, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (37493)055070; **E-mail:**mheraghalovyan@yahoo.com

Закарян Татевик Владиковна - кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (37494)638882; **E-mail:** zaqaryantatevik@mail.ru

Товмасян Артур Бабкенович — кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН Армении,
Тел. (+37497) 319999

УПРУГО-СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ФЕРРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ЭКРАНОМ

Агаян К.Л., Атоян Л.А.

В предлагаемой работе рассматривается конструкция, состоящая из ферромагнитного полупространства, граничащего с вакуумом, к поверхности которого примыкает полубесконечный магнитный экран. Предполагается, что вся конструкция находится во внешнем, постоянном магнитном поле, которое направлено перпендикулярно распространению упруго-спиновой волны, кроме того полагается, что изнутри ферромагнитного полупространства на его поверхность падает упруго-спиновая гибридная волна. Задача решается с применением метода Винера-Хопфа.

В последнее время значительное количество работ посвящено поведению деформируемых магнито-упорядоченных упругих тел и конструкций, находящихся во внешнем магнитном поле. Особый интерес также вызывают вопросы распространения, отражения и преломления магнитоупругих (упруго-спиновых) волн в структурах с дефектами типа трещин, вставок и вкраплений в виде электродов или электромагнитных экранов [1,2,5-11].

Этот интерес обусловлен тем, что изменением интенсивности внешнего магнитного поля возможно контролировать волновой процесс в рассматриваемой конструкции, это означает регулировать распределение энергии падающей волны между отраженными и преломленными волнами [5,7,9,10].

В предлагаемой работе в декартовой системе координат $Oxyz$ рассматривается конструкция, состоящая из ферромагнитного полупространства (железоиттриевый гранат (ЖИГ)), занимающего область $\Omega_0\,(-\infty < x < \infty; 0 < y < \infty; -\infty < z < \infty)$, граничащую с вакуумом ($y < 0$). К поверхности ферромагнита примыкает полубесконечный магнитный экран ($x > 0$). Предполагается, что вся конструкция находится во внешнем, постоянном магнитном поле $\vec{H}_0(0,0,H_0)$, которое направлено перпендикулярно распространению упруго-спиновой волны, кроме того, полагается, что изнутри ферромагнитного полупространства на его поверхность падает упруго-спиновая гибридная волна с парциальными составляющими:

$$\begin{aligned} w_I(x,y,t) &= W_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}, \\ \mu_I(x,y,t) &= M_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}, \\ \nu_I(x,y,t) &= N_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}, \\ \varphi_I(x,y,t) &= \Phi_I e^{-iqy} e^{i(px-\omega t)}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $w_I(x,y,t)$-перемещение по оси Oz; $\mu_I(x,y,t), \nu_I(x,y,t)$-компоненты вектора намагниченности $\vec{\mu}_I$; φ_I-магнитный потенциал; W_I, M_I, N_I, Φ_I-постоянные; p, q-компоненты волнового вектора $\vec{k}$; ω-круговая частота; t-время.

Система определяющих уравнений, описывающих волновой процесс в ферромагнитной среде, представляется в виде [1-4]:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= S^2 \Delta w + \rho B(\mu_x + \nu_y), \\ \dot{\mu} &= \omega_M(\varphi_y + \hat{b}\nu + B w_y), \\ \dot{\nu} &= -\omega_M(\varphi_x + \hat{b}\mu + B w_x), \\ \Delta\varphi &= \mu_x + \nu_y, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\omega_M = \overline{\gamma} M_0, M_0$-объемная плотность намагниченности насыщения, $M_0 = \rho\mu_0$, ρ-плотность материала, $\overline{\gamma}$-гиромагнитное отношение, $\vec{\mu}_0(\mu, \nu, 0)$ - массовая плотность намагниченности насыщения ферромагнетика, $B = (b + f)\mu_0, \hat{b} = b + \dfrac{H_0}{M_0}; b, f$-магнитоупругие коэффициенты

связи, $S^2 = \frac{G}{\rho}$, G-модуль сдвига, S- скорость упругой волны, φ-магнитный потенциал; $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для железоиттриевого граната (ЖИГ) будем полагать $b \approx 0$.

Уравнение для магнитостатического потенциала φ_0 в вакууме представляется в виде:

$$\Delta\varphi_0 = 0. \tag{3}$$

Граничные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} &w(x,y)|_{y=0} = 0, \\ &[\varphi(x,y) - \varphi_0(x,y)]_{y=0} = E_+(x), \\ &[\varphi_y - \rho\nu]_{y=+0} = [\varphi_{0y}]_{y=-0} = F_-(x), \end{aligned} \tag{4}$$

где $E_+(x), F_-(x)$-неизвестные функции, при этом $E_+(x) = 0$ при $x < 0$; $F_-(x) = 0$ при $x > 0$.

Подставив (1) в (2), мы получим линейную систему алгебраических уравнений, из условия разрешимости которой, следует характеристическое уравнение, а также связи между амплитудами парциальных волн:

$$k^2\left[\left(\Omega^2 - k^2S^2\right)\left(\Omega^2 - \Omega_{SV}^2\right) - \hat{b}Bk^2\right] = 0, \tag{5}$$

$$M_I = \alpha W_I, \quad \alpha = \frac{B(ip\hat{b} - q\Omega)}{\Omega^2 - \Omega_{SV}^2}, \tag{6}$$

$$N_I = \beta W_I, \quad \beta = \frac{B(iq\hat{b} + p\Omega)}{\Omega^2 - \Omega_{SV}^2}, \tag{7}$$

$$\Phi_I = \lambda W_I, \quad \lambda = \frac{B\hat{b}}{\Omega^2 - \Omega_{SV}^2}, \tag{8}$$

где $\Omega = \omega / \omega_M$; $\Omega_{SV}^2 = \hat{b}^2 + \hat{b}$.

Фурье-трансформант затухающего решения уравнения (3) в вакууме имеет вид:

$$\bar{\varphi}_0(\sigma, y) = \Phi_0 e^{|\sigma|y}, \tag{9}$$

где Φ_0-постоянная, σ -параметр преобразования Фурье.

Общее решение определяющей системы (2) ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &w(x,y,t) = w_I(x,y,t) + W(x,y)e^{-i\omega t}, \\ &\mu(x,y,t) = \mu_I(x,y,t) + M(x,y)e^{-i\omega t}, \\ &\nu(x,y,t) = \nu_I(x,y,t) + N(x,y)e^{e^{-i\omega t}}, \\ &\varphi(x,y,t) = \varphi_I(x,y,t) + \Phi(x,y)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{10}$$

Фурье-образы функций (10) принимают вид (временной фактор опущен):

$$\begin{aligned} &\bar{w}(\sigma, y) = 2\pi W_I e^{-iqy}\delta(p+\sigma) + Q_1 e^{-\gamma y}, \\ &\bar{\mu}(\sigma, y) = 2\pi\alpha W_I e^{-iqy}\delta(p+\sigma) + C_1\bar{W}_y - i|\sigma|C_2\bar{W} + C_3\bar{\Phi}_y - i|\sigma|C_4\bar{\Phi}, \\ &\bar{\nu}(\sigma, y) = 2\pi\beta W_I e^{-iqy}\delta(p+\sigma) + C_2\bar{W}_y + C_4\bar{\Phi}_y + i|\sigma|C_1\bar{W} + i|\sigma|C_3\bar{\Phi}, \\ &\bar{\varphi}(\sigma, y) = 2\pi\lambda W_I e^{-iqy}\delta(p+\sigma) + R_1 e^{-|\sigma|y} - \lambda Q_1 e^{-\gamma y}, \end{aligned} \tag{11}$$

где Q_1, R_1-постоянные,

$$\gamma^2=\sigma^2-r^2;\quad r^2=\frac{\Omega^2(\Omega^2-\Omega_{SV}^2)}{S^2(\Omega^2-\tilde{\Omega}_{SV}^2)};\qquad \tilde{\Omega}_{SV}^2=\Omega_{SV}^2-\rho_2\hat{b}BS_2^{-2};$$

$$C_1=\frac{B\Omega_M}{\bar{\Omega}_M};\quad C_2=\frac{\hat{b}B}{\bar{\Omega}_M};\quad C_3=\frac{\Omega_M}{\bar{\Omega}_M};\quad C_4=\frac{\hat{b}}{\bar{\Omega}_M};\quad \Omega_M=-i\Omega;\quad \bar{\Omega}_M=\hat{b}^2-\Omega^2;$$

Далее сделаем ПФ граничных условий (4) и подставим туда Фурье-трансформанты общих решений (9) и (11), получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&2\pi W_I\delta(p+\sigma)+Q_1=0,\\
&2\pi\lambda W_I\delta(p+\sigma)+R_1-\lambda Q_1-|\sigma|\Phi_0=\bar{E}_+(\sigma),\\
&-iq2\pi\lambda W_I\delta(p+\sigma)-|\sigma|R_1+\gamma\lambda Q_1-\rho[2\pi\beta W_I\delta(p+\sigma)-C_2\gamma Q_1-C_4(|\sigma|R_1-\\
&-\gamma\lambda Q_1)+i|\sigma|C_1Q_1+i|\sigma|C_3(R_1-\lambda Q_1)]=|\sigma|\Phi_0=\bar{F}_-(\sigma).
\end{aligned}\tag{12}$$

Из (12) следует уравнение:

$$\bar{E}_+(\sigma)+\frac{C_{34}}{|\sigma|}\bar{F}_-(\sigma)=2\pi\bar{B}\delta(p+\sigma),\tag{13}$$

$$C_{34}=\frac{C_3^2-C_4^2+C_4}{C_3^2-C_4^2+2C_4-1};\quad \bar{B}=2\pi\frac{iq\Phi_I+\rho N_I+W_I[\rho C_2\sqrt{p^2+q^2}-(C_1-\frac{C_2C_3}{C_4})p\rho]}{(C_4-1)p+C_3p}.$$

Решая (13) методом факторизации [11,12], в результате получим:

$$\bar{F}_-(\sigma)=\frac{\sqrt{p}}{C_{34}}\bar{B}\frac{\sqrt{\sigma-i0}}{\sigma+p-i0},\qquad \bar{E}_+(\sigma)=-\frac{\sqrt{p}\bar{B}}{\sqrt{\sigma+i0}(\sigma+p+i0)}.\tag{14}$$

Используя (14), из (12) находим постоянные Q_1,R_1,Φ_0, после чего получаем аналитические выражения функций $w(x.y),\varphi(x.y),\varphi_0(x.y)$:

$$w(x.y)=W_Ie^{-iqy+ipx}+W_oe^{iqy+ipx},\tag{15}$$

здесь правая часть представляет собой падающую и отраженную волны, соответственно. В подобласти $\omega_{12}(x<0,y>0)$ имеем:

$$\varphi_1(x,y)=\frac{\sqrt{\rho}\bar{B}}{C_{34}\sqrt{p}}e^{-|p|y+ipx}+\varphi_*^{(-)}(x,y),\ \text{где}\quad \varphi_*^{(-)}(x,y)=\frac{\sqrt{\rho}\bar{B}}{\pi C_{34}}\int_0^\infty\frac{\cos(\tau y)e^{\pm\tau x}}{\sqrt{\tau}(p\pm i\tau)}d\tau.\tag{16}$$

Первый член в (16) определяет неоднородную отраженную волну, а второй – неволновую часть магнитного процесса в ферромагнетике.

В подобласти $\omega_{11}(x>0;y>0)$ имеем:

$$\varphi_1(x.y)=\Phi_Ie^{-iqy+ipx}-\frac{\rho C_2}{1+C_1}\Phi_oe^{iqy+ipx}+\frac{\sqrt{\rho}\bar{B}}{C_{34}\sqrt{p}}e^{-|py|+ipx}+\varphi_*^{(-)}.\tag{17}$$

В (17) первый член характеризует падающую волну, второй – отраженную, третий – неоднородную.

В области $\omega_2(|x|<\infty,y<0)$:

$$\varphi_0(x,y)=\begin{cases}-I_0^{(-)}(x,y),x>0\\(\bar{B}/C_{34})e^{|p|y+ipx}+i\varphi_*^{(-)}(x,y),x<0\end{cases}$$

Заключение. Рассмотрена задача отражения упруго-спиновой волны от поверхности ферромагнитной полуплоскости с полубесконечным магнитным экраном. Получены конечные выражения для амплитуд упругих перемещений, а также магнитного потенциала. Полученные

результаты дают основание утверждать, что при отсутствии напряжений на поверхности полуплоскости, магнитный экран не вызывает дифракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991, 560 стр.
2. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и ферромагнетиках. Москва: Наука, 1973 стр.591.
3. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
4. Danoyan Z., Piliposian G, Hasanyan D. Reflection of spin and spin-elastic waves at the interface of a ferromagnetic half-space. Waves Rand. Complex Media 19(4), 567-584 (2009).
5. Hasanyan D., Batra R. Antiplane Shear Waves in Two Contacting Ferromagnetic Half Spaces. J. Elast. (2011) 103, p.189-203.
6. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Р., Атоян Л.А., Манукян Г.А. Отражение спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства. Тр. VI межд. конф. сентябрь, 2008, Горис–Степанакерт, с.115-125.
7. Даноян З.Н., Агаян К.Л., Атоян Л.А. Упруго–спиновые волны в слоистой среде ферромагнит–диэлектрик. Тр. 4-ой межд. конф. по совр. проблем мех. сплош. среды, Армения, Цахкадзор, 21-26 сент., 2015г., стр.185-189.
8. Bagdasarian G.E., Hasanyan D.J. Magneto-elastic interaction between soft ferromagnetic-elastic half-plane with crack and constant magnetic field, Int. J. Solids Struct. 37,2000 y., p. 5371-5383.
9. Агаян К.Л., Атоян Л.А. “Упруго-спиновые волны в ферромагнитном полупространстве с экраном”, Изв. НАН Армении, Механика т.76, 2, 2023 г.
10. Агаян К.Л., Атоян Л.А. “ Упруго-спиновые волны в ферромагнитной среде с экраном”, Тезисы докладов 22-ой Международной конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, г. Ростов-на-Дону, 11-13 окт., 2023 г.
11. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговых плоских электроупругих волн на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью, Изв. НАН РА “Механика”, 2010,т.63,1,с.50-69.
12. Нобл Б. Метод Винер-Хопфа. М.ИИЛ, 1962, 279 стр.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б.
E-mail: karoaghayan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович – к.ф.-м.н., ст.науч. сотр. Института механики НАН РА.
Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б.
E-mail: levous@mail.ru

СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В СОСТАВНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННЫМИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ КОНТАКТНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Агаян К.Л., Закарян В.Г.

Построено точное решение задачи возбуждения и распространения сдвиговых поверхностных электроупругих волн, локализованных по границе раздела составного пьезоэлекрического пространства, при смешанных электромеханических контактных условиях.

1. Введение. В современных электромеханических структурах часто используются тонкие электопроводящие металлические или клеевые слои для соединения контактирующих тел. Возникает естественный вопрос о возможности устранения или возбуждения поверхностной волны на контактных поверхностях составной конструкции. Проблеме возбуждения и распространения сдвиговых поверхностных волн по граничной поверхности неоднородных пьезоэлектрических конструкций посвящено много работ. Коротко остановимся на некоторых из них, тесно связанных с рассматриваемой здесь задачей. Отметим книги [1-3], посвященные исследованию и разработке основных вопросов возникающих в рассматриваемой области, а так же статьи [4-13] с цитированными в них работами, примыкающими к нашей задаче.

В работах [4-11] изучаются волновые процессы, связанные с дифракцией электроупругой сдвиговой плоской волны в составных пьезоэлектрических пространствах, полупространствах и слоях. При этом, предполагается, что на контактных поверхностях осуществляются смешанные механические и электрические условия, обусловленные наличием на контактных поверхностях электродов, трещин, включений и т.д.

2. Постановка задачи. Рассмотрим составное пространство, состоящее из двух, соединенных между собой, пьезоэлектрических полупространств, занимающих области $\Omega_1(-\infty<|x|,\ |z|<\infty,\ y>0)$ и $\Omega_2(-\infty<|x|,\ |z|<\infty,\ y<0)$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Главная ось этих пьезоэлектрических полупространств (кристалл $6mm$ гексакональной симметрии) параллельна оси Oz. К плоскости, разделяющей полупространства, приклеены два полубесконечных электрода в виде тонких – жесткого металлического и клеевого электропроводящих слоев. Относительно электродов, предполагается, что они невесомые, абсолютно гибкие и идеально проводящие, так что механическим взаимодействием электрода с полупространствами пренебрегается.

Введем некоторые обозначения, связанные с электромеханическими параметрами пьезомеханических полупространств с индексом $j=1,2$.

$k_j=\omega/c_j$ – волновые числа, $c_j=\sqrt{\mu_j\left(1+\chi_j\right)/\rho_j}$ – фазовые скорости распространения сдвиговой упругой волны, μ_j,ρ_j – модули упругости и плотности, $\chi_j=e_j^2/\mu_j\varepsilon_j$, – коэффициенты электромеханической связи, $e_j=e_{15}^{(j)}$ – пьезомодули, $\varepsilon_j=\varepsilon_{jj}$ – диэлектрическая проницаемость соответствующих полупространств Ω_j [1-7].

На электродах, в виде внешней нагрузки, заданы значения амплитуд электрического потенциала при помощи функции ($\vartheta(x)$ – функция Хевисайда).

$$H(x)=V_-\vartheta(-x)+V_+\vartheta(x),\qquad V_-,V_+\sim const \tag{2.1}$$

Кроме этого, в пьезоэлектрическом полупространстве Ω_1 распространяется заданная сдвиговая плоская волна антиплоской деформации (SH – волна) с сопутствующим потенциалом электрического поля, падающая из бесконечности под углом $\beta\left(0<\beta<\pi/2\right)$

$$w_\infty(x,y)=A_0e^{ipx+iqy},\quad \varphi_\infty(x,y)=\left(e_1/\varepsilon_1\right)w_\infty(x,y),\quad p=k_1\cos\beta,\quad q=k_1\sin\beta \tag{2.2}$$

Полагая, что пьезоэлектрические полупространства находятся в условиях антиплоской деформации, которая характеризуется тем, что волна поляризуется в направлении оси Oz, но распространяется в плоскости (x,y), требуется определить дифрагированное волновое поле в

составном пространстве ($\Omega_1 \cup \Omega_2$), при дифракции сдвиговой электроупругой плоской волны (2.2) и заданного электрического потенциала (2.1) на электроде.

3. Вывод определяющего уравнения. Нетрудно убедиться, что решение поставленной задачи сводится к следующей краевой задаче, относительно образов преобразования Фурье (ПФ) упругих перемещений $\bar{w}_j(x,y)$ и потенциалов $\bar{\varphi}_j(x,y)$:

$$\frac{d^2\bar{W}_j}{dy^2}-\gamma_j^2\bar{W}_j(\sigma,y)=0;\quad \frac{d^2\bar{\Phi}_j}{dy^2}-\sigma^2\bar{\Phi}_{1j}(\sigma,y)+\frac{e_j}{\varepsilon_j}k_j^2\bar{W}_j(\sigma,y)=0;\quad \begin{cases} y>0,\ j=1 \\ y<0,\ j=2 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\bar{w}_1(\sigma,+0)=\bar{w}_2(\sigma,-0)=\bar{W}_-(\sigma),\quad \sigma_{yz}^{(1)}(\sigma,+0)-\sigma_{yz}^{(2)}(\sigma,-0)=\bar{\sigma}_+(\sigma),\quad |\sigma|<\infty$$

$$\bar{\varphi}_1(\sigma,+0)=\bar{\varphi}_2(\sigma,-0)=\bar{H}(\sigma)=i\frac{V_++V_-}{\sigma}+\pi(V_++V_-)\delta(\sigma) \tag{3.2}$$

$$\bar{W}_1(\sigma,y)=\bar{w}_1(\sigma,y)-\bar{w}_\infty(\sigma,y),\qquad \bar{\Phi}_1(\sigma,y)=\bar{\varphi}_1(\sigma,y)-\bar{\varphi}_\infty(\sigma,y) \tag{3.3}$$

$$\gamma_j(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_j^2},\qquad \bar{f}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx \tag{3.4}$$

здесь, $W_-(x)=0$, при $x>0$; и $\sigma_+(x)=0$, при $x<0$, неизвестные функции.

Решение краевой задачи (3.1) – (3.4) сводится к следующему функциональному уравнению (3.5) [9,11,12]

$$\bar{K}(\sigma)\bar{W}_-(\sigma)-\bar{\sigma}_+(\sigma)=-4\pi i\mu_1(1+\chi_1)q\delta(\sigma+p)-(e_1+e_2)|\sigma|\bar{H}(\sigma) \tag{3.5}$$

$$\bar{K}(\sigma)=\mu_1^*\bar{K}_1(\sigma)+\mu_2^*\bar{K}_2(\sigma);\ \mu_j^*=\mu_j(1+\chi_j);\ \bar{K}_j(0)=\gamma-\tilde{\chi}_j|\sigma|,\ \tilde{\chi}_j=\chi_j/(1+\chi_j) \tag{3.6}$$

4. Решение задачи. Обращаясь к построению решения уравнения (3.5), заметим следующее. Можно доказать [4,7,8], что дисперсионное уравнение $\bar{K}(\sigma)=0$ имеет только два действительных корня $\pm\sigma_э$, значения которых можно определить со сколь угодно высокой точностью. Тогда, следуя работам [6,7,12], можно построить точное решение уравнения (3.5), факторизуя функцию $\bar{K}(\sigma)$. Однако, полученное, таким путем решение содержит непростые факторизационные функции. Так, что при определении волновых функций возникают определенные трудности, связанные с асимптотическими представлениями ближнего и дальнего волновых полей. Исходя из этого, решение поставленной задачи будем строить для частного случая неоднородного пьезоэлектрического пространства, когда между параметрами полупространств имеет место следующее соотношение:

$$\mu_1(1+\chi_1)\rho_2=\mu_2(1+\chi_2)\rho_1\Rightarrow k_1=k_2=k_0 \tag{4.1}$$

В этом случае, уравнение (3.5) остается в силе, при замене в нем $\bar{K}(\sigma)$ на $\bar{K}_0(\sigma)$:

$$2\bar{K}_0(\sigma)\bar{W}_-(\sigma)-\bar{\sigma}_+(\sigma)=(e_1+e_2)|\sigma|\bar{H}(\sigma)-4\pi iA_0\mu_1(1+\chi_1)q\delta(\sigma+p) \tag{4.2}$$

$$\bar{K}_0(\sigma)=\mu_0(1+\chi_0)\left[\gamma_0-\bar{\chi}_0|\sigma|\right];\qquad \gamma_0(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_0^2} \tag{4.3}$$

$$\mu_0=(\mu_1+\mu_2)/2;\quad \chi_0=(\mu_1\chi_1+\mu_2\chi_2)/(\mu_1+\mu_2);\quad \chi_j=e_j^2/\mu_j\varepsilon_j;\quad \tilde{\chi}_0=\chi_0/(1+\chi_0) \tag{4.4}$$

Отметим, что уравнение (4.2), в свою очередь, совпадает с соответствующим уравнением для чисто однородного $(\mu_1=\mu_2,e_1=e_2,\varepsilon_1=\varepsilon_1,\rho_1=\rho_2)$ случая рассматриваемой задачи.

Решение, теперь уже определяющего уравнения (4.2), следуя работам [6,13,14], построено методом факторизации и в итоге даются формулами:

$$\bar{W}_-(\sigma)=-\frac{V_+-V_-}{2}\frac{i(1+\tilde{\chi}_0)e_1}{\mu_0(1+\chi_0)}\frac{\sqrt{\sigma-i0}+i\sqrt{\sigma_0}}{(\sigma-\sigma_0)(\sigma+\sigma_0)}\sqrt{\sigma-i0}-\frac{A_0}{\mu_0(1+\chi_0)}\frac{iq-\tilde{\chi}_0p}{\sigma_0^2-p^2}\frac{1}{\sigma+p-i0} \tag{4.5}$$

$$\bar{\sigma}_+(\sigma)=(V_+-V_-)\frac{e_1\sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{\sigma+i0}}-\frac{2A_0iq\sqrt{p}}{\sigma_0-p}\frac{\sigma+\sigma_0}{\sqrt{\sigma+i0}(\sigma+p+i0)} \tag{4.6}$$

где σ_0 корень уравнения $\bar{K}_0(\sigma)=0$, т.е. волновое число волны Гуляева – Блюстейна [1].

Выражения (4.5) и (4.6), в целом, определяют окончательное решение поставленной задачи.

Однако, здесь остановимся только на амплитудах упругих перемещений. При помощи этих функций получены соответствующие выражения амплитуд потенциалов электроупругого волнового поля.

В конечном итоге, в области $\omega_1(|x|<\infty, y>0)$ получим:

$$\begin{aligned} w_1^{(+)}(x,y)=&-\frac{i(1+\tilde{\chi}_0)(V_+-V_-)}{4\pi\mu_0^*}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma+i\sqrt{\sigma_0}\sqrt{\sigma-i0}}{(\sigma-\sigma_0)(\sigma+\sigma_0)}e^{-\gamma_0 y-i\sigma x}d\sigma-\\ &-\frac{A_0}{2\pi\mu_0^*}\frac{iq-\tilde{\chi}_0 p}{\sigma_0^2-p^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma_0 y-i\sigma x}}{\sigma+p-i0}d\sigma-A_0\left[e^{iqy}-e^{-iqy}\right]e^{ipx}\qquad (x>0,y>0)\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} w_1^{(-)}(x,y)=&-\frac{i(1+\tilde{\chi}_0)(V_+-V_-)}{4\pi\mu_0^*}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma\sqrt{\sigma+i0}+i\sqrt{\sigma_0}|\sigma|}{(\sigma+\sigma_0)(\sigma-\sigma_0)\sqrt{\sigma+i0}}e^{-\gamma_0 y-i\sigma x}d\sigma-\\ &-\frac{A_0}{2\pi\mu_0^*}\frac{iq-\tilde{\chi}_0 p}{\sigma_0^2-p^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\pi i\delta(\sigma+p)+\frac{1}{\sigma+p+i0}\right]e^{-\gamma_0 y-i\sigma x}d\sigma-A_0\left[e^{iqy}-e^{-iqy}\right]e^{-i\sigma x},\ (x<0,y>0)\end{aligned} \tag{4.8}$$

Теперь обратимся к выражениям (4.7) и (4.8). Исследование интегральных составляющих, входящих в (4.8), показывает, что в области $\omega_1^{(+)}(x>0,y>0)$ поверхностные волны не возникают. Там распространяются падающие, отраженные волны, а также дифрагированные затухающие [13] объемные волны, распространяющие со скоростью $c_1=\sqrt{\mu_1(1+\chi_1)/\rho_1}$.

Из (4.7) непосредственно следует, что при $y=+0,\ x>0,\ w_1^{(+)}(x,+0)\equiv 0$.

Для $w_1(x,y)$ в области $\omega_1^{(-)}(x<0,y>0)$, из (4.8) получим:

$$\begin{aligned} w_1^{(-)}(x,y)=&(V_+-V_-)\frac{1+\bar{\chi}_0}{4\mu_0^*}e^{-\sqrt{\sigma_0^2-k_0^2}y}e^{-i\sigma x}-\\ &-A_0\left[1+\frac{i}{\mu_0^*}\frac{iq-\bar{\chi}_0}{\sigma_0^2-p^2}\right]e^{ipx+iqy}-w_\infty(x,y)+W_1^{(-)}(x,y)\end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь первая слагаемая представляет собой амплитуду сдвиговой поверхностной волны Гуляева – Блюстейна, локализованной у отрицательной полуоси Ox, распространяющейся со скоростью $c_0=\omega/\sigma_0$ и затухающей при $y\to+\infty$ по закону $\exp\left(-\sqrt{\sigma_0^2-k_0^2}y\right)$.

Из (4.9) для упругого перемещения на линии $y=+0$, при $x<0$ получим

$$w_1^{(-)}(x,+0)=(V_+-V_-)\frac{1+\bar{\chi}_0}{4\mu_0^*}e^{-i\sigma_0 x}+\frac{A_0}{\mu_0^*}\frac{q+i\bar{\chi}_0 p}{\sigma_0^2-p^2}e^{ipx}+W_1^{(-)}(x,0) \tag{4.10}$$

Отметим, что поверхностная волна и отраженная волна распространяются по противоположным направлениям.

Аналогичным путем, для амплитуд проходящих упругих перемещений в области $\omega_2^{(-)}(x<0,y<0)$, получим:

$$w_2^{(-)}(x,y)=(V_+-V_-)\frac{1+\bar{\chi}_0}{4\mu_0^*}e^{\sqrt{\sigma_0^2-k_0^2}y}e^{-i\sigma x}+\frac{A_0}{\mu_0^*}\frac{q+i\bar{\chi}_0 p}{\sigma_0^2-p^2}e^{ipx}+W_2^{(-)}(x,y) \tag{4.11}$$

Из (4.9) и (4.11) следует $w_1^{(-)}(x,+0)=w_2^{(-)}(x,-0)$.

В заключение коротко остановимся на $\sigma_+(x)$, представляющей скачок касательных напряжений на линии $y=0$.

Из (4.6), после обратного ПФ, для $\sigma_+(x)$ получим:

$$\sigma_+(x)=\left[\frac{(V_+-V_-)e_1\sqrt{\sigma_0}}{2\pi}+A_0\frac{\mu_0\, iq(\sigma_0-p)}{\pi\sqrt{p}}\right]J_0(x)+$$
$$+A_0\frac{\mu_0\, iq(\sigma_0-p)}{\pi\sqrt{p}}\left[\sum_{m=1}^{n}J_m(x)+(-p)^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{(\sigma+i0)^{n+1/2}(\sigma+p+io)}\right],\ x>0 \qquad (4.12)$$

для любого заданного $n\in N_0$, где

$$J_m(x)=2\pi\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}X_+^{m-\frac{1}{2}};\qquad X_+^{\lambda}=\begin{cases}X^{\lambda}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad (4.13)$$

где $\Gamma(x)$ – известная гамма-функция Эйлера.

Из (4.12), (4.13) следует, что в точке $x=+0$, $\sigma_+(x)$ имеет корневую особенность с коэфициентом интенсивности

$$K=\lim_{x\to+0}X_+^{1/2}\sigma_+(x)=\left[\frac{(V_+-V_-)e_1\sqrt{\sigma_0}}{2\pi}+A_0\frac{\mu_0\, iq(\sigma_0-p)}{\pi\sqrt{p}}\right]2\pi\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma(1/2)} \qquad (4.14)$$

При помощи последнего можно определить наибольшее значение коэффициента интенсивности скачка контактных касательных напряжений в точке $x=+0$ на линии контакта $y=0$, в зависимости от физико-механических параметров задачи.

Заключение. В работе исследуются вопросы, связанные с возникновением и распространением сдвиговых электроупругих волн в составном пьезоэлектрическом пространстве, когда на границе раздела осуществляются смешанные электромеханические условия.

Методом факторизации построено точное решение задачи и для одного частного, но довольно общего, случая неоднородности получены аналитические представления для амплитуд компонентов электроупругого поля (4.7) – (4.14). Для поверхностных, отраженных и проходящих волн вычислены и приведены конечные выражения амплитудных формул для упругих перемещений. Эти формулы, в явном виде, содержат основные волновые особенности возбужденных электроупругих волн, о некоторых из них было сказано выше. Кроме этого, следует еще зафиксировать, что в случаях $V_+=V_-\neq 0$ и $V_+=V_-=0$ поверхностные волны не возбуждаются, даже от падающей - $w_\infty(x,y)$ волны.

Это, в свою очередь, указывает, что в данном случае бесконечный электрод возбуждает поверхностные волны в тех случаях, когда заданный на электроде потенциал электрического поля $H(x)$ имеет точки разрыва. При этом, выражение скачка $\sigma_+(x)$ только от $V_\pm$ дается в элементарных функциях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balakirev M. K. and Gilinski I. A. Waves in Piezocrystals (Novosibirsk: Nauka 1982) p. 239.
2. Parton V.Z., Kudravcev B.A. Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. – M. Nauka, 1988, p. 472.
3. Фильштинский Л.А., Барзокас Д. И. Метод граничных интегральных уравнений в проблемах дифракции электроупругих волн. Сумы: Изд-во Сумского Ун-та, 1999, 194 с.

4. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electroelastic surface shear waves on an division surface of two piezoelectric half-spaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 1994. T.47. №3-4. p.31-36.
5. Li P., Jin. F., Qian Z. Propagation of the Bluestein-Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro-magneto-elastic half-space. //European Journal of Mechanics A/Solids. 37, 2013, pp. 17-23.
6. Aghayan K.L., Grigoryan E. Kh. Diffraction of a plane electro elastic wave on a semi-infinite electrode in a piezoelectric space with a slit. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2010. T.63. №1. p. 50-69.
7. Grigoryan E. Kh., Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of a shear plane wave on a semi-infinite crack in piezoelectric-dielectric space. " TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS ", Proceedings of VII International Conference. Goris-Stepanakert 2011. pp. 137-143.
8. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2015. T.68. №1. P.45-56.
9. Aghayan K.L. Diffraction of electroelastic shear plane waves at the edges of semi-infinite electrodes in piezoelectric space with a slit. / Environmental herald of the scientific centers of the Black Sea economic cooperation./ 2011. №1. p.3-18.
10. Bardzokas D.I., Kudryavcev B.A., Senik N.A. Wave propagation in electromagnetoelastic environments. M. Editorial URSS. 2003. p. 336.
11. Aghayan K.L. Plane shear wave in a piezoelectric layer with mixed boundary conditions. NASA, Reports, 2023. V.123, №3-4. p.61-73.
12. Aghayan K.L., Zakaryan V.G. Surface Electro-Elastic Shear Waves in Piezo-Electrical Half-Space with Semi-Infinite Electrode. Springer Nature Switzerland AG 2025 H. Altenbach. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials. 2025. V.223, pp.1-16.
13. Grigoryan E. Kh., Aghayan K.L. On a new method for determining asymptotic formulas in wave diffraction problems. NASA, Reports, 2010. V.110, №3. p.261-271.
14. Дж. Метьюз, П. Уокер. Механические методы физики. М. Атомиздат., 1971.с. 400.
15. Brichkov Yu. A., Prudnikov A.P. Integral transformations of generalized functions. M-Nauka., 1977., p. 287.
16. Reference mathematical library. /Functional analysis./ M. 1972., p. 544.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.**Тел**.: (+37491)485-566, **E-mail**: karo.aghayan@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич, кандидат физ.-мат. наук, ученый секретарь Института механики НАН РА.**Тел**.: (+37477)789-264, **E-mail**: vahe-zaqaryan@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ СДВИГУ НАБУХАЮЩИХ ГРУНТОВ БЕЗ АРМИРОВАНИЯ И АРМИРОВАНИЕ ВОЛОКНАМИ БАЗАЛЬТА

Айроян С.Г. Григорян Д.Г., Манукян Е.С. Тигранян Ш.М.

В статье приведены результаты исследования сопротивления сдвигу набухающих глин без армирования и армирования базальтовыми волокнами. Сопротивления сдвигу определены по стандартной методике на приборах М-5 кручения сплошных образцов без возможности бокового расширения.

Экспериментальными исследованиями установлено, что армирование базальтовыми волокнами набухающих грунтов 1% для красноватых глин и 2% бентонитовых глин по объему, кроме снижения относительной деформации набухания и давления набухания, приводят к увеличению сопротивления сдвигу, в основном, за счет увеличения сцепления, коэффициент внутреннего трения существенно не изменяется.

Применение высокодисперсных глинистых грунтов в качестве противофильтрационного элемента в гидротехнических сооружениях является одним из наиболее актуальных проблем современной инженерной геотехники [2,4,5,6]. Качественные характеристики этих грунтов позволяют использовать его в противофильтрационных мероприятиях. Однако они обладают высокой гидратационной способностью, в связи с этим при замачивании эти грунты набухают, увеличиваясь в объёме, что приводит к повышению сжимаемости, снижению сопротивления сдвигу и несущей способности.

Целью представленной работы является исследование влияния армирования базальтовым волокном набухающих грунтов на геотехнические свойства набухающих грунтов, в частности, на давление набухания, относительную деформацию набухания и сопротивления сдвигу.

Методика и материалы исследования

Объектами исследования являются бентонитовые (монтмориллонитовые) глины Саригюхского месторождения Республики Армения, и приереванские красноватые набухающие глины сарматского возраста [1].

Для определения давления набухания, деформации набухания и сопротивления сдвигу красноватого и бентонитового грунтов, были испытаны образцы нарушенного сложения без армирования и с армированием базальтовыми волокнами.

Чтобы образцы обладали бы близкими физико-механическими свойствами, они в текучем состоянии уплотнялись в компрессионном и сдвиговом приборах под уплотняющим давлением σ=0,3MPa. После стабилизации деформации уплотнения образцы были полностью разгружены и выдержаны без нагрузки до полной стабилизации обратной деформации. После стабилизации обратной деформации часть образцов красноватой и бентонитовой глин была испытана на набухание и сопротивление сдвигу без армирования базальтовыми волокнами, а другая часть с армированием базальтовыми волокнами. Базальтовые волокна помещали в глинистый грунт текучей консистенции, перемешивая и равномерно распределяя. При армировании бентонитовых глин содержание базальтовых волокон составляло 2%,а в красноватой глине содержание базальтовых волокон составляло 1%. Короткие базальтовые волокна в грунте распределены равномерно и ориентация в нем имеет произвольный характер.

Показатели физико-механических свойств базальтовых волокон приведены в таблице 1.

Таблица1

Прочность на растяжение,МПа	Диаметр волокна,мкм	Длина волокна,мм	Модуль упругости,ГПа	Плотность г/см^2
3500	13-17	10,0-15,0	75,0	2,60

В таблице 2 приведены осредненные значения показателей водно-физических свойств грунтов после предварительного уплотнения.

Таблица2

Разновидность грунтов	Плотность г/см^3			Коэффициент пористости,e	Влажность W	Пластичность			Консис. I_L
	грунта, ρ	минеральных частиц. ρ_s	скелета ρ_d			W_L	W_P	I_P	
Красноватые глины без армирования базальтовыми волокнами	1,82	2,69	1,48	0,817	0,232	0,510	0,250	0,260	<0
Красноватые глины, с армированием базальтовыми волокнами	1,84	2,69	1,49	0,805	0,233	0,510	0,250	0,260	<0
Бентонитовые глины без армирования базальтовыми волокнами	1,77	2,74	1,25	1,192	0,413	1,705	0,404	1,301	0,007
Бентонитовые глины с армированием базальтовыми волокнами	1,79	2,74	1,27	1,157	0,413	1,705	0,404	1,301	0,007

Давление набухания (σ_{sw}) было определено методом компенсации, деформации набухания (δ_{sw}) в компрессионом приборе.

Сопротивление сдвигу было определено методом кручения сплошных образцов на приборе М-5 [7], диаметр этих образцов 101мм, высота 24мм, повторность опытов двухкратная. Испытание сопротивление сдвигу проводились в консолидированном –медленном режиме.

Результаты экспериментальных исследований давления набухания, относительных деформаций набухания, красноватой и бентонитовой глин без армирования базальтовыми волокнами и с армированием базальтовыми волокнами.

В таблице 3 приведены средние значения деформации набухания и давления набухания красноватой и бентонитовой глин определенных без армирования базальтовыми волокнами, и с армированием базальтовыми волокнами.

Таблица3

Название грунтов	Давление набухания, σ_{sw}, МПа	Относительные деформации набухания, δ_{sw}
Красноватая глина без армирования базальтовыми волокнами	0,1525	0,18
Красноватая глина с армированием базальтовыми волокнами	0,025	0,0035
Бентонитовая глина без армирования базальтовыми волокнами	0,475	0,325
Бентонитовая глина с армированием базальтовыми волокнами	0,110	0,009

При армировании грунтов красноватой и бентонитовой глин базальтовое волокно, благодаря своей высокой прочности и трехмерному каркасу армирующей системы, воспринимает растягивающие и сжимающие напряжения, которые возникают при набухании грунтов.

Результаты экспериментальных исследований сопротивления сдвигу грунтов красноватой и бентонитовой глин без армирования базальтовыми волокнами и с армированием базальтовыми волокнами.

Для выявления влияния армирования на сопротивление сдвигу красноватой и бентонитовой глин проводились сдвиговые испытания на приборе кручения М-5 [7], которые позволяют наиболее достоверно смоделировать напряженно-деформированное состояние грунта. Поэтому полученные по результатам испытаний данные сопротивления сдвигу являются более точными по сравнению с испытаниями на одноплоскостном сдвиге.

Результаты сдвигового испытания грунтов красноватой и бентонитовой глин без армирования базальтовыми волокнами и с армированием базальтовыми волокнами приведены на рисунках 1 и 2.

Для красноватых глин без армирования сопротивление сдвигу определено следующей формулой:

$$\tau_f = 0{,}306 \cdot \sigma + 0{,}031 \quad (1)$$

для красноватых глин с армированием базальтовыми волокнами сопротивление сдвигу определено следующей формулой:

$$\tau_f = 0{,}300 \cdot \sigma + 0{,}044 \quad (2)$$

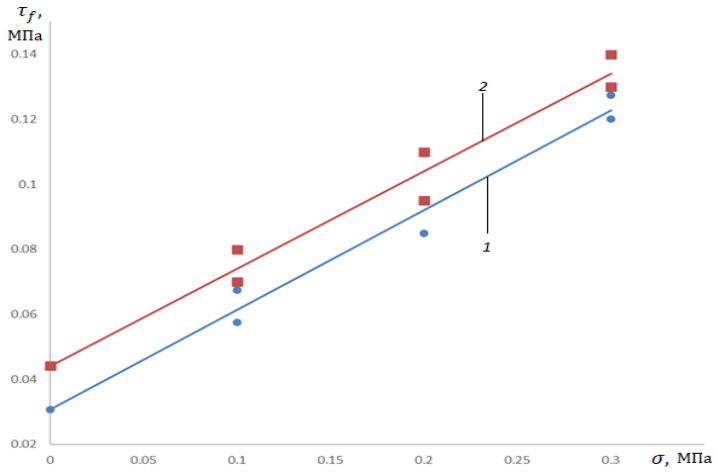


Рисунок 1. Диаграммы сопротивления сдвигу: 1)-красноватых глин без армирования базальтовыми волокнами, 2) -красноватых глин с армированием базальтовыми волокнами

Для бентонитовых глин без армирования сопротивление сдвигу определено следующей формулой:

$$\tau_f = 0{,}325 \cdot \sigma + 0{,}046 \quad (3)$$

для бентонитовых глин с армированием базальтовыми волокнами сопротивление сдвигу определено формулой:

$$\tau_f = 0{,}313 \cdot \sigma + 0{,}073 \quad (4)$$

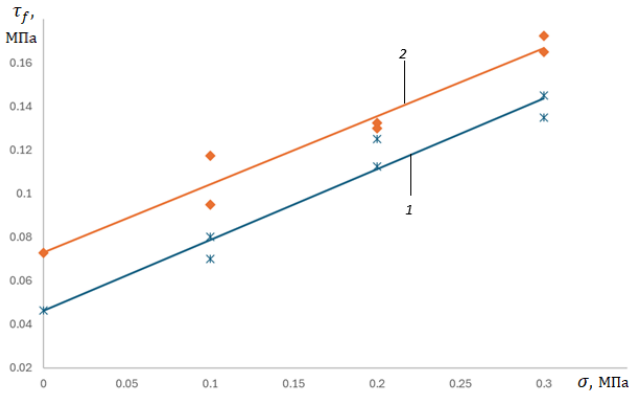


Рисунок 2. Диаграммы сопротивления сдвигу: 1)бентонитовых глин без армирования; 2) с армированием базальтовыми волокнами

Как видно на рис. 1, 2, армирование грунтов красноватых и бентонитовых глин приводит к увеличению сопротивления сдвигу, в основном, за счет увеличения сцепления, коэффициент внутреннего трения практически не изменяется. Исходя из этого, уравнение сопротивления сдвигу армированными базальтовыми волокнами грунтов можно, в общем случае, представить по следующей формуле:

$$\tau_f = \sigma \cdot \mathrm{t}g\varphi + \Sigma_w + C_{arm}, \quad (5)$$

где Σ_w- сцепление водноколлоидной природы, C_{arm} - сцепление, обусловленное армированием грунтов.

По существу, в грунте базальтовые волокна связывают глинистые частицы, образуя трехмерную грунтовую сеть. При нагружении сдвиговым напряжением трехмерная грунтовая сеть сдерживает смещение частиц.

В таблице 4 приведены результаты определения коэффициента внутреннего трения ($\mathrm{t}g\varphi$) и сцепления $C = \Sigma_w + C_{arm}$, (Σ_w- сцепление водноколлоидной природы, C_{arm} - (сцепление, обусловленное армированием грунтов) красноватых и бентонитовых глин.

Таблица4

Разновидность грунтов	Коэффициент внутреннего трения ($\mathrm{t}g\varphi$)	Сцепление водноколлоидной природы (Σ_w)	Сцепление, обусловленное армированием базальтовыми волокнами (C_{arm}),
Армированные красноватые глины	0,303	0,031	0,013
Армированные бентонитовые глины,	0,319	0,046	0,027

Основываясь на экспериментальные исследования, можно сделать следующие выводы:

1. Армирование базальтовыми волокнами по объему 1% для красноватых и 2% для бентонитовых глин приводит к повышению сопротивления сдвигу, уменьшению относительной деформации набухания и давления набухания. Благодаря своей высокой прочности базальтовое волокно и каркас армирующей системы предотвращают набухание грунтов.

2. Армирование красноватых и бентонитовых глин приводит к увеличению сопротивления сдвигу, в основном, за счет увеличения сцепления, коэффициент внутреннего трения существенно не изменяется. Уравнение сопротивления сдвигу армированными базальтовыми волокнами глин представлено формулой (5).

3. При армировании глинистых грунтов базальтовыми волокнами увеличение сцепления зависит от дисперсности грунтов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авакян Г.С. Бентониты. Наука, М. 1980 с.205
2. Месчян С.Р., Айроян С.Г. Влияние начального состояния на сопротивление сдвигу набухающего бентонитового грунта. Доклады Академии Наук Арм.ССР, 1987, т. 84, №3, с.119-123
3. Саркисян О.А. Региональная геотектоника Армении, ЕГУ; 1989. с.275
4. Сорочан Е.А., Строительство сооружений на набухающих грунтах, М, Стройиздат, 1989, 310с
5. Трофимов В.Т., Королев В.А., Вознесенский Е.А., Голодковская Г.А., Васильчук Ю.К., Зиангиров Р.С., Грунтоведение, Изд. МГУ, Наука 2005, 1024с.
6. Hairoyan S.G Impact Shrinkable Fracturing of Shear Strength in Clay, Madrid, 2005, 6-14G-005
7. Meschyan S R 2008 Experimental Rheology of Clayey Soil (Yerevan: Gitutyun NAN RA) p. 495

Сведения об авторах:

Айроян Саркис Грачикович—доктор геологических наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор, кафедры, геофизики, гидрогеологии, инженерной геологии ЕГУ, Ереван, Армения, +374-44-22-62-10, E-mail: hairoyan@ysu.am

Григорян Давид Гамлетович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Лаборатория экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения. E-mail davit-grigoryan@yandex.com

Манукян Егиш Самвелович, кандидат технических наук, научный сотрудник, Лаборатория экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения. E-mail: exishe.manukyan @gmail.com

Тигранян Шушан Мисаковна, соискатель кафедры,геофизики, гидрогеологии, инженерной геологии ЕГУ, Ереван, Армения, E-mail: shushantigranyan@ysu.am

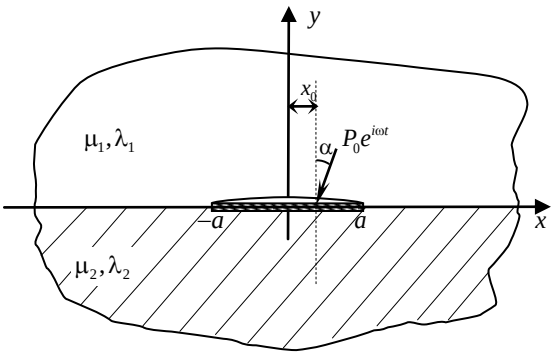
ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНЫМ, ЧАСТИЧНО ОТОРВАННЫМ ОТ МАТРИЦЫ, ВКЛЮЧЕНИЕМ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Саакян А.А.

Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей межфазное абсолютно жесткое тонкое включение, одна из длинных сторон которого отошла от матрицы, создавая трещину. Полагается, что кусочно-однородная плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющейся во времени сосредоточенной нагрузки, приложенной к включению в его некоторой заданной точке. На основе разрывных решений уравнений движения плоской теории упругости для составной плоскости с дефектами выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи, решение которой, в случае, когда характеристическое квадратное уравнение имеет два различных корня, построено методом механических квадратур.

1.Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим плоско деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламе μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 соответственно. Будем полагать, что плоскость отнесена к декартовой системе Oxy, ось Ox которой направлена по линии стыка полуплоскостей, на которой по интервалу $(-a, a)$ плоскость усилена межфазным абсолютно жестким тонким включением, одна из длинных сторон которого оторвана от матрицы, создавая, тем самым, трещину. Будем полагать также, что кусочно-однородная плоскость деформируется под воздействием периодически изменяющейся во времени с частотой ω сосредоточенной нагрузки $P_0 e^{i\omega t}$, приложенной к включению в точке $x = x_0$ и составляющей угол α с осью Oy (Фиг.1).



Фиг.1

Ставится задача определить закономерности изменения контактных напряжений, раскрытия трещины, угла поворота включения и модуля коэффициентов интенсивности в концевых точках трещины в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи.

Снабдив характерные величины для разнородных полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2, условия на берегах трещины запишем в виде:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0,t)=\tau_{xy}^{(1)}(x,0,t)=0 \\ u_2(x,0,t)=u_0 e^{i\omega t} \qquad (-a<x<a) \\ \mathrm{v}_2(x,0,t)=(\mathrm{v}_0+\gamma x)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{1}$$

где $u_j(x,y,t)$ и $\mathrm{v}_j(x,y,t)$ $(j=1,2)$ – горизонтальные и вертикальные смещения точек верхней и нижней полуплоскостей соответственно, удовлетворяющие уравнениям движения, а $\sigma_y^{(j)}(x,y,t)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y,t)$ - нормальные и касательные компоненты напряжения, действующие в этих полуплоскостях, а u_0, v_0 и γ соответственно жесткие смещения по направлениям осей Ox, Oy и угол поворота включения.

Чтобы построить решение граничной задачи (1) сначала по формуле $f(x,y,t)=f(x,y)e^{i\omega t}$ перейдем к амплитудам искомых функций и, используя формулы для амплитуд компонентов напряжений и смещений, полученные в [1,2], удовлетворим условиям (1). В итоге, приходим к системе определяющих сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций дислокации смещений точек берегов трещин $u'(x)$, $\mathrm{v}'(x)$ и безразмерных скачков напряжений $\sigma(x)$, $\tau(x)$. Далее, в случае, когда характеристическое квадратное уравнение, которое совпадает с характеристическим уравнением соответствующей статической задачи [3], имеет два различных корня, после некоторых преобразований, формулируя полученную систему на интервале $(-1,1)$, придем к следующей системе относительно приведенных комплексных комбинаций дислокации смещений и напряжений:

$$\psi_j^*(\eta)+\frac{iq_j}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_j^*(\xi)\,d\xi}{\xi-\eta}+\sum_{k=1}^{4}\int_{-1}^{1}\overline{A}_k^{(j)}(\xi-\eta)\psi_k^*(\xi)\,d\xi=i\gamma_*^{(j)} \quad (j=1-4) \tag{2}$$

при условиях равновесия включения без учета его массы и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\left[a_2\psi_j^*(\xi)-a_1\psi_{j+1}^*(\xi)\right]d\xi=\frac{(a_2-a_1)P_0\,\mathrm{e}^{(-1)^j i\varphi}}{a\mu_1} \quad (j=1,2); \\ &\int_{-a}^{a}\left[\psi_j^*(\xi)-\psi_{j+1}^*(\xi)\right]d\xi=0 \qquad (j=1,2); \\ &\int_{-1}^{1}\xi\left[a_2\left(\psi_1^*(\xi)+\psi_3^*(\xi)\right)-a_1\left(\psi_2^*(\xi)+\psi_4^*(\xi)\right)\right]d\xi=\frac{2x_0^*(a_2-a_1)P_0\cos\varphi}{a\mu_1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\psi_j^*(x)=\varphi_1(ax)+a_j\varphi_3(ax) \qquad (j=1,2) \\ &\psi_j^*(x)=\varphi_2(ax)+a_{j-2}\varphi_4(ax) \qquad (j=3,4) \\ &\varphi_j(x)=\sigma(x)+(-1)^j i\tau(x) \qquad (j=1,2); \\ &\varphi_j(x)=u'(x)-(-1)^j i\mathrm{v}'(x) \quad (j=3,4); \quad x_0^*=x_0/a; \\ &q_1=-q_3=-m\lambda_1+n;\; q_2=-q_4=-m\lambda_2+n, \end{aligned} \tag{4}$$

$\bar{A}_k^{(j)}(x)\,(k,j=1-4)$ - регулярные функции, $\gamma_*^{(j)}=\gamma b_j\ (j=1-4)$, $\lambda_j\ (j=1,2)$- корни характеристического уравнения, m и n заданные действительные числа, зависящие от упругих характеристик задачи, а a_k и $b_k\ (k=1,2)$ заданные действительные числа, зависящие от упругих характеристик задачи и корней характеристического уравнения.

Решение системы (2) при условиях (3) строится численно-аналитическим методом механических квадратур [4]. Для этого, при помощи исследования главных частей интегральных уравнений системы (2), убеждаемся, что искомые функции в концевых точках интервала интегрирования имеют показательную особенность, совпадающую с особенностью аналогичной статической задачи [3], и они представляются в виде:

$$\psi_j^*(\eta)=\frac{\varphi_j^*(\eta)}{(1+\eta)^{\alpha_j}(1-\eta)^{1-\alpha_j}}\quad (j=1-4);$$

$$\left(\alpha_j=\frac{1}{2\pi i}\ln|G_j|+\frac{1}{2\pi}\arg(G_j);\ G_j=\frac{1+q_j}{1-q_j}\ \ (j=1-4)\right).$$

Учитывая последние соотношения (4), в случае комплексных корней характеристического уравнения, когда $q_{j+1}=\bar{q}_j\ (j=1,3)$, будем иметь:

$$\alpha_1=\alpha-i\beta;\ \alpha_2=1-\alpha-i\beta;\ \alpha_3=1-\alpha_1;\ \alpha_4=1-\alpha_2;$$

$$0<\alpha=\frac{1}{2\pi}\arg(G_1)<1;\ \beta=\frac{1}{2\pi}\ln|G_1|\ .$$

В случае же, когда корни характеристического уравнения действительные числа $G_j\ (j=1-4)$ отрицательные, т.е. $\arg(G_j)=\pi$, следовательно в полученных формулах нужно подставить $\alpha=1/2$.

Подставляя значения функций $\psi_j^*(\eta)\ (j=1-4)$ в уравнения (2) и условия (3), по стандартной процедуре, придём к системе из $4n$ алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_j^*(\xi_i)\ (j=1-4)$, $(i=\overline{1,n})$, где ξ_i – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha_j,\beta_j)}(\xi_i)=0$.

После определения величин $\varphi_j^*(\xi_i)\ (j=1-4)$ из полученной системы, при помощи интерполяционных многочленов Лагранжа восстанавливаются функции $\varphi_j^*(\eta)$ и определяются функции $\psi_j^*(\eta)\ (j=1-4)$. Далее, при помощи этих функций определяются все необходимые физико-механические характеристики, определяющие напряженно-деформированное состояние в кусочно-однородной плоскости.

Проведен численный расчет и определены закономерности изменения действительных частей амплитуд нормальных и касательных контактных напряжений, действующих под включением, раскрытия трещины, абсолютных величин комплексных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений $|K_I(\pm1)|$, $|K_{II}(\pm1)|$ и приведенного угла поворота включения δ_* в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний $\omega_*=\omega/ac_2^{(1)}$ в случае, когда сосредоточенная нагрузка приложена к центру включения и направлена перпендикулярно к нему $(\alpha=0)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 25RG-2C221.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Амирджанян А.А. Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными трещинами и включениями под воздействием динамических нагрузок // Известия НАН РА, Механика, т.73, № 3, 2020г, с. 3-23.
2. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазными включениями под воздействием динамических нагрузок. Труды XX -ой межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов на Дону, 18-21 июня 2020, ст. 24-28.
3. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, No4, с.57-65.
4. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович - док. физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188, E-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович - канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188, E-mail: amirjanyan@gmail.com

Саакян Арег Аветикович - канд. физ.-мат. наук, исполнитель проекта 25RG-2C221, E-mail: aregavsahakyan@gmail.com

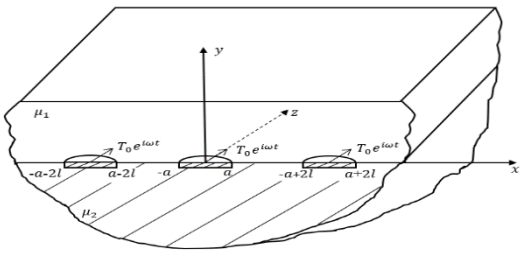
АНТИПЛОСКАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО—ОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ МЕЖФАЗНЫХ ЧАСТИЧНО ОТОРВАННЫХ ОТ МАТРИЦЫ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Амирджанян А.А., Саакян С.К.

Рассмотрены сдвиговые стационарные колебания кусочно-однородного полупространства, составленного из однородного слоя и полупространства, с периодичной системой межфазных полосовых тонких абсолютно жестких включений, одна из поверхностей которых оторвана от матрицы, создавая трещину. Считается, что полупространство деформируется под воздействием периодически изменяющихся во времени сосредоточенных нагрузок, действующих на включения. Записана определяющая система СИУ второго рода относительно двух определенных комбинаций амплитуд контактных напряжений, действующих под включением, и дислокации смещений точек берегов трещин. Получены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности в концевых точках трещин и раскрытия трещин. Решение определяющих уравнений построено численно-аналитическим методом механических квадратур. Проведены численные расчеты и изучены закономерности изменения важных механических характеристик задачи в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим сдвиговые колебания кусочно-однородного полупространства, составленного путем соединения слоя толщины h и полупространства, изготовленных из различных материалов с модулями сдвига μ_1 и μ_2 соответственно, и содержащего периодическую систему, с периодом $2l$, межфазных жестких, тонких полосовых включений, одна из поверхностей которых отошла от матрицы, создавая магистральные трещины. Будем полагать, что в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Ox которой в базовой полуплоскости направлена по линии стыка полосы и полупространства, на плоскости стыка $y=0$ трещины занимают области $\left\{y=0;\ -\infty<z<\infty;\ x\in L=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\left(2nl-a<x<a+2nl\right)\right\}$, верхние берега которых свободны от нагрузок, а к нижним берегам припаяны тонкие, полосовые, абсолютно жесткие включения. Полагается также, что составное полупространство деформируется под воздействием периодически изменяющихся во времени касательных сосредоточенных нагрузок $T_0e^{i\omega t}$, приложенных к включениям (Фиг.1).



Фиг.1 Схема поставленной задачи

Требуется выяснить закономерности изменения контактных напряжений, действующих под включениями, раскрытия трещин и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи, а также частоты колебаний внешней нагрузки.

Поставленная задача в базовой плоскости Oxy формулируется в виде граничной задачи:

$$W_1(x,0,t) = W_2(x,0,t) \qquad (x \notin L)$$

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,\ 0,\ t) = \tau_{yz}^{(2)}(x,\ 0,\ t) \qquad (x \notin L)$$

$$\tau_{yz}^{(1)}(x,\ h,\ t)\ =0 \qquad (-\infty<x<\infty)$$
$$\tau_{yz}^{(1)}(x,\ +0,\ t)\ =0 \qquad (x\in L) \tag{1}$$
$$W_2(x,-0,t)\ =\ const.e^{i\omega t} \qquad (x\in L)$$

Здесь $W_j(x,y,t)(j=1,2)$- соответственно смещения точек слоя и полупространства по направлению оси Oz, а $\tau_{yz}^{(j)}(x,y,t)\ \ (j=1,2)$- касательные напряжения, действующие в слое и полупространстве соответственно.

Для решения граничной задачи (1), как и в [1], по формулам $f(x,y,t)=f(x,y)e^{i\omega t}$ перейдем к амплитудам смещений $W_j(x,y)$ и напряжений $\tau_{yz}^{(j)}(x,y)\ \ (j=1,2)$ и, используя разрывные решения уравнений движения для кусочно-однородного полупространства, полученные для аналогичной задачи с конечным числом частично оторванных от матрицы включений [1], запишем определяющую систему сингулярных интегральных уравнений, которую следует рассматривать совместно с условиями равновесного динамического состояния включений без учета их массы и условиями непрерывности смещений в концевых точках трещины .

Затем, используя периодичность искомых функций и учитывая известные соотношения [2,3]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi-\eta+2kl}=\frac{\pi}{2l}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-\eta)}{2l};\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{2ikls}=\frac{\pi}{l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(s+\frac{\pi k}{l}\right),$$

где $\delta(\xi)$-известная дельта функция Дирака, определяющую систему и условия запишем в виде:

$$\frac{T(\eta)}{1+\mu}+\frac{\mu_2}{2l(1+\mu)}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-\eta)}{2l}W'(\xi)d\xi+\int_{-a}^{a}K_{11}^{*}(\xi-\eta)W'(\xi)d\xi+\int_{-a}^{a}K_{12}^{*}(\xi-\eta)T(\xi)d\xi=0;$$
$$\frac{W'(\eta)}{1+\mu}+\frac{1}{2l\mu_1(1+\mu)}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-\eta)}{2l}T(\xi)d\xi-\int_{-a}^{a}K_{21}^{*}(\xi-\eta)W'(\xi)d\xi-\int_{-a}^{a}K_{22}^{*}(\xi-\eta)T(\xi)d\xi=0; \tag{2}$$
$$(-a<x<a)$$

$$\int_{-a}^{a}T(x)dx=T_0;\quad \int_{-a}^{a}W'(x)dx=0. \tag{3}$$

где $K_{ij}^{*}(t)$-квадратично суммируемые функции.

Для решения системы интегральных уравнений (2) при условиях (3) вводятся новые безразмерные искомые функции по формулам

$$\psi_j(\eta)=W'(a\eta)+(-1)^{j+1}\sqrt{\mu}T(a\eta)/\mu_2\quad(\mu=\mu_2/\mu_1;\ \ j=1,2) \tag{4}$$

и сингулярная часть в полученных уравнениях представляется в виде ядра Коши. В итоге приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\psi_j(x)+\frac{(-1)^{j+1}\sqrt{\mu}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_j(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{-1}^{1}R_{ji}^{*}(s-x)\psi_i(s)ds=0\qquad(-1<x<1;\ \ j=1,2). \tag{5}$$

При этом условия (3) примут вид:

$$\int_{-1}^{1} \psi_j(\xi)\, d\xi = (-1)^{i+1} T_0^* \quad (j = 1, 2). \tag{6}$$

Здесь $T_0^* = \sqrt{\mu} T_0 / a\mu_2$, а $R_{ji}^*(x)$ - квадратично суммируемые функции .

Далее, определив показатели степенной особенности искомых функций, решение системы (5) построено численно-аналитическим методом механических квадратур [4]. Получены формулы для определения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин и раскрытия трещин.

Проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения коэффициентов разрушающих напряжений и раскрытия трещин в зависимости от частоты колебаний внешней нагрузки, от соотношения модулей сдвига слоя и полупространства, высоты полосы и от отношения периода периодической системы трещин к длине одной трещины.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 25RG-2C221.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hakobyan, V.N.: Stress Concentrators in Continuous Deformable bodies. Advanced Structured Materials, Vol 181. Springer. 397p (2022
2. Панасюк В.В. Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.- Киев: Наукова думка, 1976.- 443с
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. //Из-дат. «Наука», Москва 1976г., 280 ст.
4. Sahakyan, A.V., Amirjanyan, H.A. 2018. Method of Mechanical Quadrature's for Solving Singular Integral Equations of Various Types. *IOP Conf Ser: J Phys: Conf. Ser. 991:012070. https://doi.org/ 10.1088/1742-6596/991/1/01207*

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Саакян Сона Коляевна – аспирант Института механики НАН РА

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Арутюнян Л.А., Закарян В.Г.

1. Введение. Исследованию контактных и смешанных задач плоской теории упругости для однородной и кусочно–однородной плоскости и полуплоскости, содержащей межфазовые дефекты типа трещин, тонких включений, отверстий, стрингеров и т.д., посвящено много работ. В этой связи укажем на монографии [1-8], где построены точные или эффективные решения ряда задач в указанной области. В этих работах приведены ссылки, которые тесно связаны с рассматриваемой здесь задачей. В этих работах, по определению исследуется напряженно-деформированное состояние однородных или кусочно–однородных упругих плоскостей, содержащих разнородные концентраторы напряжений.

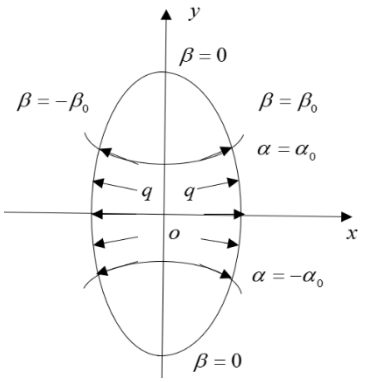
2. Постановка задачи. Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат Oxy, упругую кусочно–однородную плоскость, состоящую из двух разнородных полуплоскостей с упругими характеристиками μ_1, ν_1 и μ_2, ν_2 соответственно (где μ_k и ν_k - коэффициенты Ляме) и ослабленную симметричными сегментными отверстиями. Ось Oy направлена по линии соединения разнородных полуплоскостей.

Внешние задачи для этой области удобно решать в несколько видоизменной системе биполярных координат (α, β). Связь прямоугольных координат с видоизменными биполярными координатами даются такими формулами [9]

$$gx = \sin\beta, \quad gy = \operatorname{sh}\alpha, \quad ag = \operatorname{ch}\alpha - \cos\beta \tag{1}$$

где a – размерный параметр.

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками μ_1 и ν_1 занимает область $0 < \beta < \beta_0$, а второй, с упругими харатеристиками μ_2 и ν_2, – область $\beta_0 < \beta < 0$, координата α внутри рассматриваемой области изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Между материалами, вдоль линии $\beta = 0$, осуществляется полное соединение, по участкам боковой поверхности $|\alpha| < \alpha_0$ тело подвергается равномерному обжатию интенсивности q



(фиг. 1).

Задача решается при помощи функции напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)\ (m = 1, 2)$, каждая из которых удовлетворяет бигармоническому уравнению [9].

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right]\left(g\Phi_m(\alpha, \beta)\right) = 0 \tag{2}$$

Напряжения и перемещения в видоизменных биполярных координатах через функции напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)\ (m = 1, 2)$ задаются формулами [9,10]:

$$a\sigma_{\alpha}^{(m)}(\alpha,\beta)=\left[(ch\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-sh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+ch\alpha\right]\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right)$$

$$a\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)=\left[(ch\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-sh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cos\beta\right]\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)=-(ch\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right) \tag{3}$$

$$U_m(\alpha,\beta)=\frac{g}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Psi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right]$$

$$V_m(\alpha,\beta)=\frac{g}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}+\frac{\partial\Psi_m(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right]\qquad(m=1,2)$$

где μ_m и $\nu_m\ (m=1,2)$ упругие характеристики материалов (μ_m – модули сдвига, ν_m – коэффициент Пуассона), а связь между $\Psi_m(\alpha,\beta)$ и $\Phi_m(\alpha,\beta)\ (m=1,2)$ дается формулой [9,10]

$$\frac{\partial^2\left(g\Psi_m(\alpha,\beta)\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}=(1-\nu_m)\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right) \tag{4}$$

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [9]

$$g\Phi_m(\alpha,\beta)\big|_{\beta=\beta_m}=\varphi_m(\alpha);\ \left.\frac{\partial\left(g\Phi_m(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=\psi_m(\alpha)\qquad(m=1,2) \tag{5}$$

где предполагается, что функции $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)\ (m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

На линии контакта имеем следующие граничные условия

$$g\Phi_1(\alpha,\beta)\big|_{\beta=0}=g\Phi_2(\alpha,\beta)\big|_{\beta=0};\ \left.\frac{\partial\left(g\Phi_1(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=\left.\frac{\partial\left(g\Phi_2(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} \tag{6}$$

$$U_1(\alpha,0)=U_2(\alpha,0);\quad V_1(\alpha,0)=V_2(\alpha,0) \tag{7}$$

Необходимо составить граничные значения бигармонической функции $\Phi_m(\alpha,\beta)$ и ее производной $\frac{\partial\Phi_m(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\ (m=1,2)$ по контурным значениям касательного и нормального напряжений.

После некоторых выкладок находим

$$\varphi_m(\alpha)=\begin{cases}qa\dfrac{1-e^{-|\alpha_0|}\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha_0-\cos\beta_0}-q\left(y_0\cos\beta_0+x_0\sin\beta_0\right) & |\alpha|<\alpha_0\\ qy_0e^{-|\alpha|}-q\left(y_0\cos\beta_0+x_0\sin\beta_0\right) & |\alpha|>\alpha_0\end{cases}$$

$$\psi_m(\alpha)=(-1)^{m+1}q\left(y_0\sin\beta_0-x_0\cos\beta_0\right)\qquad(m=1,2) \tag{8}$$

где $x_0=\dfrac{a\sin\beta_0}{\operatorname{ch}\alpha_0-\cos\beta_0};\qquad y_0=\dfrac{a\operatorname{sh}\alpha_0}{\operatorname{ch}\alpha_0-\cos\beta_0}$

Особенностью данной задачи является то обстоятельство, что значения $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)\ (m=1,2)$ не стремятся к нулю при $\alpha\to\infty$ и, поэтому, не могут быть разложены в

интегралы Фурье по координате α. Однако, нетрудно видеть, что бигармоническую функцию $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ можно представить в виде суммы

$$\Phi_m(\alpha,\beta)=\Phi_m^{(1)}(\alpha,\beta)+\Phi_m^{(2)}(\alpha,\beta) \quad (m=1,2) \tag{9}$$

Если в качестве $\Phi_m^{(1)}(\alpha,\beta)$ взять выражение

$$g\,\Phi_m^{(1)}(\alpha,\beta)=-q\left(y_0\cos\beta+x_0\sin\beta\right), \tag{10}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{gathered} g\,\Phi_m^{(1)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_m}=-q\left(y_0\cos\beta_0+x_0\sin\beta_0\right); \\ \left.\frac{\partial\left(g\,\Phi_m^{(1)}(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=(-1)^{m+1}\left(y_0\cos\beta_0+x_0\sin\beta_0\right) \qquad (m=1,2) \end{gathered} \tag{11}$$

то для бигармонической функции $\Phi_m^{(2)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ получаем следующие граничные условия

$$g\,\Phi_m^{(2)}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\beta_m}=\begin{cases} qa\dfrac{1-e^{-|\alpha_0|}\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha_0-\cos\beta_0} & |\alpha|<\alpha_0 \\ qy_0e^{-|\alpha|} & |\alpha|>\alpha_0 \end{cases}; \quad \left.\frac{\partial\left(g\,\Phi_m^{(2)}(\alpha,\beta)\right)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=0 \ \ (m=1,2) \tag{12}$$

Неизвестную функцию $\Phi_m^{(2)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ ищем в виде интеграла Фурье

$$g\,\Phi_m^{(2)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_m(t,\beta)e^{-it\alpha}dt \quad (m=1,2) \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} f_m(t,\beta)=&A_m(t)cht(\beta_m-\beta)\cos\beta+B_m(t)cht\beta\cos(\beta_m-\beta)+ \\ &+C_m(t)cht(\beta_m-\beta)\sin\beta+D_m(t)sht\beta_m\sin(\beta_m-\beta);\ \ \beta_m=(-1)^{m+1}\beta_0 \end{aligned} \tag{14}$$

Из граничных условий (5) и (6), для неизвестных функций интегрирования $A_m(t),B_m(t),C_m(t)$ и $D_m(t)$ $(m=1,2)$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} &A_m(t)\delta_1(t)=K_2(t)\operatorname{ch}t\beta_0-\bar{\varphi}(t)\cos\beta_0;\ \ B_m(t)\delta_1(t)=\bar{\varphi}(t)\operatorname{ch}t\beta_0-K_2(t)\cos\beta_0 \\ &C_m(t)\delta_2(t)=K_1(t)\operatorname{sh}t\beta_m+K_2(t)\left[t\operatorname{ch}t\beta_0+\frac{t^2+1}{2\delta_1(t)}\operatorname{sh}t\beta_0\sin2\beta_0\right]- \\ &\qquad-\bar{\varphi}(t)\left[t\cos\beta_0+\frac{t^2+1}{2\delta_1(t)}\operatorname{sh}2t\beta_0\sin\beta_0\right] \\ &D_m(t)\delta_2(t)=-K_1(t)t\sin\beta_m-K_2(t)\left[t\cos\beta_0+\frac{t^2+1}{2\delta_1(t)}\operatorname{sh}2t\beta_0\sin\beta_0\right]+ \\ &\qquad+\bar{\varphi}(t)\left[t\operatorname{ch}t\beta_0+\frac{t^2+1}{2\delta_1(t)}\operatorname{sh}t\beta_0\sin2\beta_0\right] \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\delta_1(t)=\operatorname{sh}^2t\beta_0+\sin^2\beta_0;\ \ \delta_2(t)=\operatorname{sh}^2t\beta_0+t^2\sin^2\beta_0;\ \ \bar{\varphi}(t)=\frac{2qa\sin t\alpha_0}{t\left(t^2+1\right)\sqrt{2\pi}\left(\operatorname{ch}\alpha_0-\cos\beta_0\right)} \tag{16}$$

где $K_m(t)$ $(m=1,2)$ пока неизвестные функции, подлежащие определению.

При удовлетворении условий (7) равенства перемещений, получаем следующую систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения неизвестных функций $K_m(t)\ (m=1,2)$

$$K_1(t)=\frac{\delta_2^2(t)}{\Delta(t)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[M_{11}(t,\tau)K_1(\tau)+M_{12}(t,\tau)K_2(\tau)\right]d\tau+F_1(t)\right\}$$
$$K_2(t)=\frac{\delta_2^2(t)}{\Delta(t)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[M_{21}(t,\tau)K_1(\tau)+M_{22}(t,\tau)K_2(\tau)\right]d\tau+F_2(t)\right\} \qquad (17)$$

где

$$M_{11}(t,\tau)=\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[c_1(\tau)a_{22}(t)-c_1(t)a_{22}(\tau)\right]$$
$$M_{12}(t,\tau)=\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[-\tau c_1(t)a_{21}(t)+a_{22}(t)a_{21}(\tau)-\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)a_{21}(t)\right]$$
$$M_{21}(t,\tau)=\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)\left[a_{12}(\tau)-a_{12}(t)\right]$$
$$M_{22}(t,\tau)=\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)\left(a_{11}(\tau)-a_{11}(t)\right)-(\tau-t)a_{12}(t)a_{21}(\tau)\right]$$
$$F_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[-\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)b_1(\tau)-(\tau-t)a_{12}(t)b_2(\tau)\right]d\tau+$$
$$+a_{11}(t)b_1(t)+\left(t^2+1\right)a_{12}(t)b_2(t)$$
$$F_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(\tau-t)\pi}\left[(\tau-t)c_1(t)-\frac{h_1}{2}-h_2+1\right]b_2(\tau)d\tau-a_{11}(t)b_2(t)+a_{21}(t)b_1(t)$$
$$a_{11}(t)=-t\left(\frac{h_1}{2}+h_2-1\right)-t\left(t^2+1\right)(h_2-1)\frac{\sin^2\beta_0}{\delta_2(t)};\ a_{12}(t)=-\frac{\operatorname{sh}2t\beta_0-t\sin2\beta_0}{2\delta_2(t)}(h_2+1)$$
$$a_{21}(t)=-\frac{\operatorname{sh}2t\beta_0+t\sin2\beta_0}{2\delta_2(t)}(h_2+1);\quad a_{22}(t)=\frac{t^2\sin^2\beta_0}{\delta_2(t)}(h_2-1)+\frac{h_1}{2}+h_2-1$$
$$b_1(t)=-\frac{h_2-1}{\delta_2(t)}\overline{\varphi}(t)\left(t^2+1\right)\operatorname{sh}t\beta_0\sin\beta_0;\ b_2(t)=\frac{h_2+1}{\delta_2(t)}\left(t\operatorname{ch}t\beta_0\sin\beta_0+\operatorname{sh}t\beta_0\cos\beta_0\right)\overline{\varphi}(t)$$
$$\Delta(t)=\frac{h_1}{4}\delta_2^2(t)+(h_2-1)\delta_2(t)\left(h_1\operatorname{sh}^2t\beta_0-h_2+1\right)-h_2\left(\operatorname{sh}^2 2t\beta_0-t^2\sin\beta_0\right)$$
$$c_1(t)=\frac{t\sin^2\beta_0}{\delta_2(t)}(h_2-1);\qquad h_1=\frac{1-\mu}{1-\mu},\quad h_2=\frac{\mu(1-\nu_1)}{1-\nu_2},\quad \mu=\frac{\mu_2}{\mu_1} \qquad (18)$$

Для случая точечных сил величины P, приложенных в точках $\alpha=0,\ \beta=\beta_0$ для $\overline{\varphi}(t)$ получаем

$$\overline{\varphi}(t)=\frac{P}{\left(t^2+1\right)\sqrt{2\pi}} \qquad (19)$$

Учитывая найденные значения, для контактных напряжений $\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ получаем

$$\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{i(\operatorname{ch}\alpha-1)}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}tK_1(t)e^{-it\alpha}dt$$
$$\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[t^2+1+t^2\operatorname{ch}\alpha-it\operatorname{ch}\alpha\right]K_2(t)e^{-it\alpha}dt \qquad (20)$$

Характер напряженного состояния около края $y=a\ (\alpha=\infty)$ определяется величиной мнимой части первого корня $t_1=\xi_1-i\eta_1$ трансцендентного уравнения $\Delta(t)=0$. Если $\eta_1>1$ имеем нулевое напряженное состояние, если $\eta_1<1$ имеет место явление концентрации напряжений. В случае же $\eta_1=1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны и, в общем случае, отличны от нуля.

Из уравнений можно найти границу раздела областей конечных и бесконечных напряжений на краю поверхности контакта.

$$(h_2-1)(\beta_0\cos\beta_0-\sin\beta_0)(-h_1\sin^2\beta_0-h_2+1)-2h_2\cos\beta_0(2\beta_0\cos2\beta_0-\sin2\beta_0)=0 \qquad (21)$$

Заключение. Рассматривается плоская контактная задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками, когда составная плоскость по линии контакта ослаблена симметричными сегментными отверстиями. На границе кругового сегмента заданы нормальные и касательные напряжения, а на линии контакта напряжения и перемещения равны друг другу. С помощью видоизменной системы биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
2. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционних материалов. М.: Наука, 1983. 296с.
3. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи взаимодействия сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван: Изд. “Гитутюн” НАН, 2014, 322с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
5. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.
6. Гахов Ф.Д. Краевая задача. М.: Физматанализ, 1963.
7. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978, 296 ст.
8. Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для автоморфных функции. Уч. зап. Каз. ун – та, 1956, т. 116, кн. 4.
9. Уфлянд Я.С.. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968, ст. 401.
10. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 1, ст. 51-66.

Сведения об авторах:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.м.н, научный сотрудник Института механики НАН РА, (099)675 747, arutyunyanlevon@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич, кандидат физ.-мат. наук, ученый секретарь Института механики НАН РА.**Тел**.: (+37477)789-264, **E-mail**: vahe-zaqaryan@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

Барсегян В. Р., Барсегян Э. А.

В работе рассматривается задача управления линейной нестационарной динамической системой с нелокальными условиями интегрального типа. Сформулирована задача управления линейной динамической нестационарной системой с интегральными условиями, наложенными на компоненты фазового вектора в некоторых двух частях промежутка времени функционирования системы. Построена функция управления, под воздействием которого движение системы выходя из заданного начального состояния достигает заданного конечного состояния, удовлетворяя интегральным условиям. Показана непрерывность и неединственность функции управления.

Введение. Математическое моделирование разнообразных динамических процессов управления приводит к задачам управления с нелокальными условиями, описываемыми как дифференциальными уравнениями с частными производными, так и обыкновенными дифференциальными уравнениями. Задачи с нелокальными условиями являются одним из развивающихся направлений теории дифференциальных уравнений. Характерной чертой таких задач является, наряду с классическими условиями, наличие условий, связывающих значения фазовых параметров в различных промежуточных точках или промежутках с интегральными условиями. Задачи с нелокальными условиями рассматривались для уравнений с частными производными, в частности, в работах [1–3], а для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, в [4–7]. В [4] предложен численный метод решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. В [5] для линейной дифференциальной системы уравнений первого порядка с многоточечным и интегральным условием получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости, условие корректности и точное решение. В работах [6, 7] для задачи управления линейными динамическими системами с заданными начальными, конечными и неразделенными (нелокальными) многоточечными промежуточными условиями построен явный вид управляющего воздействия, а для задачи оптимального управления с критерием качества, заданным на всем промежутке времени, предложен метод решения.

В данной работе рассмотрена нелокальная задача управления с интегральными условиями для линейной нестационарной динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением. Сформулирована задача управления для линейной нестацинарной динамической системы с краевыми условиями и с интегральными условиями, наложенными на компоненты фазового вектора в некоторых непересекающихся двух частях промежутка времени функционирования системы. Построена функция управления, под воздействием которого движение системы удовлетворяет условиям задачи. Показана непрерывность и неединственность функции управления.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается линейным нестационарным дифферециальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$-мерные матрицы, $t_0 \le t \le T$ (t_0 и T - заданы), $u(t)$ - $(r \times 1)$ - вектор управления, элементы которых ограниченные и почти всюду на промежутке $[t_0, T]$ непрерывные функции.

Пусть заданы начальное и конечное

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T \tag{1.2}$$

состояния системы (1.1) и промежуточные моменты времени $0 \le t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$.

Предполагается, что для фазового вектора $x(t)$ системы (1.1) заданы следующие интегральные ограничения

$$\int_{t_1}^{t_2} F_1(t)x(t)dt = \alpha_1, \quad \int_{t_3}^{t_4} F_3(t)x(t)dt = \alpha_3, \tag{1.3}$$

где $F_1(t)-(q_1\times n)$, $F_3(t)-(q_3\times n)$ - мерные матрицы ($q_1 \le n$, $q_3 \le n$), элементы которых ограниченные и почти всюду на отрезках $[t_1,t_2]$, $[t_3,t_4]$ непрерывные известные функции, $\alpha_1-(q_1\times 1)$, $\alpha_3-(q_3\times 1)$ - мерные вектор-столбцы с известными вещественными элементами.

Вообще, возможны случаи, когда на отрезках $[t_1,t_2]$ и $[t_3,t_4]$ интегральным ограничениям (1.3) удовлетворяют не все значения координат фазового вектора $x(t)$, а лишь некоторые значения координат фазового вектора. В таких случаях будем считать, что соответствующие элементы матрицы $F_1(t)$ и $F_3(t)$ являются нулями.

Предполагается, что система (1.1), с интегральными условиями (1.3), на промежутке времени $[t_0,T]$ является вполне управляемой.

Сформулируем следующую задачу.

Требуется построить управляющее воздействие $u(t)$, $t\in[t_0,T]$, *под воздействием которого движение системы (1.1) из начального состояния* $x(t_0)$ *переходит в конечное состояние* $x(T)$, *удовлетворяя интегральным ограничениям (1.3).*

2. Решение задачи. Для решения поставленной задачи напишем решение уравнения (1.1), выходящее из начального состояния (1.2), следующим образом:

$$x(t) = X[t,t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X[t,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{2.1}$$

Подставим (2.1) в интегральные условия (1.3), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} F_1(t)x(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} F_1(t)X[t,t_0]x_0dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_0}^{t} F_1(t)X[t,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau\right)dt = \alpha_1,$$

$$\int_{t_3}^{t_4} F_3(t)x(t)dt = \int_{t_3}^{t_4} F_3(t)X[t,t_0]x_0dt + \int_{t_3}^{t_4}\left(\int_{t_0}^{t} F_3(t)X[t,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau\right)dt = \alpha_3$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{t_0}^{t} F_1(t)X[t,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau\right)dt = \alpha_1 - \int_{t_1}^{t_2} F_1(t)X[t,t_0]dtx_0. \tag{2.2}$$

$$\int_{t_3}^{t_4}\left(\int_{t_0}^{t} F_3(t)X[t,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau\right)dt = \alpha_3 - \int_{t_3}^{t_4} F_3(t)X[t,t_0]dtx_0. \tag{2.3}$$

Учитывая, что на отрезках $[t_1,t_2]$, $[t_3,t_4]$ и $[t_0,T]$, соответственно, функции $F_1(t)$, $F_3(t)$ и все подынтегральные функции ограниченные и почти всюду непрерывные функции, тогда, согласно теореме Фубини (об изменении порядка интегрирования), меняя порядок интегрирования двойных интегралов в формулах (2.2) и (2.3), значения интегралов не меняются [8]. В результате изменения порядка интегрирования левых частей формул (2.2), (2.3) и, воспользовавшись свойством фундаментальной матрицы, получим следующие интегральные соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} P_1(t_1)X[t_0,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} P_1(\tau)X[t_0,\tau]B(\tau)u(\tau)d\tau = \alpha_1 - P_1(t_1)x_0, \tag{2.4}$$

$$\int_{t_0}^{t_3} P_3(t_3)X\left[t_0,\tau\right]B(\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_3}^{t_4} P_3(\tau)X\left[t_0,\tau\right]B(\tau)u(\tau)d\tau=\alpha_3-P_3(t_3)x_0\,, \tag{2.5}$$

где

$$P_1(t)\equiv\int_{t}^{t_2} F_1(\tau)X\left[\tau,t_0\right]d\tau\,, \qquad P_1(t_1)\equiv\int_{t_1}^{t_2} F_1(\tau)X\left[\tau,t_0\right]d\tau\,,$$

$$P_3(t)\equiv\int_{t}^{t_4} F_3(\tau)X\left[\tau,t_0\right]d\tau\,, \qquad P_3(t_3)\equiv\int_{t_3}^{t_2} F_3(\tau)X\left[\tau,t_0\right]d\tau\,.$$

Введём следующие обозначения,

$$H_1^{(1)}(t)=\begin{cases} P_1(t_1)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_0,t_1\right] \\ 0, & t\in\left(t_1,T\right]\end{cases}, \qquad H_2^{(1)}(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[t_0,t_1\right) \\ P_1(t)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_1,t_2\right] \\ 0, & t\in\left(t_2,T\right]\end{cases},$$

$$H_1^{(3)}(t)=\begin{cases} P_3(t_3)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_0,t_3\right] \\ 0, & t\in\left(t_3,T\right]\end{cases}, \qquad H_2^{(3)}(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[t_0,t_3\right) \\ P_3(t)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_3,t_4\right] \\ 0, & t\in\left(t_4,T\right]\end{cases}.$$

Учитывая выше введенные обозначения, интегральные соотношения (2.4) и (2.5) можно представить в следующих видах,

$$\int_{t_0}^{T} H_1^{(1)}(t)u(t)dt+\int_{t_0}^{T} H_2^{(1)}(t)u(t)dt=\alpha_1-P_1(t_1)x_0\,,$$

$$\int_{t_0}^{T} H_1^{(3)}(t)u(t)dt+\int_{t_0}^{T} H_2^{(3)}(t)u(t)dt=\alpha_3-P_3(t_3)x_0$$

или

$$\int_{t_0}^{T} H_1(t)u(t)dt=\alpha_1-P_1(t_1)x_0\,, \tag{2.6}$$

$$\int_{t_0}^{T} H_3(t)u(t)dt=\alpha_3-P_3(t_3)x_0\,. \tag{2.7}$$

где

$$H_1(t)=H_1^{(1)}(t)+H_2^{(1)}(t)=\begin{cases}P_1(t_1)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_0,t_1\right) \\ P_1(t)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_1,t_2\right] \\ 0, & t\in\left(t_2,T\right]\end{cases}, \tag{2.8}$$

$$H_3(t)=H_1^{(3)}(t)+H_2^{(3)}(t)=\begin{cases}P_3(t_3)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_0,t_3\right) \\ P_3(t)X\left[t_0,t\right]B(t), & t\in\left[t_3,t_4\right] \\ 0, & t\in\left(t_4,T\right]\end{cases}. \tag{2.9}$$

Из формулы (2.1) для конечного момента времени $t=T$ будем иметь следующее интегральное соотношение

$$\int_{t_0}^{T} X\left[T,t\right]B(t)u(t)dt=x(T)-X\left[T,t_0\right]x(t_0)\,. \tag{2.10}$$

Таким образом, получаем интегральные условия (2.6), (2.7) и (2.10). Это означает, что управление $u(t)$, $t\in[t_0,T]$ должно одновременно удовлетворять условиям (2.6), (2.7) и (2.10).

Введем следующие блочные матрицы:

$$H(t)=\begin{pmatrix} H_1(t) \\ H_3(t) \\ X[T,t]B(t) \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} \alpha_1 - P_1(t_1)x_0 \\ \alpha_3 - P_3(t_3)x_0 \\ x(T) - X[T,t_0]x(t_0) \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где матрица $H(t)$ и вектор C имеют соответствующие размерности $((q_1+q_3+n)\times r)$ и $((q_1+q_3+n)\times 1)$.

Согласно обозначениям (2.11), интегральные условия (2.6), (2.7) и (2.10) запишутся в виде:

$$\int_{t_0}^{T} H(t)u(t)dt = C. \tag{2.12}$$

Тогда, обозначая матрицу

$$Q=\int_{t_0}^{T} H(t)H^T(t)dt \tag{2.13}$$

с размерностью $((q_1+q_3+n)\times(q_1+q_3+n))$ и предполагая, что $\det Q \neq 0$, управляющее воздействие, удовлетворяющее (2.12), можно представить в виде:

$$u(t)=H^T(t)Q^{-1}C+v(t), \tag{2.14}$$

где вектор $v(t)$ ортогонален блочной матрице $H(t)$, т.е.

$$\int_{t_0}^{T} H(t)v(t)dt = 0.$$

Здесь и далее буква “Т” в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Отметим, что из интегрального соотношения (2.11) следует, что динамическая система (1.1) с интегральными условиями (1.3) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора C (2.11) из пространства $R^{q_1+q_3+n}$, можно найти управление $u(t)$, $t\in[t_0,T]$, удовлетворяющее условию (2.12) [9, 10].

Согласно формуле (2.14) из неединственности функции $v(t)$, $t\in[t_0,T]$ следует, что функция управления $u=u(t)$, $t\in[t_0,T]$ не единственна. Отметим, что непосредственной постановкой можно убедиться, что значения функции управления в правой точке отрезка $[t_{k-1},t_k]$ и левой точке отрезка $[t_k,t_{k+1}]$, $(k=1,2,3,4)$ принимает равные значения ($t_5=T$), т.е. в точках t_k функции управления не имеют разрывов. Таким образом, функция управления $u=u(t)$, $t\in[t_0,T]$ непрерывна.

Учитывая обозначения (2.8), (2.9) и (2.11), управляющее воздействие представляется в следующем виде:

$$u(t)=\begin{cases} \left(\left(P_1(t_1)X[t_0,t]B(t)\right)^T,\left(P_3(t_3)X[t_0,t]B(t)\right)^T,\left(X[t_0,t]B(t)\right)^T\right)Q^{-1}C+v(t), & t\in[t_0,t_1] \\ \left(\left(P_1(t)X[t_0,t]B(t)\right)^T,\left(P_3(t_3)X[t_0,t]B(t)\right)^T,\left(X[t_0,t]B(t)\right)^T\right)Q^{-1}C+v(t), & t\in[t_1,t_2] \\ \left(0,\left(P_3(t_3)X[t_0,t]B(t)\right)^T,\left(X[t_0,t]B(t)\right)^T\right)Q^{-1}C+v(t), & t\in[t_2,t_3] \\ \left(0,\left(P_3(t)X[t_0,t]B(t)\right)^T,\left(X[t_0,t]B(t)\right)^T\right)Q^{-1}C+v(t), & t\in[t_3,t_4] \\ \left(0,0,\left(X[t_0,t]B(t)\right)^T\right)Q^{-1}C+v(t), & t\in[t_4,T] \end{cases}.$$

Подставляя выражение управляющего воздействия в (2.1), получим движение системы (1.1) на промежутке времени $[t_0,T]$, удовлетворяющее условиям (1.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода. Изв. вузов. Сер.: Математика. 2012, 24. С. 74-83.
2. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral non-local boundary problems for some partial differential equations. Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011, 5:1. pp. 31-37.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями. Дифференциальные уравнения. 2000, 36:5. С. 656-661.
4. Абдуллаев В.М. Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. Сиб. журн. индустр. Математики. 2012, 15:3. С. 3-15.
5. Байбурин М.М. О многоточечных задачах для линейной дифференциальной системы уравнений первого порядка. Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева. Прикладная математика и вопросы управления. 2018, № 3. С. 16-30.
6. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Автоматика и телемеханика. 2015, № 4. С. 3–15.
7. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
8. Зорич В.А. Математический анализ часть II. М.: Наука. 1984. 386с.
9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
10. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор факультета математики и механики ЕГУ.
E-mail: barseghyan@sci.am

Барсегян Эмиль Арменович – магистрант 2-го курса факультета математики и механики ЕГУ.
E-mail: emil.barsegyann@gmail.com

КООРДИНАТНО–ВРЕМЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ УПРАВЛЯЕМОГО БПЛА И НАЗЕМНОГО ОБЪЕКТА

Барсегян В. Р., Мкртчян М. Г., Матевосян А. Г.

Работа посвящена вопросам определения координатно-временной зависимости беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) и наземной цели в инерциальной системе координат с помощью данных с видеокамеры, прикреплённой к БПЛА. На основе полученных данных с видеокамеры, прикреплённой к БПЛА, с учетом закона движения БПЛА, предлагается математическая модель, описывающая координатно-временную зависимость БПЛА и наземной цели. Предполагается, что цель может быть как неподвижной, так и подвижной. Используя математическую модель координатно-временной зависимости движения БПЛА и цели, в частности, можно разрабатывать алгоритмы в автономном режиме управления БПЛА, обеспечивающие решение задач различного назначения.

Введение. В настоящее время все большее распространение получает применение беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в различных целях, в том числе в военных целях, что является весьма актуальным [1-3]. Многообразие сфер применения предполагает использование БПЛА разных типов и различного назначения. Когда спрос на БПЛА различного назначения стремительно растет, изучение задач управления ими является несомненно актуальным направлением исследований [3-9]. В частности, важное прикладное значение имеют задачи автономного управления БПЛА, поэтому исследования подобных задач востребованы. Для автономного управления и наведения БПЛА большую роль играет положение и ориентация аппарата в пространстве во время его полета [7]. Полет БПЛА может функционировать с различной степенью автономии. Для осуществления автономного полета в процессе проектирования в БПЛА устанавливается соответствующее программное обеспечение на выполнение различных задач в автономном режиме управления, т.е. без участия человека. Задачи в автономном режиме управления БПЛА, в частности, связанных с отслеживанием, разведкой, преследованием и сближением, одной из целей предполагают определение местоположения наземных объектов.

В данной работе предлагается способ определения координатно-временной зависимости наземного неподвижного или подвижного объекта в инерциальной системе координат с помощью данных с видеокамеры, прикреплённой к БПЛА.

1. Постановка задачи и описание системы координат. Рассматривается БПЛА, оснащенный органами управления: тягой двигателя и аэродинамическими рулями (углы отклонения руля высоты, руля направления). БПЛА, как динамический объект управления, представляет собой сложную динамическую систему. Для управления движением БПЛА необходимо воздействовать на силы и моменты, действующие на летательный аппарат [2, 5-7]. Предполагается, что БПЛА обладает системой позиционирования и оснащен видеокамерой, т.е. на БПЛА с помощью подвеса (гимбала) закреплена видеокамера с некоторым полем зрения (Рис. 1). Предполагается также, что цель находится в поле зрения видеокамеры.

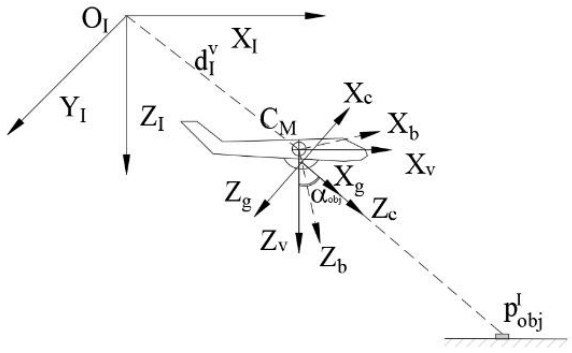


Рис. 1. Схема БПЛА самолетного типа и системы координат.

Предполагается также, что известен закон движения БПЛА и в системе отсчета на некотором расстоянии от БПЛА на земле расположен объект, называемый целью. Цель находится в поле зрения видеокамеры. Расстоянием видеокамеры от центра тяжести БПЛА и размерами цели будем пренебрегать, поэтому считается, что цель – точка. Обозначим положение цели в момент времени t через $\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^{I}(t)$. Этой точке соответствует линия визирования – прямая, соединяющая цель с центром тяжести БПЛА. Предполагается, что в некоторый момент времени $t = t_0$ известны координаты БПЛА.

Рассмотрим следующую задачу:

Требуется, используя данные с видеокамеры, прикреплённой к БПЛА, найти математическую модель, описывающую координатно-временную зависимость БПЛА и движущейся цели.

Для описания движения БПЛА и определения координатно-временной зависимости координат БПЛА и цели используются следующие системы координат:

$X_I Y_I Z_I$ – неподвижная (инерциальная) система координат,

$X_v Y_v Z_v$ – подвижная система координат,

$X_b Y_b Z_b$ – система координат, относящаяся к корпусу летательного аппарата,

$X_g Y_g Z_g$ – система координат, связанная с подвесом (гимбалом),

$X_c Y_c Z_c$ – система координат, связанная с устройством визуализации (видеокамерой),

$X_{im} Y_{im}$ – система координат, связанная с плоскостью изображения камеры.

Отметим, что эти системы координат необходимы для описания перехода из одной координатной системы к другой, используя соответствующие T_I^v, T_v^b, T_b^g, T_g^c переходные матрицы, виды которых здесь не приводятся.

2. Математическая модель видеокамеры. Рассматривается модель видеокамеры, представляющую собой идеальную камеру, с помощью которой описывается соотношение между координатами точек в инерциальной системе и координатами точек на двумерном изображении, поступающем с камеры. Предполагается, что модель не учитывает искажений изображения, вызываемых линзами камеры, а также погрешность изображения объектов, находящихся не в фокусе.

Теперь рассмотрим математическую модель такой видеокамеры и переход из пиксельных координат изображения цели, полученной на камере, к системе координат $X_c Y_c Z_c$ (Рис.2).

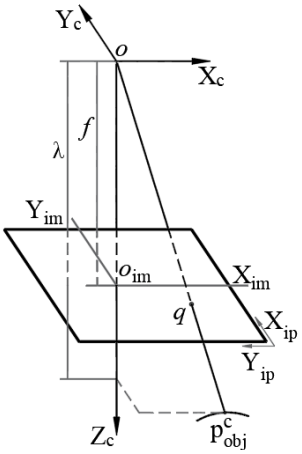


Рис. 2. Схема модели видеокамеры и системы координат.

Приведем некоторые пояснения получения изображения видеокамерой. Наблюдаемую камерой наземную цель обозначим через $\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^{c}$ - точка цели в координатной системе, связанной с

камерой ($X_cY_cZ_c$), где точка O (центр проекции) - начало этой системы координат ($X_cY_cZ_c$). От точки O на расстоянии f находится плоскость изображения (полученное изображение на камере), где проецируется точка цели q, а f - это фокусное расстояние камеры между плоскостью изображения и центром проекции. В этой плоскости закреплена координатная система ($X_{im}Y_{im}Z_{im}$) и измеряется в метрах, где $Z_{im} = Z_c - f$. На правом нижнем углу изображения закреплена система координат ($X_{ip}Y_{ip}$), которая измеряется в пикселях. Оптическая ось OZ_c - луч, имеющий начало в точке O и перпендикулярный к плоскости изображения.

Преобразование пикселей в метры в системе координат изображения ($X_cY_cZ_c$) по методу Трукко и Верри представляется следующим образом:

$\mathrm{x_{im}} = (-\mathrm{y_{ip}} + 0_{\mathrm{y}})\mathrm{S_y}$, $\quad y_{\mathrm{im}} = (-x_{\mathrm{ip}} + 0_{\mathrm{x}})\mathrm{S_x}$.

Через S_x, S_y обозначены ширина и высота одного элемента светочувствительной матрицы. Также обозначим через $\lambda = p_z$ проекцию расстояния от камеры до цели на ось Z_c .

В рассматриваемой задаче необходимо определить положение цели $\mathrm{p}^I_{\mathrm{obj}}$ относительно инерциальной системы ($X_IY_IZ_I$). Если известна величина λ, то с помощью известных матриц преобразования T_I^v , T_v^b , T_b^g , T_g^c от одной системы к другой, положение цели $\mathrm{p}^I_{\mathrm{obj}}$ определяется формулой

$$\mathrm{p}^I_{\mathrm{obj}} = \left[CT_g^c T_b^g T_v^b T_I^v \right]^{-1} \Lambda q, \tag{1}$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda q = \mathrm{Cp}^c_{\mathrm{obj}}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & f_x & 0_x & 0 \\ -f_y & 0 & 0_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_x = \frac{f}{S_x}, \quad f_y = \frac{f}{S_y}. \tag{2}$$

Здесь C - матрица калибрации, а параметры f_x , f_y - фокальные длины.

Таким образом, при помощи видеокамеры, закрепленной на корпусе БПЛА, можно найти координаты неподвижной или подвижной цели, находящейся на земле.

3. Математическая модель координатно-временной зависимости БПЛА и цели. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ координатами БПЛА в вертикальной плоскости являются $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Тогда можно определить положение цели $\mathrm{p}^I_{\mathrm{obj}}(t_0)$ в инерционной системе координат. Из геометрических соображений, приведенных на Рис. 2 и формулы (1), будем иметь

$$\lambda(t_0) = \frac{z^I_{cc}(t_0)}{\cos\alpha_{obj}(t_0)}, \quad \mathrm{p}^I_{\mathrm{obj}}(t_0) = \left[CT_g^c T_b^g T_v^b T_I^v \right]^{-1} \Lambda q(t_0), \tag{3}$$

где $\lambda(t_0)$ – расстояние от камеры до цели, $\mathrm{p}^I_{cc} = \begin{pmatrix} x^I_{cc} & y^I_{cc} & z^I_{cc} & 1 \end{pmatrix}^T$ – положение камеры, $\alpha_{obj}(t_0)$ – угол, образованный осями Z_I и Z_c , $q(t_0) = (\mathrm{x_{ip}}(t_0), \mathrm{y_{ip}}(t_0), 1, 1)^{\mathrm{T}}$, а $\mathrm{x_{ip}}(t_0)$, $\mathrm{y_{ip}}(t_0)$ – координаты точки цели на картинке камеры в пикселях. Отметим, что явный вид матрицы C приведен в (2).

Здесь и далее буква «T » в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Пусть в момент времени $t = t_j$, согласно закону движения БПЛА, начиная движение из начального состояния (при $t = t_0$), координатами приобретенного положения в инерциальной

системе являются $x(t_j)$, $y(t_j)$ и $z(t_j)$. Тогда расстояние $\lambda(t_j)$ от БПЛА до цели, согласно (3), будет

$$\lambda(t_j) = \frac{z_{cc}^I(t_j)}{\cos\alpha_{obj}(t_j)}. \tag{4}$$

Следовательно, координаты цели относительно инерциальной системы координат, согласно формулам (3) и (4), представляются в виде

$$\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^I(t_j) = \left(CT_{all}\right)^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{z_{cc}^I(t_j)}{\cos\alpha_{obj}(t_j)} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q(t_j), \tag{5}$$

где

$$T_{all} = T_g^c T_b^g T_v^b T_I^v.$$

Учитывая, что

$$p_{cc}^I(t_j) = T_{all}^{-1} B, \qquad T_{all}^{-1} = p_{cc}^I(t_j) B^+, \tag{6}$$

где $B = p_{cc}^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, p_{cc}^c - оптический центр камеры, а B^+ является псевдообратным Мура-Пенроуза вектора B и $B^+ = \dfrac{B^T}{\| B \|^2}$, следовательно, (5) представляется в виде

$$\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^I(t_j) = p_{cc}^I(t_j) C^{-1} B^+ \begin{bmatrix} \dfrac{z_{cc}^I(t_j)}{\cos\alpha_{obj}(t_j)} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q(t_j), \tag{7}$$

В данном случае $B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь формулу (5) (или (7)), согласно (6), представим в виде

$$\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^I(t_j) = p_{cc}^I(t_j) B^+ C^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{z_{cc}^I(t_j)}{\cos\alpha_{obj}(t_j)} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q(t_j).$$

Далее учитывая, что

$$p_{cc}^I(t_j) = T_{all}^{-1} B,$$

получим

$$\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^I(t_j) = p_{cc}^I(t_j) B^+ C^{-1} \Lambda q(t_j). \tag{8}$$

В последнем выражении каждый из множителей имеет следующую размерность: $\mathrm{p}_{\mathrm{cc}}(t_j) - (4\times 1)$, $B^+ - (1\times 4)$, $C^{-1} - (4\times 4)$, $\Lambda - (4\times 4)$, $q(t_j) - (4\times 1)$. Поэтому произведение $B^+ C^{-1} \Lambda q(t_j)$ является скаляром. Если обозначим этот скаляр через S_c, то выражение для $\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^I(t_j)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^I(t_j) = p_{cc}^I(t_j) S_c. \tag{9}$$

Это показывает, что $\mathrm{p}_{\mathrm{obj}}^I(t_j)$ - масштабированная версия $p_{cc}^I(t_j)$.

Таким образом, формулой (8) или (9) описывается координатно-временная зависимость наземного неподвижного или подвижного объекта в инерциальной системе координат.

Отметим, что в общем случае, используя математическую зависимость двух управляемых динамических объектов, исследуются различные задачи сближения, преследования и слежения одним объектом другого. Здесь также, имея математическое явное выражение координатно-временной зависимости БПЛА и наземной цели в виде формулы (8) (или (9)), в частности, можно разрабатывать

конструктивные алгоритмы в автономном режиме управления БПЛА для решения задач различного назначения.

Работа выполнена при поддержке Комитета по высшему образованию и науке РА, в рамках исследовательского проекта № 23-2DP-1B001.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лемешонок Т.Ю., Сизова А.А., Баранов Н.Е., Санников В.А. Математические модели динамики движения летательных аппаратов. Санкт-Петербург. 2020.122 с.
2. Эпов М.И., Злыгостев И.Н. Применение беспилотных летательных аппаратов в аэрогеофизической разведке. Интерэкспо Гео-Сибирь. 2012. Т. 2. № 3. С. 22–27.
3. Телухин С.В., Матвеев В.В. Беспилотный летательный аппарат как объект управления. Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 10. С. 7-10.
4. Барсегян В.Р., Матевосян А.Г. Об одной задаче управления беспилотным летательным аппаратом самолетного типа с заданными промежуточными значениями разных частей координат. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2023, № 2. С. 86-96.
5. Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г. Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат. Вестник российских университетов. Математик, 2024. Т. 29, № 145. С. 29-42.
6. Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г. Об одной задаче оптимального управления квадрокоптером с заданным промежуточным значением части координат фазового вектора. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2024. №2, с. 59-72.
7. Латонов В.В., Тихомиров В.В. Управление линией визирования цели по видеоизображению. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2018. № 1.С. 53-59.
8. D. Blake Barber, Joshua D. Redding, Timothy W. McLain, Randal W. Beard, Clark N. Taylor, Vision-based Target Geo-location using a Fixed-wing Miniature Air Vehicle. Journal of Intelligent & Robotic Systems, November 2006. № 47, pp. 361-382.
9. Барсегян В.Р., Мкртчян М.Г., Матевосян А.Г. Об одной задаче управления БПЛА по линии визирования. Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2024). Материалы 6-й Международной конференции. Иркутск, 16–20 сентября. ИГУ, 2024. С. 199-202.

Сведения об авторах:

Барсегян Ваня Рафаелович – доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, профессор факультета математики и механики ЕГУ.
E-mail: barseghyan@sci.am

Мкртчян Манук Грайрович – кандидат технических наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении,
E-mail: mkmanuk@yandex.ru

Матевосян Арам Гагикович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент факультета математики и механики ЕГУ.
E-mail: matevosaram@gmail.com. amatevosyan@ysu.am

МЕТОДИКА СОВМЕСТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИЙ-ПАРАМЕТРОВ ДРОБНОГО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО АНАЛОГА МОДЕЛИ ЗИНЕРА

Богачев И.В.

В докладе сформулирована постановка задачи об установившихся изгибных колебаниях неоднородных вязкоупругих стержней, реологические свойства которых описываются дробно-дифференциальным обобщением модели стандартного вязкоупругого тела (Зинера). В состав модели входят четыре параметра: функции мгновенного и длительного модулей, время релаксации и параметр дробности. Обратные задачи заключаются в идентификации параметров использованной модели (двух функций и двух констант) на основе информации либо о смещении, либо об угле поворота концевого сечения. Для исследования обратных задач проведен анализ чувствительности акустического отклика для каждого параметра на основании анализа производных Фреше. Решение обратных задач основано на методе линеаризации с последующим построением итерационного процесса, дополненного элементами проекционного подхода. Результаты проведенных вычислительных экспериментов по определению функций различного характера монотонности и констант разного порядка показали эффективность предложенной методики.

1. Введение. Ввиду активного распространения новых материалов со сложной структурой и реологическими неоднородными свойствами, такими как функционально-градиентные полимеры и полимеркомпозиты, важной задачей математического моделирования является создание адекватных моделей их деформирования. Для вязкоупругих материалов кроме классических линейных дифференциальных моделей активно применяются их дробно-дифференциальные обобщения [1], содержащие дифференциальные операторы дробного порядка. В данной работе используется обобщение модели стандартного вязкоупругого тела (Зинера), в котором дробная производная по времени введена на основе определения Римана-Лиувилля, а определяющее соотношение имеет вид:

$$nD^{\alpha}\sigma+\sigma=EnD^{\alpha}\varepsilon+H\varepsilon, \tag{1.1}$$

Модель (1.1) является четырехпараметрической, в ее состав входят длительный модуль H, мгновенный модуль E (причем $E>H>0$), время релаксации $n>0$ и параметр дробности α, $0<\alpha\le 1$.

Модели дробного порядка для современных полимеров во многих экспериментах более точно описывают процессы деформации, в частности, ползучесть, при этом содержат меньшее количество параметров по сравнению с классическими. Также, стоит отметить, что ввиду пространственной неоднородности механических характеристик новых материалов требуется разработка более сложных, чем общепринятые для однородных материалов, методик их идентификации, основанных, например, на неразрушающем акустическом подходе.

2. Постановка задач. Рассмотрим установившиеся изгибные колебания неоднородного вязкоупругого стержня переменной жёсткости. Уравнение колебаний в безразмерном виде после отделения временного множителя будет иметь вид [2]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(G(x,i\kappa)\frac{d^2w(x,\kappa)}{dx^2}\right)-\kappa^4 w(x,\kappa)=0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим два вида граничных условий:

1. Стержень консольно закреплен, на свободном конце нагружен сосредоточенной силой; граничные условия имеют вид:

$$w(0,\kappa)=0,\quad w'(0,\kappa)=0,\quad G(1,i\kappa)w''(1,\kappa)=0,\quad (G(1,i\kappa)w''(1,\kappa))'=1, \tag{2.2}$$

2. Стержень консольно закреплен, на свободном конце нагружен сосредоточенным моментом; граничные условия имеют вид:

$$w(0,\kappa)=0,\quad w'(0,\kappa)=0,\quad G(1,i\kappa)w''(1,\kappa)=1,\quad (G(1,i\kappa)w''(1,\kappa))'=0. \tag{2.3}$$

При постановке задач введены следующие обозначения: w – безразмерная функция смещения, x – безразмерная продольная координата; $G(x,i\kappa)=\dfrac{\left(i\kappa^2\right)^{\alpha}\tau g(x)+h(x)}{1+\left(i\kappa^2\right)^{\alpha}\tau}$ – функция безразмерного комплексного модуля для дробного аналога модели Зинера (1.1), в состав которой входят безразмерные функции мгновенного и длительного модулей $g(x)$, $h(x)$,

безразмерное время релаксации τ и параметр дробности α; κ – безразмерная частота колебаний.

Обратные задачи (ОЗ) для обоих видов нагружения заключаются в определении неизвестных безразмерных функций мгновенного и длительного модулей $g(x)$, $h(x)$ и безразмерных параметров времени релаксации τ и дробности α (считающихся постоянными) из эксперимента по анализу установившихся колебаний стержней. Для нагружения силой в качестве дополнительной информации выступает измеренная на свободном конце стержня в некотором частотном диапазоне $[\kappa_1, \kappa_2]$ функция смещения:

$$w(1,\kappa) = f_1(\kappa). \tag{2.4}$$

Для нагружения моментом дополнительной информацией является угол поворота свободного конца стержня, измеренный в частотном диапазоне $[\kappa_1, \kappa_2]$:

$$w'(1,\kappa) = f_2(\kappa). \tag{2.5}$$

Сформулированные ОЗ являются нелинейными, для их решения требуется применение специальных подходов [3].

3. Схема решения ОЗ. Для решения сформулированных ОЗ будем использовать метод линеаризации с последующим построением итерационно-проекционного процесса. Его общая схема дана в [4], краткое описание приведено ниже.

Начальное приближение. Для искомых функций $h(x)$, $g(x)$ и безразмерных параметров времени релаксации τ и дробности α выбираются начальные приближения $h_0(x)$, $g_0(x)$, τ_0, α_0 (и соответствующее начальное приближение комплексного модуля $G_0(x, i\kappa)$) на основе априорной информации об их положительности и ограниченности или специальных вспомогательных экспериментов, например, на ползучесть.

Этап 1. Для текущих приближений $h_n(x)$, $g_n(x)$, τ_n, α_n и $G_n(x, i\kappa)$ с помощью численных методов рассчитываются функции смещения $w_n(x,\kappa)$. Здесь n – номер текущей итерации.

Этап 2. Поправка к комплексному модулю $\delta G(x, i\kappa)$ определяется из решения интегрального уравнения Фредгольма (ИУФ) 1-го рода вида:

$$\int_0^1 \delta G(x, i\kappa)\left(w_n''(x,\kappa)\right)^2 dx = F(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \tag{3.1}$$

В ИУФ (3.1) правая часть для постановки задачи о нагружении силой записывается в виде $F(\kappa) = w_n(1,\kappa) - f_1(\kappa)$, для нагружения моментом $F(\kappa) = -\left(w_n'(1,\kappa) - f_2(\kappa)\right)$.

Соотношение (3.1) может быть записано относительно поправок $\delta h(x)$, $\delta g(x)$, $\delta\tau$, $\delta\alpha$ к искомым функциям и параметрам, входящим в состав поправки к комплексному модулю.

$$\int_0^1 \left[Z_1\delta h + Z_2\delta g + Z_3\delta\tau + Z_4\delta\alpha\right]\left(w_n''(x,\kappa)\right)^2 dx = F(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2],$$

$$Z_1 = \frac{1}{1+\tau_0\left(i\kappa^2\right)^{\alpha_0}},\ Z_2 = 1 - \frac{1}{1+\tau_0\left(i\kappa^2\right)^{\alpha_0}}, \tag{3.2}$$

$$Z_3 = \frac{\left(g_0 - h_0\right)\left(i\kappa^2\right)^{\alpha_0}}{\left(1+\tau_0\left(i\kappa^2\right)^{\alpha_0}\right)^2},\ Z_4 = \frac{\left(g_0 - h_0\right)\left(i\kappa^2\right)^{\alpha_0}\tau_0\ln\left(i\kappa^2\right)}{\left(1+\tau_0\left(i\kappa^2\right)^{\alpha_0}\right)^2}.$$

При этом стоит отметить, что ввиду того, что параметры τ и α являются неизвестными, рассматриваемый оператор уже не обладает ключевым свойством билинейности по неизвестным параметрам, которое использовалось в ранее исследованных постановках, например, в [4].

Для численной реализации решения ИУФ 1-го рода (3.2) удобно отделить в нем вещественную и мнимую части, перейдя к решению системы ИУФ 1-го рода относительно вещественнозначных функций.

Этап 3. Поправки, найденные на втором этапе, используются для вычисления следующих приближений искомых функций и параметров:

$$h_{n+1}(x) = h_n(x) + \delta h(x),\ g_{n+1}(x) = g_n(x) + \delta g(x),\ \tau_{n+1} = \tau_n + \delta\tau,\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \delta\alpha. \qquad (3.3)$$

Затем проверяются условия выхода из итерационного процесса: либо величина функционала невязки вида $\Phi = \max\limits_{\kappa\in[\kappa_1,\kappa_2]} \left|F(\kappa)\right|$ станет меньше некоторого заданного малого числа ε_0, либо число итераций превысит заданное значение N, либо величина поправок станет несущественной. Повторение этапов 1-3 продолжается до выполнения одного из этих условий.

В данной работе на втором этапе итерационного процесса использован проекционный подход, заключающийся в представлении поправок к функциям $h(x)$ и $g(x)$ в виде разложений по некоторым системам линейно независимых функций, подстановке этих разложений в (3.2) и дальнейшем сведении второго этапа к решению прямоугольных СЛАУ относительно коэффициентов разложений с помощью метода А.Н. Тихонова [3].

Замечание. Ввиду наличия следующих ограничений модели на восстанавливаемые параметры вида:

$$0 < h(x) < g(x), 0 < \alpha \le 1, \tau > 0, \qquad (3.4)$$

в случае их нарушения на каком-либо шаге итерационного процесса, он может расходиться. Чем большее число параметров одновременно восстанавливается в рамках одного процесса, тем менее он «устойчив» и медленнее происходит его сходимость. В связи с этим, в данной работе проведены следующие доработки итерационного процесса на каждом его шаге:

1. После вычисления поправок $\delta h(x)$, $\delta g(x)$, $\delta\tau$, $\delta\alpha$ к восстанавливаемым функциям $h(x)$, $g(x)$ и параметрам τ и α для получаемых текущих приближений проверяются условия (3.4). В случае, если какое-то из них нарушается, соответствующая поправка обнуляется и текущее приближение к восстанавливаемому параметру остается прежним.
2. Также для восстанавливаемого параметра времени релаксации τ на основании априорной информации о его ограниченности проверяется условие вида $\tau_{\min} \le \tau \le \tau_{\max}$ (для α такие ограничения уже заложены в ограничения модели (3.4)).

4. Вычислительные эксперименты. В данном разделе представлены результаты вычислительных экспериментов по применению описанного выше подхода к решению сформулированных ОЗ. В качестве примера рассмотрен случай монотонно возрастающих функций $h(x) = 0.5 + 0.5x^2$ и $g(x)=0.6 + 0.6x^2$ при $\alpha = 0.5$ и $\tau = 0.1$ в задачах о нагружении стержня силой (2.2) и моментом (2.3). Начальные приближения выбраны в виде $h^0(x) = 0.5$, $g^0(x) = 0.6$, частотный диапазон $[0.5, 1.0]$. Для реконструкции потребовалось 14 и 13 итераций соответственно. На рис. 1 и в табл. 1 представлены результаты восстановления для нагружения силой (сплошной линией показаны графики искомых функций, пунктиром – начальных приближений, точками – восстановленных).

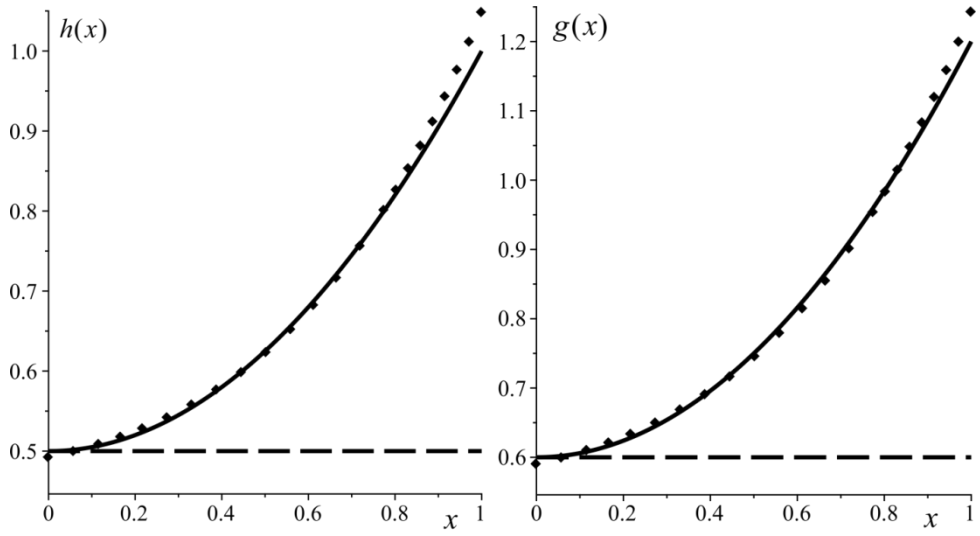


Рис. 1. Результат восстановления монотонно возрастающих функций $h(x)$ и $g(x)$ при нагружении силой

	Точное	Восст.	Погр.%
τ	0.1	*0.1009*	*0,97%*
α	0.5	*0.5002*	*0,05%*

Таблица 1. Идентификация безразмерных параметров времени релаксации τ и дробности α при нагружении силой

На рис. 2 и в табл. 2 представлены результаты восстановления в случае нагружения моментом:

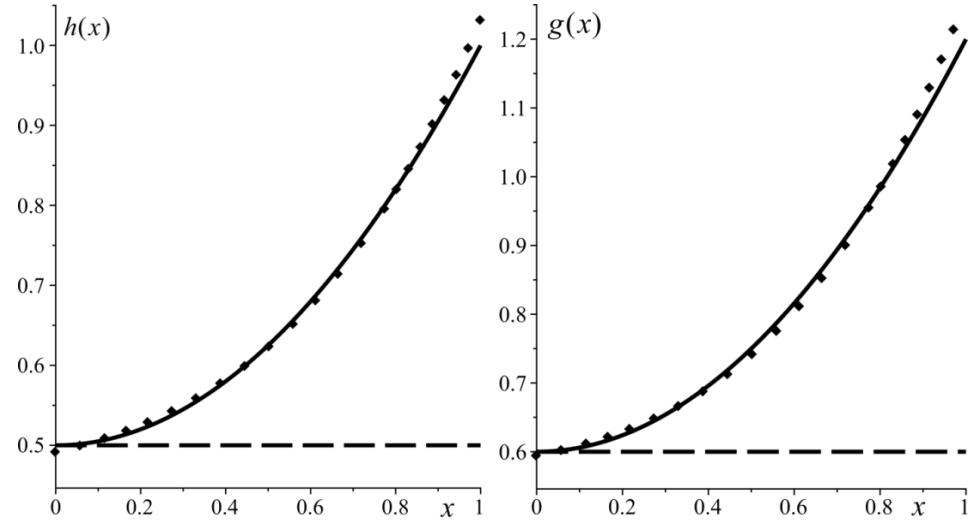


Рис. 2. Результат восстановления монотонно возрастающих функций $h(x)$ и $g(x)$ при нагружении моментом

	Точное	Восст.	Погр.%
τ	0.1	*0.1010*	*1,00%*
α	0.5	*0.5004*	*0,09%*

Таблица 2. Идентификация безразмерных параметров времени релаксации τ и дробности α при нагружении моментом

Относительная погрешность реконструкции функций при этом не превосходит 4% и 5%, соответственно, а констант 1%, что позволяет сделать вывод о применимости разработанного подхода для совместной идентификации всех функций-параметров модели Зинера в случае неоднородных материалов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Государственное задание в области научной деятельности, научный проект № FENW-2023-0012

ЛИТЕРАТУРА

1. Шитикова М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 2022, № 1, с. 3-40.
2. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.:Машиностроение. 1970. 736с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
4. Богачев И.В., Ватульян А.О. Об идентификации характеристик неоднородных вязкоупругих тел в рамках модели дробного порядка // Вычислительная механика сплошных сред, 2024, Т. 17, №2, с. 182-193.

Information about authors

Bogachev Ivan Victorovich – Researcher, Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, +7 (863) 2975 111.
E-mail bogachev89@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАПОЛНЕНИЯ ПОР РАСТУЩЕЙ ЭПИТЕЛИАЛЬНОЙ ТКАНЬЮ В СТАТИЧЕСКОМ БИОРЕАКТОРЕ В УСЛОВИЯХ ДЕСОРБЦИИ ФАКТОРОВ РОСТА ИЗ МАТРИЦЫ СКАФФОЛДА

Бузмаков М.Д., Красняков И.В., Брацун Д.А.

Данная работа посвящена численному моделированию динамики заполнения клетками пор скаффолда. На стенках пористой структуры располагаются факторы роста, стимулирующие процесс деления клеток. Концентрация этого вещества напрямую влияет на скорость роста ткани в порах скаффолда. В работе проводится сравнительный анализ динамики роста клеточной ткани в различных по геометрии каналах.

1. Введение

Процесс направленной регенерации тканей зачастую происходит в скаффолдах. Так называют пористые или волокнистые структуры, использующиеся в качестве механической поддержки для роста клеток и регенерации тканей. Скаффолды позволяют обеспечить лишь механическую поддержку для клеток. Для полноценной регенерации требуется наличие дополнительных биохимических сигналов, таких как фактор роста. Он играет ключевую роль в направленной регенерации [1]. Включение факторов роста в скаффолды позволяет, например, контролируемо стимулировать пролиферацию, дифференцировку, привлекать клетки в зону регенерации, активировать процесс ангиогенеза. Перечисленные процессы критически важны для успешного восстановления поврежденных тканей и органов [2]. Процесс регенерации клеточной ткани является достаточно комплексным с точки зрения математического моделирования. Необходимо одновременно учитывать физические и химические свойства микроокружения, в котором находится клетка [3].

2. Математическая модель

Эпителиальная ткань представляет собой компактный слой высокоорганизованных клеток, прикреплённых к базальной мембране и лишённых межклеточного вещества. Форма, положение и поведение клеток определяются балансом сил внутри ткани. Одним из ключевых источников внутренних механических напряжений является цитоскелет, который создает натяжение на мембранах клеток и способствует их взаимодействию как друг с другом, так и с внеклеточным матриксом. При этом эпителий может подвергаться механическим воздействиям извне: со стороны базальной мембраны, внеклеточного матрикса или соседних тканей.

С целью моделирования механики и динамики такой ткани, мы используем двумерную вершинную модель, в которой каждая клетка описывается как многоугольник, а вершины (узлы) этих многоугольников определяют её форму и положение. Из всех возможных правильных покрытий плоскости наиболее подходящим в биомеханическом смысле является шестиугольная упаковка – она минимизирует механическую энергию и обеспечивает наилучшее приближение к кругу [4].

В основе модели лежит предположение, что поведение клеток в ткани определяется стремлением всей системы минимизировать потенциальную энергию $U(t)$. Суммарная энергия ткани описывается как сумма вкладов от всех клеток:

$$U(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\left[\eta\left(A_i(t)-A_0\right)^2+\mu P_i^2(t)+\sigma\sum_{j=1}^{n(t)}\left(l_{ij}(t)-l_0\right)^2+\varphi\sum_{j=1}^{n(t)}\left(\alpha_{ij}(t)-\alpha_0\right)^2\right]. \quad (1)$$

Первое слагаемое отвечает за сопротивление клеток изменениям своей площади. Второе слагаемое моделирует контрактильную активность кортикального актина, расположенного под мембраной клетки. Чем выше коэффициент μ, тем сильнее клетка стремится минимизировать длину своей границы. Третье слагаемое отвечает за стремление клеточных рёбер (границ между клетками) сохранять длину, близкую к эталонному значению 10. Четвёртое слагаемое регулирует отклонение углов клеточного многоугольника от идеального значения α_0, характерного для шестиугольной упаковки. Биофизически оно связано с сохранением формы клетки и равномерной передачей механических напряжений по всем направлениям. Коэффициент φ определяет степень «угловой жёсткости» клетки и может зависеть, например, от состояния цитоскелета или плотности межклеточных контактов. Все четыре слагаемых взаимодействуют

и обеспечивают баланс между механической стабильностью и адаптивностью ткани. Такая энергетическая модель позволяет точно описывать локальные деформации, клеточные перестройки и реакции на внешние воздействия.

Эволюция ткани реализуется через перемещение вершин клеток под действием механических сил, возникающих из градиента потенциальной энергии:

$$\mathbf{F}_\zeta = -\frac{\partial U(t)}{\partial \mathbf{R}_\zeta}. \tag{2}$$

В условиях высокой вязкости клеточной среды инерционными эффектами можно пренебречь, поэтому уравнение движения узлов формулируется в аристотелевской форме:

$$\mathbf{V}_\zeta = k\mathbf{F}_\zeta \,\mathrm{H}\left(\left|\mathbf{F}_\zeta\right| - F_0\right). \tag{3}$$

Для моделирования пролиферации вводится стохастический механизм деления, зависящий от числа вершин в клетке:

$$p_{\text{div}}(t) = p_0 q^{n(t)-6}, \tag{4}$$

где p_0 и q – параметры модели. Деление инициируется при достижении клеткой определённой геометрической конфигурации.

Ещё один важный механизм – интеркаляция. Это процесс клеточной перестройки, при котором соседние клетки изменяют топологические связи, перераспределяя свои границы. В результате происходят локальные изменения формы и плотности клеток, что позволяет ткани адаптироваться к внешним и внутренним воздействиям без увеличения общего числа клеток. В модели интеркаляция реализуется при выполнении геометрического условия: если длина ребра l_{ij} между двумя соседними клетками становится меньше некоторого критического значения d_{int}. Это указывает на локальное накопление напряжения или «избыточность» данного ребра.

В ткань вводится диффузионное поле химического фактора, распространяющееся по соседним клеткам и поглощаемое ими. Процесс описывается системой уравнений:

$$\mathbf{J}_{i_j}(t) = \left(\mathbf{C}_i(t) - \mathbf{C}_j(t)\right)\delta l_{ij}(t), \tag{5}$$

$$\frac{d\mathbf{C}_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n(t)} \mathbf{J}_{i_j}(t) - \beta \mathbf{C}_i(t), \tag{6}$$

где δ – коэффициент диффузии, β – скорость деградации вещества, $C_i(t)$ – концентрация в i-й клетке.

Концентрация может влиять на механические свойства клеток, что позволяет учитывать хемомеханическую обратную связь:

$$\eta = \eta\left(\mathbf{C}_i(t)\right); \quad \mu = \mu\left(\mathbf{C}_i(t)\right); \quad \sigma = \sigma\left(\mathbf{C}_i(t)\right). \tag{7}$$

Разработанная нами математическая модель обладает широкими возможностями для анализа динамики эпителиальной ткани на клеточном уровне. Её ключевое преимущество заключается в том, что она позволяет детально отслеживать полную эволюцию состояния каждой отдельной клетки в составе моделируемого ансамбля, от начальной конфигурации и вплоть до конечного момента расчёта. В процессе моделирования сохраняется информация о геометрии клетки, её механических характеристиках, истории делений, топологических перестроек и изменениях концентраций химических факторов, что открывает возможность для комплексного анализа взаимодействия биомеханических и биохимических процессов.

3. Результаты математического моделирования

Рассматривались три варианта геометрии пор: прямой, синусоидальный и градиентно-периодический каналы. Форма прямого и синусообразного канала задавалась следующим образом:

$$y = \pm d \cdot \left(1 + \varepsilon \cdot \sin\left(K \cdot x\right)\right) \tag{8}$$

где $d = 4.5$ и $\varepsilon = 0.5$ – постоянные величины. Для прямого канала $K = 0$, а для синусообразного – $K = 1/4$. Градиентно-периодическая форма канала была задана следующим

уравнением:

$$\left[\cos(1{,}5\pi Kx)\sin(0{,}15\pi)+\cos(0{,}15\pi)\sin(1{,}5\pi Ky)+\right.$$
$$\left.\cos(1{,}5\pi Ky)\sin(1{,}5\pi Kx)\right]^2-0{,}37\le -0{,}25 \quad (9)$$

где $K=0.045$.

Во всех вариантах вдоль стенок канала присутствует источник факторов роста, задаваемый уравнением:

$$\frac{dC_{FG}}{dt}=\left(C_0-C_{FG}(t)\right)\cdot\left(-0.01t+15\right)-\alpha C_{FG}(t) \quad (10)$$

где C_0 – эталонная концентрация фактора роста на границе, α – коэффициент потребления факторов роста клетками ткани, множитель $\left(-0.01t+15\right)$, отражающий уменьшение интенсивности источника со временем. Кроме того, на левой границе канала действовал дополнительный источник химического сигнала, интерпретируемый как постоянная подача питательного вещества в статическом биореакторе. В момент времени $t=0$ в системе присутствует одна шестиугольная клетка, расположенная вблизи левой границы. Механические и биохимические параметры клеток во всех сценариях одинаковы, меняется только форма пор.

На рис. 1, 2 и 3 представлена эволюция ткани в каналах прямоугольной, синусообразной и градиентно-периодической формы через равные промежутки времени. Из представленной на рис. 1, 2 и 3 динамики видно, что наиболее быстрые темпы роста ткани в каналах прямоугольной и градиентно-периодической формы.

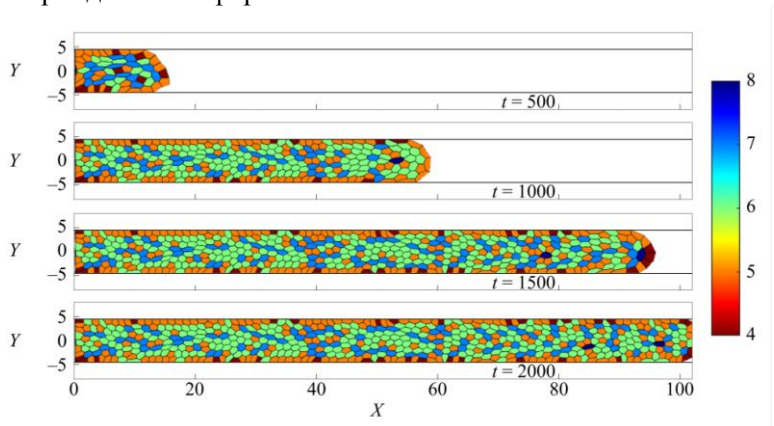


Рис. 1. Результаты численного расчёта заполнения прямоугольной $(K=0)$ поры скаффолда эпителиальной тканью. Кадры сверху вниз соответствуют последовательным временам. Цветовая шкала показывает распределение клеток многоугольников по числу сторон.

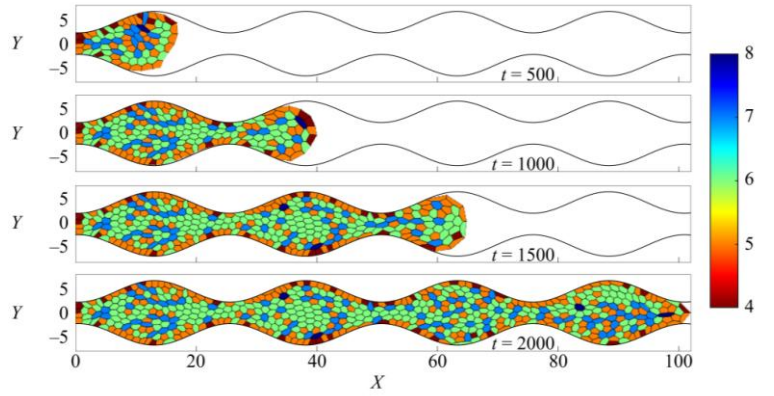


Рис. 2. Результаты численного расчёта заполнения синусообразной $(K=1/4)$ поры скаффолда эпителиальной тканью. Кадры сверху вниз соответствуют последовательным временам. Цветовая шкала показывает распределение клеток многоугольников по числу сторон.

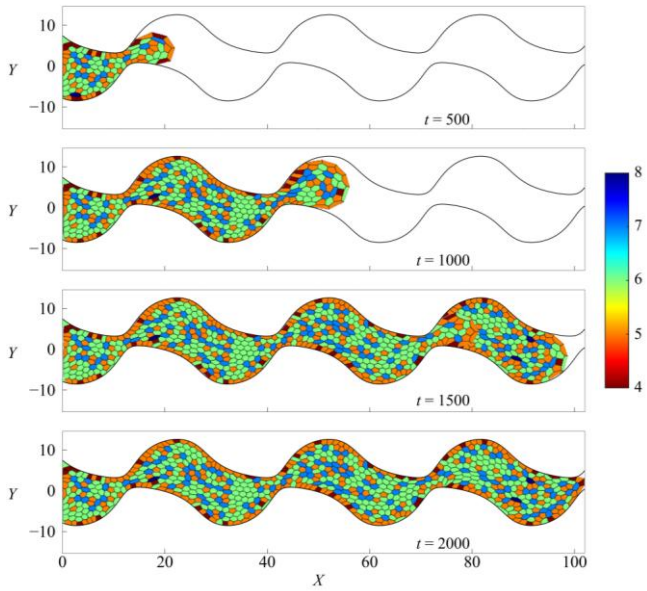


Рис. 3. Результаты численного расчёта заполнения градиентно-периодической $(K = 0.045)$ поры скаффолда эпителиальной тканью. Кадры сверху вниз соответствуют последовательным временам. Цветовая шкала показывает распределение клеток многоугольников по числу сторон.

Это наблюдение подтверждается графиком, представленным на рис. 4, где показана зависимость изменения количества клеток во времени $N(t)$. Во всех случаях наблюдается характерная S-образная динамика роста: на начальном этапе (первые 250 единиц времени) рост числа клеток невысокий, что соответствует фазе адаптации ткани к условиям среды. Далее следует активная экспоненциальная фаза, где скорость пролиферации максимальна. В завершающей стадии темп роста замедляется, что отражает заполнение пространства поры и ограничение ресурсов.

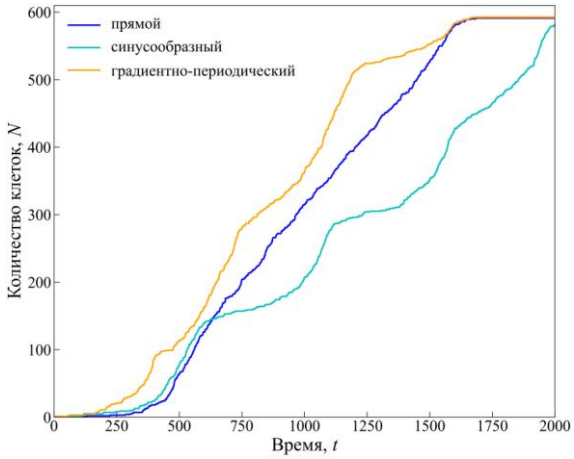


Рис. 4. График зависимости изменения количества клеток со временем $N(t)$.
Время указано в произвольных единицах.

Сравнительный анализ кривых на рис. 4 показывает, что в прямом канале (синяя кривая) рост клеточной ткани идёт наиболее равномерно и достигает максимального количества клеток быстрее остальных случаев. Это можно объяснить отсутствием сложных геометрических препятствий для распространения ткани и равномерным распределением факторов роста по всей длине канала. В синусоидальном канале (голубая кривая) наблюдается более плавный рост, особенно на начальном этапе, что связано с изменяющейся шириной канала, создающей участки с локальными концентрационными и механическими градиентами. В градиентно-

периодическом канале (оранжевая кривая) темпы роста на всём промежутке времени самые высокие, но по мере заполнения свободного пространства темпы роста сходятся с темпами роста в прямом канале. Такое поведение можно интерпретировать как эффект сложной структуры стенок, формирующей неравномерное распределение питательных веществ и факторов роста. Таким образом, геометрия пор существенно влияет на кинетику роста эпителиальной ткани, причём простая линейная конфигурация канала создаёт наиболее благоприятные условия для быстрого заполнения пор.

4. Заключение

Полученные результаты показывают, что геометрия пор скаффолда оказывает комплексное влияние как на скорость роста эпителиальной ткани, так и на морфологические характеристики отдельных клеток. Прямой канал обеспечивает наилучшие условия для быстрого увеличения числа клеток и сохранения их формы, близкой к изотропной, что указывает на минимальные локальные механические и геометрические ограничения. Более сложные конфигурации, такие как синусоидальные и градиентно-периодические каналы, замедляют рост ткани в статических биореакторах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00338, https://rscf.ru/project/25-11-00338/

ЛИТЕРАТУРА

1. Carpenter G., Cohen S. Epidermal growth factor // Journal of Biological Chemistry. – 1990. – Т. 265. – №. 14. – С. 7709-7712.
2. Whitaker M.J., Quirk R.A., Howdle S.M., Shakesheff K.M. Growth factor release from tissue engineering scaffolds // Journal of Pharmacy and Pharmacology. – 2001. – Т. 53. – С. 1427-1437.
3. Fletcher A.G., Osterfield M., Baker R.E., Shvartsman S.Y. Vertex models of epithelial morphogenesis // Biophysical Journal. – 2014. – Т. 106. – С. 2291–2304.
4. Красняков И.В., Бузмаков М.Д. Исследование процессов переупаковки клеток в эпителиальных листах in silico: часть I – одноосное растяжение ткани // Российский журнал биомеханики. – 2025. – т. 29, № 1. – С. 105-118.

Сведения об авторах

Бузмаков Максим Дмитриевич – младший научный сотрудник кафедры «Прикладная физика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, факультет прикладной математики и механики +7 (342) 2-391-283,
E-mail maxim.buzmakov97@gmail.com

Красняков Иван Васильевич – научный сотрудник кафедры «Прикладная физика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, факультет прикладной математики и механики +7 (342) 2-391-283,
E-mail krasnyakov_ivan@mail.ru

Брацун Дмитрий Анатольевич – заведующий кафедрой «Прикладная физика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, факультет прикладной математики и механики +7 (342) 2-391-283,
E-mail dabracun@pstu.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ ЛЕГКОЙ СФЕРЫ, ВСПЛЫВАЮЩЕЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ С ЖИДКОСТЬЮ

Власова О. А.

Экспериментально исследуется поведение легкого сферического тела, всплывающего во вращающейся вокруг вертикальной оси цилиндрической полости с жидкостью. Эксперименты проводятся при варьировании высоты полости и скорости ее вращения, обеспечивающей центрифугированное положение сферического тела вблизи оси вращения. Вокруг всплывающей во вращающейся жидкости сферы формируется столбик Тейлора-Праудмена, значительно замедляющий скорость ее всплытия. Основное внимание в работе уделяется исследованию дифференциальной скорости вращения сферы в зависимости от ее вертикального положения, скорости вращения кюветы и ее высоты. Показано, что всплывающее сферическое тело совершает дифференциальное вращение, величина и направление которого определяется вертикальной координатой сферы. Причиной возникновения дифференциального вращения всплывающей сферы является ее взаимодействие с верхним и нижним (относительно сферы) столбиками Тейлора-Праудмена, имеющими противоположное направление закрутки и по мере всплытия сферы меняющие свою высоту.

1. Введение

В теоретических работах [1, 2] показано, что вокруг сферического тела в быстро вращающейся полости формируется столб жидкости, вращающийся соосно с полостью, так называемый столбик Тейлора-Праудмена. Поперечный размер столбика определяется размерами тела, продольный размер пропорционален rE^{-1}, а скорость его вращения отлична от скорости вращения полости. Здесь r – радиус сферы, $E = \nu/\Omega r^2$ – число Экмана (ν – вязкость жидкости, $\Omega=2\pi f$ – циклическая частота вращения полости). Столбик, расположенный над сферой, совершает опережающее дифференциальное вращение относительно полости, а столбик под сферой – отстающее. В результате формирования столбика Тейлора-Праудмена в системе появляется дополнительное гидродинамические сопротивление, замедляющее осевое движение сферы. Граница столбика Тейлора-Праудмена имеет многослойную структуру из вложенных друг в друга трех слоев Стюартсона [3]. Внешние слои сглаживают скачок скорости на внешней и внутренней границе столбика, при этом внутренний слой поддерживает поток вдоль столбика. В результате взаимодействия столбика Тейлора-Праудмена с горизонтальными торцами полоти возникает циркуляция жидкости через внутренний сдвиговый слой Стюартсона за счет экмановской подкачки на горизонтальных торцах полости. Впервые теоретически и экспериментально сопротивление, испытываемое всплывающей сферой в коротком цилиндре в пределе тонких сдвиговых слоев, было изучено в работах [4, 5]. Гидродинамическое сопротивление, возникающее при наличии вращения в ограниченной полости, зависит от характеристик пограничных сдвиговых слоев, обеспечивающих циркуляцию жидкости: скорость движения сферы увеличивается с вязкостью жидкости и уменьшается с увеличением скорости вращения цилиндра. Это было экспериментально подтверждено [6]. В [6] также было показано, что сфера совершает дифференциальное вращение, направление и величина которого зависит от положения сферы с полости. Дифференциальное вращение сферы является результатом ее взаимодействия с верхним и нижним столбиками Тейлора-Праудмена.

2. Экспериментальная установка и методика

Экспериментальная установка состоит из вертикальной цилиндрической полости *1* с жидкостью и легким сферическим телом *2* внутри (рис. 1). Радиус полости составляет $R = 2.65$ см, высота полости варьируется в диапазоне $h = 6$–18 см за счет перемещения верхнего торца полости. Равномерное вращение полости вокруг вертикальной оси обеспечивается шаговым двигателем. Скорость вращения изменяется в диапазоне $f = \Omega_{rot}/(2\pi)=5 – 20$ об/с. Здесь Ω_{rot} - угловая скорость вращения полости. Полость заполняется чистой водой плотностью $\rho_l = 0.99$ г/см^3 и вязкостью $\nu = 0.96$ сСт. Легкое сферическое тело имеет радиус $r = 1.23$ см и плотность $\rho_s = 0.99$ г/см^3. Относительная плотность тела составляет $\rho = 0.92$.

В работе используется оригинальная методика запуска сферического тела, разработанная профессором Козловым и соавторами и представленная в работе [3]. Установка закреплена на вращающейся горизонтальной оси платформе, позволяющей изменять ориентацию полости в поле силы тяжести в процессе эксперимента. В начале эксперимента полость повернута на угол больше 90 градусов от вертикального положения, при этом легкое тело всплывает к нижнему

торцу полости. Полость приводится во вращение со скоростью, при которой тело переходит в центрифугированное состояние на оси полости. Далее кювета плавно поворачивается до вертикального положения. При этом легкое тело, расположенное вблизи дна кюветы, начинает всплывать в поле силы тяжести. Вносимые при этом возмущения в движение жидкости и тела незначительны, а переходные процессы завершаются до того, как тело удаляется от дна на расстояние, сопоставимое с его диаметром. На боковую поверхность полости по всей высоте нанесена шкала для отслеживания положения тела в ней. Для исследования дифференциальной скорости вращения тела на него нанесены экваториальные метки. Эксперимент повторяется несколько раз при фиксированном значения скорости вращения полости и фиксируется на скоростную видеокамеру, расположенную сбоку.

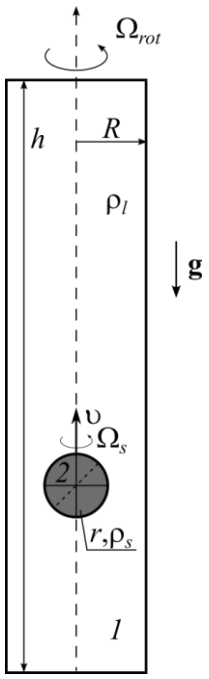


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

3. Результаты эксперимента

В результате формирования вокруг сферического тела столбика Тейлора-Праудмена скорость всплытия сферы становится на несколько порядков ниже, по сравнению со случаем его всплытия в отсутствие вращения. Эксперименты показали, что в результате взаимодействия со столбиком Тейлора-Праудмена сфера совершает комбинированное движение: практически равномерно всплывает вдоль оси вращения полости и совершает дифференциальное вращение вокруг вертикальной оси. Зависимость скорости всплытия сферы υ от вертикальной координаты центра тела *y* показана светлыми символами на рис.2, зависимость дифференциальной скорости вращения тела Ω_s - темными символами на рис.2. Видно, что в средней части полости сфера всплывает практически равномерно. Некоторое снижение скорости всплытия наблюдается в начале и в конце движения сферы. Первое связано с затуханием переходных процессов после поворота кюветы в вертикальное положение (около 1-2 калибров сферы), второе – с приближением к верхнему торцу на расстояние вязкого взаимодействия. В нижней части полости тело совершает опережающее дифференциальное вращение, скорость которого линейно уменьшается по мере всплытия тела. В средней части полости ($y \approx 9$ см) дифференциальное вращение тела отсутствует. С дальнейшим движением сферы опережающее дифференциальное вращение сменяется отстающим, скорость которого растет с *y*. Аналогичная зависимость обнаружена для всего исследованного диапазона скоростей вращения полости. Отметим, что с уменьшением скорости вращения полости скорость дифференциального вращения тела снижается, а скорость всплытия увеличивается.

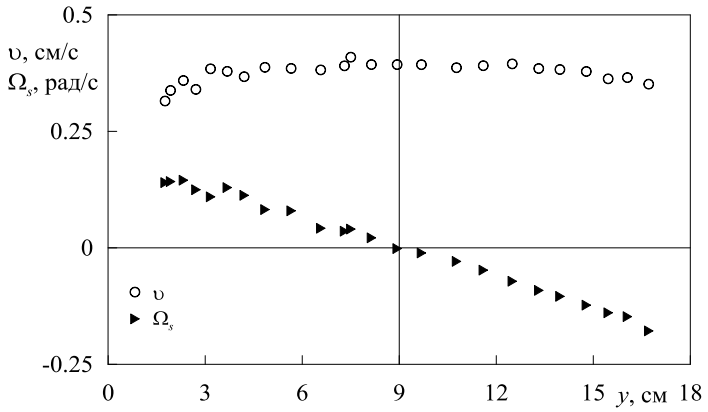
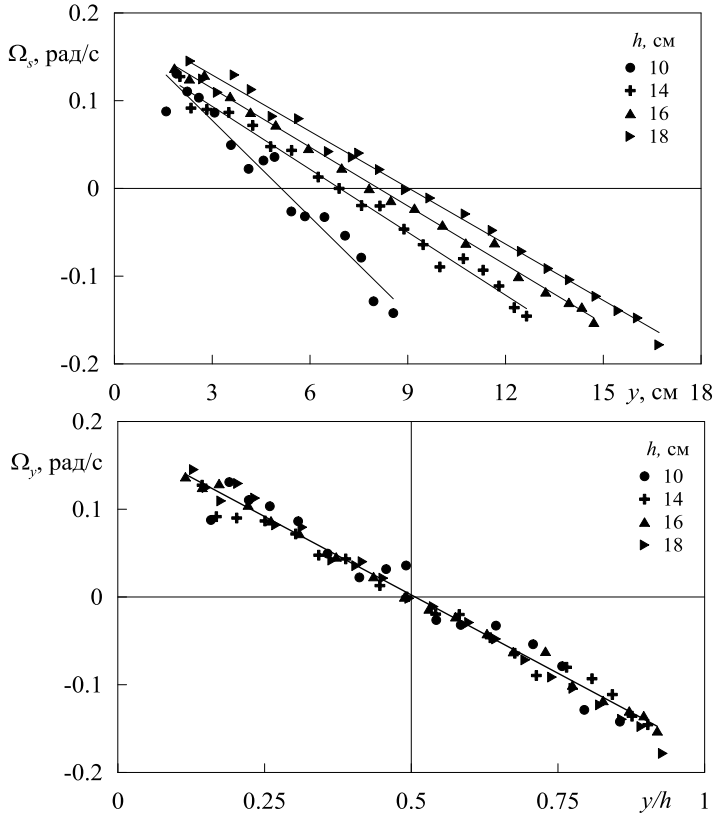


Рис. 2. Зависимость скорости всплытия тела и скорости его дифференциального вращения от вертикальной координаты центра тела *y*, *f* = 20 об/с, *h* = 18 см

Скорость дифференциального вращения тела также исследовалась при изменении высоты полости. На рис.3,*а* представлена зависимость скорости дифференциального вращения тела от координаты центра тела при скорости вращения полости *f* = 20 об/с для набора высот полости от 10 до 18 см. Видно, что для всех высот *h* зависимость имеет линейный характер. Примечательно, что для всех высот *h* величина Ω_s изменяется в одном и том же диапазоне. Представим полученные данные на плоскости $\Omega_s(y/h)$, где *y*/*h* – положение центра тела относительно нижнего торца полости, нормированное на высоту полости (рис.3,*б*). Видно, что все экспериментальные точки удовлетворительно согласуются между собой, укладываясь на единую линейную зависимость.



а

б

Рис. 3. Зависимость скорости дифференциального вращения тела от вертикальной координаты центра тела (*а*) и от безразмерной вертикальной координаты центра тела (*б*), *f* = 20 об/с

В [6] было исследовано поле скорости жидкости внутри верхнего и нижнего столбика Тейлора-Праудмена. Было показано, что чем короче столбик, тем выше угловая скорость вращения жидкости в нем. Таким образом, чем длиннее столбик, тем медленнее в нем вра-

щается жидкость и тем большее касательное напряжение создается на поверхности сферы. Можно сделать вывод, что величина и направление скорости дифференциального вращения тела определяется соотношением длин верхнего и нижнего столбиков Тейлора-Праудмена.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-71-00094.

ЛИТЕРАТУРА

1. Proudman J. On the motion of solids in a liquid possessing vorticity. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, vol. 92. No. 642. pp. 408-424, 1916.
2. Taylor G. I. The motion of a sphere in a rotating liquid. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, A, vol. 102. No. 715. pp. 180-189, 1922.
3. Stewartson K. On almost rigid rotations. Journal of Fluid Mechanics. vol. 3. No. 1. pp. 17-26, 1957.
4. Moore D. W., Saffman P. G. The rise of a body through a rotating fluid in a container of finite length. Journal of Fluid Mechanics. vol. 31. No. 4. pp. 635-642, 1968.
5. Maxworthy T. The observed motion of a sphere through a short, rotating cylinder of fluid. Journal of Fluid Mechanics. vol. 31. No. 4. pp. 643-655, (1968).
6. Kozlov V., Zvyagintseva E., Kudymova E., Romanetz V. Motion of a light free sphere and liquid in a rotating vertical cylinder of finite length. Fluids. vol. 8. No. 2. P. 49, 2023.

Информация об авторе

Власова Ольга Андреевна – доцент кафедры физики и технологии, Лаборатория вибрационной гидромеханики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет
E-mail: vlasova_oa@pspu.ru

СТРУКТУРА КОНВЕКЦИИ И ТЕПЛОПЕРЕНОС ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Вяткин А.А., Козлов В.Г., Петухов С.А.

Экспериментально исследуется конвекция жидкости в горизонтальном неравномерно вращающемся цилиндрическом слое с горячей внутренней границей. Обнаружено, что модуляция скорости вращения (либрации) существенно интенсифицирует теплоперенос. Механизм возникновения конвективных потоков обусловлен распространением инерционных волн и развитием неустойчивости Гёртлера в пограничном слое. Получена зависимость разности температуры на границах слоя от безразмерной частоты либраций. Выполнены эксперименты с визуализацией возникающих в слое течений в зависимости от безразмерной частоты осцилляций и амплитуды либраций.

Интерес к исследованию влияния либраций и вращения на неоднородные по плотности гидродинамические системы [1] обусловлен их широким распространением в природе и важностью понимания процессов, происходящих под действием переменных силовых полей в жидкостях и газах, для многих отраслей техники. Важное место в астрофизических исследованиях, как и в исследованиях вращающихся гидродинамических систем в целом, занимают инерционные волны, возникающие под действием разнообразных возмущающих факторов [2-3]. Неоднородность по плотности или периодическое внешнее воздействие на жидкость, например, либрации, способны вызывать в жидкости инерционные колебания, которые могут как усиливать процессы тепло- и массообмена, так и подавлять их. Обзор работ по теме инерционных волн в полостях различной геометрии представлен в [4-5].

Вибрационные эффекты могут проявляться и без непосредственного периодического силового воздействия на полость. Например, в работе [6] показано, что в случае равномерного вращения цилиндрического слоя неизотермической жидкости возникают инерционные колебания, распространяющиеся вдоль оси вращения. Если направление поля силы тяжести перпендикулярно оси вращения, то в системе отсчета полости оно совершает вращение, вызывая колебания неизотермической жидкости. В этом случае частота периодического воздействия совпадает с частотой вращения. Как показано в экспериментальных [4,6,7], результатом такого воздействия может быть возбуждение осредненной тепловой конвекции.

Слой образован внутренним алюминеевым теплообменником *1* и оргстеклянной трубой *2* (рис. 1). Разогрев слоя происходит изнутри с использованием электрического нагревателя, установленного на оси вращения. Охлаждение реализуется через внешнюю цилиндрическую стенку *3* (далее «рубашка»). В полости между цилиндрами *2* и *3* циркулирует охлаждающая жидкость постоянной температуры. Температура T_1 внутренней и внешний T_2 границы измеряются термометрами сопротивления. Температура охлаждающей воды контролируется на выходе из «рубашки». Подробное описание экспериментальной установки представлено в [8]. Модуляции скорости вращения задаются шаговым двигателем. Методика эксперимента заключается в следующем. Задается мощность нагрева, кювета приводится в равномерное вращение с относительно большой частотой – f_{rot} = 1.5 об/с. Ожидается установление осесимметричного равновесного распределения температуры. В работах [6,7] было показано, что при такой частоте вращения конвективный теплоперенос отсутствует вследствие стабилизирующего эффекта центробежной силы инерции. Мощность электрического нагревателя в течение эксперимента остаётся постоянной, как и температура в «рубашке». Далее, пошагово увеличивается амплитуда либраций ε на определенной частоте либраций f_{lib}. Смена шага эксперимента происходит после установления стационарного режима конвекции. На рисунке 2 представлена зависимость температуры датчиков T_1, T_2 и T_3 от времени.

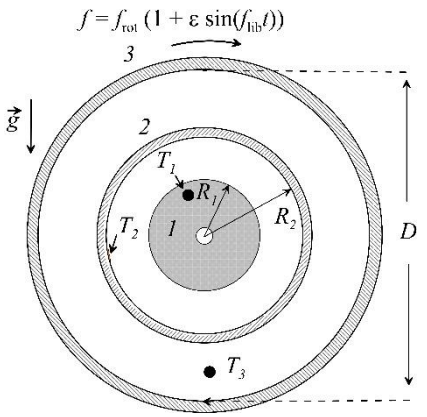


Рис. 1: Постановка задачи

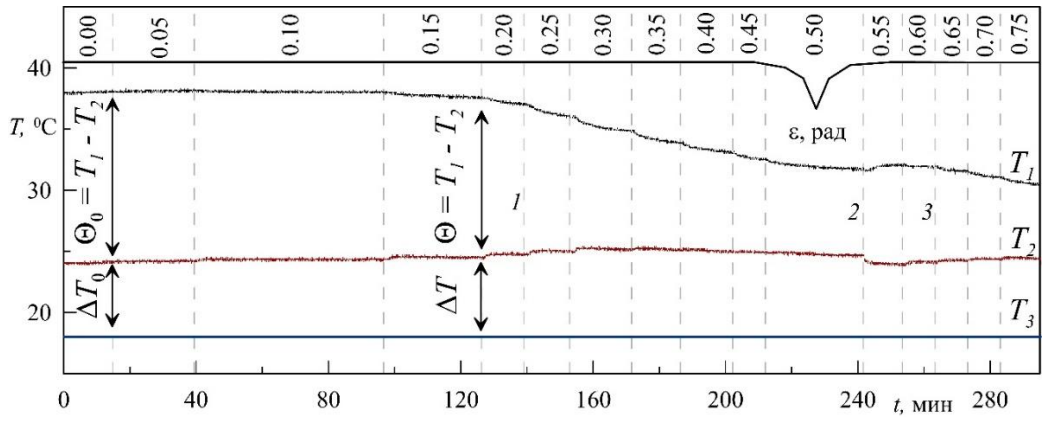


Рис. 2: Температурная запись эксперимента

В конце каждого шага эксперимента определяется среднее значение температур на внутренней T_1 и внешней T_2 границах слоя. Далее рассчитывается разность температуры $\Theta = T_1 - T_2$ на каждом шаге эксперимента. Также учитывается перепад температуры $\Delta T = T_2 - T_3$ на плексигласовом цилиндре *2* (рис. 1).

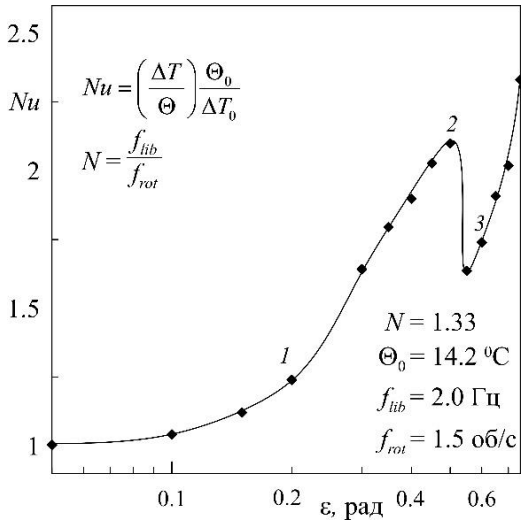


Рис. 3: Зависимость числа Нуссельта *Nu* от амплитуды либраций ε

Рассмотрим теплоперенос при либрациях. Для оценки интенсивности теплопереноса используем число Нуссельта *Nu*, характеризующее отношение конвективного теплопереноса к молекулярному. На рисунке 3 представлена зависимость числа Нуссельта от амплитуды либраций ε при фиксированных значениях частоты вращения f_{rot} и частоты либраций f_{lib}. Теплоперенос в слое возрастает монотонно с увеличением амплитуды либраций. Кривая демонстрирует несколько кризисов теплопереноса. Для визуализации конвективных структур в жидкость добавляется алюминиевая пудра и ПАВ. На рисунке 3 цифрами *1-3* указаны параметры эксперимента, при которых были получены фотографии, представленные на рисунке 4. Из фотографий видно (точка 1), что модуляции сравнительно малой амплитуды ε генерируют масштабные трехмерные структуры, периодически расположенные вдоль оси вращения (рис. 4*а*). Эти течения обусловлены распространением инерционных волн [7]. Обнаруженные в работе масштабные трехмерные течения аналогичны действию инерционных колебаний в изотермической жидкости в горизонтальном вращающемся цилиндре при модуляции угловой скорости вращения [9].

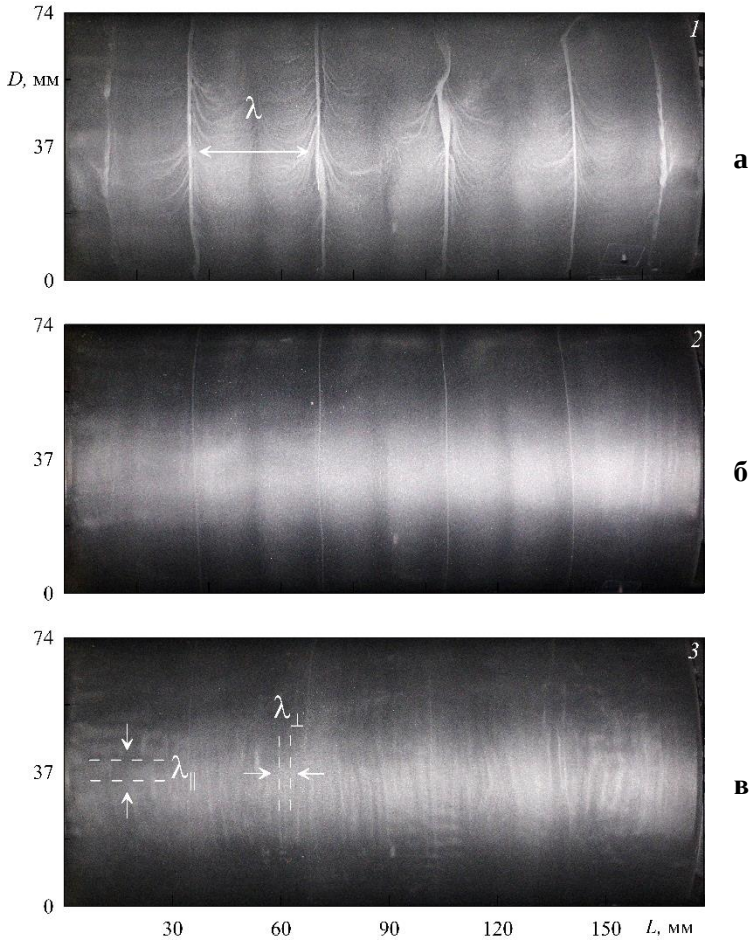


Рис. 4: Фотографии, f_{lib} = 2.00 Гц, а - ε = 0.2 рад, Θ = 12.41 ^{0}C, б - ε = 0.5 рад, Θ = 7.23 ^{0}C, в - ε = 0.6 рад, Θ = 7.98 ^{0}C

С повышением амплитуды либраций интенсивность структур инерционно-волновой природы возрастает (рис. 4, б). Пудра смывается с внешней стенки и захватывается конвективными течениями в слое. Дальнейшее повышение амплитуды ε приводит к пороговой смене режима конвекции. Снижение теплопереноса в слое связано с разрушением масштабных трехмерных структур. В слое формируется система мелкомасштабных трехмерных структур. Можно предположить, что конвективные течения представляют собой вихри Тейлора-Гёртлера [10]. Наряду с мелкомасштабными трехмерными структурами в слое регистрируются продольные двумерные течения, природа которых пока не известна и требует дальнейшего изучения.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 25-11-00358).

ЛИТЕРАТУРА

1. Greenspan H.P. The theory of rotating fluids. Cambridge: University Press, 1968. 328 p.
2. Busse F.H. Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. J. Fluid Mech, vol. 33. 1968. P. 739–751.
3. Vanyo J. et al. Experiments on precessing flows in the Earth's liquid core. Geophysical Journal International, vol. 121, № 1, 1995. P. 136-142.
4. Вяткин А. А., Сабиров Р. Р. Влияние инерционных волн на осредненную тепловую конвекцию во вращающемся цилиндре. Конвективные течения, №. 7, 2015. С. 24-36.

5. Maas L.R.M. On the amphidromic structure of inertial waves in a rectangular parallelepiped. Fluid Dynamics Research, vol. 33, 2003. P. 373–401.
6. Vjatkin A., Petukhov S., Kozlov V. Inertial Modes in a Rotating Horizontal Annulus with Boundaries of Different Temperatures and Their Effect on the Averaged Convection. Fluid Dynamics & Materials Processing, vol. 21, № 4, 2025. P. 783-798.
7. Vjatkin A., Petukhov S., Kozlov V. Experimental Study of Thermal Convection and Heat Transfer in Rotating Horizontal Annulus. Fluid Dynamics & Materials Processing, vol. 20, № 11, 2024. P. 2475-2488.
8. Kozlov V. G. et al. Methods of experimental study of thermal convection in cavity subject to rotation and vibration. MethodsX, vol. 6, 2019. P. 2420-2428.
9. Субботин С. В., Кропачева А. А. Осреднённые течения, возбуждаемые инерционными модами в либрирующем цилиндре. Вестник Пермского университета, Серия: Физика, №. 4 (42), 2018. С. 67-73.
10. Kozlov V., Polezhaev D. Flow patterns in a rotating horizontal cylinder partially filled with liquid //Physical Review E. 2015. Т. 92. №. 1. С. 013016.

Сведения об авторах

Вяткин А.А. – старший научный сотрудник лаборатории вибрационной гидромеханики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, физический факультет, +7 (342) 215-19-47 (доб. 489)
E-mail: vjatkin_aa@pspu.ru

Козлов В.Г. – д.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, зав. лаб. Вибрационной гидромеханики, +7 (342) 215 19 47
E-mail kozlov@pspu.ru

Петухов С.А. – лаборант-исследователь лаборатории вибрационной гидромеханики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, физический факультет, +7 (342) 215-19-47 (доб. 489)
E-mail svyatoslav_petuxov@bk.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ВИНТОВЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ ОСЕВОГО, РАДИАЛЬНОГО И АЗИМУТАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЙ

Гайбарян С.А., Зубов Л.М.

Рассмотрена задача о больших деформациях полого кругового цилиндра, нагруженного внешней растягивающей силой и равномерным давлением, распределенным по внутренней боковой поверхности. Изучено влияние непрерывно распределенных винтовых дислокаций осевого, радиального и азимутального направлений на напряженно-деформированное состояние трубы из несжимаемого материала Бидермана. Решение задачи построено в рамках континуальной теории непрерывно распределенных дислокаций. Исходная трехмерная задача сведена к нелинейной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Граничные условия на торцах трубы удовлетворяются в интегральном смысле Сен-Венана. Построены и исследованы диаграммы нагружения трубы при отсутствии дислокаций и при различных параметрах их распределения. Рассмотрено условие выпуклости погонной энергии трубы с дислокациями в случае двухпараметрического нагружения (продольная сила и внутреннее давление).

1. Введение. Элементы конструкций в виде цилиндрических труб широко распространены в технике и природе. Первые задачи о больших деформациях полых круговых цилиндров были решены в [1, 2]. В данной работе исследуется влияние распределенных дислокаций на нелинейные деформации упругого цилиндра. Дефекты микроструктуры твердых тел играют существенную роль в механическом поведении нанотрубок, наностержней, нитевидных кристаллов, а также в таких явлениях, как пластическое течение и разрушение металлов [3, 4].

Рассмотрим упругое тело в форме полого кругового цилиндра конечной длины. Введем в недеформированном состоянии цилиндрические координаты $r_1 \le r \le r_0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le L$ и обозначим через $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{i}_3$ орты, касательные к координатным линиям. Предположим, что в трубе задано непрерывное распределение винтовых дислокаций осевого, радиального и азимутального направлений. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии трубы строится на основе континуальной теории непрерывно распределенных дислокаций, которая основана на предельном переходе от дискретного набора дислокаций к их непрерывному распределению. Распределение дислокаций в этой модели характеризуется тензорным полем плотности дислокаций, заданным в виде

$$\boldsymbol{\alpha} = \beta_0 r^{-1}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 + \alpha_0 r^{-2}\left(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right), \qquad (1.1)$$

где α_0, β_0 – параметры дислокаций.

Пусть на внутренней боковой поверхности трубы действует гидростатическое давление, на торцах – продольная сила, кручение трубы предотвращено. Упругий материал будем считать изотропным и несжимаемым.

2. Определяющие соотношения. Система уравнений континуальной теории дислокаций [5] состоит из уравнений равновесия для напряжений

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \qquad (2.1)$$

уравнений несовместности относительно тензора дисторсии

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \boldsymbol{\alpha} \qquad (2.2)$$

и определяющих соотношений упругого материала

$$\mathbf{D}(\mathbf{F}) = \frac{dW(\mathbf{G})}{d\mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-\mathrm{T}},\ \mathbf{G} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{D}$ – тензор напряжения Пиолы, W – удельная потенциальная энергия деформации, $\mathbf{G}$ – мера деформации Коши.

Тензор дисторсии находим в виде

$$\mathbf{F} = \frac{dR}{dr}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\mathbf{r} + \frac{R}{r}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + F_{23}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{i}_3 + F_{32}\mathbf{i}_3\mathbf{e}_\varphi + \lambda\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3, \qquad (2.4)$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1\cos\varphi + \mathbf{i}_2\sin\varphi,\ \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}_1\sin\varphi + \mathbf{i}_2\cos\varphi,$$

где R, F_{23}, F_{32} – функции, зависящие от радиальной координаты r. Подстановка (2.4) в уравнение несовместности (2.2) с учетом выражения (1.1) для $\boldsymbol{\alpha}$ приводит к соотношениям

$$F_{23}=\beta_0,\ F_{32}=-\frac{\alpha_0}{r}. \tag{2.5}$$

3. Сведение задачи о равновесии трубы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Определяющие соотношения (2.3) для изотропного несжимаемого материала [6] имеют вид:

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}^*-p\mathbf{F}^{-\mathrm{T}},\ \mathbf{D}^*=\left[\tau_1\left(I_1,I_2\right)+I_1\tau_2\left(I_1,I_2\right)\right]\mathbf{F}-\tau_2\left(I_1,I_2\right)\mathbf{G}\cdot\mathbf{F} \tag{3.1}$$

$$I_1=\operatorname{tr}\mathbf{G},\ I_2=\operatorname{tr}\mathbf{G}^{-1},$$

$$\tau_1=2\frac{\partial W\left(I_1,I_2\right)}{\partial I_1},\ \tau_2=2\frac{\partial W\left(I_1,I_2\right)}{\partial I_2}$$

где τ_1, τ_2 – скалярные функции отклика материала, I_1, I_2 – инварианты деформации (третий инвариант равен единице в силу условия несжимаемости). С учетом представления (2.4) и соотношений (2.5) найдем тензоры и инварианты деформации, участвующие в определяющих соотношениях:

$$\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}=\left(\frac{dR}{dr}\right)^{-1}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+\lambda\frac{dR}{dr}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\frac{\alpha_0}{r}\frac{dR}{dr}\mathbf{e}_\varphi\mathbf{i}_3-\beta_0\frac{dR}{dr}\mathbf{i}_3\mathbf{e}_\varphi+\frac{R}{r}\frac{dR}{dr}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \tag{3.2}$$

Мера деформации Коши примет вид:

$$\mathbf{G}=\left(\frac{dR}{dr}\right)^2\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+\left(\frac{R^2}{r^2}+{\beta_0}^2\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+\left(\lambda\beta_0-\frac{\alpha_0R}{r^2}\right)\left(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\mathbf{e}_\varphi\right)+\left(\frac{\alpha_0^2}{r^2}+\lambda^2\right)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \tag{3.3}$$

Из представления (3.3) найдем инварианты деформации:

$$I_1=\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\frac{R^2}{r^2}+\beta_0^2+\frac{\alpha_0^2}{r^2}+\lambda^2,\ I_2=\left(\frac{dR}{dr}\right)^{-2}+\left(\lambda^2+\frac{\alpha_0^2}{r^2}+\beta_0^2+\frac{R^2}{r^2}\right)\left(\frac{dR}{dr}\right)^2. \tag{3.4}$$

Из (3.1), (2.4), (2.5), (3.3) и (3.4) следует представление тензора $\mathbf{D}^*$:

$$\mathbf{D}^*=D_{rr}^*\left(r\right)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r+D_{\varphi\varphi}^*\left(r\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+D_{\varphi z}^*\left(r\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{i}_3+D_{z\varphi}^*\left(r\right)\mathbf{i}_3\mathbf{e}_\varphi+D_{zz}^*\left(r\right)\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \tag{3.5}$$

$$D_{rr}^*\left(r\right)=\tau_1\frac{dR}{dr}+\tau_2\left(\frac{R^2}{r^2}+\beta_0^2+\frac{\alpha_0^2}{r^2}+\lambda^2\right)\frac{dR}{dr},$$

$$D_{\varphi\varphi}^*\left(r\right)=\tau_1\frac{R}{r}+\tau_2\left(\frac{R}{r}\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\lambda^2\right]+\lambda\frac{\alpha_0\beta_0}{r}\right),$$

$$D_{\varphi z}^*\left(r\right)=\tau_1\beta_0+\tau_2\left(\beta_0\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\frac{\alpha_0^2}{r^2}\right]+\lambda\frac{\alpha_0R}{r^2}\right),$$

$$D_{z\varphi}^*\left(r\right)=\tau_1\frac{\alpha_0}{r}-\tau_2\left(\frac{\alpha_0}{r}\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\beta_0^2\right]+\lambda\beta_0\frac{R}{r}\right),$$

$$D_{zz}^*\left(r\right)=\tau_1\lambda+\tau_2\left(\lambda\left[\left(\frac{dR}{dr}\right)^2+\frac{R^2}{r^2}\right]+\alpha_0\beta_0\frac{R}{r}\right).$$

Подстановка (2.4) в условие несжимаемости $\det\mathbf{F}=1$ с учетом (2.5) приводит к дифференциальному уравнению относительно $R=R\left(r\right)$:

$$\frac{dR}{dr}=\frac{r}{\lambda R+\alpha_0\beta_0} \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.6) получим в виде $R = \pm\sqrt{\left(R_1 + \frac{\alpha_0\beta_0}{\lambda}\right)^2 + \frac{r^2 - r_1^2}{\lambda}} - \frac{\alpha_0\beta_0}{\lambda}$.

Для дальнейших расчетов возьмем

$$R = \sqrt{\left(R_1 + \frac{\alpha_0\beta_0}{\lambda}\right)^2 + \frac{r^2 - r_1^2}{\lambda}} - \frac{\alpha_0\beta_0}{\lambda} \tag{3.7}$$

и значения параметров α_0, β_0 одного знака. В (3.7) R_1 – неизвестный внутренний радиус трубы после деформации, определяемый из условия на внутренней боковой поверхности трубы $D_{rr}(r_1) = 0$.

С помощью (3.5), (3.2) находим

$$\operatorname{div}\mathbf{D}^* = \left(\frac{dD_{rr}^*}{dr} + \frac{D_{rr}^* - D_{\varphi\varphi}^*}{r}\right)\mathbf{e}_r, \operatorname{div}\left(p\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right) = \left(\frac{dR}{dr}\right)^{-1}\frac{\partial p}{\partial r}\mathbf{e}_r. \tag{3.8}$$

Векторное уравнение равновесия (2.1) сводится к одному скалярному относительно функции внутреннего давления $p = p(r)$:

$$\frac{dp}{dr} = U(r)\frac{dR}{dr}, \tag{3.9}$$

$$U(r) = \frac{dD_{rr}^*}{dr} + \frac{D_{rr}^* - D_{\varphi\varphi}^*}{r}.$$

Решение уравнения (3.9):

$$p(r) = p(r_0) - \int_r^{r_0} U(\rho)\frac{dR}{dr}(\rho)\,d\rho \tag{3.10}$$

Постоянная $p(r_0)$ находится из условия незагруженности внешней боковой поверхности $D_{rr}(r_0) = 0$ и имеет вид

$$p(r_0) = D_{rr}^*(r_0) / F_{rr}^{-\mathrm{T}}(r_0) \tag{3.11}$$

4. Осевое растяжение и раздувание трубы. Из представлений (3.1), (3.5) вытекает, что в каждом поперечном сечении трубы напряжения приводятся к результирующей продольной силе

$$Q = 2\pi\int_{r_1}^{r_0} D_{zz}(r)\,r\,dr \tag{4.1}$$

Раздувающее давление q_1 определяется из граничного условия на внутренней поверхности трубы

$$F_{rr}^{\mathrm{T}}(r_1)D_{rr}^*(r_1) - p(r_1) = -q_1 \tag{4.2}$$

Подставив (2.4) и (3.10) в граничное условие (4.2), получим соотношение для q_1:

$$q_1(R_1) = -\frac{dR}{dr}(r_1)D_{rr}^*(r_1) + \left(p(r_0) - \int_{r_1}^{r_0} U(\rho)\frac{dR}{dr}(\rho)\,d\rho\right) \tag{4.3}$$

Введем в рассмотрение несжимаемый материал Бидермана [7-9], удельная потенциальная энергия деформации которой задается соотношением

$$W = d_0(I_2 - 3) + d_1(I_1 - 3) + d_2(I_1 - 3)^2 + d_3(I_1 - 3)^3 \tag{4.4}$$

где d_0, d_1, d_2, d_3 – материальные постоянные, удовлетворяющие следующим условиям: $d_0 \geq 0$, $d_1 \geq 0$, $d_3 \geq 0$, $d_1 + d_3 \geq 0, 3d_2 + \sqrt{15 d_1 d_3} \geq 0$. Значения $d_0 = 0$, $d_1 = 27$, $d_2 = -60$, $d_3 = 80$ выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие сильной эллиптичности.

Все приведенные на графиках результаты получены для трубы с внешним радиусом до деформации $r_0 = 1$ и толщиной стенки 0,1.

Диаграммы растяжения и раздувания трубы при фиксированных значениях параметров дислокаций для модели Бидермана с рассматриваемым набором материальных констант приведены на рис. 1 и рис. 2, соответственно. Зависимость продольной силы от кратности осевого удлинения получена для найденных значений внутреннего радиуса трубы после деформации при условии отсутствия раздувающего давления. Диаграмма раздувающего давления трубы построена при предотвращении продольного деформирования.

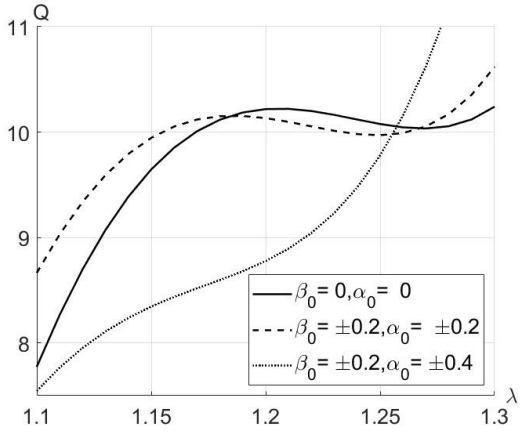


Рис. 1. Диаграмма растяжения трубы при отсутствии раздувающего давления

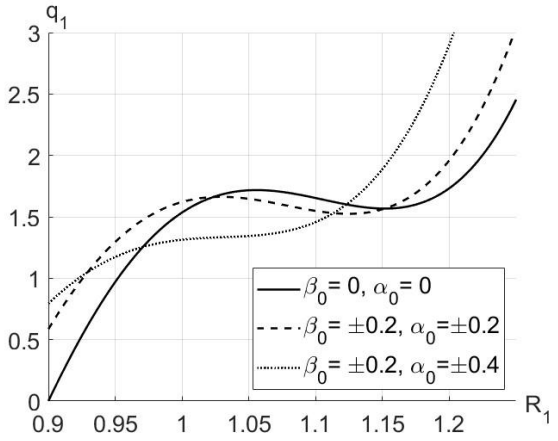


Рис. 2. Диаграмма раздувания трубы при предотвращении продольного деформирования

Кривые на диаграммах нагружения трубы без дислокаций и с параметрами $\beta_0 = \pm 0.2$, $\alpha_0 = \pm 0.2$ имеют два восходящих и один ниспадающий участки. В описанных случаях труба устойчива к деформациям на первых восходящих участках кривых и теряет устойчивость в соответствующих точках максимума. Следуя [10], будем анализировать только первый восходящий участок при отображении результатов на плоскость (λ, q_1). Для трубы с заданными параметрами дислокаций $\beta_0 = \pm 0.2$, $\alpha_0 = \pm 0.4$ кривые нагружения являются монотонно возрастающими функциями, и потеря устойчивости не происходит.

5. Область выпуклости погонной энергии. Рассмотрим условие выпуклости погонной потенциальной энергии, задаваемой соотношением

$$\Pi_0(\lambda, \omega) = 2\pi \int_{r_1}^{r_0} r W\left(I_1(r), I_2(r)\right) dr \tag{5.1}$$

при осевом растяжении и внутреннем давлении как функции осевого удлинения и параметра $\omega = R_1^2$ [10]:

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \omega^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \lambda \partial \omega} \right)^2 > 0 \tag{5.2}$$

В работе [10] было установлено, что область устойчивости трубы без дислокаций при растягивающих нагрузках мало отличается от области выпуклости погонной энергии как функции двух параметров нагружения (продольной силы и внутреннего давления). В связи с этим представляет интерес рассмотреть область выпуклости погонной энергии при существовании в теле распределенных дислокаций.

Численно найдены параметры λ, ω из условия (5.2) и построены кривые зависимости $q_1(\lambda)$, которые соответствуют границе области выпуклости погонной энергии (рис. 3). Область, в которой нарушается условие выпуклости, ограничена кривой (сплошная линия для трубы без дислокаций и пунктирная – для трубы с заданным распределением дислокаций при значении параметров $\alpha_0, \beta_0 = 0.2$).

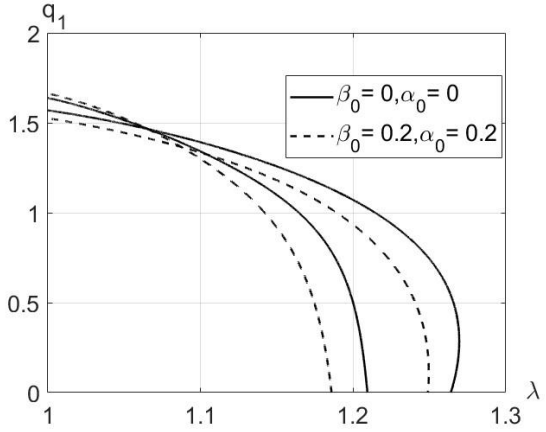


Рис. 3. Область выпуклости погонной энергии трубы

ЛИТЕРАТУРА

1. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 242, 1949. pp. 173-195.
2. Green A.E., Adkins J.E. Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics. Clarendon Press, Oxford, 1960.
3. Clayton J.D. Nonlinear Mechanics of Crystals. Springer, Dordrecht, 2011.
4. Gutkin M.Y., Ovid'ko I.A. Plastic Deformation in Nanocrystalline Materials. Springer, Berlin, 2004.
5. Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Springer, 1997.
6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. Oden J.T. Finite Elements of Nonlinear Continua. McGraw-Hill, New York, 1972.
8. Бидерман В.Л. Вопросы расчета резиновых деталей. Сб. Расчеты на прочность, Москва, Машгиз, 1958, вып. 3. С. 40–87.
9. Зубов Л.М., Рудев А.Н. О признаках выполнимости условия Адамара для высокоэластичных материалов. Изв. АН. МТТ. 1994. № 6. С. 21–31.
10. Зубов Л.М., Шейдаков Д.Н. Об устойчивости цилиндрической трубы при осевом растяжении и внутреннем давлении. Вестник Южного научного центра РАН, 2006. Т. 2. № 3. С.8–15.

Сведения об авторах:

Гайбарян Сусанна Арутюновна – аспирант, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
E-mail: sgaybaryan@yandex.ru

Зубов Леонид Михайлович – профессор, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
E-mail: zubovl@yandex.ru

ТЕХНОЛОГИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХСЛОЙНОГО МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ГИРАТОРА НА ОСНОВЕ АМОРФНОГО СПЛАВА И ПЬЕЗОКЕРАМИКИ

Галичян Т.А., Филиппов Д.А., Сапельников С.О.

В работе рассмотрены особенности технологии изготовления многослойного магнитоэлектрического гиратора на основе аморфного сплава АМАГ 212N и цирконата титаната свинца ЦТС-19. Рассмотрены особенности технологии изготовления методом склеивания, особенности его конструкции. Исследованы частотные и нагрузочные характеристики гираторов, изготовленных из различных слоев аморфного сплава. Показано, что с увеличением числа слоев аморфного сплава улучшаются магнитоэлектрические характеристики гиратора, однако при этом усложняется технология его изготовления. Определено оптимальное число слоев аморфного сплава с учетом технологии изготовления и характеристик гиратора.

1. Введение

В среде высоких технологий идут тенденции на миниатюризацию, мобильные телефоны, ноутбуки становятся тоньше, а различные приборы становятся «умными», например очки, часы и другие. Ярким свидетельством этого является плавный переход к беспроводной передаче данных и зарядке. В последние пару лет в «умные устройства» добавляется функционал искусственного интеллекта, что значительно повышает их области применения. Аппаратная часть устройств также претерпевает изменения, для создания легкой и тонкой техники требуются очень компактные элементы в изделии. На этом фоне выросла потребность в миниатюризации устройств. Очень перспективным в этом плане является создание гираторов на основе магнитоэлектрического эффекта, что позволяет существенно упростить технологию его изготовления и уменьшить его геометрические размеры.

Само определение гиратора ввел в 1948 году датский ученый Бернард Теллеген в своей работе «The gyrator a new network element», в которой ученый описывал гиратор как новый элемент электрической схемы [1]. Идеальный гиратор выполняет функцию преобразования ток/напряжение и наоборот, или что то же самое, преобразование индуктивного сопротивления в емкостное. Он оказался весьма полезным при проектировании дуплексных фильтров, мощных беспроводных передатчиков и т.д. [2–4]. Ранее гираторы реализовывались посредством схемотехнических решений с использованием операционных усилителей. С открытием магнитоэлектрического (МЭ) эффекта появилась возможность упростить реализацию гиратора. Классический МЭ гиратор состоит из катушки индуктивности, сердечником которой является МЭ материал. В качестве такого материала целесообразно использовать слоистые магнитострикционно-пьезоэлектрические структуры, в которых величина эффекта МЭ преобразования на несколько порядков больше, чем в монокристаллах. Схематически структура МЭ гиратора представлена на рисунке 1.

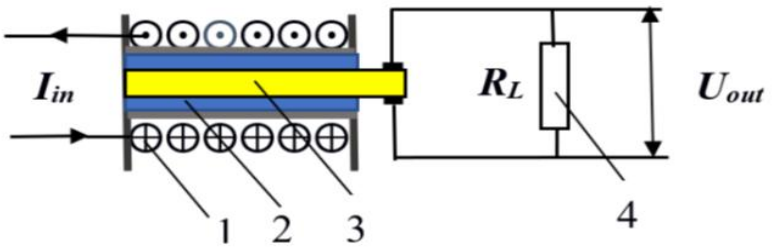


Рис. 1. Схематичное изображение гиратора. 1 – катушка индуктивности, 2 – слой магнетика (Метглас), 3 – слой пьезоэлектрика (ЦТС), 4 – нагрузочное сопротивление

Преобразование ток-напряжение (I/V–преобразование) происходит следующим образом: переменный ток I_{in}, протекающий через катушку индуктивности, создает переменное магнитное поле *H*. Вследствие явления магнитострикции в магнитной компоненте МЭ образца возникают деформации, которые передаются через границу раздела в пьезоэлектрическую фазу, что приводит к возникновению электрического напряжения V_{out}. Коэффициент I/V-

преобразования K_{IV} определяется как отношение выходного напряжения V_{out} к величине входного тока I_{in}, т. е. $K_{IV} = V_{out}/I_{in}$. Он зависит как от частоты переменного входного сигнала, так и от параметров МЭ образца, а также от параметров катушки индуктивности и сопротивления нагрузки. Для его описания используют частотные и нагрузочные характеристики. В данной работе рассмотрена зависимость данных характеристик от толщины магнитострикционных слоев.

2 Материалы и методы

В статье рассмотрены особенности технологии изготовления МЭ гиратора на основе симметричной магнитострикционно-пьезоэлектрической структуры. Магнитострикционный слой был изготовлен из аморфного сплава АМАГ 212N (ПАО «Мстатор», г. Боровичи, Новгородская обл., Россия). Пьезоэлектрический слой был изготовлен из пьезокерамики на основе цирконата-титаната свинца ЦТС-19 («Пьезоприбор», Ростов-на-Дону, Россия). Выбор аморфного сплава в качестве магнитострикционной компоненты был обусловлен тем, что он обладает большой магнитострикцией при малых полях подмагничивания всего порядка 10-20 Ое. Материал АМАГ 212N представлен в виде ленты шириной 20 mm, толщиной 20 μm. Пьезокерамический материал имеет вид прямоугольной пластины с размерами 20x5x0.3 mm, покрытой слоем серебра толщиной 1-3 μm. На рис. 2 и рис. 3 представлены фотографии поверхности образцов при большом увеличении.

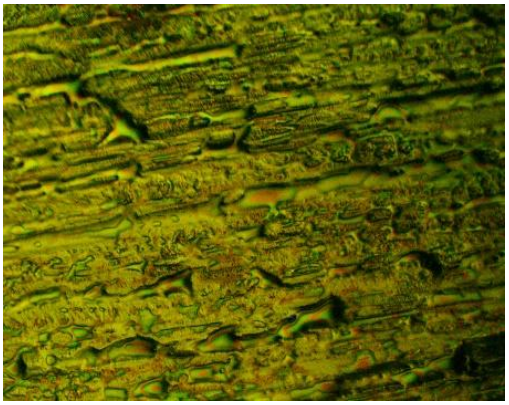


Рис. 2. Фото поверхности АМАГ (увеличение 50x)

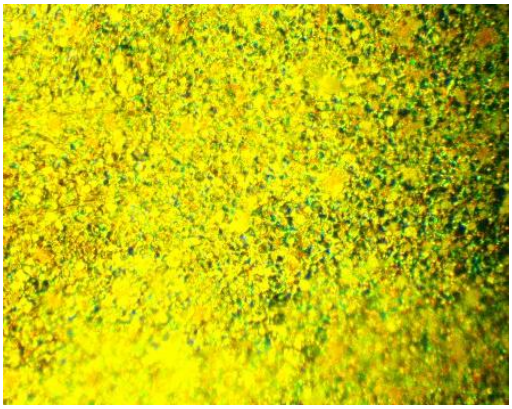
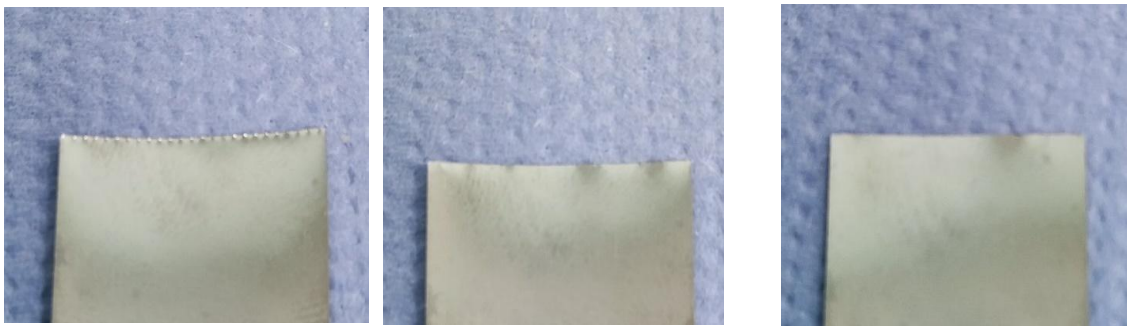


Рис. 3. Фото поверхности ЦТС-19 (увеличение 50x)

Как видно из рис. 2 и рис.3 материалы имеют очень низкую шероховатость, а также разную природу материала, оставляя ограниченный ассортимент способов для соединения В качестве метода создания магнитострикционно-пьезоэлектрической структуры была использована клеевая технология, при которой слои соединялись между собой с помощью клея. Для создания слоя АМАГ было необходимо подготовить пластинки прямоугольной формы размерами 20x5 mm. Их изготавливали методом резания. На рис. 4 представлены фотографии кромки ленты, изготовленной разным режущим инструментом.

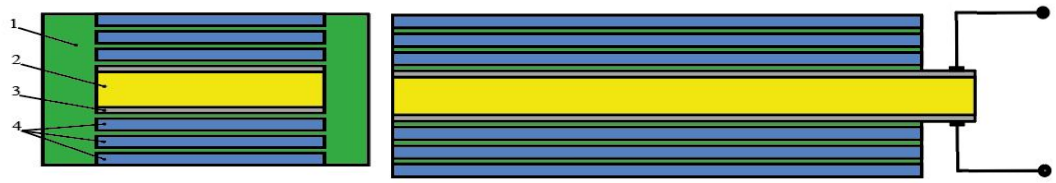


a) *b*) *c*)

Рис. 4. Кромка реза ленты АМАГ ножницами с различной заточкой лезвий

На них хорошо видны замятия, оставленные инструментом по металлу с различным типом заточки лезвий и шлифовки режущей поверхности. На рис. 4 a) фото кромки от ножниц Stanley 2-14-563 (Китай) с зубчатой заточкой и шлифованной внутренней частью, рис. 4 b) фото кромки от ножниц Deli4 (Китай) с прямым лезвием и грубой шлифовкой внутренней части лезвия, рис. 4 c) фото кромки от ножниц Kraftool Alligator (Китай) с прямым лезвием и полированной внутренней частью. Как видно из рисунков, наилучший результат получается при использовании в качестве режущего инструмента ножниц Kraftool Alligator (Китай) с прямым лезвием и полированной внутренней частью

Следующим этапом стал выбор клея для соединения пластинок ЦТС-19 и АМАГ. Клеевые составы должны быть после полимеризации твердыми для передачи вибраций между слоями структуры гиратора, выбор пал следующие виды клеев: цианакрилатные клеи (Loctite 415, Китай, Loctite 435, Ирландия, Loctite 496, Китай и МТЕ, Россия), эпоксидную смолу (Суперпласт ЭП-СМ-ПРО, Россия) и клей БФ-2, Россия. Проверка на адгезию между слоями проводилась способом отрывом клейкой ленты от проверяемой поверхности. Выбранные составы показали одинаково плохую адгезию из-за особенностей склеиваемых поверхностей – низкая шероховатость, отсутствие пор. Поэтому в качестве варианта создания структуры было предложен вариант создания клеевого каркаса для структуры гиратора. На рис. 5 схематично изображено поперечное сечение трехслойной структуры. Такая конструкция позволяет достичь минимальной клеевой прослойки между слоями 1-3 μm и сохранить физическую целостность структуры гиратора.



a) b)

Рис. 5. Поперечное сечение трехслойной структуры.a) вид спереди,
b) вид слева. 1 – клеевой каркас, 2 – слой ЦТС–19, 3 – слой серебра, 4 – слой АМАГ 212N

Для экспериментальной части был изготовлен гиратор, который состоял из катушки индуктивности с сердечником. Сердечник имеет вид трехслойной магнитострикционно-пьезоэлектрической структуры (Рис. 5), к которой с обеих сторон были приклеены пластинки АМАГ 212N. Выбор симметричной структуры объясняется тем, что при помещении асимметричной магнитострикционной-пьезоэлектрической структуры в магнитное поле могут возникать продольные и изгибные колебания, которые ослабляют друг друга [5]. В симметричной структуре возникают только продольные колебания, что приводит к более эффективному МЭ взаимодействию. Катушка гиратора была намотана на каркас размером 20x10x5 mm, внутри каркаса было сквозное прямоугольное отверстие размером 6x1.5 mm для помещения в него образца. Катушка изготовлена из медной проволоки диаметром d = 0.15 mm и содержала 150 витков. Сердечник состоял из пластинки пьезокерамики ЦТС–19 с электродами, полученными вжиганием серебряной пасты и двух пластинок из аморфного нанокристаллического сплава марки АМАГ 212N. Магнитострикционные слои были изготовлены путем склеивания фольги аморфного сплава толщиной 20 μm и для первого образца содержали три слоя фольги, а для второго пять слоев фольги каждая. Таким образом, полная толщина магнитострикционного слоя для первого образца составляла $t_1^m = 120\mu m$, а для второго образца $t_2^m = 200\mu m$.

Вся система помещалась в соленоид диаметром D = 40 mm и длиной L = 100 mm и содержащий N = 500 витков из медной проволоки диаметром 0.3 mm. Подмагничивающее поле создавалось путем подачи на соленоид постоянного напряжения от источника питания UT 3010E. Переменное магнитное поле создавалось путем подачи напряжения на катушку гиратора от генератора сигналов АКИП-3410/4. Для создания сопротивления нагрузки использовался магазин сопротивлений Р-33, а напряжение на сопротивлении нагрузки измерялось с помощью вольтметра АКИП – 2101 и одновременно контролировалось с помощью осциллографа АКИП – 4115/6А. При проведении частотных и нагрузочных характеристик переменный ток через

катушку гиратора был в диапазоне 10–15 mA, что соответствовало значению напряженности переменного магнитного поля порядка 1Oe. Нерезонансное значение напряжения на нагрузочном сопротивлении составляло при этом несколько десятков мВ. Модуль коэффициента *I/V*-преобразования рассчитывался как отношение напряжения на нагрузочном сопротивлении к входному току на катушке гиратора.

3. Результаты и обсуждения.

На рис. 6 представлены результаты измерения частотной зависимости коэффициента I/V-преобразования для гиратора, сердечником которого являлась гетерогенная структура AMAG212/PZT-19/ AMAG212 с толщиной слоя ЦТС $t_p = 300\mu m$ и толщиной слоя AMAG212/ $t_1^m = 120\mu m$ для первого образца и для $t_2^m = 200\mu m$ для второго образца.

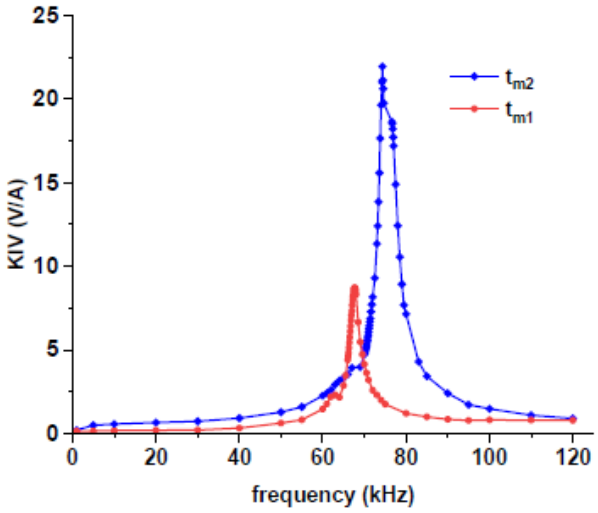


Рис. 6. Частотные зависимости коэффициента

Как видно из рис. 6, с увеличением толщины магнитострикционного слоя от 120 до 200 μm происходит увеличение низкочастотного значения коэффициента I/V-преобразования от 0.2 до 0.6 V/A на частоте 20 kHz, и изменению его резонансного значения от 8,7 до 22 V/A при одновременном увеличении резонансной частоты от 67,7 до 74,3 kHz. Изменение резонансной частоты обусловлено тем, что происходит изменение средних значений плотности структуры и среднего значения модуля Юнга.

В работе [5] показано, что низкочастотное значение модуля коэффициента I/V-преобразования определяется следующим выражением

$$\left|K_{IV}\right| = \frac{Y^p d_{31}^p q_{11}^m}{s_{33}} \times \frac{Y^m t^m}{\overline{Y}t} t^p n \times \frac{\left(R_L / X_C\right)}{\sqrt{1+\left(\left(R_L / X_C\right)\right)^2}} \qquad (1)$$

где d_{31}^p, q_{11}^m – пьезоэлектрический и пьезомагнитный коэффициенты, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^p \varepsilon_0$, ε_{33}^p - относительная диэлектрическая проницаемость пьезоэлектрика, $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$ - диэлектрическая постоянная, $X_C = 1/\omega C$ – емкостное сопротивление, $C = \frac{\varepsilon_{33} WL}{t^p}$ – емкость пьезоэлектрической пластины, W – ширина пластины, $\omega = 2\pi f$ -циклическая частота, n – число витков на единицу длины катушки индуктивности. Как следует из уравнения (1), величина коэффициента I/V-преобразования увеличивается с увеличением толщины магнитострикционного слоя, что подтверждается экспериментальными данными. На рис. 7 приведена нагрузочная характеристика гиратора на основе структуры AMAG212/PZT-19/AMAG212 с толщиной слоя AMAG212a 60 μm с каждой стороны.

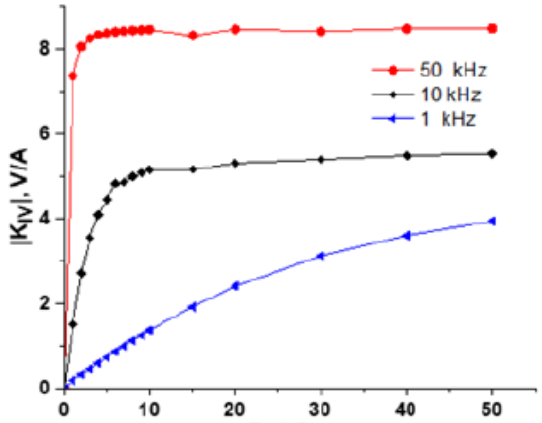


Рис. 7. Нагрузочная характеристика гиратора на основе структуры AMAG212/PZT-19/AMAG212 на разных частотах.

Как видно из рис. 7, наблюдается хорошее согласие теории с экспериментом. При небольших сопротивлениях нагрузки величина K_{IV} линейно увеличивается с увеличением нагрузочного сопротивления, затем зависимость становится нелинейной и при больших сопротивлениях нагрузки, когда отношение $\frac{R_L}{X_C} \gg 1$ достигает насыщения.

Заключение

Использование клеевого каркаса для соединения структуры гиратора позволяет изготовить прочную слоистую конструкцию из разных составляющих со слабой межслойной адгезией и получить высокие частотные и нагрузочные характеристики.

Коэффициент I/V-преобразования K_{IV} гиратора зависит как от частоты переменного входного сигнала, так и от параметров магнитострикционно-пьезоэлектрической гетероструктуры и сопротивления нагрузки. На частоте, соответствующей частоты электромеханического резонанса происходит пиковое увеличение коэффициента I/V преобразования гиратора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tellegen B.D.H. // Philips Research Reports. 1948. Vol.3. P.81-101
2. S. Bosco, F. Haupt, D.P. DiVincenzo. Phys. Rev. Appl., 7, 2, (2017), DOI: 10.1103/ PhysRevApplied.7.024030
3. S. Singer. IEEE Trans. Ind. Electron., 34 (3), 313 – 318, (1984), DOI: 10.1109/TIE.1987.350962
4. A. Cervera, M. Evzelman, M.M. Peretz, S. Ben-Yaakov. A High-Efficiency Resonant Switched Capacitor Converter with Continuous Conversion Ratio// IEEE Trans. Power. Electron., 30 (3), 1373–1382, (2015), DOI:10.1109/TPEL.2014.2317758
5. Filippov D., Liu Y., Zhou P., Ge B., Liu J., Zhang J., Zhang T., Srinivasan G. //J. Compos. Sci. 2021. №5 (11). 287, DOI: 10.3390/jcs5110287
6. Filippov D.A., Galkina T.A., Manicheva I.N., Zhang Jitao A magnetoelectric gyrator based on three-layer symmetric structures: theory and experiment // Technical Physics 2023, 68 issue 9 pp. 1253-1258

Сведения об авторах

Галичян Тигран Александрович – кандидат физико-математических наук, зав. отделом, Институт Механики, НАН Армении, тел. (+374)77776291, E-mail Galichyantigran@gmail.com

Филиппов Дмитрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (г. Великий Новгород, Россия), тел. (+7)9116043119, E-mail: Dmitry.Filippov@novsu.ru

Сапельников Станислав Олегович – аспирант, мл. научный сотрудник, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (г. Великий Новгород, Россия), тел. (+7) 9517218899, E-mail: Stanislav.Sapelnikov@novsu.ru

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕНОК БРЮШНОЙ АОРТЫ В НОРМАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ И ПРИ АНЕВРИЗМЕ С ДЕФЕКТАМИ

Гандилян Д. В., Лисовенко Д. С.

Исследуется процесс механики деформирования стенок в брюшной части аорты, которые подвержены постоянным напряжениям вследствие движения кровотока в нем, включая случаи формирования аневризмы. Рассматриваются современные научные публикации, в которых изложены представления о гидромеханике кровотока и механических деформациях артериальных стенок, а также необходимые физические параметры для их математического моделирования. При помощи программного комплекса COMSOL и на основе метода конечных элементов проведено численное моделирования кровотока и деформаций стенки в области брюшной аорты при различных патологиях, рассматриваемых как механические повреждения, включая наличие аневризмы.

Введение. Несовершенные результаты хирургического лечения осложнений аневризм брюшной аорты (АБА) требуют дальнейших исследований их этиологии и патогенеза. Согласно медицинским данных за 2022 г. [1] частота АБА в РФ в зависимости от региона составляет 10 – 40 случаев на 100 000 населения, в США – 36,2, с тенденцией к снижению за последние 20 лет, что частично объясняется уменьшением в популяции числа курящих людей. Заболеваемость АБА возрастает с возрастом пациентов, при этом свыше 80% случаев приходятся на лиц старше 60 лет. Согласно патологоанатомическим исследованиям, аневризмы обнаруживаются у 0,16–1% всех вскрытий и занимают десятое место по значимости среди причин смертности. Частота разрывов аневризм брюшной аорты составляет примерно 5,6–7,5 случаев на 100 000 человек населения. Механика деформирования сосудов - важная тема в биомеханике и медицине, поскольку сосуды подвержены нагрузкам в различных режимах. Понимание этих процессов помогает понять развитие заболеваний, таких как атеросклероз, гипертония и аневризмы, а также способствует созданию новых диагностических и лечебных методов, включая разрабатывание протезов и стендов. В работе было проведено моделирование кровотока и деформаций стенок аорты в нормальном состоянии и при повреждениях, включая аневризму.

1. Модель брюшной аорты и аневризмы. В ходе анализа деформации брюшной аорты предполагается, что материал представляет собой однородный гиперупругий изотропный материал, внутри которого протекает жидкость, характеризующаяся свойствами крови. Для описания механических свойств гиперупругого материала принято использовать потенциальную энергию деформации, рассматриваемую как скалярную функцию инварианта тензоров, либо мер деформации, в частности для моделирования деформирования сосуда применяется Нео-Гуковская модель, для которого формула потенциальной энергии деформации имеет следующий вид [2]

$$W_s = \frac{1}{2}\mu(I_1 - 3) - \mu\ln(J_{el}) + \frac{1}{2}\lambda[\ln(J_{el})]^2, \tag{1.1}$$

где λ, μ - параметры Ламе, I_1 - первый инвариант тензора деформаций Коши-Грина, J_{el} - упругая объемная деформация: $I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $J_{el} = \det(F_{el})$, F_{el} - градиент упругой деформации. Тензор напряжений выражается следующим образом:

$$\sigma = J^{-1}FSF^T, \quad J = J_{el}J_{inel}, \quad F = F_{el}F_{inel}, \quad J_{inel} = \det(F_{inel}), \tag{1.2}$$

где J_{inel} - неупругая объемная деформация, F_{inel} - градиент неупругой деформации, S - второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа

$$S = S_{inel} + \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(F^T F - I\right) \tag{1.3}$$

I - единичный тензор, S_{inel} обозначает пластичную часть механического напряжения.

В отличие от модели в рамках линейной теории упругости Нео-Гуковская модель требует минимальное количество констант, может применяться для деформаций в диапазоне до 30–40 % и до 80–90 % чистого сдвига [3].

На рис. 1 представлена модель брюшной аорты с наличием дефекта – отверстия: (а) - сама модель, на которой отмечены места входа и выхода крови (i = 1, 2, …, 5); (б) - точки, в которых

выполнялись вычисления; (в) - брюшная аорта с утончённой стенкой, которая соответствует основной модели, но в области возможного дефекта стенка утончается по сферической траектории до толщины 1 мм. Механические свойства стенки аорты указаны в табл. 1. На рис. 2 обозначена схематичная модель аневризмы вида «бочка» с обозначенными точками для расчетов, где также отмечена зона утончения стенки аневризмы.

Таблица 1. Параметры кровотока и упругие характеристики стенки брюшной аорты [4, 5].

Параметр	Символ	Размерность	Величина
Динамическая вязкость крови	η	Па·с	0.005
Плотность крови	ρ_o	кг/м^3	1060
Плотность стенки аорты	ρ_a	кг/м^3	960
Коэффициент Пуассона	ν	-	0.45
Модуль упругости	E	Н/м^2	1.0×10^7

Также для расчета гидродинамики кровотока задаются параметры давления на «входе» и «выходах» из брюшной аорты [4]:

$$p_0 = 16810.62 \cdot f(t) \tag{1.4}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 16720.63 \bullet f(t),$$

$$f(t) = \begin{cases} (1-\alpha)\bullet\sin(\pi t), & 0 < t \le 1/2, \\ 1-\alpha\bullet\cos(2\pi(t-1/2)), & 1/2 < t < 5, \end{cases} \quad \alpha = 1/3. \tag{1.5}$$

В выражениях (1.4) и (1.5) для учета сердцебиения применяется соответствующая функция $f(t)$, при этом интервал времени от 0 до 0,5 с не несет физического смысла - он служит для сглаживания кривой, что облегчает определение начального состояния системы. Вторая часть функции обеспечивает изменение давления в пределах минимальных и максимальных значений с определенной амплитудой в течение каждого цикла, продолжительность которого составляет 1 с.

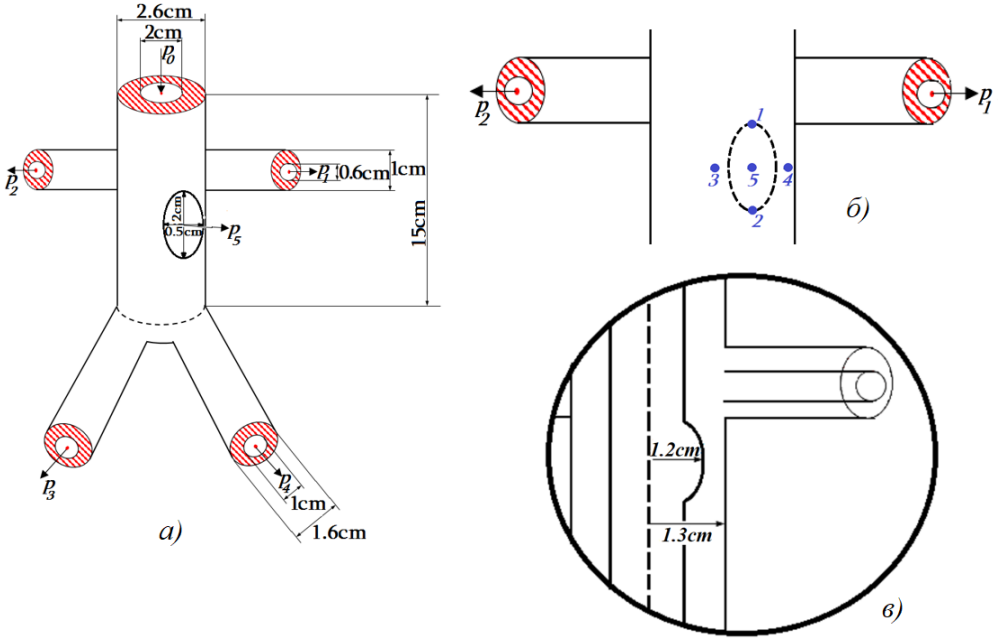


Рис. 1. Основная модель:
(а) – брюшной аорты, где показаны отверстия втекания и вытекания крови:
i = 1, 2, … 5; (б) – точки, в которых проводились вычисления; (в) – утончение стенки аорты в окрестности потенциального дефекта.

2. Результаты расчетов. Проводились расчеты эквивалентного напряжения

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2 + 6\left(\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2+\sigma_{xy}^2\right)\right)} \tag{2.1}$$

в указанных точках на рис. 1, 2, а также определялись смещения стенки аорты при движении крови по ней. Из анализа рис. 3 и рис. 4 следует, что максимальные напряжения и наибольший

перепад напряжений наблюдаются вдоль окружной координаты, особенно в области максимального утончения стенки. Согласно данным на рис. 3, разница между пиковым напряжением в основной модели и моделью с отверстием превышает в десятки раз. Максимальное напряжение в модели с отверстием фиксируется в области краев отверстия по осевой координате. Из этого следует, что именно в этих зонах могут образовываться дефекты, что в дальнейшем может привести к разрушению стенки сосуда. Анализ изображений на рис. 4 показывает, что область максимальных деформаций в основной модели сосредоточена в районе основной части сосуда, откуда отходят ответвления, тогда как у моделей с утончением и отверстием эта зона расположена около соответствующих дефектов. Кроме того, при времени t =2с. значение максимальной деформации для всех трех моделей превышает аналогичный показатель в t = 2,5с. в два раза. Значение максимальной деформации у модели с утончением превышает его у основной модели примерно в 1,5 раза, а у модели с отверстием – почти в 6 раз. Были проведены расчеты напряжений и смещений для аневризмы (рис. 2) в зависимости от утоньшения стенки. Из анализа рис. 5, где на оси Ox значение: 1 – соответствует случаю обычной аневризмы; 2 – соответствует случаю аневризмы с утоньшением стенки до 2.5 мм; 3 – утоньшение стенки до до 2 мм; 4 – утоньшение стенки до 1.5 мм; 5 – утоньшение стенки до 1 мм, 6 – утоньшение стенки до 0.5 мм, видно, что напряжения в точках максимального утоньшения начинают сильно возрастать, когда стенка начинает утоньшаться на 50% (с 3 мм до 1.5 мм).

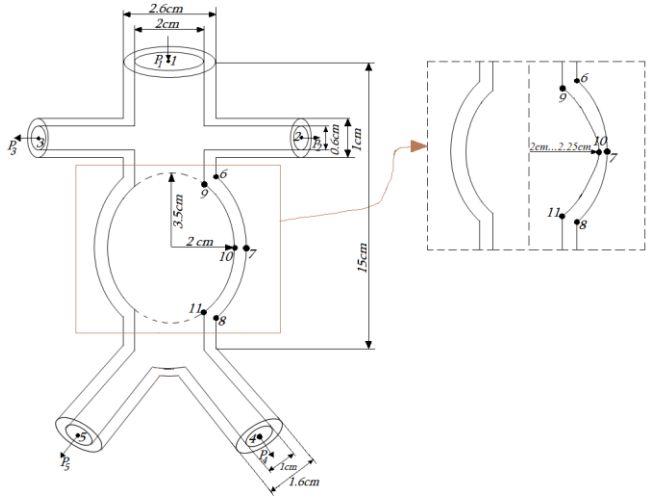
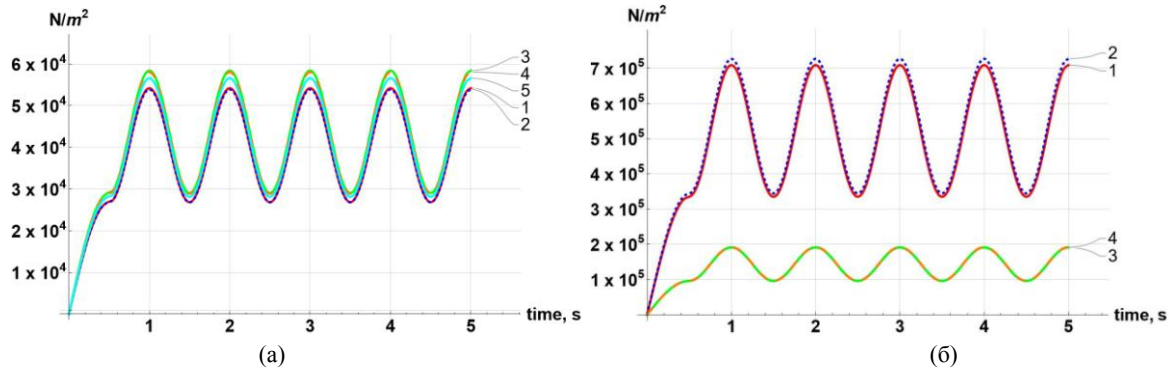


Рис. 2. Модель аневризмы с выделенной областью утончения стенки.



(а) (б)

Рис.2. Графики напряжений для 2-х вариантов расчетной модели брюшной аорты: (а) – основная модель; (б) – основная модель, имеющая дефект в виде отверстия, в точках 1, 2, 3, 4 и 5, указанных на Рис.1б.

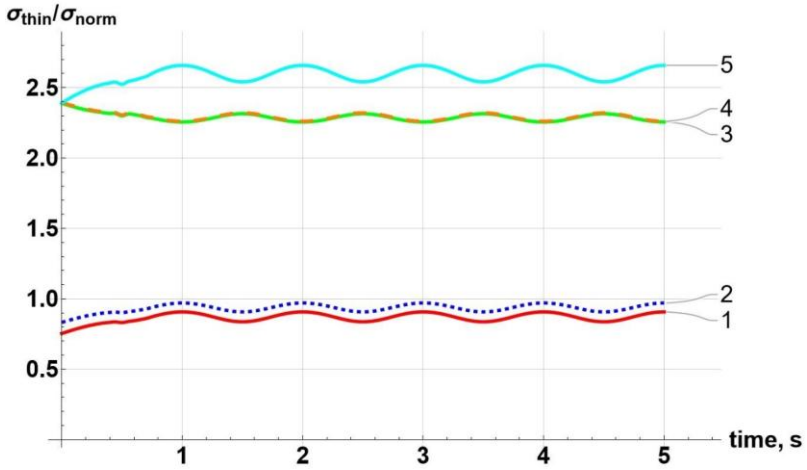


Рис.3. Отношения напряжений (напряжение при нормальном состоянии к напряжению при случае утонченной стенки) в соответствующих точках 1, 2, 3, 4 и 5, указанных на Рис.1б.

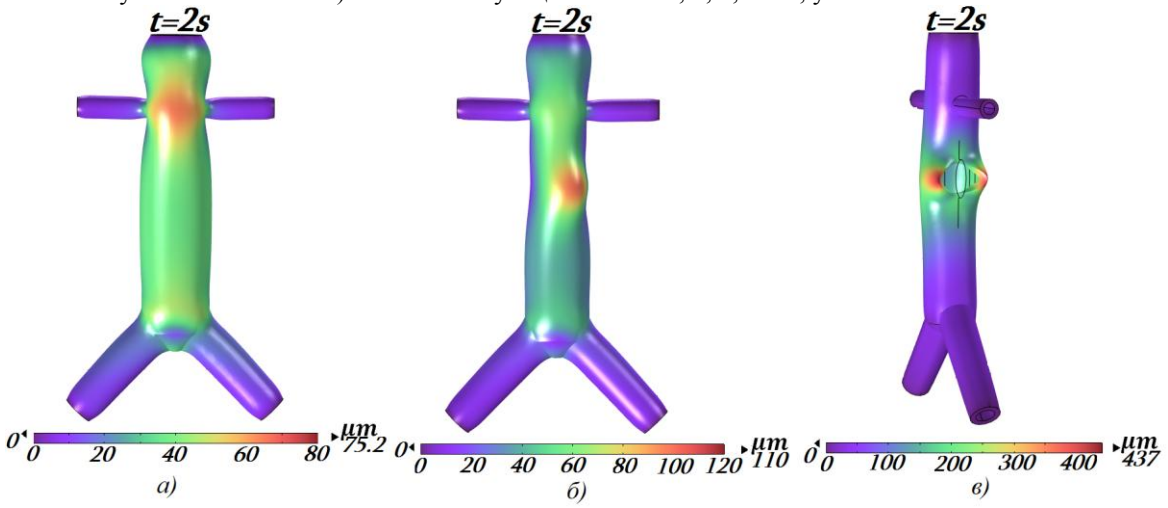


Рис.4. Визуализация деформации стенки аорты для трех случаев: (а) – основная модель; (б) – основная модель с утонченной стенкой; (в) – основная модель, имеющая дефект в виде отверстия.

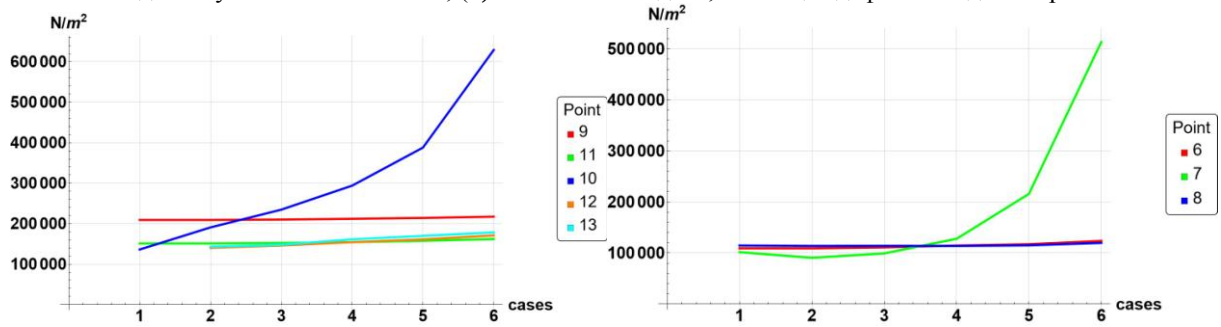


Рис.5. Графики напряжений для модели аневризмы при t=3 с. В точках, указанных на Рис.2.

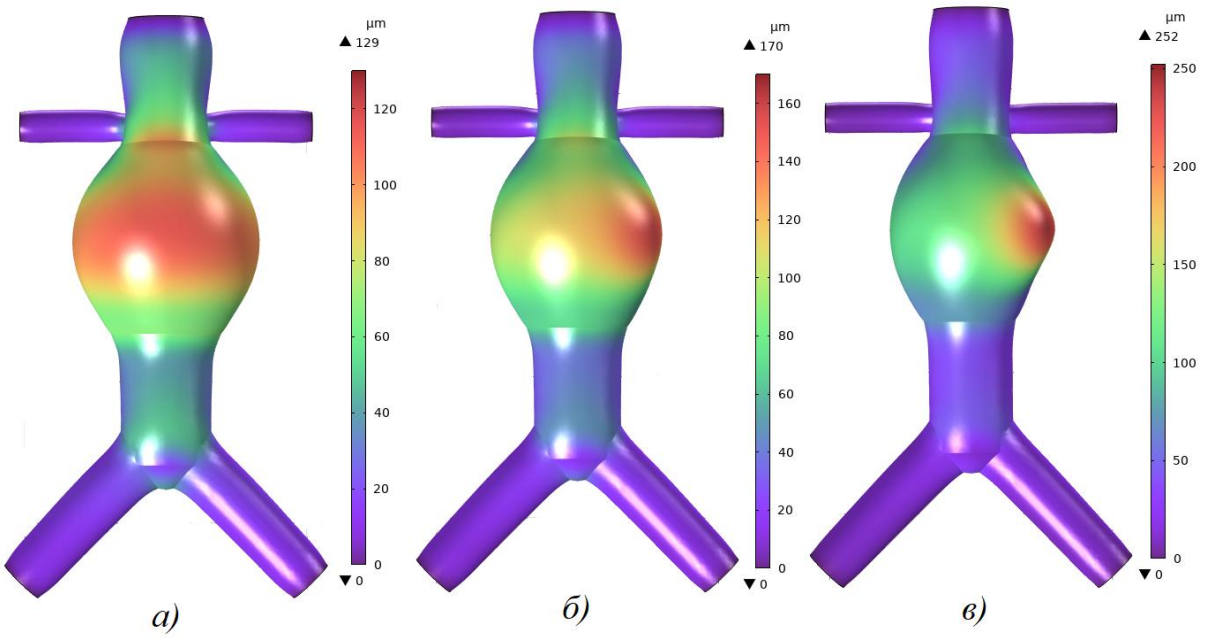


Рис. 6. Визуализация деформации стенки аневризмы для трех случаев: (а) – аневризмы без утоньшения; (б) – аневризмы с утоньшением до 1.5 мм; (в) – аневризмы с утоньшением до 0.5 мм.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124013000674-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Российское общество ангиологов и сосудистых хирургов и др. Клинические рекомендации «Аневризмы брюшной аорты». 2022. 263 с.
2. Бокерия Л.А. Аневризмы аорты. М.: Медицина. 2001. 204 с. = Bokeria L.A. Aortic aneurysms. Moscow, Medicine. 2001. 204 с.
3. Attard M. Finite strain - isotropic hyperelasticity // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40. № 17. P. 4353-4378. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00217-8
4. Шмурак М.И., Кучумов А.Г., Воронова Н.О. Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // Пермский национальный исследовательский политехнический университет. 2017. № 1. С. 230–243.
5. Fluid-Structure Interaction in a Network of Blood Vessels // Comsol Documentation. 18 p. https://doc.comsol.com/6.1/doc/com.comsol.help.models.sme.blood_vessel/blood_vessel.html
6. Fadhil N.A., Hammoodi K.A., Jassim L., Al-Asadi H.A. and Habeeb L.J. Multiphysics analysis for fluid–structure interaction of blood biological flow inside three-dimensional artery // Curved and Layered Structures. 2023. 15 p. https://doi.org/10.1515/cls-2022-0187

Сведения об авторах:

Гандилян Давид Ваганович – младший научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), тел.: +7-963-686-76-25
E-mail: david.ghandilyan@mail.ru

Лисовенко Дмитрий Сергеевич – член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией Механики технологических процессов Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), тел.: 8-495-433-34-96
E-mail lisovenk@ipmnet.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ БАЛОК ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ УПРУГОЙ ЗАДЕЛКИ

Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.

Рассмотрена задача изгибных колебаний и устойчивости по Эйлеру трансверсально изотропных балок круглого поперечного сечения с переменным радиусом. Задача рассмотрена в рамках уточненной теории пластин, учитывающей поперечные эффекты, при наличии осевой силы. Полученные уравнения позволяют определить как частоты собственных колебаний, так и критические значения осевой силы, при которой балка теряет устойчивость. Задача решена методом коллокаций при различных значениях геометрических и физических параметров, характеризующих балку переменного радиуса. Проведен численный анализ задачи.

Введение. Рассматривается задача изгибных колебаний и устойчивости по Эйлеру для круглой балки переменного сечения с учетом поперечных эффектов. Для балок, пластин и оболочек существуют различные уточненные теории, основанные на гипотезах, асимптотические теории, итерационные теории и т.д [1-6]. В [7,8] рассмотрены частотные задачи для предварительно напряженных пластин. Здесь используется методика, предложенная в [6]. Для построения наиболее простой теории основные напряжения σ_x, σ_y должны иметь линейное распределение по толщине. Для соблюдения одинакового порядка в уравнениях движения теории упругости τ_{xz}, τ_{yz} должны иметь второй порядок по z

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + \varphi_2 z + \varphi_3 z^2, \quad \tau_{yz} = \psi_1 + \psi_2 z + \psi_3 z^2$$

Проинтегрировав уравнения движения по площади поперечного сечения, а также первые два из них, умноженные на z, получим разрешающую систему уравнений. С помощью поверхностных условий часть из неизвестных коэффициентов исключаются.

Постановка задачи. Рассмотрим трансверсально изотропную балку переменного радиуса $r(x)$, длины a. Координатную ось Ox совместим со срединной линией балки, а оси Oy и Oz в плоскости поперечного сечения, которая является плоскостью изотропии. Балка предварительно напряжена двумя, действующими на концах балки по оси Ox, равными противоположно направленными силами P. Предполагая, что изгиб происходит в плоскости Oxz, перемещением v и напряжениями σ_y, τ_{yz} пренебрегаем, а все остальные величины считаем независящими от y.

Используя уравнения, полученные в [1,6], уравнения изгибных колебаний можно представить в виде:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi r^2 \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - N_x = -\frac{\pi r^4 \rho}{4}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right) \tag{1}$$

где

$$N_x = \frac{\pi r^2}{4}\left(3\varphi_1 - B_{11} r\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\right), \; M_x = -\frac{B_{11}\pi r^4}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right),$$

$$u_x = z\left(\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\varphi_1\right), \tag{2}$$

Здесь a_{55} и B_{11} – упругие постоянные материала [1], $\varphi_1(x,t)$ – функция, характеризующая распределение касательных напряжений τ_{xz}, w – прогиб точек оси балки, u_x –перемещение по оси Ox, t – время, ρ – плотность материала.

К уравнениям (1) надо присоединить граничные условия. Будем использовать граничные условия упругой заделки [9,12]. Условие первого вида, когда реакция опоры представляет момент, пропорциональный углу поворота средней линии или торца балки. Условие второго вида, когда реакция опоры пропорциональна перемещению w. Коэффициенты упругой заделки (податливости) обозначим c_1, c_2.

$$1.\ \frac{dw}{dx} \pm c_1 M_x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{du}{dz} \pm c_1 M_x = 0\ . \tag{3}$$

$$2.\qquad w + c_2 N_x = 0$$

Знак – относится к левому концу балки, а знак + к правому концу.

В [10] используется другой подход к определению условий упругой заделки. Переходим к задачам устойчивости и колебаний, считая, что все величины имеют множитель $e^{i\omega t}$, используем обезразмеривающие обозначения

$$x = a\xi,\ z = r_0\zeta,\ r = r_0 R,\ s = r_0 / a,\ N_x = NB_{11}r_0^2 e^{i\omega t},\ M_x = MB_{11}r_0^3 e^{i\omega t},\ u_x = r_0 u e^{i\omega t}$$

$$\varphi_1 = \varphi B_{11} e^{i\omega t},\ P = -TB_{11}r_0^2,\ w = r_0 f e^{i\omega t},\ \Omega^2 = \frac{\pi r_0^2 \rho\omega^2}{4B_{11}},\ \chi = B_{11}a_{55} \tag{4}$$

где r_0 - коэффициент, имеющий размерность длины, причем $r_0 / a \ll 1$.

Уравнения (1) в безразмерных обозначениях примут вид:

$$s\frac{\partial N}{\partial \xi} = T\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 4R^2\Omega^2 f$$

$$s\frac{\partial M}{\partial \xi} - N = R^4\left(s\frac{\partial f}{\partial \xi} - \chi\varphi\right)\Omega^2 \tag{5}$$

где

$$N = \frac{R^2}{4}\left(3\varphi - sR\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \chi\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)\frac{\partial R}{\partial \xi}\right),\ M = -\frac{sR^4}{4}\left(s\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \chi\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right),\ u = \zeta\left(s\frac{\partial f}{\partial \xi} - \chi\varphi\right), \tag{6}$$

После некоторых преобразований приходим к системе из двух уравнений относительно безразмерных $f(\xi)$ и $\varphi(\xi)$

$$\begin{aligned}
&\left(-s^2TR - s^4R^4R''\right)f'' + \Omega^2 s^2R^4R'f' - 4\Omega^2R^3 f - 3sR^3 + \chi s^3R^4R''\varphi' + \\
&\left(+9sR^2r' - \chi\Omega^2 s r^4 r'\right)\varphi = 0 \\
&-s^4R^3R'f''' + \left(-s^2T - 3s^4R^2R'^2 - s^4R^3R''\right)f'' - 4\Omega^2R^2 f + \\
&+\chi s^3R^3R'\varphi'' + \left(3sR^2 + 3\chi s^3R^2R'^2 + \chi s^3R^3R''\right)\varphi' + 6sRR'\varphi = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

где для краткости аргумент ξ у $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ и $R(\xi)$ опущен.

Граничные условия в безразмерных обозначениях представим в виде

$$l_1 sf' \pm (1-l_1)M = 0 \quad \text{или} \quad l_1 u'_\zeta \pm (1-l_1)M = 0 \tag{8}$$

$$l_2 f + (1-l_2)N = 0 \tag{9}$$

Отметим, что значение $\chi = 0$ соответствует классической постановке задачи и в этом случае первое и второе условия в (6) совпадают.

Из этих условий для различных l_1, l_2 можно получить следующие граничные условия

a) $l_1 = 0,\ l_2 = 0$ $(M = 0,\ N = 0)$ свободный конец

b) $l_1 = 0,\ l_2 = 1$ $(M = 0,\ f = 0)$ шарнирное опирание

c) $l_1 = 1,\ l_2 = 0$ $(df / d\xi = 0,\ N = 0)$ условия симметрии, которые можно также назвать скользящей заделкой

d) $l_1 = 1,\ l_2 = 1\ (df/d\xi = 0,$ или $l_1 u'_\xi = 0,\ f = 0)\ \ f = 0)$ жесткая заделка.

Безразмерные перемещение, поперечная сила и момент имеют вид:

$$u = z\left(sf' - \chi\varphi\right),\quad N = \frac{R^2}{4}\left[3\varphi - R^2 s^3\left(sf'' - \chi\varphi'\right)R'\right],\quad M = \frac{R^4}{4}\left(sf'' - \chi\varphi'\right) \tag{10}$$

Алгоритм решения и численный анализ. В случае постоянной толщины, без учета поперечных эффектов (χ=0) уравнения (5) можно привести к одному уравнению и решение получить аналитически. В общем же случае приходится решать численно. Для решения уравнений (5) методом коллокаций функции f и φ представим в виде

$$f = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+2}\xi^{i+2}\left(1-\xi\right)^3,\quad \varphi = b_0 + b_1\xi + \sum_{i=1}^{n} b_{i+1}\xi^{i+1}(1-\xi)^2 \tag{11}$$

Суммы в представлениях для f и φ вместе с производными второго и первого порядка соответственно, обращаются в ноль в концевых точках $\xi = 0,1$. Удовлетворив граничным условиям, можно постоянные a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 выразить через одну из них, например a_0. Далее, выбрав в качестве точек коллокации нули смещённых полиномов Чебышева первого рода $T_n(2\xi - 1)$, $\xi_k = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right]$ и записав уравнения (5) в этих точках, получим однородную систему из $2n$ уравнений относительно $a_0, a_i\left(i = 3, n-1\right)$ и $b_i\left(i = 2, n\right)$.

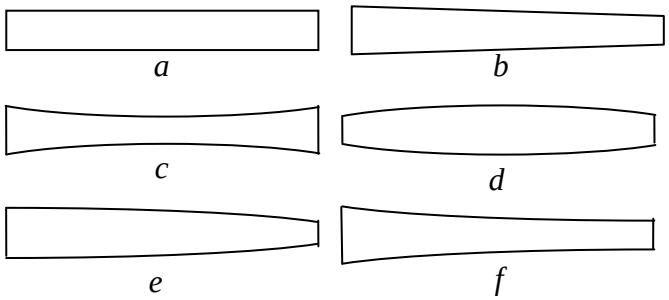
Полагая, в одном случае, $\Omega = 0$, в другом случае $T = T_0$ и приравнивая определитель этой системы к нулю, в первом случае получим критические значения силы T, при которых происходит потеря устойчивости балки, а во втором случае - частоты собственных изгибных колебаний Ω при наличии осевой силы $T = T_0$. При $T = 0$ получим свободные колебания балки Ω.

Очевидно, что решение однородной системы можно получить лишь с точностью до постоянного множителя. Разделив уравнения на один из коэффициентов a_m или b_m и отбросив одно из уравнений, определим остальные коэффициенты a_n, b_n и считая a_m или b_m равной единице, и подставляя полученные значения в представления (9), можно будет представить вид функций f и φ.

Рассмотрим балки переменного радиуса, для которых безразмерный радиус $R(\xi)$ изменяется по законам (фиг. 1).

$$a)\ R(\xi) = 1,\ \ b)\ R(\xi) = \sqrt{3}\,\frac{(1-k)\xi + k}{\sqrt{k^2 + k + 1}},\ c)\ \ R(\xi) = \sqrt{15}\,\frac{4(k-1)(\xi - 0.5)^2 + 1}{\sqrt{3k^2 + 4k + 8}} \tag{12}$$

$$d)\ R(\xi) = \sqrt{15}\,\frac{4(1-k)(\xi - 0.5)^2 + k}{\sqrt{8k^2 + 4k + 3}},\ \ e)\ R(\xi) = \sqrt{15}\,\frac{(1-k)\xi^2 + k}{\sqrt{8k^2 + 4k + 3}},\ \ f)\ \ R(\xi) = \sqrt{15}\,\frac{4(k-1)(\xi - 1)^2 + 1}{\sqrt{3k^2 + 4k + 8}}$$



Фиг. 1. Виды продольного сечения балок переменной толщины

Все они имеют одинаковый объем и, при переменности толщины, толстая часть в k раза больше тонкой.

При вычислениях принято $s = 0.05$, $\chi = 0, 3, 30$, $k = 2$.

В табл. 1 приведены безразмерные значения первых трех частот двух групп изгибных колебаний и первые два значения критической сжимающей силы, при которых происходит потеря устойчивости по двум формам. Первая строка для каждой полосы относится к классической постановке задачи, т.е. $\chi = 0$, вторая строка соответствует значению $\chi = 3$, а третья – значению $\chi = 30$. Для каждой частоты или критической силы определяется вид функций f и φ, что позволяет определить характер колебаний или форму потери устойчивости. Первые частоты Ω_i^1 относятся, в основном, к поперечным колебаниям, которые сопровождаются сдвиговыми колебаниями малой амплитуды. Вторые частоты Ω_i^2 относятся к сдвиговым колебаниям, которые сопровождаются поперечными колебаниями малой амплитуды. Амплитудные значения безразмерного перемещения f на два порядка больше значений характеризующей поворот функции φ при Ω_i^1, а при Ω_i^2 амплитудные значения f и φ имеют одинаковый порядок. При классической постановке Ω_i^2 отсутствуют. Частоты Ω_i^2, обусловленные учетом поперечных эффектов, в рассматриваемой постановке для прямоугольной пластины получены в [11].

Таблица 1. Безразмерные значения частот и критических сил , когда оба конца балки заделаны.

			Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2	$10^2 T_{\text{cr}}^1$
	a	$\chi = 0$	0.0278	0.076	0.151				9.87
		$\chi = 3$	0.274	0.722	0.1351	1.014	1.05	1.1216	8.98
		$\chi = 30$	0.0244	0.0523	0.082	0.107	0.203	0.222	4.96
	b	$\chi = 0$	0.0268	0.073	0.140				7.23
		$\chi = 3$	0.0264	0.0691	0.128	1.014	1.054	1.1217	6.5
		$\chi = 30$	0.0237	0.051	0.080	0.105	0.188	0.231	5.27
	c	$\chi = 0$	0.039	0.0882	0.184				8.8
		$\chi = 3$	0.038	0.0823	0.145	1.177	1.376	1.475	7.7
		$\chi = 30$	0.0298	0.055	0.082	0.2347	0.2582	0.296	2.6
	d	$\chi = 0$	0.0196	0.0614	0.155				7.27
		$\chi = 3$	0.0192	0.059	0.132	0.897	1.006	1.214	6.8
		$\chi = 30$	0.0187	0.0500	0.101	0.128	0.28	0.324	4.7
	e	$\chi = 0$	0.0247	0.0704	0.1390				7.0
		$\chi = 3$	0.0245	0.0674	0.127	0.976	1.087	1.1853	6.4
		$\chi = 30$	0.0237	0.0394	0.0638	0.1056	0.1882	0.2838	5.6
	f	$\chi = 0$	0.0293	0.076	0.144				7.21
		$\chi = 3$	0.0239	0.076	0.31	0.1901	0.3303	1.0917	6.5
		χ =30	0.0247	0.0519	0.0809	0.105	0.182	0.283	3.4

Отметим, что в дальнейшем, согласно (4), положительные значения T соответствуют сжимающей нагрузке.

Заключение. Исследованы вопросы устойчивости и свободных колебаний балок переменного круглого поперечного сечения для разных форм продольного сечения балки при наличии осевой силы, выявлен эффект учета поперечных сдвигов на величину критической силы, приводящей к потере устойчивости, и на значения собственных частот колебаний.

Сравнение результатов, полученных при первом условии в (8), с результатами, полученными при втором условии (8), показало, что при $\chi = 30$, для балки постоянного сечения , первая частота колебаний больше на 27%.

Учет влияния инерции вращения от поперечных сдвигов приводит к появлению новых видов колебаний, которые являются преимущественно сдвиговыми и имеют порядок 6-ой – 8-ой частот основной формы колебаний.

Учет переменности толщины в рассмотренных вариантах изменения приводит к изменению основной частоты до 48%.

Использованный метод коллокаций показал достаточно хорошую сходимость, увеличение числа точек коллокации более 6-7 практически не меняет величину основной первой частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ambartsumyan, S.A. Theory of Anisotropic Plates. Nauka, Moscow 1987, 360 p..
2. Aghalovyan LA Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. World Scientific 2015, DOI 10.1142/9048
3. Gol’denveizer A.L. Theory of elastic shells // Elsevier – 2014.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
5. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1990. № 2. С. 158-167
6. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия.// Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 12-20.
7. Pichugin A.V., Rogerson G.A. An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate //Proc. of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2002, Vol. 458, No 2022, pp. 1447-1468.
8. Kaplunov J.D., Nolde E.V., Rogerson G.A. A low-frequency model for dynamic motion in pre-stressed incompressible elastic structures //Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2000, Vol. 456, No 2003, pp. 2589-2610.
9. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под.ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. т.3 изд. Машиностроение. 1964. 564с.
10. Киракосян, Р. М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемленной опорой. Докл. НАН РА, т.114, №2. 2014 с.101-107.
11. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и инерции вращения. / В. сб.: посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С. 137-146.
12. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Деформирование тонкой круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием // ПММ. 2025. Т. 89. Вып. 1. С. 106-127.

Сведения об авторах:

Геворгян Гнун Завенович – к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН Армении
E-mail: gnungev@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович – к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН Армении
E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

ЗАДАЧА О ТОЧНОМ ПОЗИЦИОНИРОВАНИИ ЦЕНТРА МАСС ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО ЗВЕНА ДВУХЗВЕННОГО УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА

Геворкян Г.А., Курдина С.П.

Развитие расчетных методов и вычислительных алгоритмов динамического анализа упругих механизмов обусловлено все возрастающими потребностями теории управления упругих динамических систем, предполагающими либо корректировку движения, либо уточнение движущих факторов с учетом упругости составляющих звеньев этих систем. К указанной категории задач управления относятся так называемые задачи на точность позиционирования исполнительных механизмов, а именно: в таких задачах требуется уточнение законов движения с учетом нежелательных упругих осцилляций, которые подлежат минимизации, или сглаживанию, путем внесения соответствующих корректив в приводные усилия. В предлагаемой статье рассматривается задача о точном позиционировании центра масс упругого звена двухзвенного манипулятора.

1. Введение. Формализация и обобщение методов динамического анализа многозвенных систем без обращения их матриц масс на случай упруго-деформируемых составляющих звеньев этих систем стало значительной вехой в развитии данной дисциплины. В ряде научных публикаций подобные расчетные стратегии получили впоследствии название *обобщенного метода Ньютона-Эйлера* [1-5].

Особое значение быстродействующих расчетных стратегий заключается в их приложении к решению задач управления механизмами, содержащими в своей структуре звенья с распределенной упругостью. Это обстоятельство позволяет во многих случаях сделать доступным вычислительный процесс, который невозможно осуществить в режиме реального времени в связи с использованием расчетных стратегий, предполагающих процедуру обращения матрицы масс исследуемых систем, особенно если речь идет о многозвенных исполнительных механизмах. Численное решение одной из таких задач управления по *отслеживанию исполнительным органом манипулятора наперед заданной траектории* с учетом упругости одного из составляющих звеньев было проведено автором и представлено им поэтапно в публикациях [6, 7].

К моделированию упругих механизмов в несколько иной постановке задач теории управления относится случай *точного позиционирования* динамической системы с учетом распределенной упругости составляющих звеньев. Здесь предполагается рассмотреть движение двухзвенного манипулятора с упругим исполнительным звеном [8], центр тяжести которого описывает траекторию, к которой предъявляются жесткие требования к упругим отклонениям от строго горизонтального положения.

2. Свободное движение двузвенного манипулятора с упругим горизонтальным звеном. Рассмотрим численное решение первой задачи динамики двузвенного манипулятора с абсолютно жестким звеном C_1 и упругим звеном C_2, сохраняющим в процессе движения строго горизонтальное положение [8] (рис. 1).

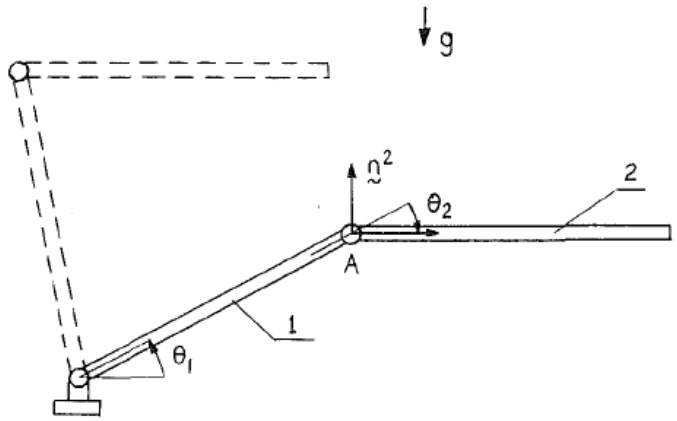


Рис. 1. Схема двузвенного манипулятора с упругим исполнительным звеном

Звенья манипулятора имеют длины: $l_1 = l_2 = 0.8\,м$ и обладают одинаковыми площадями поперечных сечений – $A_1 = A_2 = 4.0 \cdot 10^{-4}\,м^2$. Массы звеньев полагаются равными: $m_1 = m_2 = 2.512\,кг$, момент инерции сечения упругого звена $I_{z_2} = 1.333 \cdot 10^{-8}$ м^4, а модуль Юнга – $E = 7.0 \cdot 10^{10}$ Н/м^2. Динамическое моделирование плоского двузвенного манипулятора (рис. 1) предполагается проводить с учетом действия гравитации.

Представленный плоский двузвенный манипулятор начинает движение из исходного положения с начальными условиями в обобщенных координатах и скоростях:

$$q_1^r(0) = q_1^r(0) = 0; \quad \dot{q}_1^r(0) = 10 \text{ рад/с}, \quad \dot{q}_2^r(0) = 0, \tag{1}$$

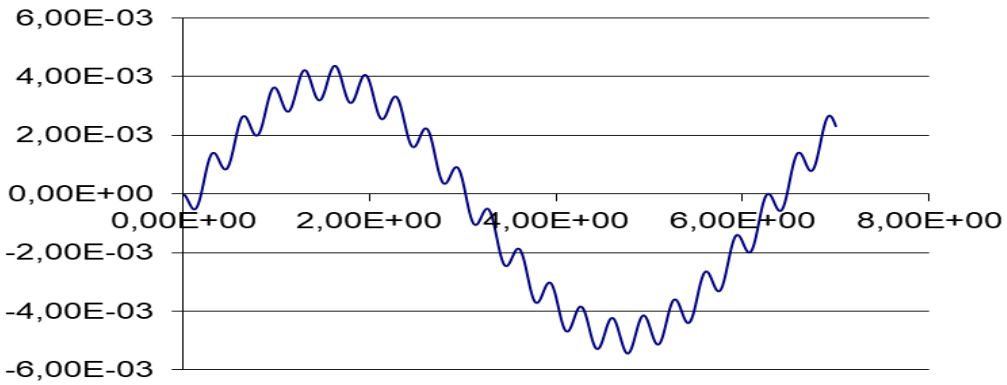
а также в упругих переменных и скоростях, т.е.

$$q_i^e(0) = \dot{q}_i^e(0) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

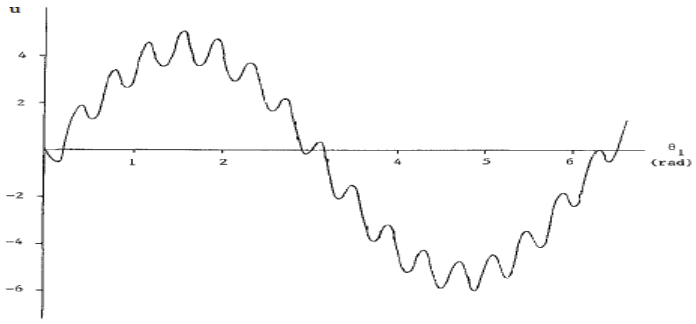
В предположении отсутствия трения во вращательных парах первая задача динамики рассматриваемого упругого манипулятора (рис. 1) формулируется при нулевых обобщенных ускорениях:

$$\ddot{q}_1^r(t) = \ddot{q}_2^r(t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

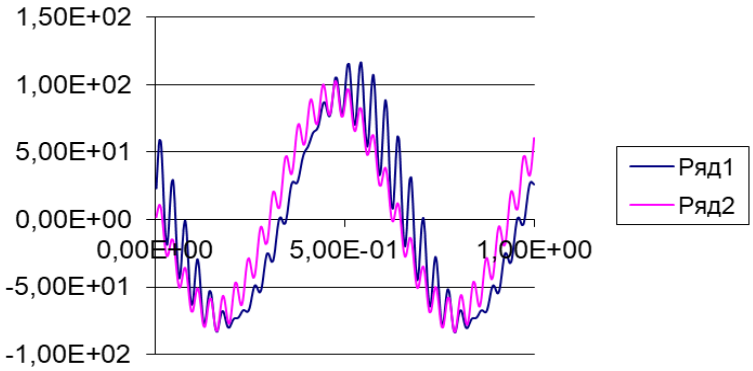
где конечное время T фиксируется полным периодом обращения звена C_1.



а)



б)



в)

Рис. 2. Графики упругих перемещений концевой точки упругого звена (а, б) и функции приводных моментов (в)

Моделирование задачи проводится при одной-единственной координатной функции, участвующей в функции форм, которая выражается многочленом четвертой степени, т.е.

$$\Phi_{d2}(x) = k_1 x^4 + k_2 x^3 + k_3 x^2 + k_4 x + k_5. \quad (4)$$

Координатная функция (4) должна удовлетворять геометрическим:

$$\Phi_{d2}(0) = \Phi'_{d2}(0) = 0 \quad (5)$$

и динамическим граничным условиям, т.е.

$$\Phi''_{d2}(0) = \Phi'''_{d2}(0) = 0, \quad (6)$$

подчиняясь при этом также и условию нормализации:

$$\Phi_{d2}(l_2) = 1. \quad (7)$$

Принимая во внимание условия (5) – (7), многочлен (4) записывается в окончательном виде

$$\Phi_{d2}(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l_2}\right)^4 - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{l_2}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{l_2}\right)^2, \quad (8)$$

откуда получаем также и выражение для вращательной координатной функции:

$$\Phi_{r2}(x) = \frac{4}{3l_2}\left(\frac{x}{l_2}\right)^3 - \frac{4}{l_2}\left(\frac{x}{l_2}\right)^2 + \frac{4}{l_2}\left(\frac{x}{l_2}\right). \quad (9)$$

На рис. 2 показаны графики функции изгибных перемещений концевой точки упругого звена манипулятора (см. рис. 1), полученные соответственно в публикациях: (а) – [4] и (б) – [8].

3. Сглаживающее движение двузвенного манипулятора с упруго-горизонтальным звеном.

В целях сглаживания нежелательных упругих колебаний на уровне центра масс второго звена вводится следующая корректива в закон движения второго звена:

$$q_2(t) = -q_1(t) - 2\cdot 10^{-6}\sin(104.7t), \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

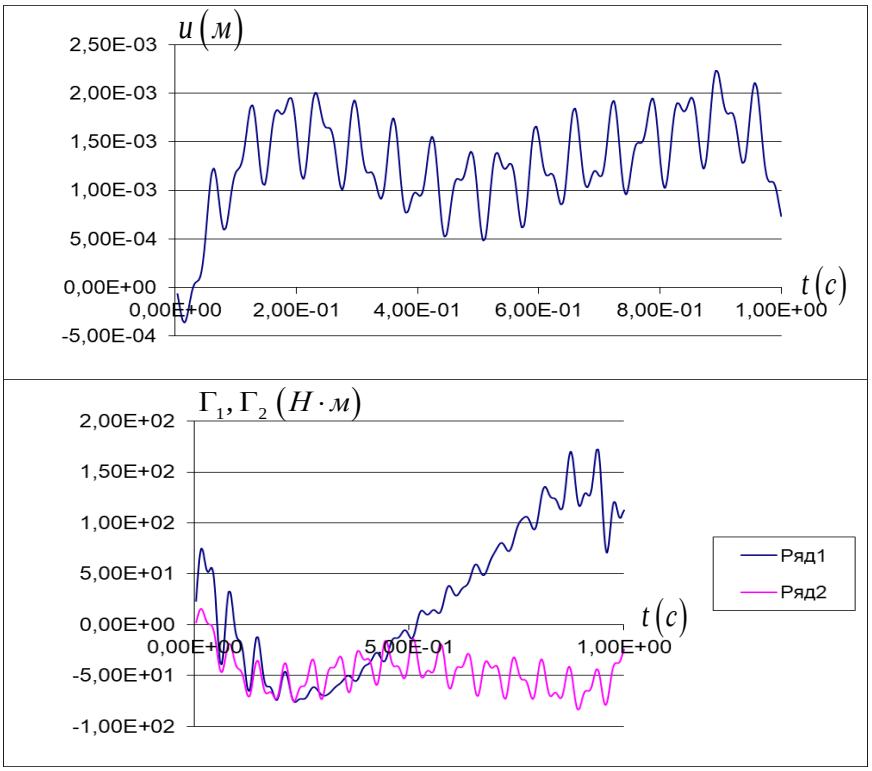


Рис. 3. Функция упругого перемещения (а) и функции приводных моментов (б) в процессе сглаживания упругих колебаний второго звена

С учетом введенной коррективы (10) в законы движения упругого манипулятора получаем сглаженную функцию упругих колебаний центра масс второго звена (рис. 3,a) и соответствующие функции приводных моментов (рис. 3,b), осуществляющих это сглаживающее движение.

4. Заключение. В статье обсуждается возможность сглаживания нежелательных упругих колебаний деформируемых звеньев манипулятора в условиях прецизионного производства путем введения несложных поправок в законы движения исследуемой динамической системы. Итоги численной реализации показывают, что подобные корректировки могут успешно применяться в технике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boyer F. and Coiffet P. Generalization of Newton-Euler model for flexible manipulators // International Journal of Robotic Systems. – 1996. – V. 13, N1. – P. 11 – 24.
2. Boyer F. and Coiffet P. Symbolic modeling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton-Euler model // International Journal Mechanism and Machine Theory. – 1996. – V. 31, N1. – P. 45 – 56.
3. Boyer F. and Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulators inverse dynamics // International Journal of Robotics Research. – 1998. – V. 17, N3. – P. 282 – 293.
4. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.Т.Н. – 2004. – Т. 57, N1. – С. 3 – 10.
5. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.Т.Н. – 2006. – Т. 59, N1. – С. 3 – 9.
6. Геворкян Г.А. Приложение обобщенного метода Ньютона–Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2010. Т. 63. № 2.
7. Gevorgyan H.A. Problem on optimizing the motion of an elastic tracking manipulator // Mechanics of Solids. – 2021. – V. 56, N2. – P. 242 – 249. –
DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654421020072.
8. Ider S.K. and Amirouche F.M.L. Nonlinear modeling of flexible multibody dynamics subjected to variable constraints // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1989. – V. 56. – P. 444 – 450.

Сведения об авторах

Курдина Светлана Павловна, доцент МГТУ им. Баумана,
Москва 105005, 2-я Бауманская ул., 5/1,
E – mail: kurdinasp@bmstu.ru

Геворкян Грант Араратович, научный сотрудник Института механики НАН РА, к.т.н,
Ереван – 19, пр. Маршала Баграмяна 24Б, Институт Механики,
тел. (374 10) 524 890 (раб.), (374 96) 390 315 (моб.),
E – mail: hrgevorkian@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ МИКРОГЕОМЕТРИИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Горячева И.Г., Яковенко А.А.

Развивается метод решения контактных задач для деформируемых тел заданной макроформы с учетом микрогеометрии их контактирующих поверхностей. Представлен алгоритм расчета фактических и номинальных контактных характеристик и проведен анализ влияния на них формы неровностей, а также их пространственного расположения.

1. Введение

Как известно, в основе механики контактного взаимодействия лежит теория Герца о контакте двух осесимметричных упругих тел. Однако в основе этой теории лежит ряд допущений, которые, в свою очередь, могут оказывать существенное влияние на точность определения напряженно-деформируемого состояния тел, а также на исследование физических процессов, протекающих в области контактного взаимодействия.

Одним из допущений, лежащих в основе теории Герца, является гладкость поверхностей контактирующих тел. Однако поверхности реальных тел геометрически неоднородны, так как имеют поверхностный микрорельеф (волнистость, шероховатость), что требует модернизации и уточнения классических контактных моделей. В первую очередь наличие поверхностного микрорельефа тел приводит к несплошности области контакта, а значит, к значительному отличию площади фактического контакта от площади контакта видимого. То, что контакт и все другие процессы протекают не по всей номинальной области контакта, а по отдельным пятнам приводит к неоднородному полю напряжений в приповерхностных областях, то есть концентрации напряжений вблизи пятен контакта. Помимо этого номинальные контактные характеристики в случае шероховатых тел будут отличаться от характеристик для случая контакта гладких тел.

В данной работе представлены модели контакта деформируемых тел с учетом их поверхностного микрорельефа, которые позволяют, в частности, определить сближение тел в зависимости от приложенной к ним нагрузки и провести анализ влияния на распределение контактных давлений и на зависимость сближения от нагрузки геометрических параметров микрорельефа контактирующих поверхностей. Полученные результаты имеют практическую важность, так как позволяют разработать методы управления микрорельефом поверхности с целью достижения требуемых контактных характеристик при взаимодействии деформируемых тел.

2. Расчет контактных характеристик при взаимодействии жесткого полупространства, поверхность которого обладает регулярным микрорельефом, с упругим полупространством

Периодический (регулярный) поверхностный микрорельеф может быть создан искусственно, а также может появляться в процессе эксплуатации деталей. Решения периодических задач важны не только для изучения взаимодействия конкретных специальным образом обработанных поверхностей, но также для анализа эффекта взаимного влияния микронеровностей на номинальные (распределенные по всей номинальной площади контакта) и фактические (на отдельных пятнах контакта неровностей с деформируемой поверхностью) характеристики контактного взаимодействия. Такой анализ был проведен в работе [1] для случая высокой плотности пятен контакта и модели синусоидальной волнистости во взаимно перпендикулярных направлениях.

2.1. Постановка и метод решения периодической контактной задачи

Рассмотрим нормальный контакт с упругим полупространством периодической системы осесимметричных штампов (рис.1) с плотность расположения $\overline{N}$ (среднее число штампов на единицу площади) под действием номинального давления $\overline{p}$. Для определенности предположим, что штампы имеют сферическую форму, то есть их контактная поверхность описывается функцией $f(r)=r^2/(2R)$, где R – радиус кривизны неровности, r – координата

цилиндрической системы $Or\theta z$ (рис.1), а также имеют одинаковую высоту. Трение в области контакта считается пренебрежимо малым.

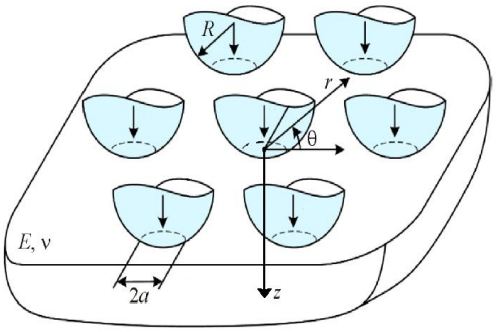


Рис.1 Схема контакта с упругим полупространством периодической системы штампов

Для решения задачи используется метод локализации [2], который при исследовании контакта с полупространством фиксированного штампа действие удаленных от него штампов заменяет номинальным давлением, равномерно распределенным вне круга заданного радиуса. В рассмотрение можно включить близлежащие штампы и учесть реальные условия контакта под ними, что повысит точность получаемых результатов. Использование данного метода позволяет получить следующее выражение для вертикального смещения штампов d относительно поверхности полупространства, всюду нагруженного номинальным давлением [3]:

$$d = \frac{a^2}{R} - \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}\,\bar{p}\sqrt{A_0^2 - a^2}\,, \qquad (2.1)$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого полупространства, a – радиус пятна контакта круговой формы, а $A_0 = \sqrt{1/\left(\pi\bar{N}\right)}$ – радиус области, вне которой распределено номинальное давление. Выражение (2.1) позволяет исследовать зависимость сближения тел от номинального давления в зависимости от средней плотности расположения штампов в системе. Принцип локализации дает возможность определить размеры отдельного пятна контакта, распределение на нем контактного давления, а также поле внутренних напряжений [4]. Аналогичный подход можно использовать и для других механических моделей деформируемого тела, например, для вязкоупругого полупространства [3], а также при моделировании шероховатости поверхности с учетом статистического характера расположения неровностей по высоте [5].

2.2. Периодическая контактная задача с учетом адгезионного взаимодействия

При взаимодействии тел высокой степени гладкости и с малыми размерами контактного зазора важную роль начинают играть различные дополнительные эффекты, в частности, адгезионное взаимодействие. В классической постановке считается, что в области контакта существуют сжимающие контактные давления, а вне области контакта они равны нулю. Однако вследствие наличия у тел поверхностной энергии между взаимодействующими поверхностями возникают силы притяжения. Также поверхностной энергией обладают и покрывающие тела пленки жидкости, что приводит к образованию менисков в зазоре и капиллярной адгезии. Большое влияние на характеристики адгезионного взаимодействия оказывает поверхностная шероховатость тел. Поэтому исследование адгезионного контакта тел с учетом их поверхностного микрорельефа имеет большое теоретическое и практическое значение.

Чтобы учесть адгезионное взаимодействие в периодической контактной задаче, можно ввести, как это сделано в [6], в кольцевой области $a < r \le b$ вокруг каждого штампа отрицательное адгезионное давление $-p_0$. В случае адгезии сухих поверхностей внешний радиус b кольцевой области определяется из равенства зазора в точке $r = b$ величине γ / p_0, где γ – это поверхностная энергия тел на единицу площади. В случае капиллярной адгезии условие нахождения величины b сохраняется, если положить в нем $\gamma = 2\sigma$, где σ – поверхностное натяжение жидкости.

Использование метода локализации в задаче с адгезией также позволяет получить выражения для нахождения контактных и адгезионных характеристик. В частности, выражение (2.1) для смещения штампа относительно границы полупространства, всюду нагруженного номинальным давлением, преобразуется к следующему виду [7]:

$$d = \frac{a^2}{R} - \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}\,\bar{p}\sqrt{A_0^2 - a^2} - \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{E}\,p_0\sqrt{b^2 - a^2}\ . \tag{2.2}$$

В случае отсутствия контакта выражение для d примет вид:

$$d = \frac{b^2}{2R} - \frac{4\left(1-\nu^2\right)}{\pi E}\,p_0 b\left(1 - \frac{b}{A_0}\mathbf{E}\left(\frac{b}{A_0}\right)\right) + \frac{\gamma}{p_0}, \tag{2.3}$$

где **E** – полный эллиптический интеграл второго рода.

3. Контактные задачи для тел заданной макроформы, обладающих поверхностной шероховатостью

Для учета поверхностной шероховатости тел на макроуровне (на масштабном уровне характерного размера номинальной области контакта) можно воспользоваться концепцией дополнительной податливости, которая была предложена Штаерманом [8].

Пусть в деформируемое основание внедряется шероховатый штамп заданной макроформы (рис.2). Чтобы учесть поверхностную шероховатость контактирующих тел, к вертикальным смещениям границы основания необходимо добавить дополнительное смещение границы $C[p]$, обусловленной шероховатостью и определяемой ее параметрами.

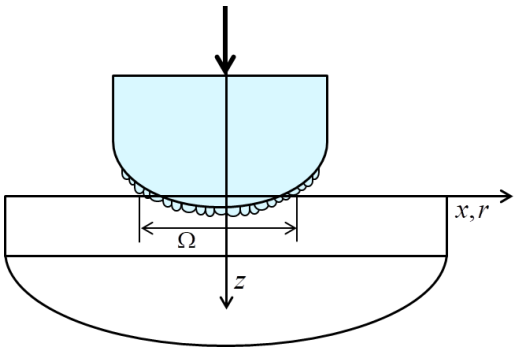


Рис.2 Схема контакта с деформируемым основанием шероховатого штампа

Как показано в [9], зависимость дополнительной податливости от номинального давления можно определить, исходя из решения дискретной задачи о контакте двух полупространств (п.2). В результате при анализе контактного взаимодействия шероховатых тел используется двухуровневый подход, согласно которому контактная задача решается на двух масштабных уровнях: микроуровень, соответствующий масштабам отдельной неровности, и макроуровень, соответствующий размерам номинальной области контакта Ω. Контакт на микроуровне позволяет определить фактические контактные характеристики, а также функцию дополнительной податливости, а контакт на макроуровне – номинальные контактные характеристики с учетом влияния на них параметров микрогеометрии поверхностей, а также адгезионных сил в зазоре между поверхностями [6].

4. Выводы

Учет поверхностного микрорельефа тел при исследовании их контактного взаимодействия вносит значительные поправки в определяемые контактные характеристики. В работе представлены модели контактного взаимодействия шероховатых тел и метод определения фактических и номинальных контактных характеристик. Использование метода локализации для решения контактных задач позволяет включить в контактные модели взаимное влияние неровностей в контакте, что особенно важно при больших нагрузках, когда наблюдается высокая плотность расположения пятен фактического контакта.

Полученные результаты позволяют не только изучить влияние параметров поверхностной микрогеометрии тел на характеристики контактного взаимодействия, но и разработать методы управления рельефом поверхности с целью достижения требуемой контактной жесткости сопряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 25-11-00350.

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G. The contact of elastic regular wavy surfaces // International Journal of Mechanical Sciences, 27 (6). 1985. Pp. 383-396.
2. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // Прикладная математика и механика, 62 (6). 1998. С. 1036-1044.
3. Yakovenko A., Goryacheva I. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribology International, 161. 2021. 107078.
4. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия, М.: Наука, 2001. 478 с.
5. Yakovenko A.A., Goryacheva I.G. Analysis of the discrete contact characteristics based on the Greenwood-Williamson model and the localization principle // Friction, 12. 2024. Pp. 1042-1056.
6. Goryacheva I., Makhovskaya Yu. Discrete contact mechanics with applications in tribology. Elsevier, 2022. 220 p.
7. Маховская Ю.Ю. Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // Механика твердого тела (2). 2003. С. 49-60.
8. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
9. Goryacheva I.G. Contact mechanics in tribology. Springer. 1998. 346 p.

Сведения об авторах:

Горячева И.Г. – доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, заведующая лабораторией трибологии, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
goryache@ipmnet.ru

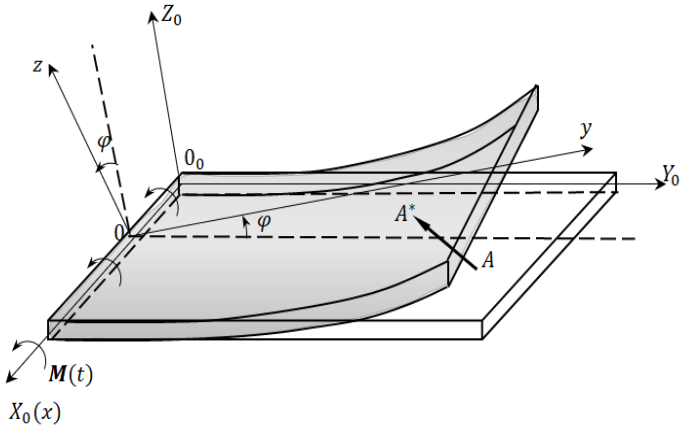
Яковенко А.А. – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, лаборатория трибологии, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
anastasiya.yakovenko@phystech.edu

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

Гукасян А.А.

Исследуется кинематика вращательного движения упругой пластинки, одна сторона которой жестко закреплена к оси вращения, а другие свободны. На основе гипотезы теории тонких пластин, исследуются скорость и ускорения движений точек упругой пластинки в зависимости от прогиба срединной плоскости. Определены те дополнительные воздействия, которые обусловлены упругостью пластинки. Напряженно-деформированное состояние однородной и изотропной пластинки приведено в рамках гипотез и в зависимости от прогиба срединной плоскости.

1. Введение. Исследования кинематики движения упругой пластинки являются актуальными, поскольку они находят широкое применение в конструкциях современной техники. Колебание пластинки во время движения механических систем существенно влияет на качество выполняемых работ. Такими механическими системами могут являться летательные аппараты, манипуляционные роботы и другие механизмы, конструкции которых содержат упругие элементы типа пластинки. Рассмотрим изотропную прямоугольную пластинку $(a\times b)$, одна сторона которой жестко закреплена, а другие свободны. Пластинка, постоянной толщины h, характеризуется цилиндрической жесткостью на изгиб D и плотностью ρ. Колебательное движение происходит в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$ (Фиг.1) и оно осуществляется вращательным моментом сил $\mathbf{M}(t)$, приложенным к оси вращения O_0X_0. Координатная плоскость $X_0O_0Y_0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки. Обобщенную координату движения пластинки обозначим через $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между плоскостью $X_0O_0Y_0$ и плоскостью, проходящей через неподвижную прямую O_0X_0 и являющейся касательной к срединной поверхности деформируемой пластинки в любой точке оси O_0X_0. Исследуется кинематика движения прямоугольной пластинки на основе гипотез, предложенных Кирхгофом [1-4]. Предполагается, что эти гипотезы имеют место во время движения пластинки в любой момент времени.



Компоненты вектора перемещений и деформации произвольной точки пластинки во время движения являются функциями прогиба $\left(u_3\left(x,y,t\right)\right)$ срединной плоскости пластинки [1-5].

$$u_1=-z\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x},\qquad u_2=-z\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y},\qquad u_3=u_3\left(x,y,t\right) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x^2},\qquad \varepsilon_{yy}=-z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y^2},\qquad \varepsilon_{xy}=-2z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x\partial y} \tag{1.2}$$

Радиус-вектор точек пластины относительно точки $O\left(x,0,0\right)$ после деформации в подвижной системе координат $Oxyz$ обозначим через $\boldsymbol{\rho}\left(x,y,t\right)$,

$$\boldsymbol{\rho}\left(x,y,z,t\right)=\mathbf{r}\left(x,y,z,t\right)+\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right) \tag{1.3}$$

Относительно неподвижной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ радиус-вектор произвольной точки A^* пластины имеет следующие координаты

$$\boldsymbol{\rho}_{A^*}(x,y,z,t)=\boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{r}(x,y,z,t)+\mathbf{u}(x,y,z,t)\right) \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}$ матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$.

Следовательно, координатами произвольной точки пластинки после деформации относительно неподвижной системы координат, согласно (1.1), (1.4), являются

$$\begin{aligned}
&X_{A^*}=x+u_1(x,y,z,t)\\
&Y_{A^*}=\left(y+u_2(x,y,z,t)\right)\cos\varphi-\left(z+u_3(x,y,t)\right)\sin\varphi\\
&Z_{A^*}=\left(y+u_2(x,y,z,t)\right)\sin\varphi+\left(z+u_3(x,y,t)\right)\cos\varphi
\end{aligned} \tag{1.5}$$

или с учетом (1.1)

$$X_{A^*}=x-z\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial x},Y_{A^*}=\left(y-z\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y}\right)\cos\varphi-\left(z+u_3(x,y,t)\right)\sin\varphi$$

$$Z_{A^*}=\left(y-z\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y}\right)\sin\varphi+\left(z+u_3(x,y,t)\right)\cos\varphi \tag{1.6}$$

а для точек срединной плоскости будут

$$X_{A^*}=x,Y_{A^*}=y\cos\varphi-u_3(x,y,t)\sin\varphi,Z_{A^*}=y\sin\varphi+u_3(x,y,t)\cos\varphi \tag{1.7}$$

2. Скорость движения упругой пластинки. Определим скорость движения точек упругой пластинки относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ по общей формуле, полученной в первой главе [4], для произвольной точки трехмерного упругого тела [6-8]

$$\mathbf{V}_{A^*}=\mathbf{V}_0+\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+\boldsymbol{\Gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(x,y,z,t)+\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,z,t)) \tag{2.1}$$

Здесь, в частности, для скорости движения точек упругой пластинки имеем $\mathbf{V}_0=0$.

Компоненты вектора скорости движения точек пластинки, в момент времени t имеют вид

$$V_{A^*X_0}=-z\frac{\partial^2u_3(x,y,t)}{\partial x\partial t},$$

$$\begin{aligned}
V_{A^*Y_0}&=-z\omega_x\cos\varphi-y\omega_x\sin\varphi-z\frac{\partial^2u_3(x,y,t)}{\partial y\partial t}\cos\varphi-\\
&-\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial t}\sin\varphi-u_3(x,y,t)\omega_x\cos\varphi+z\omega_x\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y}\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
V_{A^*Z_0}&=-z\omega_x\sin\varphi+y\omega_x\cos\varphi-\\
&-z\frac{\partial^2u_3(x,y,t)}{\partial y\partial t}\sin\varphi+\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial t}\cos\varphi-u_3(x,y,t)\omega_x\sin\varphi-z\omega_x\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y}\cos\varphi
\end{aligned}$$

Выражения (2.2) можно также получить непосредственно из (1.4), вычисляя производные по времени.

Скорость движения точек упругой пластинки представим в виде суммы двух скоростей

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_{A^*}=\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\\
&\mathbf{V}_1=\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}),\mathbf{V}_2=\boldsymbol{\Gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(x,y,t)+\boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}(x,y,t))
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где V_1 – скорость движения точек абсолютно твердой модели пластинки, а V_2 – компоненты скорости движения, обусловленной упругостью пластинки [4,5]

$$V_{1,1}=0,\quad V_{1,2}=-z\dot{\varphi}\cos\varphi-y\dot{\varphi}\sin\varphi,\quad V_{1,3}=-z\dot{\varphi}\sin\varphi+y\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{2.4}$$

$$V_{2,1} = -z\frac{\partial^2 u_3(x,y,t)}{\partial x \partial t}$$

$$V_{2,2} = -\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial t}\sin\varphi - z\frac{\partial^2 u_3(x,y,t)}{\partial y \partial t}\cos\varphi - u_3(x,y,t)\dot{\varphi}\cos\varphi + z\dot{\varphi}\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y}\sin\varphi$$

$$V_{23} = \frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial t}\cos\varphi - z\frac{\partial^2 u_3(x,y,t)}{\partial y \partial t}\sin\varphi - u_3(x,y,t)\dot{\varphi}\sin\varphi - z\dot{\varphi}\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial y}\cos\varphi \qquad (2.5)$$

Слагаемое $\mathbf{V}_2$ имеет порядок ε, поскольку в линейной теории упругости поперечное смещение пластинки мало $\left(\max\left|\mathbf{u}(x,y,t)\right| / \min(a,b) \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1\right)$, а цилиндрическая жесткость на изгиб велика $\left(D \sim \varepsilon^{-1}\right)$.

Скорость движения точек срединной плоскости $(z=0)$ пластинки имеет следующие компоненты

$$V_{1,1} = 0, V_{1,2} = -y\dot{\varphi}\sin\varphi, V_{1,3} = +y\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$V_{2,1} = 0, V_{2,2} = -\frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial t}\sin\varphi - u_3(x,y,t)\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad (2.6)$$

$$V_{2,3} = \frac{\partial u_3(x,y,t)}{\partial t}\cos\varphi - u_3(x,y,t)\dot{\varphi}\sin\varphi$$

3. Ускорение движения упругой пластинки. Определим ускорение движения упругой пластинки с помощью формулы, которая определяет ускорение движения произвольной точки трехмерного упругого тела [4,5] . Эту формулу представим в виде

$$\mathbf{W}_{A^*} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 \left(\mathbf{W}_0 = 0\right) \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{W}_1 = \frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\Gamma}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\right) = \boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})) + \boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}) =$$
$$= \boldsymbol{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}\cdot\omega^2\right) + \boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}) \qquad (3.2)$$

$$\mathbf{W}_2 = \boldsymbol{\Gamma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}(x,y,z,t) + \boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}(x,y,z,t)) + 2\boldsymbol{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(x,y,z,t)\right) +$$
$$+\boldsymbol{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}(x,y,z,t)) - \mathbf{u}(x,y,z,t)\cdot\omega^2\right) \qquad (3.3)$$

Здесь $\mathbf{W}_{ТП}^{вр} = \boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r})$ - вращательное ускорение, а $\mathbf{W}_{ТП}^{ос} = \boldsymbol{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}\cdot\omega^2\right)$ - осестремительное ускорение движений пластинки.

Ускорение движений абсолютно жесткой модели пластинки, согласно (3.2), имеет вид

$$W_{1,X_0} = 0, W_{1,Y_0} = -\varepsilon_x z\cos\varphi - \varepsilon_x y\sin\varphi - \omega_x^2 y\cos\varphi + \omega_x^2 z\sin\varphi$$
$$W_{1,Z_0} = -\varepsilon_x z\sin\varphi + \varepsilon_x y\cos\varphi - \omega_x^2 y\sin\varphi - \omega_x^2 z\cos\varphi, \left(\varepsilon_x = \ddot{\varphi}, \omega_x = \dot{\varphi}\right) \qquad (3.4)$$

Определяя слагаемые в (3.3) для упругой модели пластинки, где $\mathbf{W}_{УП}^{от} = \boldsymbol{\Gamma}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{u}(x,y,z,t)}{\partial t^2}$ - относительное ускорение, $\mathbf{W}_{УП}^{вр} = \boldsymbol{\Gamma}\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{u}(x,y,z,t))$ - вращательное ускорение, $\mathbf{W}_{УП}^{ук} = 2\boldsymbol{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{u}(x,y,z,t)}{dt}\right)$ - поворотное ускорение, или ускорение Кориолиса, а

$\mathbf{W}_{УП}^{oc} = \mathbf{\Gamma}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\right)-\mathbf{u}\left(x,y,z,t\right)\cdot\omega^2\right)$-осестремительное ускорение движений точек упругой модели пластинки, можно определить дополнительные слагаемые ускорения, обусловленные упругостью. Все названия компонентов ускорения являются аналогами компонентов вектора ускорения сложного движения абсолютно твердого тела [6-8].

Компоненты вектора ускорения движений пластинки, обусловленные упругостью, согласно (3.3), имеют вид

$$W_{2,X_0} = -z\frac{\partial^3 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x\partial t^2}, \qquad W_{2,Y_0} = -z\frac{\partial^3 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y\partial t^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial t^2}\sin\varphi -$$

$$-\varepsilon_x u_3\left(x,y,t\right)\cos\varphi + \varepsilon_x z\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y}\sin\varphi - 2\omega_x\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial t}\cos\varphi + \tag{3.5}$$

$$+2\omega_x z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y\partial t}\sin\varphi + \omega_x^2 z\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y}\cos\varphi + \omega_x^2 u_3\left(x,y,t\right)\sin\varphi$$

$$W_{2,Z_0} = -z\frac{\partial^3 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y\partial t^2}\sin\varphi + \frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial t^2}\cos\varphi - \varepsilon_x u_3\left(x,y,t\right)\sin\varphi - \varepsilon_x z\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y}\cos\varphi -$$

$$-2\omega_x\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial t}\sin\varphi - 2\omega_x z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y\partial t}\cos\varphi + \omega_x^2 z\frac{\partial u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y}\sin\varphi - \omega_x^2 u_3\left(x,y,t\right)\cos\varphi$$

Объединяя (3.4) и (3.5), окончательно получим проекции вектора ускорения движений упругой пластинки в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$ относительно неподвижной системы. Ускорение движения точек срединной плоскости определяется при $z=0$.

4. Напряженно-деформационное состояние упругой пластинки. Исследование напряженного состояния упругой пластинки основано на гипотезах, согласно которым компонентами деформации являются

$$\varepsilon_{zz} = 0,, \varepsilon_{yz} = 0, \varepsilon_{zx} = 0;\ \varepsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = -2z\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x\partial y} \tag{4.1}$$

Вычислим нормальные напряжения σ_{xx}, σ_{yy} для однородной и изотропной пластинки [1-3]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{zz}+\sigma_{xx}\right)\right), \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\right)$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{2}{E}\left(1+\nu\right)\sigma_{xy}, \varepsilon_{yz} = \frac{2}{E}\left(1+\nu\right)\sigma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \frac{2}{E}\left(1+\nu\right)\sigma_{zx} \tag{4.2}$$

Из первых двух формул (4.2) и на основании гипотезы об отсутствии давления между слоями пластинки, пренебрегая напряжением σ_{zz} по сравнению с напряжениями σ_{xx}, σ_{yy}, получим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right), \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right) \tag{4.3}$$

Учитывая соотношения (4.1), из (4.3) определим σ_{xx} и σ_{yy}

$$\sigma_{xx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y^2}\right), \sigma_{yy} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x^2}\right) \tag{4.4}$$

Из четвертой формулы (4.2) и (4.1), имеем

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{\left(1+\nu\right)}\frac{\partial^2 u_3\left(x,y,t\right)}{\partial x\partial y}, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0 \tag{4.5}$$

где $E-$ модуль Юнга, $\nu-$ коэффициент Пуассона.

Заключение. Определены скорость и ускорения движения точек упругой пластинки относительно неподвижной системы координат по общей формуле, определяющей кинематику движения трехмерного упругого тела. Все кинематические величины определены в зависимости от прогиба срединной плоскости пластинки [4,5]. Результаты исследования могут быть применены в задачах динамики и управления колебательным движением механических систем, содержащих упругие элементы типа пластинки [9-11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. Тех.-Теор. Лит., М.-Л., 1947, 465с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.; Наука, 1968. 592 с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.; Наука, 1979, 560 с.
4. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. Ереван, Изд. НАН РА, Гитутюн, 2024, 190 с.
5. Гукасян А.А. Кинематический анализ движений упругой пластинки. JARiNS 2025, Issue 22, pp.4-14.
6. Суслов Г.К. Теоретическая механика. ГОСТЕХИЗДАТ, М.-Л., 1946, 655с.
7. Лурье А.И. Аналитическая механика. Изд. Физ.-Мат. Лит., М. 1961, 824.
8. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. Изв. АН СССР, МТТ. 1983, № 4, с.101-113.
9. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки. Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990, т. 43, № 4, с. 13-23.
10. Гукасян А.А. Об управляемом движении упругого космического аппарата. Изв. НАН РА, Механика. 1995, т. 48, № 1, с. 55-63.
11. Айрапетян В.В., Гукасян А.А. Об управляемом движении одной модели летательного аппарата с упругими элементами. Изв. НАН РА, Механика. 2000, т. 53, № 1, с. 61-68.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апресович - доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **E-mail:** ghukasyan10@yandex.com

СМЕШАННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ 3D ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ДАННЫХ О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА

Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р.

Определение напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций является важным аспектом в инженерных и технических приложениях, когда необходимо оценить деформации и напряжения на недоступных поверхностях конструкции, где по каким-либо причинам прямое измерение этих параметров невозможно. В трехмерной постановке рассматриваются вынужденные колебания двухслойной оболочки, когда на верхней лицевой поверхности заданы смешанные условия, между слоями оболочки выполняются условия полного контакта, а данные о перемещении точек поверхности контакта между слоями заданы как данные измерительных средств. Асимптотическим методом определены амплитуды колебаний и выведены условия возникновения резонанса.

Введение. В современной инженерной практике тонкостенные упругие многослойные конструкции, состоящие из балок, пластин или оболочек, считаются одними из наиболее эффективных элементов. В строительной сфере особенно важно отслеживать перемещения между слоями, а также возникающие деформации и напряжения, поскольку это позволяет адекватно оценить механические характеристики материалов в реальных условиях эксплуатации, своевременно выявлять возможные дефекты и снижать вероятность разрушений. Актуальность такого подхода возрастает при проектировании ответственных объектов, таких как компоненты авиационной и космической техники, где требования к безопасности особенно высоки. Поэтому способность анализировать и прогнозировать напряжённо-деформированное состояние многослойных конструкций играет ключевую роль как в обеспечении их надёжности и эффективности, так и в общем развитии инженерных технологий. Особенно критично понимание напряжённого и деформированного состояния в тех случаях, когда необходим анализ внутренних поверхностей конструкции, но прямое измерение невозможно. Динамические задачи слоистых оболочек, когда верхняя лицевая поверхность свободна, между слоями оболочки выполняются условия полного контакта, а значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между отдельными слоями, как данные измерительных средств, рассмотрены в [1]. Динамическая смешанная трехмерная задача теории упругости для трехслойного пакета из ортотропных пластин, когда измерительные данные сняты с поверхности контакта между определенными слоями внутри пакета, решена в [2].

В данной работе решена динамическая задача для двухслойных оболочек при полном контакте между слоями, когда на верхней поверхности заданы смешанные граничные условия, а данные о перемещении точек поверхности контакта между слоями заданы как данные измерительных средств.

1. Вынужденные колебания двухслойной оболочки. Рассматриваются вынужденные колебания двухслойной ортотропной оболочки $D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, 0 \le \gamma \le h_1 + h_2\}$, где D_0 – лицевая поверхность первого слоя, α, β – линии кривизны поверхности D_0, γ – прямолинейная ось, направленная вниз перпендикулярно к поверхности D_0. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат, при неклассических краевых условиях. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [3].

Имеем: уравнения движения

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}\right) - k_\beta\tau_{\beta\beta}^{(j)} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\tau_{\beta\alpha}^{(j)}\right) + k_\alpha\tau_{\alpha\beta}^{(j)} + \left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial\gamma} + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{R_1} = \rho^{(j)}\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2 U^{(j)}}{\partial t^2}$$

$$(A \leftrightarrow B; \alpha \leftrightarrow \beta; R_1, R_2; U, V), j = I, II \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{\gamma\gamma}^{(j)}}{\partial \gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}^{(j)}}{R_2}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(j)}}{\partial \beta} + k_\beta \tau_{\alpha\gamma}^{(j)} + k_\alpha \tau_{\beta\gamma}^{(j)} = \rho^{(j)}\left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2 W^{(j)}}{\partial t^2}$$

$$\left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\alpha\beta}^{(j)} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\beta\alpha}^{(j)} \text{ (условие симметрии)}$$

уравнения состояния (соотношения упругости) для ортотропного тела

$$\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial \alpha} + k_\alpha V^{(j)} + \frac{W^{(j)}}{R_1}\right) = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)a_{11}^{(j)}\tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)a_{12}^{(j)}\tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\tau_{\gamma\gamma}^{(j)}$$

$$(A, B; \alpha \leftrightarrow \beta; R_1 \leftrightarrow R_2; U \leftrightarrow V; a_{11}, a_{22};\ a_{13}, a_{23})$$

$$\left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\gamma}{R_1 R_2}\right]\frac{\partial W^{(j)}}{\partial \gamma} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)a_{13}^{(j)}\tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)a_{23}^{(j)}\tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{33}^{(j)}\tau_{\gamma\gamma}^{(j)}$$

$$\left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial \beta} - k_\beta V^{(j)}\right) + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V^{(j)}}{\partial \alpha} - k_\alpha U^{(j)}\right) = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)a_{66}^{(j)}\tau_{\alpha\beta}^{(j)} \quad (2)$$

$$\left[1 + \gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\gamma^2}{R_1 R_2}\right]\frac{\partial U^{(j)}}{\partial \gamma} - \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{U^{(j)}}{R_1} + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial W^{(j)}}{\partial \alpha} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right)a_{55}^{(j)}\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}$$

$$(A, B;\ \alpha, \beta;\ R_1 \leftrightarrow R_2;\ U, V;\ a_{55}, a_{44})$$

где k_α, k_β– геодезические кривизны, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы, $R_1,\ R_2$ – главные радиусы кривизны поверхности D_0, $\rho^{(j)}$ – плотности слоев, $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости ($a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$), j – номер слоя.

На лицевой поверхности $\gamma = 0$ заданы условия:

$$\tau_{\alpha\gamma}^{I}(\alpha, \beta, 0, t) = 0,\ \tau_{\beta\gamma}^{I}(\alpha, \beta, 0, t) = 0,\ \mathrm{W}^{I}(\alpha, \beta, 0, t) = 0 \quad (3)$$

На поверхности контакта между слоями известны значения перемещений точек поверхности контакта, как данные измерительных средств:

$$U^{I}(\alpha, \beta, h_1, t) = U^{II}(\alpha, \beta, h_1, t) = U^{+}(\alpha, \beta)\exp(i\Omega t), (U, V, W) \quad (4)$$

где Ω – частота вынужденных колебаний точек поверхности контакта между слоями оболочки.

На поверхности контакта между слоями должны выполняться условия полного контакта

$$\tau_{\alpha\gamma}^{I}(\alpha, \beta, h_1, t) = \tau_{\alpha\gamma}^{II}(\alpha, \beta, h_1, t), \quad (\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\gamma}) \quad (5)$$

$$U^{I}(\alpha, \beta, h_1, t) = U^{II}(\alpha, \beta, h_1, t), \quad (U, V, W) \quad (6)$$

В работе [4] показано, что сформулированная неклассическая краевая задача всегда имеет решение, более того, всегда существует классическая краевая задача, решением которой оно является.

В уравнениях (1), (2) перейдем к безразмерным координатам, и перемещениям по формулам $\alpha = R\xi,\ \beta = R\eta,\ \gamma = \varepsilon R\zeta = h\zeta,\ U = Ru,\ V = R\mathrm{v},\ W = Rw,\ h = h_1 + h_2,\ R$ – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров поверхности D_0, $h << R$), $\varepsilon = h/R$ – малый параметр. Общее решение поставленной задачи представляется в виде суммы решений внешней задачи и пограничного слоя. В данной работе разыскивается решение внешней задачи.

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде:

$$Q_{\alpha\beta}^{out(j)} = Q_{mk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)\, exp(i\Omega t), \quad (\alpha, \beta, \gamma); \quad m, k = 1,2,3; j = I, II \quad (7)$$

где $Q_{\alpha\beta}^{out(j)}$ – любая из величин напряжений и перемещений для внешней задачи. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром ε система относительно $Q_{mk}^{(j)}$. Решение задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\tau_{mk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{-1+s}\tau_{mk}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad m, k = 1,2,3; \quad s = \overline{0, N}; \quad j = I, II$$

$$\left(u^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)\right) = \varepsilon^s\left(u^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta)\right) \quad (8)$$

Обозначение $s=\overline{0,N}$ здесь и далее означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах целочисленных значений $0,N$.

Из асимптотики (8) следует, что, в отличие от классической теории, для данного класса задач все компоненты тензора напряжений асимптотически равноправны, равноправны также перемещения, и допущения классической теории пластин и оболочек здесь неприменимы.

После подстановки (8) в преобразованные к безразмерным уравнения (1), (2) для определения неизвестных коэффициентов разложения $Q_{mk}^{(j,s)}$ получается непротиворечивая система уравнений, которая преобразуется в следующий вид:

$$\tau_{12}^{(j,s)}=P_{1\tau}^{(j,s-1)},\tau_{21}^{(j,s)}=P_{1\tau}^{(j,s-1)}-r_2\zeta\tau_{21}^{(j,s-1)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(j,s-1)},e_1^{(j,s)}=P_{2\tau}^{(j,s-1)},e_2^{(j,s)}=P_{3\tau}^{(j,s-1)},$$
$$\frac{\partial\tau_{13}^{(j,s)}}{\partial\zeta}+\Omega_*^2\rho^{(j)}u^{(j,s)}=P_{6\tau}^{(j,s-1)},\ \Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2,\ (13,23,33;u,v,w;\ 6\tau,5\tau,4\tau) \quad (9)$$
$$\frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial\zeta}-a_{55}^{(j)}\tau_{13}^{(j,s)}=P_u^{(j,s-1)},\frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial\zeta}-a_{44}^{(j)}\tau_{23}^{(j,s)}=P_v^{(j,s-1)},\frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial\zeta}-e_3^{(j,s)}=P_w^{(j,s-1)},$$
$$r_1=\frac{R}{R_1},\ r_2=\frac{R}{R_2},\qquad e_i^{(j,s)}=a_{i1}^{(j)}\tau_{11}^{(j,s)}+a_{i2}^{(j)}\tau_{22}^{(j,s)}+a_{i3}^{(j)}\tau_{33}^{(j,s)},i=1,2,3;j=I,II$$

где функции $P_{i\tau}^{(j,s-1)}\ (i=\overline{1,6}),P_u^{(j,s-1)}(u,v,w)$ известные функции, зависящие от предыдущих приближений [1].

Компоненты тензора напряжений выражаются через компоненты $u^{(j,s)},v^{(j,s)},w^{(j,s)}$ вектора перемещения через формулы:

$$\tau_{13}^{(j,s)}=\frac{1}{\tilde{a}_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial\zeta}-P_u^{(j,s-1)}\right],\quad \tau_{23}^{(j,s)}=\frac{1}{\tilde{a}_{44}^{(j)}}\left[\frac{\partial v^{(j,s)}}{\partial\zeta}-P_v^{(j,s-1)}\right],$$
$$\tau_{12}^{(j,s)}=P_{1\tau}^{(j,s-1)},\tau_{21}^{(j,s)}=P_{1\tau}^{(j,s-1)}-r_2\zeta\tau_{21}^{(j,s-1)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(j,s-1)}, \quad (10)$$
$$\tau_{11}^{(j,s)}=\frac{1}{\Delta^{(j)}}\left[\Delta_2^{(j)}\frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial\zeta}+\Delta_{23}^{(j)}P_{2\tau}^{(j,s-1)}+\Delta_1^{(j)}P_{3\tau}^{(j,s-1)}-\Delta_2^{(j)}P_w^{(j,s-1)}\right],$$
$$(11,22,33;\Delta_2,\Delta_3,\Delta_{12};\ \Delta_{23},\Delta_1,\Delta_2;\ \Delta_1,\Delta_{13},\Delta_3)$$

где

$$\Delta_1^{(j)}=a_{13}^{(j)}a_{23}^{(j)}-a_{33}^{(j)}a_{12}^{(j)},\ \Delta_2^{(j)}=a_{12}^{(j)}a_{23}^{(j)}-a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)},\Delta_3^{(j)}=a_{13}^{(j)}a_{12}^{(j)}-a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)},$$
$$\Delta^{(j)}=a_{11}^{(j)}\Delta_{23}^{(j)}+a_{13}^{(j)}\Delta_2^{(j)}+a_{12}^{(j)}\Delta_1^{(j)},\ \Delta_{ik}^{(j)}=a_{ii}^{(j)}a_{kk}^{(j)}-(a_{ik}^{(j)})^2,\ i,k=1,2,3;j=I,II \quad (11)$$

Компоненты вектора перемещения являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2u^{(j,s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}^{(j)}\Omega_*^2\rho^{(j)}u^{(j,s)}=a_{55}^{(j)}P_{6\tau}^{(j,s-1)}+\frac{\partial P_u^{(j,s-1)}}{\partial\zeta},\ (u,v;\ a_{55},a_{44};\ 6\tau,5\tau)$$
$$\frac{\partial^2w^{(j,s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}\Omega_*^2\rho^{(j)}w^{(j,s)}=F_w^{(j,s-1)},\quad j=I,II. \quad (12)$$
$$F_w^{(j,s-1)}=\frac{1}{\Delta_{12}^{(j)}}\left[\Delta^{(j)}P_{4\tau}^{(j,s-1)}-\Delta_2^{(j)}\frac{\partial P_{2\tau}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}-\Delta_3^{(j)}\frac{\partial P_{3\tau}^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}+\Delta_{12}^{(j)}\frac{\partial P_w^{(j,s-1)}}{\partial\zeta}\right],$$

Решениями уравнений (12) являются функции следующего вида:

$$u^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta)=C_1^{(j,s)}(\xi,\eta)sin\chi^{(j,u)}\zeta+C_2^{(j,s)}(\xi,\eta)cos\chi^{(j,u)}\zeta+\bar{u}^{(j,s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad (13)$$
$$(\mathrm{u,v,w};\ 1,3,5;\ 2,4,6),\ \mathrm{j=I,II}$$

где

$$\chi^{(j,u)}=\sqrt{a_{55}^{(j)}\rho^{(j)}}\Omega_*,\ \chi^{(j,v)}=\sqrt{a_{44}^{(j)}\rho^{(j)}}\Omega_*,\ \chi^{(j,w)}=\sqrt{\frac{\Delta^{(j)}\rho^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}}\Omega_*,$$

а функции $\bar{u}^{(j,s)},\ \bar{v}^{(j,s)},\ \bar{w}^{(j,s)}$ являются частными решениями уравнений (12).

После удовлетворения граничных условий (3)-(6), получаются независимые алгебраические уравнения относительно неизвестных $C_i^{(j,s)}$ $(i=\overline{1,6};\ j=I,II)$. Системы будут иметь конечные решения в случае, если

$$cos\chi^{(I,u)}\zeta_1 \neq 0, cos\chi^{(I,v)}\zeta_1 \neq 0, \sin\chi^{(I,w)}\zeta_1 \neq 0,\ \zeta_1=\frac{h_1}{h}. \quad (14)$$

В случае невыполнения хотя бы одного из этих условий, в двухслойном пакете возникнет резонанс.

После решения полученных систем уравнений компоненты вектора перемещения примут вид:

для первого слоя

$$u^{(I,s)}=\frac{1}{cos\chi^{(I,u)}\zeta_1}(\left(u^{+(s)}-\bar{u}^{(I,s)}(\zeta_1)\right)cos\chi^{(I,u)}\zeta+$$

$$\frac{1}{\chi^{(I,u)}}\left(P_u^{(I,s-1)}(\zeta=0)-\frac{\partial\bar{u}^{(I,s)}(\zeta=0)}{\partial\zeta}\right)sin\chi^{(I,u)}(\zeta-\zeta_1))+\bar{u}^{(I,s)}(\zeta)\quad (u,v) \quad (15)$$

$$w^{(I,s)}=\frac{1}{sin\chi^{(I,w)}\zeta_1}\left((w^{+(s)}-\bar{w}^{(I,s)}(\zeta_1))sin\chi^{(I,w)}\zeta+\bar{w}^{(I,s)}(0)sin\chi^{(I,w)}(\zeta-\zeta_1)\right)+\bar{w}^{(I,s)}(\zeta)$$

для второго слоя

$$\mathrm{u}^{(\mathrm{II,s})}=\left(\frac{\mathrm{a}_{55}^{\mathrm{II}}}{\chi^{(\mathrm{II,u})}}\tau_{13}^{(\mathrm{I,s})}(\zeta_1)+\frac{\mathrm{P}_{\mathrm{u}}^{(\mathrm{II,s}-1)}(\zeta_1)}{\chi^{(\mathrm{II,u})}}\right)\sin\chi^{(\mathrm{II,u})}(\zeta-\zeta_1)+\left(\mathrm{u}^{+(\mathrm{s})}-\bar{\mathrm{u}}^{(\mathrm{II,s})}(\zeta_1)\right)\cos\chi^{(\mathrm{II,u})}(\zeta-$$

$$\zeta_1)+\bar{\mathrm{u}}^{(\mathrm{II,s})}(\zeta), \quad (16)$$

$$u^{+(0)}=\frac{U^+}{R},\quad u^{+(s)}=0, s>0,\ (\mathrm{u,v,w};\mathrm{a}_{55}^{\mathrm{II}},\mathrm{a}_{44}^{\mathrm{II}},\frac{\Delta^{\mathrm{II}}}{\Delta_{12}^{\mathrm{II}}};13{,}23{,}33).$$

Компоненты тензора напряжений определяются из формул (10).

Полученное решение, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности пакета. Для устранения возникшей неувязки необходимо иметь решение для пограничного слоя, которое при удалении от боковой поверхности во внутрь пакета убывает экспоненциально.

Заключение. Решена динамическая задача для двухслойной оболочки, когда на верхней лицевой поверхности заданы смешанные граничные условия, между первым и вторым слоями выполнены условия полного контакта, а также известны данные о перемещении точек контактной поверхности, как данные измерительных приборов.

Выведены условия резонанса, и показано, что в двухслойной оболочке, когда значения компонент вектора перемещения фиксируются на контактной поверхности между первым и вторым слоями, резонансные условия зависят только от параметров первого слоя и совпадают с условиями резонанса для трехслойной пластины при аналогичных условиях для первых двух слоев [2], а также с условиями резонанса для двухслойной оболочки в направлениях u и v компонент вектора перемещения в случае, когда верхняя лицевая поверхность свободна [1]. Определены компоненты тензора напряжений и вектора перемещения для обоих слоев, и показано, что параметры всех слоёв оказывают влияние на напряжённо-деформированное состояние многослойного пакета.

Анализируя данные измерительных приборов и отслеживая динамику изменения напряженно-деформированного состояния пакета во времени, можно выявить моменты, когда может произойти повреждение слоистого пакета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aghalovyan, L.A., Ghulghazaryan, L.G., Kaplunov, J.D. et al. Three-Dimensional Dynamic Analysis of Layered Elastic Shells. J Math Sci 273, 999–1015 (2023). https://doi.org/10.1007/s10958-023-06560-5

2. Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р. Смешанная краевая задача о вынужденных колебаниях трехслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта. Изв. НАН Армении. Механика. Т. 78 (1). 2025, стр. 37-45.
3. Aghalovyan L. Asymptotic Theory of Anisо tropic Plates and Shells. Singapore-London. World Scientific Publishing. 376p (2015).
4. Aghalovyan L.A. On one class of three-dimensional problems of elasticity theory for plates// Proceedings of A.Razmadze Mathematical Institute of Georgia. 2011. Vol. 155. P.3-10.

Сведения об авторах

Гулгазарян Лусине Гургеновна, доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института Механики НАН Армении, заведующая кафедрой Математики и методики ее преподавания Армянского государственного педагогического университета имени Х. Абовяна, Тел.: (374 91)302554.
E-mail*:* lusina@mail.ru, ghulghazaryanlusine08@aspu.am

Амбарцумян Парандзем Рафиковна
Преподаватель и соискатель кафедры Математики и методики ее преподавания Армянского государственного педагогического университета имени Х. Абовяна. Тел.: (374 77) 684856.
E-mail: hambardzumyanparandzem05@aspu.am

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С МЕЖФАЗНЫМ РАЗРЕЗОМ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ ПОКОЯ

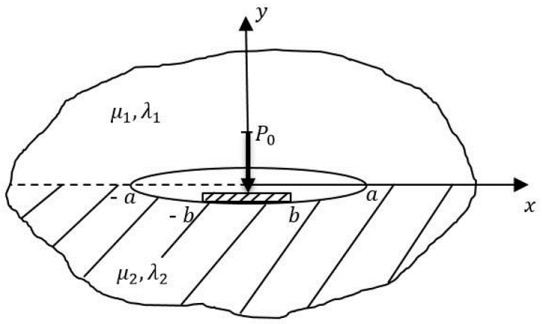
Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

В работе рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости с межфазной конечной трещиной, в один из берегов которой вдавливается абсолютно жёсткий штамп, не доходящий до концевых точек трещины, с учётом трения покоя. Получено определяющее сингулярное интегральное уравнение задачи с переменными коэффициентами относительно нормального контактного давления, действующего под штампом. Эффективное решение определяющего уравнения построено численно-аналитическим методом механических квадратур.

Постановка задачи и вывод определяющего уравнения

Пусть кусочно-однородная упругая плоскость из двух разнородных полуплоскостей с коэффициентами Ламе λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 соответственно на линии стыка, по которой направлена ось Ox декартовой системы координат Oxy, на интервале $(-a,a)$ содержит конечный межфазный разрез длины $2a$. Будем полагать, что на интервале $(-b,b)$ нижнего берега разреза, при помощи сосредоточенной нагрузки величины P_0, приложенной к центру штампа, вдавливается абсолютно жёсткий штамп длиной $2b$ $(b<a)$ (Фиг.1).

Будем считать также, что под штампом возникают касательные контактные напряжения покоя, которые прямо пропорциональны нормальному контактному давлению. Причём коэффициент трения прямо пропорционален координатам точек соприкасающихся поверхностей [1,2].



Фиг.1

Ставится задача: построить эффективное решение поставленной задачи, изучить закономерности изменения контактных напряжений под штампом, раскрытия трещины и J-интеграла Черепанова-Райса в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

Снабдив индексами 1 и 2 компоненты напряжений и смещений точек верхней и нижней полуплоскостей, условия на берегах разреза представим в виде:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \sigma_y^{(2)}(x,0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x,0); \\ u_1(x,0) + iv_1(x,0) = u_2(x,0) + iv_2(x,0) \end{cases} \quad (|x|>a); \tag{1a}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) = \tau_{xy}^{(1)}(x,0) = 0; \qquad (-a<x<a) \\ \sigma_y^{(2)}(x,0) = \tau_{xy}^{(2)}(x,0) = 0; \qquad (-a<x<-b;\ \&\, b<x<a) \end{cases} \tag{1b}$$

$$\begin{cases} v_2(x,0)=\delta & (-b<x<b) \\ \tau_{xy}^{(2)}(x,0)=f\dfrac{x}{b}P(x) & (-b<x<b) \end{cases} \tag{1c}$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x,y)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ $(j=1,2)$ – компоненты напряжений, действующих в соответствующих полуплоскостях, $u_j(x,y)$ и $v_j(x,y)(j=1,2)$ – компоненты смещений точек этих полуплоскостей, $P(x)=-\sigma_y^{(2)}(x,0)$ – контактное давление, f – коэффициент трения покоя, а δ – жёсткое смещение штампа.

Используя функцию влияния для кусочно-однородной плоскости с межфазным разрезом, построенной на основе разрывных решений [3], которые удовлетворяют условиям (1a) и (1b), и удовлетворив первому условию (1c), первоначально дифференцируя его по x, с учётом последнего равенства (1c), придём к следующему сингулярному интегральному уравнению с переменными коэффициентами:

$$f\frac{x}{b}P(x)+\frac{q_*}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{P(s)ds}{s-x}+\operatorname{Im}\int_{-b}^{b}K(s,x)(1+ifs/b)P(s)ds=\operatorname{Im}f(x)\quad(-b<x<b) \tag{2}$$

которое нужно рассматривать при условии равновесия штампа:

$$\int_{-b}^{b}P(s)ds=P_0. \tag{3}$$

Здесь $K(s,x)$, $f(x)$ – регулярные заданные функции, зависящие от упругих характеристик разнородных полуплоскостей и полудлины межфазной трещины, и $q_*=(\lambda_2+2\mu_2)/\mu_2$.

Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения построим численно-аналитическим методом механических квадратур [4]. С этой целью при помощи замены переменных $x=b\eta$, $s=b\xi$ уравнение (2) и условие (3) сформулируем на интервале (-1,1) и, обозначив

$$\varphi(\eta)=bP(b\eta)/P_0;\quad K_*(\eta,\xi)=b(1+if\xi)K(b\eta,b\xi),\ f_*(\eta)=bf(b\eta)/P_0$$

их запишем в следующим образом:

$$f\eta\varphi(\eta)+\frac{q_*}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+\int_{-1}^{1}K_*(\xi,\eta)\varphi(\xi)ds=f_*(\eta).\qquad(-1<x<1) \tag{4}$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(s)ds=1 \tag{5}$$

Исследование главной части уравнения (4) показывает, что искомая функция $\varphi(\eta)$ в концевых точках интервала интегрирования имеет показательную особенность [3] и, следовательно, её можно представить в следующем виде:

$$\varphi(\eta)=\frac{\varphi_*(\eta)}{(1-\eta^2)^{1/2-\beta}},\ \left(\beta=\frac{1}{2\pi}arctg\frac{f}{q_*}\right), \tag{6}$$

где $\varphi_*(\eta)$ – непрерывная ограниченная функция на интервале [-1,1].

Подставляя значение функций $\varphi(\eta)$ из (6) в (4) и (5), используя квадратурные формулы приведенные в [4], по обычной процедуре, придём к системе алгебраических уравнений относительно значений функции $\varphi_*(\eta)$ в точках коллокации ξ_k $(k=1-N)$.

После решения полученной системы, при помощи формулы Лагранжа может быть восстановлена искомая функция $\varphi(\eta)$ и определены все необходимые механические характеристики поставленной задачи, каковыми являются контактные напряжения, действующие под штампом, J-интеграл Черепанова- Райса в концевых точках трещины, а также раскрытие трещины. Для определения указанных величин получены формулы. Проведён численный расчет и исследованы закономерности изменения контактных напряжений, раскрытия разреза и J-интеграла Черепанова-Райса в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной. // Известия НАН РА, Механика, т.73, № 4, 2020г, с. 3-12 .
2. Hakobyan, V., Dashtoyan, L., Amirjanyan, H. (2024). Contact Problem for a Piecewise Homogeneous Plane with a Finite Crack Under the Static Friction. In: Altenbach, H., Öchsner, A. (eds) State of the Art and Future Trends in Materials Modelling 2. Advanced Structured Materials, vol 200. P.243-253. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-72900-3_12
3. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Контактная задача для составной плоскости с разрезом // Известия НАН РА, Механика, т.75, № 1-2, 2022г, с.17-26.
4. Саакян А.В., Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные. Известия РАН, Механика твердого тела, 2012, №6, сс.116-121.

Сведения об авторах

Даштоян Лилит Левоновна канд. физ.-мат. наук, Директор Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568189

Акопян Лусине Ваграмовна канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (37410) 568188

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Джилавян С. А., Василян Т. Г., Саркисян К. С.

Термоупругие колебания трансверсально-изотропной пластинки рассматриваются с учетом поперечных сдвиговых деформаций. В постановке задачи колебаний учитывается термоупругое рассеяние механической энергии, т.е. принимаются уравнения и условия связанной термоупругости на основе уточненной теории анизотропных пластин.

Рассматриваются термоупругие колебания упругой пластинки, изготовленной из однородного, трансверсально-изотропного материала. Прямоугольная пластинка толщиной $2h$ отнесена к прямоугольной системе координат x, y, z, плоскости изотропии параллельны координатной плоскости xOy, совпадающей со срединной плоскостью пластинки. Пластинка находится под влиянием температурного поля, и учитывается термоупругое рассеяние механической энергии, рассматривая связанную задачу термоупругости.

В основу ставятся предположения уточненной теории пластин [1], учитываются поперечные сдвиговые деформации. Некоторые анизотропные пластинки сочетают высокие механические характеристики на растяжение-сжатие со слабым сопротивлением на сдвиг. Следовательно, учет поперечных сдвиговых деформаций вносит существенное изменение в классическую теорию анизотропных тонкостенных элементов конструкций типа пластин. Для определения функции перемещения w(x,y,τ) поперечных колебаний, получим дифференциальное уравнение [2]

$$\mathcal{D}\Delta\Delta w + (1 - h_0 h^2 \Delta)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \mathcal{D}\alpha\frac{1+\nu}{h}\Delta\mathcal{T} = 0 \qquad (1)$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{Eh^2}{3\rho(1-\nu^2)}, \quad h_0 = \frac{2E}{5\mathbb{G}'(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

E, α – модуль Юнга и температурный коэффициент линейного расширения для направлений в плоскости изотропии, $\mathbb{G}'$ – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии, ν-коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости, τ – параметр времени, ρ – плотность материала.

$\mathcal{T}(x,y,\tau) = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} tzdz$ интегральная характеристика функции температуры $t(x,y,z,\tau)$. Отметим, что если принять $h_0 = 0$, то получим уравнение поперечных колебаний на основе классических гипотез тонких пластин – не учитывая поперечные сдвиги.

Колебания упругой пластинки описываются взаимодействием поля деформации и температурного поля. Тепловые деформации и напряжения в упругом теле возникают из-за теплообмена с внешней средой и передачи тепла от источников, а также изменением температурного поля, обусловленным процессом деформирования. Вместе с уравнением (1) рассматривается и дифференциальное уравнение теплопроводности.

Определение температурного поля в пластинке осуществляется путем сведения пространственной задачи теплопроводности к некоторой двумерной задаче с учетом термоупругого рассеяния (диссипации) механической энергии. Возникают обоснованные трудности, когда необходимо удовлетворить тепловым условиям на поверхностях пластинки. Применяется операторный (символический) метод в комплексе с методом усреднения температуры по толщине пластинки [2,3]. Как известно, в теории упругих пластин вместо компонент тензора напряжений вводятся интегральные величины – усилия, моменты, и задачи для пластинок сводятся к интегрированию дифференциальных уравнений конечного порядка на срединной плоскости. В связанной задаче термоупругости для тонких пластин тоже вводятся искомые функции интегральных характеристик температуры. После предельного перехода получаем

двумерное дифференциальное уравнение второго порядка относительно интегральной характеристики температуры [2,3,4]

$$h^2\frac{\lambda}{\lambda_z}\Delta\mathcal{T}-h^2\frac{1+\varepsilon_0\varkappa}{a_z}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\tau}-\mu\mathcal{T}=\frac{h^3\varepsilon_0}{\alpha\,a_z}\frac{1-2\nu}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{6\rho}{5\mathbb{G}'}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}-\Delta w\right)-\mu\frac{Bi}{1+Bi}t_2-\frac{h^2}{\lambda_z}q \qquad (2)$$

Особенность задачи в том, что перемещение и теплопроводность возникают граничными условиями, теплообменом и тепловыми источниками, процессом деформации. λ,λ_z– коэффициенты теплопроводности вдоль координатных осей,

$$\varepsilon_0=\frac{Et_0\alpha^2}{c_\varepsilon(1-2\nu)}\frac{1+\nu}{1-\nu}=\frac{c_\sigma-c_\varepsilon}{3c_\varepsilon}\frac{1+\nu}{1-\nu},\quad c_\sigma>c_\varepsilon$$

$$\mu=15\frac{1+Bi}{6+Bi}$$

ε_0, $\varkappa$- характеризуют термоупругое рассеяние механической энергии и анизотропию материала, соответственно. В случае изотропной пластинки $\varkappa=1$, а если принять $\varepsilon_0=0$, то уравнение (2) сводится к обычному, нестационарному уравнению без учета термоупругого рассеяния энергии [2,4,5]. $Bi=h\frac{\lambda_c}{\lambda_z}$ – характеризует теплообмен (критерий Био), λ_c– коэффициент теплообмена с поверхностей $z=\pm h,\ t_2=\frac{1}{2}(t_c^+-t_c^-),\ t_c^\pm$ –значения температуры среды, омывающей поверхности $z=\pm h$, c_σ,c_ε- теплоемкости, $a_z=\frac{\lambda_z}{c_\varepsilon}$ – коэффициент температуропроводности, отношение между способностью материала проводить и накапливать тепло, $\frac{h^2}{a_z}$ – характерное время нагрева.

Уравнения (1), (2) составляют систему дифференциальных уравнений поперечных термоупругих колебаний пластин с учетом поперечных сдвигов и термоупругой диссипации механической энергии. При уточненной теории пластин, когда принимается квадратичный закон распределения поперечных сдвиговых деформаций по толщине [1], перемещения, расчетные деформации и напряжения в пластинке изменяются по толщине стенки по кубическому закону. Принятие кубического закона изменения температуры по толщине находится в полном соответствии с уточненной теорией [1,2].

Отметим, что уравнение теплопроводности (2) получено, принимая граничные условия теплообмена на поверхностях $z=\pm h$

$$h\frac{\partial t}{\partial z}\pm Bi\left(t-t_c^\pm\right)=0 \qquad (3)$$

а уравнение поперечных колебаний получено, принимая касательные напряжения в виде [1]

$$\sigma_{xz}=\frac{1}{2}(z^2-h^2)\varphi(x,y,\tau),\ \ \sigma_{yz}=\frac{1}{2}(z^2-h^2)\psi(x,y,\tau) \qquad (4)$$

При необходимости, искомые функции распределения напряжений (поперечных сил) $\varphi(x,y,\tau)$, $\psi(x,y,\tau)$ могут быть найдены из системы уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{3}{h^2}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}$$

$$\left(1-h_0h^2\frac{1-\nu}{2}\Delta\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0 \qquad (5)$$

Пусть прямоугольная, шарнирно опертая по всему контуру $x=0,x=a,\ y=0,y=b,$ пластинка находится под действием теплообмена и источника тепла интенсивностью q. На

плоскостях $x = 0, x = a,\ y = 0, y = b$ поддерживается постоянная температура. Вместе с граничными условиями надо иметь в виду начальные условия

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0, \qquad \mathcal{T} = 0, \qquad \text{при } \tau = 0$$

Решение представляется в виде

$$\mathrm{w}(x, y, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \Phi_{mn}(x, y)$$

$$\mathcal{T}(x, y, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_{mn}(\tau) \Phi_{mn}(x, y) \qquad (6)$$

$$\Phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}$$

Из уравнения (1) находим

$$\Theta_{mn}(\tau) = \lambda_{mn} \mathcal{W}_{mn}(\tau) + \frac{1 + h_0 \lambda_{mn}}{\lambda_{mn}} \frac{d^2 \mathcal{W}_{mn}}{d\tau^2} \qquad (7) \quad (6) \qquad (7)$$

где $\Theta_{mn}(\tau) = \alpha(1 + \nu)\mathcal{T}_{mn}(\tau),\ \mathcal{W}_{mn}(\tau) = \frac{w_{mn}(\tau)}{h}$,

$$\lambda_{mn} = \pi^2 h^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad , \quad \theta = \omega_0 \tau \ , \quad \omega_0 = \frac{E}{3\rho(1 - \nu^2)h^2} \qquad (8)$$

m, n=1,2,…

Из уравнения (2) получим дифференциальное уравнение третьего порядка относительно искомых функций $\mathcal{W}_{mn}(\tau)$. Принимая

$$\mathcal{W}_{mn}(\theta) = \not{f}_{mn} \exp(\Omega_{mn} \theta) \ , \quad \not{f}_{mn} = const \ , \qquad (9)$$

получим характеристическое уравнение термоупругого процесса

$$(\Omega_{mn}^2 + \lambda_{mn}^2 H_{mn})(\Omega_{mn} + A_{mn}) + \varepsilon_0 B_{mn} \Omega_{mn} = 0 \qquad (10)$$

Здесь

$$H_{mn} = \frac{1}{1 + h_0 \lambda_{mn}}$$

$$A_{mn} = \frac{1}{\upsilon} \frac{\lambda_{mn} \lambda_0 + \mu}{1 + \varepsilon_0 \varkappa + \varepsilon_0 (1 - 2\nu)(1 - H_{mn})} \ , \qquad \lambda_0 = \frac{\lambda}{\lambda_z}$$

$$B_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2 H_{mn}^2 (1 - 2\nu)}{1 + \varepsilon_0 \varkappa + \varepsilon_0 (1 - 2\nu)(1 - H_{mn})} \qquad (11)$$

$\upsilon = \frac{h^2 \omega_0}{a_z}$ – характеризует отношение времени нагрева пластинки к периоду упругого колебания.

Из термодинамических соображений $\varepsilon_0 \ll 1$, следовательно $\varepsilon_0 B_{mn} \ll 1$. Показано, что уравнение (10) всегда имеет комплексное решение, т.е. имеет место затухание процесса колебаний. Относительный коэффициент затухания невелик при очень больших и малых значениях υ. Если $\upsilon \to 0$, термоупругий процесс протекает почти при изотермических условиях. Если $\upsilon \to \infty$, то тепло, обусловленное самой деформацией, не успевает распространиться по толщине пластинки, и термоупругий процесс происходит почти при адиабатических условиях. Отметим, что тепловые моменты релаксируют быстрее сил, и это приводит к тому, что поперечные колебания затухают быстрее, чем продольные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М. Наука, 1987,-360с.
2. Джилавян С.А. К вопросу о термоупругих колебаниях транстропных пластин. Механика, ЕГУ, 1986, вып. 5, с. 230-241
3. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев; Наукова Думка, 1978. 264 с.
4. И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов Термоупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев; Наукова Думка, 1987, 264 с.
5. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. Киев; Наукова думка, 1972. 308с.

Сведения об авторах:

Джилавян Самвел Акопович к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой механики ЕГУ, samjilavyan@ysu.am

Василян Татевик Гургеновна диссертант кафедры механики ЕГУ, tat.vasilyan@gmail.com

Сакисян Карен Самсонович к.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН Армении, sarkar1999@mail.ru

ДИФРАКЦИЯ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА КРАЮ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Джилавян С.А., Саргсян А.С., Галичян Т.А.

Рассматривается задача определения сдвигового электроупругого волнового поля в составной среде при взаимодействии двух пьезоэлектрических полупространств. Задача дифракции электроупругой локализованной волны сдвига на краю полубесконечной трещины сводится к решению функционального уравнения Римана на действительной оси. Если пьезоэлектрические полупространства скреплены между собой, то при определенных значениях электромеханических параметров пьезосред могут распространяться электроупругие волны сдвига, локализованные у контактной, разделительной плоскости.

Введение. Исследования особенностей распространения электроупругих возмущений в твердых телах, обладающих пьезоэффектом занимают важное место в динамической теории механики деформируемых твердых тел. Взаимосвязь и взаимодействие различных полей физического происхождения интересны и с точки зрения математической физики.

Неоднородность, слоистость пьезосреды, наличие свободных от напряжений поверхностей с локализованными концентраторами напряжений являются главными причинами существенного изменения картины классической теории упругих волн [1]. Дифракция может стать причиной распространения поверхностных волн, локализованных у поверхности раздела сред. Локализованные (поверхностные) волны распространяются с относительно малой скоростью, легко доступны для внешних физико-механических воздействий, возможно управление этой волной по пути распространения.

Постановка задачи и ее решение. Упругая среда, обладающая пьезоэффектом, занимает пространство, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$. Рассматриваемое пространство состоит из двух пьезоэлектрических полупространств – пьезоэлектриков класса 6mm гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью пьезокристалла. Пьезоэлектрики занимают полупространства $y>0$ и $y<0$, имеют разные электромеханические коэффициенты ε_1, e_1, c_1 и ε_2, e_2, c_2, соответственно. Здесь принимаем, что $\varepsilon_i=\varepsilon_{11}^{(i)}, e_i=e_{15}^{(i)}$, $c_i=c_{44}^{(i)}$ – диэлектрические, пьезоэлектрические и упругие постоянные в соответствующих пьезоэлектрических полупространствах $i=1,2$. Для данной пьезоэлектрической среды можно рассматривать антиплоскую задачу для определения сдвигового волнового поля. При антиплоской постановке задачи смещения частиц среды перпендикулярны к направлению распространения волны, а деформации являются деформациями сдвига. За основу задачи определения сдвигового электроупругого волнового поля принимаются уравнения динамической задачи теории упругости и уравнения электродинамики в квазистатическом приближении. Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих волнового поля (временной множитель $e^{-i\omega t}$, t – параметр времени, ω – частота колебаний), следовательно, задача решается в амплитудах искомых функций. Для определения амплитуд перемещений $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ и электрических потенциалов $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$ в соответствующих полупространствах, рассмотрим дифференциальные уравнения [1,2,3]

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}+k_i^2 w_i=0,$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2}+k_i^2\frac{e_i}{\varepsilon_i}w_i=0. \qquad i=1,2 \tag{1}$$

В этих уравнениях $k_i=\omega/C_i$, C_i, $\chi_i=e_i^2/c_i\varepsilon_i$ $i=1,2$ – волновое число, скорость распространения электроупругих волн сдвига и коэффициент электромеханической связи в рассматриваемых полупространствах, $C_i=\sqrt{c_{44}^{(i)}(1+\chi_i)/\rho_i}$, ρ_i – плотность материалов этих полупространств.

Пьезоэлектрические полупространства скреплены по плоскости контакта $y=0$, $-\infty<z<\infty$ при $x>0$. Это означает, что между полупространствами осуществляется электромеханический полный контакт в плоскости Oxz при $x>0$. В разделительной плоскости Oxz при $x<0$ пьезосреды взаимодействуют без акустического контакта [3,4,5]. Таким образом, функции амплитуд перемещений $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ и напряжений $\sigma_{yz}^{(i)}$ должны удовлетворять условиям свободной поверхности при $y=0$, $x<0$

$$\sigma_{yz}^{(1)}=c_1\frac{\partial w_1}{\partial y}+e_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=0,$$
$$\sigma_{yz}^{(2)}=c_2\frac{\partial w_2}{\partial y}+e_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}=0. \tag{2}$$
$$w_1(x,+0)-w_2(x,-0)=w_0(x),$$

т.е. считается, что между полупространствами в плоскости контакта имеется полубесконечная трещина. Наличие полубесконечной трещины является причиной дифракции волн и возбуждения электроупругих поверхностных волн.

Контактные условия скрепления при $y=0$, $x>0$ имеют вид

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x,+0)=\sigma_{yz}^{(2)}(x,-0)=q_0(x), \tag{3}$$
$$w_1(x,+0)=w_2(x,-0),$$

здесь $q_0(x)$, как и разница перемещений на берегах трещины $w_0(x)$, пока неопределенные функции.

Вводятся функции, представляющие касательное напряжение при $y=0$ и разницу перемещений на $y=\pm 0$,

$$q_+(x)=q_0(x)\vartheta(x),\ \psi_-(x)=w_0(x)\vartheta(-x) \tag{4}$$

$\vartheta(x)$ – функция Хевисайда. Следовательно условия (2), (3) принимают вид [3,5]

$$c_1\frac{\partial w_1}{\partial y}+e_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}=c_2\frac{\partial w_2}{\partial y}+e_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}=q_+(x), \qquad y=0 \tag{5}$$
$$w_1(x,+0)-w_2(x,-0)=\psi_-(x).$$

При данной постановке задачи для амплитуд электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции полупространств имеют место условия непрерывности по разделительной плоскости $y=0$

$$\Phi_1(x,0)=\Phi_2(x,0),\qquad D_1(x,0)=D_2(x,0), \tag{6}$$

$$D_i = e_i \frac{\partial w_i}{\partial y} - \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \quad i = 1,2$$

Исследуя вопрос о возможности распространения в полупространствах поверхностных сдвиговых волн, локализованных у контактной плоскости, получены характеристические функции волнового процесса $K_*(\sigma)$, $K_0(\sigma)$ при безакустическом контакте и при полном электромеханическом контакте между полупространствами, соответственно:

$$\begin{aligned} K_*(\sigma) &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2} - \frac{\chi_1}{1+\chi_1} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\chi_2}{1+\chi_2} \frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}, \\ K_0(\sigma) &= c_1(1+\chi_1) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}{|\sigma|} + c_2(1+\chi_2) \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{|\sigma|} - \frac{(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение $K_*(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_* > k_2$, если $k_2 > k_1$, или $\sigma = \sigma_* > k_1$, если $k_1 > k_2$, т.е. $\sigma = \pm\sigma_*$ нули функции $K_*(\sigma)$.

Уравнение $K_0(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_0 > k_2 > k_1$, если только

$$\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}} < \frac{\chi_1}{1+\chi_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 - \frac{e_2\varepsilon_1}{e_1\varepsilon_2}\right)^2, \tag{8}$$

а при $k_1 > k_2$ получим $\sigma_0 > k_1$, и условие имеет вид

$$\sqrt{1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}} < \frac{\chi_2}{1+\chi_2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(1 - \frac{e_1\varepsilon_2}{e_2\varepsilon_1}\right)^2. \tag{9}$$

Таким образом $\sigma = \pm\sigma_0$ нули функции $K_0(\sigma)$, при условиях (8) или (9). Отметим что $\sigma_0 < \sigma_*$.

Существование решения в виде локализованных у плоскости раздела (контакта) поверхностных волн, и распространение этих волн со смещениями частиц в направлении оси симметрии кристалла обусловлено наличием пьезоэффекта.

Пусть в пьезоэлектрическом составном пространстве из бесконечности $x > 0$ распространяется локализованная у контактной плоскости $y = 0$ волна сдвига с волновым числом σ_0 (имеет место (8) или (9))

$$\begin{aligned} w_{1\infty}(x,y) &= e^{-\sqrt{\sigma_0^2 - k_1^2}\, y} e^{-i\sigma_0 x}, \quad y > 0 \\ w_{2\infty}(x,y) &= e^{\sqrt{\sigma_0^2 - k_2^2}\, y} e^{-i\sigma_0 x}, \quad y < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Решается задача дифракции падающей волны сдвига на краю полубесконечной трещины.

Для определения Фурье-преобразований функций $\psi_-(x)$, $q_+(x)$ получаем функциональное уравнение

$$A_1(\sigma) K_*(\sigma) \bar{\psi}_-(\sigma) + A_2 K_0(\sigma) \bar{q}_+(\sigma) + 2\pi\delta(\sigma - \sigma_0) = 0, \tag{11}$$

которое рассматривается как краевая задача типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси [3,4,5], $\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Решается задача методом факторизации. Дифракция волны обусловлена наличием полубесконечной трещины. Кроме дифрагированных объемных затухающих электроупругих волн распространяются локализованные (поверхностные) волны непроникающие вглубь пьезоэлектри-

ков. Скорость распространения этих волн несколько меньше скорости поперечных объемных волн. В пьезоэлектрических полупространствах возможны возбуждение и прием поверхностных волн с малыми потерями. В составном полупространстве $x<0$ возбуждается поверхностная волна со скоростью ω/σ_*. В полупространстве $x>0$ распространяется локализованная волна со скоростью падающей волны $\omega/\sigma_0>\omega/\sigma_*$. Электроупругие поверхностные волны имеют фундаментальное значение и практическую значимость, есть возможность усиления поверхностных волн в пьезоэлектрической слоистой среде.

Работа выполнена при поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 25RG-2C136.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск, Наука, 1982, 239с.
2. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. Изв. АН Армении, Механика, 1985, т.38, 1, с. 12-19.
3. Джилавян С.А., Саргсян А.С. Дифракция плоской волны сдвига в составном пьезоэлектрическом пространстве. Изв. НАН Армении, Механика, 2019, т.72, 1, с. 35-48.
4. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик. «Проблемы взаимодействия деформируемых сред», 2011, с. 137-143.
5. Samvel Jilavyan Diffraction of a Plane Shear Wave by Semi-Infinite Parallel Cracks in a Piezoelectric Space and Propagation of Surface Waves. Advanced Structured Materials. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications, chapter 20, 2025, v.223, pp.283-300.

Сведения об авторах

Джилавян Самвел Акопович – к.ф.м.н., доцент, кафедра механики ЕГУ
E-mail samjilavyan@ysu.am

Саргсян Арсен Суренович – к.ф.м.н., Институт Механики НАН Армении
E-mail arsensargsyan777@gmail.com

Галичян Тигран Александрович – к.ф.м.н., Институт Механики НАН Армении
E-mail galichyantigran@gmail.com

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МИКРОАРХИТЕКТУРЫ НА ПРОЧНОСТЬ 3D-ПЕЧАТНЫХ ГИЛЬЗ С ЛОКАЛЬНЫМ АРМИРОВАНИЕМ

Долгих Д.А., Ташкинов М.А.

В работе проанализированы стратегии повышения целостности гильз экзопротезов за счёт непланарного армирования углеродными прутками. Исследован цилиндрический прототип из полиамида, изготовленный многоосевым аддитивным методом. Численное моделирование прогрессирующего разрушения позволило изучить накопление повреждений. Локальное армирование эффективно усиливает высоконагруженные участки, а оптимизация архитектуры армирующих элементов повышает прочность изделий. Результаты демонстрируют снижение концентрации напряжений в протезах при использовании армирования углеродным волокном.

1. Введение

Аддитивное производство является высокоэффективной технологией изготовления индивидуальных изделий со сложной геометрией и находит широкое применение в области персонализированной ортопедии. Современные аддитивные методы обеспечивают значительную топологическую свободу, что позволяет оптимизировать параметры ортопедических протезов в соответствии с анатомическими особенностями пациентов. Данный подход особенно важен при создании экзопротезов для пациентов с транстибиальной ампутацией. В настоящее время к протезам предъявляются повышенные требования, направленные на достижение максимально точной имитации естественных движений, а также на обеспечение высокой прочности и эксплуатационной надёжности конструкции. Основным элементом протеза является гильза, представляющая собой чашеобразную конструкцию, которая устанавливается на ампутированную конечность и обеспечивает передачу механических нагрузок от тела к протезу [1].

В конструкции протезной гильзы выделяются две основные проблемы: неравномерное распределение нагрузки, приводящее к разрушению в дистальной области, и недостаточный комфорт ношения.

В настоящем исследовании предлагается решение данных аспектов посредством локального армирования гильзы углеродным волокном, что позволяет усилить наиболее нагруженные участки конструкции при минимальном увеличении её массы [2]. Модульная архитектура армирования предоставляет возможности для персонализированного проектирования с учётом анатомических особенностей пациента, что способствует повышению долговечности протеза. Для предварительной оценки прочностных характеристик гильзы применяются методы численного моделирования. Метод прогрессивного разрушения был использован для анализа процессов накопления повреждений при неравномерном распределении нагрузки.

Целью настоящей работы является разработка методологии проектирования конических гильз с контролируемым армированием, реализуемой поэтапно:

- Определение оптимальных схем локального армирования конструкции с учётом эксплуатационных условий и распределения нагрузок.
- Проведение конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния проектируемых конструкций.
- Моделирование процессов прогрессирующего разрушения с последующей оценкой накопления и развития повреждений под действием рабочих нагрузок.
- Изготовление прототипа гильз с применением многоосевой аддитивной технологии.

2. Методы и материалы

Свойства материалов

Материал гильзы представлял собой полиамид PA12 (нейлон), тогда как армирующий материал — препрег из углеродного волокна производства F2 Innovations (Пермь, Россия) с объемной долей углеродного волокна 60% (диаметр прутка 0,3 мм). Все материалы считались линейно-упругими, однородными и изотропными. Значения модуля Юнга (E), коэффициента Пуассона (ν) и предела прочности для PA12 взяты из статьи [3] ($E = 1445.15 \pm 111.18$ МПа, $\nu = 0.3$, $\sigma = 15.47 \pm 1.40$ МПа). Аналогичные характеристики для углеродного прутка были получены из паспорта производителя ($E = 60\,000$ МПа, $\nu = 0.35$, $\sigma = 520$ МПа).

Прогрессирующее разрушение

Прогрессирующее разрушение полимерных материалов представляет собой процесс постепенного накопления микроповреждений, приводящий к снижению механических свойств и, в конечном итоге, к полному разрушению изделия. Этот процесс описывается законами деградации материала, согласно которым прочностные характеристики последовательно ухудшаются под воздействием внешних нагрузок.

Наиболее критичным этапом развития повреждений является разрушение полимерной матрицы при достижении предела прочности, что моделируется с помощью мгновенного закона повреждения. Изменение механических свойств полимерного материала в процессе накопления повреждений может быть писано законом Гука с учётом снижения упругих характеристик:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{*} = C\left(D_{ij}\right)\varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} = S\left(D_{ij}\right)\sigma_{ij}^{*}. \end{cases} \tag{1}$$

Согласно модели, значения переменных повреждений D_{ij} варьируются от 0 до 1, где значение 1 соответствует полному разрушению. Как только напряжения в точке удовлетворяют критерию разрушения, жесткость уменьшается до определенного значения в соответствии с заранее заданным коэффициентом деградации. Для реализации моделирования разрушения полимерного материала с деградацией упругих свойств была использована пользовательская подпрограмма UMAT [4–6].

Геометрия

Модели гильз были построены в Abaqus CAE (Dassault Systems, версия 2023). Полимерные гильзы моделировались с использованием объёмных (solid) элементов, тогда как для моделирования непрерывных углеродных прутков применялись балочные конечные элементы на основе теории балок Тимошенко с круглым поперечным сечением (равным диаметру прутка). Конечно-элементная сетка состояла из линейных тетраэдральных элементов типа C3D4 (четырёхузловой трёхмерный элемент в форме тетраэдра, предназначенный для моделирования сплошных сред в конечно-элементном анализе), а также включала линейные элементы типа B31 (линейный балочный элемент первого порядка — 2 узла, 6 степеней свободы на узел), моделирующих прутки. Были введены связующие ограничения для обработки волокон как встроенной области в модели гильзы.

Армирующие элементы были локализованы в зоне высокой нагрузки. Для задания траектории прутков был разработан код на Wolfram Mathematica, позволяющий определять конфигурации армирования в конической гильзе с использованием параметрического уравнения винтовой линии:

$$\begin{cases} x_i\left(t\right) = r\left(t\right)\cos t\cos\theta_i - r\left(t\right)\sin t\sin\theta_i, \\ y_i\left(t\right) = r\left(t\right)\cos t\cos\theta_i + r\left(t\right)\sin t\sin\theta_i, \\ z_i\left(t\right) = \dfrac{h}{2\pi}t, \end{cases} \tag{2}$$

где h – высота витка, $r\left(t\right)$ – радиус витка, как функция параметра t, $\theta_i = \dfrac{2\pi i}{n}$ – равномерное угловое смещение, $i = 0\ldots n$ – количество армирующих элементов. Полученный массив координат умножается на количество прутков и задается ограничение на угол β между соседними прутками, рассчитываемый по длине хорды. Итоговый результат состоял из наборов координат для каждого отдельного прутка. Эти координаты были впоследствии импортированы в Abaqus для построения траектории армирования в модели гильзы (Рисунок 1).

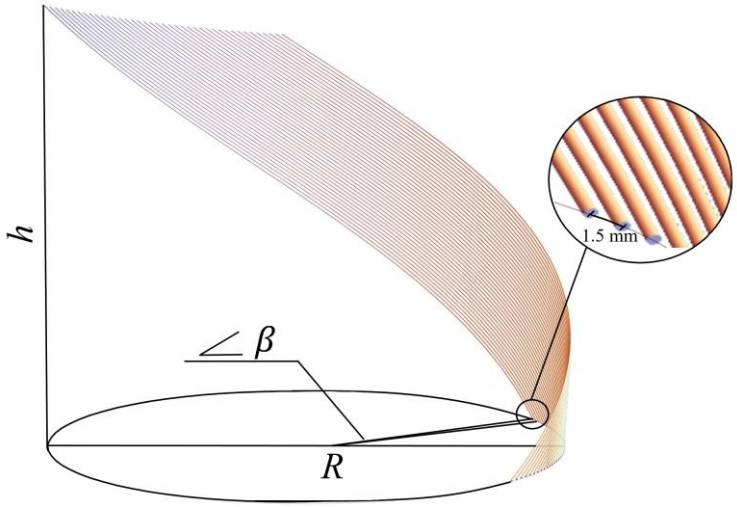


Рисунок 1. Схема геометрии прутков (размеры в мм).

Нагрузки и граничные условия

Гильза протеза должна обеспечивать надежную фиксацию культи, чтобы предотвратить смещение протеза относительно биомеханической ориентации. В данной модели к граничным поверхностям гильзы применяется условие жёсткой заделки (Рисунок 2), соответствующее зонам контакта с проксимальной и дистальной частями культи.

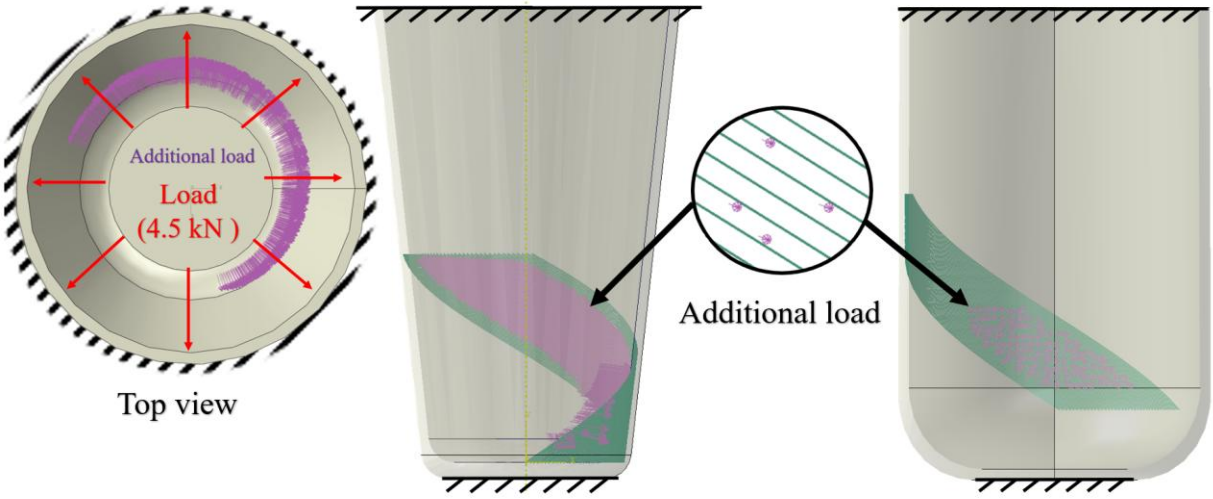


Рисунок 2. Схема граничных условий и условий нагружения

Пиковая нагрузка на внутреннюю поверхность гильзы составила 4.5 кН, что соответствует массе пользователя 100 кг. С учётом анизотропии геометрического профиля культи, в модели была выделена критическая зона с локализованной концентрацией напряжений. На эту область была дополнительно приложена распределённая нагрузка, соответствующая максимальной нагрузке на выбранный сегмент.

3. Численное исследование процесса накопления повреждений

Анализ полученных результатов показал, что инициирование поля повреждений происходит на внешней поверхности протезной гильзы в областях, подверженных избыточной нагрузке. Введение армирующих элементов оказало значительное влияние на снижение уровня напряжений в гильзе. Армирующие прутки воспринимают основную часть нагрузки, тем самым способствуя снижению напряжений в полимерной матрице. Однако при большом шаге

между прутками напряжения в армирующих элементах приближаются к пределу прочности углеродных волокон, что указывает на их недостаточную эффективность.

Эффективность армирующих элементов снижается с увеличением расстояния от места приложения нагрузки. Для обеспечения максимальной прочности конструкции армирующие прутки должны располагаться вблизи зон приложения нагрузки, что наглядно иллюстрируется кривыми распределения напряжений (Рисунок 3).

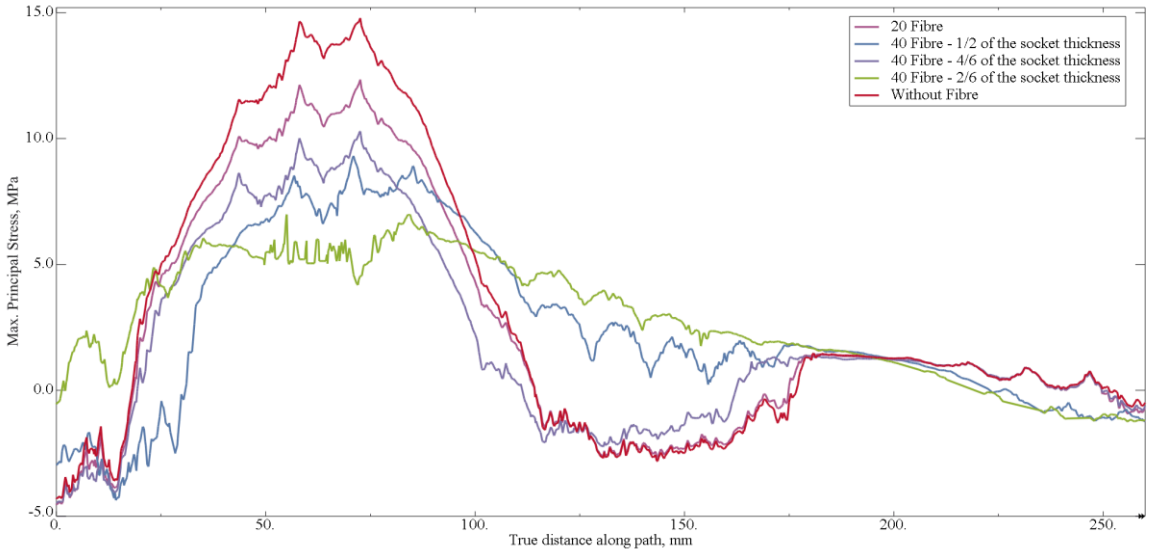


Рисунок 3. Диаграммы распределения напряжений вблизи прутков

В целом, численный анализ прогрессивного разрушения показал, что при неравномерном распределении нагрузки коническая протезная гильза склонна к разрушению. Однако наличие армирующих элементов в зонах потенциального зарождения трещин значительно повышает жёсткость конструкции и способствует сохранению целостности конструкции.

4. Выводы

Разработан подход к созданию 3D-печатных ортопедических транстибиальных экзопротезов, включающих локальные интегрированные армирующие прутки из углеродного волокна. Созданы алгоритмы и программные инструменты для изготовления разработанной армированной конструкции методом многоосевой двойной экструзии непланарного аддитивного производства**.** Анализ модели хрупкого разрушения гильзы с прогрессирующим разрушением показал, что армирующие элементы снижают концентрацию напряжений в протезе, тем самым повышая структурную целостность и предотвращая разрушение гильзы. Прутки из углеродного волокна были смоделированы как структурные компоненты с различными свойствами материала по сравнению с полимерной матрицей с использованием подхода к моделированию сетки на основе балочных элементов. В ходе исследования были установлены оптимальные параметры армирования и определено предпочтительное расстояние между прутками.

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10350).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang Y. et al. A Review of the Application of Additive Manufacturing in Prosthetic and Orthotic Clinics from a Biomechanical Perspective // Engineering. 2020.
2. Dolgikh D. et al. Enhancing the Strength of 3D-Printed Polymer Exoprosthetic Socket by Localized Non-Planar Continuous Carbon Fiber Reinforcement // Polymers (Basel). 2025. Vol.

17, № 8. P. 1–20.
3. Pepeliaev A. et al. Comparison of mechanical properties of 3D-printed ABS, PA12 and PET-G reinforced with short fiber // Procedia Struct. Integr. Elsevier B.V., 2024. Vol. 61, № 2023. P. 224–231.
4. Távara L. et al. Accurate modelling of instabilities caused by multi-site interface-crack onset and propagation in composites using the sequentially linear analysis and Abaqus // Compos. Struct. 2019.
5. Jafaripour M., Taheri-Behrooz F. Creep behavior modeling of polymeric composites using Schapery model based on micro-macromechanical approaches // Eur. J. Mech. A/Solids. 2020.
6. Arruda M.R.T. et al. Tsai–Wu based orthotropic damage model // Compos. Part C Open Access. 2021.

Информация об авторах

Долгих Дарья Алексеевна – младший научный сотрудник НИЛ МБМУ, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, факультет прикладной математики и механики
E-mail dolgikhdar@pstu.ru

Ташкинов Михаил Анатольевич – заведующий НИЛ МБМУ, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, факультет прикладной математики и механики
E-mail m.tashkinov@pstu.ru

КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ С ЗАРЯЖЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Ерофеев В.И., Шекоян А.В., Мальханов А.О.

В данной работе получена и проанализирована система уравнений, позволяющая описать дисперсионные, диссипативные и нелинейные свойства квазигармонических волн, распространяющихся в диэлектрических кристаллах с заряженными дислокациями.

Пусть имеется диэлектрический кристалл, в котором присутствуют заряженные дислокации. Используем струнную модель дислокаций с учетом существования на них заряда, создающего в кристалле электрическое поле E_i.

Под влиянием поля упругой волны в диэлектрическом кристалле дислокации будут колебаться.

Движения упругой волны и дислокации описываются уравнениями [1]:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},\qquad A\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2}+B\frac{\partial \xi_i}{\partial t}=f_i, \tag{1}$$

где ρ – плотность кристалла, u_i – смещения, A и B – постоянные коэффициенты, характеризующие массу и затухание колебаний дислокации, ξ_i – компоненты смещения дислокаций под действием ультразвуковой волны.

Так как дислокации создают в среде электрическое поле, которое меняется в пространстве и во времени, то к уравнениям (1) следует добавить уравнения Максвелла

$$\mathrm{div}\vec{D}=0,\quad \mathrm{rot}\vec{E}=0, \tag{2}$$

где $\vec{D}$ – вектор электрического смещения.

Тензор напряжений σ_{ik}, компоненты силы f_i, действующей на дислокацию и компоненты электрического смещения D_i определяются соотношениями

$$\sigma_{ik}=\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_{\xi_i,E_i},\qquad f_i=-\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right)_{E_i,u_{ik}},D_i=-\left(\frac{\partial F}{\partial E}\right)_{\xi_i,u_{ik}}, \tag{3}$$

где F – свободная энергия единицы среды, u_{ik} – компоненты тензора деформаций.

Свободная энергия имеет следующий вид

$$\begin{aligned}F=F_0+\frac{1}{2}\lambda_{ijkl}u_{ij}u_{kl}+\frac{1}{2}c_{ik}\xi_i\xi_k+\frac{1}{2}\beta_{ijkl}\left(b_i\xi_j+b_j\xi_i\right)u_{ik}+\frac{1}{2}P_{mk}\xi_k E_m+\frac{1}{2}\varepsilon_{jk}E_jE_k\\+\frac{1}{2}m_{pjk}E_pu_{jk}+\frac{1}{3!}Q_{iklmpq}u_{ik}u_{lm}u_{pq}+\frac{1}{3!}\gamma_{jkl}\xi_j\xi_k\xi_l+\frac{1}{3!}d_{mkj}E_mE_k\xi_j\\+\frac{1}{3!}a_{jkm}E_j\xi_k\xi_m+\frac{1}{3!}q_{ijklpq}(b_i\xi_j+b_j\xi_i)(b_k\xi_l+b_l\xi_k)u_{pq}\\+n_{jklm}E_jE_ku_{lm},\end{aligned} \tag{4}$$

где ε_{ik} – диэлектрический тензор, $m_{jpk},P_{ik},d_{mkj},a_{jkm},n_{jklm}$ – тензоры, обусловленные электрическим, акустическим и дислокационным взаимодействием. b_i – компоненты вектора Бюргерса, β_{ijkl}, q_{ijklpq} – тензоры линейного и нелинейного акустодислокационного взаимодействия, λ_{ik} и γ_{ikl} – тензоры линейной и нелинейной «жёсткости» дислокаций, F_0 – свободная энергия до возмущений.

Выражение (4) ограничено слагаемыми, которые дают в уравнениях квадратичные нелинейные члены.

Воспользовавшись выражениями (3) и (4), ограничиваясь одномерным приближением $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}=0\right)$ и отбрасывая индексы для простоты записи, получим следующую систему уравнений

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta b\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{m}{2}\frac{\partial E}{\partial x}+(3c_1+Q)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial \xi}{\partial x}+nE\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\rho A\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}+B\frac{\partial \xi}{\partial t}=-\lambda\xi-b\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{P}{2}E-\frac{1}{2}b\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{d}{6}E^a-\frac{a}{3}E\xi, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\partial \xi}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{m}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{d}{6}E\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{d}{6}\xi\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{q}{3}\xi\frac{\partial \xi}{\partial x}+2n\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+2nE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{m}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{7}$$

Уравнения (5)–(7) записаны в лагранжевых координатах. Из второго уравнения (2) следует, что в одномерном приближении E_1 и E_2 постоянные, поэтому в системе (5)–(7) не фигурируют. Оценки показывают, что с ускорением движения заряд дислокации излучает ничтожно слабое электромагнитное излучение, которым можно пренебречь.

Линеаризуя уравнения (5)–(7), решение линейной системы уравнений ищется в виде бегущей гармонической волны, тогда можно получить дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$-\omega^2\rho+ck^2=-\frac{k^2\left[b\beta\left(\frac{mp}{2\varepsilon}-\beta b\right)+\frac{m^2}{4\varepsilon}(\lambda-\omega^2A-i\omega B)\right]}{\lambda-\omega^2A-i\omega B+\frac{p^2}{4\varepsilon}}, \tag{8}$$

где k – волновое число, ω – комплексная частота, $\omega=\omega_0+\omega_1+i\alpha=\omega_0+\omega_1$, ω_1 – действительная частота, α – коэффициент поглощения, ω_2 – комплексное приращение частоты. Разделяя действительную и мнимую части выражения (8), учитывая малость дисперсии и диссипации, можно получить

$$\omega_1=\omega_0\left\{1-\frac{1}{2v_{0\beta}^2}\frac{\left[\beta b\left(\frac{mp}{2\varepsilon}-\beta b\right)-\frac{m^2}{4\varepsilon}(\lambda-\omega_0^2A)\right]\left(\lambda-\omega_0^2A-\frac{p^2}{4\varepsilon}\right)-\frac{m^2\omega_0^2}{4\varepsilon}}{\left(\lambda-\omega_0^2A+\frac{p^2}{4\varepsilon}\right)^2+\omega_0^2B^2}\right\}, \tag{9}$$

$$\alpha=\frac{\beta b\left(\frac{mp}{4\varepsilon}-\beta b\right)-\frac{m^2}{4\varepsilon}(\lambda-\omega_0^2A)+\frac{m^2\omega_0^2}{4\varepsilon}\left(\lambda-\omega_0^2A-\frac{p^2}{4\varepsilon}\right)}{\left(\lambda-\omega^2A-\frac{p^2}{4\varepsilon}\right)^2+\omega_0^2B^2}, \tag{10}$$

где $\omega_0^2=v_0^2k^2=\frac{c}{\rho}k^2$.

Если в соотношениях (9) и (10) пренебречь величинами, обусловленными электрическим зарядом дислокации и электрическими свойствами диэлектрика, они совпадут с соответствующими величинами, полученными в [2].

Решение уравнений (5)–(7), которые имеют квадратичные нелинейные члены из-за наличия дисперсии и диссипации, можно искать в виде квазимонохроматических волн, имеющих вид

$(u,\xi,E)=\frac{1}{2}[(u_0,\xi_0,E_0)e^{\varphi}+(u_0',\xi_0',E_0')e^{2\varphi}+(u_0'',\xi_0'',E_0'')+$ компл. сопр.],

где $\varphi=\omega t-kx$.

Подставив последнее соотношение в систему (5)–(7), можно получить новую систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд.

Полученная новая система упрощается. В качестве основной функции берем u_0, а k считается большой. Малость дисперсии и диссипации дает соотношения $\omega_2{\sim}k^{\varepsilon_1}u_0$, $\omega_0{\sim}k$, причем $0<\varepsilon_1<1$, $\xi_0{\sim}E_0{\sim}k^{\varepsilon_1}u_0$. Эти оценки позволяют в уравнениях для амплитуд ξ_0 и E_0 пренебречь нелинейными слагаемыми и исключить их с помощью линейных уравнений. В уравнении для u_0 нелинейные слагаемые, обусловленные ξ_0 и E_0, малы; остаются упругие, геометрические нелинейности, нелинейность, обусловленная свободным членом. В уравнениях

для амплитуд второй гармоники остаются только нелинейные слагаемые, пропорциональные u_0^2.

Согласно [3] $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{\partial}{\partial x}$, тогда из уравнений для u'' легко найти $\frac{\partial u_0''}{\partial x}$. В уравнениях для амплитуд второй гармоники остаются только нелинейные слагаемые, пропорциональные u_0. Итак, получаются следующие уравнения для амплитуд:

$$-2ikc\frac{\partial u_0}{\partial x} - 2i\omega\rho\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{m}{2}\frac{\partial E_0}{\partial x} - \beta b\frac{\partial \xi_0}{\partial x} = ik^3(3C+Q)e^{2\alpha t}u_0' u_0^* - k^2(3C+Q)u_0\frac{\partial u_0''}{\partial x}, \quad (11)$$

$$4(k^2c - \omega^2\rho)u_0' = -\frac{ik^3}{2}(3C+Q)u_0^2 + ikb\xi_0' + ikmE_0^2, \quad (12)$$

$$-A\omega^2\xi_0 - i\omega B\xi_0 - ikb\beta u_0 + \frac{p}{2}E_0 + \lambda\xi_0 = 0, \quad (13)$$

$$(-4A\omega^2 - 2i\omega B + \lambda)\xi_0' = -2ikb\beta u_0' - \frac{p}{2}E_0' + \frac{1}{4}b\beta k^2 u_0^2, \quad (14)$$

$$ik\frac{p}{2}\xi_0 + i\varepsilon kE_0' + \frac{mk^2}{2}u_0 = 0, \quad (15)$$

$$2ip\xi_0' + 2i\varepsilon E_0' - 2kmu_0^2 = -\frac{imk^2}{2}u_0^2 = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_0''}{\partial x} = \frac{k^3(3c+Q)e^{2\alpha t}}{2\rho v_0\frac{\partial \omega_2}{\partial k}}|u_0|^2. \quad (17)$$

Последовательно исключая все функции из системы (11)–(17), переходя к новой координате $\tau = \frac{x}{v} - t$, где $v = \frac{\omega}{k}$, получим следующее уравнение относительно u_0:

$$-i\frac{\partial u_0}{\partial x} = (e_1 + ie_2)|u_0|^2 u_0, \quad (18)$$

где

$$e_1 = \frac{k^3(3c+Q)^2e^{2\alpha t}}{c'}\left[\frac{\Re_4\Re_5 + 32\omega_0^2B^2\rho(v^2-v_0^2)}{N_3} + \frac{\omega_{0n}}{2\rho v_0(\omega_n^2+\alpha_n^2)}\right] = \Omega_1 e^{\frac{2\alpha}{v}},$$

$$e_2 = \frac{k^3(Bc+Q)^2\omega_0 Be^{2\alpha t}}{c'}\left[\frac{\Re_4 + 16\rho(v_1^2-v_0^2) - 2\Re_5}{N_3} - \frac{\alpha_n}{2\rho v_0(\omega_n^2+\alpha_n^2)}\right] = \Omega_2 e^{\frac{2\alpha}{v}},$$

$$\Re_4 = -\lambda + 4A\omega^2 - \frac{p^2}{2\varepsilon} + 2b^2\beta^2 - \frac{m^2p^2}{2\varepsilon^2},$$

$$\Re_5 = -\frac{1}{8}\rho(v^2 - v_0^2)\left(\lambda - 4\omega_0^2A + \frac{p^2}{2\varepsilon}\right) - 2\left(2b\beta - \frac{mp}{\varepsilon}\right)^2,$$

$$\omega_n = \frac{\partial\omega_1}{\partial k},\ \alpha_n = \frac{\partial\alpha}{\partial k},\ N_3 = \Re_5^2 + 256\rho^2(v^2 - v_0^2)\omega_0^2B^2,$$

$$c' = 2c - \frac{1}{\beta b - \frac{mp}{4\varepsilon}}\left[m^2\beta b + (mp\rho + 4\rho b\beta)(v^2 - v_0^2) - \frac{m^2\beta b}{4\varepsilon}\right].$$

Обычно дислокации исследуют в ультразвуковом диапазоне. Тогда ωt и kx велики, а $kx - \omega t$ конечно для любых заданных волн, т.е. $|kx - \omega t| << kx$ и $|kx - \omega t| << \omega t$, тогда в показателях экспонент можно подставить $t = \frac{x}{v}$, что и сделано в выражениях для коэффициентов e_1 и e_2.

В уравнении (18) коэффициент e_1 обусловлен нелинейностями, а e_2 – нелинейной диссипацией. Сделаем в уравнение (18) подстановку

$$u = L(x)\,exp[-iS(k)],$$

где $L(x)$ – действительная амплитуда, а S – эйконал. Тогда получим два уравнения:

$$\frac{dL}{dx} = -\Omega_2 e^{\frac{2\alpha}{v}x}L^3, \quad (19)$$

$$\frac{dS}{dx} = -\Omega_1 e^{\frac{2\alpha}{v}x}L^2. \quad (20)$$

Решение уравнения (19) имеет вид

$$L = L_0(1 + 2L_0^a\Omega_2 x)^{-1/2}. \quad (21)$$

Выражение (21) показывает, как меняется амплитуда в пространстве. Если $x > 0$, Ω_2, тогда в точке $x_1 = -\frac{1}{2L_0\Omega_2}$ может быть особенность. Когда $|L_0\Omega_2| << 1$, тогда x_1 выходит из области реального наблюдения и можно сказать, что особенности нет; когда $|L_0^2\Omega_2| \sim 1$, есть особенность, которая может быть результатом резонанса.

Решение уравнения (20) имеет вид

$$S = -\frac{\Omega_1}{2\Omega_2} ln(1 + 2L_0^2\Omega_2 x). \quad (22)$$

При выводе (21) и (22) было учтено, что $\frac{2\alpha}{v} << 1$ и экспоненты были разложены в ряд.

При выводе (22) видно, что время прохождения импульса волны при $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} > 0$ уменьшается, а при $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} < 0$ увеличивается. При $x = x_1$, как и для амплитуды L в решении (22) есть особенность и все сказанное для амплитуды L остается в силе и для эйконала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в дисперги-рующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.
2. Шекоян А.В. Нелинейные волновые пучки в кристаллах с дислокациями // Письма в Журнал технической физики. 2009. Т. 34, № 4. С. 32.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977. 622 с.

Сведения об авторах

Ерофеев Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, директор, Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия (+7831) 432 03 00
E-mail erof.vi@yandex.ru

Шекоян Ашот Вазгенович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 52 48 90
E-mail ashotshek@mechins.sci.am

Мальханов Алексей Олегович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия (+7831) 432 03 00
E-mail alexey.malkhanov@gmail.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Зарубин В. С., Зимин В. Н., Рахимов Д. Р., Савельева И. Ю.

В работе представлена математическая модель пластичности композиционных материалов в условиях неизотермического нагружения. Она получена на основе термодинамического подхода с внутренними параметрами состояния, для которых определены количество, природа и эволюционные уравнения. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование с экспериментальными данными, что подтверждает эффективность предложенной модели.

Введение. Термопластичность композитных материалов является одной из ключевых областей исследования в современной механике материалов. Композиционные материалы обладают уникальными свойствами, такими как высокая прочность, жесткость и коррозионная стойкость, что делает их незаменимыми во многих отраслях техники. При этом их сложная микроструктура уже на начальных этапах термосилового нагружения приводит к возникновению необратимой деформации. Это обуславливает необходимость разработки специальных теоретических подходов, способных адекватно описывать их механического поведения в условиях неизотермического нагружения.

Существуют различные теории для моделирования нелинейного деформирования композитных материалов [1–7]. В данной работе предложен вариант математической модели пластичности, основанный на термодинамическом подходе с внутренними параметрами состояния [3–5], которые введены для описания микроструктуры материала, скрытой от внешнего наблюдателя, такой как микротрещины, микроразрушения, дислокации и др. В частном случае определяющие соотношения приведены к соотношениям эндохронной теории термопластичности [6,7].

1. Термодинамика неравновесных процессов с внутренними параметрами состояния

Для построения модели пластичности при неизотермическом нагружении используем термодинамический подход с внутренними параметрами состояния, опираясь на результаты работ [4–6]. Запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме, а второй закон термодинамики представим в виде неравенства Клазиуса-Дюгема [5]:

$$\rho T\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+q_V+\delta_D,\quad \rho T\frac{\partial h}{\partial t}\geq-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}+q_V\,, \tag{1}$$

где ρ — плотность; T — абсолютная температура; h — массовая плотность энтропии; $\frac{\partial}{\partial t}\equiv(\cdot)\equiv\frac{d}{dt}$; t — время; q_i — компоненты вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$; x_i — пространственные координаты точки; q_V — объемная плотность мощности тепловых источников (стоков) теплоты; $\delta_D=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ji}-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial t}+h\frac{\partial T}{\partial t}\right)$ — диссипативная функция, $i,j=1,2,3$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$; ε_{ij} — компоненты тензора малой деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$; A — массовая плотность свободной энергии Гельмгольца.

Предположим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой точки пространства может быть описано с помощью четырёх термодинамических функций: массовых плотностей свободной энергии A и энтропии h, тензора напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, а также вектора плотности теплового потока $\mathbf{q}$ [5]. Аргументами данных функций будем считать следующие реактивные переменные: тензор малой деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, температуру T и тензорные внутренние параметры состояния с компонентами $\chi_{ij}^{(\alpha)}=\chi_{ij}^{(\alpha)}\left(\varepsilon_{kl},T\right)$, где $\alpha=1,...,N$, а N — количество внутренних параметров, $k,l=1,2,3$. Тогда из системы (1), в соответствии с достаточными условиями реализуемости термомеханического процесса, получаем [5]

$$\sigma_{ji}=\rho\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}},\quad h=-\frac{\partial A}{\partial T},\quad -\rho\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial A}{\partial\chi_{ij}^{(\alpha)}}\dot{\chi}_{ij}^{(\alpha)}-\frac{1}{T}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\geq 0\,. \tag{2}$$

Пусть компоненты тензора деформации ε_{ij} и внутренних параметров состояния $\chi_{ij}^{(\alpha)}$ малы ($\left\|\varepsilon_{ij}\right\| \ll 1$ и $\left\|\chi_{ij}^{(\alpha)}\right\| \ll 1$). Тогда разложим объемную плотность свободной энергии $\rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right)$ в ряд по формуле Тейлора относительно этих переменных, ограничившись квадратичными членами:

$$\rho A\left(\varepsilon_{ij}, T, \chi_{ij}^{(\alpha)}\right) = \rho A\left(0, T, 0\right) + \rho\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij} + \rho\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}}\right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} +$$
$$+\rho\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \chi_{kl}^{(\alpha)}}\right)_{0,T,0} \varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(\alpha)} + \frac{1}{2}\rho\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \chi_{ij}^{(\alpha)}\partial \chi_{kl}^{(\beta)}}\right)_{0,T,0} \chi_{ij}^{(\alpha)}\chi_{kl}^{(\beta)}. \quad (3)$$

Для конкретизации данного соотношения определим количество внутренних параметров состояния, их природу и эволюционные уравнения.

1.1. Внутренние параметры состояния: их природа и эволюционные уравнения

В настоящей работе будем рассматривать два тензорных внутренних параметра состояния: $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$. Параметр $\chi_{ij}^{(S)}$ отвечает за возникновение необратимых деформаций при силовом нагружении, $\chi_{ij}^{(T)}$ — при температурном нагружении. Для описания эволюции этих параметров постулируем существование следующих кинетических уравнений:

$$\tau_{ijkl}^{(S)}\frac{\partial \chi_{kl}^{(S)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(S)} = \overline{\chi}_{ij}^{(S)}, \quad \tau_{ijkl}^{(T)}\frac{\partial \chi_{kl}^{(T)}}{\partial z} + \chi_{ij}^{(T)} = \overline{\chi}_{ij}^{(T)}, \quad (4)$$

Здесь $\tau_{ijkl}^{(S)} = \tau_{ijkl}^{(S)}\left(T\right)$, $\tau_{ijkl}^{(T)} = \tau_{ijkl}^{(T)}\left(T\right)$ — компоненты положительно определенных тензоров времен релаксации параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ соответственно; $\overline{\chi}_{ij}^{(S)}$, $\overline{\chi}_{ij}^{(T)}$ — установившиеся значения этих параметров; z — внутреннее время, дифференциал которого определяют выражением $dz = d\xi / f\left(\xi\right)$ [6], где $f\left(\xi\right) = 1 + \beta\xi$ — материальная функция, β — материальный параметр; $d\xi$ — приращение меры внутреннего времени, определяемое как [6]

$$d\xi = \sqrt{P_{ijkl}d\varepsilon_{ij}d\varepsilon_{kl} + m^2 dT^2}, \quad (5)$$

где $P_{ijkl} = P_{ijkl}\left(T\right)$ — компоненты симметричного положительно определенного тензора материальных параметров [5]; $m = m\left(T\right)$ — материальный параметр модели [6].

В настоящей работе ограничимся рассмотрением следующих видов тензоров:

$$\tau_{ijkl}^{(S)} = \begin{cases} \tau_{ijkl}^{(S)}, & i = k \wedge j = l; \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l, \end{cases} \quad \tau_{ijkl}^{(T)} = \begin{cases} \tau_{ijkl}^{(T)}, & i = k \wedge j = l; \\ 0, & i \neq k \vee j \neq l. \end{cases}$$

В результате получим несвязанные системы дифференциальных уравнений (4), решение которых для внутренних параметров $\chi_{ij}^{(S)}$ и $\chi_{ij}^{(T)}$ имеют вид:

$$\chi_{ij}^{(S)} = \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(S)}\left(z - z'\right)\right) a_{klmn}^{(S)}\overline{\chi}_{mn}^{(S)}dz' = \overline{\chi}_{ij}^{(S)} - \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(S)}\left(z - z'\right)\right)\frac{\partial \overline{\chi}_{kl}^{(S)}}{\partial z'}dz',$$

$$\chi_{ij}^{(T)} = \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(T)}\left(z - z'\right)\right) a_{klmn}^{(T)}\overline{\chi}_{mn}^{(T)}dz' = \overline{\chi}_{ij}^{(T)} - \int_0^z \exp\left(-a_{ijkl}^{(T)}\left(z - z'\right)\right)\frac{\partial \overline{\chi}_{kl}^{(T)}}{\partial z'}dz',$$

где $a_{ijkl}^{(S)} = 1/\tau_{ijkl}^{(S)}$, $a_{ijkl}^{(T)} = 1/\tau_{ijkl}^{(T)}$ — компоненты тензоров материальных параметров; $m, n = 1, 2, 3$.

Установившиеся значения внутренних параметров определим следующим образом:

$$\overline{\chi}_{ij}^{(S)} = X_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \overline{\chi}_{ij}^{(T)} = \tilde{Y}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(T)}, \quad (6)$$

где $X_{ijkl}, \tilde{Y}_{ijkl}$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

1.2. Определяющее соотношение математической модели с внутренними параметрами состояния

Определив количество, природу и эволюционные уравнения для внутренних параметров, а также исключив их взаимное влияние, соотношение (3) примет вид:

$$\rho A\left(\varepsilon_{ij},T,\chi_{ij}^{(\alpha)}\right)=\rho B-D_{ij}^{*}\varepsilon_{ij}+F_{ij}^{*}\chi_{ij}^{(S)}-G_{ij}^{*}\chi_{ij}^{(T)}+\frac{1}{2}C_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-M_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(S)}+$$
$$+N_{ijkl}^{*}\varepsilon_{ij}\chi_{kl}^{(T)}+\frac{1}{2}H_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(S)}\chi_{kl}^{(S)}+\frac{1}{2}L_{ijkl}^{*}\chi_{ij}^{(T)}\chi_{kl}^{(T)}. \qquad (7)$$

Здесь для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$B=A\left(0,T,0\right),\qquad D_{ij}^{*}=-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{0,T,0},\qquad C_{ijkl}^{*}=\rho\left(\frac{\partial^{2}A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\right)_{0,T,0},$$

$$F_{ij}^{*}=\rho\left(\frac{\partial A}{\partial\chi_{ij}^{(S)}}\right)_{0,T,0},\quad M_{ijkl}^{*}=-\rho\left(\frac{\partial^{2}A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\chi_{kl}^{(S)}}\right)_{0,T,0},\quad H_{ijkl}^{*}=\rho\left(\frac{\partial^{2}A}{\partial\chi_{ij}^{(S)}\partial\chi_{kl}^{(S)}}\right)_{0,T,0},$$

$$G_{ij}^{*}=-\rho\left(\frac{\partial A}{\partial\chi_{ij}^{(T)}}\right)_{0,T,0},\quad N_{ijkl}^{*}=\rho\left(\frac{\partial^{2}A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\chi_{kl}^{(T)}}\right)_{0,T,0},\qquad L_{ijkl}^{*}=\rho\left(\frac{\partial^{2}A}{\partial\chi_{ij}^{(T)}\partial\chi_{kl}^{(T)}}\right)_{0,T,0}.$$

где $B=B\left(T\right)$ — массовая плотность свободной энергии при нулевых значениях деформации и внутренних параметров; $F_{ij}^{*}=F_{ij}^{*}\left(T\right)$, $G_{ij}^{*}=G_{ij}^{*}\left(T\right)$, $D_{ij}^{*}=D_{ij}^{*}\left(T\right)$ — компоненты симметричных тензоров 2-го ранга; $M_{ijkl}^{*}=M_{ijkl}^{*}\left(T\right)$, $N_{ijkl}^{*}=N_{ijkl}^{*}\left(T\right)$, $C_{ijkl}^{*}=C_{ijkl}^{*}\left(T\right)$, $H_{ijkl}^{*}=H_{ijkl}^{*}\left(T\right)$, $L_{ijkl}^{*}=L_{ijkl}^{*}\left(T\right)$ — компоненты симметричных тензоров 4-го ранга.

Подставив выражение (7) в первое уравнение (2), получим:

$$\sigma_{ji}=\sigma_{ji}^{0}\left(T\right)-\sigma_{ji}^{(S)}\left(T\right)+\left(C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl}-\left(M_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*}\right)\chi_{kl}^{(S)}+N_{ijkl}^{*}\chi_{kl}^{(T)}, \qquad (8)$$

где $\tilde{X}_{ijpq}=X_{ijkl}\dfrac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\varepsilon_{pq}}$; $\sigma_{ji}^{0}\left(T\right)=D_{ij}^{*}\left(T\right)=C_{ijkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора начальных напряжений при стеснённом нагреве в случае отсутствия внутренних параметров, $p,q=1,2,3$; $\sigma_{ji}^{(S)}\left(T\right)$ — компоненты тензора начальных напряжений при стеснённом нагреве, вызванные влиянием установившегося значения внутреннего параметра состояния $\overline{\chi}_{ij}^{(S)}$ и равные:

$$\sigma_{ji}^{(S)}\left(T\right)=\frac{\partial\chi_{mn}^{(S)}}{\partial\varepsilon_{ij}}F_{mn}^{*}=\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}F_{mn}^{*},$$

где $F_{mn}^{*}=K_{mnkl}^{*}\varepsilon_{kl}^{(T)}$, $K_{mnkl}^{*}=K_{mnkl}^{*}\left(T\right)$ - компоненты симметричного тензора 4-го ранга. Здесь $\varepsilon_{kl}^{(T)}=\int_{T_0}^{T}\alpha_{kl}^{(T)}dT'$ — компоненты тензора температурной деформации, $\alpha_{kl}^{(T)}$ — компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения, T_0 — температура естественного состояния.

Перепишем соотношение (8) в следующем виде:

$$\sigma_{ji}=\left(C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}M_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl}-\left(C_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}K_{mnkl}^{*}\right)\varepsilon_{kl}^{(T)}-$$
$$-\left(M_{ijkl}^{*}-\tilde{X}_{ijpq}a_{pqmn}^{(S)}H_{mnkl}^{*}\right)\chi_{kl}^{(S)}+N_{ijkl}^{*}\chi_{kl}^{(T)}.$$

В частном случае, когда $K_{mnkl}^{*}=M_{mnkl}^{*}$, данное соотношение можно упростить:

$$\sigma_{ji}=C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{(T)}\right)-M_{ijkl}\chi_{kl}^{(S)}+N_{ijkl}\chi_{kl}^{(T)}, \qquad (9)$$

где

$C_{ijkl} = C^*_{ijkl} - \tilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} M^*_{mnkl}$, $M_{ijkl} = M^*_{ijkl} - \tilde{X}_{ijpq} a^{(S)}_{pqmn} H^*_{mnkl}$, $N_{ijkl} = N^*_{ijkl}$.

Здесь $C_{ijkl} = C_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных упругих жесткостей; $M_{ijkl} = M_{ijkl}(T)$, $N_{ijkl} = N_{ijkl}(T)$ — компоненты тензоров 4-го ранга.

2. Вариант эндохронной теории пластичности при неизотермическом нагружении

Для получения определяющих соотношений эндохронной теории пластичности в условиях неизотермического нагружения примем следующие допущения [5]:

$M_{ijkl} = N_{ijkl} = C_{ijkl}$, $X_{mnkl} = \tilde{Y}_{mnkl} = I_{mnkl}$.

В этом случае соотношение (9), учитывая установившиеся значения внутренних параметров состояния (6), примет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a^{(S)}_{klmn}(z-z')\right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz' - C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a^{(T)}_{klmn}(z-z')\right) \frac{\partial \varepsilon^{(T)}_{mn}}{\partial z'} dz' = \sigma^{(S)}_{ij} - \sigma^{(T)}_{ij}, \qquad (10)$$

где компоненты вспомогательных тензоров напряжений $\sigma^{(S)}_{ij}$ и $\sigma^{(T)}_{ij}$ равны:

$$\sigma^{(S)}_{ij} = C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a^{(S)}_{klmn}(z-z')\right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial z'} dz', \quad \sigma^{(T)}_{ij} = C_{ijkl} \int_0^z \exp\left(-a^{(T)}_{klmn}(z-z')\right) \frac{d\varepsilon^{(T)}_{mn}}{\partial z'} dz'.$$

Продифференцировав соотношения (10) по внутреннему времени, получим:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - \left(a^{(S)}_{klmn} S_{mnpq} \sigma^{(S)}_{pq} - a^{(T)}_{klmn} S_{mnpq} \sigma^{(T)}_{pq}\right) dz\right) + \left(\frac{dC_{ijkl}}{dT} S_{klmn} \sigma_{mn} - C_{ijkl} \alpha^{(T)}_{kl}\right) dT, \qquad (11)$$

где $S_{ijkl} = S_{ijkl}(T)$ — компоненты тензора 4-го ранга эффективных коэффициентов податливости, определяемые из соотношения $S_{ijkl} C_{klmn} = I_{ijmn}$.

Обратное соотношение:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} + \left(a^{(S)}_{ijkl} S_{klmn} \sigma^{(S)}_{mn} - a^{(T)}_{ijkl} S_{klmn} \sigma^{(T)}_{mn}\right) dz - S_{ijkl} \frac{dC_{klmn}}{dT} S_{mnpq} \sigma_{pq} dT + \alpha^{(T)}_{ij} dT. \qquad (12)$$

Здесь приращение внутреннего времени dz определяем из уравнения $dz = d\xi / f(\xi)$, в котором материальная функция $f(\xi)$ задана как $f(\xi) = 1 + \beta\xi$, где β — материальный параметр модели. Приращение меры внутреннего времени $d\xi$ определяем из уравнения (5).

3. Пример расчета для демонстрации полученных соотношений

Для демонстрации полученных соотношений (12) рассмотрим температурное деформирование трансверсально-изотропного композита SCS-6/RBSN, представляющего собой реакционно-связанный нитрид кремния, армированный волокнами карбида кремния. Экспериментальные исследования этого материала показывают, что диаграммы температурного деформирования содержат нелинейные участки и петли гистерезиса. Кроме того, при охлаждении после термообработки в материале накапливаются термические напряжения, начиная с температуры 1200°C [8].

В качестве моделируемого эксперимента рассмотрены три цикла нагрева-охлаждения с предварительным охлаждением после термообработки (нулевой этап). Полученные результаты приведены на рис. 1. Анализ графиков показывает хорошее совпадение расчетных данных с экспериментальными значениями.

Проведенный анализ влияния предварительного (нулевого) этапа на результаты моделирования термоциклирования подтвердил важность учета начальных микронапряжений, возникающих при охлаждении материала от температуры обработки до комнатной температуры. Игнорирование этих напряжений может привести к значительным расхождениям между расчетными и экспериментальными данными, а следовательно, к некорректной оценке эксплуатационных характеристик материала.

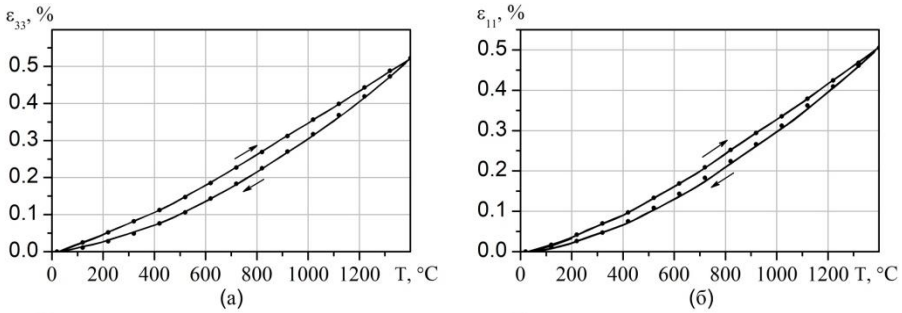


Рис. 1. Кривые температурного деформирования: вдоль волокон (а), поперек волокон (б). Сплошная линия — расчет, точки — эксперимент [8]

Заключение

В работе предложен вариант математической модели пластичности композиционных материалов при неизотермическом нагружении. Он получен на основе термодинамического подхода с внутренними параметрами состояния. В частном случае модель приведена к соотношениям эндохронной теории термопластичности. Проведенные расчеты показали хорошее согласование расчетных кривых с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (код проекта FSFN-2024-0004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones R.M. Deformation theory of plasticity. Blacksburg, Bull Ridge Publishing, 2009. 622 p.
2. Sun C.T., Yoon K.J. Characterization of elastic-plastic behavior of AS4/PEEK thermoplastic composite for temperature variation. Journal of composite materials. 1991. Vol. 25. P. 1297–1313.
3. Maugin G., Muschik W. Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts. J. Non-Equilib. Thermodyn. 1994. Vol. 19, No. 3. P. 217–249.
4. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов. Механика твердого тела. 2016. Т. 51, № 5. С. 111–123.
5. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд-во МГТУ, 1993. 142 с.
6. Сарбаев Б.С. Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 7. С. 97–104.
7. Рахимов Д.Р. Анализ определяющих соотношений эндохронной теории пластичности ортотропных материалов. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2025. № 1 (118). С. 65–81.
8. Bratt R.T., Palczer A.R. Effects of thermal cycling on thermal expansion and mechanical properties of SiC fibre-reinforced reaction-bonded Si3N4 composites. Journal of Materials Science. 1997. No. 32. P. 1039–1047.

Информация об авторах:

Зарубин Владимир Степанович, д.т.н., профессор, профессор кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, +7-499-263-63-26. **E-mail**: zarubin@bmstu.ru.

Зимин Владимир Николаевич, д.т.н., с.н.с., заведующий кафедрой космических аппаратов и ракет-носителей МГТУ им. Н. Э. Баумана, **E-mail**: zimin@bmstu.ru.

Рахимов Даниэль Рустамович, ассистент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, +7-919-844-10-25, **E-mail**: danrus1996@gmail.com.

Савельева Инга Юрьевна, д.ф-м.н. наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, +7-499-263-63-26. **E-mail**: inga.savelyeva@bmstu.ru.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННОГО ПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ СВМПЭ И НАНОЧАСТИЦ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЭРОСИЛА

Земцова Е.Г., Арутюнян А.Р., Кудымов В.К., Семенов Б.Н.

В данной работе изучались особенности получения композиционных материалов на базе СВМПЭ с нанонаполнителями на основе аэросила, поверхностно модифицированного наноструктурами карбида кремния методом молекулярного наслаивания. С целью улучшения сродства неорганического наполнителя к полимерной матрице проводилась модификация поверхности наночастиц гептилоксисилильными группами путем обработки в парах гептанола. Проведена оценка модуля упругости при исследовании на одноосное растяжение, твердости и стойкости к абразивному износу образцов нанокомпозитов. Анализ экспериментальных данных показал, что оптимальная степень наполнения модифицированным аэросилом лежит в области 10 масс. %, где материал имеет максимальные значения модуля упругости и предела текучести.

1. Введение

Полимерные композиционные материалы являются одним из наиболее важных и широко используемых классов современных функциональных материалов. Их потребление постоянно растет. Идеология создания современного полимерного материала подразумевает его высокую эффективность, как по функциональным, так и по экономическим показателям. В связи с этим необходимо учитывать не только возможные механические, теплофизические и др. показатели материала, но также его стоимость, особенности технологии переработки в изделия, ремонтопригодность этих изделий, возможность вторичной переработки [1].

Сверхвысокомолекулярный полиэтилен (СВМПЭ) в последнее время все шире используется в различных областях промышленности, транспортного машиностроения, строительства, что обусловлено высокими эксплуатационными характеристиками получаемых из него изделий. Высокая молекулярная масса СВМПЭ и его химическая природа обуславливают весь комплекс уникальных свойств, присущих данному полимеру: очень высокие физико-механические характеристики, морозостойкость, износостойкость, стойкость к агрессивным средам, низкий коэффициент трения. Большой интерес проявляется к композиционным материалам на основе СВМПЭ, содержащим наполнители и функциональные добавки, поскольку они позволяют добиться еще лучших потребительских свойств по сравнению с чистым полимером [2]. Перспективным представляет использование нанодисперсных наполнителей, создающих ансамбли в полимерной матрице и эффективно модифицирующих надмолекулярную структуру с образованием армированной полимерной системы.

Преимущество полимерных нанокомпозиционных материалов заключается в объединении уникальных свойств полимеров и наночастиц в одном материале – от полимеров это легкость в обработке, низкая стоимость, вязкоупругость, от наночастиц – твердость, прочность, термостойкость. Анализ литературных данных по полимерным нанокомпозитам говорит о перспективности применения подобных материалов в барьерных технологиях (упаковка), электронных и медицинских технологиях и лишь с большой осторожностью – в конструкционных материалах. Применение нанодисперсных наполнителей позволяет в разы, а иногда и на порядки улучшить барьерные свойства традиционных полимеров, в то время как приращение механических свойств, как правило, не превышает 20%. Вместе с тем, в специальных условиях направленного синтеза полимерного нанокомпозита удается получить материалы с действительно уникальными характеристиками. Таким образом, при нынешнем уровне развития нанотехнологий применение полимерных нанокомпозитов в большей степени оправдано в дорогостоящих технологиях с высокой добавленной стоимостью (полупроводниковая электроника и медицинские технологии и техника). Там, где себестоимость материала не является определяющей величиной.

2. Методика создания полимерного композита и исследования механических свойств

Одним из возможных решений по улучшению механических характеристик полимерного композита может способствовать гомогенное распределение наночастиц армирующей фазы в полимерной матрице, за счёт повышения адгезии между компонентами композиционного материала. Для преодоления низкого сродства наночастиц к полимеру вследствие термодинамической несовместимости в ряде случаев проводится модификация поверхности наночастиц. С этой целью применяются способы ковалентной и нековалентной функционализации поверхности (химические и физические методы модификации поверхности). Химическая модификация поверхности наночастиц подразумевает изменение природы поверхностных функциональных групп наночастиц либо пришивку полимерных/олигомерных цепей [3]. В результате можно получить материалы с уникальным сочетанием физико-механических и триботехнических характеристик, которые могут эффективно применяться для изготовления деталей узлов трения.

В данной работе изучались особенности получения композиционных материалов на базе СВМПЭ с нанонаполнителями на основе аэросила А-300 (с размером частиц от 5 до 40 нм) с привитыми кремний-карбидными наноструктурами и органическими группами. Синтез титан-азотных наноструктур и органических групп на поверхности аэросила осуществляли методом молекулярного наслаивания (ML-ALD) [4]. Метод молекулярного наслаивания (ML) основан на том факте, что необратимая хемосорбция, идущая при непрерывном притоке реагента в токе инертного газа, с течением определенного времени приводит к полному заселению поверхности подложки соответствующими функциональными группами. Были исследованы физико-механические свойства получаемых композиционных материалов, проведена оценка прочностных свойств, твёрдости и износостойкости.

В нашей работе мы использовали совмещение частиц нанонаполнителя с порошком полимера в шаровой мельнице. Такой способ смешения в последнее время довольно широко используется для получения композиционных материалов на основе СВМПЭ [5]. При совмещении полимера с наноразмерным наполнителем он более предпочтителен, чем смешение в барабанном смесителе или лопастном смесителе с быстро вращающимся ротором.

Формование образцов композиционного полимерного материала проводилось методом термопрессования при температуре 180°С и давлении в пресс-форме 10 МПа, время выдержки 20 минут.

Для увеличения адгезии и активировании порошкообразного СВМПЭ при введении наномодификаторов был использован вариант обработки поверхности полимерных материалов, который направлен на повышение ее поверхностной энергии. Мы активировали порошкообразный СВМПЭ коронным разрядом. После обработки коронным разрядом на поверхности полимерных материалов образуются карбоксильные, карбонильные, пероксидные, нитроксидные и другие функциональные группы, которые и приводят к увеличению поверхностной энергии. В случае, когда напыление наномодификаторов происходит в процессе обработки коронным разрядом, эффективность формирования адгезионных связей между наночастицами и поверхностью полимерных материалов увеличивается.

Эксперименты по активации полимерных материалов проводили на установке с помощью высоковольтного источника питания Плазон ИВНР 5/50 с регулируемым выходным напряжением в интервале от 0,3 до 5 кВ. Установка также позволяет осуществлять посадку наночастиц на полимерный субстрат непосредственно в процессе обработки коронным разрядом.

При испытании образцов на одноосное растяжение было показано, что наполнение модифицированным аэросилом до 15% (масс) не оказывает существенного влияния на предел текучести материала (26-28 МПа) и деформацию, соответствующую пределу текучести (13-15 %), однако приводит к заметному увеличению предела прочности. Модули упругости материала при наполнении модифицированным аэросилом возрастают до степени наполнения

около 10%, после чего наблюдается резкое снижение. Было также установлено, что твердость нанокомпозитов на основе СВМПЭ и модифицированного аэросила закономерно возрастает с увеличением степени наполнения.

Твердость материала является важнейшей механической характеристикой материала. Она определяет при каких максимальных нагрузках будет применяться полученный композит. Полученные в результате испытаний на твердость данные показали, что твердость композиционного материала на основе СВМПЭ и нанонаполнителей возрастает с увеличением степени наполнения, а затем снижается. Частицы модифицированного аэросила, распределенные в матрице полимера, структурируют полимер вблизи границы раздела, образуя твердые и жесткие слои, которые оказывают сопротивление внедрению в них инородного тела, распределяя нагрузку равномерно по материалу. Однако, когда наполнителя становится слишком много, формируется обширная и непрерывная межфазная граница, то напряжение начинает передаваться с частиц на материал и сами частицы начинают выступать в роли индентора. Таким образом, слои частиц продавливают нижележащие слои полимера [6].

Результаты оценки модуля упругости при исследовании на одноосное растяжение, твердости и стойкости к абразивному износу образцов нанокомпозитов СВМПЭ с аэросилом, модифицированным титаннитридными слоями, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Исследование механических характеристик композиционных полимерных материалов на основе матрицы СВМПЭ.

Образец	Наполнение	E, МПа	$\sigma_т$, МПа	Твердость, Н/мм^2	Износостойкость, отн. ед	Коэфф. линейн. расширения $(\alpha \pm 1.5)_*10^5$, K^{-1}
Чистый СВМПЭ	0%	570±49	26±1	36.1±2,2	1	6.1
СВМПЭ + аэросил	10%	770±34	28±1	38.0±0,94	2	8,4
СВМПЭ + аэросил с SiC наноструктурами	5%	781±55	25±0,5	39±2,1	2,3	-
	10%	840±32	26±0,5	43,9±2	3	9,3
	30%	781±26	26±0,5	45±1,3	5	-

Из приведенных данных таблицы хорошо видно, что модуль упругости сначала растет, затем начинает снижаться. Это связано прежде всего со сшивающим эффектом частиц армирующей фазы. Макромолекулы формируют дополнительные связи с поверхностью армирующей фазы, и в результате повышается общая жесткость материала. Однако после образования обширной границы полимер-наполнитель адгезия уменьшается, растет вклад менее прочных связей наполнитель-наполнитель и модуль упругости падает. По этой же причине падает и предел прочности. Макромолекулярные клубки в то же время получают возможность развернуться на большую длину до необратимого разделения, и вследствие этого наблюдается рост деформации при разрыве.

3. Заключение

Сопоставление данных по результатам испытаний на одноосное растяжение для СВМПЭ, наполненного модифицированным аэросилом и модифицированным аэросилом с титаннитридными слоями, позволяет сделать вывод, что оптимальная степень наполнения лежит около 10 масс. %, где материал имеет максимальные значения модуля упругости и предела текучести,

предела прочности. Это согласуется с литературными данными по другим наполнителям полимерной матрицы. Увеличение армирующей фазы в составе полимерного композита более 10% приводит к снижению модуля упругости и прочностных характеристик материала.

Структурирование полиэтиленовой матрицы наночастицами аэросила с нанослоями нитрида титана позволяет увеличить одни из основных конструкционных характеристик полимерных материалов (таких как модуль упругости, прочность, твёрдость) и тем самым позволяет резко улучшить механические свойства конструкционных полимерных композиционных материалов. Полученный нанокомпозит может быть использован в качестве материала конструкционного назначения для изготовления износостойких слабонагруженных деталей, например, для железных дорог, и также в качестве финишного покрытия для ёмкостей и арматуры, контактирующих с агрессивными средами.

4. Благодарности

Автор выражает благодарность Научному парку СПбГУ, РЦ «Центр исследования экстремальных состояний материалов и конструкций», РЦ «Нанотехнология».

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00376.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гращенков Д.В., Чурсова Л.В. Стратегия развития композиционных и функциональных материалов // Авиационные материалы и технологии, 2012. № S. С. 231-242.
2. Arutyunyan A.R., Arutyunyan R.A. Damage and fracture of viscous-plastic compressible materials // Material Physics and Mechanics, 2020. V. 44. P. 250-255.
3. Q. Zhang, K. Naito, Y. Tanaka, и др. Grafting Polyimides from Nanodiamonds // Macromolecules, 2008. V. 41. С. 536-538.
4. В.М. Смирнов. Структурирование на наноуровне - путь к конструированию новых твердых веществ и материалов // Ж. Общей Химии, 2002, Т. 72, № 4, С. 633-650.
5. Панин С.В., Корниенко Л.А., Ваннасри С., Иванова Л.Р., Шилько С.В. Влияние механической активации полимерного связующего на фрикционно-механические свойства сверхвысокомолекулярного полиэтилена // Трение и износ, 2010. Т. 31.
6. В. Шах. Справочное руководство по испытаниям пластмасс и анализу причин их разрушения. СПб.: Научные основы и технологии, 2009. С 42-49.

Сведения об авторах:

Земцова Елена Георгиевна – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии + 7 (812) 4284033, E-mail: ezimtsova@mail.ru

Арутюнян Александр Робертович – старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет + 7 (812) 4284164, E-mail: a.arutyunyan@spbu.ru

Кудымов Владимир Константинович – студент, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии + 7 (812) 4284033, E-mail: v.k.kudymov@gmail.com

Семенов Борис Николаевич – доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет +7 921 9214965, E-mail b.semenov@spbu.ru

ВЛИЯНИЕ НАНОСТРУКТУРИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЧАСТИЦ АРМИРУЮЩЕЙ ФАЗЫ НИКЕЛЕВОЙ МАТРИЦЫ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТА

Земцова Е.Г., Морозов П.Е., Кудымов В.К., Семенов Б.Н.

Проведены экспериментальные исследования процесса прессования и спекания металломатричного композиционного материала на основе никеля, армированного дисперсными частицами никеля , покрытыми слоем карбида титана толщиной 0.5-2 нм с целью получения непористого материала. Определены оптимальные условия получения непористого композита, а именно, температура и длительность спекания, промежуточные температурные выдержки, а также среда спекания (аргон и водород), для достижения наилучших механических свойств синтезируемого материала. Исследовано влияние толщины карбидного покрытия дисперсных частиц на прочность и пластичность синтезированного металлокомпозита. Показано значительное увеличение пластичности синтезированных нанокомпозитов по сравнению с образцами чистого никеля , полученного при тех же режимах прессования и спекания. Проведена оценка наблюдаемого в экспериментах упрочнения с помощью известных механизмов упрочнения.

1. Введение.

Современные технологии создания металломатричных композитов (МКМ) основываются на принципах управления свойствами путем направленного структурирования и наноструктурирования материала. Возможность изменения количества и размера армирующих частиц, а также разнообразие матричных сплавов открывают широкие перспективы для использования металломатричных композитов в качестве конструкционных материалов в различных областях. Однако, несмотря на преимущества металломатричных композитов перед традиционными материалами, их производство и применение в некоторых областях машиностроения ограничено. Наряду с разработкой составов и совершенствованием технологии изготовления требуется дальнейшая разработка общих принципов и критериев конструирования металломатричных композитов для машиностроительных целей и накопление опыта их эксплуатации [1]. Нужно отметить, одним из важных критериев при создании металломатричного материала является подбор объема армирования, т.е. количества армирующей фазы, вводимой в матрицу. Как показали опыты, с ростом объема армирования материал охрупчивается, что связано с образованием локальных зон с повышенным содержанием частиц армирующей фазы, не связанных ни друг с другом, ни с зёрнами матрицы. При армировании карбидными наночастицами их содержание в нанокомпозите не превышает нескольких процентов, поскольку наночастицы обладают плохой адгезией к материалу матрицы и агрегируют, что приводит к снижению прочности и пластичности [2]. Кроме того, размер армирующих наночастиц обычно не превышает 50 нм, т.к. при уменьшении их размера растет их агрегация.

Никель широко используется при изготовлении жаропрочных и износостойких сплавов. Интерес к использованию карбида титана в качестве армирующей добавки обусловлен прежде всего тем, что он помимо высоких механических свойств вследствие близости типа и размеров кристаллической решетки с никелем карбид титана обладает сильным модифицирующим действием.

В работе предлагается метод создания никельматричного нанокомпозиционного материала с использованием процесса поверхностного структурирования армирующей фазы с возможностью направленного регулирования механических свойств [3] и проводится исследование механических свойств получаемого композита. Предлагаемый метод внесения в матрицу армирующих частиц карбида титана дает возможность снять ограничения на их размер и за счет этого существенно улучшить пластические свойства металлокомпозита.

2. Методика создания никельматричного композита и исследования механических свойств.

Для получения нанокомпозита применяется метод порошковой металлургии с предварительным получением дисперсионного армирующего порошка никеля с нанесенным на его поверхность методом ALD (атомно-послойная эпитаксия; МН-молекулярное наслаивание), предпола-

гающим циклическую химическую сборку монослоёв на поверхности частиц никеля путём поочерёдной необратимой химической сорбции. Многократное повторение циклов наслаивания приводит к наращиванию массивного карбидного слоя, толщина которого линейно зависит от количества циклов наслаивания. В результате работы были получены образцы никелевых частиц с карбидными структурами на поверхности, толщиной от 0,5 до 2 нм (Ni/ TiC). Один цикл наслаивания даёт прирост 5 ангстрем (0,5 нм).

В качестве исходного материала для изготовления металломатричного композита взят никелевый порошок с диаметром частиц порядка 70 мкм.

После смешивания никелевого порошка и дисперсионных армирующих частиц Ni/ TiC в планетарной шаровой мельнице РМ 100 СМ в соотношении 99:1 полученная смесь подвергалась прессованию.

После стадии прессования полученные образцы нагревали в токе водорода до 900 или 1100℃ и выдерживали при данных температурах в течение часа. При повышении температуры прокаливания с 900 до 1100 ^{o}C в атмосфере водорода в образцах синтезированного композита наблюдалось увеличение предела прочности и переход от хрупкого разрушения к пластическому. В дальнейшем прогрев образцов проводили при 1100 ^{o}C в атмосфере водорода, что позволило избежать охрупчивание никелевой матрицы.

По этой схеме были получены образцы никелевого композита с 1% армирующей фазы Ni@TiC с карбидным покрытием 0.5 нм, 1 нм и 2 нм.

Для сравнения был изготовлен контрольный образец из порошка никеля при тех же условиях прессования и спекания.

Отсутствие межфазных границ между частицами матрицы никеля и наноструктурами карбидов за счёт проведения поверхностных химических реакций (метод **ALD-MH**) позволило получить образцы с отсутствием внешней и внутренней пористости. Для подтверждения наличия в образцах карбида титана, был зарегистрирован рентгеновский фотоэлектронный спектр. Пики при энергиях 455 эВ (Ti2p)) соответствует связи C-Ti, что позволяет сделать вывод о наличии TiC в образцах.

Исследование микроструктуры композита подтвердило равномерное распределение частиц карбида в металлической матрице.

На основе изучения механической прочности определены пути регулирования механических характеристик за счет процессов структурирования никеля карбидными наноструктурами. Определены механические характеристики полученных образцов металломатричного нанокомпозита на основе никеля с нанодисперсной фазой карбида титана.

Были проведены механические испытания полученных композитов, содержащих 1% армирующей фазы частиц никеля (Ni@TiC) с разным соотношением карбидных наноструктур в никелевой матрице. Выявленные механические характеристики представлены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики никелевого композита с 1% армирующей фазы Ni@TiC.

Образцы	σ_B - предел прочности	$\sigma_y^{(l)}$ - предел текучести	ε_{pl} - длина площадки текучести	Удлинение ε %
TiC, 0,5 нм	223	130	0,645%	9,14%
TiC, 1 нм	239	198	0,448%	10,76%
TiC, до 2 нм	245	170	0,490%	6,80%
Ni	221	-	-	2.29%

В полученных образцах в качестве упрочняющей фазы выступают не частицы, а наноструктуры карбида титана до 2 нм химически связанные с подложкой. Это позволило во всех образцах с учётом 1% введения армирующей фазы в матрицу никеля сформировать площадку теку-

чести и одновременно улучшить пластичность материала. Наибольшей пластичностью обладал образец после двух циклов молекулярного наслаивания (размер наноструктур около 1 нм.).

В работе в рамках микромеханического моделирование оценены вклады известных механизмов упрочнения в результирующее упрочнение металлокомпозита в зависимости от концентрации, распределения частиц по объему, размера армирующих частиц.

Показано, что основной вклад в упрочнение синтезируемого нанокомпозита с никелевой матрицей дают вклады за счет механизма Холла-Петча-Зенера и механизма дисперсионного упрочнения Орована. При оценке этих вкладов учитывалось влияние армирующих наночастиц карбида титана на размер зерна при рекристаллизации, а также предполагалось, что диаметр армирующих частиц равен толщине карбидного покрытия на дисперсных частицах Ni@TiC, т.е. при рекристаллизации не происходит их слияние, и частицы равномерно распределены по объему.

Заключение.

В работе был изучен процесса формирования композиционных материалов с точки зрения наноструктуры, а также переходного слоя металл-керамика. Отсутствие межфазных границ между частицами матрицы никеля и наноструктурами карбидов позволило минимизировать внутреннюю пористость образца. Удалось существенно повлиять на равномерность распределения армирующей фазы в никелевой матрице и улучшить смачиваемость армирующей фазы материалом матрицы за счёт введения в матрицу наноструктур карбида титана, нанесенных на частицы никеля методом молекулярного наслаивания, и избежать дефектов и пор между частицами в объёмном образце.

Важной особенностью разрабатываемого композита является отсутствие явных границ раздела между металлической матрицей и армирующим элементом. Это обеспечивает связывания матрицы и армирующей фазы в единое целое. Данный аспект достигается за счет того, что наноструктуры армирующей фазы соединены с металлической матрицей химической связью. Атомы армирующего материала и материала матрицы, связанные друг с другом химическими связями через условную плоскость раздела, принадлежат одновременно двум согласованным структурам, в результате чего образовавшаяся условная граница раздела характеризуется низкой энергией и, следовательно, высокой прочностью.

Наблюдаемое увеличение прочности металломатричных композиционных материалов напрямую связанно с уменьшением размера частиц армирующей фазы (TiC) до нескольких нанометров. Это обусловлено ростом удельной площади взаимодействия зёрен армирующей фазы и зёрен матрицы, уменьшением размеров дефектов материала, которыми одновременно являются и частицы армирующей фазы.

Благодарности.

Авторы выражают благодарность Ресурсным центрам Научного парка СПбГУ «Центр исследования экстремальных состояний материалов и конструкций» и «Нанотехнология» за техническую поддержку в проведении экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00421.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kumaraswamy J., Kumar V, Purushotham G.A. review on mechanical and wear properties of ASTM a 494 M grade nickel-based alloy metal matrix composites. Materials Today: Proceedings, 2021, vol.37 (2), 2027-2032.
2. Gu D., Zhang H., Dai V., Xia V., Hong V., Poprawe V. Laser additive manufacturing of nano-TiC reinforced Ni-based nanocomposites with tailored microstructure and performance. Compos. Part B Eng., 2019,vol.163, 585–597.
3. Zemtsova E.G., Monin A.V., Smirnov V.M., Semenov B.N., Morozov N.F. Synthesis of ceramic composites using three-dimensional nanostructuring (reinforcement) of alumina matrix with TiN and SiC nanostructures and study of their mechanical properties. Physical Mesomechanics, vol. 20, Issue 4, 438-446.
4. Somashekar H.M., Gowthama K., Suresha V. Microstructure, mechanical properties and sliding wear Behaviour of silicon carbide reinforced Al 6026 composites. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD), 2020, vol. 10, Issue 1, 2020, 259–270
5. Ferguson J.B., Lopez H., Kongshaug; D., Schultz B., Rohatgi P.(2012). Revised Orowan Strengthening: Effective Interparticle Spacing and Strain Field Considerations. Metallurgical and Materials Transactions A,, 2012, vol.43(6), 2110–2115.

Сведения об авторах:

Земцова Елена Георгиевна – к.х.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, к.х.н., Институт химии (+7(812)4284033), E-mail: ezimtsova@mail.ru

Морозов Павел Евгеньевич- к.х.н., инженер, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии (+7(812)4284033), E-mail: comitcont@yandex.ru

Кудымов Владимир Константинович – инженер, Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии (+7(812)4284033), E-mail: v.k.kudymov@gmail.com

Семенов Борис Николаевич – к.ф.-м.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет (+7 (921) 9214965), E-mail b.semenov@spbu.ru

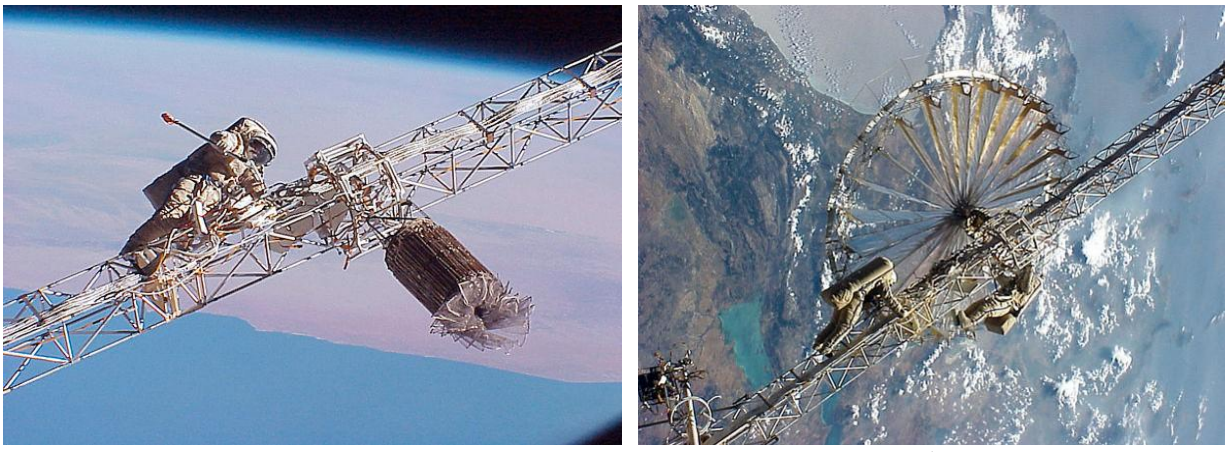
МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗУДАРНОГО ПРИВОДА ИЗ МАТЕРИАЛА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ ДЛЯ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Зимин В.Н., Крылов А.В., Шахвердов А.О..

В процессе развития космической техники возникла потребность в увеличении мощности источников энергии, что привело к увеличению площади солнечных батарей, которые стали одними из наиболее протяженных элементов конструкции космических аппаратов. Решение практических задач в области астрономии, связи и навигации выдвинуло на передний план проблему создания крупногабаритных космических радиоантенн. В связи с этим исследования и разработки в области проектирования крупногабаритных космических конструкций представляют значительный интерес для научного сообщества, инженеров и конструкторов. Конструкции должны доставляться в транспортном плотноупакованном виде, допускающем их трансформацию из сложенного состояния в развернутое на орбите. Сама процедура развертывания конструкции происходит под воздействием силовых приводов. Для того чтобы избежать динамических нагрузок, которые носят ударный характер, воздействующих на элементы трансформируемой системы, необходимо применять приводы, работающие безударно и имеющие относительно небольшую массу. Представляется целесообразным использовать привод с активным элементом, выполненным из материала никелида титана с эффектом памяти формы. У этих активных элементов управляющим воздействием является температурное поле. Фазовые превращения материала никелида титана весьма чувствительны к изменению температуры, в силу чего требуется высокая точность её обеспечения. Проведенные экспериментально-теоретические исследования активных элементов силового привода из материала никелида титана (проволока диаметром 1,5 мм) подтвердили возможность генерации ими значительной силы при достаточно малой массе, не высокой потребляемой мощности и безударном характере процесса раскрытия крупногабаритных космических конструкций.

1. Введение

Создание крупногабаритных космических конструкций связано с решением ряда технических проблем, обусловленных уникальностью систем, характерной особенностью которых является сочетание противоречивых требований, а именно увеличения геометрических размеров и обеспечения достаточной жесткости при минимальной возможной их массе. Особый класс таких космических систем образуют трансформируемые конструкции, схема которых предполагает автоматическое изменение конфигурации. Конструкции доставляются на околоземную орбиту в сложенном плотноупакованном состоянии. При достижении необходимой орбиты осуществляется раскрытие конструкции, рис. 1. В современных космических технологиях особую актуальность приобретают вопросы создания эффективных трансформируемых конструкций, способных изменять свою форму и размеры в процессе эксплуатации. Это обусловлено необходимостью оптимизации массы, объема и энергетических затрат при выведении космических аппаратов на орбиту, а также требованиями к их функционированию в условиях космического пространства [1,2].



а б

Рисунок 1. Крупногабаритная трансформируемая космическая конструкция:

а – в транспортном положении; б – в рабочем положении.

Безударный привод на основе материалов с эффектом памяти формы представляет собой рациональное техническое решение, позволяющее осуществлять плавное раскрытие

конструкций без резких динамических нагрузок. Такой подход значительно повышает надежность и долговечность трансформируемых систем, минимизирует риски повреждения при развертывании и позволяет проектировать конструкции, имеющие значительные геометрические размеры [3].

Активный элемент привода из материала с эффектом памяти формы работает за счёт фазовых превращений внутри данного материала. При протекании данных фазовых превращений материал может восстанавливать предварительно полученную деформацию, чем и создаёт рабочее перемещение привода.

2. Линейная модель

Для успешного функционирования конструкции с приводом из материала с эффектом памяти формы необходимо точно понимать какое перемещение будет создано приводом и как оно зависит от температуры, так как управляющим воздействием на материал с эффектом памяти формы является температурное поле [4,5].

При наземных испытаниях можно принять, что изменение внутренней энергии привода с активным элементом в виде проволоки из никелида титана равно количеству теплоты, поступившему за счет нагрева от пропускания электрического тока, минус тепловые потери от естественной конвекции и минус энергия, затраченная на фазовые превращения(Q) [6].

Уравнение энергетического баланса:

$$cm(T_2 - T_1) = RI^2\Delta t - \alpha S(T_1 - T_c)\Delta t - Q \quad (1)$$

Расчёт проводится методом шагов по времени. Если компоненты уравнения (1), отвечающие за нагрев от пропускания электрического тока и тепловые потери от естественной конвекции можно считать приблизительно неизменными в течении всего времени работы привода, то энергия, ушедшая на фазовые преобразования, значительно меняется в процессе работы привода. Таким образом на каждом шаге по времени вычисляется количество теплоты, ушедшее на фазовые превращения(Q') (2).

$$Q' = n(RI^2\Delta t - \alpha S(T_1 - T_c)\Delta t) \quad (2)$$

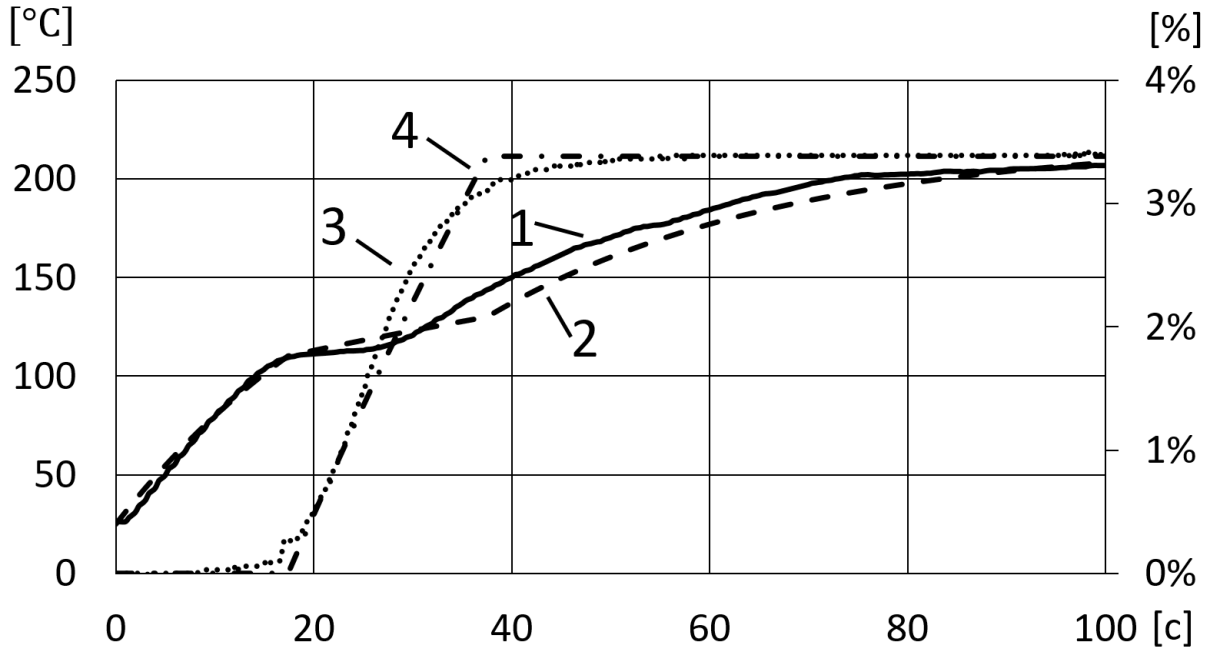


Рисунок 2. Сравнение линейной модели с экспериментальными данными:
1 – экспериментальные данные температуры, 2 – расчётные данные температуры,
3 – экспериментальные данные перемещения, 4 – расчётные данные перемещения

Также, в зависимости от того какая часть энергии в данный промежуток времени ушла на фазовые преобразования, можно посчитать создаваемое приводом перемещение (3).

$$h = \frac{Q'}{Q} h_{\max} \tag{3}$$

На рис. 2 представлено сравнение расчёта по линейной модели с экспериментальными данными. Анализируя графики, можно сделать вывод, что результаты расчёта по линейной модели довольно точно совпадают с экспериментальными данными в начале работы привода. Однако при завершении процесса фазовых превращений результаты существенно разнятся из-за нелинейности изменения как температуры, так и перемещений.

3. Нелинейная модель

При моделировании, подобные нелинейности в процессе работы активного элемента привода с эффектом памяти формы можно учитывать с использованием параметра состояния(χ). За данный параметр можно принять отношение части материла, которая уже совершила фазовый переход, к общему количеству материала. Так как величина энергии, необходимой для фазового перехода известна [7], то считать параметр состояния можно используя полную энергию, необходимую для фазового перехода всего материала (Q) и количество энергии уже потраченное на фазовый переход в текущий момент времени (Q') (4).

$$\chi = \frac{Q'}{Q}; \qquad 0 \le Q' \le Q; \qquad 0 \le \chi \le 1 \tag{4}$$

Фундаментально, уравнение, описывающее нагрев активного элемента, остаётся тем же, однако теперь, с учётом параметра состояния можно также учесть изменение электрического сопротивления привода, которое влияет на динамику нагрева (5).

$$cm(T_2 - T_1) = \frac{U^2}{R(\chi)} \Delta t - \alpha S (T_1 - T_c) \Delta t - Q \tag{5}$$

Энергия, потраченная на фазовые превращения, вычисляется по формуле (6). С учётом параметра состояния данным образом, количество теплоты, идущее на фазовые превращения, значительно изменяется в процессе работы привода.

$$Q' = \frac{-\chi^2 + k}{k} \left(\frac{U^2}{R(\chi)} \Delta t - \alpha S (T_1 - T_c) \Delta t \right) \tag{6}$$

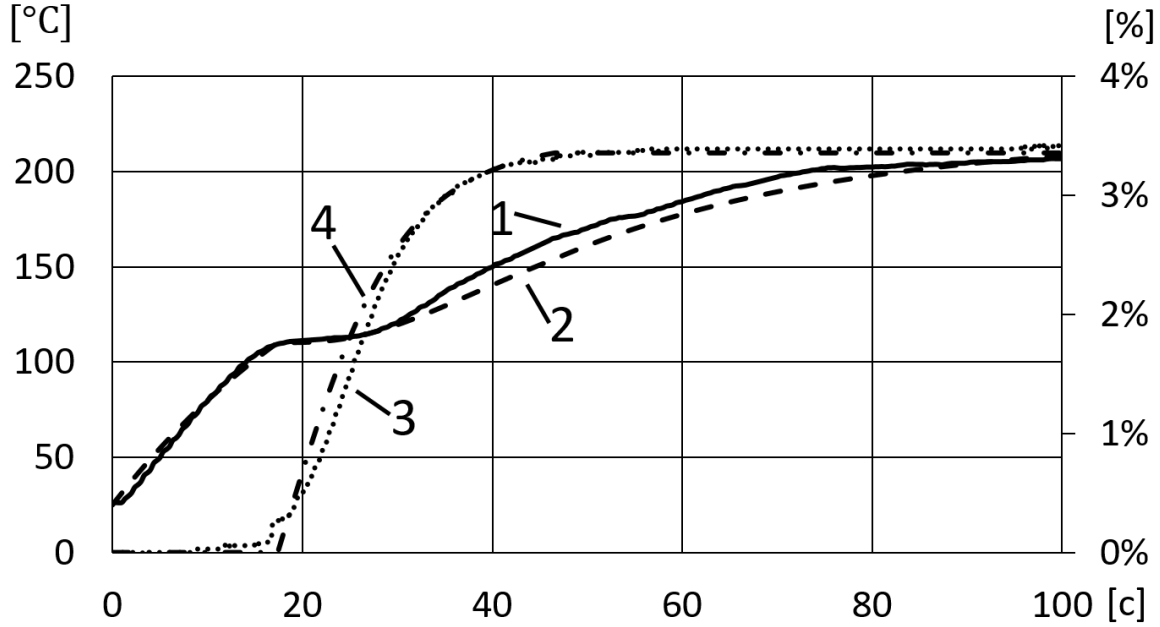


Рисунок 3. Сравнение нелинейной модели с экспериментальными данными:
1 – экспериментальные данные температуры, 2 – расчётные данные температуры,
3 – экспериментальные данные перемещения, 4 – расчётные данные перемещения

Множитель с параметром состояния определяет какая часть тепловой энергии уходит на фазовые превращения, а какая идёт на нагрев. Затраты энергии на фазовое превращение

происходят только после достижения активным элементом температуры начала фазовых превращений и идут до момента полного фазового превращения всего материала [8]. Таким образом, расчёт затраченной энергии по формуле (6) происходит только после достижения активным элементом заданной температуры, и продолжается до тех пор, пока количество затраченной энергии не сравняется с энергией, необходимой для полного фазового превращения всего материала.

Также с помощью параметра состояния можно рассчитывать перемещение, создаваемое активным элементом привода по формуле (7)

$$h = \chi h_{\max} \tag{7}$$

Результаты расчёта по данной нелинейной модели представлены на рис. 3. Из графиков, приведённых на данном рисунке видно, что помимо достаточно точного совпадения расчёта с экспериментальными данными в линейной части, ярко выраженные нелинейности изменения как температуры, так и перемещения, при окончании фазовых превращений, хорошо описываются данной моделью.

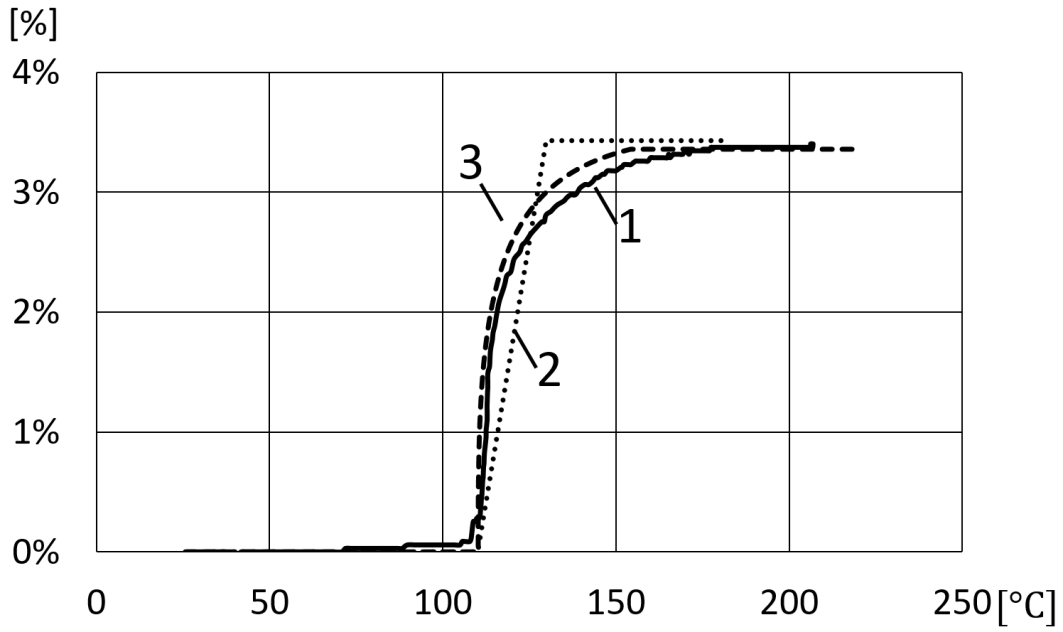


Рисунок 4. Сравнение зависимостей перемещения от температуры
1 – экспериментальные данные, 2 – линейная модель, 3 – нелинейная модель

Так как основным параметром работы привода является изменение его длинны, а управляющим воздействием на активный элемент из материала с эффектом памяти формы является температурное поле, то важнейшей характеристикой будет зависимость перемещения от температуры. Таким образом, из графиков на рис. 4 можно сделать вывод, что нелинейная модель гораздо лучше описывает конечный этап работы привода из материала с эффектом памяти формы. Данная модель хорошо отражает плавность завершения работы привода, что и может обеспечивать безударное раскрытие крупногабаритной космической конструкции.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (проект № FSFN-2024-0004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопатин А.В., Рутковская М.А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (Часть 1) // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2007, № 2. С. 51-57.
2. Механика больших космических конструкций / Н.В. Баничук, И.И. Карпов, Д.М. Климов и др. М.: Изд-во «Факториал», 1997. 302 с.

3. Likhachev V.A., Razov A. I., Cherniavsky A.G., Kravchenko Y., & Trusov S.N. Truss mounting in space by shape memory alloys. In Proceedings of the First International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, 1994, California, USA pp. 245-248.
4. Методика проектирования силовых приводов из материала с эффектом памяти формы для ракетно-космической техники / В. А. Барвинок, В. И. Богданович, А. А. Грошев и др. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2013. Т. 15. № 6. С. 272-277.
5. Zimin, V.N., Krylov, A.V., Kuvyrkin, G.N., Shakhverdov, A.O. (2023). Mathematical Modeling of Deployment Dynamics of Large Transformable Space Structures. In: Orlov, M.Y., Visakh P. M. (eds) Behavior of Materials under Impact, Explosion, High Pressures and Dynamic Strain Rates. Advanced Structured Materials, vol 176. Springer, Cham.
6. Schiedeck F., Hemsel T., Wallaschek J. The use of shape memory alloy wires in actuators, Solid state Phenomena, 2006, Vol. 113, pp. 195-198.
7. Мишустин И.В. Трёхуровневая модель сплава с памятью формы и её применение к описанию эффекта реверсивной памяти формы, Механика композиционных материалов и конструкций, 2012, Т. 18, №. 4, с. 463-474.
8. Zimin V.N., Krylov A.V., Kuvyrkin G.N., & Shakhverdov A.O. Development of a mathematical model of a force actuator for the opening of a space structure with transformable configuration, Journal of Physics: Conference Series, 2022, 2231.

Информация об авторах

Зимин Владимир Николаевич – доктор технических наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой «Космические аппараты и ракеты-носители» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (национального исследовательского университета)
E-mail: zimin@bmstu.ru

Крылов Алексей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (национального исследовательского университета)
E-mail: kav1982@bmstu.ru

Шахвердов Артур Олегович – старший преподаватель кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (национального исследовательского университета)
E-mail: shah@bmstu.ru

ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ВСТАВКИ И ТРУБЫ С ВНУТРЕННИМ НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ, ПОМЕЩЕННОЙ В ЖЕСТКУЮ ОПРАВКУ

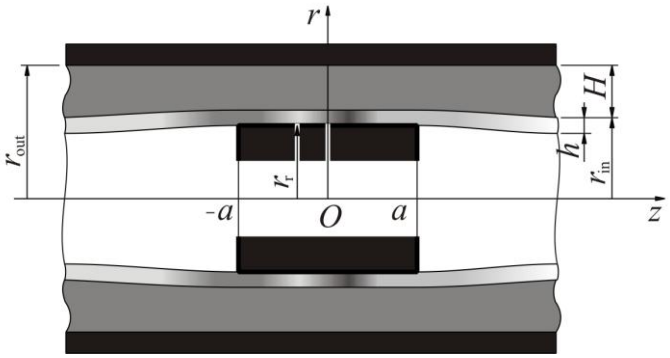
Казаков К.Е.

В работе описывается механическая и математическая постановки задачи о взаимодействии осесимметричной жесткой вставки и трубы, изготовленной из вязкоупругого стареющего материала, внутренняя поверхность которой покрыта неоднородным слоем. Предполагается, что труба помещена в жесткую оправку. Для поставленной задачи указан алгоритм построения аналитического решения в рядах, основанный на применении базисных функций, построенных на основании входящих в математическую модель сложных функций, представления решения в специальном виде и использовании собственных функций оператора Фредгольма. Приведен вид аналитического решения. Указанный подход позволяет выделить в решении функцию, связанную с неоднородностью покрытия, отдельным множителем, что позволяет производить вычисления с высокой точностью даже в случае, когда неоднородность покрытия описывается быстро изменяющейся функцией, так как при проведении расчетов достаточно ограничиться сравнительно небольшим числом членов ряда.

Для достижения различных целей на практике используют многослойные трубы, различные слои которых служат различным целям: часть слоев держат нагрузку, некоторые слои защищают от внешних или внутренних агрессивных сред, другие могут являться электро- или теплоизоляторами. Вследствие различных целей слои такой многослойной трубы изготавливаются из материалов с различными свойствами, в том числе упругими. Трубы крепятся к конструкциям и соединяются между собой различными способами: соединяются при помощи вставок, муфт и других элементов. Вследствие многослойности задача расчета напряжений, возникающих в местах креплений усложняется, а учет неоднородностей, сложных профилей и переменных во времени характеристик дополнительно его усложняет.

Ранее были рассмотрены различные варианты состава и крепления труб. Были рассмотрены случаи, когда внешнее покрытие неоднородно и/или имеет переменный профиль, а трубу обхватывает муфта, внутренняя поверхность которой также может быть сложной (см., например, [1, 2]). Работы [3, 4] учитывают наличие жесткого вала внутри трубы. В статьях [5, 6] описано построение решений для случаев, когда покрытие внутреннее, а жесткий элемент помещается внутрь такой трубы. В данной статье рассматривается случай, когда в находящуюся в жесткой оправке трубу с внутренним покрытием помещается жесткая вставка.

Рассмотрим осесимметричную однородную кольцевую трубу, изготовленную из вязкоупругого стареющего материала. Внутри такая труба покрыта тонким слоем постоянной толщины, упругие характеристики которого меняются вдоль осевой координаты. Считается, что покрытие нанесено так, что между ним и трубой осуществляется идеальный контакт. Описанная труба с внутренним покрытием помещена в жесткую оправку, внутренний диаметр которой совпадает с внешним диаметром трубы, в результате чего натяг и зазоры отсутствуют.



Считается, что между оправкой и трубой трение отсутствует и осуществляется гладкий контакт. В некоторый момент времени внутрь такой трубы помещается жесткая осесимметричная кольцевая вставка, внешний диаметр которой больше внутреннего диаметра покрытия. Считается, что на границе вставки и покрытия осуществляется гладкий контакт. В результате

такого взаимодействия труба с покрытием начинают деформироваться, при этом напряжения меняются с течением времени, так как материал, из которого изготовлена труба, является вязкоупругим стареющим. На рисунке схематично изображено описано описанное взаимодействие. В предположении, что толщина покрытия существенно меньше всех остальных геометрических линейных параметров, а его жесткость меньше жесткости основного слоя трубы, необходимо найти переменные контактные давления в области взаимодействия вставки и покрытия.

Для построения математической модели можно использовать результаты решения задач о деформировании толстой и тонкой трубы (см., например, [7–9]). Их комбинация и обобщение на случай вязкоупругого стареющего материала толстого слоя позволяют построить интегральное уравнение относительно неизвестных контактных давлений, возникающих на границе соприкосновения вставки и покрытия:

$$\frac{1-\nu_{\rm c}(z)-2\nu_{\rm c}^2(z)}{1-\nu_{\rm c}(z)}\,h\frac{q(z,t)}{E_{\rm c}(z)}+\frac{2(1-\nu_{\rm t}^2)}{\pi}\left[\int\limits_{-a}^{a}k_{\rm ims}\left(\frac{z-\zeta}{H}\right)\frac{q(\zeta,t)}{E_{\rm t}(t-\tau_{\rm t})}\,d\zeta-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\tau_0}^{t}K_{\rm t}(t-\tau_{\rm t},\tau-\tau_{\rm t})\int\limits_{-a}^{a}k_{\rm ims}\left(\frac{z-\zeta}{H}\right)\frac{q(\zeta,\tau)}{E_{\rm t}(\tau-\tau_{\rm t})}\,d\zeta d\tau\right]=r_{\rm r}+h-r_{\rm in},\quad z\in[-a,a],\quad t\ge\tau_0,\qquad(1)$$

В этом уравнении $q(z,t)$ — неизвестная функция, описывающая контактные напряжения в зоне взаимодействия, $\nu_c(z), E_c(z)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга неоднородного покрытия, h — толщина этого покрытия в недеформированном состоянии, $\nu_t, E_t(t)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга основного вязкоупругого стареющего слоя трубы; $K_t(t,\tau)$ — ядро ползучести этого слоя (см., например, [7, 10, 11]), τ_t — момент его изготовления $(\tau_t\le\tau_0)$, τ_0 — момент взаимодействия вставки и трубы с покрытием, r_{in} и $r_{out}=r_{in}+H$ внутренний и внешний радиусы вязкоупругого слоя в недеформированном состоянии, H — толщина вязкоупругого стареющего слоя, r_r — внешний радиус жесткой вставки, $2a$ — длина вставки, совпадающая с длиной области контакта, $k_{ims}(s)$ — известное ядро контактной задачи для цилиндрической трубы, размещенной в жесткой оправке

$$k_{\rm ims}(s)=\int\limits_0^{\infty}\frac{L_{\rm ims}(u)}{u}\cos(su)du,$$

где

$$L_{\rm ims}(u)=-\frac{uD_1^2(u)}{S_{\rm ims}(u)},\ S_{\rm ims}(u)=f_{\rm in}(u)-f(k_{\rm in},u)D_1^2(u),$$

$$f_{\rm in}(u)=k_{\rm in}u^2B_1^2(u)-\frac{1}{k_{\rm in}},\ f(k,u)=\frac{2(1-\nu_{\rm t})}{k}+u^2k,\ k_{\rm in}=\frac{r_{\rm in}}{H},\ k_{\rm out}=\frac{r_{\rm out}}{H},$$

$$B_1(u)=\mathrm{I}_0(k_{\rm in}u)\mathrm{K}_1(k_{\rm out}u)+\mathrm{I}_1(k_{\rm out}u)\mathrm{K}_0(k_{\rm in}u),\ D_1(u)=\mathrm{I}_1(k_{\rm in}u)\mathrm{K}_1(k_{\rm out}u)-\mathrm{I}_1(k_{\rm out}u)\mathrm{K}_1(k_{\rm in}u).$$

В данных формулах $\mathrm{I}_0(u),\mathrm{I}_1(u),\mathrm{K}_0(u),\mathrm{K}_1(u)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Заметим, что интегральное уравнение (1), являющееся математической моделью задачи, содержит операторы различного типа: с переменными пределами интегрирования и с постоянными пределами интегрирования. Это уравнение также включает функцию, которая описывает неоднородность покрытия, которая может быть быстро изменяющейся.

Сделав в уравнении (1) замену переменных по формулам

$$z^*=\frac{z}{a},\quad \zeta^*=\frac{\zeta}{a},\quad t^*=\frac{t}{\tau_0},\quad \tau_{\rm t}^*=\frac{\tau_{\rm t}}{\tau_0},\quad c(t^*)=\frac{E_{\rm t}(t-\tau_{\rm t})}{E_0},$$

$$m(z^*)=\frac{h}{2a}\frac{1-\nu_c(z)-2\nu_c^2(z)}{[1-\nu_c(z)](1-\nu_t^2)}\frac{E_0}{E_c(z)},\quad g^*=\frac{r_r+h-r_{in}}{a},\quad q^*(z^*,t^*)=\frac{2(1-\nu_t^2)q(z,t)}{E_t(t-\tau_t)},$$

$$\mathbf{V}_t f(t^*)=\int_1^{t^*}K_t^*(t^*,\tau^*)f(\tau^*)d\tau^*,\quad \mathbf{F}f(z^*)=\int_{-1}^{1}k^*(z^*,\zeta^*)f(\zeta^*)d\zeta^*,\quad \mathbf{I}f(z^*,t^*)=f(z^*,t^*),$$

$$K_t^*(t^*,\tau^*)=K_t(t-\tau_t,\tau-\tau_t)\tau_0,\quad k^*(z^*,\zeta^*)=\frac{1}{\pi}k_{ims}\left(\frac{z-\zeta}{H}\right),$$

получим смешанное интегральное уравнение в безразмерном виде

$$c(t^*)m(z^*)q^*(z^*,t^*)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_t)\mathbf{F}q^*(z^*,t^*)=g,\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\ge 1. \qquad (2)$$

Заметим, что новая безразмерная функция $m\left(z^*\right)$ связана с неоднородностью покрытия и может являться быстро изменяющейся. В качестве константы E_0 может быть взято любое значение, например, $E_0=E_c\left(0\right)$.

Таким образом, из полученного интегрального уравнения (2) необходимо найти функцию $q^*\left(z^*,t^*\right)$.

Алгоритм построения решения основан на следующем.

Во-первых, произведя замену $q^*(z^*,t^*)=Q(z^*,t^*)/\sqrt{m(z^*)}$ в (2), можно получить новое операторное уравнение с оператором Фредгольма $\tilde{\mathbf{F}}$ (с ядром $\tilde{k}(z^*,\zeta^*)$), которое обладает теми же свойствами, что и оператор **F**:

$$c(t^*)Q(z^*,t^*)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_t)\tilde{\mathbf{F}}Q(z^*,t^*)=\frac{g}{\sqrt{m(z^*)}},\quad z^*\in[-1,1],\quad t^*\ge 1.$$

Во-вторых, необходимо построить функциональный базис $\{w_0(z^*),w_1(z^*),w_2(z^*),...\}$, используя ортонормирование в $L_2\left[-1,1\right]$ следующей системы линейно независимых функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{m(z^*)}},\frac{z^*}{\sqrt{m(z^*)}},\frac{(z^*)^2}{\sqrt{m(z^*)}},...\right\}.$$

В-третьих, на основе функций, полученных на втором шаге, необходимо построить систему собственных функций оператора $\tilde{\mathbf{F}}$, которая и будет являться то системой базисных функций, которая используется для представления решения.

Наконец, приравнивая соответствующие коэффициенты для собственных функций в левой и правой частях результирующего уравнения, мы получаем следующие формулы для расчета желаемых контактных давлений

$$q(z^*,t^*)=\frac{1}{\sqrt{m(z^*)}}\sum_{k=0}^{\infty}f_k^*(t^*)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}w_m(z^*)=\frac{1}{m(z^*)}\sum_{k=0}^{\infty}f_k^*(t^*)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}p_m(z^*),\quad z^*\in[-1,1],\ t^*\ge 1, \qquad (3)$$

где

$$f_k^*(t^*)=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{d\zeta^*}{m(\zeta^*)}}\psi_{k0}g^*\left\{\frac{1}{c^*(t^*)+\gamma_k}+\int_1^t\frac{R_k(t^*,\tau^*)d\tau^*}{c^*(\tau^*)+\gamma_k}\right\},\quad p_k(z^*)=w_k(z^*)\sqrt{m(z^*)},\quad k=0,1,2,\ldots,$$

$\{p_0(z^*),p_1(z^*),p_2(z^*),...\}$ — система многочленов, коэффициенты разложения γ_k и ψ_{km} — собственные числа и компоненты собственных векторов оператора Фредгольма $\tilde{\mathbf{F}}$, соответственно. Они находятся из решения спектральной задачи

$$\sum_{l=0}^{\infty}K_{il}\psi_{kl}=\gamma_k\psi_{ki},\quad i=0,1,2,...,$$

где K_{il} — коэффициенты разложения ядра $\tilde{k}(z^*,\zeta^*)$ в двойной ряд по системе базисных

функций $\{w_0(z^*), w_1(z^*), w_2(z^*), \ldots\}$, то есть

$$\tilde{k}(z^*,\zeta^*) = \sum_{i,l=0}^{\infty} K_{il} w_i(z^*) w_l(\zeta^*), \quad K_{il} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{k}(z^*,\zeta^*) w_i(z^*) w_l(\zeta^*) dz^* d\zeta^*.$$

При помощи обратной замены переменных уравнение (3) можно привести к размерному виду, тем самым получив формулу для нахождения контактных давлений

$$q(z,t) = \frac{a}{h}\frac{E_c(z)[1-\nu_c(z)]}{1-\nu_c(z)-2\nu_c^2(z)}\frac{E_t(t-\tau_t)}{E_0}\sum_{k=0}^{\infty} f_k^*\left(\frac{t}{\tau_0}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km} p_m\left(\frac{z}{a}\right), \quad z\in[-a,a], \quad t\geq\tau_0.$$

Таким образом, в решении в явном виде выделен множитель, связанный с функциями, описывающими упругие свойства покрытия. Это позволяет достигать высокой точности при проведении численных расчетов даже, удерживая сравнительно небольшое количество слагаемых. Решения, построенные в виде ряда по базисам, не учитывающим входящие в уравнения сложные функции, не дают приемлемого результата.

Исследование выполнено по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kazakov K.E. On the interaction of rigid bush and pipe with nonuniform coating // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art. No. 210012.
2. Kazakov K.E. Modeling of the interaction of cylindrical bodies with complex surface properties // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1745. Art. No. 012117.
3. Kazakov K.E. Interaction of a circular bush and a layered pipe fitted on a shaft // Proceedings of the XII All Russian Scientific Conference on Current Issues of Continuum Mechanics and Celestial Mechanics. CICMCM 2023. Springer Proceedings in Physics. Vol. 1067. Singapore: Springer Singapore, 2024. P. 116–121.
4. Kazakov K.E., Parshin D.A. Interaction of a bush with a complex internal profile and a coated viscoelastic pipe worn on a rigid cylinder // Journal of Physics: Conference Series. 2024. Vol. 2817. Art. No. 012010.
5. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Wear problem for tube with thin nonuniform inner coating and rigid insert with complex profile // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 243. Art. No. 02008.
6. Kazakov K.E., Kurdina S.P. Interaction of viscoelastic tube with inner nonuniform coating of variable thickness and rigid cylindrical insert // Key Engineering Materials. 2021. Vol. 894. P. 67–71.
7. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
8. Манжиров А.В., Черныш В.А. О взаимодействии жесткой усиливающей втулки с неоднородной стареющей трубой высокого давления // Известия Академии Наук СССР. Механика твердого тела. 1988. №6. С. 112–118.
9. Черныш В.А. Контактные задачи теории ползучести для стареющих цилиндрических тел. Диссертация кандидата физико-математических наук. Институт проблем механики. 1999. 209 с.
10. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
11. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.

Информация об авторе

Казаков Кирилл Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.
E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ КОНСТРУКЦИОННЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБ ИЗ СЛОИСТОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ ТРАНСМИССИИ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Карапетян К.А.

Проведен сравнительный анализ экспериментальных данных о поведении деформирования в направлении оси тонкостенных стеклопластиковых труб с различными начальными углами армирования, подвергаемых простому кручению и кручению в условиях постоянно действующего внутреннего гидростатического давления.

Предлагается новый - технологический метод получения стеклопластиковых тонкостенных труб, являющихся прототипами трансмиссионных полых валов из таких материалов, обладающих повышенной несущей способностью при кручении и сравнительно стабильными эксплуатационными характеристиками.

Вводная часть. Известно, что применение конструкционных элементов в виде тонкостенных труб, а также цилиндрических оболочек вращения из армированных пластиков (АП) в различных узлах механизмов и машин в качестве полых валов, предназначенных для передачи крутящего момента, является весьма перспективным [1]. При эксплуатации такие элементы, в основном, подвергаются сдвигу, а также сдвигу, комбинированному с разнородными напряжениями. Известно также, что одними из основных недостатков АП являются их слабое сопротивление сдвигу, как межслойному, так и в плоскости армирования, и ярко выраженная сдвиговая ползучесть [2]. Из сказанного следует, что овладение надежной информацией о механическом поведении АП в условиях, адекватных эксплуатационным, во многом может способствовать оптимальному проектированию конструкционных элементов, в том числе и полых валов из таких материалов, предназначенных для применения в различных силовых узлах машин. Упомянутые условия можно воссоздать соответствующим приложением на иследуемый объект двух основных комбинаций нагрузок: растяжение со сдвигом и сжатие со сдвигом [3].

В настоящей работе на основе сравнительного анализа данных, установленных в результате проведения прямых измерений, обосновывается целесообразность применения предлагаемого нового подхода к оптимальному проектированию полых валов из пластиков, армированных тканью, обладающих повышенной несущей способностью при кручении и стабильностью эксплуатационных характеристик в течение установленного соответсвующими требованиями срока службы.

Экспериментальная часть. Рассматриваемые здесь результаты исследования были получены из кратковременных испытаний, осуществленных в условиях простого кручения стеклопластиковых тонкостенных трубчатых элементов-опытных образцов с различными углами армирования и при кручении труб, предварительно нагруженных внутренним гидростатическим давлением различных уровней (сложное нагружение труб).

Для осуществления полной программы исследования было изготовлено необходимое количество опытных трубчатых образцов из слоистого стеклопластика с внутренним диаметром 38мм, толщиной стенки 2,25мм и длиной 285мм. В опытах, проведенных в условиях сложного нагружения, были использованы стеклопластиковые трубчатые образцы с внешним диаметром 39,7мм и длиной рабочей части 60мм. Они были получены из упомянутых выше труб при помощи шлифования.

В качестве армирующего стеклопластик компонента была использована стеклоткань полотняного плетения с основным перекрытием марки Т23 (ТУ 6-11-231-76) толщиной 0,27мм с плотностью 36:20 (отношение количеств основных и утковых волокон на 1 $см^2$

ткани). В качестве связующего компонента применялась модифицированная эпоксифенальная смола.

Опытные трубчатые образцы были изготовлены известным методом «самопрессования» [4], суть которого заключается в намотке стеклоткани, предварительно пропитанной связующим, на дюралюминиевую оправку с последующим горячим прессованием по боковой поверхности в специальных формах.

Величина коэффициента армирования стеклопластика составляет $\mu = 0{,}45$ ($\mu_{\text{основа}} = 0{,}29$, $\mu_{\text{уток}} = 0{,}16$).

Были использованы стеклопластиковые трубчатые образцы, изготовленные таким образом, чтобы направления их оси и основных волокон армирующей материал стеклоткани были параллельными (величина угла армирования труб составляет $\varphi = 0^0$). Использовались также стеклопластиковые трубы, у которых угол между упомянутыми направлениями составляет $\varphi = 6 - 8^0$.

До проведения кратковременных испытаний стеклопластиковых трубчатых образцов на простое кручение, как и на кручение в условиях постоянно действующего внутреннего гидростатического давления различных уровней, определяли пределы сопротивления разрушению труб при одноосном внутреннем гидростатическом давлении ($\sigma_{\theta\theta}^{P} = 458{,}2$ МПа) и при простом кручении ($\tau_{\theta z}^{P} = 36{,}2$МПа). В процессе кратковременных испытаний увеличение приложенного на испытуемый объект крутящего момента производилось пошагово со ступенями, соответствующими 0,07-0,08 доли от предела сопротивления разрушению труб при простом кручении. Длительность испытания одного опытного образца по упомянутым выше программам составляет 6.-.10 мин.

Полученные результаты и их обсуждение. Согласно данным, приведенным в работе [5], с повышением уровня предварительно приложенного к стеклопластиковым опытным трубчатым образцам с начальным углом (направлением) армирования $\varphi = 0^0$ внутреннего гидростатического давления имеет место начальный рост и дальнейшее уменьшение сопротивления разрушению труб при кручении. При этом максимальный рост этой механической характеристики примерно в 40% по сравнению с одноименной характеристикой, определенной из опытов на простое кручение, наблюдается у трубчатых образцов, предварительно нагруженных внутренним гидростатическим давлением, соответствующим $0{,}4\,\sigma_{\theta\theta}^{P}$.

В ходе дальнейшего обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе, стеклопластиковые трубчатые образцы, находящиеся под воздействием постоянного внутреннего гидростатического давления, соответствующего $\sigma_{\theta\theta} = 0{,}4\,\sigma_{\theta\theta}^{P}$, условно будут именоваться усиленными механическим способом трубами.

Учитывая изложенное выше, в работе [5] отмечается, что существенного повышения несущей способности при кручении одних и тех же трубчатых элементов с $\varphi = 0^0$, изготовленных из пластиков, армированных тканью полотняного плетения с основным перекрытием, можно достичь обеспечением внутри них постоянно действующего давления, соответствующего 0,4 доли от предельного его значения (т.е. $\sigma_{\theta\theta}^{P}$). Отмечается также, что учет обнаруженного явления может существенным образом способствовать оптимальному проектированию полых валов машин из АП, предназначенных для трансмиссии крутящего момента.

В связи с отмеченным выше обратим внимание на приведенную в работе [5] кривую, описывающую поведение деформирования в направлении оси ε_{zz} в процессе кручения опытных трубчатых образцов, усиленных механическим способом (это кривая представлена на рис.1

под номером 1).

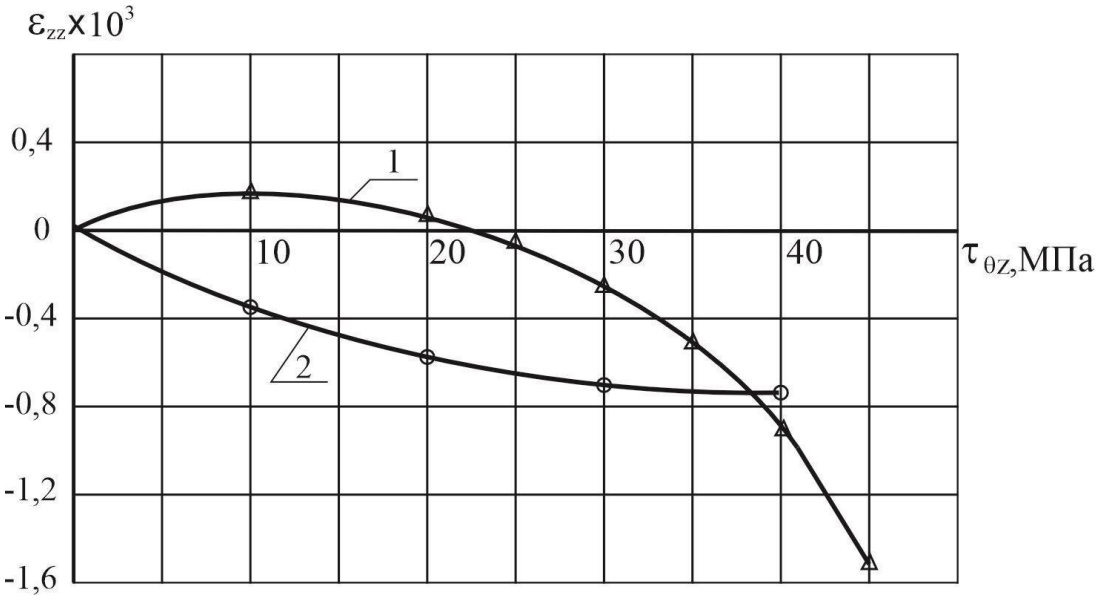


Рис. 1. Кривые, описывающие деформирование в направлении оси стеклопластиковых труб с начальными углами армирования $\varphi = 0^0$ (кривая 1) и $\varphi = 6 - 8^0$ (кривая 2).

Как замечаем из данных рис. 1 (см. на кривую 1) в процессе пошагового увеличения крутящего момента наблюдается начальное удлинение и дальнейшее укорочение усиленных механическим способом тонкостенных труб из слоистого стеклопластика с начальным углом армирования $\varphi = 0^0$. Это означает, что при некотором уровне крутящего момента (в данном случае, соответствующего $\tau_{\theta z} = 10$МПа) происходит изменение направления деформирования в направлении оси стеклопластиковых труб. На основе сказанного можно утверждать, что в случае воздействия циклически пульсирующего крутящего момента явление повторяющегося изменения направления деформирования в направлении оси труб может стать причиной образования в материале знакопеременного пульсирующего напряженно-деформированного состояния в этом направлении. Многократное повторение такого напряженно-деформированного состояния представляет особую опасность для обеспечивающей целостность материала органической матрицы, являющейся самым его уязвимым звеном.

Для обоснования предлагаемого нового подхода, направленного к устранению, в известной мере, отмеченного выше явления, отрицательно влияющего на эксплуатационную надежность и работоспособность конструкционных полых валов из АП, являющихся прототипами тонкостенных труб из таких материалов, рассмотрим результаты экспериментального исследования, приведенные в работе [6].

В этой работе изучалось сопротивление деформированию в направлении оси и разрушению тонкостенных труб из слоистого стеклопластика с начальными углами армирования $\varphi = 0^0$ и $\varphi = 6 - 8^0$ при простом кручении по направлению увеличения угла армирования. В качестве исследуемого объекта использовались тонкостенные трубы из армированных стеклотканью пластиков с такими же размерами и структурой, какие имеют трубы, примененные в исследованиях [5].

Показано, что величины сопротивления разрушению при простом кручении стеклопластиковых тонкостенных труб с начальными углами армирования $\varphi = 0^0$ и $\varphi = 6 - 8^0$ мало отличаются друг от друга.

Согласно характеру поведения представленной в работе [6] кривой, описывающей деформирование в направлении оси стеклопластиковых трубчатых образцов с углом армирования $\varphi = 6 - 8^0$ (эта кривая приведена на рис. 1 под номером 2), в процессе увеличения крутящего момента (т.е. $\tau_{\theta z}$) наблюдается монотонное укорочение труб с начальной высокой и в дальнейшем затухающей скоростью.

Из данных, приведенных на рис. 1, замечаем, что максимальное удлинение на $0{,}2 \times 10^{-3}$, приобретаемое усиленными механическим способом стеклопластиковыми тонкостенными трубами с начальным углом армирования $\varphi = 0^0$, наблюдается в условиях воздействия на них крутящего момента, соответствующего $\tau_{\theta z}$=10МПа (кривая 1), в то время как у аналогичных труб, армированных под углом $\varphi = 6{-}8^0$, на таком же уровне крутящего момента регистрируется укорочение, величина которого составляет более чем $0{,}38 \times 10^{-3}$ (кривая 2).

Сравнение отмеченных выше данных, установленных в результате проведенных прямых измерений, позволяет придти к выводу, что в процессе кручения усиленных механическим способом стеклопластиковых тонкостенных трубчатых элементов с начальным углом армирования $\varphi = 6 - 8^0$ появление деформации в виде удлинения маловероятно.

Заключение. Таким образом, применением предложенного ранее метода, заключающегося в предварительном приложении внутреннего гидростатического давления определенного уровня к трансмиссионным тонкостенным полым валам с начальным углом армирования $\varphi{=}0^0$ из пластиков, армированных тканью полотняного плетения с основным перекрытием, можно достичь существенного (примерно 40%) увеличения их несущей способности при кручении (полые валы, усиленные механическим способом).

Однако, в некоторых условиях эксплуатации, у таких валов могут возникать чередующиеся знакопеременные пульсирующие деформации в направлении оси (удлинение-укорочение), приводящие к образованию в материале знакопеременного пульсирующего напряженно-деформированного состояния в этом же направлении. Многократное повторение этого явления представляет особую опасность для органической матрицы материала, являющейся самым его уязвимым звеном, и в результате может произойти преждевременный выход из строя трансмиссионных полых валов.

Устранению, в известной мере, влияния упомянутого выше явления, отрицательно влияющего на надежную эксплуатацию трансмиссионных полых валов из пластиков, армированных тканью, можно достичь и предлагаемым новым-технологическим методом решения задачи. Сущность этого подхода заключается в том, что технологический процесс намотки на соответствующую металлическую оправу препрега на основе ткани полотняного плетения с основным перекрытием осуществлять таким образом, чтобы величина угла между направлением основных волокон вязки ткани и оси полых валов, проходящих после изготовления процесс усиления механическим способом, составляла $6\text{-}8^0$. Применением такого подхода к решению задачи можно избежать знакопеременности пульсирующего напряженно-деформированного состояния в осевом направлении полых валов в процессе эксплуатации, а следовательно увеличить срок надежной их службы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Daneshjou K and Talebitooti M. Free vibration analysis of rotating stiffened composite cylindrical shells by using the layerwise-differential quadrature (LW-DQ) method. //Mechanics of composite materials. Vol. 2014. 50. №1. P. 31-54.

2. Балтин Ю.П., Тамуж В.П. Циклическая прочность стеклопластиков при сдвиге в плоскости армирования. //Мех. пол. 1975. №5. С. 928-931.
3. Лимонов В.А., Разин А.Ф., Микельсон М.Я. Прочность и сопротивление усталости композитов на основе ткани при комбинированном воздействии статических напряжений сдвига и циклических напряжений сжатия. //Мех. композит. Мат. 1992. №3. С. 332-40.
4. Мартиросян М.М.. Получение прессованных тонкостенных труб из стеклопластиков. Промышленность Армении. 1971. №10. С. 56-57.
5. Karapetyan K.A., Valesyan S.Sh. and Muradyan N.S. Deformation behavior and resistance to fracture of glass-fabric pipes subjected to complex loading with torque and internal hydrostatic pressure. Journal of Physics. Conference series 1474 (2020) 012020.
6. Карапетян К.А. Влияние начальной разориентации армирования на механическое поведение слоистых стеклопластиков при статических нагружениях. //Докл НАН Армении. Т. 2005. 105. №3. С. 249-55.

Сведения об авторе:

Карапетян Корюн Ашотович - д.т.н., зав. лабораторией экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+37410) 524852
E-mail: koryun.a.karapetyan@gmail.com

ОСРЕДНЕННЫЕ ПОТОКИ ВБЛИЗИ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ В ЩЕЛЕВОМ КАНАЛЕ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ,ИХ ВЛИЯНИЕ НА МАССОПЕРЕНОС РАСТВОРИМОЙ ПРИМЕСИ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ

Козлов В.Г., Дьякова В.В., Власова О.А.

Экспериментально изучается влияние осредненных вихревых течений на интенсификацию массопереноса растворимой примеси через границу раздела несмешивающихся жидкостей, осциллирующих в вертикальном щелевом канале. При малых амплитудах колебаний жидкости менисковые колебания границы раздела провоцируют появление осредненных вихревых течений в плоскости, перпендикулярной плоскости канала. Размер таких течений сравним с размахом колебаний границы раздела. С увеличением амплитуды колебаний жидкости граница раздела пороговым образом теряет устойчивость к возникновению стоячей волны, частота колебаний которой вдвое меньше частоты колебаний жидкости. Параметрические колебания являются источником осредненных вихревых течений в плоскости канала. Размер вихревых структур сравним с длиной стоячей волны и в несколько раз превышает толщину щелевого канала. Обнаруженные вихревые течения оказывают существенное влияние на интенсификацию молекулярного массопереноса растворимой примеси через межфазную поверхность.

Диффузионные процессы, протекающие через границу раздела фаз, представляют значительный интерес для различных областей науки и техники, включая химические технологии, материаловедение, биологические системы и пр. Классическое описание диффузионных процессов через границу раздела фаз базируется на законах Фика, адаптированных для описания массопереноса через межфазную поверхность [1]. Однако пассивная молекулярная диффузия, обусловленная исключительно градиентом концентрации, часто оказывается недостаточно эффективной для практического применения. Активизация процессов массопереноса примеси через границу раздела фаз необходима для повышения эффективности промышленных установок, ускорения химических реакций и улучшения массообмена в гетерогенных системах. В последние годы особое внимание уделяется исследованию методов интенсификации диффузионных процессов, основанных на гидродинамических воздействиях. Исследования показали, что внешнее вибрационное воздействие на гетерогенные системы оказывает существенное влияние на динамику жидкости вблизи границы раздела, провоцируя возникновение различных типов неустойчивости на межфазной границе [2–5]. В [5] показано, что осцилляционное движение границы раздела пары маловязких несмешивающихся жидкостей в щелевом канале приводит к пороговому возбуждению стоячих волн на межфазной поверхности, которые совершают колебания с частотой вдвое меньшей частоты осцилляций границы. Такие параметрические колебания межфазной границы приводят к генерации осреднённых потоков, возникающих по обе стороны от границы раздела. Настоящее исследование выполнено с целью доказать эффективность использования вибраций для интенсификации диффузионных процессов.

Экспериментально изучается влияние осредненных вихревых течений, возбуждаемых гармоническими осцилляциями межфазной границы в щелевом зазоре, на интенсификацию массопереноса растворимой примеси (родамин Б) через осциллирующую границу раздела несмешивающихся жидкостей. Исследования проводятся в вертикальном прямоугольном щелевом канале шириной $L = 7.5$ см, высотой $H = 11.5$ см, образованном двумя оргстеклянными пластинами, разделенными силиконовой вставкой, толщина которой определяет толщину щелевого зазора. В настоящей работе показаны результаты, полученные в экспериментах с каналом фиксированной толщины $d = 0.3$ см. Результаты исследований надкритической динамики осциллирующей границы раздела пары маловязких жидкостей в каналах переменной толщины можно найти в [5]. В качестве рабочих жидкостей выбрана пара маловязких несмешивающихся жидкостей с малым коэффициентом межфазного натяжения (Octanol-1 и Novec 7100), в которых краситель родамин Б способен растворятся до молекулярного уровня.

В начале эксперимента щелевой канал заполняется парой рабочих жидкостей так, что межфазная граница раздела находится в средней по высоте части щелевого канала. Более тяжелая жидкость (Novec) занимает устойчивое положение в нижней части канала, легкая жидкость (Octanol) – в верхней. После заполнения канала межфазная граница раздела ровная, невозмущенная. Щелевой канал соединяется с гидравлическим контуром, обеспечивающим осцилляционное движение жидкостей за счет гармонической модуляции расхода прокачиваемой через канал жидкости. Детальное описание конструкции и принципа действия

гидравлического контура представлено в [6]. Гидравлический контур соединен со столиком электродинамического вибростенда типа ВЭД-200. Частота и амплитуда колебаний столика контролируются при помощи цифрового генератора ZETLab. В экспериментах частота колебаний столба жидкости в канале изменяется в диапазоне от 9 до 16 Гц, амплитуда – от 0 до 20 мм. Эксперименты проводятся при фиксированной частоте и увеличивающейся амплитуде колебаний с шагом порядка 0.1 мм. На каждом шаге проводится видеосъемка осциллирующей границы через прозрачную торцевую стенку щелевого канала при помощи фотокамеры FUJIFILM X-E4 с частотой 240 кадров в секунду. Полученный видеоряд преобразуется в серию отдельных фотографий для их последующей обработки. Для получения контрастных изображений границы раздела щелевой канал освещается зеленым лазером, установленными перед щелевым каналом.

В ряде экспериментов для визуализации течений, возникающих вблизи границы раздела, в верхнюю жидкость были добавлены светорассеивающие частицы визуализатора диаметром 40 мкм, плотностью $\rho_s = 1.02$ г/см^3, которые в поле силы тяжести оседают и собираются вблизи межфазной границы. Частицы визуализатора остаются смоченными легкой жидкостью, а при возникновении осредненных потоков увлекаются ими и их визуализируют.

В экспериментах, целью которых является исследование диффузионных процессов, в рабочие жидкости был добавлен краситель родамин Б, способный растворяться в обеих жидкостях до молекулярного уровня. Раствор родамина Б обладает флуоресцентными свойствами: максимум энергии излучения приходится на частоту 610 нм (оранжевый свет), а максимум энергии возбуждения – на частоту 550 нм (зеленый свет). При этом интенсивность флуоресцентного излучения, возникающего при облучении ячейки зеленым светом лазера и видимого через оранжевый светофильтр, установленный на фотокамеру, позволяет сделать вывод о концентрации примеси в растворе. Известно, что интенсивность излучения флуоресцентного красителя при его возбуждении светом определенной длины волны (соответствующей максимуму энергии возбуждения) пропорциональна концентрации красителя в пределах линейного диапазона. Линейная зависимость справедлива для малых концентраций красителя (максимальная концентрация родамина в обеих жидкостях не должна превышать предельно допустимую концентрацию $C = 0.0060$ ммоль/л). Методика определения концентрации родамина Б в растворах жидкостей по интенсивности излучения, применяемая в настоящем исследовании, аналогична методике, представленной в [7].

Скорость перемещения молекул примеси в жидкости под действием градиента концентрации характеризуется коэффициентом диффузии. Для определения коэффициента диффузии родамина Б в Octanol и в Novec использовались стеклянные капилляры диаметром $D = 0.15$ см, длиной $l = 14$ см. Нижняя половина капилляра, установленного вертикально, заполнялась раствором родамина известной концентрации, верхняя половина капилляра – чистой жидкостью. Капилляр освещался лазером зеленого света, фоторегистрация диффузионного фронта осуществлялось с помощью фотокамеры, с установленным на ней оранжевым светофильтром. После приведения в контакт чистой жидкости и жидкости с растворенным в нем родамином, последний диффундирует из области с его максимальной концентрацией в чистую жидкость. Вблизи области контакта раствора и чистой жидкости образуется зона, внутри которой концентрация родамина равномерно уменьшается от известной максимальной концентрации до нуля. Наблюдения показали, что ширина такой диффузионной зоны со временем монотонно увеличивается. Известно [7], что коэффициент диффузии D может быть определен по скорости расширения диффузионной зоны со временем:

$$D = \frac{\Delta y^2}{4\pi t},$$

где Δy – ширина диффузионной зоны, t – время. Экспериментально полученные значения коэффициента диффузии родамина Б в Octanol и Novec равны $D_O = 0.36\ 10^{-6}$ см^2/с и $D_N = 5.6\ 10^{-6}$ см^2/с соответственно.

Исследования процесса массопереноса растворимой примеси через межфазную границу раздела несмешивающихся маловязких жидкостей различной плотности в отсутствие внешних воздействий также проводились со стеклянным капилляром ($D = 0.15$ см, $l = 14$ см). Нижняя половина капилляра заполнялась Novec с растворенным в нем родамином Б, верхняя половина

капилляра – чистым Octanol. Концентрация раствора родамина в нижней жидкости подбиралась такой, чтобы интенсивность излучения флуоресцентного красителя в обеих жидкостях находилась в прямой зависимости с концентрацией раствора. Граница раздела освещалась лазером зеленого света, фоторегистрация диффузионного фронта осуществлялось с помощью фотокамеры, с установленным на ней оранжевым светофильтром.

После приведения в контакт двух жидкостей образуется межфазная граница. Родамин стремится перейти из нижней жидкости, где его концентрация максимальна, в верхнюю чистую жидкость. Вблизи границы раздела жидкостей образуются две диффузионные зоны, внутри которых концентрация родамина равномерно уменьшается. На рис. 1*а, б* показаны фотографии капилляра с раствором родамина в Novec в его нижней части и чистый Octanol в верхней спустя $t = 11.27$ и 33.15 часа после заполнения. Соответствующие фотографиям (рис. 1*а, б*) кривые распределения концентрации родамина Б вдоль вертикальной оси y в соответствующие моменты времени представлены на рис. 1*в*. Нулевое значение координаты y совпадает с центральной по высоте частью канала.

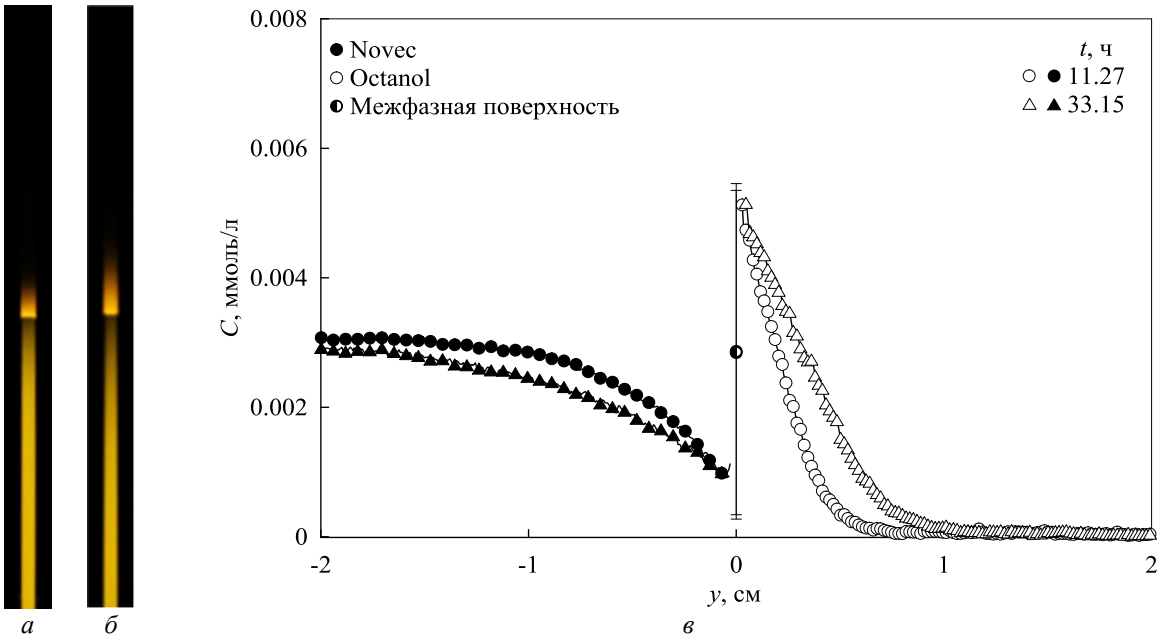


Рис. 1. Фотографии капилляра, заполненного раствором родамина Б в Novec в нижней части и Octanol в верхней части, через $t = 11.27$ и 33.15 часа после заполнения капилляра (*а, б*) и соответствующие фотографиям кривые распределения концентрации родамина Б вдоль вертикальной оси y в указанные моменты времени (*в*)

Как можно увидеть из рис. 1, под границей раздела образуется диффузионная зона, внутри которой концентрация родамина уменьшается от известного максимального значения до некоторого минимума. В верхней части капилляра накопленный на межфазной поверхности родамин диффундирует в чистую жидкость (Octanol). Тонкая межфазная поверхность на границе двух жидкостей содержит элементы обеих жидкостей, поэтому определить концентрацию родамина на самой межфазной поверхности по яркости свечения не представляется возможным. Здесь и далее значение концентрации родамина на межфазной границе отмечено специальным символом с большим доверительным интервалом. Экспериментально обнаружено, что темп массопереноса растворимой примеси через межфазную границу раздела также определяется исключительно градиентом концентрации примеси в двух жидкостях.

В экспериментах, целью которых является интенсификация массопереноса примеси через межфазную поверхность, рабочие жидкости помещают в тонкий щелевой канал, который, в свою очередь, подключается к гидравлическому контуру, обеспечивающему осциллирующее движение жидкостей. При включении колебаний жидкости малой амплитуды межфазная граница раздела совершает менисковые колебания, которые, в свою очередь, провоцируют

появление осредненных вихревых течений в плоскости, перпендикулярной плоскости канала. Вихревые течения возникают по обе стороны от межфазной поверхности, и уже через несколько десятков секунд после включения колебаний достигают своего максимального размера. Течения активно перемешивают жидкость, формируя при этом области практически постоянной концентрации по обе стороны от межфазной границы. Так вихревые течения в нижней жидкости обеспечивают непрерывную доставку растворенной примеси к межфазной поверхности, а течения над границей раздела отводят примесь от границы раздела выше в область, где концентрация примеси минимальна. На рис. 2 показаны кривые распределения концентрации родамина Б вдоль вертикальной координаты y перед включением вибраций и спустя $t = 8$ минут (размах колебаний жидкости $b = 1$ мм, частота колебаний $f = 9.6$ Гц). По графику видно, что уже спустя 8 минут по обе стороны от границы раздела сформировались области постоянной концентрации, размеры которых ограничиваются размером вихревых структур. За пределами областей перемешивания массоперенос определяется градиентом концентрации примеси в жидкостях.

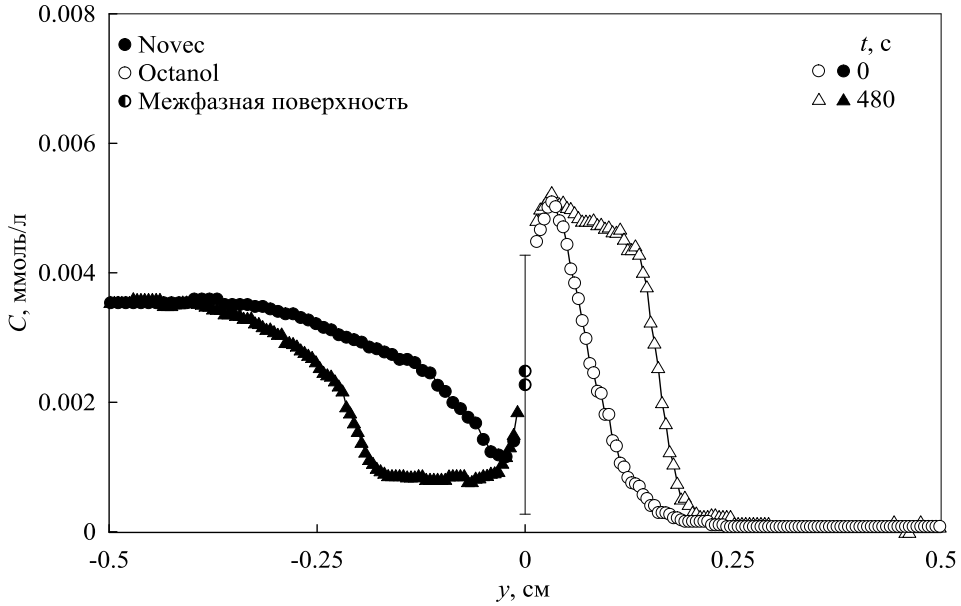


Рис. 2. Кривые распределения концентрации родамина Б вдоль вертикальной координаты y непосредственно перед включением вибраций и спустя $t = 480$ с (размах колебаний жидкости $b = 1$ мм, частота $f = 9.6$ Гц)

С увеличением амплитуды колебаний жидкости граница раздела пороговым образом теряет устойчивость к возникновению стоячей волны, частота колебаний которой вдвое меньше частоты колебаний жидкости. Параметрические колебания являются источником осредненных вихревых течений в плоскости канала: между двумя соседними пучностями стоячей волны формируется пара крупномасштабных вихрей противоположной закрутки (рис. 3).

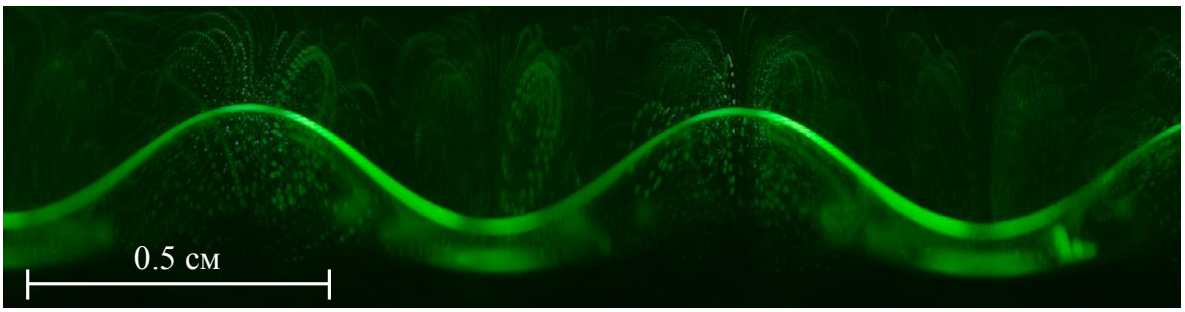


Рис. 3. Стоячая волна на границе раздела Octanol – Novec в фазе максимального смещения границы раздела в верхнюю жидкость: частота колебаний жидкости $f = 15$ Гц, размах колебаний жидкости $b = 2$ мм

На рис. 3 показана стоячая волна на границе раздела в фазе ее максимального смещения в верхнюю жидкость. Изображение на рис. 3 получено путем наложения фотографий границы раздела, полученных в одной фазе колебательного процесса. Стоит отметить, что граница раздела совершает менисковые колебания, проникая в верхнюю и нижнюю жидкости в форме языка. Контактная линия при таком движении остается на одном месте, а межфазная поверхность увеличивает свою площадь в десятки раз. На фотографии (рис. 3) можно заметить, что при проникновении границы раздела вверх на стенке полости остается тонкий слой Octanol, а вихревые течения в верхней жидкости увлекают частицы визуализатора и проникают до самой контактной линии. Обнаруженные вихревые течения значительно интенсифицируют массоперенос растворимой примеси через межфазную поверхность.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект 23-11-00242.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bird R.B., Stewai W.E., Lightfoot E.N. Phenomena Second Edition, John Wiley & Sons, 2002.
2. Sanchez P. S. et al. Effect of initial interface orientation on patterns produced by vibrational forcing in microgravity. Journal of Fluid Mechanics, vol.884, p. A38, 2020.
3. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Cherepanov A. A. Dynamics of Interfaces in Vibration Fields. PhysMathLit, Moscow, 2003.
4. La Rocca M. et al. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. Physics of Fluids, vol. 17, № 6, 2005
5. Kozlov V., Vlasova O., Dyakova V. Oscillatory excitation of Faraday waves on the interface of immiscible fluids in a slotted channel. Physics of Fluids, vol. 36, №. 10, 2024.
6. Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N. Finger instability of oscillating liquid–liquid interface in radial Hele-Shaw cell. Physics of Fluids, vol. 32, 2020.
7. Bushueva A., Polezhaev D. Mass transfer of solute in an oscillating flow in a two-dimensional channel. Physics of Fluids, vol. 36, №. 4, 2024.

Информация об авторах

Козлов Виктор Геннадьевич – д.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, зав. лаб. Вибрационной гидромеханики, 8 (342) 215 19 47. E-mail kozlov@pspu.ru

Дьякова Вероника Вадимовна – к.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, с.н.с. лаб. Вибрационной гидромеханики, 8 (342) 215 19 47, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Факультет прикладной механики и математики, доцент кафедры прикладной физики, 8 (342) 219 80 65. E-mail dyakova@pspu.ru

Власова Ольга Андреевна – к.ф.-м.н., Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Физический факультет, доцент кафедры физики и технологии, 8 (342) 215 19 47. E-mail vlasova_oa@pspu.ru

ВЫПУКЛОСТЬ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Максимова И.С.

В данной работе получены достаточные условия управляемости дифференциальных систем в задаче с переменной структурой. Рассмотрены подходы к исследованию как нелинейных, так и линейных систем. Условия управляемости для нелинейного случая получены с помощью аппарата выпуклого анализа, теории многозначных отображений и теории управляемости.

1. Введение

Задачи со сменой фазового пространства или задачи с переменной структурой характеризуются тем, что на последовательных отрезках времени движение объекта описывается различными системами дифференциальных уравнений. Рассматривается задача управляемости объекта, описанного нелинейными системами, из начального множества одного пространства в конечное множество другого пространства через «гиперповерхность перехода». Переход объекта из одного пространства в другое задается некоторым отображением, с этим же отображением связана стыковка траекторий. Смена фазовых пространств может возникать при математическом моделировании сложных динамических систем, например, крупных производственных комплексов, многостадийных технологических процессов. Последовательностью сменяющих друг друга стадий характеризуется также процесс управления системой химических реакторов, модели динамики метапопуляций, экономические системы с переменной структурой. При моделировании этих процессов используются динамические системы, размерность которых, в зависимости от состояния, может изменяться с течением времени, т.е. происходит динамическая декомпозиция сложной системы. Возможность использования систем с переменной размерностью при моделировании динамики биологических сообществ указывалась в работе [1] Ю.М. Свирежева.

2. Постановка задачи

Пусть имеются два фазовых пространства $X = R^n$, $Y = R^m$ переменных $x = (x_1,..., x_n)$, $y = (y_1,..., y^m)$. Обозначим $\Omega(R^n)$, $\Omega(R^m)$ – совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространств R^n и R^m, соответственно. Пусть заданы множества $U \in \Omega(R^n)$, $V \in \Omega(R^m)$. Движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\mathrm{u(t)} \in \mathrm{U}, \mathrm{x(t)} \in \dot{\mathrm{X}}, \mathrm{t} \in [0, \tau]; \qquad x(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \tag{2.1}$$

$$v(t) \in V,\ y(t) \in Y,\ t \in [\tau, T].\ \dot{y}(t) = g\big(t, y(t), v(t)\big), \tag{2.2}$$

Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in L_\infty([0, \tau\ ], R^n)$, $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], R^m)$, для которых $u(t) \in U$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ и $v(t) \in V$ при п.в. $t \in [\tau,T]$. Решениями систем (2.1) и (2.2) при $t \in [0,\tau]$ и $t \in [\tau,T]$ называются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[0, \tau]$ и $[\tau,T]$ системам (2.1) и (2.2) соответственно. Пусть функции $f(t, x, u)$, $g(t, y, v)$ таковы, решение задачи Коши для систем (2.1) и (2.2) существует и единственно. В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(R^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая «гиперповерхность перехода» Г. Пусть τ – наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Г. Когда объект, движущийся по закону (2.1), достигает гиперповерхности Г, происходит переход в пространство Y, заданный некоторым линейным отображением $q\colon X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (2.1). Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(R^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$). Подобная схема движения объекта описана, например, в [2]. Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (2.1) и (2.2), будет управляемым из M_0 в M_1. Объект, описываемый системами (2.1) и (2.2), называется управляемым из M_0 в M_1, (см.[8]) если существуют такие допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(_0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau\ ) = q(x(\tau\ ))$, $y(T) \in M_1$. Для системы (2.1) в фазовом пространстве $X = R^n$ в точке x

рассмотрим множество $f(t, x, U)$, состоящее из всех векторов $f(t, x, u)$, где u принадлежит множеству U. Если $x(t)$ - некоторая траектория системы (2.1), соответствующая допустимому управлению $u(t)$, то при почти всех $t \in [0,\tau]$ выполняется включение

$$\dot{x}(t) \in f(t, x(t), U). \tag{2.3}$$

Это приводит нас к дифференциальному включению

$$\dot{x} \in f(t, x(t), U). \tag{2.4}$$

Под решением дифференциального включения (2.4) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, определенная на интервале $[0,\tau]$, удовлетворяющая включению (2.4) при почти всех $t \in [0,\tau]$. Итак, при довольно общих предположениях система (1) эквивалентна дифференциальному включению (2.4), т.е. для любого решения $x(\cdot)$ включения (2.4) существует такое допустимое управление $u(\cdot)$, что функция $x(\cdot)$ будет являться траекторией системы (2.1) с этим управлением $u(\cdot)$. Этот вопрос довольно подробно рассматривается в [7]. Теперь, при сделанных замечаниях, вместо нелинейной системы (2.1) будем рассматривать дифференциальное включение (2.4). Обозначим $f(t, x, U)$ через $F(t, x)$, тогда в пространстве $X = R^n$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad t \in [0, \tau\,], \tag{2.5}$$

где $F(t, x)$ – многозначное отображение. Аналогично в пространстве $Y = R^m$ движение управляемого объекта вместо нелинейной системы (2.2) описывается включением

$$\dot{y} \in G(t, y), \quad t \in \tau, T]. \tag{2.6}$$

Движение объекта из пространства X в пространство Y осуществляется по схеме, описанной выше.

3. Основной результат

О п р е д е л е н и е [6]. Многозначное отображение $F(t, x)$ называется вогнутым по x на множестве M, если для любых точек $x_1, x_2 \in M$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие $\lambda F(t, x_1) + (1 - \lambda)F(t, x_2) \subset F(t, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$.

Заметим, что из этого условия следует (см., например, [6]) выпуклость множества $F(t,x)$ при каждом $x \in M$. Множество достижимости $K(t)$ для каждого $t \in [0, \tau\,]$ состоит из всех точек $x(t) \in R^n$, где $x(t)$ – решение включения (5) с начальным условием $x(0) \in M_0$. Происхождение термина «вогнутость многозначного отображения» связано с тем обстоятельством, что в этом случае опорная функция $c(F(t,x),\psi) = max_{f \in F(t,x)}(f, \psi)$ является вогнутой функцией по переменной x для любого сопряженного вектора $\psi \in R^n$ (см. [5]). Если многозначное отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на всем пространстве R^n, то оно является линейным по переменной x, т.е. представимо в виде $F(t, x) = A(t)x + F(t, 0)$, где $A(t)$ – некоторая матрица.

Рассмотрим движение объекта в пространстве X из начального множества M_0 до «гиперповерхности перехода» Г. Предположим, что отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на множестве достижимости $K(\tau)$ при всех $t \in [0,\tau]$. Известно (см. [6]), что в случае семейство всех решений на отрезке $[0,\tau]$ с начальным условием $x(0) \in M_0$ будет выпуклым множеством в пространстве $C[0,\tau]$. Выпуклость семейства решений дифференциального включения впервые была получена В.И. Благодатских в работе [4] и в более полном виде содержится в обзоре [6]. Из выпуклости семейства решений следует выпуклость множества достижимости $K(\tau)$. Обратное утверждение не выполняется, например, для линейных управляемых систем $\dot{x} = Ax + u,\ u \in U$. Для них множество достижимости всегда выпукло, если начальное множество является выпуклым, а семейство решений выпукло лишь при условии выпуклости множества U. Если семейство решений выпукло в пространстве $C[0,\tau]$, то каждое множество достижимости $K(\tau)$ также будет выпуклым в пространстве R^n. Итак, при сделанных предположениях, множество достижимости $K(\tau)$ выпукло. Пересекая его с «гиперповерхностью перехода» Г, получим множество $K_1(\tau) = K(\tau) \cap$ Г. Предположим, что существует τ такое, что $K_1(\tau) \neq \emptyset$. Тогда $K_1(\tau)$ является выпуклым, как пересечение двух выпуклых множеств. Преобразуем множество $K_1(\tau)$ следующим образом: $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$. Полученное множество $K_2(\tau)$ выпукло в силу свойств отображения q.

Множество $K_2(\tau)$ является начальным множеством при движении объекта в пространстве Y на множество M_1. В пространстве Y мы получили следующую задачу управляемости: является ли система (2.2) управляемой из множества $K_2(\tau)$ на множество M_1 на отрезке времени $[\tau, T]$. Обозначим через $K_3(T)$ множество достижимости системы (2.2) из $K_2(\tau)$ в момент времени T. Предположим, что отображение $G(t, y)$ вогнуто по y на множестве достижимости $K_3(T)$ и $K_3(T)$ компактно. Тогда, для управляемости системы (2.2) будет достаточно, чтобы $K_3(T) \cap M_1 \neq \emptyset$ или по свойству опорных функций $c(K_3(T),\psi) + c(M_1,-\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in R^m$ (см. [3]). Итак, условия управляемости из множества M_0 пространства X на множество M_1 пространства Y для систем (2.1) и (2.2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены все сделанные выше предположения. Тогда для управляемости объекта, описываемого системами (2.1) и (2.2), на отрезке времени $[0, T]$ достаточно, чтобы было выполнено следующее соотношение $c(K_3(T), \psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in R^m$. Заметим, что для автономной системы (2.2) можно рассматривать движение объекта в пространстве Y в «обратном времени» и выписывать множество достижимости $K_4(T)$ из множества M_1 на «гиперповерхность перехода» Г. Тогда условием управляемости для систем (2.1) и (2.2) на отрезке времени $[0, T]$ будет непустое пересечение множеств $K_4(T)$ и $K_2(\tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987, С. 368.
2. Болтянский В.Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференциальные уравнения. 1983, Т. XIX, № 3. С. 518–521.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высшая школа, 2001.
4. Благодатских В. И. О выпуклости сфер достижимости // Дифференциальные уравнения. 1972. 8, № 12. С. 2149–2155.
5. Благодатских В. И., Ндии П. Выпуклость множества решений дифференциального включения // Вестник Моск.университета. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернентика 1998. № 3. С. 21–22.
6. Благодатских В. И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
7. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Либроком, 2011.
8. Maximova, I. The Problem of Controllability with Phase Space Change. // Advances in Systems Science and Applications, 2023. 23(1), P. 61–68.

Информация об авторе

Максимова Ирина Сергеевна – ассистент, Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Факультет физико–математических и естественных наук, Математический институт имени академика С.М. Никольского.
E-mail irismax@yandex.ru

СВЕРХЗВУКОВАЯ ЛОКАЛИЗОВАННАЯ ДИВЕРГЕНЦИЯ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, ПЕРВОНАЧАЛЬНО РАСТЯНУТОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ

Мартиросян С.Р.

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки, нагруженной по двум направлениям силами растяжения, на порог устойчивости динамической системы «пластинка–поток», с целью управления им, в предположении, что поток набегает на её свободный край, на котором приложены сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота. Получено аналитическое решение задачи.

Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка $\left(ab^{-1}\geq 1.96\right)$, занимающая в декартовой системе координат $Oxyz$ область $0\leq x\leq a$, $0\leq y\leq b$, $-h\leq z\leq h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённого состояния равновесия пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным. Будем полагать, что край пластинки $x=0$ – свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ закреплены идеальными шарнирами; вдоль свободного края $x=0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c; пластинка первоначально подвержена действию растягивающих сил $N_x=2h\sigma_x$ и $N_y=2h\sigma_y$, распределённых равномерно по её кромкам $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ соответственно, являющимися результатом нагрева, или каких–либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности пластинки, малыми по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{pr.}$ и $(\sigma_y)_{pr.}$ – усилия, начиная с которых имеет место потеря устойчивости цилиндрической формы пластинки [6], и неменяющимися с изменением прогиба $w=w(x,y,t)$ [1,2].

Прогиб пластинки $w=w(x,y,t)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории»: $\delta p=-a_0\rho_0 V\dfrac{\partial w}{\partial x}$, где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [3]. Прогибы $w=w(x,y,t)$ предполагаются малыми относительно толщины пластинки $2h$ [1, 2].

Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» в предположении малости интенсивности $m\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\partial^2 w/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1,2,5]:

$$D\Delta^2 w-N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_0\rho_0 V\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ w=w\left(x,y,t\right);\qquad (1.1)$$

$\Delta^2 w=\Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия будут вида [1,2,5]:

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=I_c\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2},\quad D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-N_x\frac{\partial w}{\partial x}=-m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\quad \text{при } x=0;\qquad (1.2)$$

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=a \qquad \text{и} \qquad w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \text{ при } y=0,\ y=b; \tag{1.3}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Задача устойчивости динамической системы (1.1)–(1.3) состоит: 1) в нахождении критической скорости V_{cr} – наименьшей скорости потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V\in(a_0M_0, a_0M_{2\cos m.}),\ M_0=\sqrt{2},\ M_{2\cos m.}\approx 33.85, \tag{1.4}$$

приводящей к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» в предположении [6]:

$$\sigma_x<(\sigma_x)_{pr.},\ \sigma_y<(\sigma_y)_{pr.}, \tag{1.5}$$

когда все параметры системы заданы, кроме скорости потока V; 2) в определении относительной толщины пластинки $\left(2hb^{-1}\right)_{\min}$, которая обеспечивала бы её прочность по критерию устойчивости колебаний, когда форма, материал пластинки и все параметры потока известны.

Задачу устойчивости (1.1) – (1.3) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [1,2,7,8]:

$$\gamma=ab^{-1}\in[1.96;\infty), \tag{1.6}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3). Общее решение дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде суммы гармонических колебаний [1, 2]:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(\mu_n rx+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y),\ \mu_n=\pi nb^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде:

$$r^4-2\cdot(1+\beta_x^2)\cdot r^2+\alpha_n^3\cdot r+(1+\beta_y^2)=0, \tag{2.2}$$

$$\alpha_n^3=a_0\rho_0VD^{-1}\mu_n^{-3}\in a_0^2\rho_0D^{-1}\mu_n^{-3}\left(M_0,\ M_{2\cos m.}\right),\ \alpha_n^3>0; \tag{2.3}$$

$$\beta_x^2=1/2\cdot N_x D^{-1}\mu_n^{-2}=h\sigma_xD^{-1}\mu_n^{-2}<h(\sigma_x)_{pr.}D^{-1}\mu_n^{-2}=\left(\beta_x^2\right)_{pr.};$$

$$\beta_y^2=N_yD^{-1}\mu_n^{-2}=2h\sigma_yD^{-1}\mu_n^{-2}<2h(\sigma_y)_{pr.}D^{-1}\mu_n^{-2}=\left(\beta_y^2\right)_{pr.};$$

корни r_k которого, найденные методом Феррари, определяются выражениями [8]:

$$r_{1,2}=-0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pm\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}-0.5(q-1-\beta_x^2)},\quad r_1<0,\ r_2<0; \tag{2.4}$$

$$r_{3,4}=0.5\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)}\pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}+0.5(q-1-\beta_x^2)};\ r_{3,4}\in W; \tag{2.5}$$

$q=q(V)>0$ – параметр скорости потока газа V – единственный действительный корень кубического уравнения (кубической резольвенты), в силу положительности детерминанта:

$$8\cdot(q+1+\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)-\alpha_n^6=0, \tag{2.6}$$

удовлетворяющий условию:

$$q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right), q_0 = \left(-\left(1+\beta_x^2\right) + 2\sqrt{(1+\beta_x^2)^2 + 3(1+\beta_y^2)}\right)\Big/3 . \quad (2.7)$$

Можно показать, что в данной постановке, начиная с $\gamma = 1.96$, исходная система теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки, подобно полубесконечной пластине–полосе $(\gamma = \infty)$. А тогда, в соответствии с условием затухания колебаний на краю $x = a$, общее решение (2.1) запишется в виде [4,7]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2} C_{nk} \cdot \exp(\mu_n r_k x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y), \ \gamma \in [1.96; \infty], \quad (2.8)$$

где r_k, $k = 1, 2$ определены выражениями (2.4).

Подставляя значение $\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3}$ в кубическое уравнение (2.6), получаем формулу:

$$V(q) = 2\sqrt{2(q+1+\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)} \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \ \gamma \in [1.96; \infty]; \quad (2.9)$$

позволяющую по известному значению параметра $q = q\left(n, \beta_x^2, \beta_y^2, \nu\right)$ определить приведённую скорость локализованной дивергенции $V(q) \cdot D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$.

В силу устойчивости системы вблизи $a_0\sqrt{2}$ [7,8], очевидно

$$V(q) \in \left(V(q_0), a_0 M_{2cos m.}\right) \subset \left(a_0 M_0, a_0 M_{2cos m.}\right), \gamma \in [1.96; \infty]. \quad (2.10)$$

3. Достаточный признак потери устойчивости динамической системы (1.1) – (1.3). Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.8) в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный к нулю определитель этой системы уравнений приводит к характеристическому определителю – биквадратному уравнению относительно собственного значения λ:

$$F(\lambda) = A_0 \cdot \lambda^4 + \left(k_n A_1 + A_2\right)\chi_n^{-1} \cdot \lambda^2 + A_3 \cdot \left(\chi_n \delta_n\right)^{-1} = 0 \ , \ \gamma \in [1.96; \infty], \quad (3.1)$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3}, \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1}, \ k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1}, \ \delta_n > 0, \ \chi_n > 0, \ k_n > 0; \quad (3.2)$$

$$A_0 = 1, \ A_1 = \sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)} \cdot \left(q - \sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right), \ A_2 = \sqrt{2\left(q+1+\beta_x^2\right)} \ , \quad (3.3)$$

$$A_3 = \left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 + 2\beta_x^2\left(q - \sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right). \quad (3.4)$$

Ясно, что $A_0 > 0, A_1 > 0, A_2 > 0$. Легко показать, что дискриминант уравнения (3.1):

$$\Delta = \left(k_n A_1 + A_2\right)^2 - 4 k_n A_0 A_3 > 0 . \quad (3.5)$$

В самом деле, подставляя выражения (3.3) и (3.4) в формулу (3.5), получаем

$$\Delta = 2\left(q+1+\beta_x^2\right)\left(k_n\left(q - \sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right) - 1\right)^2 + 4k_n\left(2(q+1)\nu + (1-\nu)^2\right) > 0 .$$

Тем самым, границей области устойчивости $\mathfrak{I}_0$ системы для всех $\gamma \in [1.96; \infty]$ является гиперповерхность:

$$A_3 = \left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 + 2\beta_x^2\left(q - \sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right) = 0 , \quad (3.6)$$

на которой определитель (3.1) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2. Уравнение (3.6) определяет границу «апериодической неустойчивости», при переходе через которую невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.3) при скоростях потока газа

$V \ge V_{locdiv} = V\left(q_{locdiv}\right)$ при всех $\gamma \in [1.96;\infty]$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки: происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого состояния равновесия системы от устойчивости к локализованной дивергенции, при котором прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Граница «апериодической устойчивости» (3.6) является «безопасной» в смысле Н.Н.Баутина: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованным в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки [7,8]. А также, из (3.6) очевидно, что его решения $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ и соответствующие значения $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ (табл. 1), получаемые подстановкой $q_{loc.div.}$ в формулу (2.9), не зависят от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$: коэффициенты χ_n и δ_n влияют лишь только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$ [8].

Заметим, что уравнение (3.6) тождественно дисперсионному уравнению, получаемому при исследовании исходной задачи в статической постановке по методу Эйлера.

4. Основные результаты и заключение. Анализ численных результатов показал, что приведённая скорость локализованной дивергенции $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ является возрастающей функцией от числа полуволн n: её наименьшему значению соответствует $n = 1$; а также, от первоначальных растягивающих сил N_x и N_y, в отличие от коэффициента Пуассона ν: $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ с ростом N_x $\left(\beta_x^2 \in [0;1.5]\right)$ и N_y $\left(\beta_y^2 \in [0;1.5]\right)$ возрастает в 2–2.8 раз и 1.8–2.2 раза соответственно, а в пластинах из материалов с большим ν скорость локализованной дивергенции меньше, примерно, в 2.8–3.7 раз (табл. 1). В целом, устойчивость системы (1.1) – (1.3) повышается в 4–5 раз по сравнению с системой с ненагруженной широкой панелью [7].

Таблица 1. Значения $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ при $n = 1$, $\nu = 0.125; 0.3; 0.5$.

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.3	0.5	1.0	1.2	1.5
0.0	296.222 143.905 79.668	367.225 184.005 107.391	413.345 210.785 126.692	528.651 276.964 176.110	574.074 303.485 195.321	641.382 343.018 223.981
0.3	358.323 178.653 99.721	440.968 222.670 133.860	496.135 253.949 153.665	628.536 330.126 212.375	683.872 358.281 234.647	763.064 408.017 268.155
0.5	397.970 196.080 112.143	488.276 244.315 149.890	548.492 280.963 174.411	690.143 364.987 234.568	753.538 397.251 259.115	839.573 448.137 298.554
1.0	492.977 245.501 155.110	601.606 306.388 188.685	672.831 345.581 217.278	844.203 441.986 286.142	917.239 484.125 317.758	988.087 544.707 360.517
1.2	529.936 264.556 158.443	644.123 328.583 203.920	720.114 370.741 233.456	905.342 474.763 308.161	978.527 517.872 340.442	1088.056 581.246 385.637
1.5	582.709 293.055 177.323	707.536 362.168 225.909	789.721 407.488 258.194	971.703 513.200 340.063	1070.789 566.073 372.708	1186.985 634.284 421.126

Из сопоставления данных таблицы 1 с допустимыми значениями $V_{locdiv.}D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$ как функции, зависящей от относительной толщины, в частности, стальных пластинок $2hb^{-1}\in\left[0.006;0.015\right]$, полученных применительно к интервалу сверхзвуковых скоростей (1.4) [8], следует, что значение $\left(2hb^{-1}\right)_{\min}$, начиная с которого система «пластинка–поток» при всех $2hb^{-1}\geq\left(2hb^{-1}\right)_{\min}$ остаётся устойчивой в интервале (1.4), с ростом N_x и N_y уменьшается от 0.014 до 0,007: с увеличением первоначальных растягивающих сил невозмущённое состояние равновесия более тонких стальных пластинок является устойчивым в интервале сверхзвуковых скоростей.

Сравнительный анализ результатов данной статьи и [8] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных с применением обоих методов, указывает на их хорошее совпадение. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее простого и удобного, оправдано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733-755.
4. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “релеевского” типа. // Акустический журнал. 1960. Т.6. № 1. С. 124–126.
5. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
6. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
7. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С.
8. Мартиросян С.Р. О динамической устойчивости широкой панели с одним свободным краем, нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (3), с.42 –57. DOI:10.54503/0002-3051-2024.77.3 - 42.

Сведения об авторе:
Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890
E-mail: mechinsstella@mail.ru

О НАПРЯЖЕНОМ СОСТОЯНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО СЛОЯ, АРМИРОВАННОГО СТРИНГЕРОМ, С КОЛЛИНЕАРНОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН И ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Мкртчян М.М., Григорян М.С., Мкртчян М.С.

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного слоя при антиплоской деформации, верхняя грань которого усилена стрингером, нижняя грань жестко защемлена, а на горизонтальной линии спая разнородных материалов расположена коллинеарная система из произвольного числа трещин и абсолютно жестких включений. Предполагается, что стрингеры по своим продольным граням нагружены касательными силами, а по своим вертикальным кромкам – горизонтальными сосредоточенными силами. Кроме того, берега трещин нагружены распределенными касательными силами разных интенсивностей. Считается, что под действием указанных нагрузок составной слой в направлении одной из координатных осей находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига).

При помощи интегрального преобразования Фурье решение поставленной задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) из трех уравнений. Решение этой системы получено известным численно – аналитическим методом решения СИУ с использованием квадратурных формул Гаусса по чебышевским узлам. В результате, решение исходной системы СИУ сведено к решению системы систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Рассмотрены различные частные случаи, когда определяющие СИУ и СЛАУ поставленной задачи существенно упрощаются, что дает возможность проведения детального численного анализа и выявления закономерностей изменения характеристик задач.

1. Введение. В механике композитов, при проектировании различных строительных и авиационных конструкций, в тензометрии и во многих других отраслях прикладной механики и инженерной практики весьма важным представляется исследование вопросов взаимодействия концентраторов напряжений типа включений с массивными телами различных геометрических форм. Это объясняется тем, что вокруг этих концентраторов напряжений образуются локальные поля напряжений с большими и интенсивно изменяющимися градиентами, которые существенно снижают уровень прочности инженерных конструкций и их деталей. Поэтому качественное и количественное исследование вопросов концентрации напряжений представляет как теоретический, так и практический интерес. Такие задачи стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-5].

2. Постановка задач и вывод основных уравнений. Пусть, отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ кусочно-однородный упругий слой состоит из верхнего слоя $\Omega_+ = \{-\infty < x, z < \infty, 0 \le y \le h_+\}$ и нижнего слоя $\Omega_- = \{-\infty < x, z < \infty, -h_- \le y \le 0\}$ с модулями сдвига G_+ и G_- соответственно, и в плоскости $y = 0$ содержит систему сквозных взаимно не пересекающихся трещин и тонких абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости Oxy составляют систему интервалов L_1 и L_2 соответственно.

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k];\ a_k < b_k\ \ (k = 1, 2, ..., N_1);\ b_k < a_{k+1}\ \ (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k];\ c_k < d_k\ \ (k = 1, 2, ..., N_2);\ d_k < c_{k+1}\ \ (k = \overline{1, N_2 - 1})$$

$$L = L_1 \cup L_2\ .$$

Пусть, далее, нижняя грань слоя жестко закреплена $u_z^-(x, y)\big|_{y=-h_-} = 0$, кроме того, на верхняя грань $y = h_+$ слоя, на отрезке $[e, f]$, усилена стрингером высотой h_1 с модулем сдвига G_1 в виде полосы $\omega_+ = \{e \le x \le f;\ h_+ \le y \le h_+ + h_1;\ -\infty < z < \infty\}$. Предположим, что на верхней грани $y = h_+ + h_1$ полосы ω_+ в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по оси Oz касательные силы интенсивности $T_*(x)$, т.е.

$$\tau_{yz}\big|_{y=h_+ + h_1} = T_*(x)\ \ (e < x < f), \tag{1}$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Кроме того предположим, что на кромках $x=e, x=f$ стрингера в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по этой оси касательные сосредоточенные силы F_1, F_2. На систему включений L_2, вдоль оси Oz, действуют силы с равнодействующими $P_k\left(k=\overline{1,N_2}\right)$, вызывающие продольный сдвиг упругого слоя в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy.

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах трещин, раскрытия трещин, скачки напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), а также действующие под стрингером касательные контактные напряжения. При этом для стрингера принимается модель одномерного упругого континуума Мелана [5,6].

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородную упругую полосу вдоль оси Ox разрежем на две части, а затем, для действующих на их гранях $y=\pm 0$ напряжений, введем следующие обозначения $\left(L'=R/L; R=(-\infty,\infty)\right)$:

$$-\tau_{yz}\Big|_{y=+0}=T_+(x)=\begin{cases}\tau_+^{(1)}(x) & (x\in L_1);\\ \tau_+^{(2)}(x) & (x\in L_2);\\ \tau(x) & (x\in L');\end{cases}\quad -\tau_{yz}\Big|_{y=-0}=T_-(x)=\begin{cases}\tau_-^{(1)}(x) & (x\in L_1);\\ \tau_-^{(2)}(x) & (x\in L_2);\\ \tau(x) & (x\in L').\end{cases} \tag{2}$$

На системе включений L_2 смещения постоянны:

$$u_z^+(x,y)\Big|_{y=+0}=u_z^-(x,y)\Big|_{y=-0}=g(x)=\delta_k=\text{const};\qquad x\in(c_k,d_k)\ \left(k=\overline{1,N_2}\right) \tag{3}$$

Граничные условия при $y=\pm h_\pm$ имеют вид:

$$\tau_{yz}^+\Big|_{y=h_+}=G_+\left.\frac{\partial u_z^+(x,y)}{\partial y}\right|_{y=h_+}=-H_+(x)=\begin{cases}-h_+(x) & (x\in[e,f]);\\ 0 & (x\notin[e,f]);\end{cases} \tag{4}$$

$$u_z^-(x,y)\Big|_{y=-h_-}=0,$$

где $u_z^\pm(x,y)$ - смещения точек в направлении оси Oz, соответственно, верхней и нижней полос, которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta u_z^\pm(x,y)=\frac{\partial^2 u_z^\pm(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z^\pm(x,y)}{\partial y^2}=0. \tag{5}$$

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\chi_+(x)=\frac{T_+(x)+T_-(x)}{2};\ \chi_-(x)=\frac{T_+(x)-T_-(x)}{2}=\begin{cases}\tau_+^{(1)}(x)-\tau_-^{(1)}(x) & (x\in L_1);\\ \psi(x) & (x\in L_2);\\ 0 & (x\in L');\end{cases} \tag{6}$$

$$\Phi_+(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{du_z^+(x,+0)}{dx}+\frac{du_z^-(x,-0)}{dx}\right);$$

$$\Phi_-(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{du_z^+(x,+0)}{dx}-\frac{du_z^-(x,-0)}{dx}\right)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\in L_1);\\ 0 & (x\in R\setminus L_1).\end{cases}$$

С помощью прямого и обратного преобразования Фурье по переменной x, из уравнения (5) и граничных условий (2)-(4), в соответствии с обозначениями (6), придем к ключевому уравнению задачи:

$$\chi_+(x)=-\frac{2G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_{L_1}\frac{\Phi_-(s)ds}{s-x}-\frac{2G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_{L_1}K(s-x)\Phi_-(s)ds+\frac{G_+-G_-}{G_++G_-}\chi_-(x)-$$

$$-\frac{2G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int\limits_{L_1\cup L_2}R(s-x)\chi_-(s)ds+\frac{G_-}{\pi}\int\limits_e^f Q(s-x)h_+(s)ds;\qquad (x\in R) \tag{7}$$

$$\Phi_+(x)=\frac{2}{\pi(G_++G_-)}\int\limits_{L_1\cup L_2}\frac{\chi_-(s)ds}{x-s}+\frac{2}{\pi(G_++G_-)}\int\limits_{L_1\cup L_2}K_1(x-s)\chi_-(s)ds+$$
$$+\frac{2G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int\limits_{L_1}R(s-x)\Phi_-(s)ds-\frac{1}{\pi}\int\limits_e^f Q_1(s-x)h_+(s)ds;\quad (x\in R) \tag{8}$$

$$K(x)=\int\limits_0^\infty\frac{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)[1-\mathrm{th}(\lambda h_-)]-G_-[1-\mathrm{th}(\lambda h_+)]}{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-}\sin(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$K_1(x)=\int\limits_0^\infty\frac{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_-)[1-\mathrm{th}(\lambda h_+)]-G_-[1-\mathrm{th}(\lambda h_-)]}{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-}\sin(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$R(x)=\int\limits_0^\infty\frac{1-\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)}{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-}\cos(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$Q(x)=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda h_+)\left[G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-\right]}\cos(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$Q_1(x)=\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{th}(\lambda h_-)}{\mathrm{ch}(\lambda h_+)\left[G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-\right]}\sin(\lambda x)\,d\lambda;$$

Теперь для производных смещений на границах полос $y=\pm h_\pm$ будем иметь

$$\frac{du_z^+(x,h_+)}{dx}=\frac{2G_-}{\pi}\int\limits_{L_1}Q(x-s)\Phi_-(s)ds+\frac{2}{\pi}\int\limits_{L_1\cup L_2}Q_1(x-s)\chi_-(s)ds-$$
$$\frac{2}{\pi G_+}\int\limits_e^f\frac{h_+(s)ds}{s-x}-\frac{1}{\pi G_+}\int\limits_e^f K_2(x-s)h_+(s)ds;\qquad (x\in R) \tag{9}$$

$$K_2(x)=\int\limits_0^\infty\frac{(1-\mathrm{th}(\lambda h_-))\left[G_+\mathrm{th}(\lambda h_+)-G_-\right]}{G_+\mathrm{th}(\lambda h_+)\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-}\sin(\lambda x)\,d\lambda.$$

Далее из (1) для стрингера воспользуемся дифференциальным уравнением деформирования стрингера по модели Мелана при антиплоской деформации [6]

$$h_1G_1\frac{d^2w}{dx^2}=h_+(x)-T_*(x)\ \ (e<x<f); \tag{10}$$

где $w=w(x)$ компонент смещений точек стрингеров в направлении оси Oz. При этом условия равновесия стрингера имеет вид

$$\int\limits_e^f h_+(x)\,dx=F_2-F_1+\int\limits_e^f T_*(x)\,dx. \tag{11}$$

Интегрированием (10) легко находим

$$h_1G_1\frac{dw}{dx}=\frac{1}{2}(F_1+F_2)+\frac{1}{2}\int\limits_e^f\mathrm{sign}(x-s)\left[h_+(s)-T_*(s)\right]ds. \tag{12}$$

Теперь в условие контакта упругих полос и стрингеров

$u_z^+(x,h_+)=w(x)$ или $\dfrac{du_z^+(x,h_+)}{dx}=\dfrac{dw(x)}{dx}\quad (e<x<f).$

подставим выражения из (9), (10) и (12) соответственно. После простых преобразований относительно неизвестного контактного напряжения под стрингером придем к следующему интегральному уравнению:

$$\frac{2G_-}{\pi}\int\limits_{L_1} Q(s-x)\varphi(s)\,ds+\frac{2}{\pi}\int\limits_{L_1\cup L_2} Q_1(s-x)\chi_-(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_+}\int\limits_e^f \frac{h_+(s)\,ds}{s-x}-$$

$$-\frac{1}{\pi G_+}\int\limits_e^f K_2(s-x)h_+(s)\,ds=\frac{1}{2h_1G_1}\left[F_1+F_2\right]+ \qquad (13)$$

$$+\frac{1}{2h_1G_1}\int\limits_e^f \operatorname{sign}(x-s)\left[h_+(s)-T_*(s)\right]ds; \quad \left(x\in(e,f)\right)$$

Рассматривая теперь уравнения (7) и (8) соответственно на L_1 и L_2, а также уравнение (13) на промежутке (e,f), придем к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{L_1}\frac{\varphi(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}K(s-x)\varphi(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_2}R(s-x)\psi(s)\,ds- \\
\quad -\dfrac{G_++G_-}{2\pi G_+}\displaystyle\int\limits_e^f Q(s-x)h_+(s)\,ds=l_1(x); \qquad (x\in L_1) \\
\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{L_1}R(s-x)\varphi(s)\,ds+\frac{1}{\pi G_+G_-}\int\limits_{L_2}\frac{\psi(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi G_+G_-}\int\limits_{L_2}K_1(x-s)\psi(s)\,ds- \\
\quad -\dfrac{G_++G_-}{2\pi G_+G_-}\displaystyle\int\limits_e^f Q_1(x-s)h_+(s)\,ds=l_2(x); \qquad (x\in L_2) \\
\dfrac{2G_-}{\pi}\displaystyle\int\limits_{L_1}Q(s-x)\varphi(s)\,ds+\frac{2}{\pi}\int\limits_{L_2}Q_1(s-x)\psi(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_+}\int\limits_e^f\frac{h_+(s)\,ds}{s-x}- \\
-\dfrac{1}{\pi G_+}\displaystyle\int\limits_e^f K_2(s-x)h_+(s)\,ds-\frac{1}{2h_1G_1}\int\limits_e^f\operatorname{sign}(x-s)h_+(s)\,ds=l_3(x),\ \left(x\in(e,f)\right)
\end{cases} \qquad (14)$$

$$l_1(x)=-\frac{\tau_+^{(1)}(x)}{G_+}-\frac{\tau_-^{(1)}(x)}{G_-}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}R(s-x)\left[\tau_+^{(1)}(s)-\tau_-^{(1)}(s)\right]ds;$$

$$l_2(x)=-\frac{1}{\pi G_+G_-}\int\limits_{L_1}\frac{\left[\tau_+^{(1)}(s)-\tau_-^{(1)}(s)\right]ds}{s-x}-\frac{1}{\pi G_+G_-}\int\limits_{L_1}K_1(s-x)\left[\tau_+^{(1)}(s)-\tau_-^{(1)}(s)\right]ds;$$

$$l_3(x)=\frac{1}{2h_1G_1}\left[F_1+F_2\right]-\frac{1}{2h_1G_1}\int\limits_e^f\operatorname{sign}(x-s)T_*(s)\,ds-\frac{2}{\pi}\int\limits_{L_1}Q_1(s-x)\left[\tau_+^{(1)}(s)-\tau_-^{(1)}(s)\right]ds.$$

Система (14) должна рассматриваться при условиях

$$\int\limits_{a_k}^{b_k}\varphi(x)dx=0, \quad (k=\overline{1,N_1}) \qquad \int\limits_{c_k}^{d_k}\psi(x)dx=P_k. \quad (k=\overline{1,N_2}) \qquad (15)$$

Первая группа соответствует условиям непрерывности смещений на концах трещин, а вторая условиям равновесия включений, добавим также условия равновесия стрингера (11).

Рассматривая уравнение (7) на линии спая полос вне включений и трещин, будем иметь:

$$\tau(x)=-\frac{G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_{L_1}\frac{\varphi(s)ds}{s-x}-\frac{G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_{L_1}K(s-x)\varphi(s)ds+\frac{G_-}{2\pi}\int_e^f Q(x-s)h_+(s)ds-$$
$$-\frac{G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_{L_2}R(s-x)\psi(s)ds-\frac{G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_{L_1}R(s-x)\left[\tau_+^{(1)}(s)-\tau_-^{(1)}(s)\right]ds \qquad (x\in L') \tag{16}$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии упругой полосы с трещинами, включениями и стрингером сводится к решению системы (14) при условиях (11), (15).

После решения этой системы напряжение на линии спая вне включения определится формулой (16)

3. Решение определяющего СИУ. Для решения определяющей СИУ (14), (15), (11) сначала вводим безразмерные координаты и величины. Затем определяющее СИУ преобразуем в систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций, заданных на (-1,1). Решение системы (14)–(11), (15), как в [7], строится число-аналитическим методом [8,9,10] с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

4. Заключение. В работе задача о напряженном состоянии кусочно однородного упругого слоя, усиленного по своей верхней грани стрингерами конечных длин, защемленного по нижней грани и содержащего на линии стыка разнородных материалов коллинеарную систему из произвольного числа взаимно не пересекающихся абсолютно жестких включений рассмотрена в общей постановке и получены основные определяющие уравнения задачи, построены их решения. Характеристики задач можно представить явными формулами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений.-М.: Наука, 1982, 344с.
3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М: Наука, 1974.-456с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983.- 488с.
5. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweister Verbindungen. – Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, No 2, S. 123–129.
6. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. – В.сб.: Механика деформируемого твердого тела, Е. Изд–во НАН РА, 1993. стр. 129–143.
7. Манукян Э.А., Мкртчян М.С. Об антиплоской задаче кусочно–однородного упругого слоя, содержащего на линии спая систему щелей и абсолютно жестких тонких включений. Известия НАН РА Механика, т.63, № 2, 2010г, стр. 21-33.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.-Киев: Наукова думка, 1976.-443с.
9. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
10. Theocaris P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. Quart. Appl. Math., vol XXXV, No1, pp. 173-185, 1977.

Сведения об авторах:

Мкртчян Мгер Мушегович – млад. науч. сотр. Института механики НАН РА, E-mail: mmher628@gmail.com

Григорян Марине Самвеловна – к.ф.м.н., ст. науч. сотр. Института механики НАН РА, Национальный университет архитектуры и строительства Армении, Тел.**:** +374 91 639758 **E-mail:** marinegrigoryan17@gmail.com

Мкртчян Мушег Сережаевич – к.ф.м.н., вед. науч.сотр. Института механики НАН РА, Тел.: +374 98 801956, E-mail: mmushegh195@gmail.com

ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЮ И РАЗРУШЕНИЮ ПРИ КРУЧЕНИИ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ТРУБ ОТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПРИЛОЖЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Мурадян Н.С.

Проводится сравнительный анализ экспериментально установленных результатов исследования зависимости сопротивления деформированию и разрушению при кручении тонкостенных труб из армированных тканью пластиков, находящихся в условиях постоянно действующего растягивающего усилия или внутреннего гидростатического давления.

Предлагаются практические подходы, нацеленные на проектирование полых валов из армированных тканью пластиков, обладающих максимальной несущей способностью при кручении.

Введение

Известно, что сопротивление сдвигу, как межслойному, так и в плоскости армирования, и сильно выраженная сдвиговая ползучесть являются одними из основных специфических недостатков армированных пластиков. Одновременно практика показывает целесообразность использования таких материалов для изготовления конструкционных трубчатых элементов, которые при эксплуатации могут подвергаться чистому сдвигу, а также сдвигу, комбинированному с другими силовыми факторами [1, 2, 3]. Оптимальному проектированию таких элементов во многом может способствовать владение экспериментально подтвержденными данными о сопротивлении деформированию и разрушению композитных материалов в условиях, близких к эксплуатационным.

В настоящей работе обобщаются результаты исследования изменения сопротивления разрушению и деформированию при кручении тонкостенных труб из слоистого стеклопластика в зависимости от нормальных напряжений, предварительно приложенных к ним в осевом и радиальном направлениях.

Экспериментальная часть

Исследования проводились с использованием тонкостенных трубчатых элементов из слоистого стеклопластика с внутренним диаметром 38 мм, толщиной стенки 2,25 мм и длиной 285 мм. Трубы были изготовлены методом намотки стеклоткани, предварительно пропитанной модифицированной эпоксидной смолой (Э D-20+БФ-4), на металлическую оправку с последующим горячим прессованием по боковой поверхности в специальных формах [4]. Была использована стеклоткань полотняного плетения с основным перекрытием марки Т-23 (ТУ 6-11-231-76) толщиной 0,27 мм с плотностью 36:20 (отношение количеств основных и утковых нитей на 1 $см^2$ вязки ткани). Величина коэффициента армирования стеклопластика составляет μ=0,45 ($\mu_{снова}$=0,29, $\mu_{уток}$=0,16).

Ниже приводятся краткие сведения о методе проведения экспериментальной части исследований.

Для осуществления полной программы экспериментов было изготовлено необходимое количество стеклопластиковых опытных трубчатых образцов с углом армирования $\varphi = 0°$ (угол между направлениями оси труб и основных нитей вязки стеклоткани).

Опытные трубчатые образцы, предварительно нагруженные в одном случае осевым растягивающим усилием, а в другом- внутренним гидростатическим давлением, были подвергнуты кратковременному кручению, увеличивающимся пошагово со ступенью, соответствующей 0,04-0,08 доли от разрушающего крутящего момента. Возраст опытных образцов в упомянутом выше первом случае испытания составляет 12 лет, а во втором случае - 30 лет.

До проведения кратковременных испытаний были определены величины сопротивления разрушению стеклопластиковых труб при осевом растяжении (σ_{zz}^{P}=146,6 МПа) и при внутреннем гидростатическом давлении ($\sigma_{\theta\theta}^{P}$=458,2 МПа), а также при кручении ($\tau_{z\theta}^{P}$). Величина последней механической характеристики труб в возрасте 12 лет составляла 47,3 МПа, а в возрасте 30 лет- 36,2 МПа.

Обсуждение полученных результатов

До перехода к рассмотрению представленных в данной работе вопросов отметим, что результаты общего их обсуждения приведены в работах [5] и [6]. Отдельные результаты из этих работ здесь рассматриваются с точки зрения их обобщения и формулирования практических предложений.

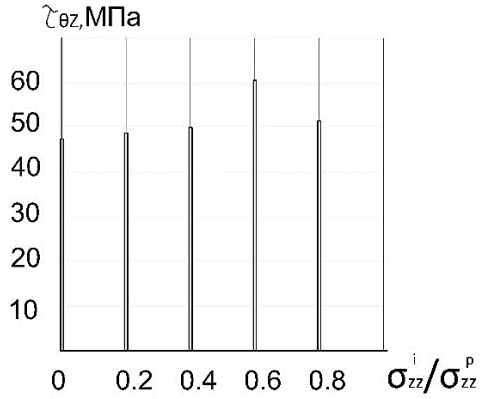


Рис.1. Диаграмма зависимости $\tau_{\theta z}^{iP} = f\left(\sigma_{zz}^{i} / \sigma_{zz}^{P}\right)$

Результаты исследования зависимости сопротивления разрушению при кручении (т.е. $\tau_{\theta z}^{iP}$) стеклопластиковых тонкостенных труб от уровня предварительно приложенного растягивающего напряжения показали, что с увеличением уровня относительного растягивающего напряжения $\sigma_{zz}^{i} / \sigma_{zz}^{P}$ наблюдается начальное увеличение и дальнейшее уменьшение сопротивления разрушению стеклопластиковых трубчатых образцов при кручении (рис.1).

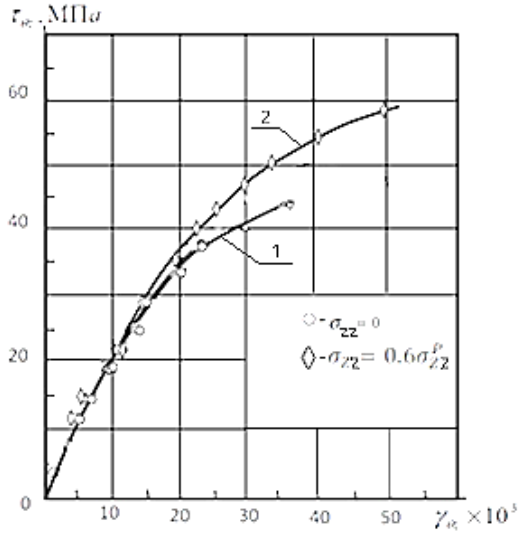


Рис.2. Диаграммы сдвига деформаций стеклотканевых труб, построенных для случаев чистого сдвига ($\sigma_{zz} = 0$ кривая 1) и сдвига, комбинированного с растяжением ($\sigma_{zz} = 0.6\sigma_{zz}^{P} = const$ кривая 2)

При этом максимальное значение роста этой характеристики, составляющее более чем 30% по сравнению с определенным в условиях простого кручения труб (в условиях $\sigma_{zz} = 0$), наблюдается у трубчатых образцов, предварительно нагруженных растягивающим напряжением $\sigma_{zz} = 0.6\sigma_{zz}^{P}$.

На рис.2 приведены экспериментально установленные зависимости $\tau_{\theta z} - \gamma_{\theta z}$ для случаев простого кручения труб ($\sigma_{zz} = 0$, кривая 1) и кручения в условиях $\sigma_{zz} = 0.6\sigma_{zz}^{P}$ (кривая 2).

Как замечаем из данных этого рисунка, при одних и тех же значениях касательного напряжения $\tau_{\theta z}$ до уровня 25 МПа, предварительно приложенное осевое растягивающее напряжение мало влияет на сопротивление труб угловым деформациям. При уровнях касательного напряжения, превышающих 25 МПа, положительное влияние предварительно приложенного растягивающего усилия на сопротивление труб сдвиговым деформациям оказывается существенным (рис.2).

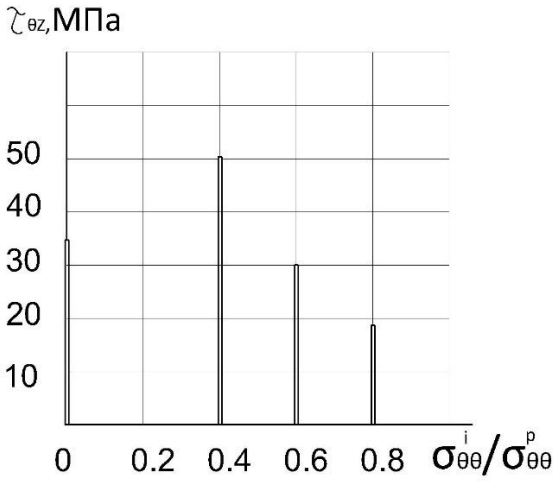


Рис.3. Диаграмма зависимости $\tau_{\theta z}^{iP} = \varphi\left(\sigma_{\theta\theta}^{i} / \sigma_{\theta\theta}^{P}\right)$

Из результатов исследования, приведенных на рис.3, следует, что изменение сопротивления разрушению стеклопластиковых труб при кручении в зависимости от увеличения уровня предварительно приложенного внутреннего гидростатического давления носит начальный возрастающий и дальнейший убывающий характер.

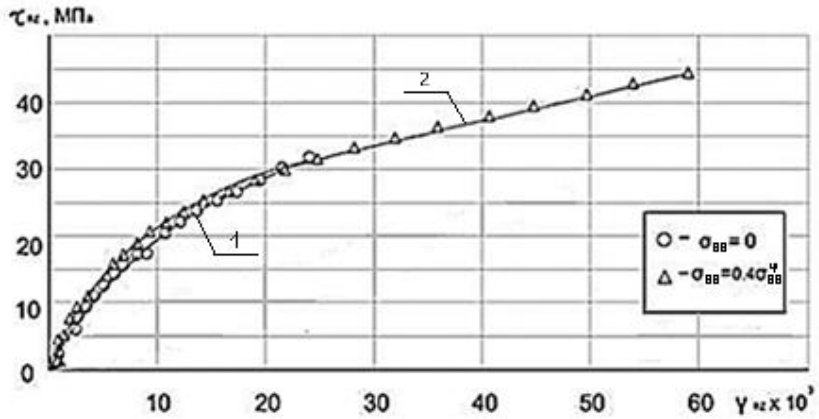


Рис.4. Диаграммы сдвига деформаций стеклотканевых труб, построенных для случаев чистого сдвига ($\sigma_{\theta\theta} = 0$ кривая 1) и сдвига, комбинированного с внутренним гидростатическим давлением ($\sigma_{\theta\theta} = 0.6\sigma_{\theta\theta}^{P} = const$ кривая 2)

При этом величина максимального роста сопротивления разрушению при кручении, наблюдаемого у стеклопластиковых труб, предварительно нагруженных окружным напряже-

нием $\sigma_{\theta\theta} = 0.4\sigma_{\theta\theta}^{P}$, составляет примерно 40% по сравнению со значением аналогической характеристики, определенной условиях простого кручения труб (при $\sigma_{\theta\theta} = 0$).

Из данных рис.4 можно заметить, что сопротивление сдвиговым деформациям стеклопластиковых трубчатых образцов, подвергнутых кручению в условиях $\sigma_{\theta\theta} = 0.4\sigma_{\theta\theta}^{P}$, при низких уровнях напряжения (до уровня $\tau_{\theta z} = 25 МПа$) оказывается несколько больше, чем труб, подвергнутых простому кручению ($\sigma_{\theta\theta} = 0$). Отмеченная разница, однако, в процессе увеличения напряжения $\tau_{\theta z}$ от 25 МПа до 32 МПа постепенно стирается.

Из данных этого рисунка замечаем также, что при дальнейшем увеличении $\tau_{\theta z}$ сопротивление сдвиговым деформациям стеклопластиковых труб, предварительно нагруженных окружным напряжением $\sigma_{\theta\theta} = 0.4\sigma_{\theta\theta}^{P}$, уменьшается с практически постоянной скоростью. Вероятно в таком деформационном поведении стеклопластиковых труб значительную роль может сыграть и сдвиговая ползучесть, развивающаяся в процессе их нагружения ступенчато увеличивающимся крутящим моментом.

Заключение

Таким образом, в условиях комбинированного двухэтапного сложного нагружения, если сначала прикладывается нормальное напряжение в осевом или в окружном направлениях, имеет место существенное увеличение сопротивления разрушению при кручении тонкостенных труб из слоистого стеклопластика на основе стеклоткани полотняного плетения с основным перекрытием.

Учет существенного повышения сопротивления разрушению при кручении тонкостенных труб из пластиков, армированных тканью, обусловленного предварительно приложенными к ним растягивающими напряжениями в осевом или в окружном направлениях, может существенным образом способствовать оптимальному проектированию полых валов из таких материалов с максимально возможной несущей способностью при кручении, предназначенных для передачи крутящего момента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Непершин РИ., Клименов ВВ. Оптимальное проектирование на ЭВМ композитного карданного вала по критериям стоимости и веса. Мех композит мат; 1968. №4. p. 690-95.
2. А.С. №1117031 СССР. Штанга опрыскивателя. Пелех БЛ, Тушинский ОП, Рыбак ТИ и др. Заявлено 10.09. 1980. Открытия. Изобретения. Пром образцы Товарн знаки; 1984. №37. p. 12.
3. Daneshjou K and Talebitooti M. Free vibration analysis of rotating stiffened composite cylindrical shells by using the layerwise-differential quadrature (LW-DQ) method. Mechanics of composite materials, vol. 50; 2014. №1. p. 31-54.
4. Мартиросян М.М. Получение прессованных тонкостенных труб из стеклопластиков. Промышленность Армении; 1971. №10. p. 56-57.
5. Карапетян К.А., Валесян С.Ш, Мурадян Н.С. Сопротивляемость деформации сдвига стеклопластиковых труб в условиях словного нагружения. Тр международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Дилижан. Армения; 2018. p. 185-88.
6. Карапетян КА, Валесян С.Ш, Мурадян Н.С. Зависимость деформативности и разрушения стеклопластиковых труб от предварительного кручения при действии внутреннего давления. Изв. НАН Армении. Механика, Т.72; 2019. №1. p. 49-60.

Информация об авторе

Мурадян Нарине Сергеевна – инженер, Лаборатория экспериментальных исследований, Институт Механики Национальной Академии Наук Армении.Тел.: (374 96) 502046
E-mail: narine-muradyan@mail.ru

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ГЕМИТРОПНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ ТЕРМОУПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

Мурашкин Е.В.

В работе решаются задачи о распространении связанных гармонических волн в теплоизолированном цилиндрическом волноводе. Материал волновода полагается гемитропным термоупругим микрополярным. Дифференциальные уравнения микрополярной термоупругости выписаны с помощью представлений Гельмгольца для температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений. Исследуются представления абсолютных векторных полей трансляционных и спинорных перемещений с помощью системы винтовых векторных и скалярных потенциалов, обеспечивающих выполнимость связанных векторных дифференциальных уравнений в частных производных. Полученные скалярные и винтовые векторные потенциалы позволяют определить поля трансляционных и спинорных перемещений и восстановить поля, возникающих силовых и моментных напряжений.

1. Изучение распространения волн в гемитропных термоупругих телах, термомеханические определяющие свойства которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства, является сложной и актуальной задачей современной механики сплошных сред. В рамках настоящего исследования решаются задачи в рамках теории теплопроводности в гемитропных микрополярных телах [1–3].

Волновые задачи механики микрополярных сред возникают при моделировании процессов медицинской диагностики, таких как: УЗИ, сонография и спектральная допплерография. Теоретической основой для указанных методов могут служить задачи о распространении слабых разрывов в твердом теле [4–9]. Литературный поиск показал актуальность волновых задач термомеханики микрополярных сплошных сред [5, 6, 9]. В настоящей работе рассматриваются процессы распространения связанных гармонических волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений вдоль оси теплоизолированного цилиндрического гемитропного микрополярного волновода.

Представленные результаты, терминология и понятия опираются на предыдущие публикации [4, 9].

2. Связанные уравнения динамики и теплопроводности для гемитропного микрополярного термоупругого континуума выпишем в форме [9]:

$$\begin{cases} (1+c_1)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+2c_1\nabla\times\boldsymbol{\phi}+ \\ \qquad +Lc_4'\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+Lc_5'\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}-2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\theta=\rho G^{-1}\partial_{\cdot\cdot}^2\mathbf{u} \\ (1+c_2)\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}+(1-c_2+2c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}c_4'\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+L^{-1}c_5'\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}+L^{-1}c_6'\nabla\times\boldsymbol{\phi}- \\ \qquad -2L^{-2}c_1(2\boldsymbol{\phi}-\nabla\times\mathbf{u})-2\underset{*}{\beta}\nabla\theta=\rho\mathfrak{I}G^{-1}L^{-2}\partial_{\cdot\cdot}^2\boldsymbol{\phi} \\ \nabla\cdot\nabla\theta-C\lambda^{-1}\partial_{\cdot}\theta-2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\cdot\partial_{\cdot}\mathbf{u}-2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\nabla\cdot\partial_{\cdot}\boldsymbol{\phi}=0 \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор трансляционных перемещений; $\boldsymbol{\phi}$ — вектор спинорных перемещений; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; L — характерная нано/микродлина микрополярной теории; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности определяющие постоянные; ρ — массовая плотность; $\mathfrak{I}$ — коэффициент микроинерции; α — коэффициент линейного теплового расширения; β — коэффициент теплового изгиба–кручения; θ_0 — референциальная температура; θ — температурный инкремент; c — теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности. Кроме того принято:

$$c_4'=c_4+\frac{1}{2}c_5+\frac{1}{4}c_6,\quad c_5'=\frac{1}{2}c_5-\frac{1}{4}c_6,\quad c_6'=-c_6,\quad 2l^2=L^2(1+c_2).$$

Если воспользоваться следующими представлениями

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{u}=\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}$$
$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\phi}$$
можно получить иную форму уравнений (2.1)
$$\begin{cases}(2+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+L(c_4'+c_5')\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}-(1+c_1)\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}-Lc_5'\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\phi}+\\ \qquad+2c_1\nabla\times\boldsymbol{\phi}-2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\theta=\rho G^{-1}\ddot{\partial}^2\mathbf{u}\\ 2(1+c_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}+L^{-1}(c_4'+c_5')\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-L^{-1}c_5'\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}-(1+c_2)\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\phi}+\\ \qquad+L^{-1}c_6'\nabla\times\boldsymbol{\phi}-2L^{-2}c_1(2\boldsymbol{\phi}-\nabla\times\mathbf{u})-2\underset{*}{\beta}\nabla\theta=\rho\mathfrak{I}G^{-1}L^{-2}\ddot{\partial}^2\boldsymbol{\phi}\\ \nabla\cdot\nabla\theta-C\lambda^{-1}\dot{\partial}\theta-2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\cdot\dot{\partial}\mathbf{u}-2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\nabla\cdot\dot{\partial}\boldsymbol{\phi}=0\end{cases}$$

3. Рассмотрим задачу о распространении гармонической по времени волны вдоль оси свободного теплоизолированного длинного цилиндрического волновода. Чтобы построить решение указанной задачи воспользуемся разложениями Гельмгольца для температурного инкремента, векторов трансляционных и спинорных перемещений:
$$\mathbf{u}=\mathbf{A}\Xi,\quad \boldsymbol{\phi}=\mathbf{S}\Xi,\quad \theta=\Theta\Xi$$
где
$$\Xi=e^{i\arg\Xi},\qquad \arg\Xi=-\omega t$$
на вихревые и безвихревые составляющие:
$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\nabla\Phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi}\\ \mathbf{S}&=\nabla\Sigma+\nabla\times\mathbf{H}\end{aligned}\qquad(3.1)$$

Отметим, что представление (3.1) для векторов поляризации $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\phi}$ с помощью скалярных Φ, Σ и векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$ позволяет провести процедуру развязывания системы векторных дифференциальных уравнений (2.1).

Для однозначной определимости абсолютных векторных потенциалов $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{H}$ разложения (3.1) следует дополнить калибровочными соотношениями:
$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}=0,\qquad \nabla\cdot\mathbf{H}=0$$

Подстановка (3.1) в (2.1) позволяет развязать уравнения и получить независимые системы для скалярных и векторных потенциалов.

4. После подстановки принятых в предыдущем разделе представлений (3.1) связанная система уравнений для безвихревых потенциалов примет вид:
$$\begin{cases}2\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\Delta\Phi+L(c_4'+c_5')\Delta\Sigma-2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\Theta=-\omega\rho G^{-1}\Phi\\ 2(1+c_3)\Delta\Sigma+L^{-1}(c_4'+c_5')\Delta\Phi-4L^{-2}c_1\Sigma-2\underset{*}{\beta}\Theta=-\omega\rho\mathfrak{I}G^{-1}L^{-2}\Sigma\\ \Delta\Theta+i\omega C\lambda^{-1}\Theta+i\omega 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\Delta\Phi+i\omega 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\Delta\Sigma=0\end{cases}$$

Введем далее в рассмотрение для безвихревых составляющих трансляционных и спинорных перемещений универсальный скалярный потенциал Ω с различными масштабными факторами
$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \Sigma\\ \Theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}\Omega$$
удовлетворяющий уравнению
$$\Delta\Omega+\gamma^2\Omega=0$$

Подстановка универсального безвихревого потенциала в исходную систему (2.1) приводит нас к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\omega\rho G^{-1} - 2\dfrac{1-\nu}{1-2\nu}\gamma^2)s_1\Omega - L(c_4^{'} + c_5^{'})\gamma^2 s_2\Omega - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}s_3\Omega = 0 \\ -L^{-1}(c_4^{'} + c_5^{'})\gamma^2 s_1\Omega + (\omega\rho\Im G^{-1}L^{-2} - 2(1+c_3)\gamma^2 - 4L^{-2}c_1)s_2\Omega - 2\underset{*}{\beta}s_3\Omega = 0 \\ i\omega 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\gamma^2 s_1\Omega + i\omega 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\gamma^2 s_2\Omega + (\gamma^2 + i\omega C\lambda^{-1})s_3\Omega = 0 \end{cases}$$

Нетривиальное решение последней системы существует тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. В этом случае мы получим уравнение такое же, как и уравнение для волновых чисел плоских гармонических термоупругих триплетных волн. Решив которое, найдем скалярные составляющие в разложении Гельмгольца для трансляционных и спинорных перемещений, а также скалярный потенциал температурного инкремента.

5. Система для определения векторных потенциалов принимает вид:

$$\begin{cases} (1+c_1)\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi} + Lc_5^{'}\nabla\times\nabla\times\mathbf{H} - 2c_1\nabla\times\mathbf{H} = \omega\rho G^{-1}\boldsymbol{\Psi} \\ (1+c_2)L^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{H} + Lc_5^{'}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi} - Lc_6^{'}\nabla\times\mathbf{H} + 2c_1(2\mathbf{H} - \nabla\times\Phi) = \omega\rho\Im G^{-1}\mathbf{H} \end{cases}$$

По аналогии с предыдущим разделом определим универсальный вихревой векторный потенциал Υ с различными масштабными факторами согласно:

$$\nabla\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\Upsilon$$

В итоге получим систему

$$-\nabla\times\nabla\times\begin{pmatrix}-[(1+c_1)a + Lc_5^{'}b]\\ -[(1+c_2)b + Lc_5^{'}a]\end{pmatrix}\Upsilon + \begin{pmatrix}\omega\rho G^{-1}a\\ \omega\rho G^{-1}\Im b\end{pmatrix}\Upsilon + \nabla\times\begin{pmatrix}2c_1 b\\ 2c_1 a + L^{-1}c_6^{'}b\end{pmatrix}\Upsilon = 0$$

или

$$-\nabla\times\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\Upsilon + \begin{pmatrix}\omega\rho G^{-1}a\\ \omega\rho G^{-1}\Im b\end{pmatrix}\Upsilon = 0$$

при условии, что выполняются следующие отношения:

$$\frac{a}{c} = \frac{c + 2c_1 b}{\omega\rho G^{-1}[(1+c_1)a + Lc_5^{'}b]},\quad \frac{b}{d} = \frac{d + 2c_1 a + L^{-1}c_6^{'}b}{\omega\rho G^{-1}\Im[(1+c_2)b + Lc_5^{'}a]},\quad \frac{c}{d} = \frac{1}{\Im}\frac{a}{b}$$

Для универсального потенциала Υ получим уравнение

$$-\nabla\times\Upsilon + p\omega\rho G^{-1}\Upsilon = 0$$

при условии, что

$$p = \frac{a}{c}$$

Разрешив отношения для введенных параметров, получим уравнение для определения неизвестной p. Решив которое, найдем векторные вихревые потенциалы трансляционных и спинорных перемещений.

6. Трансляционные и спинорные перемещения в цилиндрическом волноводе можно определить методом разделения переменных в цилиндрических координатах r,φ,z.

Для скалярных волновых потенциалов Φ, Σ, θ связанной продольной триплетной волны получим следующие представления:

$$\begin{pmatrix}\Phi\\ \Sigma\\ \Theta\end{pmatrix}=\left[C_1 I_n(\gamma_1 r)+C_2 I_n(\gamma_2 r)+C_3\right]\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix} I_n(\gamma_3 r)\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ -\sin n\varphi\end{Bmatrix} e^{\pm ikz} \tag{6.1}$$

k обозначает волновое число распространяющейся волны; C_1, C_2, C_3 — произвольные константы; $I_n(\cdot)$ — стандартная функция Бесселя первого рода мнимого аргумента;

$$\gamma_1^2 = k^2 - s_1, \quad \gamma_2^2 = k^2 - s_2, \quad \gamma_3^2 = k^2 - s_3.$$

$$\nabla\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}=C_4\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_1+C_5\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_2+C_6\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_3+C_7\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_4 \tag{6.2}$$

Координатные представления потенциалов вихревых волн выводятся из формального решения векторного винтового уравнения

$$-\nabla\times\boldsymbol{\Upsilon}+K\boldsymbol{\Upsilon}=0 \tag{6.3}$$

которое можно получить путем разделения переменных в цилиндрических координатах r,φ,z и умножить на экспоненты гармоники времени $e^{i\omega t}$.

Неизвестные константы получаются из условий калибровки и из граничных условий краевой задачи на боковой стенке волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1986. viii+383 p.
2. Altenbach H., Maugin G.A., Erofeev V. (eds.). Mechanics of generalized continua. Berlin: Springer, 2011. Vol. 7. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19219-7
3. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012. XX+352 p. DOI: 10.1007/978-3-642-28353-6
4. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. New York: John Wiley & Sons, 2011. 660 p.
5. Smith A. C. Waves in micropolar elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1967. Vol. 5. P. 741–746. DOI: 10.1016/0020-7225(67)90019-5
6. Murashkin E.V., Stadnik N.E. Compatibility conditions in continua with microstructure // MATEC Web of Conferences. 2017. Vol. 95. P. 12001. DOI: 10.1051/matecconf/20179512001.
7. Willson A.J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // International Journal of Engineering Science. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 17–22. DOI: 10.1016/0020-7225(72)90071-7.
8. Achenbach J. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam, London, New York: American Elsevier, 2012. 335 p.
9. Murashkin E.V. Discrimination of Propagating Weak Discontinuities Surfaces in Semi-Isotropic Micropolar Thermoelastic Media. In: Altenbach, H. (eds) Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials, vol 223. Cham: Springer, 2025. https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_31

Information about authors

Мурашкин Евгений Валерьевич – к.ф.-м.н., с.н.с. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия, с.н.с. НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail evmurashkin@gmail.com, murashkin@ipmnet.ru, murashkin@imec.msu.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АЛГОРИТМА С ДИНАМИЧЕСКИМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ЗОНДИРУЮЩЕГО СИГНАЛА ДЛЯ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ЛОЖНОГО СРАБАТЫВАНИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ДАЛЬНОСТИ

Олейникова Ю.В., Митюшов А.И., Крылов В.А., Инюшов И.А.

Работа содержит математическую модель процесса обработки отраженного сигнала в приемо-передающем модуле радиолокационного дальномера до и после применения алгоритма. Приведен спектральный анализ аддитивной смеси принятого сигнала. Продемонстрированы результаты анализа спектра на этапах излучения и приема сигнала, обосновывающие работоспособность алгоритма. Показано влияние изменения параметров рабочего сигнала (частоты модуляции и девиации) на выделение ложного сигнала в заданной частотной области.

Радиолокационным системам обнаружения, наведения, самонаведения посвящено множество научной литературы. Однако проблемы, связанные со стадиями управления в непосредственной близости взаимодействующих объектов, освещены значительно реже. В то же время не оставляет места сомнениям важность этих проблем, особенно с активным освоением космического пространства, разработкой автопилотных транспортных средств и т.п. Для таких областей характерны проблемы встречи объектов с целью стыковки, сопровождения (преследования), аварийной помощи, высадки и многие другие.

Функциональное построение систем ближней локации основано на принципах и методах дальней радиолокации, вместе с тем в их реализации имеется ряд особенностей, которые обуславливают высокие требования к надежности и быстродействию подобных систем. К общим принципам относят импульсный принцип, принцип, основанный на эффекте Доплера, использование шумоподобных сигналов, а также принцип частотной модуляции зондирующего сигнала радиолокатора для повышения информативности и разрешающей способности.

Рассмотрим проблемы, связанные с процессом измерения дальности между объектами. Одной из угроз для таких систем является прием отраженного сигнала, содержащего ложные частотные составляющие, свидетельствующие о наличии объекта в рабочей зоне. Воздействие таких сигналов на радиолокатор может привести к срыву сопровождения объекта, появлению ложных целей и, как следствие, к существенному снижению эффективности системы. С учетом этого, необходимость разработки и верификации адаптивных методов радиоэлектронной защиты является очевидной и актуальной задачей.

В основе данной работы лежит алгоритм, позволяющий путем изменения частоты модуляции и девиации зондирующего сигнала, разнести полезный и ложный сигналы в частотные диапазоны, соответствующие различным каналам, что позволит избежать преждевременного срабатывания системы управления в процессе функционирования. Целью исследования стали проверка состоятельности алгоритма, обоснование его математической модели, а также реализация спектрального анализа для оценки работоспособности алгоритма.

1. Описание параметров математической модели

Для моделирования были выбраны следующие параметры зондирующего сигнала:

- амплитуда U_m =3 В;
- несущая частота f_0 = 100 МГц;
- длительность импульса τ_u = 25 мкс;
- задержка начала импульса t_1 =1 мкс.

2. Математическая модель зондирующего сигнала

Излученный зондирующий сигнал описывается уравнением:

$$u_{чи}(t) = U_m \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\Delta f}{f_m}\sin\left(2\pi f_m t + \varphi_0\right)\right) \quad (1)$$

f_0 - несущая частота;

Δf - девиация частоты;

f_m - частота модуляции;

U_m - амплитуда зондирующего сигнала.

Уравнение (1) задаёт частотно-модулированный сигнал с синусоидальным законом модуляции. Спектр сигнала приведен на Рис. 1.

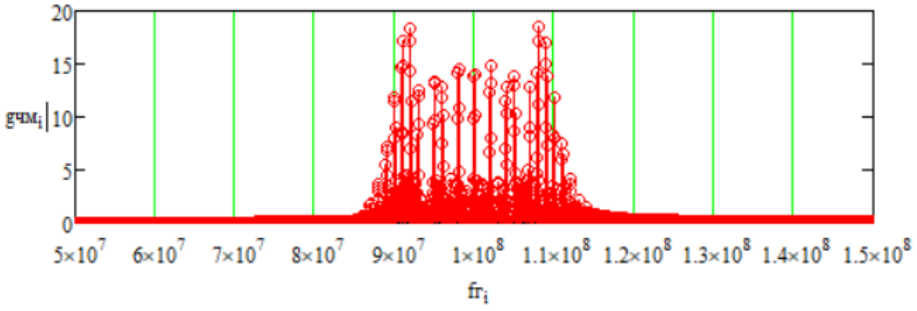


Рис. 1. – Спектр излученного зондирующего сигнала

Из рисунка видно, что ширина спектра соответствует $f_0 \pm \Delta f$. Спектр сигнала с измененными параметрами приведен на Рис. 2.

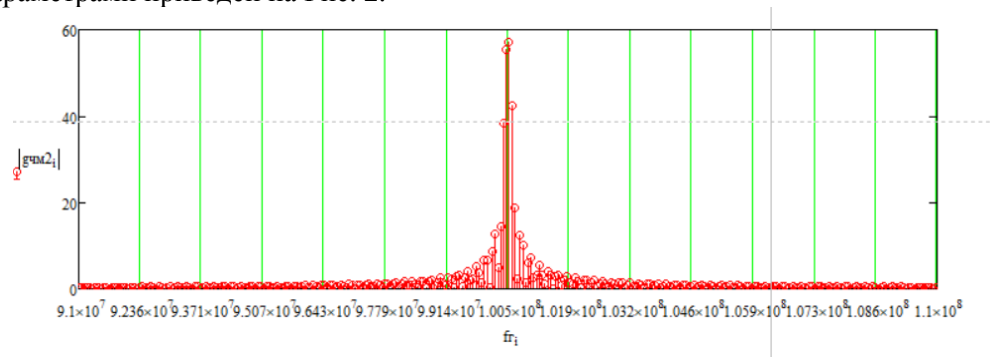


Рис. 2. – Спектр сигнала с частотой модуляции $f_m = 1.1$ МГц и несущей частотой $f_m = 100.5$ МГц

3. **Математическое описание ложного сигнала**

Для моделирования рассмотрен случай, когда частота модуляции ложного сигнала содержит ожидаемый доплеровский сдвиг, а несущая частота совпадает с одной из гармоник излученного в предыдущем импульсе сигнала (Рис. 3).

$$u_{\text{пом}}(t) = U_{\text{п}}\left(\frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_d\left(t - t_1\right)\right)\cos\left(2\pi f_{\text{пом}}\left(t - t_1\right)\right)\right) \quad (2)$$

$f_{\text{д}}$ - частота Доплера;

$f_{\text{пом}} = f_0 + k \cdot fm$ - несущая частота с параметрами рабочего сигнала;

$k = 2$ – номер гармоники зондирующего сигнала;

$U_{\text{п}}$ - амплитуда помехи.

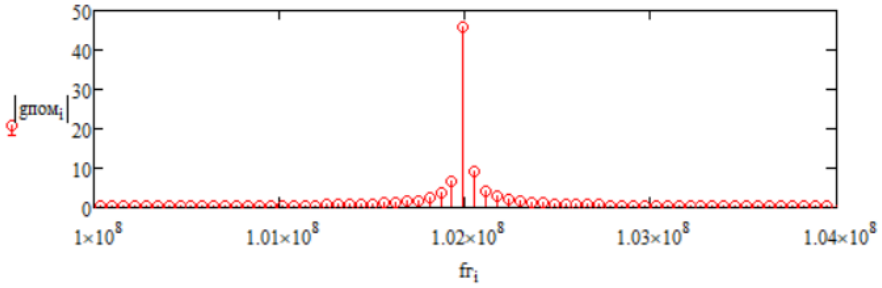


Рис. 3. – Спектр ложного сигнала с параметрами, совпадающими с излученным сигналом

4. **Описание алгоритма обработки сигнала с изменением частоты модуляции и девиации рабочего сигнала**

Принцип работы алгоритма основан на взаимодействии излучения принятого сигнала с излучением передатчика. В результате взаимодействия излучений выделяются биения, иначе – разностная частота. Блок обработки сигнала включает два канала: при достижении сигналом пороговой амплитуды в узкополосном рабочем канале принимается решение о срабатывании системы управления, второй канал служит для фильтрации помеховых сигналов. Ширина полосы пропускания помехового канала выбирается, как правило, в двадцать раз шире полосы пропускания рабочего канала.

В случае совпадения параметров ожидаемого и принятого сигнала вне рабочей зоны, разностная частота попадает узкую полосу рабочего канала, свидетельствуя о наличии цели и вызывая ложное срабатывание системы управления.

Однако в случае применения алгоритма в момент, когда сигнал в рабочем канале достигает пороговой амплитуды, включается алгоритм проверки. Блок управления подает команду на изменение параметров зондирующего сигнала: происходит резкое увеличение девиации и частоты модулирующего напряжения. В результате разностная частота между новой спектральной составляющей и неизменной частотой помехи резко изменяется, оказываясь в полосе пропускания широкополосного канала. Блок управления передает команду на сброс счетчика импульсов, после чего возобновляет зондирование.

5. **Пример обработки сигнала в тракте обработки сигнала**

Расчетные параметры:

- амплитуда помехи $U_{\text{п}} = 1.5$ В;
- разностная частота помехи d_f определяется $PP_{\text{раб}} / 2$;
- несущая частота ложного сигнала $f_{\text{пом}}$ определяется $f + k \cdot fm$;
- номер гармоники зондирующего сигнала k;
- полоса пропускания рабочего канала $PP_{\text{раб}} = 10$ кГц;
- полоса пропускания канала помех $PP = 20PP_{\text{раб}}$;
- частота Доплера $f_{\text{д}} = 2v / \lambda$;
- девиация $D_f = 10$ МГц.

На Рис. 4 приведен спектр аддитивной смеси зондирующего и ложного сигналов до увеличения параметров сигнала в соответствии с рассматриваемым алгоритмом. Наблюдается характерный пик на частоте 102 МГц, соответствующий частотной составляющей второй гармоники зондирующего сигнала и сообщающий о наличии цели на расстоянии, соответствующем диапазону рабочих дальностей.

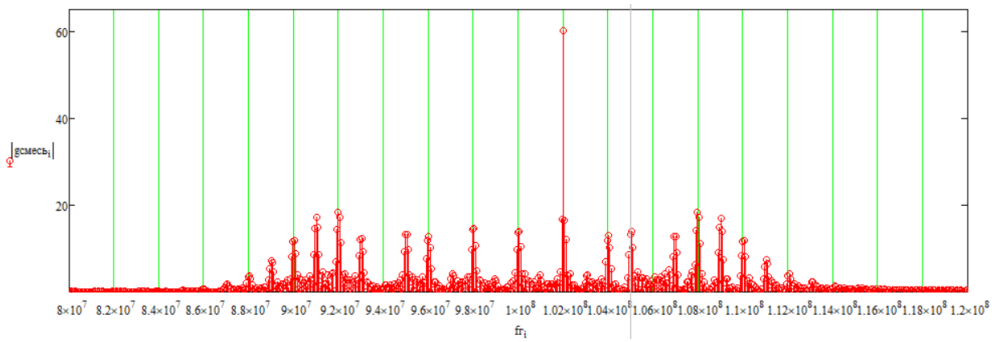


Рис. 4 – Спектр аддитивной смеси зондирующего и ложного сигналов с частотой модуляции 1 МГц и девиацией 10 МГц

6. **Анализ спектра аддитивной смести после применения алгоритма с изменением параметров зондирующего сигнала**

Результаты спектрального анализа аддитивной смеси зондирующего сигнала с параметрами $fm = 1.1\text{МГц}$ и несущей частотой $f_0 = 100.5\text{МГц}$ с ложным сигналом приведен на Рис. 5.

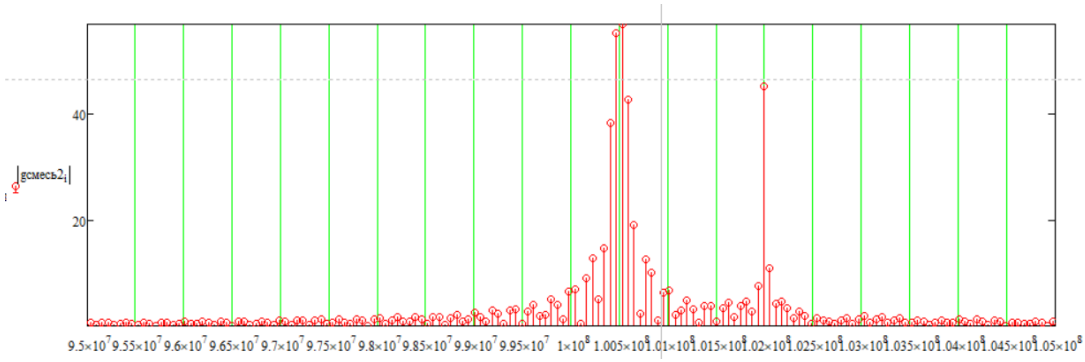


Рис. 5. – Спектр аддитивной смеси зондирующего и ложного сигналов после применения алгоритма

Из рисунка видно, спектральная составляющая, соответствующая ложному сигналу, оказалась отстроенной от спектра зондирующего сигнала, что позволяет обнаружить ее в помеховом канале и предотвратить ложное срабатывание системы.

7. **Выводы по работе**

7.1 Оценка спектральных характеристик подтвердила эффективность предложенного алгоритма;

7.2 Результаты спектрального анализа продемонстрировали, что алгоритм обеспечивает надежное разнесение полезного и ложного сигналов в частотной области, а также робастность системы к мощности помехи, обеспечивая надежное рассогласование в частотной области.

7.3 Предварительный анализ показал, что данный алгоритм обладает высокой практической ценностью и отличается относительной простотой технической реализации.

7.4 Исследование математической модели данного алгоритма показало, что его применение обосновано для дальнейших исследований, направленных на оптимизацию существующих решений и разработку более совершенных алгоритмов обнаружения целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган И.М. Ближняя радиолокация. – М.: Сов. Радио,1973 г. – 272 с.
2. Комаров, И.В. Основы теории радиолокационных систем с непрерывным излучением частотно-модулированных колебаний : [монография] / С.М. Смольский; И.В. Комаров. — Москва : Горячая линия – Телеком, 2010 .— 367 с.

Сведения об авторах

Олейникова Ю.В. – аспирант, кафедра Высшей математики, БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, +7 (919) 267 66-41, E-mail: oleinikova_iuv@voenmeh.ru

Митюшов А.И. – к.т.н., доцент, кафедра Автономных информационных и управляющих систем, БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, +7 (911) 225 87-24,
E-mail: mitushov_ai@voenmeh.ru

Крылов В.А. – старший преподаватель, кафедра Автономных информационных и управляющих систем, БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, +7 (909) 577 13-32.
E-mail: krylov_va@voenmeh.ru

Инюшов И.А. – аспирант, кафедра Автономных информационных и управляющих систем, БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, +7 (993) 480 75-48. E-mail: iniushov_ia@voenmeh.ru

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ОТКРЫТОГО РЫНКА

Павлова Н.Г.

Рассматривается модель открытого рынка с известными эластичностями спроса и предложения. Эластичности представляют собой степенные функции цен на товары, представленные на рынке. Для этой модели получены достаточные условия существования положения равновесия как следствия теорем о точках совпадения накрывающего и липшицевого отображений, действующих в метрических пространствах.

1. Введение. Положение равновесия является центральным объектом исследования современной экономики. Под положением равновесия понимается ситуация, при которой весь товар, который был доставлен на рынок, продан, и при этом спрос на товары на рынке полностью удовлетворен.

В работах [1, 2] был продемонстрирован подход к исследованию моделей рынка с помощью результатов теории накрывающих отображений и точек совпадения. В них положение равновесия рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения. Так, в [1] с помощью теоремы о точках совпадения были получены содержательные результаты о существовании положения равновесия в математической модели рынка типа Эрроу–Дебре, в которой функция предложения восстанавливается как решение задачи максимизации прибыли производителей, а функция спроса – как решение задачи максимизации функции полезности потребителей. В [2] была рассмотрена аналогичная модель, в которой дополнительно были введены транзакционные издержки – затраты, направленные на поддержание доставки товаров на рынок. Для нее также были получены достаточные условия существования положения равновесия. Подход, предложенный этими авторами, используется и в настоящей работе.

В работах [3–6] отображения спроса и предложения восстанавливаются по известным эластичностям спроса и предложения по цене соответственно. Эластичность спроса по цене показывает, на сколько в процентном эквиваленте изменяется спрос на товар при соответствующем изменении цены на этот или другой товар. Аналогично определяется экономический смысл эластичности предложения по цене. В этих работах эластичности спроса и предложения по цене являются постоянными величинами, что может негативно сказываться на моделировании реальных рынков, поскольку в зависимости от цен производители могут и потребители могут по-разному реагировать на их изменение.

В данной работе используется теория накрывающих отображений и точек совпадения для исследования более общей модели открытого рынка, в которой эластичности спроса и предложения являются функциями цены, а не постоянными величинами. Такое рассмотрение позволяет получить более точное описание поведения рынка моделируемого региона.

2. Описание модели. Обозначим $\mathbb{R}^n_+ = \left\{ x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1,n} \right\}$. Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров на рынке, цены на которые описываются вектором $p \in \mathbb{R}^n_+$, на который накладываются естественные ограничения: известны векторы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n_+$, $c_1 = (c_{11},...,c_{1n})$, $c_2 = (c_{21},...,c_{2n})$ такие, что: $0 < c_{1i} < c_{2i}, c_{1i} \le p_i \le c_{2i}, i = \overline{1,n}$.

Эти векторы задают ограничения на цены. Обозначим $P = [c_{11}, c_{21}] \times ... \times [c_{1n}, c_{2n}]$.

Рассмотрим отображения спроса $D: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $D(p) = (D_1(p),...,D_n(p))$ и предложения $S: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $S(p) = (S_1(p),...,S_n(p))$ Пусть известны векторы p^*, D^*, $S^* \in \mathbb{R}^n_+$, $D^* = (D_1^*,...,D_n^*)$, $S^* = (S_1^*,...,S_n^*)$ такие, что

$$D^* = D(p^*) \tag{1}$$

$$S^* = S(p^*) \tag{2}$$

Эти векторы имеют следующий экономический смысл: p^* – известные цены на товары, а D^* и S^* – значения спроса и предложения при этих ценах. Пусть также известен вектор импорта

$a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)$ такой, что $a_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,n}$ и $\exists i : a_i > 0$. Здесь a_i – это количество i-го товара, который импортируется на рынок.

Наконец, пусть известны отображения $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ с образами-матрицами, состоящими из элементов $E_{ij}(p)$, $\tilde{E}_{ij}(p) : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$,

$$E_{ij}(p) = \lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}}, \quad \tilde{E}_{ij}(p) = \tilde{\lambda}_{ij} p_j^{\tilde{\chi}_{ij}}$$

где $\lambda_{ij}, \tilde{\lambda}_{ij}, \chi_{ij}, \tilde{\chi}_{ij} \in \mathbb{R}$. Обозначим $\tilde{\Lambda} = (\lambda_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

Эти параметры имеют следующую экономическую интерпретацию: E_{ij} являются эластичностями спроса на i-й товар по цене на j-й товар, а $\tilde{E}_{ij}$ являются эластичностями предложения i-го товара по цене на j-й товар.

Определение 1. Моделью открытого рынка с эластичностями степенного вида σ мы назовем следующий набор параметров:

$$\sigma = (a, c_1, c_2, p^*, S^*, D^*, \varepsilon, \tilde{\varepsilon})$$

Теорема 1. Набор параметров σ однозначно определяет отображения спроса D и предложения S по формулам:

$$D_i(p) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} \left(p_j^{\chi_{ij}} - \left(p_j^* \right)^{\chi_{ij}} \right) \right), \quad i = \overline{1,n} \tag{3}$$

$$S_i(p) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\chi}_{ij}} \left(p_j^{\tilde{\chi}_{ij}} - \left(p_j^* \right)^{\tilde{\chi}_{ij}} \right) \right), \quad i = \overline{1,n} \tag{4}$$

Отображения D и S, определенные формулами (3), (4) являются решениями систем уравнений в частных производных

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij}(p) D_i(p)}{p_j}, \quad i, j = \overline{1,n} \tag{5}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p) = \frac{\tilde{E}_{ij}(p) S_i(p)}{p_j}, \quad i, j = \overline{1,n} \tag{6}$$

с начальными условиями (1), (2) соответственно.

Доказательство. Приведем доказательство для отображения D. Пусть задана модель σ. Докажем, что (3) является решением (5). Для этого вычислим:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) = D_i^* \lambda_{ik} \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\lambda_{ij} \left(p_j - p_j^* \right) \right), \quad i, k = \overline{1,n}$$

Подставим это выражение в (5) и получим:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) = \frac{\lambda_{ik}}{p_k} D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ij} p_k^{\chi_{ik}}}{\chi_{ij}} \left(p_j^{\chi_{ij}} - \left(p_j^* \right)^{\chi_{ij}} \right) \right) = \lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}} \frac{D_i(p)}{p_k}, \quad i, k = \overline{1,n}$$

Более того,

$$D_i(p^*) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} \left(\left(p_j^* \right)^{\chi_{ij}} - \left(p_j^* \right)^{\chi_{ij}} \right) \right) = D_i^*, \quad i = \overline{1,n}$$

Теперь докажем, что решение задачи (1), (5) единственно. Для этого рассмотрим уравнение

$$d\left(D_i(p) \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) - D_i(p) \frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} dp_k \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} D_i(p) - D_i(p) \frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} \right) dp_k \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

Эта система эквивалентна следующей системе:

$$D_i(p) \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) = c_i, \quad i = \overline{1,n}$$

где $c_i \in \mathbb{R}$ – некоторые константы. Эта система, в свою очередь, должна удовлетворять условию (1), т.е.

$$D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} \left(p_j^* \right)^{\chi_{ij}} \right) = c_i, \quad i = \overline{1,n}$$

Поскольку выражение для c_i в последнем равенстве определено единственным образом, все системы выше в силу эквивалентности имеют единственное решение.

3. **Накрывающие отображения и точки совпадения.** Для получения основного результата нам потребуются некоторые утверждения из теории накрывающих отображений и точек совпадения. Начнем с определения накрывающего отображения. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – метрические пространства и Ψ, Φ – отображения, действующие из X в Y. В пространстве X через $B_X(x,r)$ обозначим замкнутый шар в точке x радиуса r, аналогично определим $B_Y(y,r)$ в пространстве Y.

Определение 2 ([7]). Пусть $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется α-накрывающим на множестве $M \subseteq X$, если $\forall x \in M$, $r > 0$ таких, что $B_X(x,r) \subseteq M$, выполнено включение

$$B_Y\left(\Psi(x), \alpha r\right) \subseteq \Psi\left(B_X(x,r)\right).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha > 0$, что отображение Ψ является α-накрывающим на M, обозначим через $\operatorname{cov}(\Psi \mid M)$.

Сформулируем условия, гарантирующие существования точки совпадения для двух отображений, одно из которых является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2 (Теорема 1, [4])**.** Пусть пространство X полно и заданы $x_0 \in X, \alpha > 0, R > 0$. Пусть отображение $\Psi : X \to Y$ является α-накрывающим на $B_X(x_0, R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi : B_X(x_0, R) \to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что

$$\rho_Y\left(\Psi(x_0), \Phi(x_0)\right) \le (\alpha - \beta) R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_Y(x_0, \xi) \le \frac{\rho_Y\left(\Psi(x_0), \Phi(x_0)\right)}{\alpha - \beta}.$$

4. Достаточные условия существования положения равновесия

Теорема 2 о точках совпадения двух отображений позволяет получить достаточные условия существования положения равновесия в описанной выше модели. Введем обозначения:

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \min_{p \in P} \left(\left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \right)^{-1} \right\| \right)^{-1}$$

$$\overline{\beta}(\sigma)=\max_{i=\overline{1,n}} D_i^*\prod_{j=1}^{n}\max_{m=1,2}\left(\exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}}\left(c_{mj}^{\chi_{ij}}-\left(p_j^*\right)^{\chi_{ij}}\right)\right)\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{2k}-c_{1k}}{2}\frac{|\lambda_{ik}|}{c_{1k}}$$

$$\overline{\gamma}(\sigma)=\max_{i=\overline{1,n}}\left|S_i(\tilde{c})+a_i-D_i(\tilde{c})\right|,$$

где $\tilde{c}=\frac{1}{2}(c_1+c_2)$.

Теорема 3. *Пусть параметры модели* σ *удовлетворяют условиям:*

1) *матрица* $\tilde{\Lambda}$ *обратима;*

2) $\overline{\gamma}(\sigma)<\overline{\alpha}(\sigma)-\overline{\beta}(\sigma)$

Тогда в модели σ *существует положение равновесия* $p^0\in\operatorname{int}P$.

Доказательство. Введем следующие нормы:

$$\|x\|_1=\max_{i=\overline{1,n}}\frac{|x_i|}{c_{2i}-c_{1i}},\ x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

$$\|y\|_2=\max_{i=\overline{1,n}}|y_i|,\ y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$$

Рассмотрим метрические пространства $(X,\rho_X),(Y,\rho_Y)$, где $X=Y=\mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Заметим, что в силу замечания 1 имеем

$\operatorname{cov}(S\mid P)=\min_{p\in P}\operatorname{cov}(S\mid p)$. Далее, $\operatorname{cov}(S\mid p)=\operatorname{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)$.

Наконец, имеем

$$\operatorname{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\geq\left(\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^*\left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^*\right)^{-1}\right\|\right)^{-1}=\tilde{\alpha}(p)$$

Таким образом,

$\operatorname{cov}(S\mid P)=\min_{p\in P}\operatorname{cov}(S\mid p)\geq\min_{p\in P}\tilde{\alpha}(p)=\tilde{\alpha}(\sigma)$.

Через $\operatorname{lip}(B\mid P)$ обозначим точную верхнюю грань всех тех чисел $\beta>0$, что отображение D удовлетворяет на P условию Липшица с константой β. Оценим ее, предварительно вычислив норму $\frac{\partial D}{\partial p}(p)$. Имеем:

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\|=\max_{\|x\|_1=1}\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(x)\right\|=\max_{\|x\|_1=1}\max_{i=\overline{1,n}}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p)x_j\right|.$$

Подставляя сюда выражение $\partial D_i/\partial p_j$ из (5), мы получим

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\|=\max_{\|x\|_1=1}\max_{i=\overline{1,n}}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{ij}p_j^{\chi_{ij}}D_i(p)}{p_j}x_j\right|$$

Теперь подставляя выражение для $D_i(p)$ из (3), мы получим

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\|=\max_{\|x\|_1=1}\max_{i=\overline{1,n}}\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_j^{\chi_{ij}-1}x_jD_j^*\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{\lambda_{ik}}{\chi_{ik}}\left(p_k^{\chi_{ik}}-\left(p_k^*\right)^{\chi_{ik}}\right)\right)\right|$$

Оценим величины p_j и p_k через компоненты векторов c_1 и c_2 соответственно

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\|=\max_{i=\overline{1,n}}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_{ij}|\max\left\{c_{1j}^{\chi_{ij}-1},c_{2j}^{\chi_{ij}-1}\right\}D_j^*\prod_{k=1}^{n}\max_{m=1,2}\left(\exp\left(\frac{\lambda_{ik}}{\chi_{ik}}\left(c_{mk}^{\chi_{ik}}-\left(p_k^*\right)^{\chi_{ik}}\right)\right)\right)=\overline{\beta}(\sigma).$$

Таким образом, $\operatorname{lip}(D \mid P) = \max\limits_{p \in P} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \le \bar{\beta}(\sigma)$.

Из неравенств $\operatorname{cov}(D \mid P) \ge \bar{\alpha}(\sigma)$, $\operatorname{lip}(S \mid P) \le \bar{\beta}(\sigma)$ и условия 2) следует, что существуют такие α и β такие, что $\bar{\beta}(\sigma) < \beta < \alpha < \bar{\alpha}(\sigma)$, отображение S является α-накрывающим на P, а отображение D удовлетворяет условию Липшица на P с константой β. Так как P – полное метрическое пространство, то по Теореме 2 существует вектор $p^0 \in \operatorname{int} P$ такой, что

$$S(p^0) + a = D(p^0) \quad \text{и} \quad \rho_X(p^0, \tilde{c}) \le \frac{\rho_Y(D(\tilde{c}), S(\tilde{c}))}{\alpha - \beta} < 1$$

в силу условия 2). Следовательно, в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0 \in \operatorname{int} P$.

5. Заключение

Полученные в работе достаточные условия могут быть использованы для анализа реальной экономической ситуации путем использования статистики производства и продаж товаров на конкретных рынках. Помимо этого, результаты работы могут быть использованы для прогноза равновесных цен в будущем, что может поспособствовать улучшению экономической ситуации рассматриваемого региона, сокращению перепроизводства и безубыточной корректировке цен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 2. С. 225 237.
2. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г, Шананин А.А. Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 3 22.
3. Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. 2021. V. 24. № 4. P. 130 144.
4. Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in market models/ Proceedings of the 14th Int. Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD) // IEEE. 2021. P. 1 5.
5. Котюков А.М., Павлова Н.Г. Положение равновесия в моделях рынка с известной эластичностью / Материалы 16-й Межд. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» // М: ИПУ РАН. 2022. С. 665 668.
6. Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Stability and non-uniqueness of equilibrium in an open market model / Proceedings of the 15th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD) // IEEE. 2022. P. 1 4.
7. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 5 16.
8. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции. Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 452 463.

Information about author

Pavlova N.G. assistant professor, Nikol'skii Mathematical Institute RUDN University, Laboratory of Optimal Control Systems V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, (926) 1431537
E-mail pavlova.ng@phystech.edu

МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Пахомов Б.М.

В данной работе представлена схема деформирования изотропного материала, которая позволяет достаточно просто и точно, по сравнению с традиционными схемами, описать в некоторых случаях их специфическое поведение под действием внешней нагрузки. В случае использования схемы естественным образом вытекают новые определяющие соотношения – условия начала пластического течения для обычного материала, включающие коэффициент Пуассона, условие текучести для разносопротивляющегося материала, эффективная модель нелинейного деформирования при сложном напряженно-деформированном состоянии, модель изотропного разномодульного материала.

В природе существуют некоторые изотропные материалы, которые имеют различные пределы текучести и диаграммы деформирования в пластической области при растягивающих и сжимающих нагрузках, но в упругой зоне эти материалы ведут себя как обычные, подчиняющиеся закону Гука материалы. Такие материалы принято называть разносопротивляющимися материалами. Ниже рассмотрим модель деформирования таких материалов.

Определяющие соотношения, связывающие компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}, запишем в следующем виде

$$\sigma_{ij} = \bar{G}_0 \varepsilon_{ij} + L\varepsilon\delta_{ij}, \tag{1}$$

где $i, j = x, y, z$; $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$; δ_{ij} – символ Кронекера. Для линейно-упругого изотропного материала параметры L и $\bar{G}_0$ определяются очевидными соотношениями

$$\bar{G}_0 = \frac{E}{1+\nu}, \quad L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Рассматривая раздельно слагаемые в (1), можно сказать, что второе слагаемое определяет работу связей, существующих между различными направлениями деформирования. Причем этот механизм работает только при $\varepsilon \neq 0$. Здесь под направлениями деформирования условимся понимать растяжение-сжатие по осям x, y, z и сдвиги в плоскостях xy, yz и zx.

Таким образом, обобщенная жесткость материала оказывается разделенной на жесткость связи и оставшуюся жесткость, которая работает, когда не работают связи между направлениями деформирования, то есть когда $\varepsilon = 0$. Эту жесткость будем называть собственной жесткостью. Соответственно параметры $\bar{G}_0$ и L будем называть собственным модулем и модулем связи.

Введя следующие обозначения

$$p_{ij} = \bar{G}_0 \varepsilon_{ij} \text{ и } Q = L\varepsilon, \tag{2}$$

формулу (1) запишем в следующем виде

$$\sigma_{ij} = p_{ij} + Q\delta_{ij}. \tag{3}$$

Будем называть p_{ij} собственными напряжениями, а $Q\delta_{ij}$ – напряжениями связи.

Также введем понятия интенсивностей напряжений p_i и деформаций $\bar{\varepsilon}_i$ в следующей форме

$$p_i = \sqrt{\frac{1}{2} p_{ij} p_{ij}}, \tag{4}$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}. \tag{5}$$

Из (3)-(5) очевидно, что должно выполняться равенство

$$p_i = \bar{G}\,\bar{\varepsilon}_i. \tag{6}$$

Соотношения (1)-(4) будут тождественны закону Гука для изотропного линейно-упругого материала. Однако, особый интерес вызывает описание нелинейных эффектов в материале. Используя предлагаемую схему, будем считать, что связи между направлениями работают упруго, т. е. параметр L остается постоянным для всех видов напряженно-деформированного состояния и не зависит от того, работает материал упруго или нет. А все нелинейные эффекты в материале определяются обобщенной собственной жесткостью [1]. Рассмотрим, что дает предлагаемая схема разделения при определении начала пластического течения.

Будем считать, что пластическое течение в материале начинается в тот момент, когда критического значения достигает интенсивность p_i. Очевидно, что это критическое значение равняется пределу текучести при сдвиге $\tau_т$. Используя соотношения (1), (3), (5), получаем условие текучести в следующем виде

$$(1+2\nu^2)(\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2+\sigma_{zz}^2)-2\nu(2-\nu)(\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx})+$$
$$+2(1+\nu)^2(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2)=2(1+\nu)^2\,\tau_т^2. \qquad (7)$$

На рис. 1 по формуле (7) построены кривые для плоско-напряженного состояния при различных значениях коэффициента Пуассона.

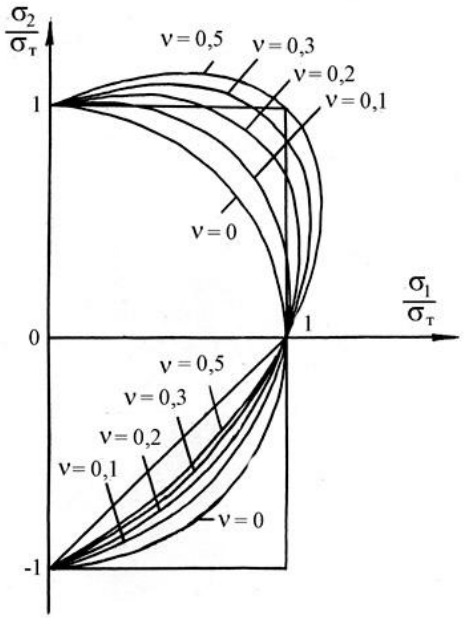


Рис. 1. Кривые условия текучести для разных значений коэффициента Пуассона

Развивая этот подход [2] примем, что для любого вида напряженно-деформированного состояния при $p_i > \tau_т$ L остается постоянным, а модуль $\bar{G}$ монотонно убывает и является функцией только p_i и, что то же самое – $\bar{\varepsilon}_i$. Также будем считать, что разгрузка происходит упруго с начальным модулем $\bar{G}_0$. В результате мы получили деформационную теорию пластичности со следующими определяющими соотношениями (включая (1))

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{\bar{G}}\sigma_{ij}-\frac{L}{\bar{G}(\bar{G}+3L)}\,\sigma\delta_{ij},$$
$$\varepsilon_{ij}^e=\frac{1}{\bar{G}}\sigma_{ij}-\frac{L}{\bar{G}_0(\bar{G}_0+3L)}\,\sigma\delta_{ij}, \qquad (8)$$
$$\varepsilon_{ij}^p=\left(\frac{1}{\bar{G}}-\frac{1}{\bar{G}_0}\right)\sigma_{ij}-L\left[\frac{1}{\bar{G}(\bar{G}+3L)}-\frac{1}{\bar{G}_0(\bar{G}_0+3L)}\right]\sigma\delta_{ij}.$$

где ε_{ij}^e и ε_{ij}^p – упругие и пластические деформации, а σ – первый инвариант тензора напряжений.

Согласно этой теории, должна существовать единая для всех видов напряженно-деформированного состояния зависимость $p_i - \bar{\varepsilon}_i$.

На рисунках 2 и 3 изображены результаты обсчета испытаний трубчатых образцов, выполненных из стали ЭИ415 [2] при различных отношениях осевого напряжения σ_z к окружному σ_θ. На рис. 2 кривые построены при использовании теории Мизеса, на рис. 3 – по предлагаемой теории.

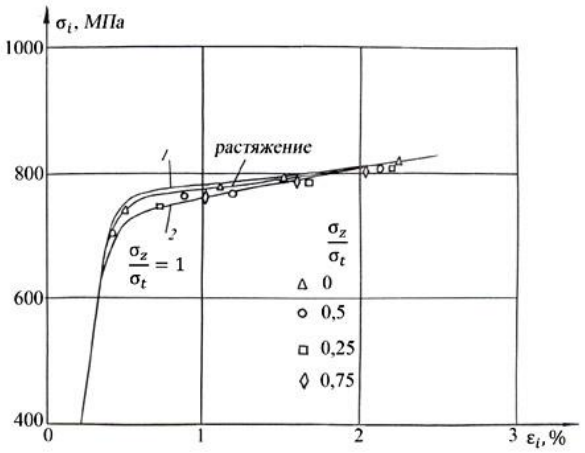


Рис. 2. Результаты испытаний трубчатых образцов:
1 – чистый сдвиг; *2* – $\sigma_z / \sigma_t = 1$

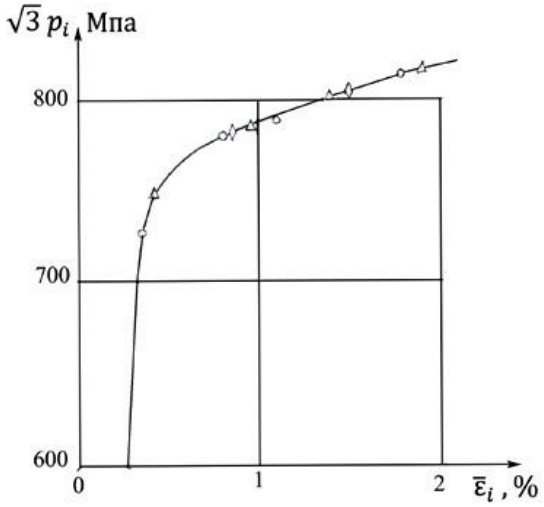


Рис. 3. Экспериментальные точки в координатах $\sqrt{3}p_i - \bar{\varepsilon}_i$

Согласно модели деформирования (1)-(8), при неупругом поведении материала и при $\sigma \neq 0$, будет происходить пластическое изменение объема

$$\Delta\varepsilon^{(p)} = \frac{\sigma}{K^p}, \tag{9}$$

где $K^p = \dfrac{(\bar{G}_0 + 3L)(\bar{G} + 3K)}{\bar{G}_0 - \bar{G}}$.

При полной разгрузке в материале образуются остаточные напряжения

$$Q = \frac{L}{\bar{G}_0 + 3L}\sigma + L\Delta\varepsilon^{(p)} = \frac{\nu}{1+\nu}\sigma + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Delta\varepsilon^{(p)},$$

$$p_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{L}{\bar{G}_0 + 3L}\sigma\delta_{ij} - L\Delta\varepsilon^{(p)}\delta_{ij}, \tag{10}$$

$$p_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma\delta_{ij} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\Delta\varepsilon^{(p)}\delta_{ij}.$$

Это означает, что в процессе первоначального пластического нагружения поверхность текучести в виде эллипсоида вращения изотропно расширяется в пространстве главных напряжений и одновременно перемещается вдоль главного диаметра. Материал становится разносопротивляющимся, т. е. упруго работающим внутри поверхности текучести, но по-разному реагирующим на растягивающие и сжимающие нагрузки, начиная с процесса пластического течения в пластической области. Условие начала пластического течения при повторном нагружении выглядит следующим образом

$$\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2+\sigma_{zz}^2-\frac{2L\,(2\bar{G}_0+3L)}{\bar{G}_0^2+4\bar{G}_0L+6L^2}(\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx})+$$
$$+\frac{2(\bar{G}_0+3L)^2}{\bar{G}_0^2+4\bar{G}_0L+6L^2}(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2)-(\sigma_t-\sigma_c)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=\sigma_t\sigma_c \qquad (11)$$

и через E и ν

$$\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2+\sigma_{zz}^2-\frac{2\nu(2-\nu)}{1+2\nu^2}(\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx})+$$
$$+\frac{2(1+\nu)^2}{1+2\nu^2}(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2)-(\sigma_t-\sigma_c)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=\sigma_t\sigma_c. \qquad (12)$$

Здесь σ_t и σ_c – пределы текучести при одноосных растяжении и сжатии при повторном нагружении.

Из (12) следует, что предел текучести разносопротивляющегося материала при чистом сдвиге τ_{*tc} должен выражаться через σ_t и σ_c по формуле

$$\tau_{*tc}=\sqrt{\frac{(1+2\nu^2)}{2(1+\nu)^2}\sigma_t\sigma_c}. \qquad (13)$$

Армянской школой механиков под руководством академика С.А. Амбарцумяна была разработана разномодульная теория упругости [3,4]. Применительно к разномодульным материалам во многом похожие результаты получаются при использовании предлагаемой схемы разделения обобщенной жесткости, описанной выше. Первоначально изотропный разномодульный материал после приложения нагрузки мгновенно превращается в материал ортотропный. Причем его главные направления будут совпадать с направлениями главных деформаций и главных напряжений. Сначала запишем уравнения, связывающие главные напряжения σ_k и ε_k, в следующем виде

$$\sigma_k=\bar{G}_k\,\varepsilon_k+L\,\varepsilon. \qquad (14)$$

Примем, что коэффициенты $\bar{G}_k$ и L определяются с помощью следующих правил

$$L=\begin{cases}L^+ & \text{при} \quad \varepsilon\ge 0\\ L^- & \text{при} \quad \varepsilon<0\end{cases}. \qquad (15)$$

$$\bar{G}_k=\begin{cases}\bar{G}^+ & \text{при} \quad \varepsilon_k\ge 0\\ \bar{G}^- & \text{при} \quad \varepsilon_k<0\end{cases}, \qquad (16)$$

Эти соотношения переходят в закон Гука (1) для изотропного линейно-упругого материала, когда $\bar{G}^+=\bar{G}^-=\bar{G}$ и $L^+=L^-=L$.

При $\varepsilon=0$ связи между направлениями не работают, а материал в каждом направлении имеет собственную жесткость $\bar{G}^+$ или $\bar{G}^-$ в зависимости от знака соответствующей продольной деформации. Величины $\bar{G}^+$ и $\bar{G}^-$ будем называть собственными модулями направления или просто модулями растяжения и сжатия материала, соответственно, а величины L^+ и L^- – модулями связи при объемном растяжении и сжатии, соответственно.

Проведя несложные преобразования, получим обратные уравнениям (14) выражения для главных деформаций

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\Delta}\left[(\bar{G}_2\bar{G}_3+\bar{G}_2L+\bar{G}_3L\right]\sigma_1-\bar{G}_3L\sigma_2-\bar{G}_2L\sigma_3],$$
$$\varepsilon_2=\frac{1}{\Delta}\left[-\bar{G}_3L\sigma_1+(\bar{G}_3\bar{G}_1+\bar{G}_3L+\bar{G}_1L)\sigma_2-\bar{G}_1L\sigma_3\right], \qquad (17)$$
$$\varepsilon_3=\frac{1}{\Delta}\left[-\bar{G}_2L\sigma_1-\bar{G}_1L\sigma_2+(\bar{G}_1\bar{G}_2+\bar{G}_1L+\bar{G}_2L)\sigma_3\right].$$

Применяя уравнения (17) для одноосного растяжения и одноосного сжатия, получим выражения, связывающие между собой технические характеристики материала и параметры модели

$$\bar{G}^{+}=\frac{E_t-\nu_t E_c}{1-\nu_t\nu_c},$$
$$\bar{G}^{-}=\frac{E_c-\nu_c E_t}{1-\nu_t\nu_c},$$
$$L^{+}=\frac{\nu_t\,(E_c-\nu_c E_t)}{(1-\nu_t\nu_c)(1-2\nu_t)},\qquad(18)$$
$$L^{-}=\frac{\nu_c\,(E_t-\nu_t E_c)}{(1-\nu_t\nu_c)(1-2\nu_c)}.$$

Здесь E_t,ν_t и E_c,ν_c – модули упругости и коэффициенты поперечных деформаций при одноосных растяжении и сжатии, соответственно.

Рассмотрим теперь кручение как один из основных видов напряженного состояния. Пусть $\sigma_1=\tau_0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-\tau_0$. Для определенности примем, что $\bar{G}^{-}>\bar{G}^{+}$. Из уравнений (17) имеем

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\Delta}\bar{G}^{-}(\bar{G}^{-}+3L^{+})\,\tau_0,$$
$$\varepsilon_2=\frac{1}{\Delta}(\bar{G}^{-}-\bar{G}^{+})\,L^{-}\tau_0,$$
$$\varepsilon_3=-\frac{1}{\Delta}(\bar{G}^{+}\bar{G}^{-}+\bar{G}^{+}L^{+}+2\bar{G}^{-}L^{+})\,\tau_0,$$

где $\Delta=\bar{G}^{-}(\bar{G}^{+}\bar{G}^{-}+2\bar{G}^{+}L^{+}+\bar{G}^{-}L^{-})$. Здесь параметры $\bar{G}^{+},\bar{G}^{-},L^{+}$ и L^{-} определяются по формулам (18).

Как видим, равенство $|\varepsilon_1|=|\varepsilon_3|$ в общем случае не выполняется, причем $\varepsilon_1>|\varepsilon_3|$, а также деформация ε_2 меньше нуля. Кроме того, оказывается, что при кручении, в полном соответствии с экспериментом, разномодульный материал испытывает изменение объема. Объемная деформация при этом равна

$$\varepsilon=\frac{1}{\Delta}\bar{G}^{-}(\bar{G}^{-}+\bar{G}^{+})\,\tau_0.$$

Предлагаемая модель выгодно отличается тем, что совершенно понятно, что происходит с материалом – растягивается он или сжимается в данном направлении, и поэтому ясно, какие параметры использовать в определяющих соотношениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пахомов Б.М. Условие пластического течения, включающее коэффициент Пуассона //Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». 2014. № 2. С. 15-27.
2. Пахомов Б.М. Применение теории собственных напряжений к описанию нелинейного деформирования разносопротивляющихся материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». 2015. № 2 (101). С. 91-106
3. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
4. Саркисян М.С. О соотношениях теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию // Известия АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 87-94.

Сведения об авторе

Пахомов Борис Максимович – к.т.н., доцент кафедры космических аппаратов и ракетносителей МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1, **e-mail:** pahomovb@bmstu.ru).

ВЗАИМОСВЯЗЬ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АРМИРОВАННЫХ ПОЛИМЕРОВ ДЛЯ 3D-ПЕЧАТИ

Пирогова Ю.В., Ташкинов М.А.

В работе проведено численное исследование влияния микроструктурных параметров на механические свойства композитов на основе акрилонитрил-бутадиен-стирола (ABS), армированных короткими углеродными (CF), стеклянными (GF) и базальтовыми (BF) волокнами, полученных методом аддитивного производства. Данные о внутреннем расположении коротких волокон в полимере получены с помощью компьютерной микротомографии образцов филамента и представлены в виде статистических распределений длины и угла ориентации. Вариация морфометрических характеристик осуществляется путем изменения параметров статистических распределений. Для исследования влияния морфологии волокна на механическое поведение композита построены трехмерные элементарные объемы с учетом исследуемых вариаций. Анализ полученных конечно-элементных моделей проведен на основе оценки эффективного модуля упругости, анизотропии структурных свойств и распределении максимальных главных напряжений в матрице композита. Показано, что контроль микроструктурного расположения коротких волокон позволяет значительно повысить модуль упругости композита (до 68%).

1. Армирование полимерных филаментов короткими волокнами позволяет создавать 3D-печатные изделия с улучшенными механическими свойствами без существенных изменений в процессе аддитивного производства [1, 3]. На механические свойства таких композитов существенно влияют объемная доля волокон, их ориентация и технологические параметры. Современные методы позволяют достаточно точно определить внутреннюю архитектуру двухфазных материалов с помощью ряда неразрушающих методик [2]. Например, микрокомпьютерная томография позволяет получить представление о пустотах, вариациях распределения и распределении различных фаз внутри материала. Однако большинство существующих численных моделей сосредоточены на осредненном поведении [4], а не на влиянии микроструктурной случайности на эксплуатационные характеристики. Важно оценить необходимость контроля таких характеристик, как объемное содержание волокон, длина и ориентация коротких волокон при производстве армированных нитей.

Целью данного исследования является изучение влияния варьирования микроструктуры композита из ABS, армированного коротким волокном, на эффективные физико-механические свойства с использованием численного моделирования и инструментов статистического анализа.

2. Исследование влияния параметров микроструктуры проводилось численно на основе анализа представительных объемов армированных материалов. В рамках исследования длина l и ориентация θ (Рисунок 1) нового волокна определялись на основе реализации случайной переменной по заданному распределению. Расположение волокон в образцах соответствует равномерному закону распределения. Рассматриваемые волокна имели цилиндрическую форму и не пересекались друг с другом.

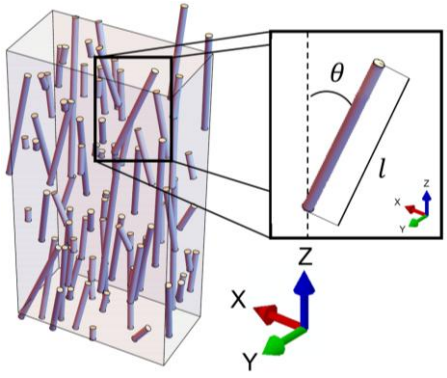
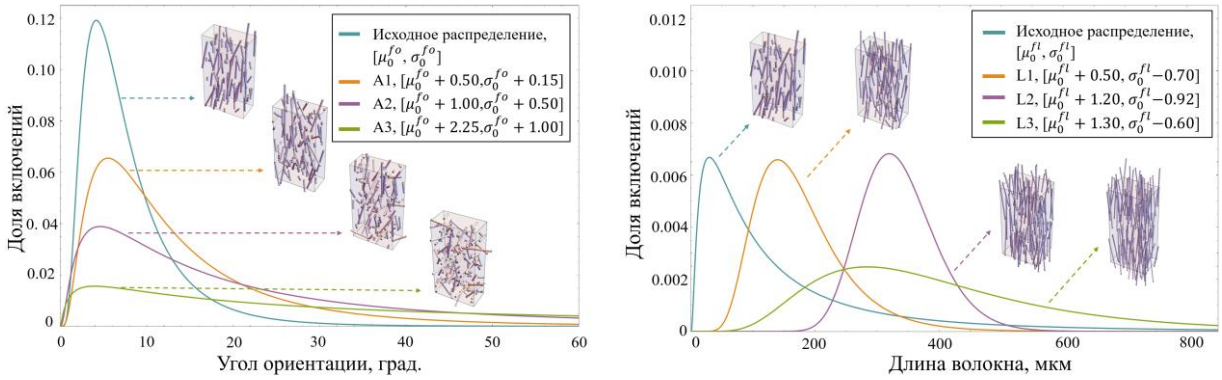


Рисунок 1 – Основные геометрические параметры включений

Модели структур, созданные в соответствии с логарифмическим законом распределения, полученным по данным томографии, далее обозначены исходными моделями. Для анализа влияния изменения геометрических параметров композитов на механический отклик были рассмотрены модели с измененной длиной и ориентацией волокон. Варьирование геометриче-

ских параметров осуществлялось путем изменения параметров логнормального распределения. Распределения ориентации были выбраны таким образом, чтобы каждая последующая вариация увеличивала не только диапазон значений угла ориентации, но и долю часто встречающихся значений в модели (Рисунок 2а). Изменение длины волокна было выбрано на основе изменения параметров распределения, при этом относительное стандартное отклонение оставалось в пределах одной и той же вариации для разных материалов (Рисунок 2б).



(а) (б)

Рисунок 2 - Графики распределения и соответствующие модели с измененными параметрами распределения (а) угла ориентации и (б) длины волокон композита ABS+CF

Материал как матрицы, так и всех типов волокон считался изотропным. Для расчета эффективных свойств к верхней поверхности моделей прикладывалась растягивающая нагрузка, равная 1 % от деформации.

3. Верификация численного моделирования проводилась на основе эффективного модуля упругости. Было проведено сравнение между экспериментальными значениями, полученными в результате серии испытаний, и численными значениями, полученными на основе оригинальных моделей композитов. Расхождение между экспериментальными и численными результатами для эффективного модуля упругости остается в пределах 10 %. Полученные численные модели адекватно отражают реальное механическое поведение композитных материалов, что обосновывает их применение в дальнейших исследованиях.

Армирование короткими волокнами увеличило эффективные свойства чистого материала ABS на 39.19% при армировании базальтовым волокном, на 40.31% при армировании стекловолокном и на 66.36% при армировании углеродным волокном. Образцы с измененным распределением ориентации волокон показали среднее снижение эффективного модуля упругости на 16%. Однако модули упругости материала все равно увеличились по сравнению с модулями упругости ABS без волокон. Значительное снижение эффективных модулей упругости наблюдалось в структуре с распределением угла ориентации типа A3, так как волокна в матрице занимали положение, близкое к ортогональному относительно приложенной нагрузки. Модель ABS+CF с распределением угла ориентации A3 продемонстрировала значительное снижение эффективного модуля упругости, на 39.7 % по сравнению с исходной моделью.

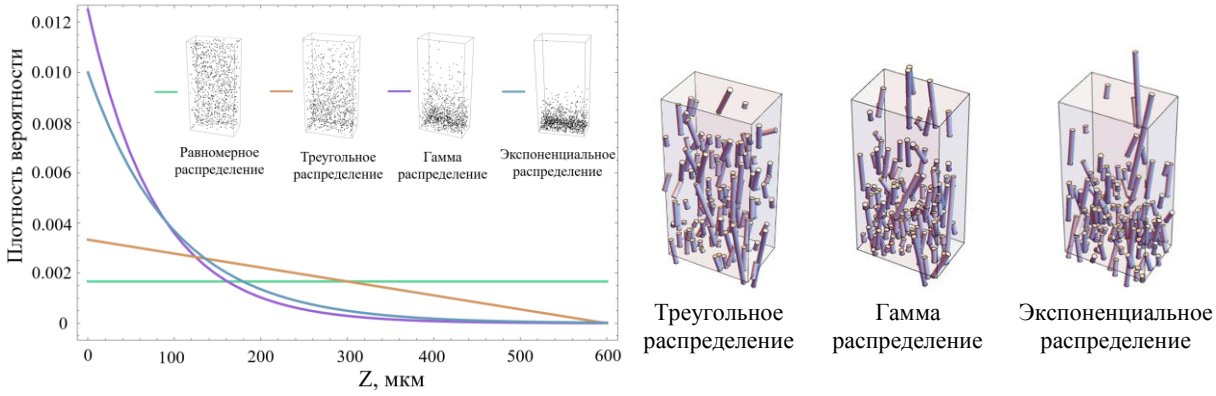
Значения эффективных модулей упругости, полученные для материалов с измененным распределением длин волокон, увеличились по сравнению с теми, которые соответствовали исходной модели. В структуре ABS+CF с распределением длин волокон L3 наблюдалось увеличение модуля упругости на 35.4 %. Однако такое же распределение для ABS+GF дало меньший эффект (увеличение на 17.2 %).

Графики распределения максимальных главных напряжений для моделей композитов демонстрируют нормальное распределение. Напряжения в структуре распределены равномерно, что говорит о малом количестве концентраторов напряжений и повышении прочности композита. Изменение распределения углов ориентации волокон не влияет на характер распределения напряжений. Для всех рассмотренных материалов графики распределения напряжений моделей типа A3, как правило, располагаются выше, чем у моделей других типов распреде-

лений, что указывает на преимущество расширения диапазона углов ориентации волокон в структуре с точки зрения прочности в данном направлении нагружения. В композитах с углеродными волокнами распределение максимальных главных напряжений наиболее чувствительно к изменениям ориентации волокон. У данных моделей наблюдалось усиление композитной структуры, соответствующее увеличению диапазона угла ориентации волокон.

В отличие от угла ориентации волокон, распределение длины волокон в композите оказало заметное влияние на механический отклик структур. Изменение распределения длины волокон повлияло на распределение максимальных главных напряжений для моделей ABS+CF и ABS+BF. Для обоих материалов увеличение длины волокна привело к смещению пика распределения вероятностей в сторону меньших значений напряжения. В отличие от других моделей, общее напряженное состояние в композитной структуре ABS+GF практически не изменяется при исследованных изменениях длины армирующих волокон. Для модели материала ABS+BF каждое изменение в распределении длины волокон характеризуется увеличением диапазона преобладающих значений напряжений.

4. Хаотичное расположение волокон может привести к изменению объемной доли на разных участках нити. В то время как скопление волокон может усилить структуру, истончение матрицы между волокнами приводит к локальной концентрации напряжений и возможному разрушению. Для изучения влияния этого фактора, помимо равномерного распределения положения волокон, были рассмотрены три других закона распределения: треугольный, гамма и экспоненциальный (Рисунок 3а). Для каждого материала были созданы модели с таким градиентным расположением волокон внутри элементарной ячейки (Рисунок 3б).



(a) (b)

Рисунок 3 – (а) Законы распределения расположения волокон в представительных объемах и (б) пример моделей, полученных для ABS+BF

В большинстве случаев градиентная концентрация волокон не оказывала существенного влияния на эффективные модули упругости. Наибольшее различие между полученными параметрами модели с равномерным распределением волокон и градиентной модели наблюдалась для модели ABS+GF. В композитах ABS+CF и ABS+GF градиентное расположение волокон по гамма и экспоненциальному законам соответственно вызывает бимодальное распределение максимальных главных напряжений. При распределении коротких волокон в соответствии с экспоненциальным законом пик распределения напряжения в матрице всех исследуемых композитов смещается в сторону более высоких напряжений.

Для оценки локализации концентраторов напряжений каждая модель с градиентным распределением коротких волокон в элементарной ячейке была разделена на 5 секторов. В каждом секторе отмечалось максимальное встречающееся значение максимальных главных напряжений. Анализ результатов показал, что градиент распределения волокон не влияет на возникновение концентраторов напряжений. Также не было отмечено зависимости возникновения этих концентраторов от количества волокон, расположенных в той или иной части композита. Чаще

всего высокие напряжения возникают в тех областях, где два или более волокон находились в непосредственной близости друг от друга.

Эффективность армирования короткими волокнами сравнивалась со случаем армирования непрерывными волокнами в рамках одной и той же постановки механической задачи. Для каждого типа исследуемого армирующего материала были созданы соответствующие модели с непрерывными волокнами (Рисунок 4). Объемная доля и диаметр волокон в этих моделях равны значениям, полученным при томографии для каждого материала. Размеры элементарной ячейки соответствовали размерам элементарной ячейки исходных структур. Как и в моделях с короткими волокнами, непрерывные волокна были равномерно распределены в элементарном объеме.

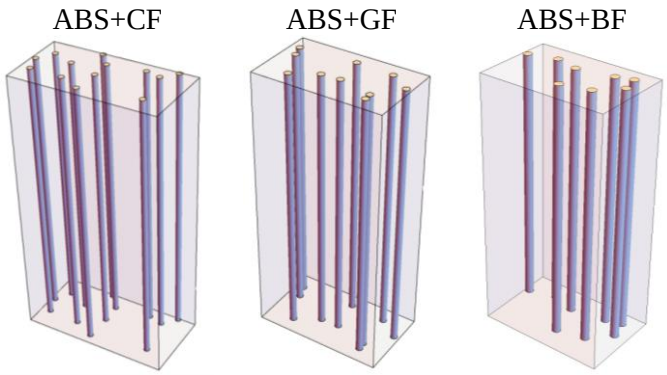


Рисунок 4 - Модели композита, армированного коротким волокном

Композиты с непрерывными волокнами демонстрировали большую устойчивость к нагрузкам по сравнению с композитами с короткими волокнами. Анализ механического поведения показал, что замена коротких волокон на непрерывные увеличила эффективный модуль упругости композита на 68 %f для CF, на 47 % для GF и на 59 % для BF. Несмотря на то, что количество непрерывных волокон было в 7-13 раз меньше, чем в моделях с короткими волокнами, использование непрерывных волокон значительно повысило прочность композита. Несмотря на преимущества механических свойств композитов с непрерывными волокнами, изготовление конструкций из таких материалов ограничено возможностями существующих технологий. Важным ограничением является также свобода проектирования, поскольку размещение непрерывных волокон в структуре является сложной задачей. Кроме того, следует отметить, что непрерывные волокна усиливают материал в определенном направлении, но не оказывают существенного влияния на свойства в других направлениях. В этом случае армирование матрицы случайно ориентированными короткими волокнами может не обеспечить столь высоких механических свойств, но в той или иной степени окажет усиливающий эффект во всех направлениях.

5. В данном исследовании рассмотрены композитные материалы с различной морфологией короткого волокна, включая длину, угол ориентации волокон и их градиентное распределение внутри структуры. Влияние этих параметров изучалось с точки зрения механического отклика, в частности, проведен анализ значений эффективного модуля упругости, коэффициента анизотропии и статистических распределений максимальных главных напряжений.

Установлено, что механические свойства полимеров, армированных короткими волокнами, в значительной степени зависят от длины волокон: при увеличении длины наблюдался рост эффективного модуля упругости в диапазоне от 27% до 39%, в зависимости от материала волокна. Расширение диапазона углов ориентации волокон приводит к снижению эффективного модуля упругости. Композиты с углами ориентации волокон от 0 до 90 градусов демонстрировали наименьшие значения эффективного модуля упругости среди рассмотренных образцов. Снижение, в зависимости от материала волокон, варьировалось от 18% до 40%.

Полученные закономерности расширяют понимание влияния конфигурации микроструктуры на механические свойства 3D-печатных композитов. Эти данные могут быть эффективно использованы как при производстве композитных материалов, так и при изготовлении изделий из них. Кроме того, информация о взаимосвязи микроструктуры и механических свойств может служить основой для создания новых композитных материалов с уникальными характеристиками, а также для адаптации свойств материалов под специфические эксплуатационные условия.

Исследование выполнено в Пермском национальном исследовательском политехническом университете при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10350).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahmadifar M. [и др.]. Additive manufacturing of polymer-based composites using fused filament fabrication (FFF): a Review // Applied Composite Materials. 2021. Т. 28. № 5. С. 1335–1380.
2. Lobov E. [и др.]. Effect of Short Carbon Fiber Reinforcement on Mechanical Properties of 3D-Printed Acrylonitrile Butadiene Styrene // Polymers. 2023. № 9 (15).
3. Park S. [и др.]. 3D printing of polymer composites: Materials, processes, and applications // Matter. 2022. № 1 (5). С. 43–76.
4. Somireddy M., Czekanski A. Computational modeling of constitutive behaviour of 3D printed composite structures // Journal of Materials Research and Technology. 2021. (11). С. 1710–1718.

Информация об авторах

Пирогова Юлия Вячеславовна – младший научный сотрудник НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
E-mail yu.pirogova@pstu.ru

Ташкинов Михаил Анатольевич – заведующий НИЛ «МБМУ», Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
E-mail m.tashkinov@pstu.ru

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ТОЛЩИНЫ ДИАМАНОВ И БОРНИТРАНОВ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА: МОЛЕКУЛЯРНАЯ ДИНАМИКА

Полякова П.В., Баимова Ю.А.

Диаман/борнитран – двухслойные структуры с sp^3-гибридизацией, состоящие из двух слоев графена/гексагонального нитрида бора, где одна половина атомов покрыта атомами водорода, а вторая связывает эти два слоя между собой ковалентной связью. Данные материалы очень перспективны для создания новых электронных и наномеханических устройств, что требует дополнительных исследований их физико-механических свойств. В настоящей работе методом молекулярной динамики исследована зависимость механических свойств диамана и борнитрана от толщины структуры. Рассмотрены две морфологии диамана и борнитрана с количеством слоев (L) от 2 до 50. Показано, что увеличение числа слоев диамана с 2 до 20 приводит к значительному увеличению констант упругости: модуль Юнга диамана 20L в два раза превышает модуль Юнга диамана 2L. В отличие от диамана, увеличение толщины борнитрана не приводит к значительному увеличению констант упругости: модуль Юнга борнитрана 50L на 5% больше 2L. Прочность диамана зависит от направления растяжения и толщины структуры: прочность увеличивается с ростом толщины материала, наибольшая прочность наблюдается при растяжении диамана вдоль направления зигзаг. Направление растяжения и толщина не влияют на прочность борнитрана.

Актуальность изучения новых материалов в настоящее время обусловлена необходимостью разработки качественно новых электронных, оптических и наномеханических устройств, а также переходом к инновационным отраслям промышленности. В этом контексте исследование новых двумерных материалов становится особенно важным, так как такие структуры обладают уникальными физическими и механическими свойствами, благодаря своей двумерной природе [1]. Помимо графена, в настоящее время акцент смещается на исследование новых двумерных структур, часть из которых уже получены экспериментально, например, диаман, борнитран [2, 3]. Среди выдающихся свойств диаманов и борнитранов можно отметить высокую электропроводность, прочность, химическую активность. В настоящей работе методом молекулярной динамики исследуется влияние толщины диаманов и борнитранов на их механические свойства.

На рисунке 1 представлена часть ячейки моделирования борнитрана в проекции на плоскость на *xy*. Рассматривались две стабильные конфигурации диамана и борнитрана: AA (а) и AB (б).

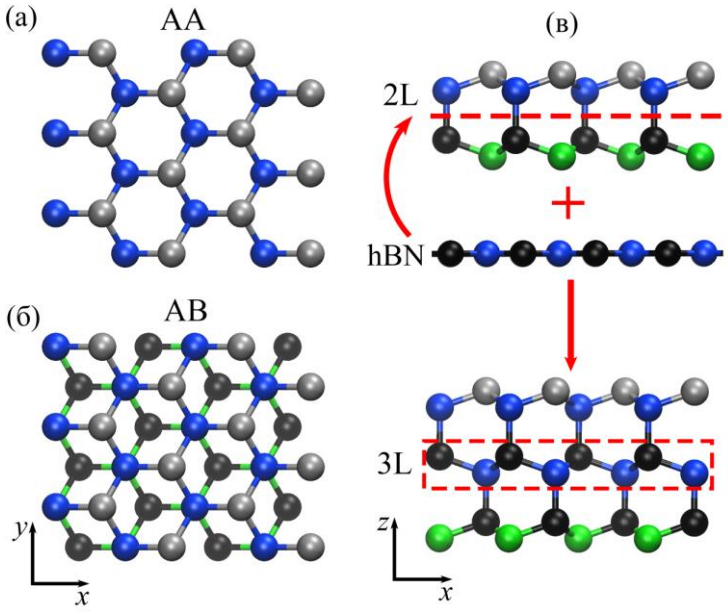


Рис. 1. Начальные структуры борнитрана AA (а) и AB (б) в проекции на плоскость *xy*. (в) Схема создания многослойных борнитранов.

Поскольку масса водорода относительно меньше массы бора и азота, водород был удален из элементарной ячейки, а к краевым атомам была добавлена масса водорода. Таким образом, на рис. 1 атомы азота и бора с атомными массами 14,0067 г/моль и 10,811 г/моль, соответственно, показаны синим и черным цветом, а краевые атомы – зеленым и серым.

В данной работе рассматриваются диаманы и борнитраны с числом слоев графена/ гексагонального нитрида бора (hBN) (L) от 2 до 50, где 2L – диаман/борнитран. На рисунке 1в представлена схема генерации многослойных диаманов и борнитранов. С помощью самописной программы создаются многослойные структуры путем добавления нового слоя hBN между двух слоев борнитрана 2L (красная пунктирная линия на рис. 1в). Методика расчета констант упругости двумерных материалов представлена в работе [3]. Для исследования влияния толщины многослойных диаманов и борнитранов на прочность одноосное растяжение прикладывается вдоль направления кресло и зигзаг.

Обычно, при расчетах констант упругости двумерных материалов принято пренебрегать толщиной структур и выражать константы упругости в Н/м. Как было показано ранее, константы упругости диамана в Н/м линейно возрастают с увеличением числа графеновых слоев в структуре [4]. Однако, в настоящей работе константы упругости выражаются в ГПа, для того чтобы сравнить многослойные диаманы и борнитраны с их трехмерными аналогами. Толщина одного слоя графена/hBN принимается равной 3.4 Å, толщина многослойных структур соответственно 3.4*L.

На рисунках 2, 3 представлены зависимости модуля Юнга и коэффициента Пуассона от толщины диамана и борнитрана, соответственно. Видно, что увеличение слоев в структуре диамана и борнитрана приводит к увеличению модуля Юнга. Однако, существует критическое значение количества слоев (20L) диамана/борнитрана, после достижения которого константы упругости меняются незначительно.

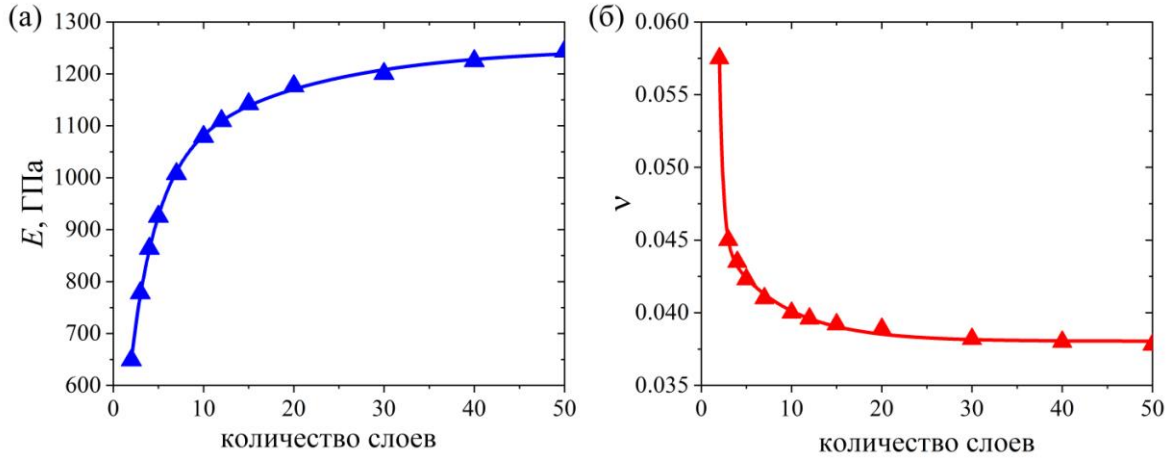


Рис. 2. Зависимость Модуля Юнга (а) и коэффициента Пуассона от количества слоев графена в диамане.

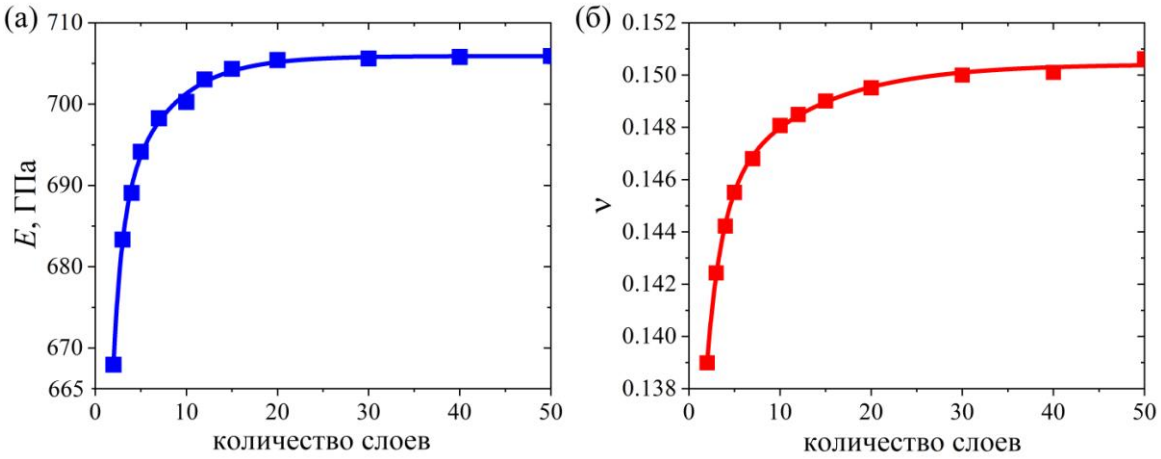


Рис. 3. Зависимость Модуля Юнга (а) и коэффициента Пуассона от количества слоев гексагонального нитрида бора в борнитране.

Установлено, что увеличение толщины диамана приводит к увеличению констант упругости c_{11}, c_{66}, модуля Юнга и предела прочности. Модуль Юнга диамана 20L в два раза превышает модуль Юнга диамана 2L. При увеличении слоев в диамане от 20 до 50 константы упругости изменяются незначительно. Диаман 50L имеет модуль Юнга (1243 ГПа), сравнимый с алмазом (1220 ГПа). Увеличение толщины диамана приводит к уменьшению коэффициента Пуассона. В отличие от диамана, для борнитрана направление растяжения и толщина не оказывают влияния на прочность при растяжении. Модуль Юнга борнитрана – 668 ГПа, что меньшем, чем у его трехмерного аналога вюрцитного нитрида бора (860 ГПа) [5] и двумерного hBN (800 ГПа) [6]. В отличие от диамана, увеличение толщины борнитрана не приводит к значительному росту констант упругости: модуль Юнга борнитрана 50L лишь на 5% выше по сравнению с 2L. Для борнитрана увеличение количества слоев приводит к росту коэффициента Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mbayachi V.B., Ndayiragije E., Sammani T., Taj S., Mbuta E.R. Graphene synthesis, characterization and its applications: A review // Results in Chemistry. 2021. Vol. 3. P. 100163.
2. Bakharev P.V., Huang M., Saxena M., Lee S.W., Joo S.H., Park S.O., Dong J., Camacho-Mojica D.C., Jin S., Kwon Y., Biswal M., Ding F., Kwak S.K., Lee Z., Ruoff R.S. Chemically induced transformation of chemical vapour deposition grown bilayer graphene into fluorinated single-layer diamond // Nature Nanotechnology. 2019. Vol. 15. P. 59-66.
3. Polyakova P.V., Murzaev R.T., D.S. Lisovenko, J.A. Baimova. Elastic Constants of Graphane, Graphyne, and Graphdiyne // Computational Materials Science. 2024. Vol. 244. P. 113171.
4. Kvashnin A.G., Avramov P.V., Kvashnin D.G., Chernozatonskii L.A., Sorokin P.B. Features of electronic, mechanical, and electromechanical properties of fluorinated diamond films of nanometer thickness // The Journal of Physical Chemistry C. 2017. Vol. 121. P. 28484-28489.
5. Deura M., Kutsukake K., Kentaro O., Ohno Y., Yonenaga I., Taniguchi T. Nanoindentation measurements of a highly oriented wurtzite-type boron nitride bulk crystal // Japanese Journal of Applied Physics. 2017. Vol. 56. P. 030301.
6. Boldrin L., Scarpa F., Chowdhury R., Adhikari S. Effective mechanical properties of hexagonal boron nitride nanosheets // Nanotechnology. 2011. Vol. 22. P. 505702.

Сведения об авторах:

Полякова Полина Викторовна – аспирант 2 г.о., Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа
E-mail polina.polyakowa@yandex.ru

Баимова Юлия Айдаровна – доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующая лабораторией «Физика и механика углеродных наноматериалов», Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа
E-mail julia.a.baimova@gmail.com

ВЛИЯНИЕ МОРФОЛОГИИ УГЛЕРОДНОГО АЭРОГЕЛЯ НА ПРОЧНОСТЬ: АТОМИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Рожнова Е.А., Баимова Ю.А.

Углеродные аэрогели представляют собой углеродные материалы с малым весом, большой прочностью и площадью свободной поверхности, что открывает перспективы их применения в таких областях как водородная энергетика, новые материалы, суперконденсаторы. Большое влияние на свойства аэрогелей оказывает их морфология. В данной работе рассмотрено четыре морфологии ячеек аэрогеля и показана зависимость прочности от структуры. При сжатии жесткость всех структур растет с увеличением приложенного напряжения. При растяжении графеновые аэрогели разной морфологии могут менять свое структурное состояние. Проанализировано деформационное поведение аэрогелей как при сжатии, так и при растяжении. Система с жесткими стенками ячеек демонстрирует наибольшую прочность на растяжение 160 ГПа. Наибольшая прочность и деформация разрушения наблюдаются у пластинчатого углеродного аэрогеля при растяжении вдоль направления, перпендикулярного расположению графеновых стенок. Это показывает, что механическими свойствами графеновых аэрогелей можно управлять, изменяя их морфологию.

Сборка двумерных графеновых листов для формирования новых трехмерных пористых структур, таких как графеновые аэрогели, представляет собой новую стратегию создания новых материалов. Унаследовав уникальные свойства графена и особую пористую структуру аэрогелей, этот тип материала демонстрирует сверхнизкую плотность, высокую пористость, большую удельную площадь поверхности, сжимаемость, упругость и высокую устойчивость. Подобные аэрогели могут применяться в таких приложениях, как датчики, конденсаторы, электромагнитные экраны, поглощение микроволн, изоляционные материалы или стать основой для новых композитов. Однако сложные условия применения предъявляют высокие требования к механическим свойствам и структурным характеристикам графенового аэрогеля.

На рисунке 1 представлен пример углеродного аэрогеля, где наноленты графена являются стенками шестигранников, здесь l - плечо структуры, плечо шестигранника. Форма ячеек и размер структурных элементов может варьироваться в широких пределах.

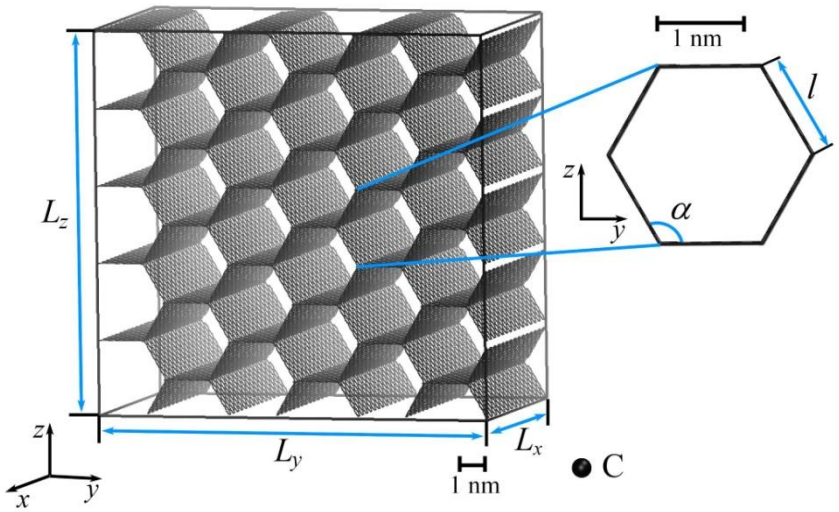


Рис. 1. Пример углеродного аэрогеля, где наноленты графена являются стенками шестигранников.

Значительная разница в их деформационном поведении и механических свойствах приводит к сложностям в их практической реализации. Проблему можно решить, управляя свойствами с помощью особой структуры графеновых ячеек. В настоящей работе метод молекулярной динамики используется для исследования механических свойств четырех различных морфологий графенового аэрогеля: сотовой (H), ячеистой (C), пластинчатой (L) и скомканного графена (R). Все структуры рассматриваются при одноосном сжатии и растяжении с

подробным анализом деформационного поведения. Установлено, что ячеистые структуры обладают высокой сжимаемостью и упругостью. Как при сжатии, так и при растяжении ячеистые структуры могут трансформироваться из одной морфологии в другую. Самая высокая прочность и деформация разрушения обнаружены для пластинчатого графенового аэрогеля при растяжении вдоль направления, нормально стенкам структуры.

На рисунке 2(а) представлены представлены кривые зависимости давления от плотности, полученные при сжатии углеродных аэрогелей вдоль оси *y* (сплошные линии) и оси *z* (пунктирные линии). Во всех случаях жесткость углеродного аэрогеля возрастает с увеличением его плотности из-за образования новых ван-дер-Ваальсовых связей (для H, L и C) и ковалентных связей между соседними графеновыми чешуйками (для R). При сжатии до плотности $\rho > 3.0$ г/см^3 происходила аморфизация углеродного аэрогеля.

На рисунке 2(б) представлены кривые зависимости напряжения от деформации для углеродных аэрогелей при растяжении. На кривых напряжение-деформация наблюдаются упругий участок до $\varepsilon = 0.7$ для пластинчатой, до $\varepsilon = 0.35$ для сотовой, до $\varepsilon = 0.1$ для ячеистой структуры. Максимальный предел прочности при растяжении составляет 160 ГПа.

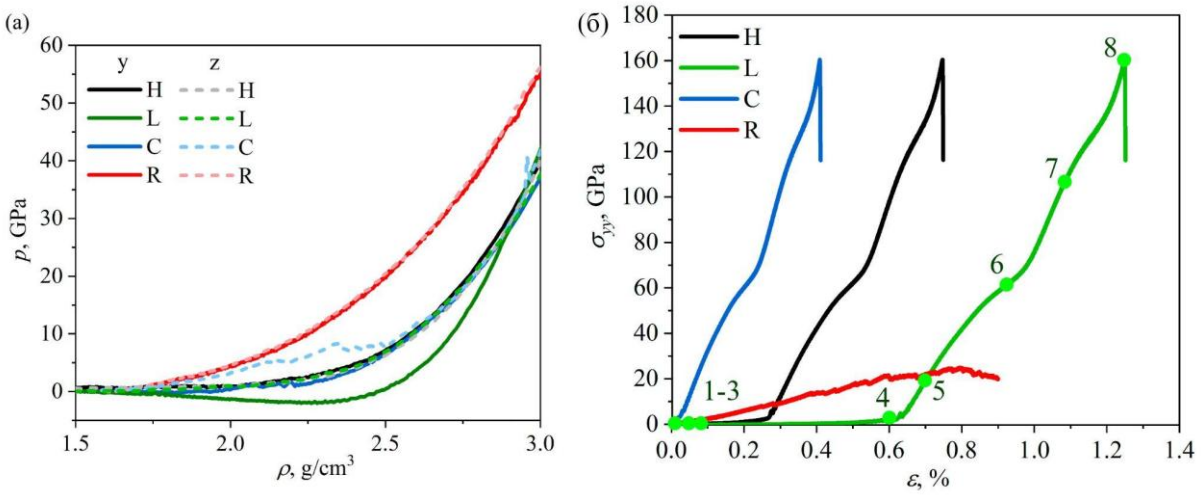


Рис. 2. (а) Кривые зависимости давления от плотности при гидростатическом сжатии по осям *y* (сплошные линии) и *z* (пунктирные линии). (б) Кривые зависимости напряжения от деформации при одноосном растяжении. Основные точки для пластинчатого (L) углеродного аэрогеля обозначены точками и цифрами 1-8.

На рисунке 3 показано напряжение на атом σ_{yy} при растяжении вдоль оси *y* пластинчатого аэрогеля (L), поскольку все структурные изменения могут быть показаны на основе структуры пластинчатого углеродного аэрогеля (соответствующая деформация отмечена точками на кривой напряжение-деформация). Сначала прямоугольные ячейки начинают трансформироваться в шестиугольные (то есть в H). Колебание стенок шестиугольников происходило до $\varepsilon = 0.5$: некоторые из них поворачивались (L2), некоторые раскрывались (L3), при этом их форма непрерывно менялась. Наконец, все ячейки преобразуются в шестиугольники (L3) и начинают разрушаться при дальнейшем растяжении (L4). Деформация в основном определяется растяжением стенок ячеек вдоль направления растяжения. Анализ межатомных связей внутри базисной плоскости графеновых стенок показал, что для стенок, расположенных вдоль оси *x*, параметры решетки оставались практически неизменными до L5. Точка L6 - это предкритическое напряжение, когда все графеновые стенки напряжены. Разрушение произошло на одной из графеновых стенок.

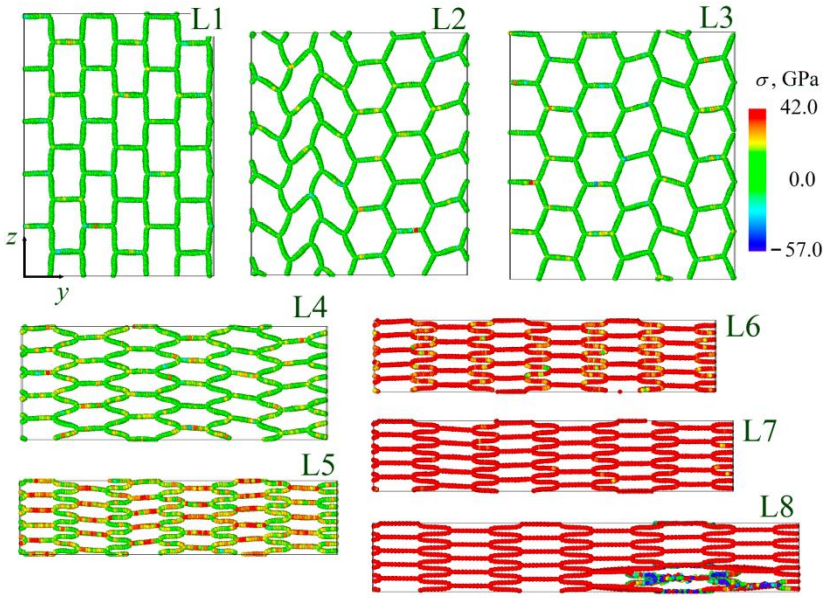


Рис. 3. Напряжение на атом σ_{yy} при растяжении вдоль оси *y* для пластинчатого (L) углеродного аэрогеля. Цифры соответствует цифрам на кривых напряжение-деформация на рисунке 2.

Установлено, что ячеистые структуры обладают вымокой сжимаемостью и эластичностью. Как при сжатии, так и при растяжении ячеистые структуры могут трансформироваться из одной в другую, путем управления направлением сжатия/растяжения. Наибольшая прочность и деформация разрушения наблюдаются у пластинчатого углеродного аэрогеля при растяжении вдоль направления, перпендикулярного расположению графеновых стенок. Это показывает, что механическими свойствами графеновых аэрогелей можно управлять, улучшая структурную морфологию. Подобные углеродные сетки могут служить основой для создания новых композитов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baimova J.A., Shcherbinin S.A. Strength and deformation behavior of graphene aerogel of different morphologies. Materials. vol. 16, 2023..
2. Yang Z., Hu Q., Wang L., et al. Recent advances in the synthesis and application of graphene aerogel and silica aerogel for environment and energy storage: A review. Journal of Environmental Management. vol. 377, 2025.
3. Rozhnova E., Baimova J. Morphology of Graphene Aerogel as the Key Factor: Mechanical Properties Under Tension and Compression. Gels. vol. 11. 2024.
4. Trembecka-Wójciga K., Sobczak J. J., Sobczak N. A comprehensive review of graphene-based aerogels for biomedical applications. The impact of synthesis parameters onto material microstructure and porosity. Archives of Civil and Mechanical Engineering. vol. 23, 2023.
5. Polyakova, P.V., Baimova J.A. Mechanical Properties of Graphene Networks under Compression: A Molecular Dynamics Simulation. International Journal of Molecular Sciences. vol. 24, 2023.

Сведения об авторах:

Рожнова Елизавета Андреевна - магистрант 1 г.о., Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, E-mail rozhnova.elizavetaa@mail.ru

Баимова Юлия Айдаровна – доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующая лабораторией «Физика и механика углеродных наноматериалов», Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа, E-mail julia.a.baimova@gmail.com

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОГО ШТАМПА, СЦЕПЛЕННОГО СО СОСТАВНЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ С МЕЖФАЗНЫМ КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Саакян А.В., Григорян А.А.

Рассматривается осесимметричная контактная задача о гармонических крутильных колебаниях круглой жесткой шайбы, скрепленной с упругим составным полупространством, которое в плоскости раздела материалов содержит коаксиальное с шайбой жесткое тонкое включение, сцепленное с основанием. Задача решается методом механических квадратур, основанным на квадратурных формулах для интегралов с ядром в виде разрывного интеграла Вебера-Шафхейтлина.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть имеем составное полупространство, составленное из разнородных слоя толщины H и полупространства и имеющее на плоскости раздела материалов сцепленное с ним круглое тонкое жесткое включение с радиусом b. Введем цилиндрическую систему координат (r,φ,z) с осью Oz, совпадающей с осью Oz декартовой системы координат $Oxyz$, и общим началом на свободной поверхности составного полупространства над центром жесткого включения (Рис.1).

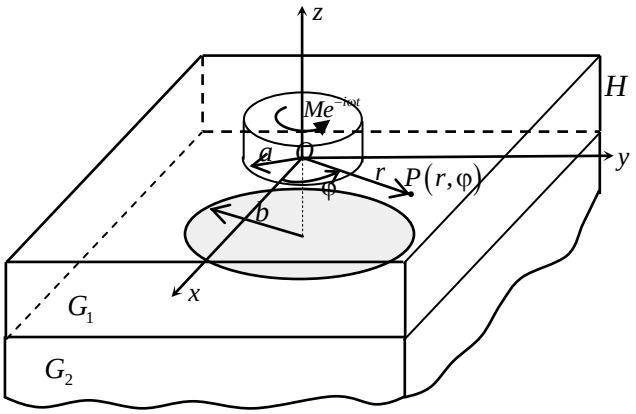


Рис.1 Схематическое представление задачи

Пусть, далее, на своей верхней грани $z=0$ слой сцеплен с абсолютно жесткой круговой шайбой радиуса a с центром на оси Oz, к которой приложен скручивающий вокруг оси Oz против часовой стрелки гармонически изменяющийся во времени момент $Me^{-i\omega t}$. Требуется определить касательные контактные напряжения под шайбой, скачок контактных напряжений на включении, а также углы поворота шайбы и включения.

Рассматриваем установившиеся крутильные колебания с частотой ω, т.е. полагаем, что все компоненты напряженно-деформированного состояния зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$. Учтя в инерционном члене этот множитель, далее его опустим, и будем иметь дело с амплитудными значениями всех величин, сохраняя их обозначения.

Далее, решение описанной выше контактной задачи сведем к решению ИУ. С этой целью предварительно построим решение следующих вспомогательных граничных задач для слоя и полупространства:

$$\frac{\partial^2 u_{j\varphi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{j\varphi}}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_{j\varphi}}{\partial z^2}-\frac{u_{j\varphi}}{r}+\left(\frac{\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2 u_{j\varphi}=0 \qquad \left(0<r<\infty;\ \begin{matrix}-H<z<0\,(j=1)\\ -\infty<z<-H\,(j=2)\end{matrix}\right)$$

$$\tau_{1z\varphi}\Big|_{z=H} = G_1 \frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial z}\Big|_{z=0} = \tau(r) \qquad (0 < r < \infty)$$

$$u_{1\varphi}\Big|_{z=-H+0} = u_{2\varphi}\Big|_{z=-H-0}; \qquad \tau_{1z\varphi}\Big|_{z=-H+0} - \tau_{2z\varphi}\Big|_{z=-H-0} = g(r) \quad (0 < r < \infty) \tag{1.1}$$

$$u_{2\varphi}, \tau_{2z\varphi} \to 0, \qquad z \to -\infty$$

где $\tau(r)$ и $g(r)$ считаются известными функциями, $u_{j\varphi}\,(j=1,2)$ - перемещения в окружном направлении, $c_2^{(js)} = \sqrt{G_j/\rho_j}\,(j=1,2)$ - скорости упругих поперечных волн в слое и полупространстве, G_j и $\rho_j\,(j=1,2)$ - модули сдвига и плотности материалов слоя и полупространства.

При помощи интегрального преобразования Ханкеля решение граничных задач (1.1) получим в виде:

$$u_{j\varphi}(r,z) = \frac{1}{G_1}\int_0^\infty K_{jg}(s,r,z)\,g(s)sds + \frac{1}{G_1}\int_0^\infty K_{j\tau}(s,r,z)\,\tau(s)sds \tag{1.2}$$

где

$$K_{1g}(s,r,z) = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\gamma_1 z}{\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_1 H + G_*\gamma_2 \operatorname{ch}\gamma_1 H}\lambda J_1(\lambda r)\,J_1(\lambda s)\,d\lambda\,,$$

$$K_{1\tau}(s,r,z) = \int_0^\infty \frac{\left(\operatorname{ch}\gamma_1(z+H) + G_*\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}\operatorname{sh}\gamma_1(z+H)\right)}{\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_1 H + G_*\gamma_2 \operatorname{ch}\gamma_1 H}\lambda J_1(\lambda r)\,J_1(\lambda s)\,d\lambda\,, \tag{1.3}$$

$$K_{2g}(s,r,z) = -\int_0^\infty \frac{e^{\gamma_2(z+H)}\operatorname{ch}\gamma_1 H}{\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_1 H + G_*\gamma_2 \operatorname{ch}\gamma_1 H}\lambda J_1(\lambda r)\,J_1(\lambda s)\,d\lambda\,,$$

$$K_{2\tau}(s,r,z) = \int_0^\infty \frac{e^{\gamma_2(z+H)}}{\gamma_1 \operatorname{sh}\gamma_1 H + G_*\gamma_2 \operatorname{ch}\gamma_1 H}\lambda J_1(\lambda r)\,J_1(\lambda s)\,d\lambda\,,$$

$$G_* = \frac{G_2}{G_1} \quad \text{и} \quad \gamma_j = \gamma_j(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\lambda^2 - \left(\dfrac{\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2} & \lambda \ge \dfrac{\omega}{c_2^{(j)}} \\ -i\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2 - \lambda^2} & 0 \le \lambda < \dfrac{\omega}{c_2^{(j)}} \end{cases}$$

Исходя из постановки задачи, функции $\tau(r)$ и $g(r)$ являются финитными функциями, определенными на $(0,a)$ и $(0,b)$ соответственно. Удовлетворяя условиям контакта шайбы со слоем и включения с полупространством, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{G_1}\int_0^a K_{1\tau}(s,r,0)\,\tau(s)sds + \frac{1}{G_1}\int_0^b K_{1g}(s,r,0)\,g(s)sds = \delta_1 r \qquad (0 < r < a) \\ &\frac{1}{G_1}\int_0^a K_{2\tau}(s,r,-H)\,\tau(s)sds + \frac{1}{G_1}\int_0^b K_{2g}(s,r,-H)\,g(s)sds = \delta_2 r \qquad (0 < r < b) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где δ_1 и δ_2 - углы поворота шайбы и включения соответственно.

К системе уравнений (1.4) следует добавить моментные условия динамического равновесия шайбы и включения:

$$\int_0^a \tau(r) r^2 dr = \frac{M}{2\pi}\,, \qquad \int_0^b g(r) r^2 dr = 0\,. \tag{1.5}$$

2. Алгоритм решения определяющей системы уравнений. Сведем интервалы интегрирования к интервалу $(0,1)$ и перейдем к безразмерным величинам, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 K_{11}(\xi,\eta)\varphi_1(\xi)\xi d\xi + b_*^2\int_0^1 K_{12}(\xi,\eta)\varphi_2(\xi)\xi d\xi = \delta_1\eta \qquad (0<\eta<1)\\
&\int_0^1 K_{21}(\xi,\eta)\varphi_1(\xi)\xi d\xi + b_*^2\int_0^1 K_{22}(\xi,\eta)\varphi_2(\xi)\xi d\xi = \delta_2 b_*^2\eta \qquad (0<\eta<1)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\xi) = \frac{\tau(a\xi)}{G_1}\,, \quad K_{11}(\xi,\eta) = aK_\tau(a\xi,a\eta,0)\,, \quad K_{21}(\xi,\eta) = bK_\tau(a\xi,b\eta,-H),\\
&\varphi_2(\xi) = \frac{g(b\xi)}{G_1}\,, \quad K_{12}(\xi,\eta) = aK_g(b\xi,a\eta,0)\,, \quad K_{22}(\xi,\eta) = bK_g(b\xi,b\eta,-H),\\
&\gamma_{aj} = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{a\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2}\,,\ \gamma_{bj} = \sqrt{\alpha^2 - \left(b_*\frac{a\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2}\,,\ H_* = \frac{H}{a},\ \ b_* = \frac{b}{a}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Выделив в ядрах сингулярные части, систему уравнений (2.1) окончательно запишем в виде:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[L_1(\xi,\eta) + R_{11}(\xi,\eta)\right]\varphi_1(\xi)\xi d\xi + b_*^2\int_0^1 K_{12}(\xi,\eta)\varphi_2(\xi)\xi d\xi = \delta_1\eta \qquad (0<\eta<1)\\
&\int_0^1 K_{21}(\xi,\eta)\varphi_1(\xi)\xi d\xi - \frac{b_*^2}{1+G_*}\int_0^1 \left[L_1(\xi,\eta) + R_{22}(\xi,\eta)\right]\varphi_2(\xi)\xi d\xi = \delta_2 b_*^2\eta \quad (0<\eta<1)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $L_1(\xi,\eta)$ - следующий разрывной интеграл Вебера-Шафхейтлина

$$L_1(\xi,\eta) = \int_0^\infty J_1(\alpha\eta)J_1(\alpha\xi)d\alpha\,,$$

а остальные ядра регулярные и определяются следующими интегралами:

$$R_{11}(\xi,\eta) = \int_0^\infty \left[\frac{1+G_*\dfrac{\gamma_{a2}}{\gamma_{a1}}\operatorname{th}\gamma_{a1}H_*}{\gamma_{a1}\operatorname{th}\gamma_{a1}H_* + G_*\gamma_{a2}}\alpha - 1\right] J_1(\alpha\eta)J_1(\alpha\xi)d\alpha,$$

$$K_{12}(\xi,\eta) = -\int_0^\infty \frac{1}{\gamma_{a1}\operatorname{sh}\gamma_{a1}H_* + G_*\gamma_{a2}\operatorname{ch}\gamma_{a1}H_*}\alpha J_1(\alpha\eta)J_1(\alpha b_*\xi)d\alpha,$$

$$R_{22}(\xi,\eta) = \int_0^\infty \left[\frac{1+G_*}{\gamma_{b1}\operatorname{th}\dfrac{\gamma_{b1}H_*}{b_*} + G_*\gamma_{b2}}\alpha - 1\right] J_1(\alpha\eta)J_1(\alpha\xi)d\alpha,$$

$$K_{21}(\xi,\eta)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\gamma_{b1}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\gamma_{b1}H_*}{b_*}+G_*\gamma_{b2}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\gamma_{b1}H_*}{b_*}}\alpha J_1(\alpha\eta)\,J_1\left(\alpha\frac{\xi}{b_*}\right)d\alpha\,.$$

Условия (1.5) примут вид:

$$\int_0^1\varphi_1(\xi)\xi^2d\xi=\frac{M}{2\pi G_1a^3}=M_*\,,\qquad \int_0^1\varphi_2(\xi)\xi^2d\xi=0\,. \tag{2.4}$$

Учитывая, что контактные напряжения под шайбой и скачок напряжений на включении на границе имеют корневую особенность, решение системы (2.3) - (2.4) будем искать в виде:

$$\varphi_k(\xi)=\frac{\varphi_{*k}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\qquad (k=1,2) \tag{2.5}$$

где $\varphi_{*k}(\xi)\ (k=1,2)$ - гладкие функции, ограниченные на отрезке $[0,1]$.

Воспользовавшись квадратурными формулами [1]

$$\int_0^1 L_1(r,\rho)\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}f(\rho)d\rho=\sum_{j=1}^n w_j f(x_j)T(r,j);$$

$$\int_0^1 Q(r,\rho)\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}f(\rho)d\rho=\sum_{j=1}^n w_j\frac{Q(r,x_j)f(x_j)}{x_j}; \tag{2.6}$$

$$\int_0^1\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}f(\rho)d\rho=\sum_{j=1}^n w_j f(x_j);$$

где натуральное число n есть порядок аппроксимации, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ - многочлен Якоби, $Q(r,\rho)$ - любое из регулярных ядер,

$$w_j=\frac{2(4n+1)}{(2n+3)(4n^2-1)x_jP_{n-1}^{\left(2,\frac12\right)}(\xi_j)P_{n-1}^{\frac12}(x_j)},\qquad x_j=\sqrt{\frac{1-\xi_j}{2}},\qquad P_n^{\left(1,-\frac12\right)}(\xi_j)=0,$$

$$T(r,j)=r\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(4m+3)}{2}\left(\frac{\Gamma\left(m+\frac32\right)}{\Gamma(m+2)}\right)^2P_m^{\frac12}(x_j)P_m^{\frac12}(r)\,,\qquad P_m^{\frac12}(r)=P_m^{\left(1,-\frac12\right)}(1-2r^2),$$

систему уравнений (2.3) и условия (2.4) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n w_j\varphi_{*1}(x_j)\left[T(\eta,j)+\frac{1}{x_j}R_{11}(x_j,\eta)\right]+b_*^2\sum_{j=1}^n w_j\varphi_{*2}(x_j)\frac{K_{12}(x_j,\eta)}{x_j}=\delta_1\eta$$

$$\sum_{j=1}^n w_j\varphi_{*1}(x_j)\frac{K_{21}(x_j,\eta)}{x_j}-\frac{b_*^2}{1+G_*}\sum_{j=1}^n w_j\varphi_{*2}(x_j)\left[T(\eta,j)+\frac{1+G_*}{x_j}R_{22}(x_j,\eta)\right]=\delta_2b_*^2\eta \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^n w_j\varphi_{*1}(x_j)=M_*\,;\qquad \sum_{j=1}^n w_j\varphi_{*2}(x_j)=0$$

Выбрав в качестве точек коллокации сами узлы квадратурной формулы, получим следующую замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно $2n$ значений $\varphi_{*k}\left(x_j\right)\left(k=1,2;\ j=1,n\right)$ и углов поворота шайбы δ_1 и включения δ_2:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j\varphi_{*1}\left(x_j\right)\left[T\left(x_k,j\right)+\frac{1}{x_j}R_{11}\left(x_j,x_k\right)\right]+b_*^2\sum_{j=1}^{n} w_j\varphi_{*2}\left(x_j\right)\frac{K_{12}\left(x_j,x_k\right)}{x_j}-\delta_1 x_k=0 \qquad \left(k=1,n\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j\varphi_{*1}\left(x_j\right)\frac{K_{21}\left(x_j,x_k\right)}{x_j}-\frac{b_*^2}{1+G_*}\sum_{j=1}^{n} w_j\varphi_{*2}\left(x_j\right)\left[T\left(x_k,j\right)+\frac{1+G_*}{x_j}R_{22}\left(x_j,x_k\right)\right]-\delta_2 b_*^2 x_k=0 \qquad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j\varphi_{*1}\left(x_j\right)=M_*\ ; \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j\varphi_{*2}\left(x_j\right)=0.$$

После определения значений $\varphi_{*k}\left(x_j\right)\left(k=1,2;\ j=1,n\right)$, искомые функции $\varphi_k\left(r\right)\left(k=1,2\right)$ можно представить формулами:

$$\varphi_k\left(r\right)=-\frac{2r}{\sqrt{1-r^2}\left(2n+3\right)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi_{*k}\left(x_j\right)}{P_{n-1}^{\left(2,\frac{1}{2}\right)}\left(1-2x_j{}^2\right)}\frac{P_n^{\frac{1}{2}}\left(r\right)}{x_j\left(r^2-x_j{}^2\right)} \qquad \left(k=1,2\right) \qquad (2.9)$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 25RG-2C221.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hakobyan V.V., Gasparyan A.V., Sahakyan A.V. Mechanical quadratures for solution of the problem of torsion of an inhomogeneously ageing viscoelastic layer by a round rigid washer. In Book “Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications”, Ed. Holm Altenbach, Advanced Structured Materials, vol 223. 2025, Springer, Chapter 36, pp. 609-620.

Сведения об авторах

Саакян Аветик Вараздатович - доктор физ.-мат. наук, зав. отделом, Институт механики НАН Армении, Тел.: (37494) 579348, E-mail: avetik.sahakyan@sci.am

Григорян Арам Арутюнович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, E-mail: grigoryan.aram.4@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ СЛОЕ

Савельева И.Ю., Соколов А.А., Евсеева М.М.

В работе рассмотрена задача термоупругости с учетом пространственной нелокальности в сплошном кольцевом слое из однородного изотропного материала при осесимметричном нагружении с силовыми сжимающими воздействиями и заданным температурным полем. Установлены основные особенности нелокальных решений на криволинейной геометрии.

Введение

Актуальность исследований термомеханических характеристик обусловлена их значением для широкого круга задач — от проектирования элементов микро- и наноэлектромеханических систем (MEMS/NEMS) [1] до моделирования конструкционных и функциональных материалов в промышленности, в т.ч. аэрокосмической [2]. В этих отраслях востребованным направлением является моделирование композитов [2,3], и в особенности нанокомпозитов, которые в последние годы привлекают все больше внимания благодаря своим уникальным эксплуатационным свойствам и гибкой структуре, настраиваемой путем интеграции различного рода включений в матрицу материала. Для моделирования включений в виде нанотрубок и нанопокрытий удобно использовать кольцевые слои.

В ряде отраслей характеристики таких материалов необходимо учитывать с точки зрения их чувствительности к внутренней структуре, а также к соотношениям масштабов длины и времени, несопоставимым в рамках классических моделей механики сплошной среды [4]. Подобные проблемы физико-математического моделирования привели к созданию различных подходов для анализа размерных эффектов, один из которых заключается в учете пространственной нелокальности — дальнодействующих взаимодействий в среде [4,5].

1. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричный сплошной кольцевой слой (рис. 1), выполненный из однородного изотропного теплопроводящего линейно-термоупругого материала с коэффициентом теплопроводности $\lambda^{(T)}$, модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона ν и температурным коэффициентом линейного расширения $\alpha^{(T)}$. Область материала ограничена внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 соответственно, толщина слоя $h = R_2 - R_1$. На границах области заданы условия на температуру, а также приложены силовые нагрузки на сжатие в соответствии со схемой, представленной на рис. 1.

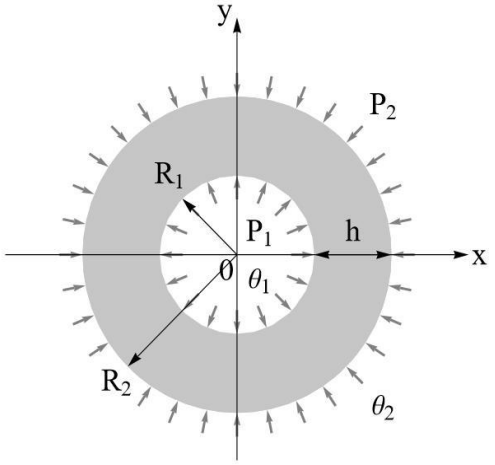


Рис. 1. Сплошной кольцевой слой

В замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ при отсутствии внутренних источников или стоков теплоты и сторонних сил уравнения несвязной стационарной задачи термоупругости имеют вид [6]:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} = 0,$$
$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial / \partial x_i \, \mathbf{e}_i$ — дифференциальный оператор набла; $\mathbf{e}_i$, $i = \overline{1,2}$ — единичные орты координатных осей; x_i, $i = \overline{1,2}$ — компоненты вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{q}$ — вектор плотности теплового потока; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензор напряжений.

Рассмотрим линейный интегральный нелокальный оператор [7]:

$$N\left[f(\mathbf{x}) \right] = p_1 f(\mathbf{x}) + p_2 \int\limits_{\Omega'(\mathbf{x}) \cap \Omega} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') \, d\Omega'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' \in \Omega'(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $f(\mathbf{x})$ — функция, заданная в области Ω и описывающая сохраняющуюся физическую субстанцию; $p_1 > 0$ и $p_2 \geq 0$ — весовые доли локальных и нелокальных составляющих соответственно, такие, что $p_1 + p_2 = 1$; $\Omega'(\mathbf{x})$ — область нелокального влияния, характеризуемая радиусом нелокальности r_{nl}; φ — нормированная положительная в области $\Omega'(\mathbf{x})$ функция нелокального влияния, обладающая свойством монотонного убывания относительно центра области $\Omega'(\mathbf{x})$. Оператор N задает регуляризованную модель, в которой среда представлена в виде комбинации из локальной и нелокальной фаз.

Учет пространственной нелокальности осуществим путем внедрения нелокального оператора в определяющие соотношения сплошной среды [5,7], т.е. модифицируем гипотезу Био — Фурье и закон Дюамеля — Неймана [6]:

$$\mathbf{q} = N\left[-\lambda^{(T)} \nabla_{\mathbf{x}} T \right],$$
$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = N\left[\hat{\mathbf{C}} \cdot\cdot \left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \alpha^{(T)} \hat{\mathbf{I}}_2 T \right) \right],$$

где $T = T(\mathbf{x})$ — температура; $\hat{\mathbf{C}}$ — тензор коэффициентов упругости; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — тензор малой деформации; $\hat{\mathbf{I}}_2$ — единичный тензор второго ранга. Для плоского напряженного состояния компоненты тензора коэффициентов упругости: $C_{ijkl} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \dfrac{1-\nu}{2}\left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \right]$, $i, j, k, l = \overline{1,2}$, где δ_{ij} — дельта Кронекера. Для малых деформаций справедливы кинематические соотношения Коши: $\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j = \overline{1,2}$, где u_i, $i = \overline{1,2}$ — компоненты вектора перемещений.

Обезразмерим основные расчетные параметры. Будем обозначать безразмерные величины теми же символами, что и размерные, но с тильдой:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} / R_2, \; \tilde{T} = T / (\theta_2 - \theta_1), \; \tilde{\lambda}^{(T)} = \lambda^{(T)} / \lambda^{(T)} = 1, \; \tilde{E} = E / \sigma_0, \; \tilde{\alpha}^{(T)} = (\theta_2 - \theta_1) \alpha^{(T)},$$

где σ_0 — нормирующий множитель для напряжений, подобранный так, чтобы обеспечить адекватное соотношение модуля Юнга и силовых нагружений в безразмерном виде. Остальные величины, фигурирующие в задаче, получим путем комбинации безразмерных параметров и так же будем обозначать соответствующими символами с тильдой.

Полная безразмерная постановка задачи с учетом уравнений (1) и граничных условий имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad \tilde{r}_0 \leq \tilde{r} \leq 1, \\ \tilde{T}(\tilde{r})\big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_0} = \gamma - 1, \; \tilde{T}(\tilde{r})\big|_{\tilde{r}=1} = \gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{\nabla} \cdot \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{r}_0 \leq \tilde{r} \leq 1, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}\big|_{\tilde{r}=\tilde{r}_0} = \tilde{\mathbf{P}}_1, \; \mathbf{n}_2 \cdot \hat{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}\big|_{\tilde{r}=1} = \tilde{\mathbf{P}}_2, \end{cases}$$

где $\tilde{r}$ — безразмерная радиальная координата; $\tilde{r}_0 = R_1/R_2$, $\gamma = \theta_2/(\theta_2 - \theta_1)$; n_1, n_2 — единичные векторы внешних нормалей к внутренней и внешней поверхностям кольцевого слоя.

2. Анализ результатов расчетов

Решения в классическом случае (при $p_1 = 1$) могут быть получены аналитически. Для осесимметричных нагружений $\gamma = \text{const}$, $\tilde{P}_1 = \text{const}$, $\tilde{P}_2 = \text{const}$ имеем:

$$\tilde{T}(\tilde{r}) = \gamma + \frac{\ln \tilde{r}}{\ln(1/\tilde{r}_0)}, \quad \tilde{q}_r(\tilde{r}) = -\frac{1}{\tilde{r}\ln(1/\tilde{r}_0)}, \quad \tilde{r}_0 \le \tilde{r} \le 1,$$

$$\tilde{u}_r = B\tilde{r}\left(-\frac{1}{2} + \ln\tilde{r}\right) + C_1\tilde{r} + \frac{C_2}{\tilde{r}}, \quad \tilde{r}_0 \le \tilde{r} \le 1,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = B\left(\frac{1}{2} + \ln\tilde{r}\right) + C_1 - \frac{C_2}{\tilde{r}^2}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\phi\phi} = B\left(-\frac{1}{2} + \ln\tilde{r}\right) + C_1 + \frac{C_2}{\tilde{r}^2}, \quad \tilde{r}_0 \le \tilde{r} \le 1,$$

$$\tilde{\sigma}_{rr} = \frac{\tilde{E}}{1-\nu^2}\left[(1+\nu)\left(B\ln\tilde{r} + C_1 - \tilde{\alpha}^{(T)}\tilde{T}(\tilde{r})\right) + (1-\nu)\left(\frac{B}{2} - \frac{C_2}{\tilde{r}^2}\right)\right], \quad \tilde{r}_0 \le \tilde{r} \le 1,$$

$$\tilde{\sigma}_{\phi\phi} = \frac{\tilde{E}}{1-\nu^2}\left[(1+\nu)\left(B\ln\tilde{r} + C_1 - \tilde{\alpha}^{(T)}\tilde{T}(\tilde{r})\right) - (1-\nu)\left(\frac{B}{2} - \frac{C_2}{\tilde{r}^2}\right)\right], \quad \tilde{r}_0 \le \tilde{r} \le 1,$$

где $B = (1+\nu)\tilde{\alpha}^{(T)}/(2\ln(1/\tilde{r}_0))$; C_1 и C_2 можно определить из граничных условий.

Нелокальные решения будем получать численно с использованием программного комплекса NonLocFEM [8], в котором реализован нелокальный метод конечных элементов. В силу симметричной постановки задачи и структуры оператора (2), исследуемые поля не зависят от угловой координаты, поэтому ограничимся анализом одномерных распределений величин в сечении кольцевого слоя. С анализом нелокальной температуры можно ознакомиться в работе [9], здесь же обсудим особенности поведения механических характеристик.

Расчеты выполнены при следующих фиксированных безразмерных параметрах: $\gamma = 2$, $\tilde{P}_1 = 0.05$, $\tilde{P}_2 = 0.01$, $\tilde{E} = 50$, $\nu = 0.25$, $\tilde{\alpha}^{(T)} = 2.5\cdot10^{-3}$, $p_1 = 0.5$, $\tilde{r}_{nl} = 0.125$.

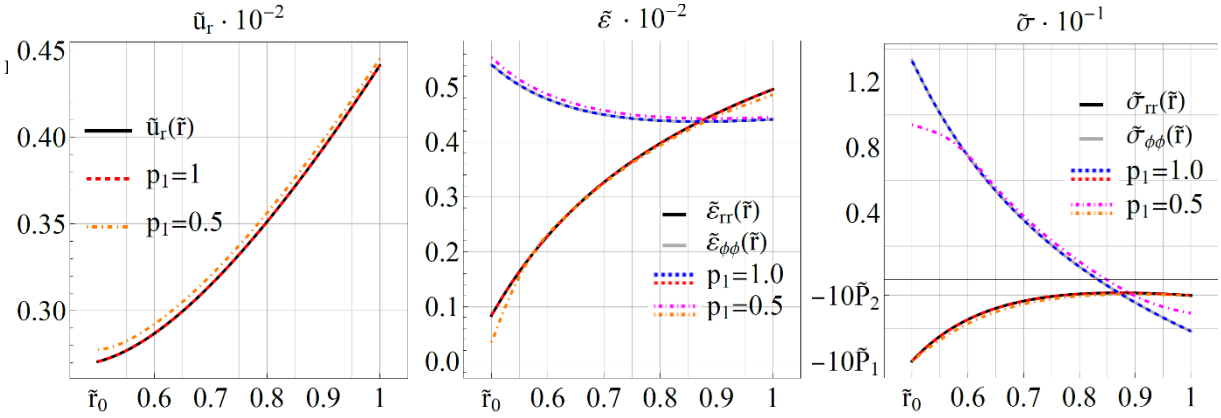


Рис. 2. Полученные в результате расчета графики распределения радиального перемещения, радиальных и окружных деформаций и напряжений при различных весовых параметрах p_1 в сравнении с аналитическими классическими решениями

Видно, что численный расчет при $p_1 = 1$ согласуется с классическим аналитическим решением, а при $p_1 = 0.5$ можно наблюдать отклонения, особенно существенные в окрестности внутреннего радиуса. При уменьшении доли локальной составляющей p_1 решение будет значительнее отклоняться от классического случая.

Изменим толщину слоя путем варьирования безразмерного внутреннего радиуса, оценим нормированные разности нелокальных и классических решений в виде: $\delta g = \dfrac{g^{NonLoc} - g^{Loc}}{\max\limits_{\tilde{r}\in[\tilde{r}_0,1]}\left|g^{Loc}\right|}$, где $g = g(\tilde{r})$ — анализируемая функция, далее зависящая от центрированной и нормированной координаты $\rho = \left(\tilde{r} - \tilde{r}_0\right)/\tilde{h},\ \rho \in [0,1]$.

На рис. 3 продемонстрированы нормированные разности нелокального и классического решений при различных толщинах слоя.

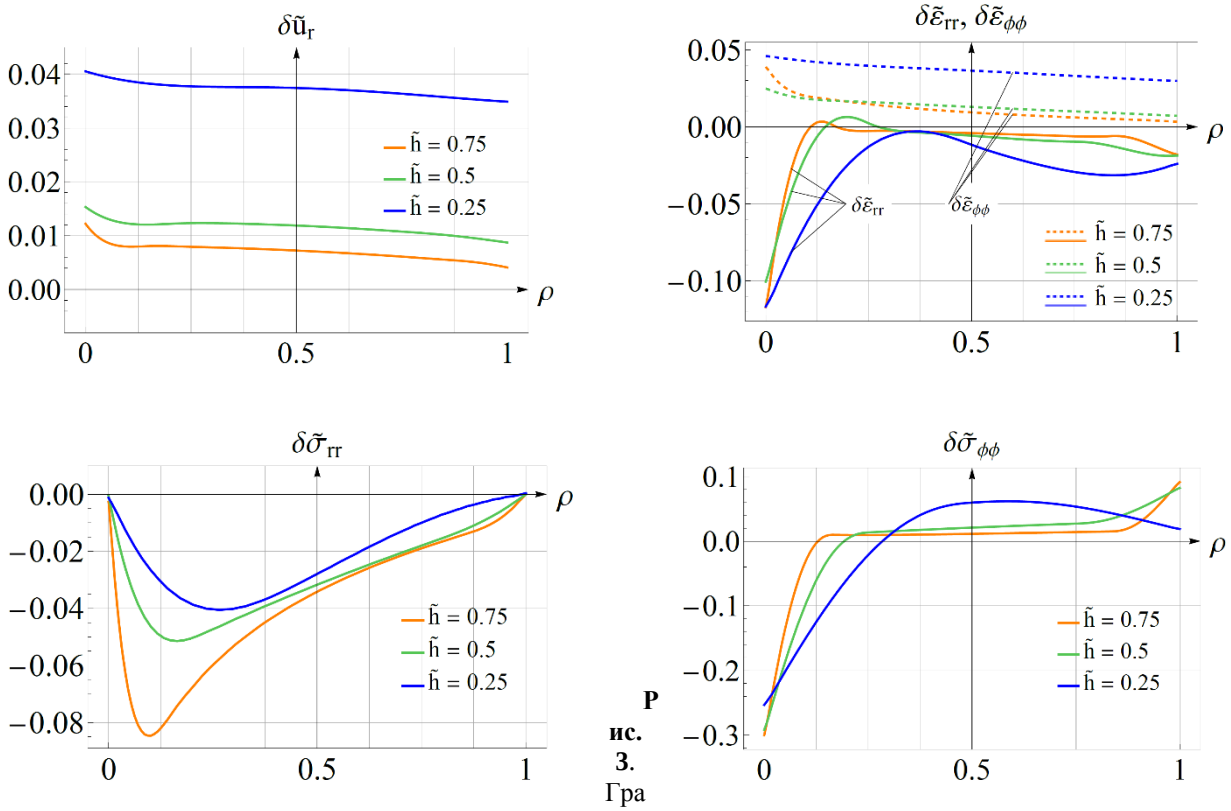


Рис. 3. Графики относительного отклонения в зависимости от координаты ρ при различных толщинах слоя $\tilde{h}$ для радиального перемещения; радиальной и окружной деформаций; радиального напряжения; окружного напряжения

По результатам моделирования, с уменьшением толщины кольцевого слоя относительные отклонения радиального перемещения и деформаций увеличиваются. Относительные отклонения радиального напряжения, напротив, уменьшаются, а для окружных напряжений становятся больше отклонения в центральном сечении. Окружное напряжение сильнее всего реагирует на учет пространственной нелокальности, из чего можно сделать вывод о необходимости их контроля во избежание приближения к критическим значениям, при которых исследуемые кольцевые или цилиндрические конструкции могут претерпеть разрушение. Также отметим, что наибольшие отклонения наблюдаются во внутренней части материала, а для достаточно толстых кольцевых слоев $\left(\tilde{h} \geq 0.5\right)$ в распределениях относительных отклонений для деформаций можно наблюдать кромочный эффект [5]. Такие же особенности решений ранее наблюдались при анализе нелокальной теплопроводности [9].

3. Заключение

В рамках исследования стационарной несвязной задачи термоупругости в сплошном кольцевом слое с учетом пространственной нелокальности проведено сравнение аналитического решения в классической постановке задачи и полученных в результате численного моделирования решений в нелокальной постановке. Расчеты демонстрируют выраженное усиление нелокальных эффектов в окрестности внутреннего радиуса, особенно проявляющееся для окружных напряжений.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFN-2024-0004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Berman D., Krim J. Surface science, MEMS and NEMS: Progress and opportunities for surface science research performed on, or by, microdevices // Progress in Surface Science. 2013. Vol. 88, No. 2. P. 171–211.
2. A critical review of recent advances in the aerospace materials / Rahul Soni [et al.] // Materials Today: Proceedings. 2024. Vol. 113. P. 180–184.
3. Review of thermal conductivity in composites: Mechanisms, parameters and theory / N. Burger [et al.] // Progress in Polymer Science. 2016. Vol. 61. P. 1–28.
4. Mohamed Shaat, Esmaeal Ghavanloo, S. Ahmad Fazelzadeh. Review on nonlocal continuum mechanics: Physics, material applicability, and mathematics // Mechanics of Materials. 2020. Vol. 150. Art. 103587.
5. Савельева И.Ю. Разработка и анализ математических моделей термомеханики структурно-чувствительных материалов: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 1.2.2 / Савельева Инга Юрьевна; Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет). Москва, 2023. 375 с.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
7. Соколов А.А. Математические модели нелокальной термоупругости и их численная реализация: дис. … канд. физ.-мат. наук: 1.2.2 / Соколов Андрей Александрович; Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет). Москва, 2024. 111 с.
8. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. NonLocFEM / Соколов А.А.; Соколов А.А., Савельева И.Ю. № 2021661966; заявл. 20.07.2021; опубл. 22.09.2022, РД040930 (Рос. Федерация).
9. Савельева И.Ю., Соколов А.А., Евсеева М.М. Стационарная теплопроводность в составном кольцевом слое с учетом эффекта пространственной нелокальности // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 2–4 декабря 2024 г. Воронеж, 2025. С. 705–711.

Сведения об авторах

Савельева Инга Юрьевна – д-р физ.-мат. наук, доц., заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Тел.: +7 (916) 8488921, E-mail inga.savelyeva@bmstu.ru

Соколов Андрей Александрович – канд. физ.-мат. наук, ассистент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Тел.: +7 (915) 4232734, E-mail Zokolof@yandex.ru

Евсеева Мария Михайловна – студент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Тел.: +7 (977) 6785907, E-mail marya.ews@yandex.ru

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Саитова Р.Р., Арутюнян А.Р.

Рассматривается проблема высокотемпературной ползучести и длительной прочности металлических материалов. Используется система взаимосвязанных кинетических уравнений для скорости ползучести и параметра поврежденности. Получены решения данной системы кинетических уравнений. Принимая условия разрушения, сформулирован критерий длительной прочности, описывающий участок хрупкого разрушения. Исследованы изменения параметров модели в зависимости от температуры испытаний.

1. Введение.

Работоспособность металлов, в основном, определяется процессами поврежденности, которые способствуют охрупчиванию материала и возникновению эффекта тепловой хрупкости. Под действием относительно низких напряжений и высоких температур металлические материалы становятся хрупкими и разрушаются при небольшой величине остаточных деформаций. Физическими методами исследований было установлено, что явление тепловой хрупкости свойственно всем металлическим материалам и связано с процессами накопления пористости по границам зерен по механизму диффузии вакансий и зернограничного проскальзывания. Данный эффект наблюдается в элементах многих важных инженерных объектов, поэтому проблема хрупких разрушений стала предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований.

Для решения этой проблемы в механике материалов в работах Л.М. Качанова [1], Ю.Н. Работнова [2] была введена концепция сплошности (поврежденности). Для описания хрупкой области экспериментальной кривой длительной прочности была предложена система простых кинетических уравнений для параметра поврежденности и деформации ползучести, а также был сформулирован критерий длительной прочности.

При формулировке уравнений ползучести и критерия длительной прочности в области хрупких разрушений необходимо учитывать условие сжимаемости и формулировать реологические соотношения ползучести и критерии длительной прочности, основываясь на законе сохранения массы. В этом случае в качестве параметра поврежденности следует рассматривать необратимое изменение плотности (разрыхление) материала. С учетом этих положений сформулированы взаимосвязанные уравнения для параметра поврежденности и деформации ползучести [3].

В работах [4, 5] предлагается модифицированный вариант системы кинетических уравнений с учетом закона сохранения массы и конкретизации параметра поврежденности в виде отношения текущей величины плотности материала к начальной.

2. Теоретическое описание системы кинетических уравнений.

В работе [3] рассматривается система взаимосвязанных кинетических уравнений для скорости ползучести и параметра поврежденности:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = B\sigma_0^m \psi^{m-\beta} e^{m\varepsilon}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -A\sigma_0^n \psi^{n-\alpha} e^{n\varepsilon}, \tag{2.2}$$

где $\psi = 1-\omega = \rho/\rho_0$ – сплошность, ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность образца, B, A, m, n, α, β – постоянные.

Решения данной системы уравнений были рассмотрены в следующих работах: для случая одноосного растяжения [3, 5] и для случая двухступенчатого нагружения [4]. В рассматриваемых работах были получены точные, приближенные аналитические и численные решения системы взаимосвязанных уравнений (2.1)-(2.2) и дано сравнение с результатами опытов по определению закономерностей накопления повреждений в условиях высокотемпературной ползучести, полученные для различных металлов и сплавов.

В случае $e^{m\varepsilon} \approx 1$, $e^{n\varepsilon} \approx 1$, при начальных условиях $t = 0$, $\psi = 1$, из уравнений (2.1)-(2.2) получим [6]:

$$\psi = \left[1 - (\alpha - n + 1) A \sigma_0^n t\right]^{\frac{1}{\alpha - n + 1}}, \tag{2.3}$$

Принимая условие разрушения в виде $t = t_f$, $\psi = 0$, из уравнения (2.3) можно получить следующий критерий длительной прочности [6]:

$$t_f = \frac{1}{(\alpha - n + 1) A \sigma_0^n}, \tag{2.4}$$

При $\alpha = 2n$ критерий (2.4) совпадает с критерием длительной прочности Качанова-Работнова [1, 2].

3. Сравнение теоретических кривых с экспериментальными результатами и конкретизация параметров модели.

Точность расчетных оценок прочности и ресурса элементов конструкций зависит от того, насколько используемая математическая модель достоверно описывает процессы деформирования и повреждения материала в опасных зонах элементов конструкции в результате процесса высокотемпературной ползучести. Важно, насколько точно определены вещественные параметры материала, входящие в используемую математическую модель. Особое внимание необходимо уделять экспериментальным исследованиям процессов высокотемпературной ползучести. В работе [7] была проведена серия экспериментов по высокотемпературной ползучести и длительной прочности сплава 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe на основе Ni при различных температурах.

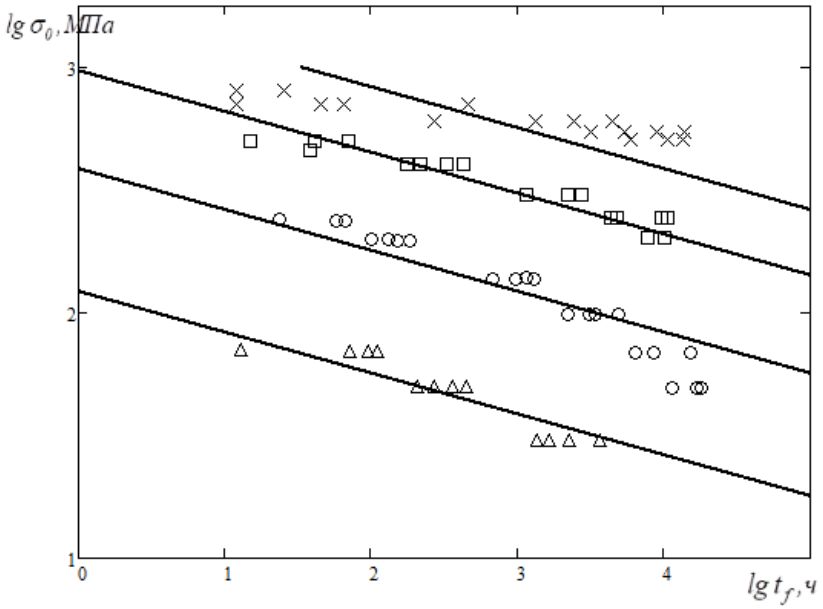


Рис. 1. Теоретические кривые длительной прочности согласно соотношению (2.4) – сплошные линии, и экспериментальные кривые длительной прочности: кресты – при 600 ℃, квадраты – при 700 ℃, круги – при 800 ℃, треугольники – при 900 ℃ для сплава 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe на основе Ni согласно работе [7].

На рис. 1 показаны теоретические кривые длительной прочности согласно соотношению (2.4) – сплошные линии, и экспериментальные кривые длительной прочности: кресты – при 600 ℃, квадраты – при 700 ℃, круги – при 800 ℃, треугольники – при 900 ℃ для сплава 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe на основе Ni. Значения коэффициентов, использованных в расчетах, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов при теоретических расчетах по формуле (2.4).

Температура испытания	α	n	$A,[МПа]^{-6}\times[ч]^{-1}$
600 °C	8	6	1×10^{-20}
700 °C	8	6	4×10^{-19}
800 °C	8	6	1×10^{-16}
900 °C	8	6	1×10^{-13}

Из рис. 1 видно, что наблюдается хорошее согласие теоретических и экспериментальных кривых ползучести при разных температурах.

Для того, чтобы описать температурную зависимость, предполагается, что параметр A не является постоянной, а зависит от температуры. Далее параметр A будем конкретизировать в виде следующего соотношения:

$$A(T)=e^{aT^2+bT+c}, \tag{2.5}$$

где a,b,c – постоянные.

На рис. 2 показаны конкретизация параметра $A(T)$ в виде (2.5) – сплошная линия, и значения параметра A, полученные по соотношению (2.4), для сплава 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe на основе Ni – кресты. При расчетах по формуле (2.5) были использованы следующие значения коэффициентов: $a=8.04719\times10^{-5}[°C]^{-2}$, $b=-0.06683[°C]^{-1}$, $c=-34.94464$.

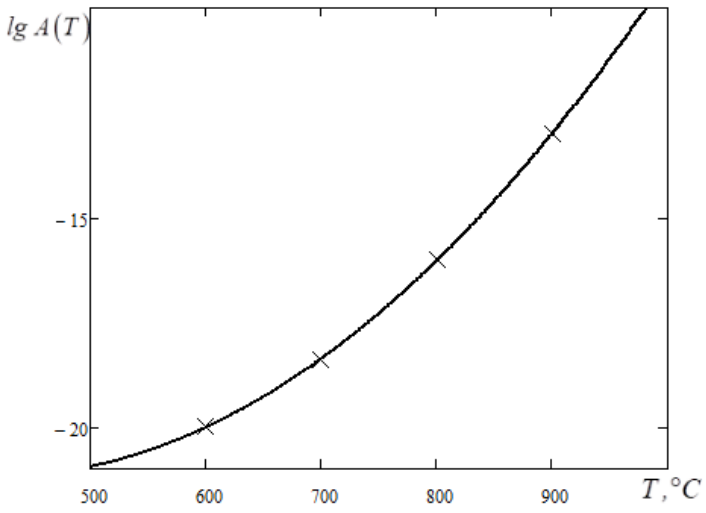


Рис. 2. Конкретизация параметра $A(T)$ в виде (2.5) – сплошная линия, и значения параметра A, полученные по соотношению (2.4), для сплава 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe на основе Ni – кресты.

Наблюдается хорошее соответствие значений параметра A, которые были определены при различных температурах для сплава 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe на основе Ni и предложенного соотношения (2.5) для температурной зависимости рассматриваемого параметра.

4. Заключение.

Рассматривается проблема высокотемпературной ползучести и длительной прочности металлических материалов. Вводится система взаимосвязанных кинетических уравнений для скорости ползучести и параметра поврежденности. Получены решения данной системы кинетических уравнений. Принимая условия разрушения, сформулирован критерий длительной прочности, описывающий участок хрупкого разрушения. Исследованы изменения параметров модели в зависимости от температуры испытаний. Предложено выражение для описания температурной зависимости параметра рассматриваемой модели. Полученное выражение хорошо описывает изменение параметров системы для сплава 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe на основе Ni. Таким образом, предложенная система взаимосвязанных кинетических уравнений для скорости ползучести и параметра поврежденности позволяет описать кривые длительной прочности при различных температурах, что указывает на универсальность рассматриваемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. Изв. АН СССР. Отд. Техн. Наук, № 8, 1958. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
3. Arutyunyan A.R., Saitova R.R. Exact and approximate solutions of the system of interrelated equations of the theory of creep and long-term strength. Journal of Physics: Conference Series. 2022; 2231 (1): 012001.
4. Arutyunyan A.R., Saitova R.R. Experimental and Theoretical Investigations of High-Temperature Creep of the ENAW 5251 (AMg2) Aluminum Alloy under Step Loading. Doklady Physics. 2024. V. 68. №. 7. P. 203-206. (Scopus)
5. Saitova R., Arutyunyan A., Altenbach H. High Temperature Creep and Embrittlement in Metals and Alloys Under Conditions of the Long-Term Usage. Acta Mechanica. 2024. V. 235. №10. P. 6033-6055.
6. Саитова Р.Р. Высокотемпературная ползучесть и охрупчивание материалов в условиях длительной эксплуатации. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Санкт-Петербургского государственного университета, г. Санкт-Петербург, 2023. 108 с.
7. Data Sheets on the Elevated-Temperature Properties of Nickel based 15.5Cr-2.5Ti-0.7Al-1Nb-7Fe Superalloy Bars for High-Temperature Service. Issued (No. 39). 1988.

Информация об авторах

Саитова Регина Ринатовна – к.ф.-м.н., доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет, +7 (812) 4284164
E-mail rigastr@yandex.ru

Арутюнян Александр Робертович – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет, Математико-механический факультет, +7 (812) 4284164
E-mail a.arutyunyan@spbu.ru

РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ КЛАССА «ПРЕМИУМ» И ИХ ГЕРМЕТИЧНОСТЬ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУР

Стрелков К.С.

Настоящее исследование посвящено комплексному анализу конструкции премиального резьбового соединения с целью изучения влияния ползучести на его уплотнительные свойства в экстремальных условиях эксплуатации при высокой температуре (SAGD, CSS и т.д.). В качестве объекта исследования выбрана конструкция резьбового соединения собственной разработки OMK VEGA. Особое внимание уделено применению методики оценки герметичности на основе набора известных критериев. На начальном этапе исследования был проведен сравнительный анализ различных видов нагружений с выдержкой во времени. Выявлены наиболее критические режимы нагружения, приводящие к максимальной релаксации контактного давления в зоне уплотнения в течение заданного временного интервала. Полученные результаты позволяют прогнозировать изменение уплотнительных свойств премиальных резьбовых соединений в условиях длительного воздействия эксплуатационных нагрузок и повышенных температур.

Введение

Современные премиальные резьбовые соединения представляют собой ключевой элемент конструкции нефтегазовых скважин, сочетающий высокую скорость сборки с надежным обеспечением конструкционной стабильности и герметичности. Эти соединения нашли широкое применение при обустройстве вертикальных, наклонно-направленных и горизонтальных скважин на месторождениях нефти и газа, работающих в экстремальных условиях [1]. Их принципиальное отличие от стандартных решений заключается в наличии специального уплотнительного элемента, создающего контролируемый радиальный натяг между соединяемыми трубой и муфтой, а также в использовании оптимизированных резьбовых профилей [1, 2]. Данная конструктивная особенность обеспечивает формирование контактной зоны с заданным распределением контактных давлений по уплотняющим поверхностям [3]. При длительной эксплуатации премиальных соединений могут возникать различные негативные явления, среди которых особое место занимает ползучесть. Как показали исследования [4], этот эффект особенно выражен в условиях одновременного воздействия повышенных температур и постоянных растягивающих нагрузок, создаваемых массой колонны (изгибом при прохождении сложных скважинных интервалов) и радиальным натягом в уплотнительной зоне. Следует подчеркнуть, что высокотемпературные режимы характерны для таких современных методов добычи, как парогравитационный дренаж (SAGD) и циклическая паровая стимуляция (CSS), где рабочие температуры достигают 275°C и 350°C соответственно [5], а также в скважинах с повышенными давлениями и температурами (HPHT). Настоящее исследование посвящено комплексному анализу влияния ползучести материалов под действием различных эксплуатационных нагрузок на герметизирующие характеристики соединений. Отдельное внимание уделено изучению динамики изменения контактного давления в зоне уплотнительного элемента как ключевого параметра, определяющего герметичность соединения.

1. Расчетная модель резьбового соединения

Для проведения исследований была выбрана конструкция резьбового соединения OMK VEGA [6] типоразмера 177,8×10,36 группы прочности P110. Данное соединение характеризуется прочностными свойствами, обеспечивающими прочность на растяжение и сжатие, равную прочности тела трубы. Конструктивной особенностью является специальный уплотнительный элемент с расширенной контактной зоной, что существенно улучшает герметизирующие характеристики соединения.

Для численного анализа была разработана детальная геометрическая модель с последующим построением конечно-элементной модели в осесимметричной постановке в программном комплексе ANSYS. Особое внимание уделено моделированию зоны радиального натяга, образованного перекрытием контактных поверхностей ниппеля и муфты.

2. Модель материала

В исследовании применена вязкоупругая модель материала для учета явления ползучести, базирующаяся на обобщенной модели Максвелла-Вихерта. В случае одноосного растяжения, соотношение напряжений и деформаций задается следующим соотношением:

$$\sigma_{zz} = E(t)\varepsilon_{zz}, \tag{1}$$

где $\sigma_{zz} = const$.

Согласно работам [7, 8], модуль релаксации описывается разложением в ряд Прони. При этом, учитывая, что мгновенный модуль релаксации соответствует сумме равновесного модуля и всех компонент релаксации, можно записать следующее выражение:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^{n} E_i \exp\left(-t/\tau_i\right) = E_0 - \sum_{i=1}^{n} m_i E_0 \left[1 - \exp\left(-t/\tau_i\right)\right], \tag{2}$$

где E_∞ – равновесный модуль, E_i – модуль релаксации на характерном времени релаксации τ_i, E_0 – мгновенный модуль упругости, $m_i = E_i / E_0$ – параметр Прони.

Комбинируя уравнения (1) и (2), получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i E_0 \left[1 - \exp\left(-t/\tau_i\right)\right] = E_0 - \sigma_{zz} / \varepsilon_{zz}(t) \tag{3}$$

Если в качестве $\varepsilon_{zz}(t)$ принять деформации из испытаний на ползучесть при одноосном растяжении, а в качестве σ_{zz} - постоянное напряжение в испытаниях на ползучесть, то можно сформировать систему уравнений, каждое уравнение которой будет соответствовать определенному моменту времени:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} m_i E_0 \left[1 - \exp\left(-t_1/\tau_i\right)\right] = E_0 - \sigma_{zz} / \varepsilon_{zz}(t_1) \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} m_i E_0 \left[1 - \exp\left(-t_n/\tau_i\right)\right] = E_0 - \sigma_{zz} / \varepsilon_{zz}(t_n) \end{cases}. \tag{4}$$

Систему уравнений (4) можно записать в виде матричного уравнения:

$$E_0 \left[\mathbf{T}\right]\{\mathbf{m}\} = \{\mathbf{e}\} \tag{5}$$

где матрица релаксации $\left[\mathbf{T}\right]$, вектор безразмерных параметров Прони $\{\mathbf{m}\}$ и вектор изменения мгновенного модуля $\{\mathbf{e}\}$ имеют следующий вид:

$$\left[\mathbf{T}\right] = \begin{pmatrix} 1-\exp\left(-t_1/\tau_1\right) & \ldots & 1-\exp\left(-t_1/\tau_i\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\exp\left(-t_i/\tau_1\right) & \cdots & 1-\exp\left(-t_n/\tau_n\right) \end{pmatrix}, \ \{\mathbf{m}\} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \ldots \\ m_n \end{pmatrix}, \ \{\mathbf{e}\} = \begin{pmatrix} E_0 - \sigma_{zz}/\varepsilon_{zz}(t_1) \\ \ldots \\ E_0 - \sigma_{zz}/\varepsilon_{zz}(t_n) \end{pmatrix}$$

Из уравнения (5) на основе экспериментальных данных для заданной температуры можно получить вектор неизвестных параметров $\{\mathbf{m}\}$ и получить зависимость $E(t)$.

Для построения модели Максвелла-Вихерта и последующего анализа герметичности премиального резьбового соединения в условиях ползучести, были проведены испытания в лаборатории «Гибридные наноструктурные материалы» НИТУ МИСИС. Кривые ползучести получены для образцов, вырезанных из муфтовой заготовки. Испытания проводились с использованием, термокамеры, экстензоментра и весов, создающих растягивающую нагрузку. На Рисунке 1 приведены экспериментальные кривые ползучести и кривые, полученные при моделировании. Все кривые были получены при напряжениях, равных 95% предела текучести материала муфты, что соответствует уровню напряжений в испытаниях в соответствии с [9, 10].

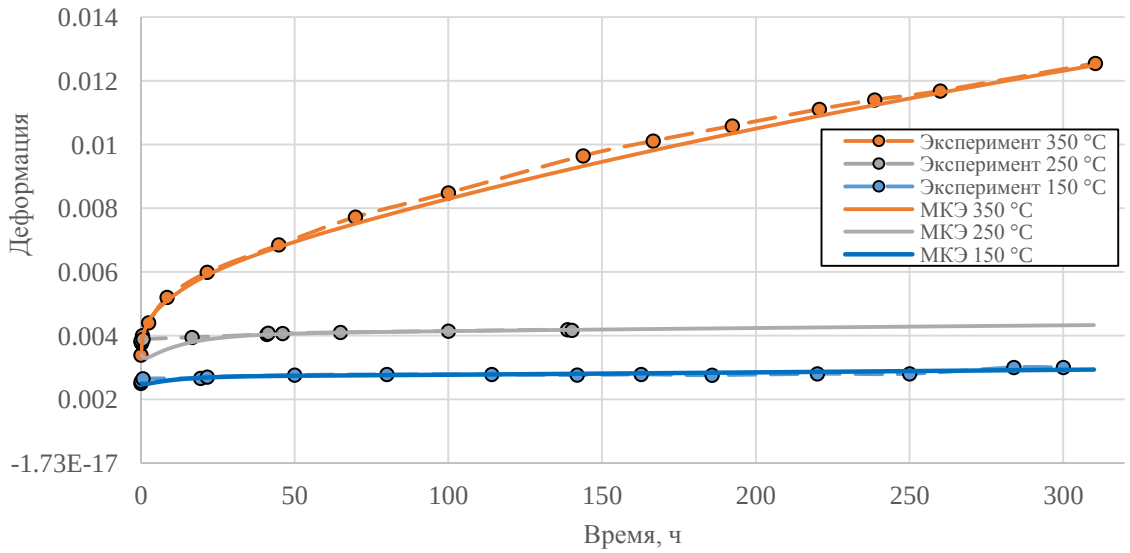


Рис. 1. Сравнение кривых ползучести для испытаний и моделирования.

Видно, что полученное решение позволяет описать ползучесть для трех разных температур. При этом для того, чтобы учесть масштабный фактор, возможное проявление нелинейной ползучести, а также погрешности испытательного оборудования, в левую часть уравнения (5) был введен калибровочный коэффициент α = 1,15. Окончательный вид уравнения:

$$\alpha E_0 \left[\mathbf{T}\right]\{\mathbf{m}\} = \{\mathbf{e}\} \tag{6}$$

Для решения уравнения (6), выбор оптимальных точек экспериментальных кривых осуществлялся при помощи метода Монте-Карло с целевой функцией среднеквадратичной ошибки.

3. Анализ герметичности при комплексном нагружении

С целью определения степени влияния ползучести на эксплуатационные характеристики проведен сравнительный анализ герметичности резьбового соединения при комплексном нагружении в соответствии с маршрутом нагружения, лежащим в упругой области и показанном на Рисунке 2. Проведенные расчеты охватывают два варианта моделирования: вязкоупругая модель материала с выдержкой 300 часов (точка с нагрузкой для выдержки показана на Рисунке 2) с последующим комбинированным нагружением и упругая модель материала без выдержки с комбинированным нагружением.

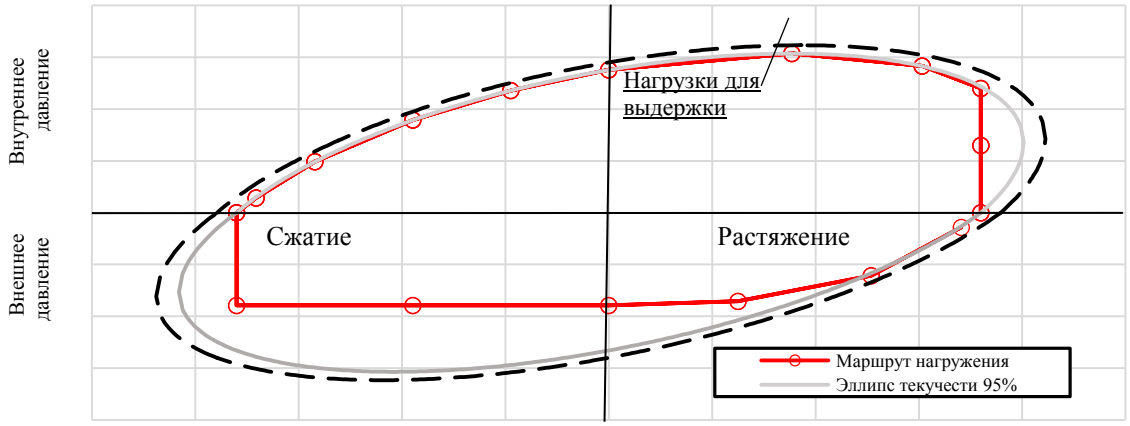


Рис. 2. Эллипс текучести по Мизесу тела трубы и маршрут нагружения.

Для оценки уровня сопротивления внутреннему давлению был введен индекс газонепроницаемости, критерий газонепроницаемости [11] и запас по газонепроницаемости:

$$W_a = \int_{-w_s}^{w_s} p(x)^n dx,\ W_{ac} = B(q/p_a)^m,\ n_g = W_a / W_{ac} \quad (7)$$

где $p(x)$ – распределение контактного давления в определенный момент времени; w_s – полуширина контактной зоны; параметры для случая отсутствия резьбоуплотнительной смазки (соответствует методике испытаний [9, 10] при использовании процедуры прогрева образца): n=1.4, m = 0.838, B=10 МПа^n□мм; q – заданное давление; p_a – атмосферное давление.

Падение запаса по газонепроницаемости n_g в процессе выдержки представлено на Рисунке 3 и составляет 80% при выдержке в 300 часов. Далее происходит стабилизация релаксации контактных давлений.

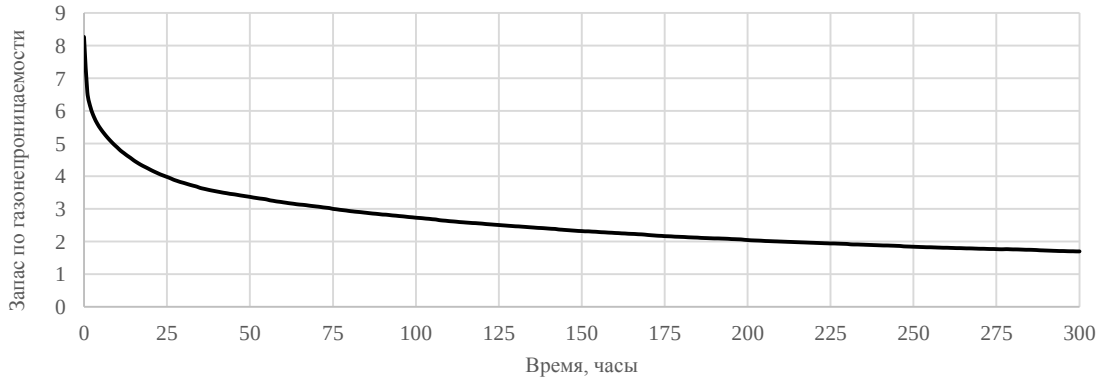


Рис. 3. Изменение запаса по газонепроницаемости при выдержке.

Полученные данные по запасу по газонепроницаемости n_g показаны на Рисунке 4.

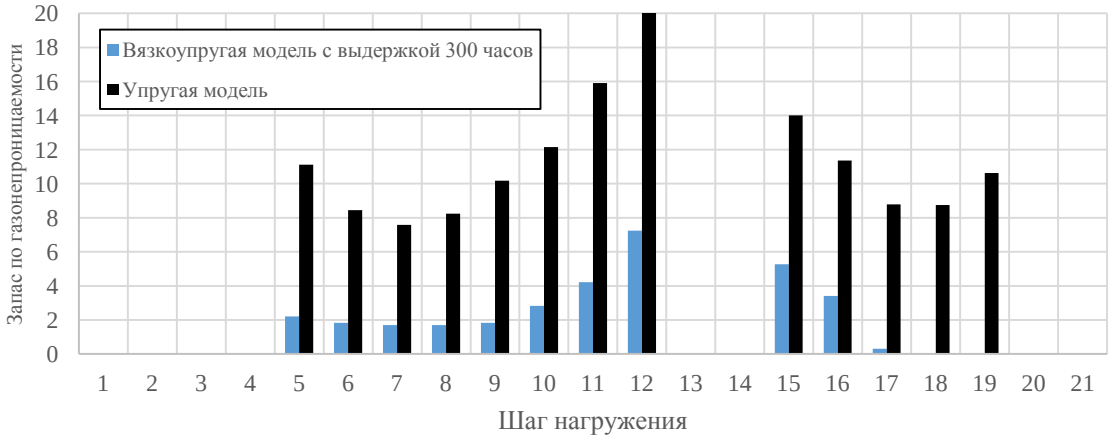


Рис. 4. Сравнение динамики запаса по газонепроницаемости для двух моделей

На Рисунке 4 видно, что значения запаса газонепроницаемости отсутствуют для шагов 1, 4, 13, 14, 20 и 21, что объясняется отсутствием давления в данных точках нагружения. Так как шаги 2 и 3 для упругой модели отсутствуют, результатов по ним также нет в сравнении. При этом видно, что для вязкоупругой модели с выдержкой 300 часов при температуре 350°C конструкция теряет герметичность при нагружении внешним давлением уже начиная с 17 шага, где запас по газонепроницаемости меньше 1, а на 18 и 19 шага в уплотнении возникает зазор. Максимальное снижение запаса по газонепроницаемости при действии внутреннего давления составляет 82%.

Заключение

Проведенный анализ убедительно демонстрирует значительное воздействие ползучести на герметичность резьбового соединения. Важно отметить, что данное влияние поддается точной количественной оценке. Разработанная расчетная методика представляет практическую ценность для проверки работоспособности резьбовых соединений в экстремальных условиях, включая высокотемпературные режимы (до 350°C) и длительные механические нагрузки, характерные для современных технологий добычи, в частности метода парогравитационного дренажа (SAGD). Кроме того, предложенный подход может быть эффективно использован при модернизации конструкций соединений и прогнозировании ресурса эксплуатации скважины. В качестве развития данной работы в дальнейшем предполагается использование моделей ползучести для учета нелинейных эффектов, учёт пластичности материала, а также термо-реологических свойств с использованием соответствующих моделей.

Данное исследование выполнено по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grijalva Meza O. et al. Technological Improvements in OCTG Premium Casing Connections and Advancements in Design: A Critical Review // Society of petroleum Eng., presentation at the Abu Dhabi International Petroleum Exhibition & Conf. held in Abu Dhabi, 2016, 3-5.
2. Scavo E. Design of an Environmentally Benign Thread Compound for Oil Well Joints // PDEng Thesis, University of Twente, 2018, 1-100.
3. Sugino M. et al. VAM® 21, an Innovative High-performance Premium Threaded Connection for OCTG // Nippon Steel & Sumitomo Metal Technical Report No. 107, 2015, 10-17.
4. Merliahmad M. Casing Connection Selection for Geothermal Applications Using Input From HPHT and Thermal Wells Testing Protocols // SPE/GRC Workshop (High-Temperature and Corrosion in Drilling and Production – Exploring Geothermal and Oil and Gas Synergies), 2017.
5. Xie J. et al. Modeling for Thermal Well Casing Connection Evaluation Programs // Science in the Age of Experience, 2017, 1-2.
6. Никифоров Д.В., Стрелков К.С. Резьбовое соединение трубных изделий нефтепромыслового сортамента, патент на изобретение №2767871, 2021.
7. Zhang Y., et al. Viscoelastic behavior of a casing material and its utilization in premium connections in high-temperature gas wells //Advances in Mech. Eng. 2018, Vol. 10(12), 1-8.
8. Ferry J. Viscoelastic properties of polymers, Third edition, John Wiley & Sons, 1980, 56-59.
9. API Recommended Practice 5C5 “Procedures for Testing Casing and Tubing Connections”, American Petroleum Institute, 2017, 1-198.
10. ГОСТ Р ИСО 13679-2023 «Трубы стальные обсадные и насосно-компрессорные для нефтяной и газовой промышленности. Методы испытаний резьбовых соединений», 2023.
11. Xie J. Numerical evaluation of tubular connections for HPHT applications. In Proceedings of the Baosteel BAC, Shanghai, China, June 2013.

Информация об авторе

Стрелков Кирилл – аспирант, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Лаборатория моделирования в механике деформируемого твёрдого тела +7 (916) 647 81 98
E-mail ks.strelkov@yandex.ru

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ИМПЕДАНСОМ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Сумбатян М.А.

В работе предложен метод решения двумерной задачи об отражении волны от горизонтальной поверхности с импедансом, который является заданной функцией, изменяющейся вдоль границы. В общем случае задача сводится к граничному интегральному уравнению для давления, в котором специфический импеданс границы входит в ядро уравнения. В качестве примера рассмотрена задача построения эффективного звукопоглотителя с помощью периодического чередования акустически твердых и акустически мягких участков на границе области.

1. Введение. Известно [1,2], что при отражении звуковых волн от плоских бесконечных границ модуль коэффициента отражения равен единице, если граничная поверхность не обладает поглощением. В этом случае энергия отраженной волны равна энергии падающей волны. Примерами таких границ являются абсолютно твердая и абсолютно мягкая поверхность. В случае неидеальных поверхностей при отражении происходит поглощение энергии.

При исследовании этого вопроса ограничимся двумерным случаем нормального (ортогонального) падения плоской волны, сверху на прямолинейную горизонтальную отражающую поверхность в естественных декартовых осях (x, y), а также гармоническим процессом с временным множителем $e^{-i\omega t}$. В классическом решении задачи об отражении плоской волны от границы раздела двух сред [1] давление в верхней и нижней полуплоскости соответственно имеет вид:

$$p_1(x,y) = \exp(-ik_1 y) + R\exp(ik_1 y),\ (y \ge 0), \qquad p_2(x,y) = T\exp(-ik_2 y),\ (y \le 0), \tag{1}$$

где $k_{1,2} = \omega / c_{1,2}$ – волновые числа, R – коэффициент отражения, T – коэффициент прохождения (прозрачности). При этом

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \qquad T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}, \tag{2}$$

где $Z_1 = \rho_1 c_1$, $Z_2 = \rho_2 c_2$ – акустический импеданс соответственно верхней и нижней полуплоскости [1], ρ и c для каждой из двух сред – соответственно массовая плотность и скорость звука. Из (2) легко видеть, что для акустически твердой ($Z_2 \to \infty,\ R \to 1$) и акустически мягкой ($Z_2 \to 0,\ R \to -1$) отражающей границы в обоих случаях получаем $|R| = 1$, что и было отмечено выше.

В общем случае, вводя коэффициент звукопоглощения α $(0 \le \alpha \le 1)$, энергия в отраженной волне, которая пропорциональна квадрату давления, связана с коэффициентом α: $|R|^2 = 1 - \alpha$. Отсюда получаем зависимость коэффициента звукопоглощения от коэффициента отражения: $\alpha = 1 - |R|^2$. Желая ограничиться рассмотрением волнового процесса лишь в первой (верхней) среде, где происходит падение и отражение исходной волны, обычно вводят специфический импеданс $Z_S = p_1 / (-\mathrm{v}_{1y}) = p_2 / (-\mathrm{v}_{2y})$ на границе, как отношение давления к нормальной компоненте скорости. Поскольку линеаризованное уравнение движения имеет вид:

$$\rho_1 \frac{\partial \bar{\mathrm{v}}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = 0,\ \sim -i\omega\rho_1 \bar{\mathrm{v}}_1 + \nabla p_1 = 0, \tag{3}$$

для специфического импеданса имеем:

$$\mathrm{v}_{1y}\Big|_{y=0} = \frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{ik(R-1)}{i\omega\rho_1} = \frac{R-1}{Z_1}, \quad \Rightarrow \quad Z_S = \left(-\frac{p_1}{\mathrm{v}_{1y}}\right)_{y=0} = \frac{1+R}{1-R}Z_1 = Z_2, \tag{4}$$

Из соотношений (4) следует, что исследование волнового процесса в первой (верхней) среде возможно, если вместо значений физических параметров в двух рассматриваемых средах ввести для верхней среды одно граничное условие 3-го типа при $y = 0$:

$$p_1 + Z_S \mathrm{v}_{1y} = 0, \tag{5}$$

и считать специфический импеданс верхней среды Z_S заданной на границе функцией. Очевидно, что два крайних значения этой функции дают два идеальных отражателя: случай $Z_S \equiv 0$ дает граничное условие $p_1 = 0$ и соответствует абсолютно мягкой границе; случай $Z_S \to \infty$ дает граничное условие $\mathrm{v}_{1y} = 0, \sim \partial p_1 / \partial y = 0$ и соответствует абсолютно твердому отражателю. В общем случае для заданной функции $Z_S(x)$ имеем граничное условие с изменяющимся импедансом.

2. Сведение к граничному интегральному уравнению. При падении волны сверху на прямолинейный бесконечный горизонтальный отражатель граничные значения физических величин связаны следующим соотношением [3]:

$$\frac{p(x,0)}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[p(\xi,0) \frac{\partial G(\xi - x, \eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} - \frac{\partial p(\xi,\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} G(\xi - x, 0) \right] d\xi = p^{inc}(x,0), \tag{6}$$

где функция Грина выражается через функцию Ханкеля [4]

$$G(\xi - x, \eta - y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left[k\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \right], \tag{7}$$

и зависит от расстояния между точкой наблюдения (x, y) и точкой интегрирования (ξ, η). Также заметим, что при рассмотрении волнового процесса лишь в верхней среде, мы опустили индекс 1 в обозначении акустического давления: $p_1 = p$.

Поскольку при $y = 0$ имеем $(\partial G / \partial \eta)_{(\eta=0)} = 0$, то первый член под интегралом обращается в ноль, и тогда (6) принимает вид:

$$\frac{p(x,0)}{2} + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(\xi,0)}{\partial \eta} H_0^{(1)}(k\,|\,\xi - x\,|) d\xi = p^{inc}(x,0). \tag{8}$$

Формула (8) справедлива для произвольного падающего поля p^{inc}. Любопытно, что если граница – абсолютно твердая (то есть, абсолютно отражающая): $\mathrm{v}_{1y} = 0, \sim \partial p_1 / \partial y = 0$, то интеграл в (8) вообще обращается в ноль, и тогда граничное значение давления превращается в значение по физической теории дифракции Кирхгофа [5]: $p(x,0) = 2p^{inc}(x,0)$. В общем же случае импедансного граничного условия (5), в силу первого равенства в (4), соотношение (8) принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = i\omega\rho \mathrm{v}_y = -\frac{i\omega\rho}{Z_S} p, \;\Rightarrow\; \frac{p(x,0)}{2} + \frac{\omega\rho}{4} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi,0) H_0^{(1)}(k\,|\,\xi - x\,|) \frac{d\xi}{Z_S(\xi)} = p^{inc}(x,0). \tag{9}$$

Таким образом, в самом общем случае задача отражения от импедансной границы сводится к граничному интегральному уравнению (ГИУ) 2-го рода, в ядро которого входит функция граничного специфического импеданса Z_S.

3. Случай периодического чередования твердых и мягких интервалов границы. Два простейших вида отражающей границы являются идеальными отражателями, т.к. для них $|R| = 1$, и, следовательно, падающая на границу волна сохраняет свою энергию после отражения. Любопытно исследовать – может ли чередование этих двух идеально отражающих видов границы породить поглощение энергии при отражении, и если может – насколько существенное. Проблема в такой постановке связана с поиском эффективных звукопоглощающих материалов в акустике помещений [6]. Особенно актуальна эта проблема в низкочастотном диапазоне, т.к. известно, что большинство звукопоглотителей эффективно работают лишь в области средних и высоких частот. Возможная схема размещения этих двух материалов представлена на рис.1 и является периодической.

Очевидно, в рассматриваемой задаче сохраняется соотношение (8), в котором от бесконечного интеграла остаются лишь интегралы по акустически мягким отрезкам с граничным условием $p=0$, т.к. на акустически жестких участках нормальная производная давления равна нулю, и интегралы по этим интервалам обращаются в ноль. Обозначим акустически мягкие отрезки $\ell_m : -b+(2a)m \le x \le b+(2a)m$, ($m=0,\pm1,\pm2,...$). Объединение всех этих отрезков представляет собой периодическую решетку $\ell = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \ell_m$ с периодом $2a$, состоящую из отрезков длиной $2b$.

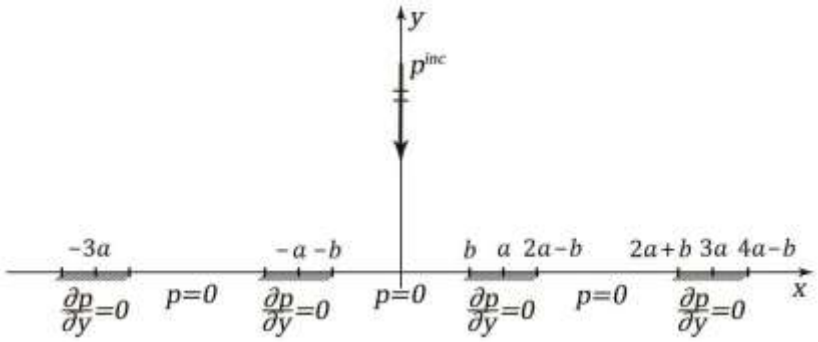


Рис. 1. Отражение плоской волны от периодической горизонтальной границы с периодом $2a$

Очевидно, что в случае нормального падения, когда $p^{inc}=e^{-iky}$, решение локально является одной и той же функцией $g(x)=[\partial p(x,y)/\partial y]_{y=0}$ от переменной x на каждом из отрезков ℓ_m. Поэтому интеграл в (8) равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(\xi,0)}{\partial \eta} H_0^{(1)}(k|\xi-x|)d\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^{b} g(\xi) H_0^{(1)}(k|\xi+2am-x|)d\xi = \\ = \frac{1}{\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^{b} g(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\xi+2am-x)\alpha}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}} d\alpha \qquad (10)$$

где использовано интегральное представление функции Ханкеля [4,7]. Далее используем известный результат из теории обобщенных функций [5]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imz} = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(z+2\pi m) \qquad (11)$$

где δ – дельта-функция Дирака. Поэтому для ключевой компоненты, входящей в формулу (10), с учетом основного свойства дельта-функции, получаем:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\xi+2am-x)\alpha}}{\sqrt{\alpha^2-k^2}} d\alpha = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(2a\alpha+2\pi m)}{\sqrt{\alpha^2-k^2}} e^{i(\xi-x)\alpha} d\alpha = \\ = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\alpha+2\pi m)}{\sqrt{\alpha^2-(2ak)^2}} e^{i(\xi-x)\alpha/(2a)} d\alpha = \frac{\pi}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x-\xi)\pi m/a}}{q_m}, \quad q_m = \sqrt{(\pi m/a)^2-k^2}. \qquad (12)$$

Таким образом, в данной задаче ГИУ (8) при точке наблюдения, выбранной на мягком участке границы ($|x| \le b,\ p=0$), принимает следующий вид:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^{b} g(\xi) \frac{e^{i(x-\xi)\pi m/a}}{4aq_m} d\xi = 1, \sim \int_{-b}^{b} g(\xi) \left[K(x-\xi) - \frac{1}{2iak} \right] d\xi = 2, |x| \le b, K(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x/a)}{aq_m}. \qquad (13)$$

4. Низкочастотное приближение. Если $ka<\pi$, то в (12) все $q_m > 0, (m=1,2,...)$; это так называемый одномодовый режим [8]. Однако более простое решение получается в

низкочастотном приближении, когда $ka \ll \pi$. В этом случае $K(x) \approx -\ln|2\sin[\pi x/(2a)]|/(2\pi)$ и не зависит от волнового числа k. Тогда после подстановки этого ядра в (13) очевидно, что

$$g(x) = \left(2 + \frac{G}{2iak}\right) h(x),\ H = \int_{-b}^{b} h(\xi)d\xi,\ G = \int_{-b}^{b} g(\xi)d\xi,\ \int_{-b}^{b} h(\xi)K(x-\xi)d\xi = 1,\quad (|x| \le b). \tag{14}$$

Решение уравнения (14) известно в литературе, смотри например [8]:

$$\begin{gathered} h(x) = -\frac{\pi\cos[\pi x/(2a)]}{2a\ln\{\sin[\pi b/(2a)]\}\left\{\sin^2[\pi b/(2a)] - \sin^2[\pi x/(2a)]\right\}^{1/2}}, \\ H = -\frac{\pi}{\ln\{\sin[\pi b/(2a)]\}}, \qquad G = \frac{2H}{1 - H/(2iak)}. \end{gathered} \tag{15}$$

5. Выражение для отраженной волны. Отраженная от границы волна определяется формулой, аналогичной (6):

$$p^{ref}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[p(\xi,0)\frac{\partial G(\xi - x, \eta - y)}{\partial \eta} - \frac{\partial p(\xi,0)}{\partial \eta} G(\xi - x, \eta - y) \right]_{\eta=0} d\xi. \tag{16}$$

При интегрировании бесконечная прямая распадается на периодическое множество абсолютно мягких участков $\ell = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \ell_m$ (с граничным условием $p = 0$), плюс периодическое множество абсолютно твердых участков $(-\infty, \infty) \setminus \ell$ (с граничным условием $\partial p/\partial y = 0$). На первом множестве первое слагаемое в подынтегральном выражении равно нулю, а второе слагаемое может быть вычислено в явном виде, т.к. нормальная производная давления есть функция $g(x)$, которая определена в явном виде по формулам (14), (15). На втором множестве второе подынтегральное выражение равно нулю, а первое напрямую неизвестно, поскольку на этих интервалах неизвестна функция $p(x,0)$, однако она может быть вычислена в явном виде по формуле (8), т.к. в этой формуле функция $\partial p/\partial y = g(x)$ уже найдена. После громоздких, но рутинных преобразований получаем:

$$p(x,0) = \left(2 + \frac{G}{2iak}\right)\left\{1 - \frac{\ln\left[\left|\sin\frac{\pi x}{2a}\right| + \sqrt{\sin^2\frac{\pi x}{2a} - \sin^2\frac{\pi b}{2a}}\right]}{\ln\left[\sin\frac{\pi b}{2a}\right]}\right\}, \qquad b \le |x| \le a. \tag{17}$$

После этого интегралы от обоих подынтегральных выражений в (16) в низкочастотном приближении асимптотически при $y \to +\infty$, после опять-таки довольно длинных рутинных преобразований, берутся в явном виде:

$$p^{ref}(x,y) \sim \frac{e^{iky}}{2iak - H}\left\{2iak\left[1 - \frac{b}{a}\left(1 + \frac{\pi}{H}\right)\right] + H\right\}. \tag{18}$$

Любопытно, что в дальнем поле отраженная волна также является плоской, однако ее амплитуда не равна единице. Для энергии отраженной волны получаем:

$$R^2 = \left|p^{ref}(x, y \to \infty)\right|^2 \sim 1 - 4a^2k^2\left[1 - \ln\left(\sin\frac{\pi b}{2a}\right)\right]\frac{2\frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2}\left[1 - \ln\left(\sin\frac{\pi b}{2a}\right)\right]}{4a^2k^2 + \pi^2/\ln^2\left(\sin\frac{\pi b}{2a}\right)}. \tag{19}$$

Поскольку $\sin[\pi b/(2a)] < 1$, то $\ln\{\sin[\pi b/(2a)]\} < 0$. Тогда легко видеть, что энергия отраженной волны в (19) меньше единицы.

В качестве примера рассмотрим низкочастотное отражение в акустике помещений. Характерными центральными октавными частотами являются шесть частот: 125 Гц, 250 Гц, 500 Гц, 1 кГц, 2 кГц, 4 кГц. Самой низкой басовой частотой здесь является частота 125 Гц, при которой длина волны при нормальных условиях равна $\lambda = 340 мс^{-1} / 125 с^{-1} = 2.72 м$. При этом волновое число равно $k = 2\pi / \lambda = 2.31 м^{-1}$. Если полупериод решетки взять $a = 1 м$, то $ak = 2.31 < \pi$, что соответствует одномодовому режиму. Рис.2 показывает зависимость коэффициента звукопоглощения $\alpha = 1 - |R|^2$ от параметра b / a при расчете в низкочастотном приближении.

В рассматриваемом примере с выбранными выше значениями физических параметров максимальное значение коэффициента звукопоглощения $\alpha \approx 0.51$ достигается при $b / a = 0.198$, что является сравнительно высоким значением для басовой частоты 125 Гц, и в акустической практике очень сложно создать материалы отделки со столь большим значением звукопоглощения на басах.

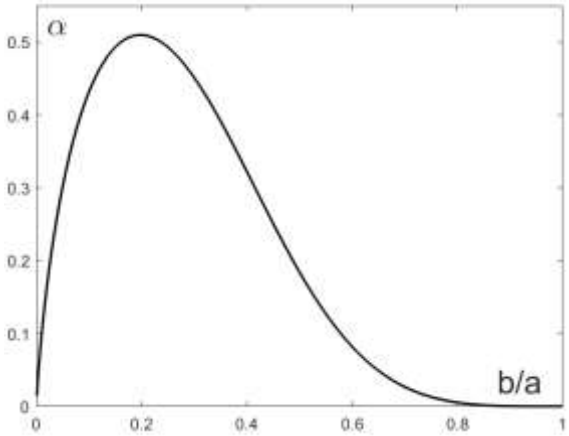


Рис. 2. Коэффициент α как функция параметра b / a при выбранных физических параметрах

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ), проект № 25-21-00139, выполняется в Южном федеральном университете.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. Москва: Наука, 1989.
2. Pierce A.D. Acoustics: An introduction to Its Physical Principles and Applications. Acoustical Society of America: New York, 1991.
3. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. John Wiley: New York, 1983.
4. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. Dover: New York, 1965.
5. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. Москва: Физматлит, 2013.
6. Long M. Architectural Acoustics. Elsevier: San Diego, 2006.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Элементарные функции. Москва: Наука, 1981.
8. Scarpetta E., Sumbatyan M.A. Explicit analytical results to one-mode normal reflection and transmission by a periodic array of screens, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, V.195, p. 736–749.

Информация об авторе

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, г. Ростов на-Дону, Россия.
E-mail: sumbatma@mail.ru , masumbatyan@sfedu.ru

ТЕСТИРОВАНИЕ УЛУЧШЕННОГО МЕТОДА ГИУ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРИМЕРАХ КАНОНИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Титаренко Е.А., Сумбатян М.А.

В классической проблеме волновой динамики изучается внутренняя задача для двумерной треугольной области. Основная сложность состоит в том, что любой численный метод теряет устойчивость вблизи углов. В данной работе предлагается метод, позволяющий преодолеть данное препятствие. Он основан на том, что неустойчивость алгоритма возникает, когда и точка наблюдения, и точка интегрирования одновременно приближаются к углу, т. е. когда расстояние между ними становится малым. В данном случае предлагается использовать асимптотику функции Грина при малом аргументе. Тогда интеграл возле угла можно вычислить аналитически, что приводит к устойчивому алгоритму. Полученные результаты сравниваются с известными аналитическими результатами для трех рассматриваемых треугольных областей.

1. Физическая постановка задачи. Рассмотрим двумерную область, ограниченную треугольником (Рис. 1). Здесь $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0\right)$ – точечный источник волны.

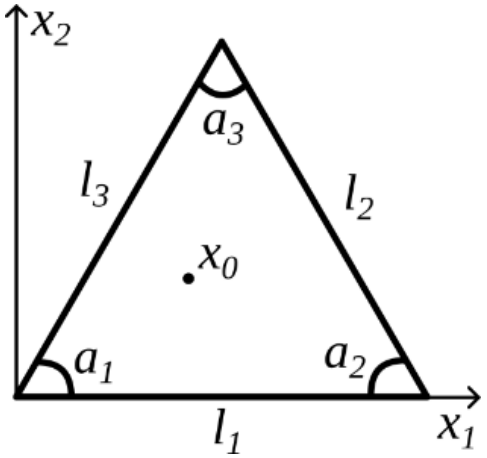


Рис. 1. Гармонический волновой процесс внутри треугольной области.

2. Математическая постановка задачи. Будем считать, что граница области является абсолютно твердой. Тогда для описания волнового процесса можно использовать уравнение Гельмгольца с однородным граничным условием Неймана [1]:

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_l = 0, \quad p = p_0 + p^{sc}, \tag{1}$$

где p – волновое давление, $k = \omega / c$ – волновое число, c – скорость распространения звука, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота, l – замкнутый граничный контур, p^{sc} - рассеянное волновое поле, $p_0 = H_0^{(1)}\left(kr_0\right)$ – волновое поле точечного источника x_0, $r_0 = |x - x_0| = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2}$. Зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$. Любая точка определяется двумя своими компонентами, например $x = \left(x_1, x_2\right)$.

В случае, если ω не является собственной частотой, а точки лежат на гладкой части контура l, то решение задачи (1) эквивалентно следующему ГИУ [2]:

$$\frac{p(x)}{2} - \int_l \frac{\partial G(y,x)}{\partial n_y} p(y)\, dl_y = p_0(x), \; x \in l, \; G(y,x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \tag{2}$$

где n_y – нормаль в граничной точке $y \in l$, направленная внутрь области, ограниченной контуром l, dl_y – элементарная длина в окрестности граничной точки $y \in l$, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [3].

Существует единственное решение (2), дающее единственное решение задачи (1):

$$p^{sc} = \int_l \frac{\partial G}{\partial n_y} p(y)\, dl_y, x \in l, \tag{3}$$

Стоит сказать, что в случае, когда точка x в (2) совпадает с одним из углов граничного контура, коэффициент $1/2$ в первом слагаемом левой части уравнения заменяется на коэффициент, зависящий от величины внутреннего угла граничного контура в данной точке излома. Это свойство может негативно сказаться на устойчивости решения ГИУ (2), поскольку небольшой сдвиг точки коллокации в угол контура может повлечь за собой существенное изменение диагональных членов соответствующей СЛАУ, возникающей при дискретизации ГИУ.

3. Метод решения. Пусть $l_q (q = 1,\ldots,3)$ – стороны рассматриваемой области, тогда $l = \sum_{q=1}^{3} l_q$. Для метода коллокаций [4] предположим, что некоторый малый постоянный шаг h может быть выбран так, что сторона l_q разбивается на N_q равных отрезков длины h, т. е. $l_q = hN_q$. Введем также $N = \sum_{q=1}^{3} N_q$.

Разместим узлы дискретной сетки $y_j = \left(y_1^j, y_2^j\right), (j = 1,\ldots N)$ в середине каждого отрезка, тогда ни один из узлов не попадает ни в один из углов рассматриваемой области, причем каждый узел вблизи угла отстает от самого угла на $h/2$. Такая сетка позволяет сохранить вид ГИУ (2) с коэффициентом $1/2$ у первого слагаемого в левой части.

Теперь можно переписать (2) с учетом

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n_y}, \frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr), \frac{\partial r}{\partial n_y} = \frac{\left(r \cdot n_y\right)}{r} \tag{4}$$

в следующем виде:

$$\frac{p(x)}{2} - \int_l K(y,x)\, p(y)\, dl_y = F(x), x \in l, K(x,y) = \frac{ik}{4} H_1^{(1)}(k,r) \frac{\left(r \cdot n_y\right)}{r}, \tag{5}$$

$$F(x) = p_0(x), \qquad r = y - x$$

Пусть в (5) $x = y_m \in l (m = 1,\ldots,N)$. Представим интеграл в (5) как сумму интегралов, каждый из которых берется по малому интервалу длины h:

$$\int_l K(y,x)\, p(y)\, dl_y = \sum_{j=1}^{N} \int_{a_j}^{b_j} K(y, y_m)\, p(y)\, dl_y \approx \sum_{j=1}^{N} b_{mj}\, p(y_j),\ b_{mj} = \int_{a_j}^{b_j} K(y, y_m)\, dl_y \tag{6}$$

где a_j и b_j – концы интервала длиной h, с центральным узлом y_j. Будем считать, что неизвестная функция $p(y)$ приблизительно постоянна на каждом малом интервале. Заметим, что a_j, y_j, b_j – всегда принадлежат одной и той же стороне рассматриваемой области, поэтому отрезок a_j, b_j является прямолинейным длины h и центральной точкой y_j.

В результате дискретизации ГИУ (6) может быть представлена в матричной форме:

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{A} = \left(a_{mj}\right),\ a_{mj} = \frac{\delta_{mj}}{2} + \left(1 - \delta_{mj}\right) b_{mj},\ P = \left[\, p(y_j) \,\right],\ F = \left[\, F(y_m) \,\right] \tag{7}$$

где δ_{mj} – символ Кронекера.

Элементы b_{mj} отличны от нуля только в случае, если узлы y_m и y_j принадлежат разным сторонам. Если они лежат на одной и той же стороне, тогда $\left(r \cdot n_y\right) = 0$. Поэтому на практике в (7) выражение b_{mj} из (6) следует применять только для вычисления недиагональных элементов матрицы, а для диагональных элементов $b_{mm} = 0$.

Для вычисления собственных частот предлагается следующий алгоритм. Когда волновое число k отлично от любого собственного значения, краевая задача (1) эквивалентна ГИУ (5) или СЛАУ (7). Решение СЛАУ, в свою очередь, существует и единственно тогда и только тогда, когда ее матрица невырождена, тогда собственные частоты соответствуют только тем случаям, когда эта матрица вырождена, т. е. когда ее число обусловленности теоретически бесконечно, а на практике – предельно велико. Поэтому достаточно пройти по всем значениям волнового числа k с малым шагом, вычисляя каждый раз число обусловленности CN (Condition Number) и выбирая значения частоты, для которых CN имеет резкий максимум.

Наихудшая ситуация для устойчивости алгоритма возникает, когда точки наблюдений $\left(y_m\right)$ и интегрирования $\left(y_j\right)$ находятся вблизи одного угла. В данном случае применим улучшение, предложенное в недавней работе [5]. Тогда коэффициенты вблизи угла α равны:

$$b_c^{\alpha} = \frac{k^2\left(r \cdot n_y\right)}{8\pi}\left(\frac{4\left(\pi - 2\alpha - 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\cos\alpha - 2}{\sin\alpha}\right)\right)}{k^2 h\,\sin\alpha}\right) - h\left(2\ln k - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha - \right. \tag{8}$$

$$\left. - \sin\alpha\ \mathrm{arctg}\left(\frac{\cos\alpha - 2}{\sin\alpha}\right) - \frac{\cos\alpha \ln\left(5 - 4\cos\alpha\right)}{2} - 2\ln\frac{h}{2} + \ln\left(5 - 4\cos\alpha\right) - 2\right)$$

4. Численная реализация и результаты расчета. Данный метод был реализован в авторской программе в среде программирования C++. Число обусловленности вычисляется в рамках метода исключения Гаусса [6]. В рамках расчетов рассматриваются частоты в диапазоне 20–202 Гц с шагом 0.001 Гц. Шаг по контуру: 0.1 м.

Для тестирования метода были выбраны три канонических треугольника (Рис. 2-4) для которых существуют явные методы расчета собственных частот [4]:

1, 3: $k_{mn} = \dfrac{4\pi}{3c}\sqrt{m^2 + mn + n^2},\ \left(m, n = 0,1,2,\ldots\right)$ (9)

2: $k_{mn} = \dfrac{\pi}{a}\sqrt{m^2 + n^2},\ \left(m \geq n,\ n = 0,1,2,\ldots\right)$ (10)

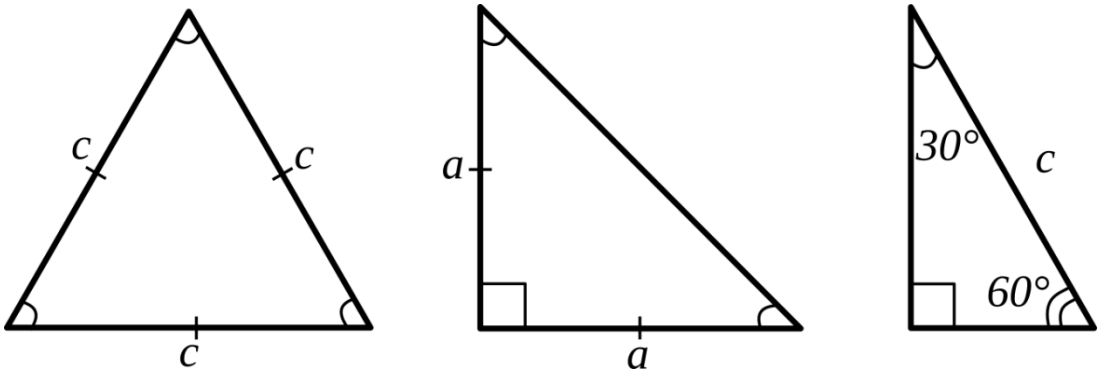


Рис. 2-4. Три канонических треугольника. Слева направо: Равносторонний треугольник с длиной стороны **c**; Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом $\boldsymbol{a}$; Прямоугольный треугольник с острыми углами 30° и 60° и гипотенузой **c**.

В результате вычислений были получены зависимости числа обусловленности от частоты (Рис. 5-7).

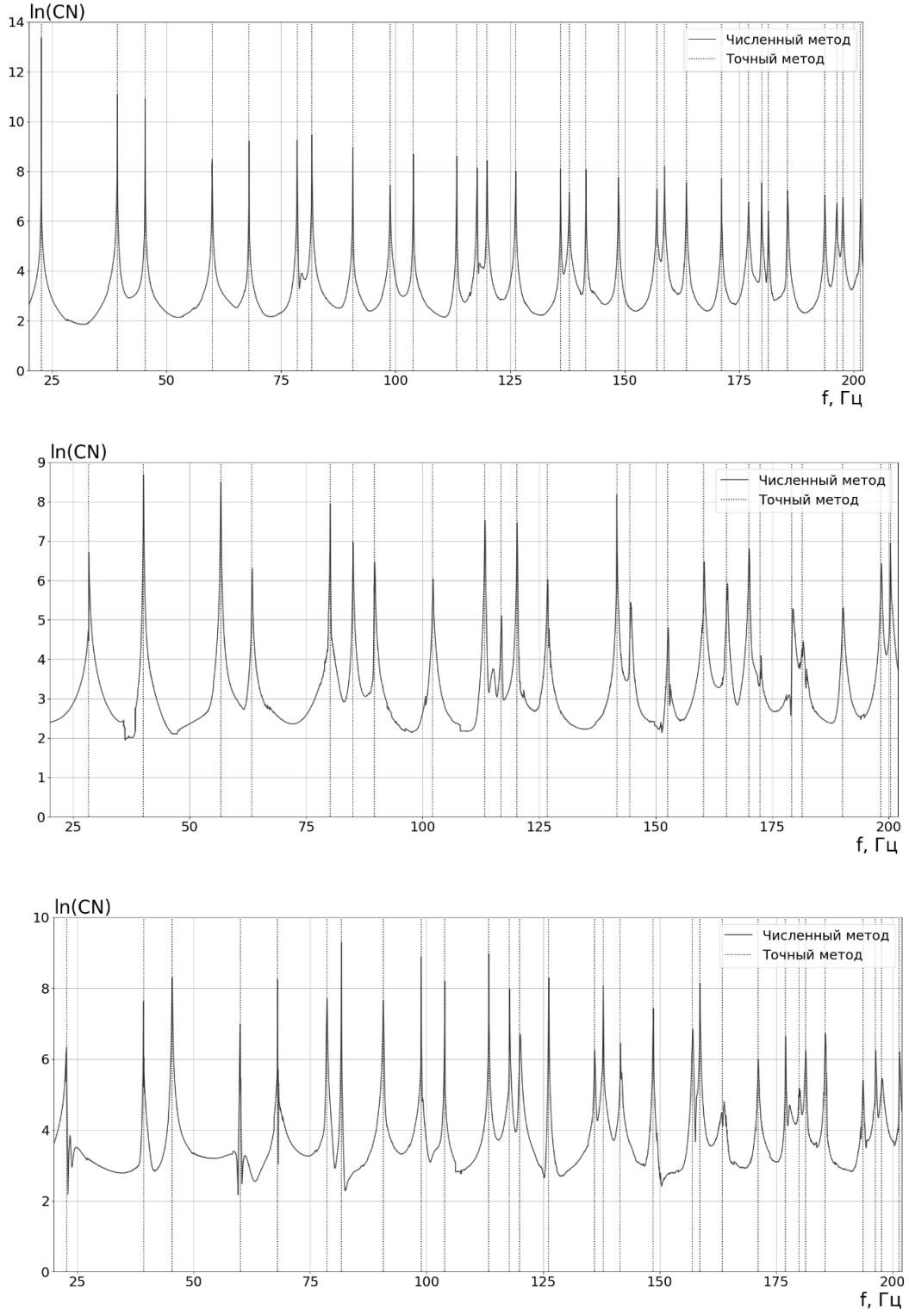


Рис. 5-7. Результаты для трех канонических треугольников, при $c = 10$ м, $a = 6$ м. Сверху вниз: равносторонний треугольник с длиной стороны c; равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a; прямоугольный треугольник с острыми углами $30°$ и $60°$ и гипотенузой c.

Табл. 1. Сравнение полученных собственных частот с точным значением для равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a.

№ Собственной частоты	1	2	3	4	5	6	7	8
Точное значение	28.333	40.096	56.667	63.355	80.139	85	89.598	102.157
Предложенный метод	28.382	40.111	56.693	63.426	80.185	85.05	89.71	102.244

№ Собственной частоты	9	10	11	12	13	14	15	16
Точное значение	113.333	116.821	120.208	126.71	141.667	144.472	152.58	160.277
Предложенный метод	113.386	116.9	120.277	126.828	141.672	144.671	152.685	160.399

№ Собственной частоты	17	18	19	20	21	22	23	24
Точное значение	165.21	170	172.345	179.196	181.422	190.066	198.333	200.347
Предложенный метод	165.384	170.074	172.583	179.465	181.689	190.235	198.428	200.358

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ), проект № 25-21-00139, выполняется в Южном федеральном университете.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pierce A.D. Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications. Acoustical Society of America: New York, 1991.
2. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. John Wiley: New York, 1983.
3. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. Dover: New York, 1965.
4. Сумбатян М.А., Скалия А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. Москва: Физматлит, 2013.
5. Сумбатян М.А. Титаренко Е.А. Эффективный метод расчета собственных частот для волнового уравнения внутри трапецевидной области // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2025, № 2, С. 13–22.
6. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Cambridge University Press: Cambridge, 2002.

Информация об авторах

Титаренко Евгений Александрович – аспирант, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов на-Дону, Россия. E-mail: evtitarenko@sfedu.ru

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики. Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов на-Дону, Россия.E-mail: sumbatma@mail.ru , masumbatyan@sfedu.ru

УПРУГИЙ ИЗГИБ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Тоноян В.У., Гарибян С.М., Аракелян А.А.

В работе методом Галеркина-Власова решена задача упругого выпучивания тонкой пластины (длиной a и шириной b) под действием одноосной равномерной сжимающей нагрузки, приложенной к двум противоположным шарнирно опертым краям ($x=0$ и $x=a$), при этом край $y=0$ шарнирно оперт, а край $y=b$ свободен. Математическое моделирование задачи приводит к краевой задаче относительно дифференциальных уравнений в частных производных с граничными условиями на краях пластины. При соответствующем выборе базисных функций метод Галеркина-Власова краевая задача преобразуется в интегральное уравнение и, в конечном итоге, в обыкновенные дифференциальные уравнения. Характеристическое уравнение потери устойчивости получается в виде трансцендентного уравнения из условия существования нетривиальных решений системы однородных уравнений. Корни трансцендентного уравнения, полученные с помощью численных методов, используются для определения упругих критических нагрузок при различных соотношениях сторон (a/b) и коэффициента Пуассона $\mu = 0.25$. Установлено, что критическая упругая нагрузка потери устойчивости соответствует первой форме потери устойчивости, и значения критических нагрузок, полученные в расчётах, находятся в хорошем согласии со значениями, ранее полученными Тимошенко.

1. Введение

Задачи упругой потери устойчивости пластин возникают при действии нагрузок и широко распространены в инженерной практике [1-5]. Обычно потеря устойчивости происходит внезапно и может привести к катастрофическому разрушению конструкции. Поэтому необходимо определить значения критической нагрузки, чтобы избежать преждевременного разрушения. Ранние исследования потери устойчивости пластин пренадлежат Навье, который, используя гипотезы Кирхгофа, вывел дифференциальное уравнение устойчивости прямоугольных пластин. С тех пор исследования потери устойчивости пластин различных форм, с разнообразными граничными и нагрузочными условиями были представлены в работах многих авторов [6-11].

2. Основные уравнения

Рассматривается прямоугольная пластина длиной a, шириной b и толщиной h, нагруженная одноосной сжимающей силой N_x, как показано на рисунке 1. Применяется теория упругой потери устойчивости пластин, выраженная в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z, где x и y лежат в срединной плоскости, а z направлена перпендикулярно к срединной плоскости.

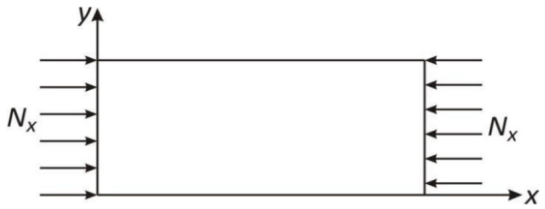


Рис.1. Пластинка, нагруженная одноосной сжимающей силой N_x

Для математического моделирования поставленной задачи принимаются следующие предположения [1]:

a) прогибы малы, а максимальные прогибы меньше толщины пластины

b) срединная плоскость пластинки нерастяжима

c) толщина пластинки мала по сравнению с остальными размерами

d) плоские поперечные сечения поворачиваются при изгибе, но остаются ортогональными к серединной поверхности и не искажаются.

Компоненты вектора перемещений заданы выражениями:

$$\bar{u} = -z\frac{\partial w}{\partial x},\ \bar{v} = -z\frac{\partial w}{\partial y},\ \bar{w}(x,y,z) = w(x,y) \tag{1}$$

где $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ - компоненты перемещений вдоль координатных осей x, y, z соответственно, $w(x,y)$ - поперечный прогиб произвольной точки (x,y) на серединной плоскости (при $z=0$).

Для рассматриваемой задачи уравнение упругой потери устойчивости выраженное через прогиб пластины $w(x,y)$ получается в следующем виде [1,12-15]:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{2}$$

или

$$\nabla^4 w(x,y)+\frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{3}$$

где оператор ∇^4 обозначает бигармонический дифференциальный оператор (оператор Лапласа четвертого порядка), $D=Eh^3/12\left(1-\mu^2\right)$.

Граничные условия для защемлённого края – на защемлённом краю прогиб и наклон должны быть равны нулю. Например, ддоль защемлённого края $x=a$

$$\begin{aligned} &w(x,y)\big|_{x=a}=0\\ &\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a}=0 \end{aligned} \tag{4}$$

Условия шарнирного опирания – на кромке с шарнирным опиранием, например, при $x=a$, прогиб $w(x,y)$ и изгибающий момент равны нулю.

$$\begin{aligned} &w(x,y)\big|_{x=a}=0\\ &M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=a}=0 \end{aligned} \tag{5}$$

Свободный край – на свободной кромке изгибающий момент и поперечная сила равны нулю.

3. Методология решения

Рассматривается задача потери устойчивости тонкой пластинки, которая шарнирно оперта по краям $x=0$, $x=a$, $y=0$ и свободна по краю $y=b$. Начало координат выбрано в одном из углов пластины. Равномерное сжимающее усилие приложено по сторонам $x=0$ и $x=a$. Функция прогиба выбирается по методу Власова в виде линейной комбинации произведений собственных функций свободных колебаний балки Эйлера-Бернулли в направлении x и неизвестной функции $A_n(y)$ вдоль координаты y в следующем виде:

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a} \tag{6}$$

где n - положительное целое число, определяющее порядковый номер формы потери устойчивости. Вариационное уравнение Галёркина-Власова для рассматриваемой задачи приводится к следующему интегральному уравнению:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^b\left(A_n^{IV}(y)-2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2A_n''(y)+\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4-\frac{N_x}{D}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]A_n(y)\right)I_{mn}dy=0 \tag{7}$$

где:

$$I_{mn}=\int_0^a\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

Благодаря ортогональности синус-функций, которые используются в качестве базисных функций по координате x , получаем:

$$I_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \dfrac{a}{2} & \text{при } m = n \end{cases}$$

4. Численные результаты

Обозначим $n\pi/a = \beta_n$. Тогда дифференциальное уравнение четвертого порядка можно записать в компактной форме следующим образом:

$$A_n^{IV}(y) - 2\beta_n^2 A_n''(y) + \left[\beta_n^4 - \frac{N_x}{D}\beta_n^2\right] A_n(y) = 0 \tag{8}$$

Решение уравнения (8) найдем методом неопределенных коэффициентов в следующем виде:

$$A_n(y) = c_1 \mathrm{ch}(\alpha_1 y) + c_2 \mathrm{sh}(\alpha_1 y) + c_3 \cos(\alpha_2 y) + c_4 \sin(\alpha_2 y) \tag{9}$$

где

$$\alpha_1 = \pm\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}\beta_n^2} + \beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \alpha_2 = \pm\left(\sqrt{\frac{N_x}{D}\beta_n^2} - \beta_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Из геометрических условий вдоль $y = 0$ и $y = b$ получаем, что $N_x > D\left(n\pi/a\right)^2$. Постоянные интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 определяются из условий на границах $y = 0$ и $y = b$.

В случае, когда три края шарнирно оперты, а четвертый свободно перемещается, условие существования нетривиальных решений приводит к следующему характеристическому уравнению потери устойчивости

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \mathrm{sh}\alpha_1 b & -\lambda_2 \sin\alpha_2 b \\ \alpha_1\lambda_2 \mathrm{ch}\alpha_1 b & -\alpha_2\lambda_2 \cos\alpha_2 b \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

где

$$\lambda_1 = \alpha_2^2 - \mu\beta_n^2$$

$$\lambda_2 = \alpha_2^2 + \mu\beta_n^2$$

В раскрытой форме характеристическое уравнение потери устойчивости (10) примет следующее выражение:

$$-\alpha_2^2\lambda_1^2 \mathrm{sh}(\alpha_1 b)\cos(\alpha_2 b) + \alpha_1^2\lambda_2^2 \mathrm{ch}(\alpha_1 b)\sin(\alpha_2 b) = 0 \tag{11}$$

Неизвестные параметры α_1 и α_2 определяются численно, решая характеристическое уравнение потери устойчивости (11). Далее вычисляются значения критических нагрузок упругой потери устойчивости N_x при $\mu = 0.25$, для форм потери устойчивости с формами $n = 1$ и $n = 2$, а также для различных значений отношения сторон пластинки a/b.

В таблице 1 введены следующие обозначения:

$$K\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{N_{x,cr} b^2}{\pi^2 D}, \qquad N_{x,cr} = K\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{\pi^2 D}{b^2}\right)$$

Критическая упругая нагрузка потери устойчивости определяется для первой формы потери устойчивости $n = 1$, поскольку значение $K\left(\frac{a}{b}\right)$ при $n = 1$ меньше, чем при $n = 2$ для всех рассматриваемых значений отношения сторон a/b.

Таблица 1. Безразмерные критические нагрузки (коэффициенты потери устойчивости) пластинки, нагруженной вдоль граней $x=0$ и $x=a$:

a/b	$K\left(\frac{a}{b}\right)$ при $n=1$ Результаты настоящего исследования	$K\left(\frac{a}{b}\right)$ при $n=2$ Результаты настоящего исследования	Тимошенко [15] $K\left(\frac{a}{b}\right)$ при $n=1$	% Различие между результатами настоящего исследования ($n=1$) и результатами Тимошенко [15]
0.4	6.6367	25.2899		
0.6	3.1921	11.4675		
0.8	1.9894	6.3667		
1.0	1.4342	4.4036	1.44	-0.403
1.5	0.8880	2.2022		
2	0.6979	1.4342	0.698	-0.0205
2.5	0.6104	1.0798	0.610	0.0656
3	0.5630	0.8879	0.564	-0.1773
3.5	0.5345	0.7726		
4	0.5161	0.6979	0.517	-0.1741
4.5	0.5034	0.6469		
5	0.4944	0.6104		
5.5	0.4877	0.5835		
6	0.4826	0.5630		

Функция формы потери устойчивости при критическом режиме (при $n=1$) имеет следующий вид:

$$w(x,y)=\left(\lambda_1 \mathrm{sh}\alpha_1 b \sin\alpha_2 y+\lambda_2 \mathrm{sh}\alpha_1 y \sin\alpha_2 b\right)\sin\frac{\pi x}{a}$$

5. Выводы

В работе с использованием вариационного метода Галёркина–Власова решена задача упругой потери устойчивости рассматриваемой тонкой прямоугольной пластинки, нагруженной односторонней сжимающей нагрузкой N_x вдоль двух противоположных шарнирно закреплённых краев $x=0$ и $x=a$. Математическим моделированием задача приведена к краевой задаче с соответствующими условиями. Метод Власова позволила использовать собственные функции колебаний шарнирно опертой балки Эйлера–Бернулли в качестве базисных функций вдоль координатного направления x. Получена функция прогиба в виде линейной комбинации собственных функций по координате x. Выведено характеристическое уравнение потери устойчивости, полученное из условия существования нетривиального решения уравнения движения. Решение характеристического уравнения потери устойчивости найдено численными методами и вычислены критические упругие нагрузки для первых двух форм потери устойчивости ($n=1$ и $n=2$) при $\mu=0.25$ и различных значениях отношения сторон пластинки a/b. Коэффициенты потери устойчивости для первых двух мод колебаний приведены в таблице 1 для различных значений a/b. Из таблицы 1 следует, что критическая упругая потеря устойчивости наступает при первой форме потери устойчивости ($n=1$), поскольку коэффициенты потери устойчивости при $n=1$ меньше, чем соответствующие значения при $n=2$ для одинакового отношения сторон a/b. Получена также функция формы потери устойчивости. Полученные решения хорошо согласуются с результатами, приведёнными Тимошенко, который использовал иные методы расчёта. Разница между критической нагрузкой потери устойчивости, полученной в настоящем исследовании, и результатами Тимошенко варьируется от 0,403 % для $a/b=1$ до 0,1741 % для $a/b=4$ и в целом не превышает 0,5 %.

Исследование выполнено при поддержке Комитета по высшему образованию и науке РА (научный проект № 25RG-2C157).

ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. P and Gere J. M. 1985. Theory of Elastic Stability. McGraw Hill, New York.
2. Bulson P.S. 1970. The Stability of Flat Plates. Chatto and Windus, London, U.K.
3. Gambhir M.L. 2004. Elastic Buckling of Thin Plates In: Stability Analysis and Design of Structures. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-09996-4_8.
4. Chajes A. 1993. Principles of Structural Stability Theory. Englewood Cliffs New Jersey Prentice-Hall.
5. Wang C.M., Wang C.Y. and Reddy J.N. 2005. Exact solutions for buckling of structural members. Boca Raton Florida CRC Press LLC.
6. Shi G. 1990. Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method. International Journal of Solids and Structures. 26:1351-1370.
7. Shi G., Bézine G.P. 1990. Buckling analysis of orthotropic plates by boundary element method. Mechanics Research Communications. 17: 1-8.
8. Abodi J.T. 2012. Elastic buckling analysis of plates under in-plane patch loading using finite difference method. Journal of Kerbala University.10(2Scientific, 2012): 142 -150.
9. Batford S.B. and Houbolt J. C. 1946. Critical combination of shear and transverse direct stress for an infinitely long flat plate with edges elastically restrained against rotation NACA Report. 847, 8- 12.
10. Wang C.M., Xiang Y. and Chakrabarty J. 2001. Elastic/plastic buckling of thick plates. International Journal of Solids and Structures. 38: 8617-8640.
11. Xiang Y., Wang C.M. and Wang C.Y. 2001. Buckling of rectangular plates with an internal hinge. International Journal of Structural Stability and Dynamics. 1(2): 169-179.
12. Oguaghamba O. A., Ezeh J. C., Ibearugbulem M. O., Ettu L. O. 2015. Buckling and post buckling loads characteristics of all edges clamped thin rectangular plate. The International Journal of Science (IJES). 4(11): 55-61.
13. Ibearugbulem O. M., Osadebe N. N., Ezeh J. C., Onwuka D.O. 2011. Buckling analysis of axially compressed SSSS thin rectangular plate using Taylor - Maclaurin shape function. International Journal of Civil and Structural Engineering. 2(2): 676-681.
14. Osadebe N. N., Nwokike V. C. and Oguaghamba O. A. 2016. Stability analysis of SSSS thin rectangular plate using multi-degrees of freedom Taylor - Maclaurins series in Galerkin variational method. Nigerian Journal of Technology (NIJOTECH). 35(3 July 2016): 503-509. http://dx.doi.org/10.4314/nijt/v35i3.5.
15. Timoshenko S. 1936. Theory of elastic stability. McGraw Hill Publishing Co Ltd. DoI:https://doi.org/10.1007/S0368393100104389.

Информация об авторах

Тоноян Ваграм – Научный сотрудник группы гранта № 25RG-2C157, Институт механики НАНРА, тел.: +374 955 55076
E-mail: var10email@gmail.com

Гарибян Сусанна – Студент, Внештатный научный сотрудник группы гранта № 25RG-2C157, Институт механики НАН РА, тел.: +374 41 503421
E-mail: susannagharibyan662@gmail.com

Аракелян Артур – Научный сотрудник группы гранта № 25RG-2C157, Институт механики НАН РА, тел.: +374 77 681225
E-mail: arturarakelyan089@gmail.com

ПОВЫШЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН ИЗ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ МЕТОДОМ ПОВЕРХНОСТНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Торосян М.С., Стакян М.Г.

Рассматривается метод повышения усталостной прочности и долговечности тяжелонагруженных деталей машин из среднеуглеродистых конструкционных сталей при пластическом деформировании их рабочих поверхностей. Дана комплексная оценка их несущей способности с учетом материаловедческого, расчетно-конструкционного, технологического и эксплуатационного факторов и предложена математическая модель процесса упрочнения для определения оптимальных характеристик указанных факторов.

Введение

Рост выпуска машин различного назначения предполагает совершенствование и разработку новых технологических процессов, обеспечивающих повышение производительности, рабочих скоростей и их грузоподъемности с одновременным снижением материалоемкости. Одним из направлений достижения указанной цели является применение метода поверхностного пластического деформирования (ППД) рабочих поверхностей деталей, наиболее подверженных к разрушению из-за комплексного воздействия повреждающих явлений (усталость, старение, износ и пр.) [1].

Число действующих факторов на прочность деталей значительно, а варианты их сочетаний весьма разнообразны, что обусловлено конструктивными, технологическими особенностями и условиями их работы. Поэтому при классификации и группировке факторов необходим выбор основного из них, оказывающего превалирующее влияние. Это возможно с учетом регрессионных связей между показателями факторов, моделирующих исследуемый процесс и позволяющих принимать решения по совершенствованию конструкции отдельных элементов и повышению качества выпускаемой машины, что является актуальной задачей совершенствования машиностроительного производства [2].

Целью исследования является:

1. На основе комплексных исследований разработать многопараметрическую функциональную связь между технологическими параметрами ППД и материаловедческими, конструктивными, микрогеометрическими, усталостными показателями деталей, а также создать обобщенную математическую модель ППД.

2. Используя семейства взаимосвязанных функций, построить номограммы, позволяющие при различном числе и сочетаниях рассмотренных величин определить комплекс оптимальных параметров, обеспечивающих надежность работы машины.

Методика исследования

Теоретическая часть исследования основана на положениях конструкционной механики, технологии машиностроения и математической статистики для выявления регрессионных связей и разработки математической модели ППД с использованием стандартных программных средств.

Использован метод системного анализа процессов и групп опытных данных с целью получения многопараметрических функциональных связей и построения номограмм для определения комплекса взаимосвязанных оптимальных параметров. В экспериментальной части работы использовано оборудование базовой научной лаборатории Машиностроения НПУА [3].

Результаты исследования

Необходимость широкого применения метода ППД продиктована резким увеличением объемов машиностроительного производства и применением сравнительно доступных среднеуглеродистых и низколегированных сталей. Учитывая, что примерно 75% отказов машин и оборудования, в основном, зависит от усталостных, коррозионных и трибологических явлений, которые имеют место в работе транспортных средств, с/х машин и оборудования, необходимо

параллельно с совершенствованием упрочняющих технологий также уточнить методы количественной оценки работоспособности упрочненных деталей. Учитывая большое количество одновременно действующих факторов при ППД, а также разнообразие их сочетаний и доминантность одного из них, продиктованную условиями решения конструкторско–технологических и эксплуатационных задач, необходимо использовать метод системного анализа для получения оптимальных значений параметров, который в ранее проведенных исследованиях ППД не применялся [4].

На основе системного анализа данных (665 серий испытаний) представлена математическая модель процесса упрочнения в виде общей многопараметрической функциональной связи

$$\Phi_1\left[(\sigma_B, \sigma_R, HB), \left(C_{(v)}, m_{(v)}, N_{G(v)}, d, \alpha_\sigma\right), (F, V, S, t, HV, \Delta h)\right] = 0, \quad (1)$$

которую необходимо заменить системой параметрических уравнений

$$\Delta h = \varphi_1(F, S),\ HV = \varphi_2(\Delta h),\ \bar{\sigma}_{R(v)} = \varphi_3(\Delta h, \bar{\alpha}_\sigma, d),$$
$$d = \varphi_4\left(\bar{\sigma}_{R(v)}, \bar{\alpha}_\sigma, \Delta h\right),\ \bar{m}_{(v)} = \varphi_5\left(\bar{\sigma}_{R(v)}\right),\ \bar{C}_{(v)} = \varphi_6\left(\bar{m}_{(v)}\right),\ \bar{m}_{(v)} = \varphi_7(HV_{max}), \quad (2)$$
$$\bar{m}_{(v)} = \varphi_8(\Delta h),\ \bar{\sigma}_{R(v)} = \varphi_9\left(lg\bar{N}_{G(v)}\right),\ lg\bar{N}_{G(v)} = \varphi_{10}(\Delta h),$$

где (σ_B, σ_T, HB) - предварительные характеристики образцов, ($\bar{C}_{(v)}$, $\bar{m}_{(v)}$, $\bar{\sigma}_{R(v)}$, $\bar{N}_{G(v)}$), (d, $\bar{\alpha}_\sigma$) - показатели медианных кривых усталости, геометрических параметров и форм, (F, V, S) – параметры процесса упрочнения, ($HV, HV_{max}, \Delta h$) - показатели состояния упрочненных поверхностных слоев. Уравнения системы (2) также являются многопараметрическими функциями, но они предназначены для решения частных задач (конструкторских, технологических или эксплуатационных). Их особым свойством является классификация параметров данной функции на доминантные (в качестве аргумента) и вторичные, исходя из целей, предъявляемых к конструкции машины, и характера действующих факторов [5].

Из (2) рассмотрены функции $\bar{m}_{(v)} = \varphi_5\left(\bar{\sigma}_{R(v)}\right)$, $\bar{C}_{(v)} = \varphi_6\left(\bar{m}_{(v)}\right)$ и $\bar{\sigma}_{R(v)} = \varphi_9\left(lg\bar{N}_{G(v)}\right)$, представляющие интерес для практических расчетов. Графический анализ данных показывает наличие прямолинейной связи между показателями (рис. 1, коэффициент детерминации: $R = 0{,}91 \cdots 0{,}99$). Отмечается также плотное распределение функций, что позволяет получить обобщенные регрессионные связи для комплексной оценки ППД от действия нескольких групп параметров [6].

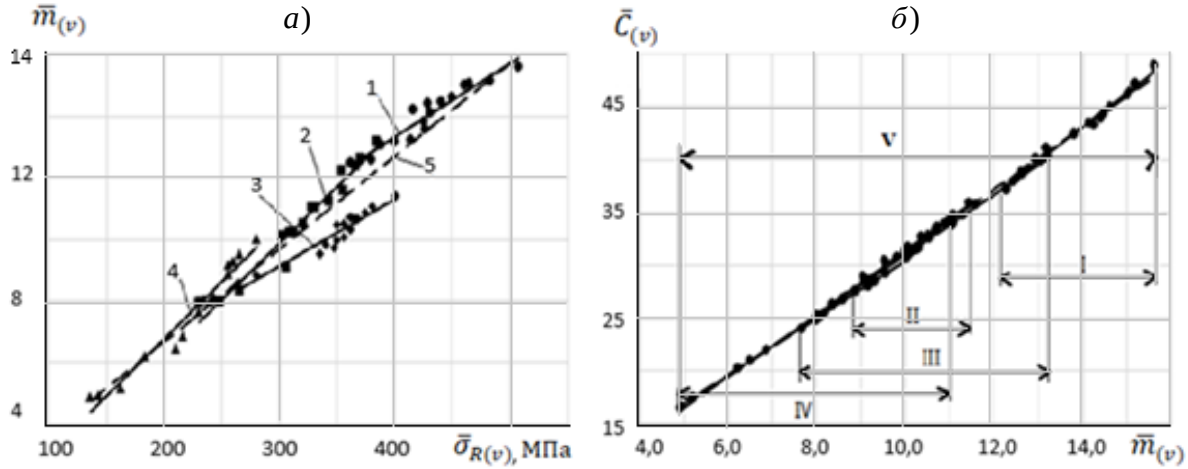


Рис. 1. Функции $\bar{m}_{(v)} = \varphi_5\left(\bar{\sigma}_{R(v)}\right)$ (а) и $\bar{C}_{(v)} = \varphi_6\left(\bar{m}_{(v)}\right)$ (б):

а - линии $1, \cdots, 4$ и ●, ♦, ■, ▲ соответствуют $\bar{\alpha}_{\sigma 1}, \cdots, \bar{\alpha}_{\sigma 4}$, 5 - общая линия;
б - отрезки $I, \cdots, IV$ соответствуют $\bar{\alpha}_{\sigma 1}, \cdots, \bar{\alpha}_{\sigma 4}$, V-общему интервалу $\bar{m}_{(v)}$

Учитывая, что физико–механическое состояние поверхностных слоев после ППД окончательно формирует циклическую прочность и долговечность деталей, выполнены массовые измерения величин HV, R_a, R_z, R_{max} на наклонных полированных площадках 15 упрочненных образцов ($D = 35{,}5$*мм*, $\alpha = 2^0 20'$) из стали *40Х* при режимах $V = 52{,}2$*м/мин*,

$F = 100;\ 200;\ 300;\ 400;\ 500H$ и $S = 0{,}050;\ 0{,}100;\ 0{,}150$*мм/об* для каждого значения F, которые обеспечили глубину упрочненного слоя $\Delta h = 0 \cdots 0{,}15$*мм*. Сетевая схема измерения составлена с учетом градиентов функций HV и Δh на наклонной площадке с переменными шагами $\delta x_i = 0{,}2; 0{,}5; 1{,}0$*мм* и $\delta y_i = 0{,}5$*мм* (рис. 2) [7]. При этом глубина $\Delta h_{x_i y_i}$ в произвольной точке M_i' (рис. 2б) определяется из геометрического соотношения:

$$\Delta h_{x_i y_i} = D/2 - \sqrt{(D/2 - x_i sin\alpha)^2 + y_i^2}.$$

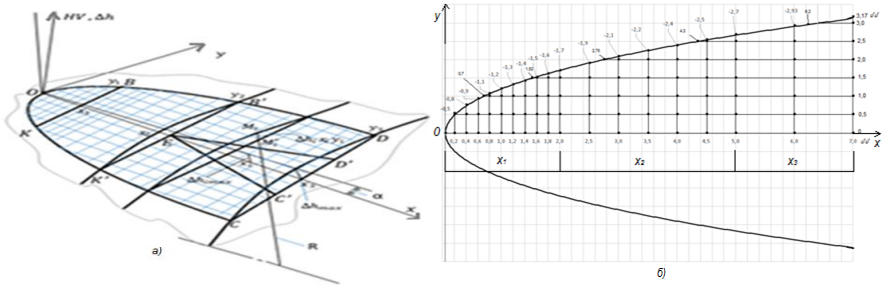


Рис. 2. Цилиндрический образец и схема измерения микротвердостей HV:
а - геометрические параметры наклонной площадки; б - графическая схема измерения HV

Путем классификации полученных данных создана база данных и получены регрессионные уравнения (2), позволяющие составить отдельные системы уравнений, которые фактически являются математическими моделями конкретных задач производства. Другой особенностью такого подхода является возможность комплексного получения всех оптимальных значений указанных параметров с использованием номографического метода представления уравнений (2) [8]. Такими специальными функциями являются:

$$\Phi_2[(F,S),(\Delta h, HV, HV_{max})] = 0, \quad (3)$$

$$\Phi_3[(F,S),(\Delta h, HV, x, y)] = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_4[(F,S),(HV, HV_{max}, \Delta h),(R_a, R_z, R_{max})] = 0, \quad (5)$$

$$\Phi_5[(F,S),(d,\alpha_\sigma),(\bar{\sigma}_{Rv}, lg\bar{N}_{Gv}, \bar{m}_v, \bar{C}_v),(HV_{max}, \Delta h)] = 0, \quad (6)$$

для решения которых необходимо выявить закономерности изменения R_a, R_z, R_{max} и $HV, HV_{max}, \Delta h$ на поверхностях и наклонных площадках образцов (рис. 3).

Разнообразное изменение HV в связи с вариацией Δh_i для решения систем (3)-(5) предполагает рассмотрение HV в координатных системах (HV, x, y), $(\Delta h, x, y)$(рис. 3).

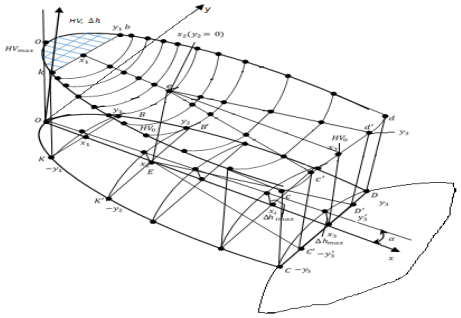


Рис. 3. Функция $HV = \varphi_3(x, y)$ в системе координат (HV, x, y)

Для этого необходимо определить геометрические параметры отдельных участков контура и наклонной площадки, в пределах которых вид функций $HV = p_1(x, y)$ или $HV = p_2(x)$, $HV = p_3(y)$ остается неизменным (рис. 3): а) - $KOB, 0 \cdots x_1, 0 \cdots \pm y_1$; б) -$KK'B'B$, $\Delta x_1 = (x_2 - x_1)$ $\Delta y_1 = \pm(y_2 - y_1)$; в) - $K'CC'E$ и $B'DD'E$, $\Delta x_2 = (x_3 - x_2)$, $\Delta y_2 = \pm(y_3 - y_2)$; г) - $C'DE'$, Δx_2, $\Delta y_3 = 0 \cdots \pm y_3'$. По всему контуру и на участке KOB, где глубина снятого слоя незначительна $(\Delta h_i = 0 \cdots 0{,}0245$ *мм*), имеем $HV = HV_{maxi} = const$, а на участке $C'ED'$, где фактически полностью снят упрочненный слой, будем иметь $HV = HV_0 = const$ [9]. На

остальных участках вид функции $HV = p_1(x, y)$ сохраняется. Учитывая переменность геометрических параметров, получены также регрессионные уравнения дополнительных функций:

$HV = p_2(x),\ HV = p_3(y),\ A_1 = \psi_1(F,S),\ A_2 = \psi_2(F,S),\ x_1 = \psi_3(F,S),$
$x_2 = \psi_4(F,S),\ y_3 = \psi_5(F,S),\ \Delta x_1 = \psi_6(F,S),\ \Delta x_2 = \psi_7(F,S),$ (7)

где A_1 и A_2 – площади участков KOB и $C'ED'$, *мм* ^{2}.

Классификация и совместная обработка данных выполненных исследований и настоящей работы методами регрессионного анализа позволили получить около 200 уравнений функций (6), (7) при различных сочетаниях/количествах их аргументов и параметров при $R^2 = 0{,}91 \cdots 0{,}99$, которые классифицированы следующим образом: прямолинейные - 32%; параболические 2-й степени - 41% и 3-й степени - 13%; гиперболические со степенью $m = -(0{,}11 \cdots 0{,}20)$ - 4%; постоянные функции - 10%. Решение специальных задач предполагает их использование в комплексном виде, выбирая из (2) взаимосвязанные функции, исходя из требований, предъявляемых к конструкции и эксплуатации машины [10]. Такой является функция (5), а вторым этапом расчетных процедур - совместное представление уравнений (2) в I-IV квадрантах координатной системы методами номографии (рис. 4). Это позволит простыми графическими построениями в оперативном порядке получить оптимальные значения параметров ППД и состояния поверхностных слоев, не прибегая к справочным и производственно–нормативным материалам.

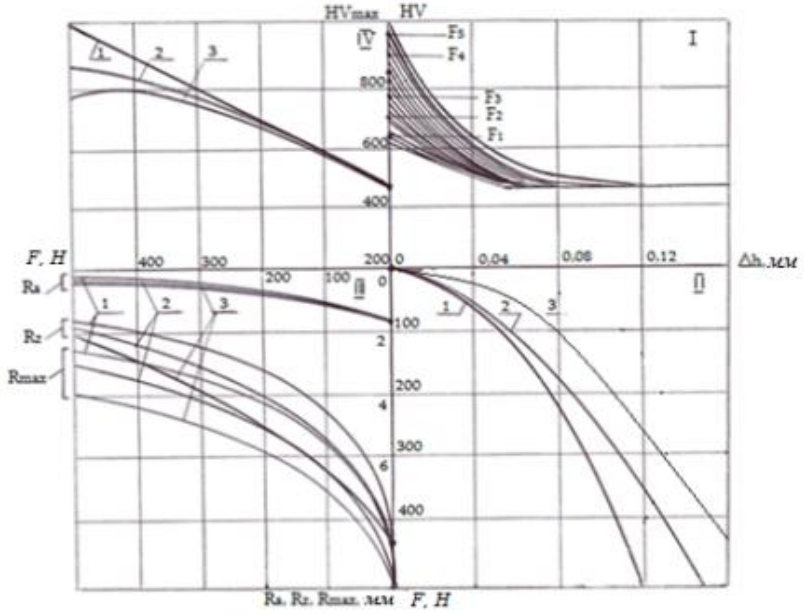


Рис. 4. Номограмма функции $\Phi_4[(F,S),(HV,HV_{max},\Delta h),(R_a,R_z,R_{max})] = 0$. *В квадрантах* $I,\cdots,IV$ *представлены функции: I -* $HV = \varphi_1(\Delta h)$, *II -* $\Delta h = f_1(F,S)$,*III -* $R_a,R_z,R_{max} = f_{3,4,5}(F,S)$, *IV -* $HV_{max} = f_2(F,S)$. *Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям* $S = 0{,}050, 0{,}100$ *и* $0{,}155$ *мм/об.*

Заключение

В результате выполненного исследования составлена база известных экспериментальных данных выполненных испытаний на усталость, сгруппированных по режимам нагружения, геометрическим формам и типу ППД. Представлены: методика оценки воздействия ППД на показатели циклической прочности стальных образцов с учетом изменения показателей медианных линий усталости и физико-механического состояния поверхностных слоев, а также формирование обобщенной функциональной взаимосвязи между указанными параметрами. Выполнена классификация медианных пределов выносливости, усталостных коэффициентов и получены регрессионные уравнения их взаимосвязи с параметрами ППД. На этой основе создана математическая модель исследования процессов ППД и построена номограмма для определения оптимальных значений всей группы параметров ППД и показателей циклической прочности.

Получены следующие результаты, отличающиеся новизной:

1. Создана графическая схема измерения микротвердостей *HV* по глубине упрочненного поверхностного слоя образцов и сформирована *3D* система распределения *HV*.

2. Выявлены функциональные связи между физико-механическими показателями упрочненных поверхностных слоев и параметрами технологии ППД при комплексном воздействии различного рода факторов и сформирована математическая модель ППД.

3. Выявлены связи между пределами выносливости, базовой циклической долговечностью, коэффициентами сопротивления усталости и параметрами этих факторов с учетом доминантности их применения, продиктованной требованиями выполнения расчетов.

4. Дано номографическое построение многопараметрических функциональных связей, позволяющее в производственных условиях получить оптимальные значения необходимых показателей или решить обратные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нежинский А.М. Совершенствование технологии обработки поверхностей деталей машин методами поверхностно-пластического деформирования//Тех. машиностр. 2007, № 10, С. 13-22.
2. Систани Ш. Дж., Торосян М.С. Оценка сопротивления усталости деталей при поверхностном пластическом деформировании. Вестн. ГИУА(П). Механика, машиноведение, машиностроение. 2013, №2, С. 58-63.
3. Ежелев А.В., Бобровский И.Н., Лукьянов А.А. Анализ способов обработки поверхностно-пластическим деформированем // Фундаментальные исследования. – 2012. - № 6-3. - С. 642-646.
4. Ստակյան Մ.Գ., Թորոսյան Մ.Ս. Միկրոկարծրության փոփոխությունը մակակոփված լիսեռների մակերևութային շերտերում // ՃՇՀԱՀ Տեղեկագիր.-2017.-56, N 3.-էջ 41-49:
5. Ստակյան Մ.Գ., Սիսթանի Շ.Ջ., Հայկազյան Մ.Է. Աշխատանքային մակերևույթների ամրացման գործընթացի մաթեմատիկական մոդելավորումը ՀԳԱԱ և ՀՊՃՀ տեղեկագիր. ՏԳ սեր.- 2013.- Հ.66, №1.- էջ 20-27:
6. Стакян М.Г., Маргарян Э.А., Ильев Д.Б. Расширение возможностей метода наименьших квадратов, применяеного в различных исследованиях. Международный научный журнал (г. Москва). 2011, N-4, С. 65-70.
7. Торосян М.С. Повышение несущей способности валов методом поверхностного пластического деформирования рабочих поверхностей // Сб. мат. Междунар. н.-т. конф. МАДИ: “Детали машин и теория механизмов”, 3 февр. 2015г. – Уфа: Аэрита, 2015.- С. 52-57.
8. Попов М.Е. и др. Технологические процессы поверхностного пластического деформирования: Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2007.- 404с.
9. Торосян М.С., Стакян М.Г. Исследование воздействия упрочняющих технологий на показатели сопротивления усталости валов// Вестн. НПУА. Сб. научн. ст. - Ереван: «Чартарагет», 2017. - Ч. 2.- С. 526-537.
10. Пачурин Г.В., Гущин А.Н. Повышение эксплуатационной долговечности металлоизделий технологическими методами// Вестн.машиностр.- 2007.- N 6.-С. 62-65.

Сведения об авторах

Торосян Мгер Сережаевич – к.т.н., младший научный сотрудник лаборатории экспериментальных исследований Института механики НАН Армении, Ереван, Армения тел. +374-55-72-82-22, E-mail - mhertorosyan@list.ru

Стакян Мигран Григорьевич – д.т.н., проф., Национальный университет архитектуры и строительства Армении, Ереван, Армения, тел. +374-33-55-45-60,
E-mail - stakyan.mihran@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФРИКЦИОННОГО РАЗОГРЕВА ТОНКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНТАКТА

Торская Е.В., Степанов Ф.И.

Трибологические и механические характеристики высокочувствительных к температуре поверхностных слоев могут изменяться благодаря фрикционному нагревому. Для моделирования процесса необходимо решить связанную задачу теплового контакта с движущимся источником тепла. Разработана модель процесса для упругих и вязкоупругих поверхностных слоев, механические свойства которых изменяются в зависимости от температуры из-за неоднородного фрикционного нагрева материала в пятнах контакта. Используются несколько нелинейных моделей слоев. Аналитически сформулированы методы расчета коэффициентов влияния на контактные и тепловые задачи.

1. Существует большое количество исследований, в которых экспериментально показано влияние температуры на упругие и прочностные свойства материалов [1-3]. В условиях трения происходит локальный разогрев взаимодействующих тел вблизи области контакта, что может влиять на свойства материалов. В этом случае, в связи с неоднородностью поля температур, возникает эффект нелинейности свойств материала, находящегося в контакте. Материалы, для которых учет этого эффекта может оказаться важным, должны иметь относительно низкий коэффициент теплопроводности, высокий коэффициент трения и выраженную зависимость механических свойств от температуры. Одной группой таких материалов являются парафины (воски), обладающие относительно низкой теплопроводностью и существенной зависимостью структуры, фрикционных и механических свойств от температуры [4]. Второй группой являются различного типа полимеры, например, модифицированные полиуретаны [5].

Целью данной работы является разработка модели, позволяющей учитывать нелинейность свойств поверхностных слоев материалов, обусловленную неравномерным фрикционным разогревом, а также анализ влияния фактора нелинейности на контактные характеристики, температуры и напряжения.

2. Рассмотрим скольжение гладкого индентора по границе упругого или вязкоупругого слоя, связанного с упругим полупространством (рис. 1). Скорость скольжения *V*, сила *P*, действующая на индентор, и толщина слоя *h* постоянны. Используем декартову систему координат *Oxyz*, где начало координат *O* взято в точке начального контакта индентора со слоем.

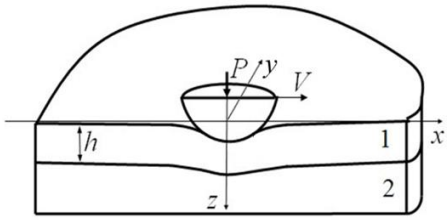


Рис.1 Схема контакта: (1) упругий или вязкоупругий слой толщиной *h*; (2) линейно-упругое полупространство. *P* — контактная нагрузка; *V* — скорость скольжения.

Рассмотрим случай линейно-упругого контр-тела. Упругие свойства индентора и полупространства описываются следующими константами: модули Юнга индентора и полупространства E_0, и E_2 соответственно, коэффициенты Пуассона ν_0 and ν_2.

Для тонких поверхностных слоев будем использовать одномерную модель материала с податливостью

$$C = \frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)h}{(1-\nu_1)E_1} \qquad (2.1)$$

Здесь ν_1 – коэффициент Пуассона материала слоя. При скольжении контактирующие тела нагреваются за счет работы силы трения. Модуль упругости слоя $E_1\left(T\left(x,y\right)\right)$ зависит от температуры. Зависимость может быть определена из экспериментальных данных. В рассматриваемых задачах податливость *C* является также функцией температуры $C\left(T\left(x,y\right)\right)$.

Рассмотрим три часто используемые модели слоя.

A. Модель Винклера:

$$w_l(x,y) = C\left(T\left(x,y\right)\right)\sigma_z(x,y) \tag{2.2a}$$

Здесь w_l – нормальное смещение слоя.

B. Модель слоя Максвелла

$$\dot{w}_l(x,y) = C\left(T\left(x,y\right)\right)\left(\frac{\sigma_z(x,y)}{\tau_\sigma} + \dot{\sigma}_z(x,y)\right) \tag{2.2b}$$

где τ_σ – время релаксации.

C. Модель стандартного вязкоупругого тела:

$$w_l(x,y) + \tau_\varepsilon \dot{w}_l(x,y) = C\left(T\left(x,y\right)\right)\left(\sigma_z(x,y) + \tau_\sigma \dot{\sigma}_z(x,y)\right) \tag{2.2c}$$

где τ_ε и τ_σ – времена последействия и релаксации.

На поверхности выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &w_{Ind}(x,y) + w_{HS}(x,y) + w_l(x,y) = f(x,y) + D, \quad \tau_{xz}^{(1)} = -\mu p(x,y), && (x,y) \in \Omega \\ &\sigma_z^{(1)} = 0, && (x,y) \notin \Omega \\ &\tau_{yz}^{(1)} = 0, && -\infty < x, y < \infty \end{aligned} \quad , \tag{2.3}$$

Здесь функция $f(x,y)$ описывает форму индентора, *D*- внедрение, $p(x,y)$ и Ω – неизвестные контактные давления и область контакта, μ – коэффициент трения, w_{Ind}, w_{HS}, w_l – нормальные смещения индентора, полупространства и слоя. Также используется уравнение равновесия:

$$P = \iint_\Omega p(x,y)dy \tag{2.4}$$

Для учета влияния нелинейности материалов использовался численно-аналитический метод граничных элементов. Поверхность разбивалась на элементы, в каждом из которых податливость слоя была постоянной. На первом этапе в результате стандартной итерационной процедуры определялось контактное давление в предположении, что податливость слоя постоянна и соответствует температуре окружающей среды. Давление использовалось для расчета температуры в слое (решения тепловой задачи).

3. Фрикционный нагрев двухслойного полупространства происходит со стороны индентора. Скорость достаточно мала, чтобы рассматривать задачу как стационарную:

$$\Delta T_i = 0, \quad i = 1,2 \tag{3.1}$$

Запишем граничные условия для температуры слоя $T_1(x,y,z)$ и полупространства $T_2(x,y,z)$. На поверхности слоя ($z = 0$), тепловой поток, генерируемый в области контакта:

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} -q(x,y)/\lambda_1 & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \notin \Omega \end{cases}, \tag{3.2}$$

Здесь $q(x,y)$ – удельная мощность тепловыделения при трении, определяемая соотношением:

$$q(x,y) = \alpha\mu V p(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{3.3}$$

α – коэффициент разделения тепловых потоков, *V* – скорость скольжения. Здесь мы используем упрощающее предположение, что вся энергия, необходимая для компенсации трения, преобразуется в тепло. На границе раздела слой-подложка ($z = h$):

$$, \ \lambda_1 \left.\frac{\partial T_1}{\partial z}\right|_{z=h} = \lambda_2 \left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{z=h}, \quad T_1(x,y,h) = T_2(x,y,h) \tag{3.4}$$

λ_i – коэффициент теплопроводности.

Соотношения (3.1)-(3.4) определяют решение тепловой задачи.

Воспользуемся системой координат, начало которой совпадает с точкой первоначального контакта. Интенсивность теплового потока на границе является функцией только координат (*x*,*y*). При решении задачи используются следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \varsigma = \frac{y}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad \theta_i = \frac{T_i \lambda_i}{q_0 R}$$

$$q_0 = \alpha\mu \frac{P}{Rt^*} \quad , \tag{3.5}$$

$$h' = \frac{h}{R}, \quad \lambda' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \lambda_1' = \frac{\lambda_1 t^*}{PT_0}, \quad Q = \frac{q}{q_0}$$

Здесь T_0 – начальная температура; t^* – параметр времени, который принимается равным 1с для модели слоя (2.2а) и $t^* = \tau_\sigma$ для вязкоупругих слоев. Тогда (3.1) преобразуется в:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \theta_i}{\partial \varsigma^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \zeta^2} = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.6}$$

Граничные условия (3.2)-(3.4) можно представить в виде:

$$\left.\frac{\partial \theta_1}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = \begin{cases} -Q(\xi,\varsigma) & (\xi,\varsigma) \in \Omega' \\ 0 & (\xi,\varsigma) \notin \Omega' \end{cases} \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial \theta_1}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=h'} = \left.\frac{\partial \theta_2}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=h'}, \quad \lambda' \theta_1(\xi,\varsigma,h') = \theta_2(\xi,\varsigma,h') \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6) с условиями (3.7) решаются с помощью двойного интегрального преобразования Фурье. Температура преобразуется следующим образом:

$$\tilde{\theta}_i(\alpha,\beta,\zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega'} \theta_i(\xi,\varsigma,\zeta) e^{i(\alpha\xi+\beta\varsigma)} d\xi d\varsigma, \tag{3.8}$$

Equation (3.6) leads to:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}_i}{\partial \varsigma^2} - \gamma^2 \tilde{\theta}_i = 0 \quad (\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2), \tag{3.9}$$

Граничные условия в пространстве интегральных преобразований имеют вид:

$$\left.\frac{\partial \tilde{\theta}_1}{\partial \varsigma}\right|_{\varsigma=0} = -\tilde{Q}, \qquad \tilde{Q}(\alpha,\beta) = \iint_{\Omega'} Q(\xi,\varsigma) e^{i(\alpha\xi+\beta\varsigma)} d\xi d\varsigma$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{\theta}_1}{\partial \varsigma}\right|_{\varsigma=h'} = \left.\frac{\partial \tilde{\theta}_2}{\partial \varsigma}\right|_{\varsigma=h'} \qquad \lambda' \tilde{\theta}_1(\alpha,\beta,h') = \tilde{\theta}_2(\alpha,\beta,h') \quad , \tag{3.10}$$

Общее решение дифференциальных уравнений (3.9) можно представить в виде:

$$\tilde{\theta}_i(\gamma,\varsigma) = A_i(\gamma) e^{-\gamma\varsigma} + B_i(\gamma) e^{\gamma\varsigma}, \tag{3.11}$$

Используя (3.8), можно получить следующие выражения для неизвестных функциональных коэффициентов:

$$A_1 = \tilde{Q} \frac{1}{\gamma(1+\omega e^{-2\gamma h'})} \quad B_1 = \tilde{Q} \frac{-\omega e^{-2\gamma h'}}{\beta(1+\omega e^{-2\gamma h'})}$$

$$A_2 = \tilde{Q} \frac{1+\omega}{\beta(1+\omega e^{-2\gamma h'})} \qquad B_2 = 0 \quad , \tag{3.12}$$

$$\omega = \frac{\lambda'-1}{\lambda'+1}$$

Обратное двойное преобразование Фурье дает распределение температуры для слоя и подложки.

Для решения задачи используется алгоритм DC-FFT (Discrete Convolution-Fast Fourier Transformation). Использование этого подхода для тепловой задачи обеспечивает быструю сходимость алгоритма. Объединение решения контактной и тепловой задач приводит к необходимости итерационной процедуры, которая приводит к решению с полным соответствием распределения контактного давления, температуры и температурно-зависимой податливости слоя.

4. В качестве примера рассмотрим, что может произойти при учете нелинейности по отношению к полимеру, для которого экспериментально получена зависимость податливости от температуры [5]. Это полиуретан, формованный по растворной технологии. При расчетах предполагалось, что свойства материала подложки соответствуют более традиционному полиуретану (литьевая технология). Подложка существенно более жесткая, поэтому описанная выше модель слоев справедлива. В качестве материала индентора рассматривалась керамика. Таким образом, использовались следующие входные параметры:

$$E_0 = 370\,\text{GPa},\ \nu_0 = 0.22,\ \lambda_0 = 30.0\,\text{W/(m*K)},\ R = 5\text{mm},\ E_1 = 3.66\text{MPa},$$

$$E_2 = 52.2\,\text{MPa},\ \nu_1 = 0.46,\ \nu_2 = 0.4,\ \lambda_1 = 0.04,\ \lambda_2 = 0.21,\ \alpha = 0.98$$

Коэффициент трения для полиуретанов в зависимости от материала контртела и условий фрикционного нагружения может изменяться от 0.3 до 2. В данном случае было принято значение 0.4.

В соответствии с результатами эксперимента построена функция зависимости модуля упругости от температуры:

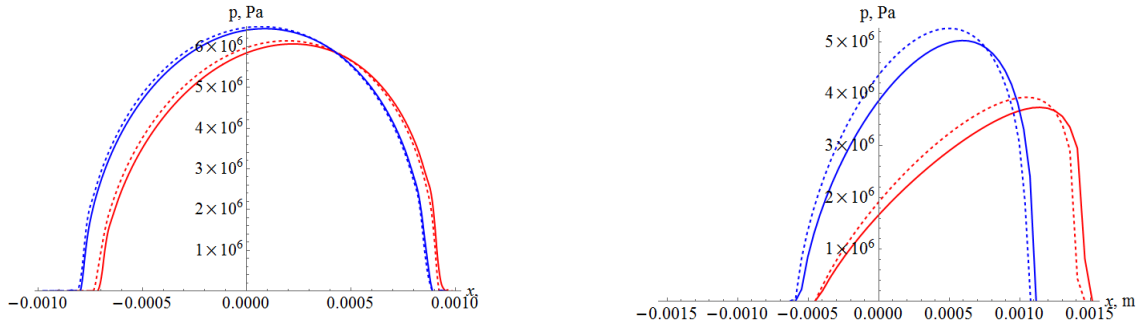
$$E(T) = E^* \cdot F(T),$$

$$F(T) = a \cdot \exp\left((T - T_0) \cdot b\right) + c, \qquad (4.1)$$

$$a = 0.2403,\ b = -0.1738,\ c = 0.7597, E^* = 3.6603\ \text{MPa}$$

Начальная температура полагалась равной $T_0 = 23^\circ\text{C}$.

Важно также, что для реального контакта двух тел, одно из которых имеет тонкий поверхностный слой, невозможно напрямую ввести коэффициент разделения теплового потока. Значение α приходилось определять итерациями, используя условие равенства температур контактирующих тел в зоне контакта. В общем случае оно зависит от толщины слоя. Однако в нашем случае, учитывая низкую теплопроводность материала слоя, для рассматриваемых толщин оно изменялось незначительно и было равно 0,98.

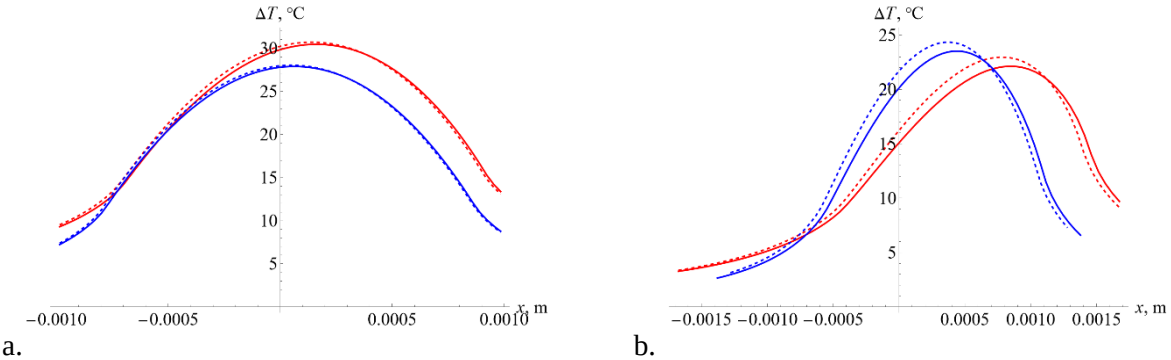


a. b.

Рис. 2 Влияние реологических свойств (времен релаксации и замедления) и толщины слоя *h* на распределение контактного давления *p(x,0)* при *V* = 0.04 м/с. τ_ε = 1.90 с, τ_σ = 4.59 с (a), τ_ε = 0.19 с, τ_σ = 0.46 с (b). (Пунктирные кривые соответствуют *E*(*T*)=const), *h* = 1 мм (синие кривые), *h* = 3 мм (красные кривые).

На рисунках 2 и 3 показано распределение давления и температуры под индентором для двух значений толщины слоя и фиксированной скорости 4 мм/сек. Пунктирные кривые соответствуют случаю, когда фактор нелинейности не учитывается. Для слоя большей толщины давления ожидаемо ниже, так как максимальные давления должны уменьшаться с ростом общей податливости двухслойной основы. Гораздо интереснее влияние реологических свойств.

Оказывается, чем больше времена, тем сильнее эффект всплытия «гасит» эффект нелинейности. То есть для больших времен, полученных в эксперименте по индентированию, распределения давления и температуры достаточно симметричны, а площадь контакта больше, чем для случая относительно малых времен. На рис. 2,б кривые заметно асимметричны, и разница между максимальными значениями давления, полученными для более толстого покрытия с учетом и без учета фактора нелинейности, составляет 14 процентов.



a. b.

Рис. 3 Влияние реологических свойств (времен релаксации и замедления) и толщины слоя h на приращение температуры на поверхности $\Delta T(x,0)$ $\Delta T(x,0)$ при V = 0.04 м/с. τ_ε = 1.90 с, τ_σ = 4.59 с (a), τ_ε = 0.19 с, τ_σ = 0.46 с (b). (Пунктирные кривые соответствуют *E(T)=const*), h = 1 мм (синие кривые), h = 3 мм (красные кривые).

В целом распределение температуры хорошо согласуется с контактным давлением. Входные параметры для рис. 2 и 3 одинаковы. Интересно отметить, что температура под индентором при больших временах релаксации и запаздывания, выше (рис. 12,а), но влияние фактора нелинейности очень мало.

Также был проведен расчет напряжений на поверхности под слоем. Нелинейность свойств полимерного слоя приводит к некоторому снижению значений растягивающих-сжимающих и максимальных касательных напряжений, что в сочетании с более низкими температурами является благоприятным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-19-00484).

ЛИТЕРАТУРА

1. Voevodin A.A., Zabinski J.S. Supertough wear resistant coatings with ‘chameleon’ surface adaptation. Thin Solid Films, 370, 2000
2. Muratore C., Voevodin A.A. Chameleon Coatings: Adaptive Surfaces to Reduce Friction and Wear in Extreme Environments, Annual Review of Materials Research, 39, 2009.
3. Shirani A., Joy T., et al., PEO-Chameleon as a potential protective coating on cast aluminum alloys for high-temperature applications, Surface & Coatings Technology, 2020.
4. Craig R.G., Eick J.D., Peyton F.A. Strength properties of waxes at various temperatures and their practical application J Dent Res, 46(1), 1967.
5. Torskaya E.V., Yakovenko A.A., Shkaley I.V., Svistkov A.L. An Indentation Study of the Temperature-Dependent Properties of Modified Polyurethanes Physical Mesomechanics 26(5), 2023

Information about authors

Torskaya E.V. – D.Sc., Professor of RAS, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Laboratory of Tribology (7 495) 434 2090. E-mail torskaya@mail.ru

Stepanov F.I. – Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Laboratory of Tribology (7 495) 434 3692. E-mail stepanov_ipm@mail.ru

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПЛАСТИН ТИПА ФЕППЛЯ – ФОН КАРМАНА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОБОБЩЕННОЙ УПРУГОЙ ЗАДЕЛКИ

Устинов К.Б., Гандилян Д.В.

Исследовано напряженно-деформированное состояние круглой пластины, сопряженной по контуру с основанием, подверженной постоянному нормальному давлению. Задача рассматривалась в рамках модели Феппля — фон Кармана с граничными условиями двух типов: жесткой заделки и обобщенно упругой заделки. В качестве критерия пластичности использовался критерий Треска — Сен-Венана: начало пластического деформирования соответствует достижению максимальными касательными напряжениями критического значения. Компоненты деформации для описания упруго-пластического состояния пластины представляются как суперпозиция упругой и пластической составляющих. Решение задачи получено с помощью разных методов, позволяющих получить аналитические, полуаналитические и численные решения.

Введение. При моделировании тонкостенных элементов конструкций, сопряженных с массивными телами, тонкостенные элементы удобно моделировать в рамках двумерных или одномерных моделей: пластин, оболочек, балок. При этом в качестве граничных условий обычно используют условие жесткого защемления, оправдывая это «массивностью» тел, с которыми рассматриваемые тонкостенные элементы сопрягаются. Более детальное рассмотрение показывает, что условие жесткого защемления выполняется лишь приближенно, и что более точными являются условия упругой заделки, когда кинематические параметры — компоненты смещения средней плоскости и углы поворота связываются с силовыми параметрами — продольными и поперечными усилиями и изгибающими моментами посредством матрицы податливости [2–5]. Условие жесткого защемления может быть получено как частный случай путем обнуления коэффициентов податливости матрицы. В настоящей работе рассматривается деформирование тонкого слоя, сцепленного с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие, за счет давления на слой через данное отверстие. Подобные задачи возникают при идентификации экспериментально определяемых параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых, в частности, в проекционных литографических системах [1].

1.Постановка задачи. Рассмотрим тонкий слой толщины h, сопряженный с основанием, имеющим цилиндрическое отверстие радиуса R, со стороны которого на слой прикладывается постоянное давление q (рис. 1). Используется цилиндрическая система координат (r,α,z), с осью z, проходящей через центр отверстия. Рассматриваемой области пластины соответствует $z\in[-h/2,h/2], r\in[0,R], \alpha\in[0,2\pi]$. В силу осевой симметрии тангенциальная компонента смещения $v=0$, остальные компоненты смещения и напряжений зависят от двух координат: $u(r,z), w(r,z), \sigma_{ij}(r,z),\ i,j=r,\alpha,z$. В рамках теории пластин используются гипотезы Кирхгофа — Лява, состоящие из двух составляющих: кинематической ($\varepsilon_{rz}=\varepsilon_{\alpha z}=\varepsilon_{zz}=0$), и силовой ($\sigma_{zz}(r,z)=0$).

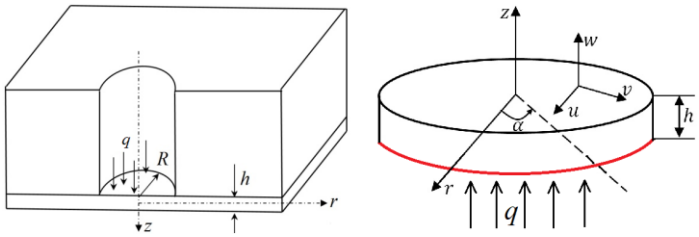


Рис. 1.

Принимая кинематические гипотезы Кирхгофа – Лява, выпишем зависимости радиальной и окружной компонент полной деформации (деформации Кармана, см., напр. [6]) в срединной плоскости ($z=0$), выбранной в качестве отсчетной плоскости.

$$\varepsilon_{rr}^{T}=\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^{2}-z\frac{d^{2}w}{dr^{2}};\quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{T}=\frac{u}{r}-z\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \tag{1.1}$$

Полная деформация предполагается представимой в виде суммы упругой и пластической частей

$$\varepsilon_{rr}^{T}=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{rr}^{P};\quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{T}=\varepsilon_{\alpha\alpha}+\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P} \tag{1.2}$$

где ε_{ij}^{P} — компоненты пластической деформации. Выражения для компонент тензора напряжений (второго тензора Пиолы – Кирхгофа) можно записать в виде следующих определяющих соотношений

$$\sigma_{rr}=\bar{E}\left[\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^{2}+\nu\frac{u}{r}-z\left(\frac{d^{2}w}{dr^{2}}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)\right]-\bar{E}\varepsilon_{rr}^{P}-\bar{E}\nu\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P},\quad \bar{E}=\frac{E}{1-\nu^{2}} \tag{1.3}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\bar{E}\left[\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^{2}-z\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\nu\frac{d^{2}w}{dr^{2}}\right)\right]-\bar{E}\nu\varepsilon_{rr}^{P}-\bar{E}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P} \tag{1.4}$$

где E,ν модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины. В теории оболочек/ пластин вместо привычных понятий «сила» и «момент» используются интегральные характеристики как «усилие» и «погонный момент», вычисляемые следующим образом:

$$T_{rr}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{rr}dz,\ T_{\alpha\alpha}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\alpha}dz,\ Q_{rz}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{rz}dz,\ M_{rr}=\int_{-h/2}^{h/2}z\sigma_{rr}dz,\ M_{\alpha\alpha}=\int_{-h/2}^{h/2}z\sigma_{\alpha\alpha}dz \tag{1.5}$$

для которых справедливы уравнения равновесия (напр. [6])

$$\begin{gathered}\frac{dM_{rr}}{dr}+\frac{M_{rr}-M_{\alpha\alpha}}{r}-Q_{rz}=0,\quad \frac{dT_{rr}}{dr}+\frac{T_{rr}-T_{\alpha\alpha}}{r}=0,\\ \frac{dQ_{rz}}{dr}+\frac{Q_{rz}}{r}+\frac{d}{dr}\left(T_{rr}\frac{dw}{dr}\right)+\frac{1}{r}\left(T_{rr}\frac{dw}{dr}\right)+q=0.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Подстановка выражений для напряжений (1.3), (1.4) в выражения для интегральных усилий (1.5) дает

$$T_{rr}=\bar{E}h\left[\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^{2}+\nu\frac{u}{r}\right]-\bar{E}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{rr}^{P}dz-\bar{E}\nu\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P}dz \tag{1.7}$$

$$T_{\alpha\alpha}=\bar{E}h\left[\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^{2}\right]-\bar{E}\nu\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{rr}^{P}dz-\bar{E}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P}dz \tag{1.8}$$

$$M_{rr}=-D\left(\frac{d^{2}w}{dr^{2}}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)-\bar{E}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{rr}^{P}zdz-\bar{E}\nu\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P}zdz,\quad D=\frac{Eh^{3}}{12\left(1-\nu^{2}\right)}=D=\frac{\bar{E}h^{3}}{12} \tag{1.9}$$

$$M_{\alpha\alpha}=-D\left(\nu\frac{d^{2}w}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)-\bar{E}\nu\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{rr}^{P}zdz-\bar{E}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P}zdz \tag{1.10}$$

Полученные 7 уравнений (1.6) – (1.10) относительно 7 неизвестных $u,w,M_{rr},M_{\alpha\alpha},T_{rr},$ $T_{\alpha\alpha},Q_{r}$ образует замкнутую систему при заданных пластических деформациях $\varepsilon_{rr}^{P},\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P}$. При неизвестных $\varepsilon_{rr}^{P},\varepsilon_{\alpha\alpha}^{P}$ для замыкания системы необходимо задать для них определяющие уравнения.

Граничные условия обобщенно упругой заделки имеют вид:

$$\bar{E}\begin{pmatrix}u(R)\\-hw'(R)\\w(R)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-T_{rr}\\h^{-1}M_{rr}\\Q_{rz}\end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

где a_{ij} — коэффициенты матрицы податливости [2-5]; $a_{ij}=0$ соответствует жесткой заделке. Отметим, что система (1.6) – (1.10) не является последовательной даже при отсутствии пластических деформаций; принятые кинематические ограничения противоречат уравнению равнове-

сия в напряжениях. В данной работе используется подход, согласно которому пренебрегается локальными уравнениями равновесия, требуется выполнение лишь глобального равновесия (1.6).

2. Упругое решение. Использовалось несколько подходов, позволяющих получить аналитические, полуаналитические и численные решения различной степени строгости:
1) Модель пластины без учета продольных усилий (Модель Софи Жермен). Система уравнений (1.6) сводится к одному уравнению со слагаемыми, отвечающими за изгиб, позволяющему получить аналитическое решение даже для граничных условий упругой заделки (1.11).
2) Мембранная модель, предполагающая преобладание роли продольных усилий. В уравнениях (1.6) отбрасываются слагаемые, связанные с изгибом. Решение с учетом граничных условий (1.11) получается также аналитически, при предположении постоянства усилий $T_{rr} = \text{const}$.
3) Модель Феппля — фон Кармана в приближении постоянства продольных усилий $T_{rr} = \text{const}$, также позволяющее получение аналитического решения через модифицированные функции Бесселя и гипергеометрические функции [8].
4) Полная модель Феппля — фон Кармана. В рамках данной модели решение было получено двумя методами: путем разложения неизвестных функций в степенные ряды и методом численного решения дифференциальных уравнений, аналогичным «методу стрельбы», при условиях (1.11).

3. Условие пластичности. Пластическое деформирование будем рассматривать в рамках теории Треска – Сен-Венана, согласно которой начало пластического деформирования соответствует достижению максимальными касательными напряжениями критического значения. В рамках принятой теории пластин (а именно пренебрежение касательными напряжениями σ_{rz} по сравнению с нормальными $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}$) следует, что условие достижения касательными напряжениями предельного значения становится эквивалентным условию достижения напряжениями σ_{rr}, либо $\sigma_{\alpha\alpha}$, либо обоими критического значения. При деформировании пластины в рассматриваемом случае переход в пластическое состояние может ожидаться по краям пластины и в ее центре (рис. 2), участки II и III, соответственно (участок I соответствует упругому состоянию), причем, как показывает анализ упругого состояния, в области II, а именно в нижнем краю пластины $r = R, z = -h/2$ критическое напряжение наступает раньше.

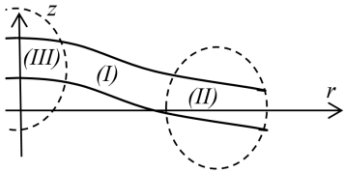


Рис. 2. Возможные области возникновения пластических деформаций.

Рассмотрим вариант перехода в пластичность по нижнему краю пластины (рис. 3а). В этом случае возникает зона $-h/2 < z < z_1(r)$ в которой напряжения σ_{rr} достигают критического значения $\sigma_{rr} = \sigma_c$ и остаются равными ему. Напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ остаются меньше критического.

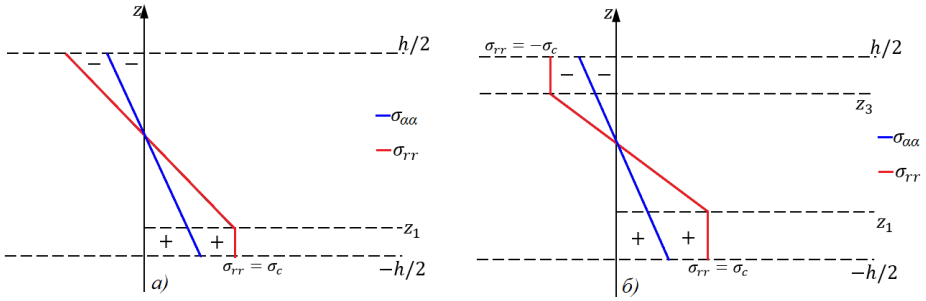


Рис. 3. Распределение компонент напряжений в сечении, соответствующее (а) – случаю 1, (б) – случаю 2.

Для обеспечения условия $\sigma_{rr} = \sigma_c$ согласно (1.3), пластические деформации должны иметь вид

$$\varepsilon_{rr}^{P(1)} = \begin{cases} 0, & z_1 < z < \dfrac{h}{2} \\ -(z - z_1)\left(\dfrac{d^2 w}{dr^2} + \dfrac{\nu}{r}\dfrac{dw}{dr}\right), & -\dfrac{h}{2} < z < z_1 \end{cases}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{P(1)} = 0 \tag{3.1}$$

подставив в (1.3), (1.4) получим соответствующие компоненты напряжений, а из критерия пластичности получим величину z_1

$$z_1 = \left(\frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + \nu\frac{u}{r} - \frac{\sigma_c}{\bar{E}}\right)\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

Подстановкой выражения для пластической деформации (3.1) и компонент напряжений в (1.7) – (1.10) получим выражения для компонент усилий и изгибающих моментов.

С ростом нагрузки может появиться дополнительная область пластичности с противоположной стороны пластины (рис. 3б), в районе $z = h/2$. В этом случае возникает зона $z_3 < z < h/2$, в которой напряжения σ_{rr} достигают критического значения $\sigma_{rr} = -\sigma_c$ и остаются равными ему. Напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$ остаются всюду меньше критического. Аналогично выписываются выражения для пластических деформаций ε_{rr}^P, при этом в этом случае также $\varepsilon_{\alpha\alpha}^P = 0$. Затем, подставив полученные выражения в (1.3), (1.4), (1.7) – (1.10), получим соответствующие компоненты напряжений, усилий и изгибающих моментов.

Метод решения полученных уравнений аналогичен численному методу, описанному для упругого случая.

4. Результаты численных расчетов. В расчетах отношение толщины пластины к его полудлине принималось: $h/R = 1/100$.

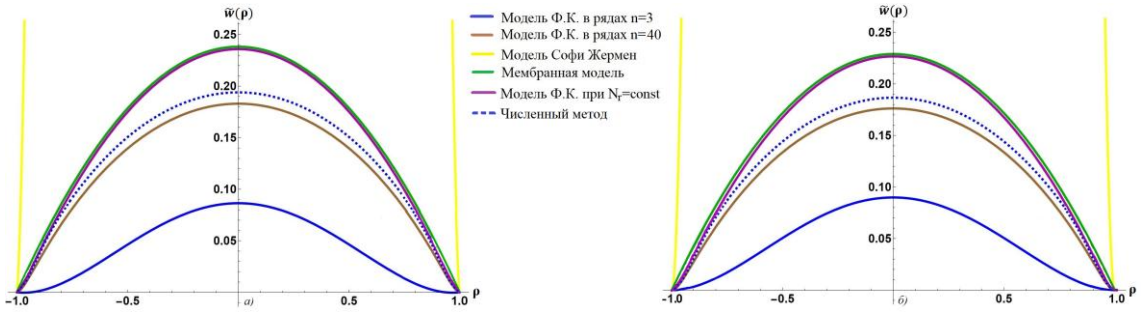


Рис 4. Компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом без учета податливости основания при $q/\bar{E} = 2\cdot 10^{-4}$.

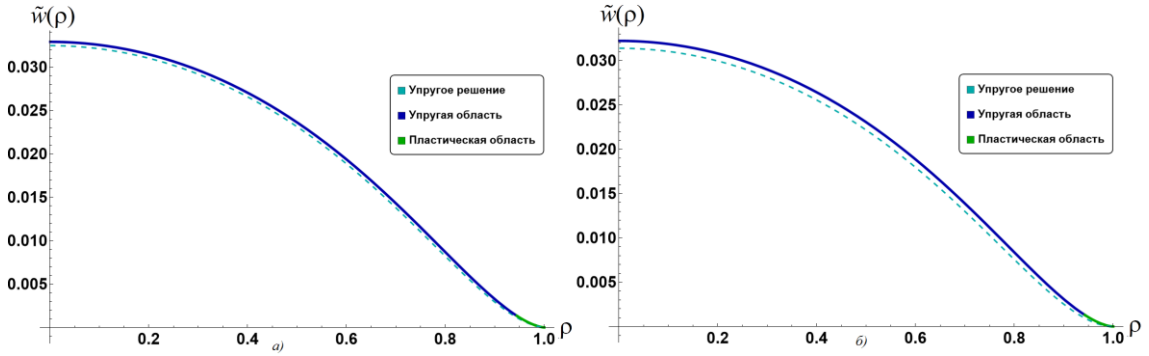


Рис. 5. Компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом – (а) и без учета - (б) податливости основания при $q/\bar{E} = 1.2\cdot 10^{-6}$.

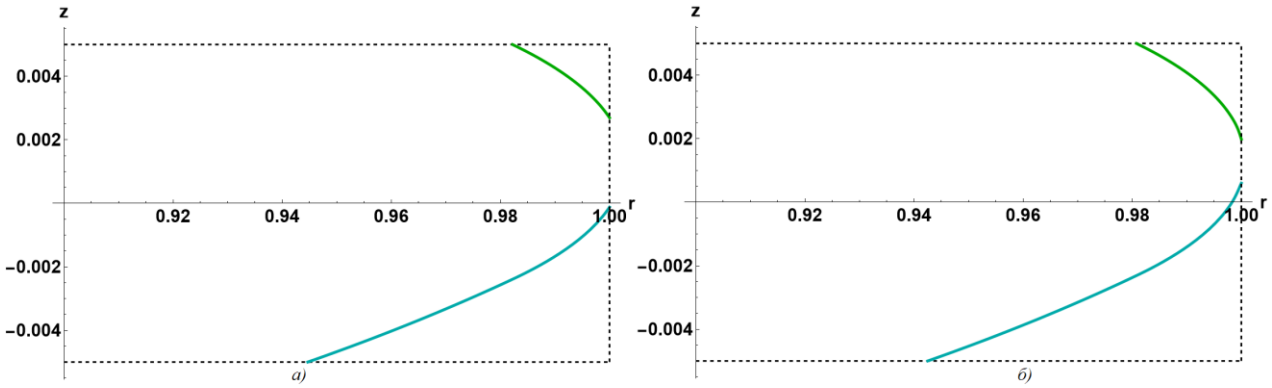


Рис. 6. Области пластичности в сечении на краю круговой пластины с учетом – (а) и без учета - (б) податливости основания при $q/\bar{E}=1.2\cdot10^{-6}$

Рассматривалась пластина из алюминия со значением модуля Юнга, коэффициента Пуассона и предела пластичности: $E=70$ ГПа, $\nu=0.35$, $\sigma_c=175$ МПа на кремниевом основании с характеристиками: $E=109$ ГПа, $\nu=0.27$, а коэффициенты матрицы податливости равны: $a_{11}=10, a_{12}=a_{21}=1.7, a_{22}=12, a_{13}=0, a_{23}=0, a_{33}=0$ [7]. На рис. 4, 5 представлены отношения нормальной компоненты смещения к радиусу основания ($\tilde{w}(\rho)=w(r)/R,\ \rho=r/R$) для упругого и пластического решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 23-19-00866 (для КБУ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Editor Jose Maria De Teresa. Bristol, England: IOP Publishing Ltd. 2020. 450 p.
2. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // International Journal of Fracture. 2000. V. 104, Issue 2. 169–179.
3. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // International Journal of Fracture. 2002. V. 113. P. 39–55.
4. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // Mechanics of Solids. 2015. V. 50. Issue 1. P. 62–80.
5. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2024. Т. 30, № 1. С. 50–63.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
7. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Деформирование тонкой круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием // Прикладная математика и механика. 2025. Т. 89, № 1. С. 106-127.
8. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 590 с.

Сведения об авторах:

Устинов Константин Борисович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), тел.: +7-916-110-14-58, E-mail ustinoff127@mail.ru

Гандилян Давид Ваганович – младший научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), тел.: +7-963-686-76-25, E-mail: david.ghandilyan@mail.ru

О ПРИМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Фомин Л.В., Басалов Ю.Г.

Рассматриваются особенности применения кинетического подхода при моделировании длительного разрушения составного растягиваемого стержня, находящегося в условиях ползучести и влияния внешней активной среды. Определяются напряженно-деформированное состояние и время до разрушения исследуемого составного стрежня. Используются как степенная модель, так и дробно-степенная модели ползучести и длительного разрушения. Влияние активной среды рассматривается в двух вариантах: учитываются классический и неклассический диффузионные процессы. В последнем случае проникшее в материал активное вещество находится в двух состояниях: свободном и связанном. В результате численного расчета получены зависимости напряжений и поврежденности от времени, а также времена до разрушения составного стержня при различных характерных параметрах применяемых моделей

Введение.

В данной работе проводятся исследования, которые основываются на предложенной известными учеными Ю.Н. Работновым [1] и Л.М. Качановым [2] и в дальнейшем развитой многочисленным их учениками кинетической теории ползучести и длительной прочности металлических материалов и сплавов.

Эта кинетическая теория основывается на концепции уравнения механического состояния структурно устойчивого материала. В рамках этой концепции для материала в любой момент t времени скорость деформации ползучести зависит от величины приложенного напряжения, температуры и структурного состояния материала в этот момент времени t. Структурное состояние можно характеризовать набором величин q_i, которые называются структурными параметрами. Для структурных параметров записываются кинетические уравнения. Такими параметрами могут выступать поврежденность металла в процессе ползучести, работа напряжений на деформациях ползучести (энергетический вариант), концентрация активной среды в металл и др.

Вообще, в теории длительной прочности существуют два подхода, определяющие разрушение (времена до разрушения): кинетический и критериальный. В настоящей работе будет использоваться кинетический подход, т.е. основанный на кинетической теории.

Актуальность исследований высокотемпературной прочности материалов и конструкций [3], в том числе, находящихся в условии воздействия активных сред [4, 5], не подлежит сомнению. Современные материалы и элементы конструкций должны обеспечивать надежность и работоспособность изделий, выполненных из них, в течение всего срока службы в рабочих условиях с учетом их взаимодействия с внешними и/или рабочими средами. Наиболее часто для дополнительной защиты элементов конструкций от деструктивного воздействия внешней активной среды применяются типовые элементы составного типа. Внешний слой такой составной конструкции, как правило, контактирует с агрессивным веществом и защищает основные элементы конструкции от его разрушительного воздействия.

Рассмотрим применение кинетической теории на примере задачи о длительном разрушении составного стержня в процессе ползучести в активной среде. В ходе решения используются два структурных параметра: накапливаемая поврежденность в процессе ползучести и концентрация активной среды в материале.

1. Постановка задачи.

Определяются напряженно-деформированное состояние и время до разрушения в условиях ползучести длинного составного растягиваемого стержня прямоугольного поперечного сечения, находящегося в активной среде. Стержень состоит из трех симметрично расположенных по ширине частей (рис. 1), соединенных идеальной адгезией без проскальзывания, длина стержня существенно превышает его ширину и толщину. Влияние активной среды рассматривается в двух вариантах: классический и неклассический диффузионные процессы [6]. В случае неклассического диффузионного процесса проникшее в материал активное вещество находится в двух

состояниях: свободном и связанном. Процесс такой диффузии описывается модифицированным уравнением диффузии, учитывающим двухфазное состояние активного вещества в материале:

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}=\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial t},\qquad \frac{\partial S}{\partial t}=\beta c+\alpha S,\qquad c(z,0)=S(z,0)=0$$

где c - концентрация свободной (мобильной) формы активной среды в единице объема (или на единицу массы) образца; S - концентрация связанной формы активной среды в единице объема (или на единицу массы) образца; $D=\text{const}$ - коэффициент диффузии; α,β - параметры диффузионной модели, z - координата; t - время.

Поскольку ширина H поперечного сечения значительно превосходит его толщину b, то влиянием диффузии со стороны узких сторон прямоугольного сечения можно пренебречь. Длина стержня L во много раз превосходит характерные размеры его поперечного сечения, поэтому влиянием продольной координаты x стержня на диффузионный процесс можно также пренебречь. Таким образом, процесс диффузии является одномерным и проходит по толщине b вдоль поперечной координаты z. Принимаются одинаковые граничные условия диффузионного процесса на широких сторонах прямоугольного поперечного сечения, в связи с этим процесс диффузии является симметричным относительно оси y, проходящей через центр поперечного сечения стержня. Примем одинаковые характеристики диффузионного процесса для центральной части и двух крайних частей стержня. А именно, пусть активная среда проникает в центральную и крайние части с коэффициентом диффузии $D=\text{const}$. Вероятности перехода α связанной формы молекул активной среды в свободную и обратный процесс β примем одинаковыми для всех частей стержня. Схема воздействия активной среды на составной стержень представлена на рис. 1.

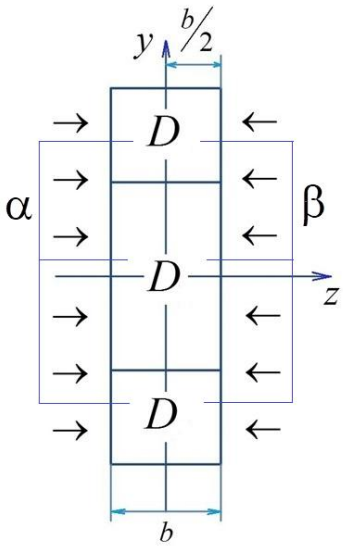


Рис. 1. Поперечное сечение составного стержня. Схема воздействия активной среды.

При принятом условии жесткого соединения частей в составном стержне (без их взаимного проскальзывания) напряженные состояния вблизи мест соединения слоев становятся отличными от одномерных и неоднородными. Неоднородность напряженного состояния вблизи мест соединений частей может возникнуть, в том числе, и по причине естественных несовершенств технологических способов соединения частей между собой. Распространенными способами соединения являются диффузионная сварка, спайка, склейка, различные способы газодинамического напыления.

Общие тенденции развития методов исследования и определения напряженно-деформированного состояния типовых элементов конструкций (стержни, пластины, тонкостенные оболочки) приводят к сведению решения трехмерных задач к решению более простых задач – двумер-

ных и одномерных, таким образом размерность задачи понижается. При этом используются методы упрощения, связанные с использованием гипотез и известных принципов. Реализация методов с использованием известных и принятых в механике гипотез, как правило, не содержит процедур регулярного уточнения решения.

Учитывая малость поперечных размеров составного стержня по сравнению с его длиной, и с дополнительным условием симметрии диффузионного процесса относительно центральной плоскости симметрии примем одномерный вид напряженно-деформированного состояния в составном стержне. В процессе решения будем использовать гипотезу плоских сечений и обобщение принципа Сен-Венана для рассматриваемой задачи, что позволяет считать напряженное состояние однородным вдали от мест соединения частей составного стержня.

2. Степенная модель ползучести и длительного разрушения.

В качестве модели ползучести и длительного разрушения используются соотношения степенного вида: скорости деформации ползучести и накопления поврежденности являются степенными функциями от напряжения. Соотношения (1) описывают скорость деформации ползучести $\dot{p}$ соответственно первой (центральной) части и двух крайних частей.

$$\dot{p}_1 = B_1\left(\frac{\sigma_1}{1-\omega_1}\right)^n, \qquad \dot{p}_2 = B_2\left(\frac{\sigma_2}{1-\omega_2}\right)^n \tag{1}$$

где σ_1 - напряжение в первой (центральной) части стержня, σ_2 - напряжение в двух крайних частях стержня, ω_1 - параметр поврежденности для центральной части стержня, ω_2 - параметр поврежденности одинаковый для двух крайних частей стержня, B_1, B_2, n - материальные константы, точка над символами $\dot{p}_1$ и $\dot{p}_2$ означает производную по времени t.

Большинство экспериментальных данных показывают, что активная среда деструктивно влияет на материал, уменьшает время до разрушения по сравнению с эксплуатацией материалов и элементов конструкций в нейтральных условиях. Процессы разрушения инициируются ростом повреждений в материале. Учтем влияние активной среды в кинетических уравнениях накопления поврежденности:

$$\begin{gathered}\frac{d\omega_1}{dt} = A\left(\frac{\sigma_1}{1-\omega_1}\right)^m f\left(\overline{c}_m\right), \quad \omega_1 = \omega_1(t), \quad \omega_1(0) = 0, \quad \omega_1^* \equiv \omega_1\left(t = t_1^*\right) = 1 \\ \frac{d\omega_2}{dt} = A\left(\frac{\sigma_2}{1-\omega_2}\right)^m f\left(\overline{c}_m\right), \quad \omega_2 = \omega_2(t), \quad \omega_2(0) = 0, \quad \omega_2^* \equiv \omega_2\left(t = t_2^*\right) = 1\end{gathered} \tag{2}$$

где t_1^* - время до разрушения центральной части стержня, t_2^* - время до разрушения крайних частей стержня. A, m - материальные константы, которые определяются на основе опытов на длительную прочность без активной среды в нейтральных условиях, при этом функция влияния активной среды $f\left(\overline{c}_m\right) \equiv 1$.

В ходе решения дополнительно используются уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций, соотношение для интегрально средней концентрации $\overline{c}_m$ активной среды в материале. В результате получена система уравнений (3), моделирующая ползучесть составного стержня, в котором его части жестко без проскальзывания связаны между собой, а также включающая в себя кинетические уравнения накопления поврежденности в частях стержня. Учет влияния активной среды производится путем введения в указанные кинетические уравнения функции влияния активной среды – функции от интегрально средней концентрации.

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_1}{d\bar{t}} = C_1 \dfrac{\bar{\sigma}_1^{\,m}}{(1-\omega_1)^m} f\left(\bar{c}_m\left(K\bar{t}\right)\right), & \omega_1(0)=0 \\ \dfrac{d\omega_2}{d\bar{t}} = C_1 \dfrac{\left(\left[\Sigma_0 - \xi\bar{\sigma}_1\right]\right)^m}{\left((1-\xi)(1-\omega_2)\right)^m} f\left(\bar{c}_m\left(K\bar{t}\right)\right), & \omega_2(0)=0 \\ \displaystyle\int_0^{\bar{t}} \bar{\sigma}_1^{\,n} \frac{1}{(1-\omega_1)^n} d\bar{t} = k\int_0^{\bar{t}} \left(\frac{\left[\Sigma_0 - \xi\bar{\sigma}_1\right]}{(1-\xi)(1-\omega_2)}\right)^n d\bar{t} \\ \bar{\sigma}_2 = \dfrac{\left[\Sigma_0 - \xi\bar{\sigma}_1\right]}{(1-\xi)} \end{cases} \quad (3)$$

где $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1/\sigma_0$, $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2/\sigma_0$ - безразмерные напряжения в центральной и двух крайних частях составного стержня, соответственно; σ_0 - некоторое характерное напряжение, например, половина предела кратковременной прочности; ω_1, ω_2 - поврежденности, накапливаемые в процессе ползучести в материалах центральных и крайних частей, $C_1 = \dfrac{A}{B_1}\sigma_0^{\,m-n}$, $k = \dfrac{B_2}{B_1}$, $\xi = \dfrac{2h_1}{H}$, $\Sigma_0 = \dfrac{P}{bH\sigma_0}$ - безразмерные параметры; A, B_1, B_2, n, m - материальные параметры, входящие в кинетические и определяющие соотношения частей составного стержня; P - осевая сила; b, H - толщина и ширина составного стержня, соответственно; $2h_1$ - ширина центральной части стержня; $\bar{t} = B_1\sigma_0^{\,n}t$ - безразмерное время. Коэффициент $K = D\Big/\left(\sigma_0^{\,n}b^2B_1\right)$ связывает между собой характерные безразмерные времена диффузии и ползучести.

Используем линейный вид функции $f\left(\bar{c}_m\left(\bar{t}\right)\right) = 1 + a_c\bar{c}_m\left(\bar{t}\right)$, где a_c - константа, определяемая из эксперимента на длительную прочность образцов из материала, находящихся в активной среде. В работе [7] было определено значение данной константы $a_c = 9.5$ для опытов по длительной прочности образцов углеродистой стали, находящихся в высокотемпературной воздушной среде [8].

В полученной системе уравнений неизвестными являются поврежденности $\omega_1 = \omega_1\left(\bar{t}\right)$ и $\omega_2 = \omega_2\left(\bar{t}\right)$, а также напряжение $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1\left(\bar{t}\right)$ и $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2\left(\bar{t}\right)$.

Критерием разрушения каждой части стержня является условие достижения параметром поврежденности для соответствующей части стержня значения, равного единице $\omega_1^* = \omega_1\left(\bar{t} = \bar{t}_1^*\right) = 1$ и $\omega_2^* = \omega_2\left(\bar{t} = \bar{t}_2^*\right) = 1$. Общее время до разрушения всего составного стержня $\bar{t}^*$ будем считать минимальной из полученных времен до разрушения отдельных частей стержня: $\bar{t}^* = \min\{\bar{t}_1^*, \bar{t}_2^*\}$.

Система (3) решается численно шагами по времени. В зависимости от материальных параметров и параметров диффузионного процесса анализируются распределения напряжений и процессы накопления повреждений во времени в различных частях составного стержня.

Проведены расчет для двух вариантов набора констант, отличающихся только значениями параметров $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$: в первом варианте $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{\beta} = 1$, во втором варианте $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{\beta} = 0$. Второй вариант соответствует классическому диффузионному процессу, поскольку вероятность перехода в единицу времени свободной формы молекул активной среды в связанную форму $\bar{\beta} = 0$, следовательно, концентрация связанной формы активной среды в единице объема (или на единицу массы) образца равна нулю $S = 0$.

Получены зависимости накопления поврежденности и распределения напряжений в частях стержня во времени. В результате определено, что разрушение составного стержня в классическом случае происходит раньше, чем в случае рассматриваемого неклассического диффузионного процесса

3. Дробно-степенная модель ползучести и длительного разрушения.

В исследовании наряду с применением степенной модели ползучести и длительного разрушения в работе рассматривается применение сингулярной дробно-степенной модели [9] в которую входит естественная механическая характеристика – предел кратковременной прочности материала при температуре испытания.

На основе определяющих и кинетических соотношений, уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций получена (аналогично (3)) результирующая система уравнений [10]:

В результате численных расчетов получены зависимости поврежденностей и напряжений во времени в различных частях стержня в зависимости от различных значений соотношений $\zeta = \sigma_{b2}/\sigma_{b1}$ пределов кратковременной прочности материалов частей составного стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР. 1959 г. С. 5-7.
2. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1958 г. №8. С. 26 – 36.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит. 2016. 504 с.
5. Alexander Lokoshchenko and Leonid Fomin. Kinetic Theory of Creep and Long-Term Strength of Metals, in Kinetic Theory, George Z. Kyzas and Athanasios C. Mitropoulos IntechOpen, (December 20th 2017). DOI: 10.5772/intechopen.70768.
6. J. Crank. The Mathematics of diffusion. 2nd edition. 1975. 414 p.
7. Фомин Л.В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. №3(32). С. 87-97. https://doi.org/10.14498/vsgtu1228
8. Одинг И. А., Фридман З. Г. Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести // Завод. лаб. 1959. 25:3. С. 329–332.
9. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. №1. С. 86 – 91.
10. Fomin L.V. On the Application of a Fractional-Power Rheological Model in the Study of Creep and Long-Term Failure of a Composite Rod Taking into Account the Non-Classical Diffusion Effect of the Active Medium // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59. №7, pp. 3747 – 3755. https://doi.org/10.1134/S0025654424606414

Информация об авторах

Фомин Леонид – заведующий лабораторией, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИИ механики МГУ (+7 495) 939 24 28 E-mail: fleonid1975@mail.ru

Басалов Юрий – ведущий инженер, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, НИИ механики МГУ (+7 495) 939 24 28

К НАПИСАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭФИРА

Хачикян А.С.

В настоящее время единственный известный реальный процесс, не считая дискретные эксперименты с частицами, происходящий в эфире, есть электромагнитные волны, описываемые уравнениями Максвелла-Фарадея, которые представляют собой непрерывные, дифференцируемые функции, в каком-то сплошном пространстве, среде. О среде, где это происходит, обычно ничего не говорят, но это, очевидно, есть эфир. Эти уравнения, в эксперименте, достаточно хорошо представляют этот процесс. Следовательно, эфир, по крайней мере частично (пространственно или структурно, на какое-то время), можно описать как сплошную среду.

Эфир представляет собой сообщество мельчайших материальных частиц, хаотично движущихся и взаимодействующих [1, 2, 3]. По предположению [3], по крайней мере часть этих частиц обладает свойством упругости. Как реализуется в этой среде процесс электромагнитных волн не вполне понятно. Известны только эксперименты Фарадея. Вроде мировое пространство не заполнено электронами, протонами, позитронами или электричеством положительного или отрицательного знака на других материальных носителях. Поэтому, разумно, может быть, вернуться к старым предположениям, что электромагнитные волны это упругие волны [3]. Впрочем, это не вопрос обсуждения в этой статье.

Процессы в земной атмосфере происходят в эфире, но частицы эфира не считаются участвующими в этих процессах, они игнорируются. Как будто эти процессы происходят в пустом или очень разреженном пространстве, наполненном воздухом. Насколько и когда это оправдано, это нерешенный вопрос. Учитывается только материал молекул воздуха и такое рассмотрение практически согласуется с экспериментом. Это так во всей аэродинамике и гидромеханике.

Этот результат может быть следствием разности на несколько порядков количества или значимости величин характеристик материала хаотических частиц эфира и связано с точностью наших измерений.

Все процессы, конечно, происходят в эфире, но эфир не участвует в них, в расчетах.

Экспериментально эфир практически не наблюдается ни в своей совокупности, ни отдельными частицами. И сведения о нем лишь косвенные.

Не имея другого примера, сравним электромагнитные процессы с процессами в земной воздушной среде.

Воздух считается газом, смесью молекул, состоящей, в основном, из азота (78%), кислорода (21%) и аргона (0,94%) [4].

Наличие других компонентов, даже паров воды, в воздухе можно пока, для наших конкретных ближайших целей, игнорировать. Молекулы воздуха свободно, хаотично движутся. Взаимодействия этих молекул принимаются как упругие. Состояние этого газа очень изменчиво и зависит, в основном, от температуры и от высоты над уровнем моря. Но состояние эфира, в основном (насколько знаем), относительно стабильно кроме как, может быть, вблизи и внутри небесных тел и различных космических образований. Поэтому воздух будем рассматривать в нормальных условиях на одинаковой высоте и при постоянной температуре, при этом он мало меняется . На некоторой высоте в атмосфере такое сообщество молекул образует газовое тело с внешним давлением примерно равным сумме парциальных давлений, составляющих воздух газов. Если в этом теле, в некоторой ее части, происходит какое то внешнее механическое возмущение, то это возмущение, в основном, в виде звуковой волны распространяется по всему телу. Рассматривание произвольного возмущения в среде хаотично движущихся

молекул как звуковую волну в этой среде и есть главный объект нашего внимания здесь. Происходит переход от рассмотрения дискретного процесса хаотичного движения и взаимодействия молекул газа к рассмотрению непрерывных функций в модельной сплошной среде. В природе нет сплошной материальной среды в макро масштабах, (по крайной мере, мы не знаем). Хотя мы физически слушаем и инструментально замечаем этот звук, звуковая волна это наша манипуляция. Это соответствует некоторому умозрительному упорядочению хаотичного движения. Это последствие рассмотрения хаотичного газа как сплошной среды. Но это рассмотрение плодотворное? Результат ответа на этот вопрос поразительный. Очень хорошее совпадание (согласованность) в эксперименте и вроде это не зависит от времени.

Звуковые волны можно разложить на детали напряженно -деформированного состояния среды, где они имеют место. Об электромагнитных (ЭМ) волнах этого трудно сказать.

В нашем газовом теле воздуха хаотично движущиеся молекулы имеют скорости, считающиеся подчиняющимися распределению Максвелла. Скорости этих молекул при максимальном значении функции распределения в нормальных условиях: определенной высоте над уровнем моря, температуре, давлении и других характеристиках газа, можно считать известными.

Если ЭМ волны образуются движением и взаимодействием частиц эфира, то каковым бы ни было их начало (начало волн), распространение волн в пространстве происходит путем механического воздействия, главным образом, в виде ударов соседних частиц эфира (механическое напряжение) или какого-либо электрического взаимодействия между ними на фронте волны, а не откуда-то издалека. Электризованный материал, например. До сих пор мы знаем электризованный материал, в основном, в виде электрона, позитрона, протона. В космосе, да и везде, где полно ЭМ волн, электризованного материала замечено не было.

Главная разница ЭМ волн заключается в том, что это поляризуемые волны. Значит они включают в себе поперечные перемещения. Именно здесь спрятана разница. Возмущение происходит в газе, в виде определенных движений ее молекул, например – поступательное движение планки, которое движет молекулы, а не частицы эфира, или же такой же молекулярный взрыв или же индукционный электрический ток, содержащий массив электронов, бомбардирующих частицы эфира и вызывающих их движение, и, соответственно, ЭМ волны.

Загадка в том, что, благодаря наличию в эфире крестообразных, звездообразных частиц, всякое поступательное движение частиц эфира, вследствие одновременного вращения этих частиц, образует и поперечное движение, что и обеспечивает обладание ЭМ волной свойства поляризации.

Передача электрического напряжения в хаосе (в действительности) может быть только ударами частиц, электризованных, или нет, а в модельной сплошной среде взаимодействием на фронте волны трением или другим взаимодействием соседних частей. Эти и другие рассуждения нас опять подталкивают к принятию мысли, что ЭМ волны – это упругие волны.

Могут быть написаны дифференциальные уравнения отдельных новых процессов (как уравнения Максвелла-Фарадея в модельной сплошной среде), если они будут обнаружены.

Если исключать возможность написания уравнения движения Ньютона для каждой частицы этого хаоса (эфира) не только из за их весьма огромного количества, но и их ненаблюдаемости (неизвестности формы, размеров и других свойств), то дифференциальные уравнения эфира невозможно написать из-за ненаблюдаемости его частиц и отдельных совокупных частей.

Фактически дифференциальные уравнения эфира не могут быть написаны, потому что нет способов наблюдения его частиц, их формы, размеров, распределения, движений, исследований их свойств. Пока нет инструментов для исследования этого хаоса вообще.

Но звуковая волна в газе это продольные волны. ЭМ волна – поляризуемая волна. Значит она имеет поперечные перемещения, и наша аналогия может быть и неверна. В твердом теле есть аналогичные волны с поперечными перемещениями. И в этом случае получены аналогичные уравнения и выражения для определения скорости звука.

Уравнение относится к твердому телу или газу становится видно из приписываемых ему свойств. Если продольному сжатию или растяжению сопутствует, согласно коэффициенту Пуассона, изменение поперечного размера, то имеем твердое упругое тело. Если тело образовано из шарообразных молекул, то имеем обычный газ. Особняком стоит эфир. Хотя эфир состоит из частиц, подобно газу, но здесь частицы могут иметь различную форму, по нашему предположению, они, в основном, бывают двух видов: шарообразные или крестообразные (звездообразные). Благодаря крестообразности, частицы одновременно вращаясь при продольном движении, своими лепестками создают движение в поперечном направлении. Таким образом всякое продольное движение в эфире создает соответственное поперечное движение. Это соответствие зависит от отношения количеств шарообразных и крестообразных частиц в эфире, отношения образуемых скоростей продольных и поперечных движений. Таким образом, движение эфира имеет статистический характер.

Если приписать эфиру свойства его частиц, то получим уравнения скорости распространения возмущения в эфирном газе. Если приписать некоторое поперечное движение в эфирном газе (соответственно поперечному движению вследствие звездообразности частиц эфира), то полученное уравнение для скорости можно приписать эфиру.

Твердое тело инстинктивно воспринимается нами как сплошное тело и также воспринимаются волны в нем и, говоря о волнах, забывается, что мы имеем дело с дискретными частицами и их движением. Все волны, которые мы рассматриваем, рассматриваются в сплошной среде. А такой среды в природе нет. Они рассматриваются в модельной сплошной среде. Все непрерывные дифференцируемые функции точно работают исключительно в такой модельной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Уиттекер История теории эфира и электричества, классические теории, перевод с англ. Н.А.Зубченко, Москва-Ижевск, 2001, 512 с.
2. В.А.Ацюковский, Общая эфиродинамика. Моделирование структур вещества и полей на основе представлений о газоподобном эфире. Изд. 2-е, М., Энергоатомиздат, 2003, 584 с.
3. Хачикян А. С. Новая старая физика, тайна электрона, издание второе, дополненное и переработанное, Ереван 2023, -72 с., Изд-во «НААПЕТ».
4. Шубин А.С. Курс общей физики. (2-е изд.) М.: Высш. школа, 1976, 480 с.

Сведения об авторе:

Хачикян Альберт Серобович – к.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА,
E-mail: khachikyanalbert39@gmail.com

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА НАКОПЛЕНИЕ ПОВРЕЖДЕНИЙ И ИЗНОС В УСЛОВИЯХ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Яковенко А.А.

В работе исследовано скольжение упругого цилиндра по упругому основанию при наличии в нем полей остаточных напряжений. Представлен метод решения контактной задачи, а также построена модель накопления контактно-усталостных повреждений. Исследовано влияние остаточных напряжений на процесс накопления поврежденности и процесс усталостного изнашивания с учетом поверхностного абразивного износа. Показано, что сжимающие остаточные напряжения снижают величину поврежденности материала в подповерхностных областях.

1. Введение

В условиях циклического нагружения, когда тела скользят относительно друг друга, в подповерхностных слоях материалов тел происходит накопление контактно-усталостных повреждений. Скорость накопления поврежденности зависит от многих факторов, а именно механических свойств материалов взаимодействующих тел, их геометрии на всех масштабных уровнях, а также условий контактного взаимодействия, включающих скорость скольжения, коэффициент трения, наличия промежуточный среды и др. Немалое влияние оказывает и преднапряженность материалов, то есть наличие во взаимодействующих телах полей остаточных напряжений.

Остаточные напряжения возникают в подповерхностных слоях взаимодействующих тел при разных видах их термической и механической обработки. При этом изменение параметров процесса обработки позволяет контролировать величину напряжений и их распределение по глубине. Создание полей остаточных напряжений в деталях является одним из эффективных способов увеличения их прочности и долговечности. Поэтому теоретическое исследование влияния преднапряженности материалов взаимодействующих тел на процесс накопления контактно-усталостных повреждений в подповерхностных слоях в условиях трения скольжения, позволит увеличить эффективность метода повышения долговечности деталей за счет создания в них полей остаточных напряжений.

В данной работе решена задача скольжения упругого цилиндра по упругому преднапряженному основанию и определены контактные характеристики, внутренние напряжения и поврежденность материала. При этом исследован процесс накопления контактно-усталостных повреждений с учетом наличия поверхностного абразивного износа. Полученное решение контактной задачи позволило исследовать влияние остаточных напряжений на процесс накопления контактно-усталостных повреждений и износ материалов в условиях их циклического нагружения. Результаты, представленные в данной работе, могут быть использованы для разработки способов управления контактно-усталостным износом тел в условиях трения скольжения за счет формирования в материалах контактирующих тел преднапряженного состояния.

2. Постановка контактной задачи скольжения

Рассматривается скольжение с постоянной линейной скоростью V, направленной по оси x, бесконечного упругого цилиндра (1) по упругой полуплоскости (2) (рис.1). Задача рассматривается в плоской квазистатической постановке. Вводится подвижная система координат (x,z), связанная с движущимся цилиндром. При малых деформациях контактирующую поверхность цилиндра можно описать функцией $f(r)=x^2/(2R)$, где R – радиус цилиндра. Движение цилиндра считается установившимся по отношению к подвижной системе координат, поэтому перемещения и напряжения в ней являются функциями координат и не зависят явно от времени. Область контакта представляет собой отрезок длины $2a$.

В условиях трения скольжения в области контакта выполняется условие контакта и закон трения Амонтона, связывающий нормальные p и касательные q контактные напряжения через коэффициент трения скольжения μ, а именно

$$|q(x)| \le \mu p(x). \qquad (2.1)$$

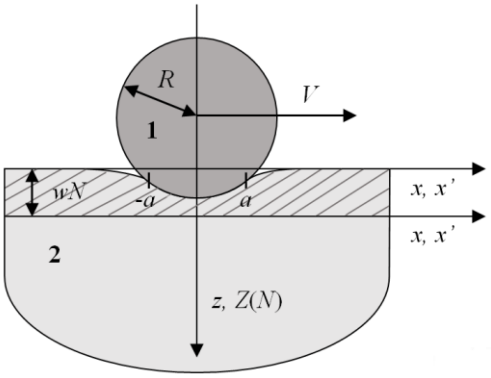


Рис.1 Схема скольжения упругого цилиндра по изнашиваемой упругой полуплоскости (толщина абразивно изношенного слоя после *N* циклов обозначена заштрихованной областью)

3. Метод решения контактной задачи

В случае, когда материал полуплоскости совпадает с материалом цилиндра, распределение касательных напряжений не влияет на распределение контактных давлений, для определения которых можно воспользоваться решением задачи Герца о контакте двух упругих цилиндров [1]:

$$p(x)=\frac{E'\sqrt{a^2-x^2}}{2R},\ |x|\le a=\sqrt{\frac{4RP}{\pi E'}}, \tag{3.1}$$

где $E'=E\Big/\left(2\left(1-\nu^2\right)\right)$ – приведённый модуль упругости (E – модуль Юнга тел, ν – их коэффициенты Пуассона), а P – нормальная нагрузка, приложенная к цилиндру. Найденное распределение нормальных контактных напряжений с использованием условия (2.1) позволяет определить и распределение касательных контактных напряжений.

Компоненты тензора напряжений в произвольной точке внутри полуплоскости ($z\ge 0$), обусловленные контактным давлением p и контактными касательными напряжениями q, определяются выражениями, которые могут быть записаны в аналитическом виде [2]. Заметим, что в условиях плоской деформации помимо компонент напряжений σ_x, σ_z и τ_{xz}, действующих в плоскости (x,z), отлична от нуля также компонента $\sigma_y=\nu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)$.

Для расчёта контактно-усталостных повреждений в поверхностных слоях материала при циклически изменяющемся поле напряжений в качестве критерия накопления усталостных повреждений воспользуемся эквивалентными напряжениями фон Мизеса. В случае плоской деформации распределение напряжений фон Мизеса σ_{VM} рассчитываются по следующей формуле:

$$\sigma_{VM}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\tau_{xz}^2\right)}. \tag{3.2}$$

В задаче предполагается также, что в основании действуют растягивающие или сжимающие остаточные напряжения $\sigma_x^{res}(z)$, не зависящие от времени, а зависящие только от расстояния от поверхности полуплоскости. При этом влиянием преднапряженного состояния полуплоскости на распределение контактных давлений пренебрегается. Распределение напряжений фон Мизеса σ_{VM} в этом случае с учетом (3.2) будут рассчитываться по следующей формуле:

$$\sigma_{VM}(x,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_x+\sigma_x^{res}-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x-\sigma_x^{res}\right)^2+6\tau_{xz}^2}, \tag{3.3}$$

где $\sigma_y=\nu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)$ (как и в отсутствии остаточных напряжений).

4. Моделирование накопления контактно-усталостной поврежденности

Для исследования накопления контактно-усталостных повреждений в материале полуплоскости при скольжении по нему упругого цилиндра воспользуемся макроскопическим подхо-

дом. В основе этого метода лежит функция поврежденности Q, которая определяет момент разрушения материала. Для моделирования процесса накопления повреждений часто используется модель линейного суммирования, когда в каждый момент времени приращение поврежденности не зависит от величины уже накопленной поврежденности. В данном исследовании принимается, что зависимость скорости накопления повреждений q от амплитудных значений критериальных напряжений имеет степенной вид. С использованием напряжений фон Мизеса скорость накопления повреждений за один цикл можно определить по следующей формуле:

$$q(z) = c\left(\frac{\Delta\sigma_{VM}(z)}{p_0}\right)^m, \tag{4.1}$$

где $\Delta\sigma_{VM}$ – амплитудные значения напряжений фон Мизеса в плоском сечении на расстояния z от поверхности полуплоскости, c и m – постоянные модели, которые определяются из экспериментальных данных, а p_0 – максимальное контактное давление (3.1). Амплитудные значения напряжений фон Мизеса на произвольной фиксированной глубине z_0 определяются как разница их наибольшего и наименьшего значений в сечении плоскостью $z = z_0$, параллельной поверхности полуплоскости. Выражение (4.1) записано с учетом независимости напряженного состояния полуплоскости от времени. Из (4.1) получим следующее выражение для накопленной за N циклов поврежденности полуплоскости на глубине z:

$$Q(z,N) = \sum_{n=1}^{N} q(z) + Q_0(z) = Nc\left(\frac{\Delta\sigma_{VM}(z)}{p_0}\right)^m + Q_0(z), \tag{4.2}$$

где Q_0 – начальная поврежденность в материале полуплоскости. Момент разрушения, а именно число циклов N^* до момента разрушения, определяется из следующего условия:

$$Q(z,N^*) = Q^*, \tag{4.3}$$

где Q^* – критическое значение поврежденности. Разрушение в данной модели представляет собой отделение слоя некоторой толщины h. Условие (4.3) определяет также и толщину отделившегося слоя, а именно глубину z, где достигается критическое значение поврежденности. Поврежденность $Q(z,N^*)$ в оставшейся части полуплоскости, то есть для $z > h$, в последующих циклах нагружения учитывается в модели, а именно в уравнении (4.2), в качестве начальной поврежденности Q_0.

5. Учет абразивного износа в модели накопления поврежденности

Формула (4.2) для расчета накопленной за N циклов поврежденности записано в предположении отсутствия поверхностного износа, то есть считается, что положение границы полуплоскости до момента подповерхностного разрушения не меняется. Однако одновременно с процессом накопления контактно-усталостных повреждений в процессе трения скольжения цилиндра по полуплоскости будет наблюдаться и процесс абразивного износа поверхности полуплоскости. Как следствие, после каждого цикла нагружения будет наблюдаться изменение положения границы полуплоскости, то есть она будет подвижной, а именно зависеть от N.

Для описания абразивного износа воспользуемся уравнением износа Арчарда [3], исходя из которого можно получить следующее выражение для глубины w абразивно изношенного слоя за один цикл нагружения:

$$w = \frac{KP}{H}, \tag{5.1}$$

где H – твердость материала, а K – некоторый коэффициент, определяемый для каждого конкретного процесса изнашивания. При выводе выражения (5.1) учтено, что характерное время, связанное с процессом накопления повреждений больше времени прохождения площадки контакта. Таким образом, абразивный износ будет определять положение границы полуплоскости после каждого цикла нагружения. Исходя из (5.1), уравнение для зависимости положения границы полуплоскости Z (рис.1) от числа циклов может быть записано следующим образом:

$$Z(N) = z - wN, \; z \geq wN. \tag{5.2}$$

Тогда выражение для накопленной за N циклов поврежденности с учетом (4.2) запишется следующим образом:

$$Q(z,N)=\frac{cT}{p_0^m}\sum_{n=1}^{N}\left(\Delta\sigma_{VM}\left(z-w(n-1)\right)\right)^m+Q_0(z),\ z\ge wN\,. \tag{5.3}$$

6. Численные результаты для функции поврежденности материала

Представленный в п.3 метод решения контактной задачи скольжения упругого цилиндра по границе полуплоскости из того же материала позволяет определить контактные и внутренние напряжения с учетом наличия в полуплоскости остаточных напряжений. Найденные внутренние напряжения позволяют исследовать влияние остаточных напряжений на процесс накопления контактно-усталостных повреждений (см. п.4). При этом также можно учесть поверхностный абразивный износ, как это показано в п.5.

Рассмотрим поле постоянных растягивающих и сжимающих остаточных напряжений, которые действуют в подповерхностном слое некоторой толщины, а именно $\sigma_x^{res}=\pm 0.1p_0$. На рис.2 представлены функции поврежденности после различного числа циклов N нагружения при наличии растягивающих (рис.2а) и сжимающих (рис.2б) остаточных напряжений с учетом и без учета абразивного поверхностного износа. Как видно из результатов, полученных без учета абразивного износа, сжимающие остаточные напряжения приводят к увеличению поверхностного максимума функции поврежденности, но к снижению подповерхностных значений поврежденности. Учет же абразивного износа, как следует из рис.2б, может привести к тому, что функция поврежденности будет монотонно убывающей с максимумом на изношенной поверхности упругой полуплоскости, а значит, усталостный износ будет поверхностным. Если же абразивный поверхностный износ не учитывать, то максимальное значение функции Q, может быть и в подповерхностной области, что имеет место при наличии растягивающих остаточных напряжений. Таким образом, существование абразивного износа может привести к изменению характера контактно-усталостного разрушения.

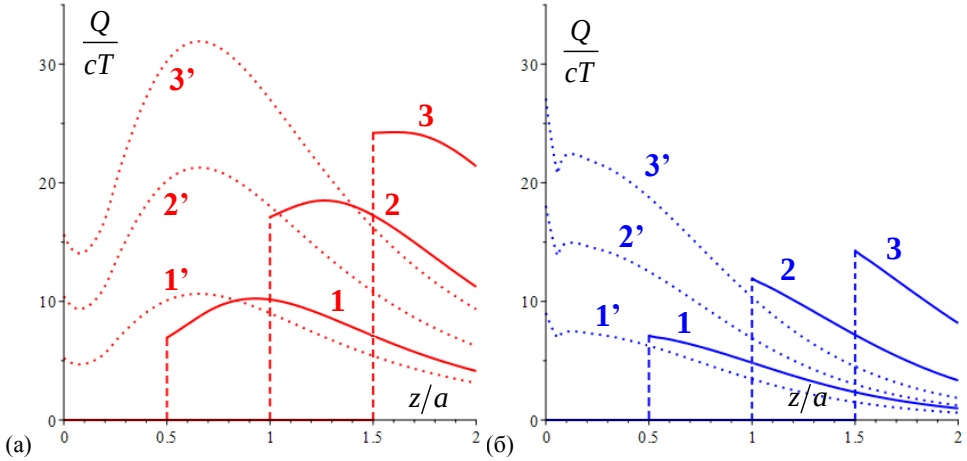


Рис.2 Зависимость функции поврежденности от глубины при наличии растягивающих (а) и сжимающих (б) остаточных напряжений после N = 50 циклов (1,1'), N = 100 циклов (2,2'), N = 150 циклов (3,3') с учетом (1,2,3) и без учета (1',2',3') поверхностного абразивного износа; ν = 0.3, μ = 0.2, m = 3, w = 0.01a

7. Выводы

Полученное в работе решение задачи скольжения упругого цилиндра по упругому предварительно напряженному основанию из того же материала позволило исследовать влияние остаточных напряжений в основании на процесс накопления контактно-усталостных повреждений в нем, в том числе с учетом поверхностного абразивного износа материала основания. Показано, что сжимающие остаточные напряжения приводят к уменьшению амплитудных значений подповерхностных эквивалентных напряжений фон Мизеса в подповерхностных слоях материалов, но увеличивают их поверхностное значение (при наличии трения). Следовательно, наве-

дение в материалах взаимодействующих тел полей сжимающих остаточных напряжений может замедлить скорость накопления подповерхностных усталостных повреждений.

Полученные результаты могут быть использованы для повышения эффективности способов управления процессами контактно-усталостного изнашивания тел в условиях трения скольжения за счет создания в них определенных полей остаточных напряжений.

Работа выполнена в рамках крупного научного проекта при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2024-535 от 23.04.2024).

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия, М.: Мир, 1989. 510 с.
2. McEwen E. Stresses in elastic cylinders in contact along a genatrix (including the effect of tangential friction) // The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 40. 1949. Pp. 454-459.
3. Archard J.F. Contact and rubbing of flat surfaces // Journal of Applied Physics, 24 (8). 1953. Pp. 981-988.

Информация об авторе

Яковенко А.А. – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, лаборатория трибологии, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
anastasiya.yakovenko@phystech.edu

STABILITY AND VIBRATION ANALYSIS OF MULTI-SPAN BEAMS ON PERIODIC SUPPORTS USING BLOCH–FLOQUET THEORY OF FORBIDDEN FREQUENCIES

Avetisyan, A., Ghazaryan, K., Marzocca, P.

In this report we present a review of our resent investigations [1,2,4-7] in the topic of static stability and flexural vibration of multi span beams rested on periodically arranged external supports.

In the framework of Bloch -Floquet theory the static stability of a multi-span finite length beam resting on periodic rigid and elastic supports is studied in [1]. The beam is compressed by axial forces applied at the edges. The beam rests on periodically, asymmetrically arranged intermediate rigid and elastically constraint supports. At the rigid support of the beam the deflection is zero, with equal slope and moment to the right and left of the rigid support. At the beam elastic support with attached rotational spring the deflection is also zero, with equal slope to the right and left of the elastic support, but with a jump in the moments which is proportional to the slope (Fig,1)

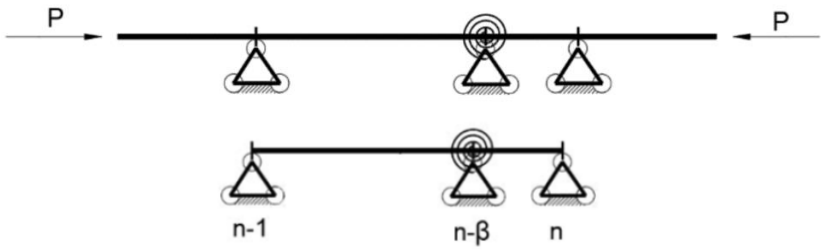


Figure 1. Periodically arranged rigid and elastic supports, basic unit span of a compressed beam

As a novel contribution, the static stability analysis of the compressed beam is carried out by means of the transfer matrix method in conjunction with Bloch-Floquet's method, a widely used method in dynamic problems. This approach allows to solve the stability boundary value problems of multi span beam analytically. The main conclusions of this study are as follows:

- It is possible to identify the smallest value of critical force beyond which the hinged beam buckling does not depend on the number of supports.
- The smallest value of critical force beyond which the hinged beam is unstable coincides with the smallest value of critical force of a one span beam.
- For multi span beam (N > 7) with clamped edges the critical force must be described by critical force of infinite beam.
- For multi span beam (N > 6) with clamped-hinged edges the critical force is described by a hybrid critical curve, combined from the infinite beam and the one-span hinged beam curves.
- The stiffness of elastic support significantly increases the critical values of multi-span compressed beam.

To the best of the authors' knowledge, the Bloch-Floquet theory used to static stability of periodic structures has been firstly reported in [2], where it was fixed that in "forbidden bands" (Bloch-Floquet wave numbers are complex) the compressed periodic beam is stable, while out of "forbidden bands" the periodic beam is unstable. A great number of papers can be found about of dynamics problems in periodic structures. Much attention has been given to the propagation of elastic waves, called Floquet-Bloch waves, which occurs in elastic periodic phonon structures consisting of an arrangement of substructures with highly contrasting mechanical properties. The most notable feature of phonon structures is the existence of bandgap "forbidden frequencies'' where elastic waves are unable to

propagate. An extensive overview of historical developments with an in-depth literature and technical review of the progress in the field of dynamics problem of elastic and acoustic wave motion in periodic structures is given in [3].

The stability of a current-carrying multi-span beam in an external magnetic field is studied in [4].

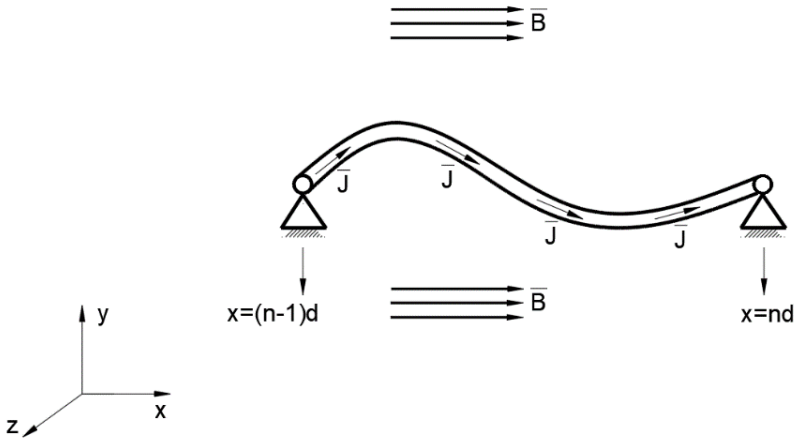


Figure 2. Deformed state between adjacent external supports of a current carrying beam immersed in an external magnetic field

A current carrying wire immersed in an external longitudinal magnetic field is illustrated in Fig. 2. The wire is modeled as a Euler–Bernoulli elastic beam with a circular cross section. The beam rests on periodically arranged rigid external supports at the positions identified by $x = (n-1)d, x = nd$, where the beam transversal displacements are equal to zero, but the bending moments and rotation angles are continuous. Due to electromagnetic interaction on the current-carrying beam acts an electromagnetic Ampere bulk force $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ which can lead to an instability of the beam. Based on the linearized static stability equation and propagator transfer matrix approach for a multi-span finite-length beam, the stability equation and solutions of the several boundary value problems are obtained. While the Floquet–Bloch theory is widely used in the dynamic problem of phononic and photonic structure conditions, its application to the solution of infinite length current-carrying beam static stability problem is novel. The major findings of [4] can summarized as:

- In the framework of linearized static stability equation and propagator matrix approach, the solutions of the several boundary value problems are obtained.
- By means of the Floquet–Bloch theory, the stability of the infinite beam is considered, and it is shown that the minimal critical values of the Ampere's force for "infinite" and "hinged" beams are the same.
- The minimal critical Ampere's force for "hinged" beam does not depend on the number of supports.
- For the "clamped" and "clamped–hinged" beams, the minimal critical values of Ampere's force decrease when the number of supports increases and approaches the value obtained for the "hinged" and infinite beams.
- The model of the periodic infinite beam is in good agreement with the results of the finite-length multi-span beam when the number of supports N is greater than 6.

Based on the Bloch-Floquet theory in [5] it is shown that in a multi-span beam rested on periodic rigid and elastic supports the tensive and compressive axial forces sufficiently widening the multiple bandgaps of the flexural waves in in a multi-span beam rested on periodic rigid and elastic supports.

The widening of the bandgaps occurs also with increasing the stiffness of the rotational spring attached to an elastic support. This study lays a certain theoretical foundation for the design and tuning the meta beam bandgap locations and widths by varying the stiffness of the elastic supports as well as the axial force magnitude and direction.

The papers [6,7] are devoted to energy harvesting problems where flexural vibration is investigated of a finite-sized, multi-span beam under axial tension with periodically arranged external supports and partially covered by piezoelectric patch. In the region $x \in (a, L), L = a + Nd$ the beam is supported on $N + 1$ intermediate external supports periodically arranged with period d at points $x = a + (n - 1)d, n = 1,2 \ldots N$. In the region $x \in (a, a + nd)$ the beam on its traction free surface is partially covered by a perfectly bonded piezoelectric patch of nd length, as shown in Fig. 3

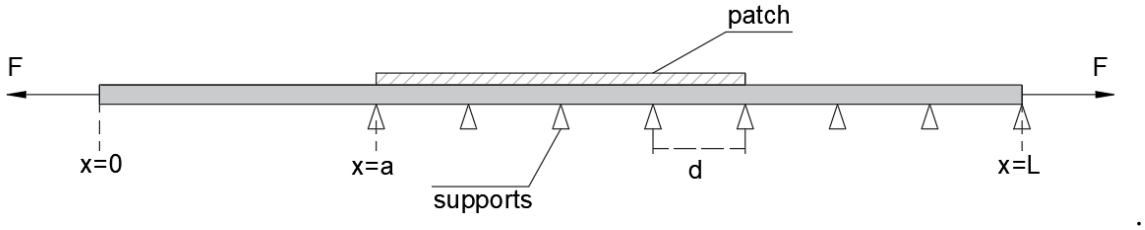


Figure 3. Tensioned beam with periodic external supports, partially covered by a piezoelectric patch.

General solutions are derived using the Euler-Bernoulli beam theory and the transfer matrix method. By applying Bloch-Floquet theory, explicit expressions are obtained to identify flexible wave bandgaps resulting from the periodic support structure.

The main conclusions can be summarized as follows:

- Bandgap Formation and Tension Effects: Periodically arranged external supports in an infinite homogeneous beam induce wide flexural wave bandgaps. The presence of axial tension shifts these bandgaps to higher frequency ranges and increases the peak values of the deviation function, enhancing the structure's ability to filter and control wave propagation.
- Wave Localization in Finite Beams: In a finite-length beam, significant localization of flexural waves occurs when the beam's natural frequencies lie within the bandgaps. This localization phenomenon is observed even with a small number of supports, demonstrating the strong influence of structural periodicity on finite systems.
- Propagation Behavior in Bandgaps: Within bandgap frequencies, flexural waves are effectively confined and cannot propagate freely through the periodic structure. These waves become localized near the first few periodic cells and increasing the number of supports further strengthens this localization.
- Eigenfrequency Distribution: Adding more external supports significantly increases the number of eigenfrequencies located outside the bandgaps, thereby increasing the density of resonant modes in the passbands. However, the eigenfrequencies within the bandgaps remain sparse and are largely unaffected in number or location.
- Piezoelectric Voltage Response: The electric voltage output generated by the piezoelectric patch is directly proportional to the beam slope at the interface of the first periodic support. This confirms the patch's sensitivity to localized wave activity in bandgap regions.
- Energy Harvesting Performance: The efficiency of energy harvesting is highly dependent on the vibration frequency. At "forbidden" eigenfrequencies—where strong wave localization occurs—the electrical voltage output of the piezoelectric patch on a tensioned beam can be significantly

higher than that of a non-tensioned beam, highlighting the beneficial role of axial force in energy harvesting applications.

REFERENCES

1. Avetisyan, A., Ghazaryan, K., & Marzocca, P. (2023). Stability of a finite length multi-span beam resting on periodic rigid and elastic supports. *International Journal of Solids and Structures*, *281*, 112410.
2. Avetisyan, A., Belubekyan, M.., & Ghazaryan, K., (2015) Stability of a beam with periodic supports. *Mechanics. Proc. NAS Armenia, 68 (3), 16–21.*
3. Hussein, M.I., Leamy, M.J., & Ruzzene, M., (2014) Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Appl. Mech. Rev. 66 (4), 040802, 38 pages*.
4. Avetisyan, A., Ghazaryan, K., & Marzocca, P. (2024). Stability of a multi-span current-carrying beam resting on periodic supports and exposed to an external magnetic field. *Journal of Applied Mechanics, ASME, 91(6), 061009.*
5. Ghazaryan K. (2024) Bandgaps, dynamics and stability of multi-span beam rested on periodically arranged exterior supports, *Reports NAS of Armenia, 124,2, 7-15.*
6. Avetisyan, A., Ghazaryan, K., & Marzocca, P (2025), Flexural vibrations of a beam on periodically arranged external supports and partially coated by piezoelectric patch, *Mechanics. Proc. NAS Armenia, 78, 2, 1-19*
7.Avetisyan, A., Ghazaryan, K., & Marzocca, P (2025) Flexural Vibration Analysis of a Tensioned Beam Resting on Periodically Arranged Supports with Partial Piezoelectric Coverage, *European Journal of Mechanics / A Solids*, In press.

Information about authors

Avetisyan Ara S. - Chief Researcher of the Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, ara_avetisyan@sci.am

Ghazaryan Karen B. - Chief Researcher of the Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, ghkarren@gmail.com

Marzocca Pier -Director, Sir Lawrence Wackett Centre, RMIT University, Australia, pier.marzocca@rmit.edu.au

HIERARCHY OF GEOMETRIC NONLINEARITY IN THE ENERGY HARVESTING PROCESS IN DYNAMIC PROBLEMS OF THIN-WALLED PIEZOELECTRIC ELEMENTS

Avetisyan Ara S., Khachatryan Vazgen M., Kamalyan Andranik A.

The hierarchy of considering the effect of geometric nonlinearity relative to the physical nonlinearity of the material properties in the process of collecting the energy of the accompanying electric field in thin-walled piezoelectric elements is investigated. The effect of considering large deformations (geometric nonlinearity) in dynamic problems of thin-walled elements made of physically linear piezoelectric materials is shown. In the article, considering the nonlinear variability of the surface conjugation of the electromechanical characteristics of the internal electroelastic and external electric fields of the piezoelectric, a nonlinear boundary value problem of electro elasticity for non-centrosymmetric crystalline piezoelectrics is formulated.

Introduction. Elastomeric piezoelectric materials are widely used in modern measuring and converting devices such as actuators, filters and sensors. This leads to a rethinking of the application of the mathematical linear theory of electro elasticity of piezoelectrics, which is necessary for describing electromechanical interactions in order to characterize and predict the properties of materials [1]. The problems of the macroscopic Lagrangian theory of linear and nonlinear electrodynamics of an anisotropic dielectric were studied as early as 1971 [1,2]. In [3], based on the electrodynamic Lagrangian theory of elastic dielectrics, a deductive derivation of dynamic equations and constitutive relations for electroelastic phenomena is presented, applicable to crystals of arbitrary symmetry, structural complexity and nonlinearity. A general formulation of nonlinear electro elasticity and theoretical studies of the generation of higher harmonics of two-dimensional and three-dimensional terahertz electromagnetic beams in nonlinear crystals are presented in [4 ÷ 6]. Based on the presented basic relationships of nonlinear electro elasticity of piezoelectrics, in works [7÷11] it is shown that in all mathematical boundary value problems, considering geometric nonlinearity connects the fields of plane and antiplane deformations. The signal of plane electroelastic deformation generates higher harmonics of waves of electroactive antiplane deformation, and the signal of electroactive antiplane deformation generates higher harmonics of waves of electroactive plane deformation.

When a finite-amplitude electroelastic wave signal propagates in a piezoelectric layer of a hexagonal symmetry class of ***6mm***, considering geometric nonlinearity, a nonlinear interaction arises between the amplitude and phase functions of the electroelastic three-component wave of large shears. Such an amplitude and phase nonlinear interaction arises when an electroelastic three-component wave propagates in an inhomogeneous piezoelectric.

1.1 Material relations for a geometrically nonlinear piezoelectric medium

In the nonlinear theory of electro elasticity, conjugate parameters of coupled fields are used: the stress tensor in the Lagrangian representation of the material (Piola-Kirchhoff stresses)

$$L_{ij} = J\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}\sigma_{ik} \tag{1}$$

and the deformation gradient

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial x_n} = \delta_{mn} + \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \tag{2}$$

In the given relations, $J\left(\frac{\xi}{x}\right) = 1 + \frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}$ is the Jacobian of the coordinate system transformation, $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = \delta_{jk} - \delta_{nk}\frac{\partial u_j}{\partial x_n} + \delta_{km}\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}$ is the deformation gradient, $\sigma_{km}(x_i,t)$ is the non-dissipative part of the mechanical stress tensor, $x_j = x_j\{\xi_i,t\}$ are the coordinates of the same material particles of the deformable material medium at the moment $\langle t\rangle$, $\xi_j = \xi_j\{x_i,t\}$ are the

coordinates of the same material particles that had coordinates $\{x_j\}$ at the initial moment of time $\langle t=0\rangle$, $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ is the Kronecker symbol.

In bordering material environments, the states of electromagnetic-elastic anisotropic continuous media are more naturally described in a material representation (description by Lagrange variables). The material representation (description by Lagrange variables) of the equations of motion in limited media is natural, since material particles of different media, at different moments in time, can be at the same neighboring points of the spatial boundary. Along with the equations of motion, in limited media and in the bordering non-material boundary region, the material representation (description by Lagrange variables) of Maxwell's equations of electromagnetism is also natural.

From the quasi-static equations of electromagnetic elasticity, with respect to the Piola-Kirchhoff electroelastic stress tensor $\mathcal{L}_{ij}(x_k,t)=J\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}\left(\sigma_{ik}^{(els)}+\sigma_{ik}^{(em)}\right)$ and new electromagnetic characteristics of the field $\mathcal{E}_i(x_k,t)=\frac{\partial \xi_i}{\partial x_m}E_m(\xi_k,t)$, $\mathcal{H}_i(x_k,t)=\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}H_k(\xi_n,t)$, $\mathcal{D}_p(x_k,t)=J\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_p}{\partial \xi_n}D_n(\xi_k,t)$, and $\mathcal{B}_p(x_k,t)=J\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_p}{\partial \xi_n}B_n(\xi_k,t)$, we obtain the equations of electromagnetic elasticity in the material in Lagrange coordinates.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{ik}}{\partial x_k}=\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}_p}{\partial x_p}=0; \qquad \mathcal{E}_m=-\frac{\partial \phi}{\partial x_m}-l^*_{mkij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}_p}{\partial x_p}=0, \qquad \mathcal{H}_m=-\frac{\partial \psi}{\partial x_m}-l^*_{mkij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \tag{5}$$

1.2 General relations of electro elasticity in the external non-material medium and boundary conditions on the deformed surface

By introducing a display of the current and initial states of the external vacuum region, taking into account the deformation of the piezoelectric surface, the invariance of the equations of electromagnetism with respect to the Lagrangian characteristics of the electromagnetic field $\mathcal{E}_i^{(0)}(x_k,t)=\frac{\partial \xi_i^{(0)}}{\partial x_m}E_m^{(0)}(\xi_k,t)$, $\mathcal{H}_i^{(0)}(x_k,t)=\frac{\partial \xi_i^{(0)}}{\partial x_k}H_k^{(0)}(\xi_n,t)$, $\mathcal{D}_p^{(0)}(x_k,t)=J\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_p^{(0)}}{\partial \xi_n}D_n^{(0)}(\xi_k,t)$, and $\mathcal{B}_p^{(0)}(x_k,t)=J\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_p^{(0)}}{\partial \xi_n}B_n^{(0)}(\xi_k,t)$ is preserved in the external vacuum region

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{D}_p^{(0)}}{\partial x_p}=0; && \in_{rmp}\frac{\partial \mathcal{E}_m^{(0)}}{\partial x_p}=0\\ &\mathcal{E}_m^{(0)}=\frac{\partial \xi_i^{(0)}}{\partial x_m}E_i^{(0)}; && \mathcal{D}_p^{(0)}=J^{(0)}\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_p}{\partial \xi_i^{(0)}}D_i^{(0)}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial B_p^{(0)}}{\partial x_p}=0; \qquad \in_{rmp}\frac{\partial H_m^{(0)}}{\partial x_p}=0$$
$$H_m^{(0)}=\frac{\partial \xi_i^{(0)}}{\partial x_m}H_i^{(0)}; \qquad B_p^{(0)}=J^{(0)}\left(\frac{\xi}{x}\right)\frac{\partial x_p}{\partial \xi_i^{(0)}}B_i^{(0)} \tag{7}$$

In which the electric and magnetic field strengths are represented similarly

$$E_m^{(0)}\left(x_k,t\right)=-\frac{\partial \phi_0}{\partial x_m}-l_{mnij}^{*}\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_0}{\partial x_n}, \qquad H_m^{(0)}\left(x_k,t\right)=-\frac{\partial \psi_0}{\partial x_m}-l_{mnij}^{*}\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_0}{\partial x_n} \tag{8}$$

The boundary conditions on the mechanically free surface of the piezoelectric layer are simplified and take the form

$$N_j L_{ij}=0 \tag{9}$$

At the deformed, uncharged interface between two media, the normal component of the electric induction and the tangential component of the magnetic field strength vector, as well as the tangential component of the electric field strength vector and the normal component of the magnetic field induction remain continuous:

$$\in_{ijk} N_j\left[E_k^{(1)}-E_k^{(2)}\right]=0, \qquad N_k\left[D_k^{(1)}-D_k^{(2)}\right]=0 \tag{10}$$

$$\in_{ijk} N_j\left[B_k^{(1)}-B_k^{(2)}\right]=0, \qquad N_k\left[H_k^{(1)}-H_k^{(2)}\right]=0 \tag{11}$$

2. Formulation and study of a mathematical nonlinear boundary value problem for a piezoelectric layer of class *6mm*

Accounting for finite displacements complicates the interaction of elastic and electromagnetic fields, also linking flat and antiplane electroelastic deformation states. In the equations of plane deformation, nonlinear terms in finite displacements appear, and in the equations of electroacoustics and magnetism, nonlinear terms in elastic deformations. The equations of motion of an elastic medium and the equations of electromagnetism in Lagrange variables are given in [9,11].

The nonlinear interaction of the components of electromagnetic elastic fields leads to the sequential excitation of time harmonics of the incident wave signal $f_n=A_n(\xi,\tau)\cdot\exp[i(\omega_n\xi-k_n\tau)]$. The amplitude and phase functions of the generated harmonics will be weakly changing functions of both time and direction of wave propagation $\{\xi=\delta r;\ \tau=\delta t\}$.

Here δ is a physical small parameter, which can be a measure of the decrease in the primary wave signal at the wavelength.

Considering that the nonlinearity of crystals is small, when solving a nonlinear mathematical boundary value problem of the propagation of finite amplitude waves, it is enough to limit ourselves to an approximation of a given signal of the incident wave. We will use the perturbation method, representing the sought values of the electromagnetic elastic field in the form

$$F\left(x_j,t,\xi,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta^n F_n\left(x_j,t,\xi,\tau\right) \tag{12}$$

In the first approximation, we obtain a linear homogeneous boundary value problem of electromagnetic elasticity for a 6 mm piezoelectric, in which the problems of plane elastic deformation and magnetic field are separated from the problem of electroactive antiplane deformation [11].

When a monochromatic electroacoustic signal of finite amplitude is excited in a piezoelectric layer of class ***6mm***, for all wave components, taking into account the weak nonlinearity of the piezoelectric crystal, the solutions of the mathematical nonlinear boundary value problem in the first approximation are written in the form

$$F_n\left(x_1,x_2,t,\xi,\tau\right)=\sum_{m=1}^{\infty}F_{nm}(\xi,\tau)\cdot\left\{\begin{matrix}f_{nm}[\gamma_1 kh,\gamma_1 kh,]\cdot\exp(m\gamma_1 kx_2)+\\+g_{nm}[\gamma_1 kh,\gamma_1 kh,]\cdot\exp(-m\gamma_1 kx_2)\end{matrix}\right\}\exp[im\theta(x_1,t)]+c.c. \tag{13}$$

The parameters γ_1 and γ_2 given in relations (13) characterize the signal of a linear electroacoustic wave. Functions $F_n\left(x_1, x_2, t, \xi, \tau\right)$ characteristics of the wave field in the first approximation

$$\left\{U_1\left(x_1, x_2, t, \xi, \tau\right);\ V_1\left(x_1, x_2, t, \xi, \tau\right);\ W_1\left(x, x_2, t, \xi, \tau\right);\ \Phi_1\left(x_1, x_2, t, \xi, \tau\right);\ \Phi_1^{(e\pm)}\left(x_1, x_2, t, \xi, \tau\right)\right\} \quad (14)$$

The following approximations of wave characteristics are obtained from systems of equations of electromagnetic elasticity

$$L_1[U_n, V_n] = -2c_{11}\frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial x_1 \partial \xi} - \left(c_{11} - c_{66}\right)\frac{\partial^2 V_{n-1}}{\partial x_2 \partial \xi} + 2\rho\frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial t \partial \tau} + NL_1\left[U_{n-1}, V_{n-1}, W_{n-1}\right],$$

$$L_2[U_n, V_n] = -2c_{66}\frac{\partial^2 V_{n-1}}{\partial x_1 \partial \xi} - \left(c_{11} - c_{66}\right)\frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial x_2 \partial \xi} + 2\rho\frac{\partial^2 V_{n-1}}{\partial t \partial \tau} + NL_2\left[U_{n-1}, V_{n-1}, W_{n-1}\right]. \quad (15)$$

$$L_3[W_n, \Phi_n] = -2c_{44}\frac{\partial^2 W_{n-1}}{\partial x_1 \partial \xi} - 2e_{15}\frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial x_1 \partial \xi} + 2\rho\frac{\partial^2 W_{n-1}}{\partial t \partial \tau} + NL_3\left[U_{n-1}, V_{n-1}, W_{n-1}, \Phi_{n-1}\right],$$

$$L_4[W_n, \Phi_n] = -2e_{15}\frac{\partial^2 W_{n-1}}{\partial x_1 \partial \xi} + 2\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial x_1 \partial \xi} + NL_4\left[U_{n-1}, V_{n-1}, \Phi_{n-1}\right], \quad (16)$$

$$L_6[\Psi_n] = -2\frac{\partial^2 \Psi_{n-1}}{\partial x_1 \partial \xi} + NL_6\left[U_{n-1}, V_{n-1}, \Psi_{n-1}\right].$$

$$L_5[\Phi_n^{(e\pm)}] = -2\frac{\partial^2 \Phi_{n-1}^{(e\pm)}}{\partial x_1 \partial \xi} + NL_5\left[V_{n-1}^{(e\pm)}, \Phi_{n-1}^{(e\pm)}\right], \quad L_7[\Psi_n^{(e\pm)}] = -2\frac{\partial^2 \Psi_{n-1}^{(e\pm)}}{\partial x_1 \partial \xi} + NL_7\left[V_{n-1}^{(e\pm)}, \Psi_{n-1}^{(e\pm)}\right] \quad (17)$$

At the deformed interfaces, the sought values of the electromagnetic-acoustic wave field satisfy the inhomogeneous boundary conditions

$$\frac{\partial U_n}{\partial x_2} + \frac{\partial V_n}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_{n-1}}{\partial \xi} + B_1\left[W_{n-1}\right], \qquad \frac{\partial U_n}{\partial x_1} + \frac{c_{11}}{c_{12}}\frac{\partial V_n}{\partial x_2} = -\frac{\partial U_{n-1}}{\partial \xi} + B_2\left[U_{n-1}, V_{n-1}, W_{n-1}\right]. \quad (18)$$

$$\frac{\partial W_n}{\partial x_2} + \frac{e_{15}}{c_{44}}\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} = B_3\left[U_{n-1}, V_{n-1}, W_{n-1}\right],$$

$$\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial W_{n\pm}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_{n\pm}}{\partial x_2} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial \Phi_n^{(e\pm)}}{\partial x_2} = B_4\left[U_{(n-1)\pm}, V_{(n-1)\pm}, V_{n-1}^{(e\pm)}, \Phi_{(n-1)\pm}, \Phi_{n-1}^{(e\pm)}\right], \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Phi_{n\pm}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_n^{(e\pm)}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Phi_{(n-1)\pm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{n-1}^{(e\pm)}}{\partial \xi} + B_5\left[U_{(n-1)\pm}, V_{(n-1)\pm}, \Phi_{(n-1)\pm}, \Phi_{n-1}^{(e\pm)}\right].$$

$$\frac{\mu_{11}}{\mu_0}\frac{\partial \Psi_{n\pm}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_n^{(e\pm)}}{\partial x_2} = B_6\left[U_{(n-1)\pm}, V_{(n-1)\pm}, V_1^{(e\pm)}, \Psi_{(n-1)\pm}, \Psi_{n-1}^{(e\pm)}\right],$$

$$\frac{\partial \Psi_{n\pm}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_n^{(e\pm)}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Psi_{(n-1)\pm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_{n-1}^{(e\pm)}}{\partial \xi} + B_7\left[U_{(n-1)\pm}, V_{(n-1)\pm}, \Psi_{(n-1)\pm}, \Psi_{n-1}^{(e\pm)}\right]. \quad (20)$$

The generation of higher harmonics of the shear electroelastic wave occurs due to the self-action of the primary harmonic. The condition for the absence of secular terms in the solutions is obtained from the boundary conditions of the boundary value problem of electro elasticity [11].

A comparative analysis of the numerical results (Fig. 2a and 2b) shows that a retarded harmonic of the electroactive shear displacement arises, lagging behind the main wave signal by a phase of $\pi/2$.

Unlike the input harmonic signal, the retarded harmonic of the wave has a maximum amplitude both on the surface of the piezoelectric layer and a local maximum amplitude at a depth of from the layer boundaries for each wave of length.

A similar comparative picture is obtained by comparing numerical calculations for the electric field potential (Fig. 3a and 3b).

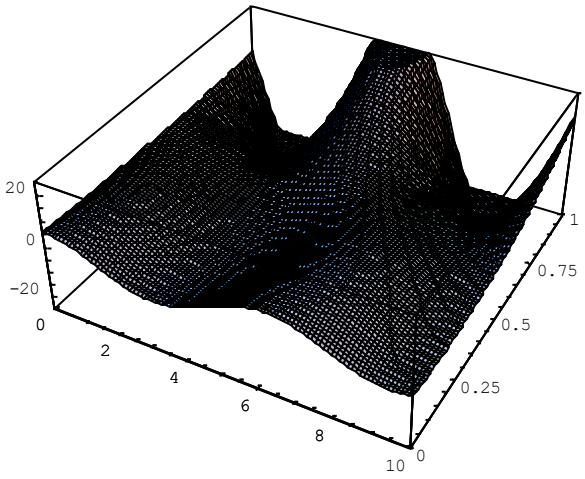


Fig. 1a Displacement $W_2\left(x_1, x_2, t, \xi, \tau\right)$ in second approximation

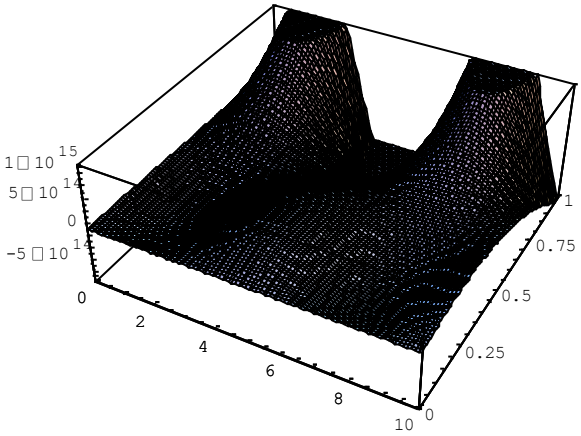


Fig. 1b Electric field potential $\Phi_2\left(x_1, x_2, t, \xi, \tau\right)$ in the second approximation

Due to the interaction of harmonics of the electroelastic shear wave, acoustic detection (non-propagating wave) occurs in the piezoelectric layer. It also follows from the formulas that when the primary linear signal propagates in the piezoelectric, a state of a plane deformed wave occurs.

REFERENCES

[1] Dorfmann L., Ogden R.W., (2017) Nonlinear electro elasticity: material properties, continuum theory and applications. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 473(2204):20170,311, http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2017.0311 ,

[2] Lax M, Nelson DF (1971) Linear and nonlinear electrodynamics in elastic anisotropic dielectrics. Physical Review B 4:3694–3731, https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.3694

[3] Nelson DF (1978) Theory of nonlinear electroacoustics of dielectric, piezoelectric, and pyroelectric crystals. The Journal of the Acoustical Society of 1 Finite-Amplitude Surface Waves in a Linear Electroacoustic Waveguide 19 America 63(6):1738–1748, https://doi.org/10.1121/1.381913,

[4] Maugin GA (1978) On the covariant equations of the relativistic electrodynamics of continua. IV. Media with spin. Journal of Mathematical Physics 19(5):1220–1226, https://doi.org/10.1063/1.523788

[5] Maugin GA (1985) Nonlinear Electromechanical Effects and Applications. World Scientific, Singapore & NY

[6] Eringen A, Maugin GA (1990) Electrodynamics of Continua, Vol I: Foundations and Solid Media. Springer, New York

[7] Avetisyan AS (1995) Surface electroelastic waves of finite amplitude in a piezoelectric medium (in Russ.). Mechanics, Procc NAS of Armenia 48(2):27– 37

[8] Avetisyan AS, Khachatryan VM (2009) Features of accounting for geometric nonlinearity in the propagation of an electroelastic wave of finite amplitude in a piezoelectric medium (in Russ.). Reports of NAS of Armenia 109(2):13–23

[9] Avetisyan AS, Khachatryan VM (2009) Propagation of antiplane electro elastic wave signal in the piezoelectric layer considering large shears (in Russ.). Mechanics, Procc NAS of Armenia 62(2):28–38

[10] Avetisyan AS (2023) Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites, Advanced Structured Materials, vol 182. Springer, Cham, https://doi.org/10.1007/978-3-031-26731-4

[11] Avetisyan A.S., Khachatryan V.M. (2025) Finite-Amplitude Surface Waves in a Linear Electroacoustic (Piezoelectric) Waveguide, Advanced Structured Materials, (2025), vol 223. Altenbach, H. (eds) Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_2

Information about authors:

Avetisyan A.S. – Institute of Mechanics, NAS of RA: Phone: (+37493) 00-44-55, E-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

Kamalyan A.A. – Institute of Mechanics, NAS of RA: Phone: (+37494) 90-96-92 E-mail: kamalyan.andranik@yahoo.com

Khachatryan V.M. - Institute of Mechanics, NAS of RA: Phone: (+37491) 71-78-55, E-mail: khachvaz@gmail.com

ON THE STRUCTURE OF OPTIMAL CONTROL IN AN ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH THERMAL LOSSES AND INPUT CONSTRAINTS

Avetisyan V.V.

This paper addresses an optimal control problem for an electromechanical system modeling the dynamics of a single-link manipulator driven by a direct current motor. The control input is subject to magnitude constraints, and the optimality criterion is a quadratic cost functional representing energy (thermal) losses. Using Pontryagin's Maximum Principle (PMP), the admissibility and optimality of various control structures are analyzed. Special attention is given to combined regimes that include both constant segments and segments corresponding to the unconstrained solution. It is shown that for sufficiently short transition times, the smooth control obtained without considering constraints becomes inadmissible. The optimality of the combined control structure is justified within a certain time range.

1. Let us consider a simple model of an electromechanical manipulator consisting of a direct current motor with independent excitation, a gearbox, and a rigid arm with a load fixed in its gripper, rotating in a horizontal plane around a fixed axis. The dynamics of the described electromechanical system in dimensionless variables are governed by the following equations [1]:

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2 . \tag{1.1}$$

Here, φ_1 is the angle of rotation of the arm relative to a fixed axis; R is the electrical resistance of the motor armature winding; k is a parameter of the motor; u is the control voltage applied to the motor input.

We consider the following optimal control problem for system (1.1).

Find a control program $u(t)$ that transfers system (1.1) from the given initial state of rest

$$\varphi_1(0) = 0 , \ \varphi_1(0) = 0 \tag{1.2}$$

to a specified terminal state of rest at the final time T

$$\varphi_1(T) = \varphi_1^T , \ \varphi_2(T) = 0 , \tag{1.3}$$

subject to the constraint

$$|u(t)| \le 1, \ t \in [0,T] \tag{1.4}$$

and minimizes the functional

$$J = \int_0^T \left(u - k\dot{\varphi}\right)^2 dt \tag{1.5}$$

Functional (1.5) characterizes the total heat released in the motor rotor winding during the control process. The time T is not specified in advance and is determined as part of the solution.

2. To solve the problem (1.1) – (1.5), we use the PMP [2]. The Hamiltonian of system (1.1) – (1.5) is given by

$$H = -(u - k\varphi_2)^2 + p_1\varphi_2 + p_2(uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2) , \tag{2.1}$$

where p_1 and p_2 are the adjoint variables, determined from the equations

$$\dot{p}_1 = -H_{\varphi_1} = 0, \qquad \dot{p}_2 = -H_{\varphi_2} = -2ku + 2k^2\varphi_2 - p_1 + kR^{-1}p_2, \qquad 0 \le t \le T. \tag{2.2}$$

The maximum of the Hamiltonian function (2.1), without considering the constraint (1.4), is determined by setting the derivative of H with respect to u equal to zero:

$$H_u(t) = -2(u(t) - k\varphi_2(t)) + p_2(t)R^{-1} = 0, \ 0 \le t \le T \tag{2.3}$$

and is achieved at

$$u^*(t) = k\varphi_2(t) + p_2(t)(2R)^{-1} . \tag{2.4}$$

The variables φ_2 and p_2 in (2.4) are found from the solution of the boundary value problem defined by the maximum principle for (1.1) – (1.3), (2.2) under the optimal control (2.4), and have the

form

$$\varphi_1(t) = \left(-2T^{-3}t^3 + 3T^{-2}t^2\right)\varphi_1^T,\ \varphi_2(t) = \left(-6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t\right)\varphi_1^T, \tag{2.5}$$

$$p_1(t) = 24R^2T^{-2}\varphi_1^T,\ p_2(t) = -24T^{-3}R^2\varphi_1^T t + 12T^{-2}R^2\varphi_1^T. \tag{2.6}$$

In accordance with (2.4)–(2.6), the optimal control (2.4) takes the form

$$u^*(t) = -6kT^{-3}\varphi_1^T t^2 + 6T^{-2}(k - 2RT^{-1})\varphi_1^T t + 6RT^{-2}\varphi_1^T. \tag{2.7}$$

From (2.7) it follows that $u^*(t)$ is a concave quadratic function, attaining its maximum value at the point

$$t_* = T/2 - k^{-1}R. \tag{2.8}$$

The corresponding maximum value is equal to

$$u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6R^2k^{-1}T^{-3}\varphi_1^T. \tag{2.9}$$

Note that at the endpoints of the interval $[0,T]$ the function $u^*(t)$ takes the values

$$u^*(0) = 6T^{-2}R\varphi_1^T,\ u^*(T) = -6T^{-2}R\varphi_1^T, \tag{2.10}$$

which is important when verifying the constraint (1.4).

As follows from (2.8) and (2.9), if $t_* \le 0$, then the function $u^*(t)$ is monotonically decreasing over the entire interval $[0,T]$. If $0 < t_* < T$, then $u^*(t)$ increases monotonically on the interval $[0,t_*]$ and decreases monotonically on $[t_*,T]$. In both cases the maximum value $u^*(t_*)$, regarded as a function of T, decreases monotonically on the interval $[0,+\infty)$, taking values from $+\infty$ to 0. Therefore, there exists a value $T = T' \in (0,+\infty)$ [3] such that the maximum value (2.9) reaches the admissible boundary of control: $u^*(t_*) = 1$.

Thus, for a fixed value of φ_1^T and for any T satisfying the inequality $T' \le T < \infty$, the control defined by formula (2.7) transfers system (1.1) from the initial state of rest (1.2) to the final state of rest (1.3), satisfies the constraint (1.4), and minimizes the functional (1.5).

Taking into account the constraint (1.4), and according to the maximum principle, the optimal control that maximizes the Hamiltonian (2.3) is determined as follows [4]:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } u^*(t) > 1, \quad (\text{i.e. } H_u(t) > 0), \\ u^*(t), & \text{if } \left|u^*(t)\right| \le 1, \ (\text{i.e. } H_u(t) = 0), \quad 0 \le t \le T', \\ -1, & \text{if } u^*(t) < -1, \ (\text{i.e. } H_u(t) < 0), \end{cases} \tag{2.11}$$

where $u^*(t)$ denotes the optimal control (2.7) derived from the maximum condition (2.3) without considering the constraints.

Let us examine the possible control structures (2.11) that may qualify as optimal.

From the concavity property of the function $u^*(t)$, it follows that for $0 < T < T'$, the maximum value of the control exceeds the constraint: $u^*(t) > 1$. Let us denote by $T^* = \sqrt{6R\varphi_1^T}$ the critical value of time at which the function $u^*(t)$ first reaches the constraint at the endpoints of the interval $[0,T]$: $u^*(0) = -u^*(T) = 6T^{-2}R\varphi_1^T = 1$.

Then, the following cases are possible:

$$\text{if } T^* < T < T', \text{ then } u^*(t_*) > 1 \text{ and } u^*(0) = -u^*(T) = 6T^{-2}R\varphi_1^T < 1, \tag{2.12}$$

$$\text{if } 0 < T \le T^*, \text{ then } u^*(t_*) > 1 \text{ and } u^*(0) = -u^*(T) = 6T^{-2}R\varphi_1^T \ge 1. \tag{2.13}$$

Definition. A control u(t)u(t)u(t) is said to be *admissible* for problem (1.1) – (1.5) if it belongs to the class of piecewise-continuous functions $KC[0,T]$, satisfies the constraint (1.4), and the corresponding solution of the system (1.1), (1.2) satisfies the terminal conditions (1.3).

Depending on whether case (2.12) or (2.13) holds, control (2.11) can be represented more specifically as a member of the class of admissible controls.

Then, taking into account (2.11), we consider the following control structures:

$$u(t)=\begin{cases} u^*(t), & t\in[0,t_1] \text{ and } H_u(t)=0, \\ 1, & t\in(t_1,t_2) \text{ and } H_u(t)>0, \\ u_1(t), & t\in[t_2,T] \text{ and } H_u(t)=0. \end{cases} \quad T^*\le T\le T', \tag{2.14}$$

$$u(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,t_1) \text{ and } H_u(t)>0, \\ u_2(t), & t\in[t_1,t_2] \text{ and } H_u(t)=0, \\ -1, & t\in(t_2,T] \text{ and } H_u(t)<0, \end{cases} \quad 0\le T\le T^*. \tag{2.15}$$

In (2.14) and (2.15), the moments t_1 and t_2 denote the switching points between control regimes that arise when the optimal control reaches its boundary values: $u^*(t)=\pm 1$. The functions $u_1(t)$ and $u_2(t)$ are defined on the intervals $[t_2,T]$ and $[t_1,t_2]$, respectively, and satisfy the conditions $|u_{1,2}(t)|\le 1$ and $H_u(t)=0$. These functions may partially coincide with $u^*(t)$, but in the general case they are chosen to ensure admissibility.

First, for given values $R>0$, $k>0$ and $\varphi_1^T>0$, we investigate the admissibility of the controls (2.14) and (2.15).

Theorem 1. Let $T\in(0,T_{\min})$, where $T_{\min}$ is the minimum transition time for system (1.1) to move from the initial state (1.2) to the terminal state (1.3) in the time-optimal control problem under constraint (1.4). Then, for the problem (1.1) – (1.5), no admissible control $u(t)$.

Proof. Assume the contrary: suppose that for some $0<T<T_{\min}$, there exists an admissible control $u(t)$ satisfying the conditions of the problem. Then system (1.1) reaches the final state from the initial state in time less than $T_{\min}$, which contradicts the definition of $T_{\min}$ as the minimum transition time between these states in the time-optimal problem for system (1.1) – (1.4). Therefore, for $0<T<T_{\min}$, no admissible control exists on the interval $[0,T]$.

It follows from Theorem 1 and conditions (1.12) – (1.13) that, depending on the relation between the values of $T^*, T_{\min}, T'$, two characteristic cases can be distinguished.

Case A. If $T_{\min}<T^*<T'$, then for $T\in(T_{\min},T^*]$, control structure (2.15) is admissible on the interval $[0,T]$, while for $T\in(T^*,T')$, structure (2.14) becomes admissible.

Case B. If $T^*\le T_{\min}<T'$, then structure (2.15) is inadmissible on the entire interval $[0,T]$, and structure (2.14) is the only admissible control on $[0,T]$.

We shall consider Case A. Case B reduces to Case A when $T^*\to T_{\min}$.

Theorem 2. Let $T\in(T_{\min},T^*)$. Then the control (2.15) is not admissible in problem (1.1) – (1.5).

Proof. Consider the control structure (2.15). This control assumes that the system initially accelerates on the interval $[0,t_1)$, then transitions to a mode of smoothly decreasing control on $[t_1,t_2]$, and finally switches to constant braking with $u=-1$ on $(t_2,T]$.

1. *Phase point at the switching moment.* At the end of the interval $[0,t_1)$, the system has already accelerated, and the velocity $\varphi_2(t)$ is positive. On the interval $[t_1,t_2]$, the acceleration decreases but

remains positive as long as $u(t) > k\varphi_2(t)$. Therefore, by time t_2, reaches the state $(\varphi_1(t_2), \varphi_2(t_2))$ with $\varphi_2(t_2) = v_2 > 0$.

2. *Geometric condition for* reaching *the target*. In order for the system, after time t_2, with constant control $u(t) = -1$, to reach the final state $(\varphi_1^T, 0)$, the phase point $(\varphi_1(t_2), \varphi_2(t_2))$ must lie on the switching curve of the minimum – time problem – i.e., the set of all points from which the trajectory with constant control $u = -1$ reaches the desired position with zero velocity in time $T - t_2$. However, 1) On the interval $[t_1, t_2]$ control (2.15) uses a smoothly decreasing function $u(t) = u_2(t) \in (-1,1)$, not the bang-bang control $u = -1$, 2) as a result, at time t_2, the system reaches a different state than it would under constant control $u = 1$, 3) consequently, the point $(\varphi_1(t_2), \varphi_2(t_2))$ does not lie on the switching curve of the minimum-time solution.

3. *Conclusion: the target is unreachable*. Since the system is governed by $u = -1$ after time t_2, and the point $(\varphi_1(t_2), \varphi_2(t_2))$ does not lie on the required trajectory, then either the velocity $\varphi_2(t)$ does not lie on the required trajectory, then either: the velocity $\varphi_2(t)$ does not vanish by time T, or the coordinate $\varphi_1(T) \neq \varphi_1^T$.

In either case, the terminal conditions of the problem are violated. Therefore, by definition, the control (2.15) is not admissible**.**

Theorem 3. Let $T \in (T_{\min}, T^*)$. Then the control (2.14) is admissible in problem (1.1) – (1.5).

Proof. According to (2.14), on the interval $[0, t_1]$, the control $u^*(t)$ is known and given by formula (2.7). The switching time t_1 is determined from the equation $u^*(t_1) = 1$. This allows us to compute the corresponding state of the system: $\varphi_1(t_1) = \varphi_1'$, $\varphi_2(t_1) = \varphi_2'$. These values are used as initial conditions for system (1.1) on the next interval (t_1, t_2). Integrating the system over this interval with constant control $u(t) = 1$, we obtain the state of the system at some moment $t_2 < T$: $\varphi_1(t_2) = \varphi_1''$, $\varphi_2(t_2) = \varphi_2''$. On the third interval $[t_2, T]$, a strictly decreasing and smooth control $u_1(t)$ is chosen to satisfy $u_1(t_2) = 1$ and $|u_1(t)| \leq 1$, and to steer the system from the state $(\varphi_1'', \varphi_2'')$ to the desired final state $(\varphi_1^T, 0)$ at time T.

The feasibility of constructing such a control is ensured by the controllability of system (1.1) with respect to the rest state $(\varphi_1^T, 0)$. The control $u_1(t)$, as well as the times t_2 and T, are selected such that the length of the interval $[t_2, T]$ is sufficient to satisfy the terminal conditions while respecting the constraint $|u_1(t)| \leq 1$. Since the values of t_2 and T can be varied within the range (t_1, T'), such a construction is possible.

Theorem 4. Let $T \in (T^*, T')$. Then the control (2.14) is optimal in the problem (1.1) – (1.5).

Proof. Let control (2.14) be optimal. Then, according to the PMP, there exists an adjoint variable $p_2(t)$, continuous on the interval $[0, T]$, such that the control $u(t)$ delivers a maximum of the Hamiltonian H (2.1) at each time $t \in [0, T]$.

Let us check the fulfillment of this condition, in particular the continuity of $p_2(t)$ at the possible switching points t_1 and t_2.

The Behavior of $p_2(t)$ *at the point* t_1. According to the structure (2.14), the control $u(t)$ is continuous at the point t_1: $\lim\limits_{t \to t_1 - 0} u(t) = u(t_1) = \lim\limits_{t \to t_1 + 0} u(t) = 1$.

On the interval $[0,t_1]$, the control $u(t)=u^*(t)$, it represents the solution of the unconstrained problem and satisfies the maximum condition $H_u(t)=0$. Hence, $\lim\limits_{t\to t_1-0} H_u(t)=0$.

On the interval (t_1,t_2), the control is constant: $u(t)=1$.Then from (2.14) we have $H_u(t)>0$. However, at $t\to t_1-0$, $\lim\limits_{t\to t_1+0} H_u(t)=0$. Therefore, $H_u(t)$ has a removable discontinuity at point t_1 and can be continued as a continuous one. Thus,

$$H_u(t_1-0)=H_u(t_1+0)=0. \tag{2.16}$$

From (2.16), taking into account the expression

$$H_u(t)=-2(u(t)-k\varphi_2(t))+p_2(t)R^{-1},$$

we obtain the value of $p_2(t)$ at $t=t_1-0$ and $t=t_1+0$:

$$p_2(t_1-0)=2R(1-k\varphi_2(t_1-0)),\ p_2(t_1+0)=2R(1-k\varphi_2(t_1+0)) \tag{2.17}$$

Since $\varphi_2(t)$ is continuous at the point t_1, then $\varphi_2(t_1-0)=\varphi_2(t_1+0)$, it follows from (2.17)

$$p_2(t_1-0)=p_2(t_1+0).$$

Thus, $p_2(t)$ is continuous at the point t_1.

The continuity of the adjoint variable at the point t_2 is established in a similar manner.

Thus, the control (2.14) maximizes the Hamiltonian, the adjoint variable is continuous throughout the entire time interval $[0,T]$, the control (2.14) satisfies the constraint $|u(t)|\le 1$ and the terminal conditions (1.3) are fulfilled under this control (as established in Theorem 3). Therefore, the control (2.14) satisfies all the necessary conditions of the PMP and is optimal.

Conclusion. The study shows that under constraints on the control voltage and for short transition times, the optimal control minimizing thermal losses in the electromechanical system must include segments with both constant and variable regimes. The admissibility and optimality of a combined control structure ensuring the target state is reached with minimal energy expenditure are rigorously established.

REFERENCE

1. Bolotnik N.N., Chernous'ko F.L. Optimization of manipulation robot control // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1990. Vol. 28. Issue 5. P. 189-238.
2. Pontryagin L.S. and others. Mathematical Theory of Optimal Processes. – M.: Nauka, 1988, 393p.
3. Avetisyan V.V. Optimal Control of an Electromechanical Manipulator with Minimal Energy Consumption // Mechanics – Proceedings of NAS PA. 2024. Vol. 77. Issue 3. P. 58-73.
4. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimization of control modes of manipulation robots with regard of the energy consumption // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1987. Vol. 25. Issue 3. P. 100-107.

Information about author

Avetisyan Vahan V. – Doctor of sciences (physics and mathematics), professor, Institute of mechanics of NAS RA, (374 94) 44 95 60, e-mail: vanavet@yahoo.com

FREE VIBRATIONS OF THIN ELASTIC COMPOSED PANEL WITH RIGID-CLAMPED EDGE GENERATOR

Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G.

Free boundary and interfacial vibrations of composite cylindrical panel with rigid-clamped edge generator composed of two finite orthotropic thin cylindrical panels with different elastic properties and having full contact along the generators are studied.

Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells dispersion equations and asymptotic formulas for obtaining eigenfrequencies of possible interfacial and boundary vibrations of such composite cylindrical panels are derived. An algorithm for separating possible interfacial and boundary vibrations is presented.

Asymptotic links are established between the dispersion equations of problem at hand and analogous problems for a composed rectangular plate. Examples of cylindrical panel with different width of constituents approximate values of dimensionless characteristics of eigenfrequencies are given.

Statement of the Problem and the Basic Equations. Let the generatrices of cylindrical panel be orthogonal to the ends of the panel. On the middle surface of the panel , curvilinear coordinates (α,β) are introduced, where and $\beta(-s^{(2)}\le\beta\le s^{(1)})$ are the orientated length of the generatrice and the length of the arc of the directing circle, respectively. l is the length of the cylindrical panel (Fig.1). $\beta=0$ corresponds to the interface of material properties separation. All the values corresponding to the right panel $(0\le\beta\le s^{(1)})$ on (Fig.1) are marked with superscript (1). Similarly, for the left panel $(-s^{(2)}\le\beta\le 0)$ superscript (2) is used.

As the initial equations describing vibrations of the left and right sides cylindrical panels we will use the equations corresponding to the classical theory of orthotropic cylindrical shells written in the curvilinear coordinates α and β chosen (Fig.1) [1-2]:

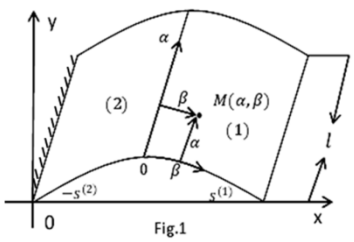


Fig.1

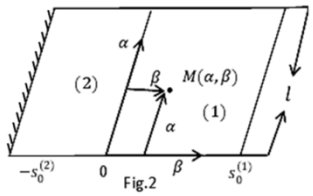


Fig.2

$$-B_{11}^{(r)}\frac{\partial^2u_1^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2u_1^{(r)}}{\partial\beta^2}-\left(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)}\right)\frac{\partial^2u_2^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{B_{12}^{(r)}}{R}\frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial\alpha}=\rho^{(r)}\omega^2u_1^{(r)},$$

$$-\left(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)}\right)\frac{\partial^2u_1^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2u_2^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{22}^{(r)}\frac{\partial^2u_2^{(r)}}{\partial\beta^2}+\frac{B_{22}^{(r)}}{R}\frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial\beta}-\frac{\mu^4}{R^2}X$$

$$\left(4B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2u_2^{(r)}}{\partial\alpha^2}+B_{22}^{(r)}\frac{\partial^2u_2^{(r)}}{\partial\beta^2}\right)-\frac{\mu^4}{R}\left(B_{22}^{(r)}\frac{\partial^3u_3^{(r)}}{\partial\beta^3}+\left(B_{12}^{(r)}+4B_{66}^{(r)}\right)\frac{\partial^3u_3^{(r)}}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right)=\rho^{(r)}\omega^2u_2^{(r)}, \quad (1)$$

$$\mu^4\left(B_{11}^{(r)}\frac{\partial^4u_3^{(r)}}{\partial\alpha^4}+2\left(B_{12}^{(r)}+2B_{66}^{(r)}\right)\frac{\partial^4u_3^{(r)}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+B_{22}^{(r)}\frac{\partial^4u_3^{(r)}}{\partial\beta^4}\right)+\frac{\mu^4}{R}\left(B_{22}^{(r)}\frac{\partial^3u_2^{(r)}}{\partial\beta^3}+\right.$$

$$\left.\left(B_{12}^{(r)}+4B_{66}^{(r)}\right)\frac{\partial^3u_2^{(r)}}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right)-\frac{B_{12}^{(r)}}{R}\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\alpha}-\frac{B_{22}^{(r)}}{R}\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\beta}+\frac{B_{22}^{(r)}}{R^2}u_3^{(r)}=\rho^{(r)}\omega^2u_3^{(r)},r=1,2.$$

Here $u_1^{(r)},u_2^{(r)}$ and $u_3^{(r)}(r=1,2)$ are projections of the displacement vector on the directions α,β and on normal to the median surface of the panel, respectively; R is radius of the directing circumference of the median surface; $\mu^4=h^2/12$ (h is shell thickness); ω is angular frequency, $\rho^{(r)}(r=1,2)$ is the density of material; $B_{ij}^{(r)}(r=1,2)$ are elasticity coefficients.

The boundary conditions for cylindrical panel has the form [1-2]

$$T_2^{(1)}\big|_{\beta=0}=T_2^{(2)}\big|_{\beta=0},\ S_{21}^{(1)}\big|_{\beta=0}=S_{21}^{(2)}\big|_{\beta=0},\ M_2^{(1)}\big|_{\beta=0}=M_2^{(2)}\big|_{\beta=0},\ N_2^{(1)}+\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\alpha}\Big|_{\beta=0}=N_2^{(2)}+\frac{\partial H^{(2)}}{\partial\alpha}\Big|_{\beta=0}$$

$$u_1^{(1)}\big|_{\beta=0}=u_1^{(2)}\big|_{\beta=0},\ u_2^{(1)}\big|_{\beta=0}=u_2^{(2)}\big|_{\beta=0},\ u_3^{(1)}\big|_{\beta=0}=u_3^{(2)}\big|_{\beta=0},\ \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0}=\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0} \quad (2)$$

$$T_2^{(1)}\big|_{\beta=s^{(1)}}=0,S_{21}^{(1)}\big|_{\beta=s^{(1)}}=0,\ M_2^{(1)}\big|_{\beta=s^{(1)}}=0,\ N_2^{(1)}+\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\alpha}\Big|_{\beta=s^{(1)}}=0. \quad (3)$$

$$u_1^{(2)}\big|_{\beta=-s^{(2)}}=0,u_2^{(2)}\big|_{\beta=-s^{(2)}}=0,u_3^{(2)}\big|_{\beta=-s^{(2)}}=0,\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial\beta}\Big|_{\beta=-s^{(2)}}=0 \quad (4)$$

$$T_1^{(r)}\big|_{\alpha=0,l} = S_{12}^{(r)} + \frac{H^{(r)}}{R}\Big|_{\alpha=0,l} = N_1^{(r)} + \frac{\partial H^{(r)}}{\partial\beta}\Big|_{\alpha=0,l} = 0, M_1^{(r)}\big|_{\alpha=0,l} = 0, r = 1,2\,. \quad (5)$$

Relations (2) are complete contacts conditions at $\beta = 0$. Relations (3), (5) are the conditions of free edges at $\beta = s^{(1)}$ and $\alpha = 0, l$, respectively. Relations (4) are the conditions of rigid-clamped edge at $\beta = -s^{(2)}$ (Fig.1). It can be proved that problem (1)-(5) is self – conjugate and have a non – negative discrete spectrum with a limit point at $+\infty$. Problem (1)-(5) does not allow separation of variables. Therefore, based on the nonnegative definiteness of the corresponding operator of problem (1)-(5), for finding natural frequencies and corresponding natural forms a generalized Kantorovich – Vlasov method of reduction to ordinary differential equations can be applied.

As the basic functions, eigenfunctions of the problem

$$w^{VIII} = \theta^8 w,\ \ w|_{\alpha=0,l} = w'|_{\alpha=0,l} = w''|_{\alpha=0,l} = w'''|_{\alpha=0,l} = 0, 0 \le \alpha \le l \quad (6)$$

are used. Problem (6) is self-conjugate and positive definite. To the eigenvalues $\theta_m^8, m = \overline{1,\infty}$ of problem (6) there correspond the eigenfunctions $w_m(\theta_m\alpha)$ [1 − 2]: Let us introduce the designation

$$\beta_m' = \int_0^l (w_m'(\theta_m\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha / \int_0^l (w_m(\theta_m\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha\ , \beta_m'' = \int_0^l (w_m''(\theta_m\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha / \int_0^l (w_m'(\theta_m\alpha))^2 \mathrm{d}\alpha\ . \quad (7)$$

In formulas (7), derivatives are taken with respect to $\theta_m\alpha$ and $\beta_m' \to 1, \beta_m'' \to 1\ \ at\ m \to +\infty$.

Derivation and an Analysis of Characteristic Equations.

In the first, second, and third equations of system (1), the angular frequency ω is formally replaced by ω_1, ω_2 and ω_3, respectively. The solution of system (1) is sought in the form

$$\left(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}\right) = \left(u_m^{(r)} w_m'(\theta_m\alpha), v_m^{(r)} w_m(\theta_m\alpha), w_m(\theta_m\alpha)\right) \exp\left((-1)^r x^{(r)}\theta_m\beta + x^{(r)}\theta_m s^{(r)}\right), \quad (8)$$

$r = 1,2;$

Here, $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$ and $x^{(r)}$ are indeterminate constants. In this case, conditions (5) are obeyed automatically. Let us insert Eq. (8) into Eq. (1). The equations found are scalarly multiplied by the vector-function

$$\left(w_m'(\theta_m\alpha), w_m(\theta_m\alpha), w_m(\theta_m\alpha), w_m'(\theta_m\alpha), w_m(\theta_m\alpha), w_m(\theta_m\alpha)\right) \quad (9)$$

and then integrated between the limits from 0 to l. From the first two pairs of equations we obtain

$$\left(c_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}\right) u_m^{(r)} = \varepsilon_m \left\{ a_m^{(r)} + a^2 \frac{B_{22}^{(r)}\left(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}\right)}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \left(x^{(r)}\right)^2 l_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 a^2 \frac{B_{22}^{(r)} B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_m^{(r)} \right\} \quad (10)$$

$$\left(c_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}\right) v_m^{(r)} = (-1)^r \varepsilon_m x^{(r)} \left\{ b_m^{(r)} - a^2 g_m^{(r)} l_m^{(r)} \right\}, r = 1,2. \quad (11)$$

but from the third equations, with account of relations (10) and (11), we obtain the characteristic equations [1-2]

$$R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + \varepsilon_m^2 \left\{ c_m^{(r)} - b_m^{(r)}\left(x^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \beta_m' a_m^{(r)} + a^2 \left(R_{mm}^{(r)}\, g_m^{(r)} d_m^{(r)} + 2 b_m^{(r)} l_m^{(r)} \left(x^{(r)}\right)^2 \right) + \varepsilon_m^2 a^2 d_m^{(r)} \left(b_m^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \beta_m' \right) - a^4 \left(x^{(r)}\right)^2 g_m^{(r)} \left(l_m^{(r)}\right)^2 \right\} = 0, r = 1,2; m = \overline{1,\infty} \quad (12)$$

$$a_m^{(r)} = -\left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(x^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \beta_m' - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_{2m}^{(r)}\right)^2 \right),\ b_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(x^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_{1m}^{(r)}\right)^2 - B_1^{(r)},\ a^2 = \mu^4 \theta_m^2\ ,$$

$$c_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(x^{(r)}\right)^4 - B_2^{(r)} \left(x^{(r)}\right)^2 + \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_{1m}^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_{2m}^{(r)}\right)^2 \right) \left(x^{(r)}\right)^2 + \left(\beta_m' - \left(\eta_{2m}^{(r)}\right)^2 \right) \left(\beta_m'' - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_{1m}^{(r)}\right)^2 \right),$$

$$d_m^{(r)} = \left(x^{(r)}\right)^2 - \frac{4\, B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \beta_m'\ ,\ g_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(x^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_{1m}^{(r)}\right)^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} \beta_m'',\ l_m^{(r)} = \left(x^{(r)}\right)^2 - \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \beta_m'\ ,$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left(\left(x^{(r)}\right)^4 - \frac{2\left(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}\right)}{B_{22}^{(r)}} \beta_m' \left(x^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \beta_m' \beta_m'' \right) - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \left(\eta_{3m}^{(r)}\right)^2,\ \left(\eta_{im}^{(r)}\right)^2 = \frac{\rho^{(r)} \omega_i}{B_{66}^{(r)} \theta_m^2}\ , i = 1,2,3;$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{R\theta_m};\ B_1^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{11}^{(r)} \beta_m'' - \left(B_{12}^{(r)}\right)^2 \beta_m' - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} \beta_m'}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}},\ \ B_2^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{11}^{(r)} \beta_m'' - \left(B_{12}^{(r)}\right)^2 \beta_m' - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)} \beta_m'}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}.$$

Let $x^{(r)}$ $(j = 1,2,3,4)$, be pairwise different roots of the Eq. (12) with nonnegative real parts and $x_{j+4}^{(r)} = -x_j^{(r)}, j = 1,2,3,4$. Let $\left(u_{1j}^{(r)}, u_{2j}^{(r)}, u_{3j}^{(r)}\right)$, be nontrivial solutions of type (8) of system (1) at $x^{(r)} = x_j^{(r)}, j = 1,2,\ldots,8,$ respectively. The solution of problem (1)-(5) is sought in the form

$$u_i^{(r)} = \sum_{j=1}^{8} u_{ij}^{(r)} w_j^{(r)} \ , i = 1,2,3; r = 1,2. \tag{13}$$

Let as insert Eq. (13) into boundary conditions (2) -(4). As a result, we obtain the system of equations

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(1)} exp\left(x_j^{(1)} \theta_m s^{(1)}\right) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^{8} \frac{c\, M_{ij}^{(2)} exp\left(x_j^{(2)} \theta_m s^{(2)}\right) w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}}, i = \overline{1,4};$$

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(1)} exp\left(x_j^{(1)} \theta_m s^{(1)}\right) w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(2)} exp\left(x_j^{(2)} \theta_m s^{(2)}\right) w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}}, i = \overline{5,8}; \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} = 0, i = \overline{9,12}; \sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}}, i = \overline{13,16};$$

The superscript j means that the corresponding function is taken at $x^{(r)} = x_j^{(r)}$. In order that system (14) had a nontrivial solution, it is necessary and sufficient that

$$\Delta = exp\left(-\sum_{r=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} z_j^{(r)}\right) Det \left\| T_{ij} \right\|_{i,j=1}^{4} = 0 \ , m = \overline{1,\infty}; \tag{15}$$

$$T_{11} = \left\| M_{ij}^{(1)} \right\|_{i,j=1}^{4}, T_{12} = \left\| (-1)^{i-1} M_{ij}^{(1)} \exp\left(z_j^{(1)} \right) \right\|_{i,j=1}^{4}, \ T_{13} = c \left\| M_{ij}^{(2)} \right\|_{i,j=1}^{4},$$

$$T_{14} = c \left\| (-1)^{i} M_{ij}^{(2)} \exp\left(z_j^{(2)} \right) \right\|_{i,j=1}^{4}, T_{21} = \left\| M_{ij}^{(1)} \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, \ T_{22} = \left\| (-1)^{i-1} M_{ij}^{(1)} \exp\left(z_j^{(1)} \right) \right\|_{i=5,j=1}^{8,4},$$

$$T_{23} = \left\| M_{ij}^{(2)} \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, \ T_{24} = \left\| (-1)^{i} M_{ij}^{(2)} \exp\left(z_j^{(2)} \right) \right\|_{i=5,j=1}^{8,4} ; T_{31} = T_{12}, \ T_{32} = T_{11}, \ T_{33} = 0, \ T_{34} = 0;$$

$$T_{41} = 0, \ \ T_{42} = 0, \ T_{43} = T_{24}, \ \ T_{44} = T_{23}; \ z_j^{(r)} = -\theta_m \, x_j^{(r)} s^{(r)}.$$

Performing elementary operations with columns of determinant (15), we obtain

$$\Delta = exp\left(-\sum_{r=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} z_j^{(r)}\right) \left(K^{(1)}\right)^2 \left(K^{(2)}\right)^2 Det \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^{4} = 0 \ , m = \overline{1,\infty}; \tag{16}$$

$$K^{(r)} = \left(x_1^{(r)} - x_2^{(r)}\right)\left(x_1^{(r)} - x_3^{(r)}\right)\left(x_1^{(r)} - x_4^{(r)}\right)\left(x_2^{(r)} - x_3^{(r)}\right)\left(x_2^{(r)} - x_4^{(r)}\right)\left(x_3^{(r)} - \ x_4^{(r)}\right), r = 1,2. \tag{17}$$

$$t_{11} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i,j=1}^{4}, t_{12} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=1,j=5}^{4,8}, t_{13} = c \left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{ij=1}^{4}, t_{14} = c \left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{i=1,j=5}^{4,8};$$

$$t_{21} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, t_{22} = \left\| m_{ij}^{(1)} \right\|_{i,j=5}^{8}, t_{23} = \left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{i=5,j=1}^{8,4}, t_{24} = \left\| m_{ij}^{(2)} \right\|_{ij=5}^{8};$$

$$t_{31} = t_{12}, \ t_{32} = t_{11}, \ t_{33} = 0, \ t_{34} = 0; \ T_{41} = 0, \ t_{42} = 0, t_{43} = t_{24}, \ t_{44} = t_{23}.$$

It follows from (16) that equations (16) are equivalent to the equations

$$\nabla = Det \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^{4} = 0 \ , m = \overline{1,\infty} \tag{18}$$

Taking into account the possible relations between $\eta_{1m}^{(r)}$, $\eta_{2m}^{(r)}$ and $\eta_{3m}^{(r)}$, we conclude that equations (18) determines frequencies of the interface and boundary types of corresponding vibrations.

Asymptotics of dispersion equation (18) for $\boldsymbol{\varepsilon_m \to 0}$. We assume that $\eta_{1m}^{(r)} = \eta_{2m}^{(r)} = \eta_{3m}^{(r)} = \eta_m^{(r)}$ $(r = 1,2)$. Then, when $\boldsymbol{\varepsilon_m \to 0}$ equations (12) are transformed into a set of equations

$$c_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(x^{(r)}\right)^4 - B_2^{(r)} \left(x^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{22}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_m^{(r)}\right)^2 \left(x^{(r)}\right)^2 + \left(\beta_m' - \left(\eta_m^{(r)}\right)^2\right)\left(\beta_m'' - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\eta_m^{(r)}\right)^2\right) = 0, \tag{19}$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left(\left(x^{(r)}\right)^4 - \frac{2\left(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}\right)}{B_{22}^{(r)}} \beta_m' \left(x^{(r)}\right)^2 + \frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \beta_m' \beta_m'' \right) - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \left(\eta_m^{(r)}\right)^2 = 0, m = \overline{1,\infty}, r = 1,2. \tag{20}$$

which are sets of characteristic equations for the equations of planar and bending vibrations of the left and right rectangular components with two opposite free edges, respectively.

The set of equations (18) is reduced to the form

$$Det \left\| t_{ij} \right\|_{i,j=1}^{4} = \left(N^{(1)}\left(\eta_m^{(1)}\right) N^{(2)}\left(\eta_m^{(2)}\right)\right)^2 \left(K_3^{(1)}\left(\eta_m^{(1)}\right) K_3^{(2)}\left(\eta_m^{(2)}\right)\right)^2 Det \left\| e_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} Det \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} +$$

$$O(\varepsilon_m^2) = 0, m = \overline{1,\infty} \ . \tag{21}$$

It follows from equation (21) that, when $\varepsilon_m \to 0$ the set of equations (18) splits into sets of equations

$$Det\ \|e_{ij}\|_{i,j=1}^{8} = 0, Det\ \|b_{ij}\|_{i,j=1}^{8} = 0, K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1,\infty}\,. \quad (22)$$

The first and second sets of equations from (22) are, respectively, the dispersion equations of planar and bending interface and edge vibrations of a composite plate. The roots of the third and fourth set of equations correspond to planar vibrations of the components of the cylindrical panel. They appear as a result of using the equation of the corresponding classical theory of orthotropic cylindrical shells.

For $\varepsilon_m \to 0$, $\theta_m s^{(1)} \to \infty$ and $\theta_m s^{(2)} \to \infty$ Eqs. (18) takes the form

$$Det\ \|t_{ij}\|_{i,j=1}^{4} = -\left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{22}^{(1)}}\right)^2 \frac{B_{12}^{(1)}+B_{66}^{(1)}}{B_{22}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)}+B_{66}^{(2)}}{B_{22}^{(2)}} \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)})N^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2 \left(K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)})K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)})\right)^2 Q^{(2)}(\eta_m^{(2)})X$$

$$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)})K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)})L(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)})G(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)}) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{r=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} O\left(exp(z_j^{(r)})\right) = 0, m = \overline{1,\infty}\,. \quad (23)$$

From (23) it follows that for $\varepsilon_m \to 0$, $\theta_m s^{(1)} \to \infty$ and $\theta_m s^{(2)} \to \infty$ the set of Eqs. (18) splits into the totality of the equations

$$L(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1,\infty}\ ;\ G(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1,\infty}\ ;\ K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, m = \overline{1,\infty};$$

$$K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, m = \overline{1,\infty};\ K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = 0, m = \overline{1,\infty}; r = 1,2\,. \quad (24)$$

The first and second sets of equations from (24) are, respectively, the dispersion equations of the planar and bending interface vibrations for a sufficiently wide composite plate with free edges.

The third and fourth sets of equations from (24) are, respectively, analogs to the Konenkov and Rayleigh equations for vibrations of a plate made of material (1) localized at the free edge.

Numerical investigation. Table 1 shows some of the roots of equations (24) and the dispersion equations (22) of planar and bending vibrations for a composite rectangular plate, with rigid-clamped edge generator, made of boroplastic and special paper with mechanical parameters [1-2]

Boroplastic: $\rho^{(1)} = 2.10^3 kg/M^3, E_1^{(1)} = 2.646.10^{11} H/M^2, E_2^{(1)} = 1.323.10^{10} H/M^2,$

$G^{(1)} = 9.604\,.10^9 H/M^2,\ \ \nu_1^{(1)} = 0.2\,, \nu_2^{(1)} = 0.01\,,$ (25)

Paper: : $\rho^{(2)} = 0.16\ kg/M^3, E_1^{(2)} = 2.95281.10^9 H/M^2, E_2^{(2)} = 2.2106.10^9 H/M^2,$

$G^{(2)} = 9.77076\,.10^8 H/M^2,\ \ \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} E_1^{(2)}/E_2^{(2)}, \nu_2^{(2)} = 0.23\,;$ (26)

and geometric parameters: $l = 4,\ h = \frac{1}{50}, s_0^{(1)} = 15,\ s_0^{(2)} = 5.$

Note that the connection between $\eta_m^{(1)}$ and $\eta_m^{(2)}$ has the form

$$\eta_m^{(2)} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{66}^{(2)}} \eta_m^{(1)}. \quad (27)$$

Table 1. Characteristics of the natural frequencies for planar and bending vibrations of a rectangular plate .

N	$\boldsymbol{\theta_m}$	$K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0,$ $L(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)}) = 0$	$Det\ \|e_{ij}\|_{i,j=1}^{8} = 0$	$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0,$ $G(\eta_m^{(1)},\eta_m^{(2)}) = 0$	$Det\ \|b_{ij}\|_{i,j=1}^{8} = 0$
1	1.95473		0.91197 $e^{(1)}$ 0.92512 ine	0.04872 0.04874	0.04889 $b^{(1)}$ 0.04930 inb
2	2.74891	0.98307 0.98398	0.98172 $e^{(1)}$ 0.98312 ine	0.08576 0.08580	0.08580 $b^{(1)}$ 0.08679 inb
3	3.52957	1.00099 1.00225	0.99965 $e^{(1)}$ 1.00100 ine	0.10921 0.10927	0.10930 $b^{(1)}$ 0.11140 inb
4	4.27693	0.97897 0.98012	0.97897 $e^{(1)}$ 0.99790 ine	0.12789 0.12795	0.12790 $b^{(1)}$ 0.13065 inb
11	11.6577	0.98580 0.98696	0.98436 $e^{(1)}$ 0.98580 ine	0.35363 0.35382	0.35363 $b^{(1)}$ 0.35462 inb

15	16.0962	0.98580 0.98696	0.98436 $e^{(1)}$ 0.98580 ine	0.48828 0.48853	0.48828 $b^{(1)}$ 0.49469 inb
16	17.1935	0.98580 0.98696	0.98436 $e^{(1)}$ 0.98580 ine	0.52156 0.52183	0.52156 $b^{(1)}$ 0.52839 inb

Table 2. Characteristics of the natural frequencies of a cylindrical panel.

N	θ_m	$\eta_{1m}^{(r)} = \eta_{2m}^{(r)} = \eta_{3m}^{(r)} = \eta_m^{(r)}, \ r = 1, 2$
1	1.95391	0.91206 $e^{(1)}$, $0.04987\ b^{(1)}$, 4.25906 $n^{(1)}$ 0.92683 ine, $0.08621\ inb$, 41.4248 $n^{(2)}$
2	2.74776	0.98430 $e^{(1)}$, $0.04987\ b^{(1)}$, 4.94292 $n^{(1)}$ 0.99654 ine, $0.08682\ inb$, 44.6413 $n^{(2)}$
3	3.52810	1.00405 $e^{(1)}$, $0.10944\ b^{(1)}$, 4.77267 $n^{(1)}$ 1.01913 ine, $0.10995\ inb$, 43.7883 $n^{(2)}$
4	4.27542	0.98248 $e^{(1)}$, $0.12803\ b^{(1)}$, 4.75646 $n^{(1)}$ 0.99621 ine, $0.12895\ inb$, 43.7927 $n^{(2)}$
11	11.6577	0.98805 $e^{(1)}$, $0.35381\ b^{(1)}$, 4.70684 $n^{(1)}$ 0.99943 ine, $0.35500\ inb$, 44.0235 $n^{(2)}$
15	16.1102	0.98615 $e^{(1)}$, $0.49626\ b^{(1)}$, 4.70706 $n^{(1)}$ 0.99959 ine, $0.50340\ inb$, 44.0321 $n^{(2)}$
16	17.2065	0.98597 $e^{(1)}$, $0.52163\ b^{(1)}$, 4.70662 $n^{(1)}$ 0.99957 ine, $0.52409\ inb$, 44.0317 $n^{(2)}$

Table 2 shows some dimensionless characteristics $\eta_m^{(1)}$ of the natural frequencies of interface and edge vibrations for a composite cylindrical panel, made of boroplastic and special paper, with mechanical parameters (25), (26) and geometric parameters:

$$R = 45, l = 4, h = \frac{1}{50}, s^{(1)} = 15.2927, s^{(2)} = 5.01035.$$

REFERENCES

1. G.R. Ghulghazaryan, L.G. Ghulghazaryan. Free localized vibrations of a Thin Elastic Composite Panel // In: Mechanics of High-Contrast Elastic Solids. Advanced Structured Materials, Vol 187/ed. by Altenbach, H., Prikazchikov, D., Nobili, A. Cham: Springer, 2023. pp.91-118. https://doi.org/10.1067/978-3-031-24141-3_7
2. G.R. Ghulghazaryan, L.G. Ghulghazaryan. Free vibrations of a Thin Elastic Orthotropic Cylindrical Panel with Hinge-Mounted edge Generator. J. Appl. Math. Mech. 2025, Vol.89, N 1, pp. 59-78. DOI: 10.31857/S0032823525010053, EDN:BOEOAW [in Russian].

Information about authors

Ghulghazaryan Gurgen Ruben, Dr. of Sc., Professor, Chair of Mathematics and its Teaching Methods, Armenian State Pedagogical University after Kh. Abovyan, Tel. (+374) 91 706700.
E-mail: ghulghazaryangurgen08@aspu.am

Ghulghazaryan Lusine Gurgen, Dr. of Sc., Professor, Leading Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia, Head of Chair of Mathematics and its Teaching Methods, Armenian State Pedagogical University after Kh. Abovyan, Tel.(+374) 91 302554, https://orcid.org/0000-0001-7501-5686,
E-mail: ghulghazaryanlusine08@aspu.am

VORTEX-INDUCED VIBRATIONS OF AN ELASTIC CYLINDER NEAR RIGID BODIES

Ivanov O.O.

Vortex-induced vibrations of an elastic circular cylinder near rigid boundaries were investigated experimentally in a wind tunnel. This study aims to examine how vibrations are modified near solid bodies of finite dimensions, such as plates. The maximum oscillation amplitude of an isolated cylinder was 0.36D (D is its diameter). In the previous study (Ivanov and Vedeneev, 2021), it was shown that placing of finite-length (in streamwise direction) plates near a cylinder can lead to a decrease or an increase in the vibration amplitude depending on the cylinder position. In this study, we fixed the position of the cylinder that corresponds to one that corresponds to maximum amplitude amplification and several geometries of test plates. For a rectangular plate 2.5Dx0.3D, the amplitude amplification up to 56% was observed, and for a plate 2.5Dx0.7D up to 81%. Tests with an elliptical plate with axes 10.7D and 1.3D showed the amplitude increase up to 33%. In all cases, a significant increase of lock-in range length was observed.

Many civil, transport and other engineering structures (chimneys, submarine pipelines, risers, etc.) suffer from appearance of vibrations in these systems. It often occurs when the whole structure or its part is an elastic, or elastically mounted rigid bluff body immersed in a fluid flow [1, 2]. The vortices shedding from the body leads to a vortex-induced vibrations (VIV). When a structural natural frequency is close to the shedding frequency, the bluff body experiences a periodic force and may oscillate. VIV can lead to fatigue damage accumulation up to the destruction of the structure, but they can also be used to harvest electric energy from the kinetic energy of air or water flow.

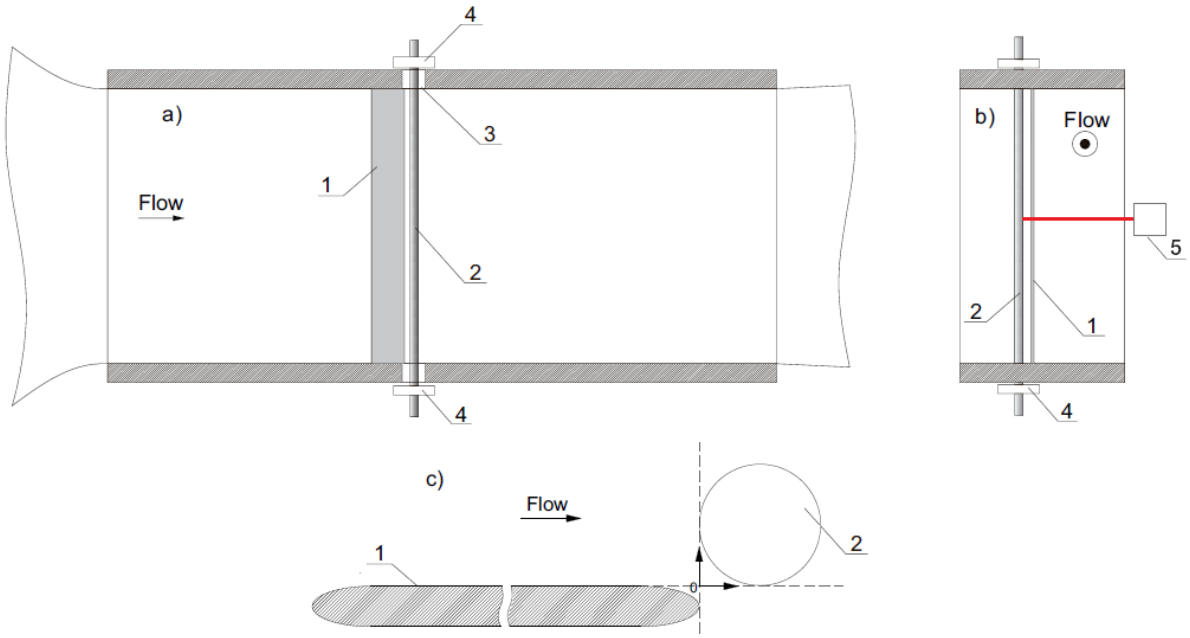


Figure 1. Wind tunnel test section sketch: side view (a), cross-section view (b), schematic top view to show the relative position of the cylinder near plate (c). 1 – plate, 2 – rubber cylinder, 3 – holes in test section walls, 4 – clips fixing a cylinder, 5 – laser triangulation sensor. Plate and cylinder are shown with a larger scale.

In this work, vortex-induced vibrations of an elastic (rubber) cylinder near finite-length plates are experimentally investigated in a wind tunnel (Fig. 1). Test facility was the same as in the study [3]. A rubber cylinder of diameter D = 6 mm was spanned in the test section of the wind tunnel, and then near some rigid plates. The first natural frequency of the cylinder was f_n = 15.9 Hz. The oscillation amplitude was measured in a plane perpendicular to the flow by the laser triangulation sensor Riftek RF-603 in the in the middle of the cylinder span, i.e., at the antinode. Air velocity was measured by the wind anemometer Testo 405i. To calculate the vortex shedding frequency, DISA constant temperature anemometer 55DO5 with the hot-wire probe 55P81 located in the cylinder wake was utilized.

Four types of plates were used: A) plate from [3] with smoothed leading and trailing edges with a cross-section dimensions 35x2 mm; B) a plate with a rectangular cross-section of 15x2 mm; C)

doubled plate with a rectangular cross-section of 15x4 mm; D) a plate with an elliptical cross-section of 64x8 mm.

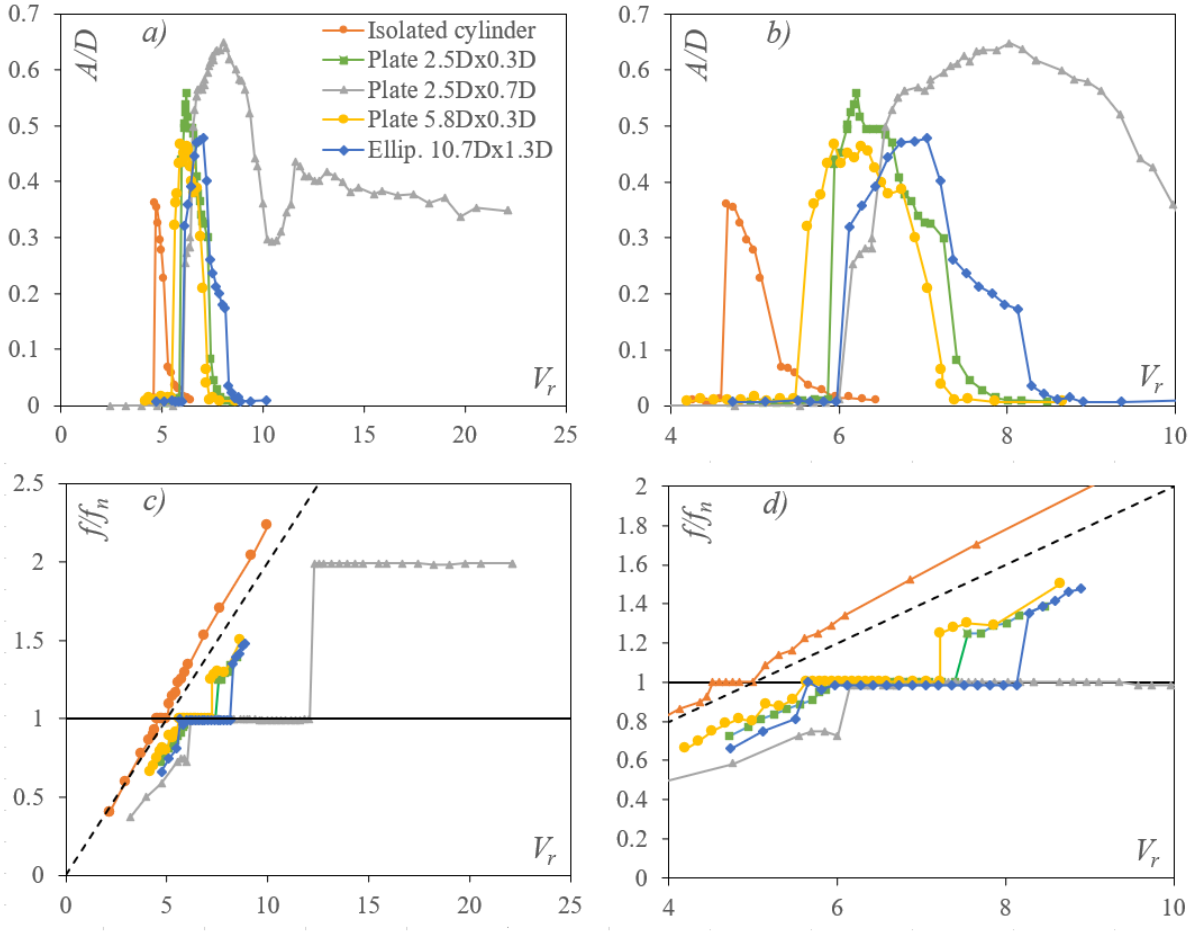


Figure 2. The amplitude (subfigures a,b) and frequency (c,d) response curves for the cylinder in proximity of different plates. Results are represented in large (left column) and smaller (right column) scales.

In the previous study [3], it was found that for the cylinder located sufficiently upstream from the plate trailing edge, the oscillation amplitude ratio A/D decreases if the gap ratio G/D (the gap is the distance between the cylinder surface and the plate) is reduced. However, for the cylinder location at the same level or downstream from the plate trailing edge, there are regions of essentially larger oscillation amplitudes compared to the isolated cylinder case. The maximum amplitude increase up to 39% was obtained. Therefore, in this work, we tried other geometries of plates to investigate its influence on vibrations of the cylinder. All measurements were done near the rear edge of plates in the position where a gap between the cylinder surface and rear edge of the plate is zero, and the distance between the rear surface of the plate and the cylinder centre is 0.5D (Fig, 1c), which corresponds to the position of the maximum amplitude amplification found in the study [1].

First, the experiments with an isolated cylinder were conducted. The oscillation amplitude peak was 0.36D, the lock-in velocity range and the corresponding Reynolds numbers based on cylinder diameter were V = 0.43–0.55 m/s and 175–220, respectively. Then, plates A, B, C and D were placed near the cylinder, and the amplitude response and the vortex shedding frequency were measured. The results are shown in Fig. 2. The presence of any plate leads to amplification of VIV, the lock-in range is shifted to higher velocities, its length becomes larger. The increase in maximum VIV amplitude relative to the one for an isolated cylinder is: the plate A – 31%, the plate B – 56%, the plate C – 81%, the elliptical profile D – 33%.

Note that for plate C (Fig. 2, left), the oscillation amplitude does not decrease to zero for reasonable velocities, how it happens for other case. This behaviour is similar to the one observed in the studies of tandem of circular cylinders [4]. So, this case is very promising and probably

corresponds to wake-induced vibrations, not VIV. At the right part of Fig.2, the vortex shedding frequency is shown, and lock-in ranges are clearly seen for all plates. One can note that the length of the lock-in ranges in the presence of all test increased by 3 or more times compared to the case of an isolated cylinder.

REFERENCE

1. Williamson C. H., Govardhan R. Vortex-induced vibrations. Annu. Rev. Fluid Mech, vol. 36, 2004.
2. Païdoussis M. P., Price S. J., De Langre E. Fluid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities. Cambridge University Press, 2010.
3. Ivanov O., Vedeneev V. Vortex-induced vibrations of an elastic cylinder near a finite-length plate. J. Fluids and Structures, vol. 107, 2021.
4. Assi, G. R., Bearman, P. W., Meneghini, J. R. On the wake-induced vibration of tandem circular cylinders: the vortex interaction excitation mechanism. J. Fluid. Mech, vol. 661, 2010.

Information about author

Oleg Ivanov – Senior Research Fellow, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Experimental Hydrodynamics, (7 495) 939-52-90
E-mail ivanov@imec.msu.ru

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS IN AERODYNAMICS OF THIN ROTATING BLADE

Kazakov E.A., Bondarchuk A.A.

The paper studies the aerodynamics of a rotating blade without incident flow (a helicopter "hover" mode). On the simplest model of a thin blade rectangular in plan, by comparison with a direct numerical calculation in the ANSYS CFX software, the accuracy of known two-dimensional and three-dimensional theories is estimated, which turns out to be very rough even for the main physical parameter – thrust. In this regard, two new semi-analytical theories are proposed, which significantly improve the accuracy of calculations. Both of them are reduced to two-dimensional integral equations similar to the classical equation from the linear theory of thin wing.

1. Introduction. In propeller aerodynamics, experimental data on aerodynamic characteristics have been accumulated over many years of research. In order to adequately evaluate the experimental data, various engineering and semi engineering theories have been proposed [1,2]. Alternatively, in recent decades, direct numerical methods such as the Finite Element Method, Finite Difference Method, Finite Volume Method and others have been developed [3-5], which provide higher accuracy compared to experimental data than theoretical models. The main disadvantage of the numerical methods is that they require long calculations (weeks or months) even on modern supercomputers, which reduces their efficiency. Hence, a lot of effort was directed to find suitable models, which would permit explicit assessment of aerodynamic parameters in real time. Unfortunately, nowadays there is no analytical theory with acceptable accuracy even for thrust force. The current situation seems to be strange, since for finite-span wings there is an elegant semi-analytical theory of small perturbations (a linear theory), the so called "discrete vortex method" (DV method) [6,7], or the "panel method" [8]. They are reduced to two-dimensional integral equations and provide a good accuracy within one hour on a personal computer, even for very dense grids over the wing surface [6–9]. The first works in propeller aerodynamics belong to the classics [10–12], who described the qualitative structure of the vortex field. Unfortunately, the general qualitative approach provide only a rough approximation to main characteristics, such as thrust, overturning moment, power, etc. The next section shows that 2d and even rough 3d analytical models give a serious error compared with a direct numerical solution. In the present work, we propose a semi-analytical approach that allows us to significantly reduce the error of theoretical results. In order to test the accuracy of various theories, we limit ourselves to the case of rotation of a single absolutely thin blade in the form of a flat rectangular plate installed at a fixed angle α to the plane of rotation, without an incident flow (helicopter "hover" mode), see Fig.1, which is not effective in the aerodynamic sense, but the simplest for comparison with a numerical simulation by the ANSYS CFX.

2. Review of existing methods in the theory of rotating blade. Let the thin blade rotate around the horizontal axis x_1 with a constant angular velocity ω and an installation angle be α, so that at the current moment of time its line of symmetry along the span coincides with the axis x_2. It is meant that any three-dimensional point in the space has its natural Cartesian coordinates: $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$, etc. Obviously, if the plate is not twisted, then the installation angle α is constant both along the chord and along the span. In the linear theory α is small, the plate is slightly inclined to the vertical plane x_2x_3, and the no-through boundary condition can be satisfied not on the blade itself, but transferred to the vertical plane x_2x_3 – the projection of the blade on this plane. Let the blade along the span be $l \le x_2 \le L$, and along the chord $-b \le x_3 \le b$. Thus, blade's span is $L-l$, and the chord length is $2b$. The simplest 2d model is that in each normal section orthogonal to the axis x_2, a flow around the rotating blade is considered as a plane (2d) problem. Hence, the flow does not depend on the stream in other normal sections, and the local incident velocity is $V_0=\omega x_2$, if the chord length is considerably smaller than blade's length along the span. Since in the 2d problem the lift coefficient is $c_L=2\pi\alpha$ [13,14], where α is blade's installation angle (in the 2d theory it is equal to the angle of attack), then the total thrust force is equal to

$$T = c_L \int_l^L \frac{\rho V_0^2 (2b) dx_2}{2} = (2\pi\alpha)(\rho\omega^2 b) \int_l^L x_2^2 dx_2 = \frac{2}{3}\pi\rho b\omega^2\alpha(L^3 - l^3), \tag{2.1}$$

where ρ is mass density of the fluid. The comparison, for a test blade, between this theory and the direct numerical calculation in the ANSYS CFX, is presented in the 2-nd row of Table 1. This theory is the worst.

The classical theory of propeller by Joukowsky [10] is not applicable to the helicopter "hover" mode. It does not describe heavily loaded propellers and without incident flow gives a zero value for axial efficiency.

Then, let us pass from the rough 2d model to a 3d model, with a classical linear small perturbations theory of a thin finite-span wing [6,7,9,13]. In this theory the problem is reduced to a two-dimensional integral equation:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{y_3 - x_3}{\sqrt{(x_3 - y_3)^2 + (x_2 - y_2)^2}} + 1 \right] \frac{g(y_2, y_3) dy_2 dy_3}{(x_2 - y_2)^2} = -\rho V_0^2 \alpha, \quad (x_2, x_3) \in S \tag{2.2}$$

where S is a 2d projection of the thin wing onto plane $x_2 x_3$, V_0 is the incoming velocity along the x_3-axis, α is a small installation angle, and function $g = (p_- - p_+)$, $(x_2, x_3) \in S$ is the pressure jump between the lower and upper faces of the wing (a local lift). Usually, the discretization in Eq.(2.2) is performed by the DV method [6,7]. By applying this equation to a rotating blade, the incoming velocity becomes different for each section along the span, in the right-hand side of (2.2), being proportional to the distance from the rotation axis: $V_0 = \omega x_2$. The thrust T is a 2d integral over S, of function $g(y_2, y_3)$ found in this way. The thrust by this theory is presented in the 3-rd row of Table 1. Obviously, the accuracy of even rough 3d theory is noticeably better than in the 2d theory, which operates with the profile, not with the spatial surface of the blade. However, it is still rough, and some improved models are proposed in the next Sections.

3. A 3d model of the thin rotating blade. This approach is based on the linear theory of "small perturbations" for non-viscous fluid. This means that if the attack angle is zero and initially the fluid mass was at rest, then this remains at rest even with the rotating blade. Again, the linear theory implies to transfer the no-through boundary condition from blade's surface to its projection S in the plane of rotation $x_2 x_3$. It is assumed that there is no vortex everywhere except the vortex sheet, which slides off away from the trailing edge. The problem is stationary in the rotating coordinate system. Using linearization, we can obtain:

$$\rho\omega \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\theta \partial x_1} \right|_{x_1 = 0} = -\frac{1}{4\pi}\iint_s \frac{g(y_2, y_3) dy_2 dy_3}{\left[(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \right]^{3/2}} \tag{3}$$

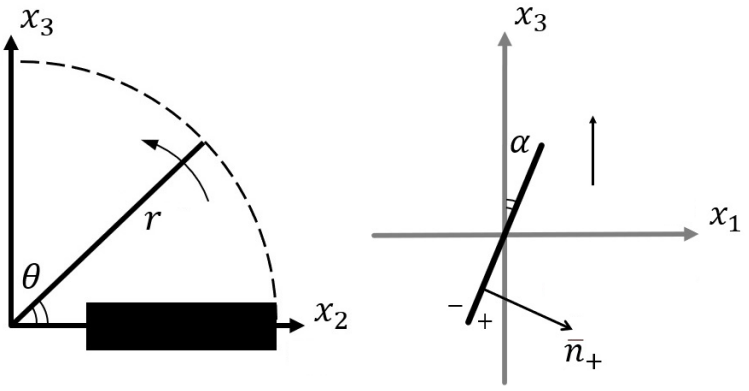


Fig. 1. Rotation of a thin rectangular blade in a stationary, unbounded volume of a non-viscous incompressible fluid

The last step, to reduce the problem to a two-dimensional integral equation is to integrate Eq.(3) with respect to θ, since the quantity $v_1 = \partial\varphi/\partial x_1$ is involved in the boundary condition on blade's surface. However, direct integration is not simple. That is why we first consider an approximate approach in the next Section.

4. A simplified 3d theory on the basis of representation (3). An approach may be founded on the following approximate relation: $d\theta = x_2 dx_3 \Big/ \left(x_2^2 + x_3^2\right)$, which heuristically follows from a view to Fig. 1. Then, using linearized aerodynamic theory for small disturbances and classical potential theory [12,14,15], the problem is reduced to the two-dimensional integral equation:

$$\iint_S K(x_2, x_3, y_2, y_3) g(y_2, y_3) dy_2 dy_3 = -\rho V_0^2 \alpha, \ (x_2, x_3) \in S \tag{4.1}$$

$$K = \frac{1}{x_2^2 \left(x_2 - y_2\right)^2} \left(\frac{\left(y_3 - x_3\right) x_2^2}{\left(x_3^2 - x_2^2\right) \sqrt{\left(x_3 - y_3\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}} + 1 \right) + \frac{I_2}{\left(x_2 - y_2\right)^2 - x_2^2} - \frac{1}{x_2^2 \left[\left(x_2 - y_2\right)^2 - x_2^2 \right]} \tag{4.2}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dz}{\left(z^2 + x_2^2\right) \sqrt{z^2 + \left(y_2 - x_2\right)^2}} = \frac{1}{x_2 \sqrt{\left| x_2^2 - \left(x_2 - y_2\right)^2 \right|}} \begin{cases} \ln \dfrac{\sqrt{x_2^2 - \left(x_2 - y_2\right)^2}}{\left| x_2 - y_2 \right|}, & \left| x_2 - y_2 \right| < x_2 \\ \operatorname{atan} \dfrac{\sqrt{\left(x_2 - y_2\right)^2 - x_2^2}}{x_2}, & \left| x_2 - y_2 \right| \geq x_2 \end{cases} \tag{4.3}$$

Here two first hyper-singular terms (as $y_2 \to x_2$) in Eq.(4.2) are analogues to the kernel in the classical 3d wing theory, Eq.(2.2). The third and the fourth regular terms in (4.2) are responsible for blade's rotation. The qualitative similarity of kernels in equations (4.2) and (2.2) permits direct treatment of equation (4.1) by the DV method or by the Panel method, by analogy to Eq.(2.2) [6-9]. The results of such a treatment for a test blade, whose geometry is described below, are presented in the 4-th row of Table 1.

5. An advanced 3d theory on the basis of representation (3). Exact integration relatively variable θ in Eq.(3) can be performed if the derivative with respect to θ is rewritten in Cartesian coordinates. We can also consider the velocity of the "suction stream" generated by the blade itself in its rotation, but there is no a priori information about the structure of this suction stream over the fluid, in the plane of blade's rotation. Therefore, we accept the assumption that velocity of the "suction stream" is zero outside the round domain covered by the rotating blade, and according to the Kutta-Joukowsky law [16-18] we accept the hypothesis that the behavior of that velocity inside the ring $l < r < L$ round from the trailing to the leading edge decreases monotonically as a certain function, say exponentially. So, we get the following equation:

$$-\iint_S \left[\frac{1}{\left(y_2 - x_2\right)^2} + \frac{y_3 - x_3}{\left(y_2 - x_2\right)^2 \sqrt{\left(y_2 - x_2\right)^2 + \left(y_3 - x_3\right)^2}} \right] g_1(y_2, y_3) dy_2 dy_3 =$$

$$x_2^2 + \frac{b^2 - x_3^2}{2} - L x_2 e^{k\left[2\pi - \arctan\left(\sqrt{L^2 - x_2^2}/x_2\right)\right]} + h\left(x_2, k\right), \ \ g_1(y_2, y_3) = \frac{g(y_2, y_3)}{4\pi\omega\alpha} \tag{5.1}$$

The only remaining unknown parameter is parameter k. In order to determine this, we use the impulse balance for a half-space upstream, i.e. for the half-space $x_1 > 0$. The geometry of the chosen closed domain, for the impulse balance theorem is shown in Fig.2, where the green line on the right, top and bottom, shows the outer infinite boundary of the half-space. As a result, we get the expression:

$$\iint_s g_1(y_2, y_3) dy_2 dy_3 = \frac{\rho\omega\alpha}{16\pi k} \left(L^4 - l^4\right) \left(e^{4\pi k} - 1\right) \tag{5.2}$$

Therefore, this method implies that, for any value of parameter k, the two-dimensional integral equation (5.1) can be solved, like the classical lifting-surface Eq.(2.2), by the standard DV method [6-9]. The true value of k must be chosen to ensure that equality (5.2) is satisfied. In Table 2 for the test blade described below, we demonstrate the values of parameter k for various values of the installation angle. The mesh on blade's rectangular surface, in application of the DV method, is N2 = 135 (along x_2 axes), N3 = 35 (along x_3 axes). The results by this model are presented in the last row of Table 1.

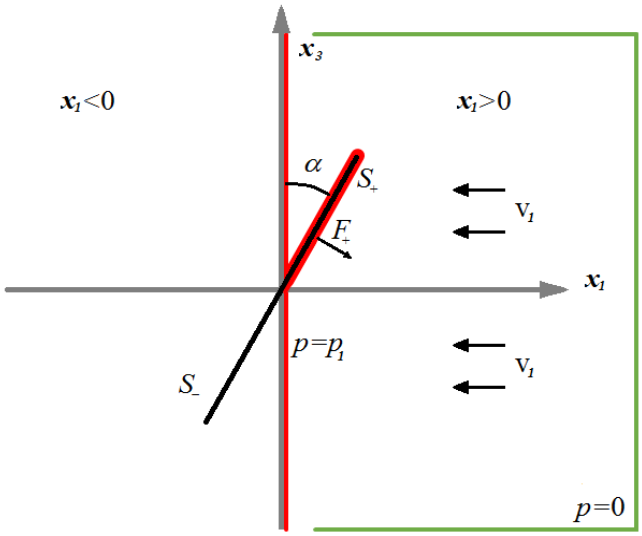


Fig. 2. Geometry of a closed region with red and green boundary lines, to which the impulse balance theorem is applied

The physical parameters of the test blade correspond to those of a mini quadcopter DJI Mavic Air (China): the angular velocity $f = 200\text{Hz}$, hence $\omega = 2\pi f = 1257\,\text{rad/sec}$, the span is from $l = 0.5$ cm to $L = 6.5$ cm, the chord $2b = 1$ cm, the mass density of the air $\rho = 1.777\,\text{kg/m}^3$. The dynamic viscosity of the medium $\mu = 1.831 \cdot 10^{-7}\,\text{kg/(m}\cdot\text{sec)}$ used in the ANSYS CFX is specially taken to be two orders of magnitude smaller than the real viscosity of air, to provide a closer comparison with theoretical models, which operate with a non-viscous medium. The temperature is 25 degrees Celsius. The thin plate rectangular in plan, in the ANSYS CFX digital model, is taken plane (untwisted) with a ceratin angle of installation, constant along both span and chord directions, which varies in different regimes of calculations from 3 to 17 degrees. The values of the thrust force obtained by the ANSYS CFX computations are used as test values, to evaluate precision of the proposed models presented in Table 1.

α, degrees	3	5	8	10	14	17
ANSYS CFX,	0.139	0.243	0.429	0.558	0.816	0.994
2d model, Eq. (2.1), relative error	0.280 101 %	0.467 92 %	0.746 74 %	0.933 67 %	1.306 60 %	1.586 60 %
3d model, Section 2, relative error	0.170 22 %	0.283 16 %	0.453 6 %	0.566 1 %	0.792 3 %	0.962 3 %
3d model, Section 4, relative error	0.163 17 %	0.271 12 %	0.434 1 %	0.543 3 %	0.760 7 %	0.922 7 %
3d model, Section 5, relative error	0.107 23 %	0.219 10 %	0.404 6 %	0.532 5 %	0.791 3 %	0.982 1 %

Table 1. Comparison of different models for the thrust force T (in Newtons), calculated for a test blade

α°	3	5	8	10	14	17
k	-0.1940	-0.2805	-0.3978	-0.4736	-0.6263	-0.7438

Table 2. The values of parameter k for the test blade

6. Conclusions

1. The precision of the simple 2d theory is too poor. It is very surprising that this is still widely used in the engineering practice.
2. To improve the accuracy of the theoretical prediction of blade's thrust force, we propose two new 3d models, sections 4 and 5. The both these models are allied with the lifting surface theory in the 3d uniform flow, being in their essence some linear theories of small perturbations.
3. None of the theories considered provides satisfactory accuracy for extremely small angles $\alpha \le 5^\circ$, when compared with the direct numerical solution by the ANSYS CFX program. It seems that qualitative aerodynamic properties in the small-angle regime are absolutely different from the case of moderately small angles $\alpha \ge 5^\circ$, hence some other physical ideas should be applied as an adequate model in this range.
4. Solution by the method of Section 5 seems to be the best among all others, for moderately small angles $\alpha \ge 5^\circ$. It is easily seen that this model is the only, which provides an acceptable and a monotonically decreasing relative error with increasing α, out of the range of extremely small angles.

REFERENCES

1. W.Johnson, Helicopter Theory, Princeton University Press: New York, 1980.
2. M.O.I.Hansen, Aerodynamics of Wind Turbines, Taylor & Francis: Boca Raton, Florida, 2007.
3. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, The Finite Element Method. Vol.3: Fluid Dynamics (5th ed.), Butterworth-Heinemann: Oxford, 2000.
4. P.J.Roache, Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publications: Albuquerque, 1972.
5. F.Maukalled, L.Mangani, M.Darwish, The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics, Springer: New York, 2016.
6. C.M.Belotserkovsky, I.K.Lifanov, Method of Discrete Vortices, CRC Press: Boca Raton, Florida, 1992.
7. I.K.Lifanov, L.N.Poltavskii, G.M.Vainikko, Hypersingular Integral Equations and Their Applications, CRC Press: Boca Raton, Florida, 2004.
8. J.Katz, A.Plotkin, Low-Speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods, McGraw-Hill: New York, 1991.
9. M.A.Sumbatyan, A.A.Bondarchuk, K.I.Mescheryakov, An efficient numerical algorithm in the classical 3d theory of thin lifting surface in a flow of non-viscous incompressible fluid, Mechanics Research Communications, 2018, 89, 18–22.
10. V.L.Okulov, J.N.Sorensen, D.H.Wood, The rotor theories by Professor Joukowsky: Vortex theories, Progress in Aerospace Sciences, 2015, 73, 19–46.
11. H.Glauert, Airplane Propellers, In: W.F.Durand (ed.), Aerodynamic Theory, 4(50), 169–360, Springer: New York, 1935.
12. Q.R.Wald, The aerodynamics of propellers, Progress in Aerospace Sciences, 2006, 42(2), 85–128.
13. R.L.Bisplinghoff, H.Ashley, R.L.Halfman, Aeroelasticity, Addison-Wesley: New York, 1955.
14. L.G.Loitsyanskii, Mechanics of Liquids and Gases, Pergamon Press: London, 1973.
15. D.Colton, R.Kress, Integral Equation Methods in Scattering Theory, John Wiley: New York, 1983.
16. M.A.Sumbatyan, A.Scalia, Equations of Mathematical Diffraction Theory, CRC Press: Boca Raton, Florida, 2005.
17. A.P.Prudnikov, Yu.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series, Vol.1, Gordon and Breach: New York, 1986.
18. V.Zampoli, M.A.Sumbatyan, Flow-induced vortex field generated by a thin oscillating plate in an aeroacoustics framework, Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), 2019, 70, article 33.

Information about authors

Kazakov Evgeny Alekseevich – engineer, Department of Theoretical and Computer Hydroaerodynamics
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova Street 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia
E-mail: Eugene.A.Kazakov@yandex.ru, ekazakov@sfedu.ru

Bondarchuk Aleksey Alekseevich – Ph.D. in Physics and Mathematics, associate professor (docent).
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Russia
E-mail: melchior@list.ru

ADHESIVE CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC INFINITE SHEET STRENGTHENED BY THE SYSTEMS OF FINITE NUMBER FINITE-LENGTH STRINGERS

Kerobyan A. V.

The article considers the problem for an elastic infinite sheet which along of two parallel lines of its upper surface is strengthened by arbitrary finite number finite-length stringers having different elastic properties. The interaction between infinite sheet and stringers takes place through thin, uniform, elastic adhesive layers having other physical-mechanical properties and geometric configuration. The problem of determining unknown contact forces acting between infinite sheet and stringers is reduced to the system of Fredholm integral equations of second kind with respect to arbitrary finite number of unknown functions, which are specified along of two parallel lines on different finite intervals. Further, are determined of the change regions of the problem characteristic parameters for which this system of integral equations allows the exact solution and which can be solved by the method of successive approximations. Some particular cases are considered and the character and behavior of unknown sheer contact forces near the end points of the stringers are investigated.

1. Statement of the Problem and Obtaining the System of Integral Equations. Let an elastic infinite plate of small constant thickness h, the Young's modulus E and the Poisson's ratio ν, which is in the generalized plane stress state (xOy is its middle plane) on its upper surface along $y=b$ and $y=-d$ parallel lines being $l=b+d\ (b,d>0)$ distance from each other on the $\left[a_j,b_j\right]$, $b_j>a_j,\ j=\overline{1,n}$; $b_j<a_{j+1},\ j=\overline{1,n-1}$, and $\left[c_k,d_k\right]$ $\left(d_k>c_k,\ k=\overline{1,m};\ d_k<c_{k+1},\ k=\overline{1,m-1}\right)$, $n+m$, (where n, m are arbitrary finite numbers), finite number finite intervals, respectively, is strengthened by the systems of finite number finite-length stringers, modulus of elasticity equal to E_j for $x\in\left[a_j,b_j\right],\ j=\overline{1,n}$, and equal to E_k^* for $x\in\left[c_k,d_k\right],\ k=\overline{1,m}$, respectively. It is supposed that the stringers have a rectangular cross-sections with small constant areas $F_1=b_1^*h_1$ for $x\in\left[a_j,b_j\right]$ $j=\overline{1,n}$, and $F_2=b_2^*h_2$ for $x\in\left[c_k,d_k\right]$, $k=\overline{1,m}$, respectively, where $b_1^*\left(b_1^*\ll b_j-a_j\right)$, $b_2^*\left(b_2^*\ll d_k-c_k\right)$, are the widths of the stringers and h_1, h_2 are their small constant thicknesses, respectively. The interaction between infinite sheet and stringers takes place through thin, uniform, elastic adhesive layers with Young's modulus E_g, Poisson's ratio ν_g, and small constant thickness h_g. The problem is to specify the law of distribution of unknown contact forces acting between sheet and stringers, when concentrated forces P_j and Q_k are applied at one end points of stringers $x=b_j$, $j=\overline{1,n}$ and $x=d_k$, $k=\overline{1,m}$, respectively, and are directed to parallel along the Ox axis.

It is assumed that during the deformation for the stringers the model of uniaxial strain state in combination with the model of contact along the line is realized, and for the adhesive layers there are the pure shear condition [1,2,4], i.e. as [3,4], bending is neglected and the interaction between sheet and stringers is idealized as a line loading of the sheet [1-4]. Taking into account the above assumptions, according to the equilibrium conditions of an elements of finite-length stringers, which are defined on the $\left[a_j,b_j\right]$ and $\left[c_k,d_k\right]$ finite intervals, respectively, and Hooke's law, the differential equations for the equilibrium of the stringers on finite intervals $\left[a_j,b_j\right]$ $j=\overline{1,n}$ and $\left[c_k,d_k\right],\ k=\overline{1,m}$, respectively, will be written in the following form:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{dx^2}=\frac{p_j(x)}{E_jF_1},\qquad a_j\le x\le b_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^2\bar{u}^{(k)}}{dx^2}=\frac{q_k(x)}{E_k^*F_2},\qquad c_k\le x\le d_k,\ k=\overline{1,m}, \tag{1.2}$$

with the following boundary conditions:

$$\left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=a_j}=0,\qquad \left.\frac{du^{(j)}}{dx}\right|_{x=b_j}=\frac{P_j}{E_jF_1},\quad j=\overline{1,n}, \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{d\bar{u}^{(k)}}{dx}\right|_{x=c_k}=0,\qquad \left.\frac{d\bar{u}^{(k)}}{dx}\right|_{x=d_k}=\frac{Q_k}{E_k^*F_2},\ k=\overline{1,m}, \tag{1.4}$$

and where we have also of the stringer's equilibrium conditions in the form:

$$\int_{a_j}^{b_j}p_j(s)ds=P_j,\ j=\overline{1,n}\ ,\ \int_{c_k}^{d_k}q_k(v)dv=Q_k,\ \ k=\overline{1,m}\ . \tag{1.5}$$

Here $u^{(j)}(x)=u^{(j)}(x,b)$ and $\bar{u}^{(k)}(x)=\bar{u}^{(k)}(x,-d)$ are the horizontal displacements of the points of the stringers at $y=b$ and $y=-d$ parallel lines on the $[a_j,b_j]$, $j=\overline{1,n}$ and $[c_k,d_k]$, $k=\overline{1,m}$ finite intervals, respectively, $p_j(x)=b_1^*\tau_j^{(1)}(x,b)$, $\tau_j^{(1)}(x,b)$ are the shear stresses, acting under of the stringers on the $[a_j,b_j]$ finite parts, respectively, $q_k(x)=b_2^*\tau_k^{(2)}(x,-d)$, $\tau_k^{(2)}(x,-d)$ are the shear stresses, acting under of the stringers on the $[c_k,d_k]$ finite parts, respectively.

Now, assuming that each differential element of the adhesive layers is in a condition of pure shear, the following adhesive contact conditions are obtained:

$$u^{(j)}(x)-u_1(x,b)=k_1^*p_j(x),\qquad a_j\le x\le b_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{1.6}$$

$$\bar{u}^{(k)}(x)-u_2(x,-d)=k_2^*q_k(x),\qquad c_k\le x\le d_k,\ k=\overline{1,m}, \tag{1.7}$$

where $u_1(x,b)$ and $u_2(x,-d)$ are the horizontal displacements of the points of the elastic infinite sheet, at $y=b$ and $y=-d$ parallel lines, respectively, $k_1^*=h_g/b_1^*G_g$, $k_2^*=h_g/b_2^*G_g$, $G_g=E_g/2(1+\nu_g)$, G_g is the shear modulus of adhesive layers, h_g is the thickness of the adhesive layers, $p_j(x)=b_1^*\tau_j^{(1)}(x,b)=b_1^*G_g\gamma_j^{(1)}(x,b)$, $q_k(x)=b_2^*\tau_k^{(2)}(x,-d)=b_2^*G_g\gamma_k^{(2)}(x,-d)$ and $\gamma_j^{(1)}(x,b)$, $\gamma_k^{(2)}(x,-d)$ are the shear deformations of the adhesive layers, on the $[a_j,b_j]$, $j=\overline{1,n}$ and $[c_k,d_k]$, $k=\overline{1,m}$, finite intervals, respectively. On the other hand, in view of above assumptions, let write the horizontal displacements $u_1(x,b)$ and $u_2(x,-d)$ of the points of the elastic infinite sheet, when tangential (shear) forces with intensity $p_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, and $q_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, respectively, act on the $[a_j,b_j]$, $j=\overline{1,n}$ and $[c_k,d_k]$, $k=\overline{1,m}$, finite intervals respectively, of its upper surface along $y=b$ and $y=-d$ parallel lines, respectively, in the following form:

$$u_1(x,b)=\frac{1}{\pi A^*}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left(\ln\frac{1}{|x-s|}+C\right)p_i(s)\,ds+\frac{1}{\pi A^*}\sum_{\rho=1}^{m}\int_{c_\rho}^{d_\rho}\left(N(x-v)+C\right)q_\rho(v)\,dv, \tag{1.8}$$

$$u_2(x,-d)=\frac{1}{\pi A^*}\sum_{\rho=1}^{m}\int_{c_\rho}^{d_\rho}\left(\ln\frac{1}{|x-v|}+C\right)q_\rho(v)\,dv+\frac{1}{\pi A^*}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\left(N(x-s)+C\right)p_i(s)\,ds, \tag{1.9}$$

where C is arbitrary constant, and

$$N(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+l^2}}-\frac{\kappa l^2}{x^2+l^2},\ A^*=\frac{4Eh}{(1+\nu)(3-\nu)},\ \kappa=\frac{1+\nu}{3-\nu},\ l=b+d. \tag{1.10}$$

Note that, the horizontal displacements $u(x,y)$ of the points of an infinite sheet, when shear forces act on its surface along the line $y=-d$ with intensity $q(x)\ (-\infty<x<\infty)$ is given in [1].

Further, by virtue of (1.6) and (1.7), equations (1.1) and (1.2) can be written in the following form:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{dx^2}-\gamma_j^2u^{(j)}(x)=-\gamma_j^2u_1(x,b),\qquad a_j\le x\le b_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{1.11}$$

$$\frac{d^2\bar{u}^{(k)}}{dx^2}-\alpha_k^2\bar{u}^{(k)}(x)=-\alpha_k^2u_2(x,-d),\qquad c_k\le x\le d_k,\ k=\overline{1,m}, \tag{1.12}$$

with the boundary conditions (1.3) and (1.4), respectively.

Here $\gamma_j^2=1/k_1^*E_jF_1$, $j=\overline{1,n}$ and $\alpha_k^2=1/k_2^*E_k^*F_2$, $k=\overline{1,m}$.

The solutions to the boundary value problems (1.11) and (1.3), (1.12) and (1.4), respectively, we obtain in the form:

$$u^{(j)}(x)=u_0^{(j)}(x)+\gamma_j^2\int_{a_j}^{b_j}G_j(x,s)u_1(s,b)\,ds,\quad a_j\le x\le b_j,\ \ j=\overline{1,n}\ , \tag{1.13}$$

$$\bar{u}^{(k)}(x)=\bar{u}_0^{(k)}(x)+\alpha_k^2\int_{c_k}^{d_k}K_k(x,v)u_2(v,-d)\,dv,\quad c_k\le x\le d_k,\ k=\overline{1,m}\ , \tag{1.14}$$

where $u_0^{(j)}(x)$ and $\bar{u}_0^{(k)}(x)$ are the general solutions of the homogenous equations corresponding to equations (1.11) and (1.12), respectively, with the boundary conditions (1.3) and (1.4), respectively, and have the following form:

$$u_0^{(j)}(x)=\frac{P_j\cosh\left[\gamma_j(x-a_j)\right]}{\gamma_jE_jF_1\sinh\left[\gamma_j(b_j-a_j)\right]},\ j=\overline{1,n}\ ,\ \bar{u}_0^{(k)}(x)=\frac{Q_k\cosh\left[\alpha_k(x-c_k)\right]}{\alpha_kE_k^*F_2\sinh\left[\alpha_k(d_k-c_k)\right]},\ k=\overline{1,m}.$$

In equations (1.13) and (1.14), $G_j(x,s)$, $j=\overline{1,n}$ and $K_k(x,v)$, $k=\overline{1,m}$ are Green's functions [5], and

$$G_j(x,s)=\frac{1}{\gamma_j\sinh\left[\gamma_j(b_j-a_j)\right]}\begin{cases}\cosh\left[\gamma_j(x-b_j)\right]\cosh\left[\gamma_j(s-a_j)\right], & x>s,\\ \cosh\left[\gamma_j(x-a_j)\right]\cosh\left[\gamma_j(s-b_j)\right], & x<s,\end{cases}$$

$$K_k(x,v)=\frac{1}{\alpha_k\sinh\left[\alpha_k(d_k-c_k)\right]}\begin{cases}\cosh\left[\alpha_k(x-d_k)\right]\cosh\left[\alpha_k(v-c_k)\right], & x>v,\\ \cosh\left[\alpha_k(x-c_k)\right]\cosh\left[\alpha_k(v-d_k)\right], & x<v.\end{cases}$$

Further, without going into details we only note that by virtue of (1.13) and (1.14), according to (1.6), (1.7) and (1.8), (1.9), finally we can obtain the following system of integral equations:

$$\begin{aligned}&\varphi_j(x)+\delta^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}M_j(x,t)\varphi_i(t)\,dt+\delta^2\sum_{\rho=1}^{m}\int_{\xi_\rho}^{\eta_\rho}H_j(x,\tau)\psi_\rho(\tau)\,d\tau=f_0^{(j)}(x),\\ &\qquad\qquad\alpha_j\le x\le\beta_j,\ j=\overline{1,n},\\ &\psi_k(x)+\bar{\delta}^2\sum_{\rho=1}^{m}\int_{\xi_\rho}^{\eta_\rho}R_k(x,\tau)\psi_\rho(\tau)\,d\tau+\bar{\delta}^2\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}T_k(x,t)\varphi_i(t)\,dt=q_0^{(k)}(x),\\ &\qquad\qquad\xi_k\le x\le\eta_k,\ k=\overline{1,m},\end{aligned}\tag{1.15}$$

were

$$\varphi_j(x)=p_j(ax),\ \psi_j(x)=q_j(ax),\ \delta^2=a/\pi A^*k_1^*,\ \bar{\delta}^2=a/\pi A^*k_2^*,\ l_*=l/a,$$

$$\alpha_j=a_j/a,\ \beta_j=b_j/a,\ \xi_k=c_k/a,\ \eta_k=d_k/a,\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m},\ b_*=b/a,\ d_*=d/a,$$

$$f_0^{(j)}(x)=u_0^{(j)}(ax)/k_1^*,\ q_0^{(k)}(x)=\bar{u}_0^{(k)}(ax)/k_2^*,\ N(ax)=\ln\frac{1}{a}+N_1(x),$$

$$N_1(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+l_*^2}}-\frac{\kappa l_*^2}{x^2+l_*^2}.$$

$$M_j(x,t)=\ln\frac{1}{|x-t|}-a\gamma_j^2\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)\ln\frac{1}{|s-t|}\,ds,\ j=\overline{1,n},$$

$$H_j(x,\tau)=N_1(x-\tau)-a\gamma_j^2\int_{\alpha_j}^{\beta_j}G_j(ax,as)N_1(s-\tau)\,ds,\ j=\overline{1,n},$$

$$R_k(x,\tau)=\ln\frac{1}{|x-\tau|}-a\alpha_k^2\int_{\xi_k}^{\eta_k}K_k(ax,av)\ln\frac{1}{|v-\tau|}\,dv,\ k=\overline{1,m},$$

$$T_k(x,t)=N_1(x-t)-a\alpha_k^2\int_{\xi_k}^{\eta_k}K_k(ax,av)N_1(v-t)\,dv,\ k=\overline{1,m}.$$

2. Investigation Solvability of the system of Integral Equations (1.15).

Now write the system (1.15) in the following form:

$$\varphi+T\varphi=f_0,\tag{2.1}$$

where φ and f_0 are the columns, respectively, with elements φ_j,ψ_k and $f_0^{(j)},q_0^{(k)}$ respectively, where $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,m}$ and T is the matrix with elements δ^2k_{ji}, $\delta^2s_{j\rho}$ and $\bar{\delta}^2t_{ki}$, $\bar{\delta}^2r_{k\rho}$, at the same time,

$$k_{ji}\varphi_i=\int_{\alpha_i}^{\beta_i}M_j(x,t)\varphi_i(t)dt,\ j,i=\overline{1,n},\quad s_{j\rho}\psi_\rho=\int_{\xi_\rho}^{\eta_\rho}H_j(x,\tau)\psi_\rho(\tau)d\tau,\ j=\overline{1,n},\ \rho=\overline{1,m},$$
$$r_{k\rho}\psi_\rho=\int_{\xi_\rho}^{\eta_\rho}R_k(x,\tau)\psi_\rho(\tau)d\tau,\ k,\rho=\overline{1,m},\quad t_{ki}\varphi_i=\int_{\alpha_i}^{\beta_i}T_k(x,t)\varphi_i(t)dt,\ k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Further, consider operator equation (2.1) in Banach space of vector-function Y with elements $y_j(x)\in L_2(\alpha_j,\beta_j)\left(j=\overline{1,n}\right),\ z_k(x)\in L_2(\xi_k,\eta_k)\left(k=\overline{1,m}\right)$, and with norm: $\|y\|=\max\left\{\|y_1\|_{L_2(\alpha_1,\beta_1)},\|y_2\|_{L_2(\alpha_2,\beta_2)},\cdots,\|y_n\|_{L_2(\alpha_n,\beta_n)},\|z_1\|_{L_2(\xi_1,\eta_1)},\|z_2\|_{L_2(\xi_2,\eta_2)},\cdots,\|z_m\|_{L_2(\xi_m,\eta_m)}\right\}$. $L_2(\alpha_j,\beta_j)$ and $L_2(\xi_k,\eta_k)$ are spaces of square integrable functions, respectively.

Obviously, the operator T acts in the Banach space and is a Fredholm operator. A sufficient condition for inversion of operator $I+T$ is the condition $\|T\|<1$. Then operator equation (2.1) can be solved by the method of successive approximations, if $\|T\|<1$. Therefore, the condition $\|T\|<1$ will be satisfied, if

$$\delta^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|k_{1i}\|+\sum_{\rho=1}^{m}\|s_{1\rho}\|\right)<1,\delta^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|k_{2i}\|+\sum_{\rho=1}^{m}\|s_{2\rho}\|\right)<1,.....,\delta^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|k_{ni}\|+\sum_{\rho=1}^{m}\|s_{n\rho}\|\right)<1,$$
$$\bar{\delta}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|t_{1i}\|+\sum_{\rho=1}^{m}\|r_{1\rho}\|\right)<1,\ \bar{\delta}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|t_{2i}\|+\sum_{\rho=1}^{m}\|r_{2\rho}\|\right)<1,.....,\bar{\delta}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\|t_{mi}\|+\sum_{\rho=1}^{m}\|r_{m\rho}\|\right)<1, \tag{2.3}$$

Further, are determined of the change regions of the problem characteristic parameters for which this system of integral equations allows the exact solutions.

REFERENCES

1. Kerobyan A.V. Sahakyan K.P. Transfer of Loads from Three Heterogeneous Elastic Stringers with Finite Length to an Infinite Sheet Through Adhesive Layers. Proc.YSU A: Phys. Math. Sci. 57 (2023), 86 -100.
2. Kerobyan A.V. On a Problem for an Elastic Infinite Sheet Strengthened by Two Parallel Stringers with Finite Length Through Adhesive Shear Layers. Proc. YSU A: Phys. Math. Sci.54 (2020), 153-164.
3. Muki R. and Sternberg E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheet. - Transactions of the ASME, №4,1968, p.737-746.
4. Lubkin J.L., Lewis L.C. Adhesive Shear Flow for an Axially Loaded, Finite Stringer Bonded to an Infinite Sheet.– Quart. Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 23, №4, 1970, p. 521-533.
5. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Физматлит., 1961, 442 с.

Information about author:

Kerobyan Aghasi V. , Associate Prof. , Yerevan State University, E-mail: agas50@ysu.am

DEVELOPMENT OF EXPANDING CEMENT COMPOSITIONS USING POLYPLAST RD ADDITIVES

Mazmanyan S., Sargsyan T., Sargsyan H., Mazmanyan J., Papyan G., Baghdagyulyan A.

Expanding cements are produced either by grinding aluminate clinkers or by co-grinding ordinary cement clinker with expanding additives. A notable characteristic of expanding cements is their capacity to expand during the setting and hardening phases. This expansion of the cement matrix is attributed to the growth of calcium hydrosulfoaluminate crystals, which form during these processes. There are several types of expanding cements, including gypsum-aluminum waterproofing expanding cement based on alumina cement, expanding cement, and prestressed cement based on cement clinker.

This study aimed to develop expanding cements utilizing ordinary Portland cement clinker in conjunction with the Polyplast RD additive. The investigation focused on the following physics mechanical properties of the resulting expanding cements: fineness, initial and final setting times, flexural strength, compressive strength, water-to-cement (W/C) ratio, volumetric changes, expansion coefficient, and elasticity coefficient. Additionally, the Creep Theory, as formulated by N.Harutyunyan for concretes produced with these cements, was considered in relation to volume change.

The cements produced were found to meet the requirements stipulated for expanding cements international standards.

Introduction: During the construction of oil and gas wells, the main goal is to ensure high-quality and durable insulation between rocks and stones. The issues of improving the quality and insulation of well casings always depend on the quality of the cement used and the technology of their application. In the case of the use of fillers, a decrease in quality or leakage of materials stored in the wells occurs.

Most experts focus on improving the quality characteristics of cements to solve the above problem. One of the main areas of increasing the durability of wells is the use of expanding cements in concreting.

The pioneers of large-scale application of expanding cement in production were builders, who developed numerous compositions of expanding cements twenty years before oil workers.

Expanding cements did not receive wide distribution, mainly because the introduction of expanding additives had to be carried out in drilling equipment.

Factory production of expanding cements began with the appearance on the market of special cement plants equipped with the necessary batchers and mixers for finished products.

At the same time, the attitude of A. I. Bulatov to this type of cement work is known. Partially accepting his comments,we believe that the use and correct use of expanding cements is undoubtedly very important.

If we look at the reasons on which the quality of well cementing depends, experienced specialists can easily name 10-15 factors, and non-compliance with any of them can negatively affect the integrity and quality of the casing.

The multifactorial nature of the cementing process suggests that each of the many influencing factors should be taken into account both during cementing work and at the stage of preparing the well for casing operation. Unfortunately, many drilling companies, in pursuit of drilling speed, often ignore even standard rules.

In many ways, such "minor" violations affect the quality of the reinforcement and create a negative opinion about the materials used, including expanding cements.

In general, the principle of production of expanding cements is quite simple and is based on the introduction of additives into cement, which, upon interaction with water or a base binder, form new substances, the volume of which is greater than the volume of the substances with which they entered into a hydration reaction. As a result of an increase in the volume of the expanding additive, the crystals of the hardening cement mortar (stone) move away from each other, which is expressed in an increase in its external volume.

During the hardening process of expansive cements, a denser cement stone is formed, which is much more water-resistant than during the hardening of ordinary cement. Thus, expansive cements are also water-resistant, the residue on the sieve No. 008 is 4.8%, the linear expansion is on average 2.4%.

The expansion of expanding cements is based on the formation of calcium hydrosulfoaluminate. In the first period of hardening of ordinary cement, such an amount of calcium hydrosulfoaluminate is formed that cannot provide its expansion. The high aluminum content and a certain amount of gypsum contribute to an increase in the amount of hydrosulfoaluminate formed. The hydraulic additive reduces the concentration of CaO in the liquid phase, ensuring faster dissolution of calcium aluminates and in

the first period of hardening, hydrosulfoaluminate is formed by crystallization from the solution, which contributes to the expansion of the cement, and then the process proceeds by the same mechanism as in regular cements.

The efficiency of casing fastening in the range with elevated temperatures and high pressures largely depends on the properties of the cement slurries used - density, water content and their hydration activity. One of the industries in urgent need is the oil and gas industry, for which the most important factor is the reliable fastening of wells under abnormally high pressures [1]. To obtain such cements, various types of additives are used. In our work, for this purpose, we investigated the possibility of using a chemical additive from the company Polyplast: Polyplast RD.

Materials: Clinkers with the calculated phase composition were used as the Portland cement component of the expanding cement: C_3S= 56-60%; C_2S= 17-25%, C_3A= 4-8%, C_4AF= 13-15%. The chemical composition of the clinkers is given in Table 1. In addition to these two substances, gypsum stone brought from Iran was used.

Table 1. Chemical composition of Portland cement clinkers

LOI	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	CaO	MgO	SO_3
1,30	21,40	5,61	4,06	65,00	2,47	0,15

The study of the gypsum stone used in the work showed that it consists mainly of large crystals of calcium sulfate dihydrate. Admixtures of quartz, pyrite, and clay substances are noted. The DTA curve shows the well-known transition from dihydrate sulfate to hemihydrate at 200 °C and soluble anhydrite at 400 °C with subsequent decomposition at 1000 °C.

Research methods: Physicomechanical tests: flowability, strength, thickening, density of cement mortar, water separation were determined in accordance with GOST 26798.1-96. X-ray phase analysis, differential thermal analysis, optical and electron microscopy were used for physicochemical studies.

Research results and their discussion: From the materials listed above, cements were obtained that contain Portland cement clinker, gypsum and Polyplast RD. At the first stage, the spreadability and density of expanding cements were studied, the results of which are given in Table 2. As can be seen from the data presented, these cements have the best indicators.

Table 2. Density of expansive cements

Sample number	W/C	Spreadability, mm	Density, g/cm^3
1	0,40	200	1,97
2	0,40	198	1,93
3	0,40	203	2,03
4	0,40	205	2,08

The development and optimization of the composition of expanding cement was carried out according to the following criteria: spreadability, density of cement suspension and strength of cement stone. The results of preliminary tests on spreadability and density of cements are given in Table 3.

When determining the technical properties of the obtained expanding cements, it was found that all compositions are characterized by sedimentation stability: water separation does not exceed 3-4%. The results obtained show that when introducing Polyplast RD, a high density of the solution is ensured with regulated spreadability of the cement suspension.

At the next stage of the work, the properties of cement slurry with expanding additives Polyplast RD were studied.

Research has shown that ettringite is formed during the hydration of aluminous slag containing calcium monoaluminate in the presence of gypsum and calcium hydroxide released during the hydration of alite. During the hydration of sulfated clinkers, ettringite phases are also formed. The formation of ettringite in cement suspensions promotes the structuring of cement suspensions and pastes. However, the kinetics of ettringite formation from sulfated minerals is somewhat lower than when using calcium monoaluminate [2].

For determining the expansion of cements, its grinding also plays an important role, that is, the remainder on the 008 network (80 microns).

Table 3. Properties of expansive cements depending on the amount of additives

Cement composition, %		W/C	Spreadability, mm	Solution density, g/cm^3
Portland cement clinker	Additive			
80 + 0,7% RD	20	0,40	150	2,03
		0,45	180	2,00
		0,55	210	1,90
70 + 0,7% RD	30	0,40	175	2,25
		0,45	195	2,20
		0,55	218	1,97
90 + 0,7% RD	10	0,35	180	2,30
		0,40	195	2,24
		0,45	220	2,11

Table 4. Rheological properties of expansive cements

Expanding cement compositions	Quantity of Polyplast RD in cement composition, %	R, mm	Setting time, hours – minutes	
			beginning	ending
	10	185	0 – 40	1 – 25
	10	190	1 – 15	2 – 45
	10	200	3 – 20	5 – 00

Conclusion

The following conclusions can be drawn from the results obtained:

- Polyplast RD can be used as an additive for producing expansive cements;
- The expansion of cements depends on its grain composition;
- The additive Polyplast RD has a positive effect on the strength characteristics of the obtained cements.

REFERENCES

[1] Krivoborodov, Yu.R. Types of oil well cements and their properties / Yu.R.Krivoborodov, I.A.Klyusov, A.A.Frolov, S.V.Samchenko. - M .: OOO "IRC Gazprom", 2003. Review information. Series: Drilling gas and gas condensate wells. - 70 p.
[2] Samchenko, S.V. Sulfoaluminoferrite cements//Cement, 1986. - No. 3. - P. 11-12.
[3] Krivoborodov, Yu.R. Cement cements for wells with special mining and geological conditions / II International Conference on Cement Chemistry and Technology. Mendeleyev University of Chemical Technology of Russia. St. Petersburg, 2000, v.2. - P. 83-90

Information about authors

Smbat Mazmanyan, PhD in Engineering**,** Head of the Laboratory at «Hrazdan Cement Corporation» LLC, +37498573958, +37491573958, email: smbat.chemistry@mail.ru

Tamara Sargsyan, PhD in Engineering, associate professor, National university of architecture and construction of Armenia, Associate Professor of the Department of Interior and Exterior Design, +374 94020244, tomasarkisyan80@mail.ru

Hayk Sargsyan, PhD in Engineering, associate professor, National university of architecture and construction of Armenia, Head of Admission Department, +374 91701101, nuaca@inbox.ru

Julieta Mazmanyan, Institute of «General and Inorganic Chemistry», NAS RA, Laboratory Assistant-Researcher, +37491573951

Gayane Papyan, «Hrazdan Cement Corporation» LLC, Chemical Engineer, +37491573952

Armine Baghdagyulyan, PhD in Engineering, assistant National university of architecture and construction of Armenia, Chair of Production of Construction Materials, Items and Structures, assistant**,** +374 91594845, a.baghdagyulyan@mail.ru

NATURE OF WAVE PROPAGATION MAGNETOSTRICTIVE MEDIA

Mikilyan M.A., Hambardzumyan H.H., Araqelyan A.A.

The propagation characteristics of plane waves in elastic, dielectric, magnetostrictive media in the presence of a constant magnetic field $\vec{H}$ are investigated. The study is based on the linear differential equations and boundary conditions that describe the behavior of perturbations in elastic magnetostrictive media interacting with magnetic fields. It is demonstrated that three types of waves can propagate in such media: quasi-longitudinal magnetostrictionally bounded waves, quasi-transversal magnetostrictionally bounded waves, and transversal unbounded waves. The unbounded wave is characterized by particle vibrations that are perpendicular to the plane formed by the direction $\vec{H}$ of the magnetic field and the direction $\vec{n}$ of wave propagation. Furthermore, it is shown that: a) In the case of $\vec{H} \perp \vec{n}$, one of these waves is purely longitudinal, while the remaining two are purely transversal and propagate with different velocities. b) In the case of $\vec{H} \parallel \vec{n}$ (similarly to the case of purely elastic plane waves), a purely longitudinal magnetoelastic wave and a purely transversal wave propagate unbounded in the medium under consideration, with their propagation velocities depending on the magnitude of the magnetic field induction.

1. 1. Introduction

The equations and boundary conditions describing the behavior of small disturbances in magnetostrictive media have been formulated and analyzed by numerous researchers, including G. Y. Bagdasarian [1], W. F. Brown [2], and Y.-H. Pao et al. [3]. Based on the corresponding boundary value problems, various specific issues related to the generation and propagation of surface waves have been solved. However, the investigation of the generation and propagation of body waves is also important—not only as a subject of theoretical interest but also for a deeper understanding of surface wave processes. This paper is devoted to the study of these issues.

2. Basic Equations

Let an elastic, dielectric, magnetostrictive medium be placed in an external stationary magnetic field, which, in the undisturbed state, is characterized by the induction vector $\vec{H}$. We consider the propagation of a plane magnetoelastic wave in an unlimited medium, using the linear differential equations and corresponding boundary conditions obtained in [1], which describe the behavior of perturbations in elastic magnetostrictive media interacting with magnetic fields. Due to the unlimitedness of the medium and constancy of the undisturbed magnetic field (in this case, the magnetoelastic intensities of the undisturbed state are equal to zero), in the system x_i of Cartesian coordinates, the noted equations have the following form [1]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial s_{ik}}{\partial x_i} + \mu_0 M_i \frac{\partial h_k}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \\
&rot\,\vec{h} = 0, \quad div\,\vec{b} = 0; \\
&\vec{b} = \mu_0(\vec{h} + \vec{m}), \quad H_k^0 = A_{k\ell} M_\ell^0, \\
&s_{ij} = \overline{c}_{ijk\ell} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} + \mu_0 e_{ijk} m_k, \\
&h_i = g_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + A_{ik} m_k .
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

In describing the disturbed state of the medium equations (2.1) s_{ik} and u_k are the disturbances of magnetoelastic stress and elastic displacement, respectively; M_i- are the components of the magnetization vector in the undisturbed magnetic field; and $\vec{h}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ represents the disturbances of the vectors of intensity, induction and magnetization of the undisturbed magnetic field. Summation is carried out over repeated indexes.

For the given elastic modules of elasticity $\bar{c}_{ijk\ell}$ and the coefficients of the influence e_{ijk} and g_{ijk}, we have the following expressions:

$$\bar{c}_{ijk\ell} = c_{ijk\ell} + \mu_0 A_{pq} M_r M_j \left(\delta_{ik}\delta_{p\ell}\delta_{rq} + \delta_{k\ell}\delta_{iq}\delta_{pr} + \delta_{\ell p}\delta_{iq}\delta_{kr}\right) +$$
$$+ \frac{\mu_0}{2} B_{pqrs}\left(\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{k\ell} + \delta_{iq}\delta_{jk}\delta_{p\ell} + \delta_{ik}\delta_{jq}\delta_{p\ell}\right) M_r H_s +$$
$$+ \mu_0 B_{pqrs}\left(\delta_{pk}\delta_{q\ell}\delta_{is} M_j + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{\ell s} M_k\right) M_r, \qquad (2.2)$$
$$e_{ijk} = B_{ijk\ell} M_\ell + A_{mi}\left(\delta_{kj} M_m + \delta_{mk} M_j\right),$$
$$g_{ijk} = B_{ijk\ell} M_\ell + A_{rs}\left(\delta_{is}\delta_{jk} M_r + \delta_{rk}\delta_{is} M_j + \delta_{ij}\delta_{sk} M_r\right).$$

In (2.2) $\bar{c}_{ijk\ell}$, $A^{-1}_{k\ell}$ and $B_{ijk\ell}$ are the tensors of elastic constants, magnetic susceptibility and magnetostrictive coefficients respectively. For the examined isotropic magnetically active media noted tensors are defined by the following formulas:

$$c_{ijk\ell} = \lambda\delta_{i\acute{e}}\delta_{\hat{e}\ell} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}\right),$$
$$A_{k\ell} = \chi^{-1}\delta_{k\ell},$$
$$B_{ijk\ell} = e_2\delta_{i\acute{e}}\delta_{\hat{e}\ell} + \frac{1}{2}(e_1 - e_2)\left(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}\right),$$

where λ and μ are Lame's coefficients; ρ_0 is the mass density; e_i are magnetostrictive constants; χ is the magnetic susceptibility; $\mu_r = \chi + 1$ is the specific magnetic permeability of the considered magnetoelastic medium.

It should be noted that in [1], the linearized equations (2.1) were obtained using the basic postulates of the nonlinear theory of magnetoelasticity for deformable ferromagnetic bodies [2,3], along with the perturbation method [4,5].

3. Propagation Character of Plane Waves

Based on the previously presented equations, let us consider the propagation of a plane magnetoelastic wave in a boundless magnetostrictive dielectric medium, assuming that the perturbations depend on only one of the Cartesian coordinates, say x_1 and the time t. We choose an orthogonal coordinate system x_1, x_2, x_3 such that the coordinate plane (x_1, x_2) coincides with the plane formed by the direction of the given magnetic field $\vec{H}$ and the direction $\vec{n}$ of wave propagation (the axis $0x_1$ is parallel to the vector $\vec{n}$). In this coordinate system, the external magnetic field takes the form $\vec{H}_0 = (H_1, H_2, 0)$, where $H_i = const$.

The linearized equations relative to the components of the displacement vector $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ and the vector of the induced magnetic field $\vec{h}(h_1, h_2, h_3)$, which describe the perturbed state of the medium under consideration in the case of one-dimensional motions, according to [1], have the form:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$
$$a_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \qquad (3.1)$$
$$a_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$h_1 = \frac{\chi}{\mu_r}\left[(\chi e_1 + 3)H_{01}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\chi e_2 + 1)H_{02}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right], \tag{3.2}$$

$h_2 = 0,\ h_3 = 0,$

where

$$a_{11} = \lambda + 2\mu + \mu_0\chi^2\left\{\left[\frac{1}{\mu_r}(\chi e_1 + 3)^2 - \frac{1}{\chi}\left(\chi^2 e_1^2 + \frac{3}{2}\chi e_1 + 3\right)\right]H_{01}^2 + \frac{e_2}{2}\left[1 - \chi(e_1 - e_2)\right]H_{02}^2\right\},$$

$$a_{22} = \mu + \mu_0\chi^2\left\{\gamma H_{01}^2 + \left[e_1 - \frac{3}{2}e_2 + \frac{\chi e_2 + 1}{\mu_r}\left(1 - \frac{e_1 - e_2}{2}\right)\right]H_{02}^2\right\},$$

$$a_{33} = \mu + \mu_0\chi^2\left(\gamma H_{01}^2 + \frac{1}{2}e_2 H_{02}^2\right), \tag{3.3}$$

$$a_{12} = \mu_0\chi^2\left[e_1 - \frac{a}{\chi}(\chi e_2 + 1) - \frac{e_2 - 1}{\mu_r}(\chi e_2 + 3)\right]H_{01}H_{02},$$

$$a_{21} = \mu_0\chi^2\left(e_1 - \frac{a}{\mu_r}(e_1 - 3) - \frac{a^2}{\chi}\right)H_{01}H_{02},$$

$$\gamma = \frac{1}{2}e_1 - \frac{a^2}{\chi}, \quad a = 1 + \chi\frac{e_1 - e_2}{2}.$$

From equation (3.1) it follows that the displacement u_3 is determined independently of u_1, u_2 in the boundless medium, and the corresponding transversal waves are magnetostrictionally unbounded, since they do not give rise to an induced magnetic field, as it follows from the equation (3.2).

Let

$$u_j = u_j^0 \exp\left[i(kx_1 - \omega t)\right] \qquad (j = 1,2,3) \tag{3.4}$$

be the solution of the equation (3.1), corresponding to the propagation of a plane bulk magnetoelastic wave with frequency ω and wave number k.

Substituting equation (3.4) into equation (3.1), we obtain a linear system of homogeneous algebraic equations with respect to the amplitudes u_i^0. Applying the existence condition of a non-trivial solution for the mentioned system, we obtain the expressions that define the velocities c_i of the propagation of magnetostrictionally bounded waves:

$$c_i^2 = \frac{a_{11} + a_{22} + q_i}{2\rho_0}, \quad i = 1,2 \tag{3.5}$$

$$c_3^2 = \frac{a_{33}}{\rho_0}. \tag{3.6}$$

The following notation is introduced in (3.5)

$$q_i = (-1)^{i+1}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}. \tag{3.7}$$

The given equations and derived relations clearly imply that if the medium is non-ferromagnetic $\chi = 0$, or if the external magnetic field is absent $(H_i = 0)$, then $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$, $c_2^2 = c_3^2 = \mu/\rho_0$, and the results coincide with the well-known results for pure elastic plane waves.

The analysis of the characteristic equation, depending on the orientation of the given magnetic field, shows that:

a) If the magnetic field is parallel or perpendicular to the direction of wave propagation ($\vec{H} \parallel \vec{n}$ or $\vec{H} \perp \vec{n}$, where $\vec{n}$ is the direction of propagation of the plane wave), then all three waves propagate independently;

b) In the case of $\vec{H} \perp \vec{n}$, one of these waves, with velocity c_1, is pure longitudinal, while the other two are pure transversal and propagate with different velocities $(c_2 \neq c_3)$;

c) In the case of $\vec{H} \parallel \vec{n}$, the velocities of the transversal waves coincide $(c_2 = c_3)$ (as in the case of pure elastic plane waves); a pure longitudinal magnetoelastic wave with velocity c_1 and a pure transversal wave with velocity c_2 propagate in the medium, and the propagation velocities depend on the value of the magnetic field induction.

In other cases (in the sense of the direction of the magnetic field), in magnetostrictionally bounded waves, the displacement vector $\vec{u}$ is neither perpendicular nor parallel to the direction of wave propagation.

However, taking into account that for basic magnetostrictive materials $\chi e_i^2 B_s^2 / \mu_0 \mu << 1$ (where B_s is the induction saturation), the deflection of $\vec{u}$ from the direction $\vec{n}$ in the case of the wave with velocity c_1, and the deflection of $\vec{u}$ from the front plane in the case of the wave with velocity c_2, is not significant.

For this reason, the first wave can be called quasi-longitudinal, and the second one — quasi-transversal.

4. Numerical Results

In the previous section, we investigated the influence of the interaction between the magnetic field and the magnetostrictive media. In particular, it was shown that the anisotropy caused by the magnetic field can qualitatively change the character of the wave field in magnetostrictive media. In this section, numerical calculations are carried out for specific materials in order to reveal the quantitative influence of the magnetic field on the propagation velocities of plane waves. For these calculations, *Ferrit F-107* and *FerroNickel $NiFe_2O_3$* are selected. The physical and mechanical constants for these materials are taken from the monograph [6], and are as follows:

For *Ferrit F-107* -

$\rho_0 = 5.26*10^3 \text{kg/meter}^3;\ \lambda = 1.02*10^{11} \text{Newton/meter}^2;$

$\mu = 0.66*10^{11} \text{Newton/meter}^2;\ \mu_r = 30;\ e_1 = 42.2;\ e_2 = -22.1.$

For *FerroNickel $NiFe_2O_3$* -

$\rho_0 = 7.1*10^3 \text{kg/meter}^3;\ \lambda = 1.17*10^{11} \text{Newton/meter}^2;$

$\mu = 0.55*10^{11} \text{Newton/meter}^2;\ \mu_r = 32;\ e_1 = 124.2;\ e_2 = -62.1.$

The results for the *Ferrit F-107* are presented in Fig. 1, and for *FerroNickel $NiFe_2O_3$* — in Fig. 2. The figures show the dependence of c_i / c_{0i} on magnetic field induction, when $B_{01} = \frac{1}{2} B_0$, $B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} B_0$. Here, c_i, $i = 1,2,3$ are the propagation velocities of magnetoelastic plane waves, defined by the formula $c_i^2 = \frac{a_{11} + a_{22} + q_i}{2\rho_0}$, $i = 1,2$; $c_3^2 = \frac{a_{33}}{\rho_0}$; and $c_{01}^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$ is the propagation velocity of the longitudinal plane wave, and $c_{02}^2 = c_{03}^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$ are the propagation velocities of the transversal plane waves in the absence of a magnetic field.

5. Conclusions

Thus, it is shown that three types of plane magnetoelastic waves can propagate in a magnetostrictive elastic medium: quasi-longitudinal magnetostrictionally bounded, quasi-transversal magnetostrictionally bounded, and transversal unbounded. Moreover, the velocity of the transversal wave is more sensitive to the magnetic field; depending on the value of the magnetic field, the velocity

of the longitudinal wave increases, while the velocity of the transversal wave decreases. As shown in the previous section, the influence of the magnetic field is more significant for materials with higher magnetostrictive constants.

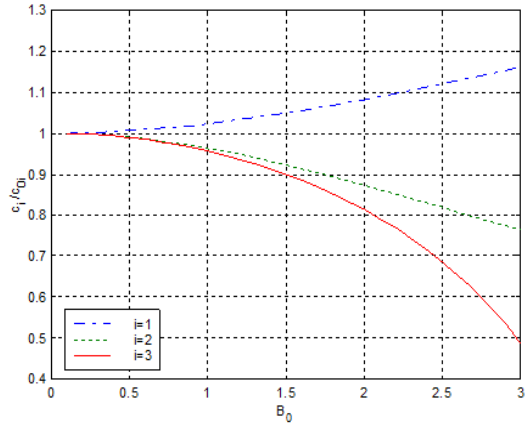


Figure 1.
Dependence of c_i / c_{0i} on magnetic field induction for *Ferrit F-107.*

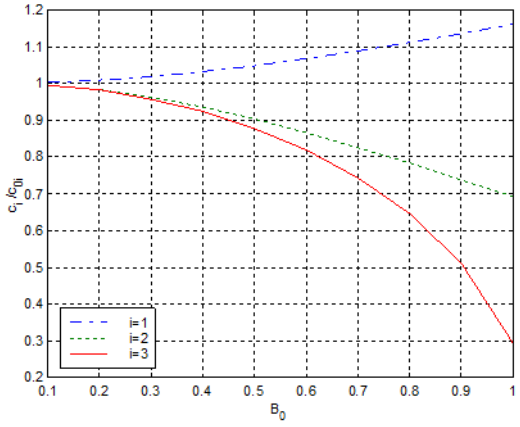


Figure 2.
Dependence of c_i / c_{0i} on magnetic field induction for *FerroNickel* $NiFe_2O_3$.

The research was supported by the Higher Education and Science Committee of MESCS RA (Research project № 25RG-2C167).

REFERENCE

1. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA, vol. 93, 1917.
2. Новацкий В. Теория упругости, М.: Мир, 1975. 872 с.
3. G.Y.Bagdasarian Mathematical Modeling of Excitement Behavior in Magnetostrictive media, in Math. Methods and Phys.-Mech. Fields, 1998, vol.41, N3, pp.70-75 (in Russian).
4. Brown W.F Theory of Magnetoelastic Effect in Ferromagnetism, Journ. of Appl. Phys., vol. 36, 1965.
5. Pao Y-H, Yeh C.-S. A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids, Int. J. Eng. Sci., 11, 1973, N4, pp.415-436.
6. Novojilov V.V. The Basis of Non-linear Theory of Elasticity, Moscow, Gostechizdat, 1948, 212p (in Russian).
7. Guz A.N. Elastic Waves in the Bodies With Initial Stresses, Kiev, Naukowa Dumka, 1986, vol.1, 313p (in Russian).
8. Sirkin L.N. Piezomagnetic Ceramics, Leningrad, Energy, 1980, 205p (in Russian).

Information about authors

Marine Mikilyan – Leading Researcher at the Institute of Mechanics, NAS RA, Russian-Armenian University, Institute of Mathematics and Informatics, Phone: (+374 91) 191129
E-mail: mikilyan@sci.am, marine.mikilyan@rau.am

Hasmik Hambardzumyan – Researcher at grant team, Institute of Mechanics, NAS RA, Russian-Armenian University, Institute of Mathematics and Informatics, Phone: +374 55 036776
E-mail: hasmik.hambardzumyan@rau.am

Artur Araqelyan – Researcher at grant team, Institute of Mechanics, NAS RA, Phone: +374 77 681225, E-mail: arturarakelyan089@gmail.com

EFFECT OF MAGNETIC FIELD ON CRITICAL SPEED OF AERO-THERMO-ELASTIC OSCILLATIONS OF HIGH ASPECT RATIO PLATE

Mikilyan M.A., Tonoyan V.U., Cestino E.

A thin isotropic plate of high aspect ratio and constant thickness, which is located in a stationary temperature field and immersed in a constant magnetic field is studied. A supersonic dielectric gas flow is directed on one side of the panel. It is also assumed that the plate is uniformly supported along the long edges in the direction perpendicular to the applied flow field. Investigation of the formulated problem is brought to solving of the nonlinear homogeneous boundary-value problem, but only the linear part is solved in this paper. Two cases of temperature field (constant and variable) is studied, critical value of the flowing speed is calculated and influence of the presented magnetic field on the noted critical value is investigated. It is shown, that for constant thermal field this influence is negligible. When temperature is variable, then magnetic field has a significant effect on critical flowing speed. Depending on the sign of temperature, it can narrow or expend essentially the critical speed.

1. Introduction

In the paper [2] the problem of aero-thermo-elastic stability and nature of flutter type oscillations of isotropic panel in a vicinity of critical speed is studied. In the work [3] the effect of magnetic field on aero-elastic flutter oscillations of rectangular plate is examined in detail. Based on the methodology, presented in the noted works, the linear problem of aero-thermo-elastic oscillations is solved in this paper.

2. Basic Equations and Assumptions

Let's consider a thin isotropic plate of high aspect ratio and constant thickness h, located in a stationary temperature field T and immersed in a constant magnetic field with intensity vector $\vec{H}_0\left(H_{01},0,0\right)$. The Cartesian coordinate system $\left(x_1,x_2,x_3\right)$ is chosen so that the median plane of the plate coincided with the coordinate plane $\left(x_1,x_2\right)$. A supersonic dielectric gas flow with an unperturbed velocity U, is directed along the axis $0x_1$, on one side of the panel. To investigate the aero-thermo-magneto-elastic stability of the panel the following assumptions are used:

a) the Kirchhoff hypothesis on non-deformable normal [9];

b) the basic assumptions of the theory of flexible plates, assuming that the normal displacements are comparable with the thickness of the plate [8];

c) the modified Piston Theory of Aerodynamics (PTA) is used when calculating the aerodynamic pressure [3]:

$$q=-æp_\infty\lambda^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\frac{\mathrm{v}_3}{a_0}\right)+\frac{5-æ+3\lambda^2}{4\left(1+\lambda^2\right)^2}\left(\frac{\mathrm{v}_3}{a_0}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(2æ+3\right)\lambda^4+\left(10-æ^2\right)\lambda^2+æ^2-2æ+9}{12\left(1+\lambda^2\right)^3\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\frac{\mathrm{v}_3}{a_0}\right)^3+\ldots\right\}, \tag{2.1}$$

where p is the gas pressure at the plate's surface, $a_\infty^2=æp_\infty\rho_\infty^{-1}$ is the sound velocity for the undisturbed gas, p_∞ and ρ_∞ are the pressure and gas density in undisturbed state, æ is the isentropic gas coefficient, v_3 is the normal component of the speed of points of plate's surface;

$$\lambda^2=\frac{V_A^2}{a_0^2},\qquad V_A^2=\frac{B_{01}^2}{\rho_0\mu_0},$$

and V_A is a quantity numerically equal to the speed of propagation of Alfven's electromagnetic waves, $B_{01}=\mu_0\mu_r H_{01}$, μ_r is relative magnetic permeability, μ_0 $\left(\mu_0=4\pi\cdot10^7\ N/A^2\right)$ is magnetic constant.

d) a linear law of temperature field $T\left(x_1,x_3\right)$ through the thickness of the plate is assumed [2,8]:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3\Theta(x_1, x_2); \tag{2.2}$$

e) the Neumann hypothesis on absence of shears due to changes of temperature field [8];

It is worthy to note, that formula (2.1) is a modification of the famous formula of aerodynamic pressure from of PTA [1]. For the sake of simplicity, it is also assumed that the plate is sufficiently long and uniformly supported along the long edges in the direction perpendicular to the applied flow field. In this case the median surface of the curved panel will be close to the cylindrical one. Therefore, in the direction of the axis $0x_2$ along the long edge, it is assumed that all perturbed and unperturbed states do not depend on the coordinate x_2 and the displacement u_2 along the axis $0x_2$ is equal to zero. Under the influence of non-uniform, along the thickness, stationary temperature field $(\Theta \neq 0)$ the panel is subjected to buckling which will yield an out-of-plane deflection $w_T(x_1)$ and a corresponding aerodynamic pressure appears. The boundary conditions of the following two types will be considered:

- the edges are hinge supported and can freely move along axis $0x_1$,
- the edges are hinge supported and fixed.

Based on these assumptions the following system of nonlinear differential governing equations of aero-thermo-magneto-elastics can be cast as [2,3]:

$$\begin{aligned} &D\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - N_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2}\right) + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h\varepsilon + \frac{æ p_\infty\sqrt{1+\lambda^2}}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t} + \\ &+æ p_\infty M\sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{\partial w}{\partial x_1} + æ p_\infty M^2\,\frac{æ+1+(æ+4)\lambda^2+3\lambda^4}{4(1+\lambda^2)^2}\left[2\frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\frac{\partial w}{\partial x_1} + \\ &+æ p_\infty M^3\sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{æ+1+(æ+1)(æ+3)\lambda^2+(æ^2-3æ+11)\lambda^4+(2æ+3)\lambda^6}{12(1+\lambda^2)^4}\times \\ &\times\left[3\frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

The following notations are adopted in (2.3):

$$N_1^T = \begin{cases} 0, & \text{when the edges of the plate are move freely,} \\ -\dfrac{Eh}{1-\mu}\alpha T_0, & \text{when the edges of the plate are fixed;} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$N_1 = \begin{cases} 0, & \text{when the edges of the plate are move freely,} \\ t_{11}, & \text{when the edges of the plate are fixed.} \end{cases}$$

The solutions of equation (2.3) must satisfy to the following conditions:

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{for} \quad x_1 = 0,\ x_1 = a, \tag{2.5}$$

for the simply supported edges of the plate.

Investigation of the formulated problem is brought to solving of the nonlinear homogeneous boundary-value problem, which is not presented here. The appropriate linear problem is solved here.

3. Stability Analysis

The obtained linear problem will be solved approximately, presenting the solution in the form [6,7]

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t)\sin\lambda_i x_1, \qquad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a}\right), \tag{3.1}$$

where $f_i(t)$ – the functions of time t to be determined.

The representation (3.1) satisfies the boundary conditions (2.5). Substituting (3.1) into the equation (2.3) and solving it via the Bubnov-Galyerkin method for determining the $f_i(t)$ the nonlinear system of ordinary differential equations can be obtained. In further we'll restrict us only by binomial approximation [2,3]:

$$w = f_1(t)\sin\lambda_1 x + f_2(t)\sin\lambda_2 x\,. \tag{3.2}$$

Then, according to the dimensionless functions $x_i = f_i(t)/h$ the appropriate linear of ordinary differential equations has the form:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_1}{d\tau} + \left(1-\bar{T}\delta\right)x_1 - \frac{2}{3}K\nu x_2 + \bar{\Theta}\left[\delta_{11}^{\lambda}x_1 + \delta_{12}^{\lambda}x_2\right] + \bar{\Theta}^2\delta\left[\gamma_{11}^{\Theta}x_1 + \gamma_{12}^{\Theta}x_2\right] = 0,\\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_2}{d\tau} + \left(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta\right)x_2 + \frac{2}{3}K\nu x_2 + \bar{\Theta}\left[\delta_{21}^{\lambda}x_1 + \delta_{22}^{\lambda}x_2\right] + \bar{\Theta}^2\delta\left[\gamma_{21}^{\Theta}x_1 + \gamma_{22}^{\Theta}x_2\right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

where together with the dimensionless time $\tau = \omega_1 t$, the following notations are introduced:

$$\begin{aligned}
&\bar{T} = RT_0\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{12}{\pi^2}\right),\quad \bar{\Theta} = R\Theta h\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{1}{36+K^2\nu^2},\\
&K = \frac{4æp_{\infty}}{\rho\omega_1^2h^2},\quad \nu = M\sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{h}{a},\\
&\omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\quad (i=1,2),\qquad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1},\quad \chi = \frac{1}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{a_{\infty}\rho_{\infty}\sqrt{1+\lambda^2}}{\rho h}\right),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

and also the coefficients δ_{ij}^{λ}, which consider the linear interaction of temperature, magnetic field and flowing stream with vibrating plate:

$$\begin{aligned}
&\delta_{11}^{\lambda} = -\frac{9}{4}\frac{1+æ+\lambda^2}{\left(1+\lambda^2\right)^2}K\nu^2,\ \delta_{12}^{\Theta} = \frac{21}{40}\frac{1+æ+\lambda^2}{\left(1+\lambda^2\right)^2}K^2\nu^3,\\
&\delta_{21}^{\lambda} = \frac{3}{40}\frac{1+æ+3\lambda^2}{\left(1+\lambda^2\right)^2}K^2\nu^3,\ \delta_{22}^{\lambda} = -\frac{1}{80}\frac{1+æ+3\lambda^2}{\left(1+\lambda^2\right)^2}K\nu^2\left(180+K^2\nu^2\right),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

the coefficients γ_{ij}^{Θ}, which consider only thermal influence of noted processes:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11}^{\Theta} = \frac{3\left(1152+\left(32-3\pi^2\right)K^2\nu^2\right)^2}{32\pi^6},\qquad \gamma_{22}^{\Theta} = \frac{243}{8\pi^2}K^2\nu^2\\
&\gamma_{12}^{\Theta} = \gamma_{21}^{\Theta} = -\frac{27\left(1152+\left(32-3\pi^2\right)K^2\nu^2\right)}{16\pi^4}K\nu.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

In (3.3), (3.4) the χ, ν, $\bar{T}$, $\bar{\Theta}$, λ – are parameters, characterizing the damping process, the flow stream speed, the temperature and magnetic field, respectively, ω_i – are the frequencies of natural vibrations,

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{when the edges of the plate are move freely,}\\ 1, & \text{when the edges of the plate are fixed.}\end{cases}$$

Thus, the problem of the stability of studied system, in the first approximation, is obtained, which depends on the flow speed (ν), the temperature ($\bar{T}$, $\bar{\Theta}$) and magnetic field parameter (λ).

4. Stability boundary and stability conditions

Presenting the solution of the system (3.3) in the form [5]

$$x_1 = y_1e^{r\tau},\quad x_2 = y_2e^{r\tau}, \tag{4.1}$$

we'll obtain the following characteristic equation with respect to r:

$$a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0 \tag{4.2}$$

where

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 2\chi,$$

$$a_2 = 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}\left(\delta_{11}^{\lambda} + \delta_{22}^{\lambda}\right) + \bar{\Theta}^2\delta\left(\gamma_{11}^{\Theta} + \gamma_{22}^{\Theta}\right) + \chi^2,$$

$$a_3 = \left[1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}\left(\delta_{11}^{\lambda} + \delta_{22}^{\lambda}\right) + \bar{\Theta}^2\delta\left(\gamma_{11}^{\Theta} + \gamma_{22}^{\Theta}\right)\right]\chi,$$

$$a_4 = \left(1 - \bar{T}\delta\right)\left(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta\right) + \frac{4}{9}K^2\nu^2 - \bar{T}\bar{\Theta}\delta\left[4\delta_{11}^{\lambda} + \delta_{22}^{\lambda} + \bar{\Theta}\delta\left(\gamma_{11}^{\Theta} + \gamma_{22}^{\Theta}\right)\right] +$$

$$+ \bar{\Theta}\left\{\gamma^2\delta_{11}^{\lambda} + \delta_{22}^{\lambda} + \bar{\Theta}\delta\left(\gamma^2\gamma_{11}^{\Theta} + \gamma_{22}^{\Theta}\right) - \frac{2}{3}K\nu\left(\delta_{12}^{\lambda} - \delta_{21}^{\lambda}\right)\right\} +$$

$$+ \bar{\Theta}^2\left\{\delta_{11}^{\lambda}\delta_{22}^{\lambda} - \delta_{12}^{\lambda}\delta_{21}^{\lambda} + \bar{\Theta}\delta\left[\gamma_{22}^{\Theta}\delta_{11}^{\lambda} + \gamma_{11}^{\Theta}\delta_{22}^{\lambda} - \left(\gamma_{21}^{\Theta}\delta_{12}^{\lambda} + \gamma_{12}^{\Theta}\delta_{21}^{\lambda}\right)\right]\right\} + \bar{\Theta}^4\delta^4\left[\gamma_{11}^{\Theta}\gamma_{22}^{\Theta} - \left(\gamma_{12}^{\Theta}\right)^2\right].$$

The unperturbed form of the plate will be stable if the real parts of the roots of characteristic equation will be negative. Consequently, the stability conditions, according to Hurwitz's theorem can be written as:

$$a_i > 0 \quad (i = 0,1,...,4), \ \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0 \tag{4.3}$$

The first two inequalities, which require that the damping (internal and aerodynamic) was positive, fulfilled in all cases. The third condition is satisfied, if the fourth condition is satisfied. From the remaining conditions, we'll get the inequalities that define the stability area of the thermo-elastic system under consideration of parameters ν, $\bar{T}$, $\bar{\Theta}$, λ. The obtained inequalities are not brought here because of the large form of these formulas.

The obtained formulas show, that if $\delta = 0$ then the coefficients of characteristic equation are independent of T_0. This means that the value of critical speed, which can be calculated from the last inequality of Hurwitz's theorem, can be changed via the joint effect of variable temperature and magnetic fields. Let us note, that the formula to calculate the critical flutter speed is huge enough and will not be brought here. We'll present below only the results of numerical calculations of the critical speed for the examined cases.

5. Effect of magnetic field on stability region

A study of the noted effect is examined step by step:

1) $\bar{T} \neq 0, \ \bar{\Theta} = 0$

2) $\bar{T} = 0, \ \bar{\Theta} \neq 0$

Constant temperature field $\left(\bar{T} \neq 0, \ \bar{\Theta} = 0\right)$. In this case the inequalities (4.3) make it possible to calculate stability region (or flutter critical speed) and study the effect of applied magnetic field for $\delta = 1$. The following set of parameters are used: $\alpha = 23.8 * 10^{-6}\ {}^0C^{-1}$; k=1200 Wt/(m^2 ^{0}C); λ=210 Wt/(m ^{0}C); μ=0.34; a=1m; h/a=1/100. The results show, that effect of the applied magnetic field on the critical value of flutter type oscillations of examined plate, similar to the case, when $\delta = 0$, is negligible.

Temperature gradient field $\left(\bar{T} = 0, \ \bar{\Theta} \neq 0\right)$**.** In this case, from the stability conditions (4.3) the effect of magnetic field on the stability area is drawn for the same initial data, which brought in the previous case. The stability area is brought in the Fig.1.

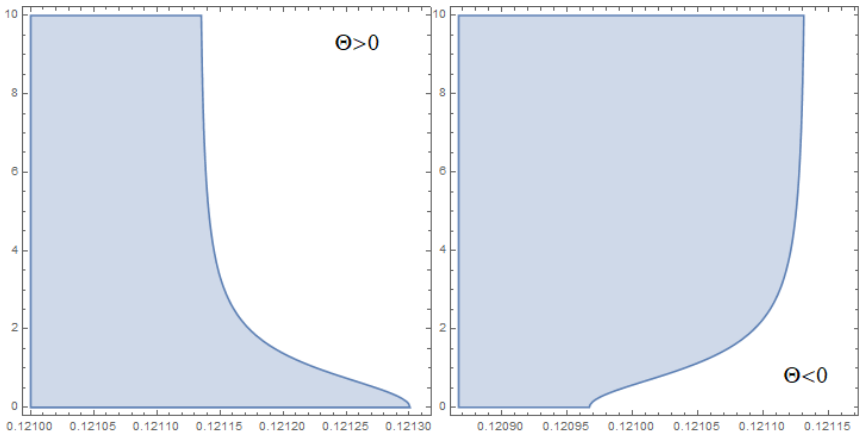


Figure 1: Stability boundary for temperature field gradient.

In the Fig.1 the stability area is given for moderate temperature field. It is evident from the Fig.1 that: a) if $\Theta > 0$, then the applied magnetic field noticeably narrows stability region; b) if $\Theta < 0$, then the applied magnetic field essentially expands stability region.

The research was supported by the Higher Education and Science Committee of MESCS RA (Research project № 25RG-2C167).

REFERENCE

1. Ashley H., Zartarian C. "Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician". Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
2. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Laith K. Abbas & Pier Marzocca About the Aerothermoelastic Stability of Panels in Supersonic Flows. Journal of Thermal Stresses, Volume 36, Issue 9, September 2013, pages 915-946.
3. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. Magnetoelastic Vibrations and Stability of Magnetically Active Plates and Shells. Springer, 2024.
4. Bolotin V.V. "Equations of non-stationary temperature fields in thin shells for heat sources", J. Appl. Math. and Fur. 24, № 2, 1960.
5. Hoff N.I., Thermal buckling of supersonic wing panels. Journ. Aeronaut. Sci., V.23, N11, 1956.
6. Librescu L., P. Marzocca, W.A. Silva, "Linear/Nonlinear Supersonic Panel Flutter in a High-Temperature Field," Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 1, July – August 2004, pp. 918-924.
7. Novichkov Y.N. "Flutter of plates and shells". //Results of science and technology. Mechanics of deformable solids. - Moscow: Nauka, 1978. vol. 11. pp. 67-122.
8. Nowacki V., Issues of thermoelasticity. AcadSci USSR, 1962.
9. Volmir A.S. "Nonlinear dynamics of plates and shells". -M. Nauka, 1972. -432p.

Information about authors

Marine Mikilyan – Leading Researcher at the Institute of Mechanics, NAS RA, Russian-Armenian University, Institute of Mathematics and Informatics, Phone: (+374 91) 191129
E-mail: mikilyan@sci.am, marine.mikilyan@rau.am

Vahram Tonoyan – Researcher at grant team, Institute of Mechanics, NAS RA, Russian-Armenian University, Institute of Mathematics and Informatics, Phone: (+374 955) 55076
E-mail: var10email@gmail.com

Enrico Cestino – Associate Professor (L. 240), Department of Mechanical and Aerospace Engineering (DIMEAS) at POLITO, Turin, Italy, E-mail: enrico.cestino@polito.it

THE INTERACTION OF CRACK-TYPE STRESS CONCENTRATORS IN AN ELASTIC PLATE AND A RIGID THIN INCLUSION TAKING INTO CONSIDERATION THEIR ADHESION

Mkhitaryan S.M., Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S.

A plane problem of the mathematical theory of elasticity for the study of stress concentration in an infinite elastic plate with a crack of finite length and an absolutely rigid thin inclusion, indented into the lower edge of the crack, is considered. We assume that the inclusion has the form of a strongly oblate along its length ellipse or a thin rectangle with height much shorter than its length. We consider that the inclusion is embedded into the central part of the crack's lower edge without reaching the crack's tips, taking into account the adhesion forces in the contact zone.

Under these assumptions, using the Fourier integral transform, the solution of the stated problem is reduced to the solution of a singular integral equation (SIE). The kernel of this equation is presented as a sum of the Cauchy kernel and the regular kernel. The governing SIE is solved by a well-known method based on Gauss quadrature formulas.

We investigated the effects of interactions of crack-type stress concentrators and the thin inclusion, when the inclusion endpoints are approaching the crack's tips. In this case, stress intensity factors significantly increase.

The problem basic physical characteristics: contact stresses under inclusion, the crack opening and stress intensity factors (SIF) at the crack tips are represented by explicit formulas of simple structure.

1. Introduction

The interaction between stress concentrators—particularly cracks and thin rigid inclusions—and deformable media is of both theoretical and practical importance. These concentrators generate local stress fields with steep gradients, leading to new classes of mixed boundary-value problems in elasticity theory and informing strength assessments in engineering applications. Such issues arise in structural and mechanical engineering, especially aerospace, composite materials, and geomechanics, where inclusions may detach from the matrix during service, forming cracks.

Due to their relevance, these problems have attracted significant attention. Key contributions include works [1-5]. Many results on this research area are summarized in monographs [6, 7], as well as in the handbooks [8, 9]. In [10] and earlier in [11], exact solutions for mixed boundary-value problems involving multiple cracks were developed using complex potentials.

In the present paper, this problem, in the case of a crack of finite length and normal discontinuity, is considered from the standpoint of fracture mechanics. A thin, absolutely rigid inclusion is indented into the central part of the lower crack edge over a symmetric segment shorter than the full extent of the lower edge, and adhesion forces are taken into account in the contact zone. The analysis is based on the Fourier transform and singular integral equation theory, combined with numerical-analytical methods using Gauss quadrature formulas [12, 13]. The main mechanical characteristics are presented in explicit formulas involving integrals of oscillatory functions. An efficient method for computing such integrals is proposed. The behavior of the stress intensity factor and the J -integral is analyzed as the endpoints of the inclusion approach the crack tips. It is revealed that, applying this approximation or at the limiting transition, both the SIF and the J -integral become infinitely large and, upon reaching their critical values, trigger crack propagation and its subsequent spontaneous growth. As a result, in this limiting transition, the crack propagates before the endpoints of the inclusion reach the crack tips. Therefore, the previous problem formulation must be refined: from the viewpoint of fracture mechanics, the inclusion should be considered in incomplete contact with the lower crack edge — a refinement implemented in the present work.

It should be noted that the problem considered here, again for a single crack in the absence of tangential forces in the contact zone, was previously studied in [14].

2. Formulation of the problem and derivation of basic equations

Assume that an infinite elastic plate with the elastic modulus E, the Poisson's ratio ν and the height h, referred to a rectangular coordinate system Oxy, has a crack (mathematical cut) on the horizontal axis along the segment $[-a,a]$. Let normal forces of intensity $p_+(x)$ $\left(p_+(-x)=p_+(x)\right)$, act on the upper (+) edge of the crack, the tangential forces be equal to zero, a rigid thin inclusion be indented into the crack lower edge (-) along its central part $[-b,b](b<a)$ under the action of the centrally vertical force, P. The contacting surface of inclusion is described by the equation $y=f(x)$, where $f(x)>0$, $f(-x)=f(x)$ and $\max f(x)\ll b(-b\le x\le b)$. This can be, in particular, the

central part of the half-ellipse, which is strongly oblate in the vertical direction $y=f(x)=d-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-x^2}$ $(d \ll c; -b \le x \le b; b<c<a)$ or a strip of constant height δ, i.e. $f(x)=\delta$ $(\delta \ll b, -b \le x \le b)$. In addition, we assume that the plate at infinity is stretched in the vertical direction perpendicular to the crack line by uniformly distributed forces of intensity p.

Assuming that the plate is in a generalized plane stress state, and that along a segment $[-b,b]$ of the lower crack edge the inclusion is bonded to the plate (i.e., adhesion forces act in the contact zone), it is required to determine: the tangential and normal contact stresses, $\tau_-(x)$ and $p_-(x)(-b \le x \le b)$, respectively; the density of dislocations on the crack edges; the opening of the crack; breaking tangential $\tau(x)$ and normal $\sigma(x)$ stresses outside the crack on its line of extension, i.e. for $|x|>a$ and $y=0$; the SIF and J – integral. The functions $\tau_-(x)$ and $p_-(x)$ satisfy the adhesion condition $|\tau_-(x)/p_-(x)|<\rho(-b<x<b)$, where ρ is the coefficient of dry friction between contact bodies.

To derive the basic equations of the posed problem, we divide the infinite plate along the horizontal axis Ox into the upper $(+)$ and lower $(-)$ elastic half-planes and introduce the following notations

$$\sigma_y\big|_{y=\pm 0}=-\sum\nolimits_{\pm}(x)=\begin{cases}-p_{\pm}(x)-p & (|x|<a);\\ -\sigma(x) & (|x|>a);\end{cases} \quad \tau_{xy}\big|_{y=\pm o}=-T_{\pm}(x)=\begin{cases}-\tau_{\pm}(x) & (|x|<a);\\ -\tau(x) & (|x|>a),\end{cases}$$

where σ_y and τ_{xy}, are, respectively, the normal and tangential stresses in the plate, referred to the unit of its height h, $\tau_+(x)\equiv 0$ when $|x|<a$, and $\tau_-(x)=p_-(x)\equiv 0$ when $b<|x|<a$. Further proceeding from complex potentials for the case of presence of concentrated forces on the boundary of the elastic half-plane [10, p.343] and from the linear superposition principle, we get the following expressions for complex combinations of derivatives of boundary point horizontal $(u_{\pm}(x))$ and vertical $(v_{\pm}(x))$ displacements corresponding to the upper and lower elastic half-planes:

$$w_{\pm}(x)=u'_{\pm}(x)+iv'_{\pm}(x)=\vartheta_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Omega_{\pm}(s)\,ds}{s-x}+2i\vartheta_2\Omega_{\pm}(x)-Q \quad (-\infty<x<\infty) \tag{1}$$

$$\Omega_{\pm}(x)=T_{\pm}(x)+i\sum\nolimits_{\pm}(x);\ Q=\nu p/E;\ \vartheta_1=2/\pi E;\ \ \vartheta_2=(1-\nu)/2E.$$

Now in (1) we introduce the functions

$$w(x)=\left[w_+(x)+w_-(x)\right]/2; \qquad \Phi(x)=\left[w_+(x)-w_-(x)\right]/2;$$

$$\Omega(x)=\left[\Omega_+(x)+\Omega_-(x)\right]/2; \qquad \mathrm{X}(x)=\left[\Omega_+(x)-\Omega_-(x)\right]/2$$

and note that due to the continuity of stresses and displacements outside the crack, i.e. for $|x|>a$ and $y=0$, $\Phi(x)=\mathrm{X}(x)\equiv 0$. After introducing these functions into Eq. (1), we apply the integral Fourier transform with respect to the variable x and get the system of linear algebraic equations. We express the Fourier images of functions $w(x)$ and $\Omega(x)$ from this system in terms the Fourier images of the remaining functions $\Phi(x)$ and $\mathrm{X}(x)$. Next, we apply the Fourier inversion formula and use the inversion formula for a SIE with a Cauchy kernel on a finite interval. As a result, after simple transformations and using the contact condition of the inclusion with the elastic matrix, we arrive at following governing SIE of posed problem with respect to the complex combination of unknown contact stresses under the inclusion in the dimensionless form:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-k}^{k}\frac{\omega(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}-2i\nu_0\omega(\xi)+\frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\,\omega(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}=g(\xi) \quad (-k<\xi<k); \tag{2}$$

$$g(\xi)=\frac{\nu_0\left(P_0-P_0^+\right)+2i\pi p_0\xi}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}-p_0-if'(a\xi)+\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(\eta+\xi)\,p_+^0(\eta)\,d\eta}{\sqrt{1-\xi^2}\left(\sqrt{1-\eta^2}+\sqrt{1-\xi^2}\right)}\ \left(\nu_0=(1-\nu)/2\right).$$

Here we introduced dimensionless quantities

$$\xi=x/a,\ \eta=s/a;\quad \omega(\xi)=\tau(\xi)+ip(\xi);\tau(\xi)=\tau_-(a\xi)/E,\quad p(\xi)=p_-(a\xi)/E;$$

$$p_+^0(\xi)=p_+(a\xi)/E;\ p_0=p/E;\ P_0=P/aE;\quad P_0^+=P^+/aE;\quad k=b/a,$$

where P_0^+ is the resultant of normal forces $p_+^0(x)$. Note that the solution of SIE (2) must satisfy the inclusion equilibrium condition

$$\int_{-k}^{k}\omega(\xi)d\xi=iP_0. \tag{3}$$

Now the main characteristics of the problem can be expressed in terms the solution of the governing SIE (2)-(3). Specifically, for the density of dislocations on the crack edges $\varphi_0(\xi)=\varphi(x)=\varphi(a\xi)$, we get

$$\varphi_0(\xi)=\frac{1}{\pi E\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\,\omega(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}-i\nu_0\omega(\xi)-\nu_0 p_+^0(\xi)-\frac{\nu_0\left(P_0-P_0^+\right)+2i\pi p_0\xi}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}+$$
$$+\frac{i}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\,p_+^0(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}\quad(-1<\xi<1). \tag{4}$$

For dimensionless crack opening $\Psi_0(\xi)=\Psi(a\xi)/a$, we have

$$\Psi_0(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-k}^{k}K(\xi,\eta)\omega(\eta)\,d\eta+\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}K(\xi,\eta)p_+^0(\eta)\,d\eta-i\nu_0\int_{-k}^{k}\operatorname{sign}(\xi-\eta)\omega(\eta)\,d\eta-$$
$$-\nu_0\int_{-1}^{1}\operatorname{sign}(\xi-\eta)p_+^0(\eta)\,d\eta-\frac{2\nu_0}{\pi}\left(P_0-P_0^+\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\xi\right)+4ip_0\sqrt{1-\xi^2}\ \left(|\xi|\le 1\right); \tag{5}$$

$$K(\xi,\eta)=\ln\frac{1-\xi\eta+\sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)}}{1-\xi\eta-\sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right)}}.$$

For dimensionless breaking stresses $\tau_0(\xi)=\tau(a\xi)/E$ and $\sigma_0(\xi)=\sigma(a\xi)/E$, we get:

$$\tau_0(\xi)+i\sigma_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}\left[\frac{\operatorname{sign}\xi}{2\pi}\int_{-k}^{k}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\,\omega(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}+\frac{i\operatorname{sign}\xi}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta^2}\,p_+^0(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}-\right.$$
$$\left.-\frac{\nu_0\left(P_0-P_+^0\right)}{2\pi}\operatorname{sign}\xi-\frac{ip_0}{|\xi|+\sqrt{\xi^2-1}}+\frac{\nu_0}{2\pi}\sqrt{\xi^2-1}\int_{-1}^{1}\frac{p_+^0(\eta)\,d\eta}{\eta-\xi}\right]\quad\left(|\xi|>1\right). \tag{6}$$

The dimensionless SIFs are defined as

$$\bar K_{II}^{\pm}+i\bar K_I^{\pm}=\int_{-k}^{k}\sqrt{\frac{1\pm\eta}{1\mp\eta}}\ \omega(\eta)\,d\eta+i\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\pm\eta}{1\mp\eta}}\ p_+^{(0)}(\eta)\,d\eta\pm\nu_0\left(P_0-P_0^+\right)+2\pi ip_0 \tag{7}$$

$$\bar K_I^{\pm}=\frac{2\sqrt{\pi}}{E\sqrt{a}}K_I^{\pm};\quad \bar K_{II}^{\pm}=\frac{2\sqrt{\pi}}{E\sqrt{a}}K_{II}^{\pm}$$

Finally, the expressions of J - integrals (the rates of release of the elastic body potential energy during the propagation of a crack) in dimensionless form are given as

$$J_{\pm}^{0}=\left(\bar{K}_{I}^{\pm}\right)^{2}+\left(\bar{K}_{II}^{\pm}\right)^{2};\quad J_{\pm}^{0}=\frac{4\pi J}{aE}. \tag{8}$$

3. The numerical-analytical solution of the governing SIE (2)-(3)

In order to apply the above-mentioned numerical-analytical method for solving SIE to (2) - (3), we write them in standard form. For this purpose, we put

$$\xi=kt,\quad \eta=ku;\ \nu_0=\operatorname{th}(\pi\mu)\ \left(\mu=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{3-\nu}{1+\nu}\right)$$

and transform SIE (2) into

$$\begin{gathered}-i\operatorname{th}(\pi\mu)\omega_0(t)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\omega_0(u)\,du}{u-t}-\frac{k^2}{2\pi}\int_{-1}^{1}K_0(t,u)\omega_0(u)\,du=g_0(t)\quad(-1<t<1);\\ \omega_0(t)=\omega(kt),\ g_0(t)=\frac{1}{2}g(kt),\ K_0(t,u)=\frac{u+t}{\sqrt{1-k^2t^2}\left(\sqrt{1-k^2t^2}+\sqrt{1-k^2u^2}\right)}\ (-1<u,t<1)\end{gathered} \tag{9}$$

and condition (3) – into

$$\int_{-1}^{1}\omega_0(t)dt=iP_0/k. \tag{10}$$

The solution of SIE (9) can be represented [10] in the form $\omega_0(t)=(1-t)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(1+t)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,\mathrm{X}_0(t)$, where $\mathrm{X}_0(t)$ is the function of the Hölder class on an interval. We separate the oscillation part of the solution

$$\begin{gathered}\omega_0(t)=\varphi_\mu(t)\mathrm{X}_0(t)=\left[\mathrm{X}_0(t)-At-B\right]\varphi_\mu(t)+\\ +(At+B)\varphi_\mu(t);\ \varphi_\mu(t)=(1-t)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(1+t)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\ \ (|t|<1),\end{gathered} \tag{11}$$

where constants A and B are:

$$A=\left[\mathrm{X}_0(1)-\mathrm{X}_0(-1)\right]/2,\quad B=\left[\mathrm{X}_0(1)+\mathrm{X}_0(-1)\right]/2.$$

Further assuming

$$\varphi_0^*(t)=\mathrm{X}_0(t)-At-B\quad\left(\varphi_0^*(\pm1)=0\right);\ \psi_0(t)=\varphi_0^*(t)(1-t)^{-i\mu}(1+t)^{i\mu}\quad(-1<t<1),$$

and following the procedure of the above-mentioned numerical-analytical method for solving SIE, we reduce (9)-(10) to the following system of linear algebraic equations (SLAE):

$$\begin{cases}-i\operatorname{th}(\pi\mu)\psi_0(t_r)+\sum\limits_{m=1}^{M}\dfrac{\sqrt{1-t_r^2}}{M}\left[\dfrac{1}{u_m-t_r}-\dfrac{k^2}{2}K_0(t_r,u_m)\right]\psi_0(u_m)=\\ \qquad=\sqrt{1-t_r^2}\left[g_0(t_r)+Ah_1(t_r)+Bh_2(t_r)\right]\ \left(r=\overline{1,M-1}\right);\\ \sum\limits_{m=1}^{M}\dfrac{\pi}{M}\psi(u_m)=\dfrac{iP_0}{k}-\dfrac{2\pi i\mu}{\operatorname{ch}(\pi\mu)}A-\dfrac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\mu)}B\end{cases} \tag{12}$$

$$u_m=\cos\left[\frac{(2m-1)\pi}{2M}\right]\left(m=\overline{1,M}\right);\ t_r=\cos\left(\frac{\pi r}{M}\right)\ \left(r=\overline{1,M-1}\right),$$

where $g_0(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ and $K_0(t,u)$ are known functions, M is any natural number, u_m and t_r are Chebyshev nodes, i.e., roots of Chebyshev polynomials of the first kind $T_M(u)$ and of the second kind $U_{M-1}(t)$, respectively.

The values of $\psi_0(t_r)$ are determined from the Lagrange interpolation polynomial at Chebyshev nodes, which gives the best approximation of function $\psi(t)$ [15, p.596]. Now all the characteristics of the problem (4) - (8) with the help of Gaussian quadrature formulas at the Chebyshev nodes can easily be expressed in terms of the SLAE solution (12).

In the conclusion of the section, we again turn to the first integrals in the formulas for SIF (7) and, in accordance with (11), we represent $\omega_0(t)$ in the form

$$\omega_0(t)=\frac{\Omega_0(t)}{\sqrt{1-t^2}},\quad \Omega_0(t)=\mathrm{X}_0(t)(1-t)^{-i\mu}(1+t)^{i\mu}\quad (-1<t<1).$$

Then we write these integrals in the form

$$G_{\pm}(k)=k\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\pm ku}{1\mp ku}}\,\frac{\Omega_0(u)\,du}{\sqrt{1-u^2}}\qquad \left(\Omega_0(\pm 1)\neq 0\right)$$

and pass to the limit $k\to 1$. It is evident that $\lim\limits_{k\to 1}G_{\pm}(k)=\infty$.

4. **Conclusion** An effective analytical solution to the mixed boundary-value problem concerning the interaction of inclusion- and crack- type stress concentrators in an infinite elastic plate under conditions of incomplete contact is presented. The resulting formulas are suitable for numerical implementation and offer valuable insight into the fracture mechanics of such systems. It is shown that as the endpoints of the inclusion closely approach the crack tips, the stress intensity factors and J -integrals grow without bound, indicating conditions conducive to crack initiation and unstable propagation.

REFERENCES

1. Selvadurai, A.P.S., and Singh, B.M.: On the expansion of a penny-shaped crack by a rigid circular disc inclusion, International Journal of Fracture, 1984, 25, pp. 69-77
2. Hwu, C., Liang,Y.K., Yen, W.I.: Interaction between and various types of cracks, International Journal of Fracture, 1995, 79(4), pp. 301-323
3. Berezhnitsky, L.T. and Stashchuk, N.G.: On the develop-ment of cracks in the vicinity of the top of a rigid inclusion, Doklady of the USSR Academy of Sciences, Series A, 1981, 29-33.(in Russian)
4. Berezhnitsky, L.T. and Stashchuk, N.G.: The stress intensity coefficients near the crack on the continuation of a linear rigid inclusion, Doklady of the USSR Academy of Sciences, Series A, 1981, pp.49-52. (in Russian)
5. Hakobyan, V.N.: Stress concentration near defects in homogeneous and compound bodies. LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2011
6. Cherepanov, G.P.: Mechanics of Brittle Fracture. Nauka, Moscow, 1974. (in Russian)
7. Cherepanov, G.P.: Mechanics of Fracture of composite materials, Nauka, M., 1983. (in Russian)
8. Murakami, Y.: Stress Intensity Factors, Handbook, V.1, V.2. Pergamon Press, Oxford, 1987
9. Savruk, M. P.: Stress Intensity Factors for the Bodies with Cracks. Handbook in 4 volumes. V.2, Nauka Dumka, Kiev, 1988. (in Russian)
10. Muskhelishvili, N. I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Nauka, Moskow, 1966. (in Russian)
11. Sherman, D.I.: Mixed problem of potential theory and elasticity theory for a plane with a finite number of rectilinear cuts, Dokl. AN SSR, 1940, XXVII, 4, pp. 330-334
12. Erdogan, F.E., Gupta, G.D. and Cook, T.S.: The Numerical Solutions of Singular Integral Equations. In: Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. Noordhoff Intern. Publ. Leyden, 1973, pp. 368-425
13. Theocaris, P.S. and Loakimidis, N.I.: (1977), Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations, Quart. Appl. Math.,1977, XXXV, 1, pp.173-185
14. Bardzokas, D.I., Mkhitaryan, S.M.: (2007). About an Interaction of Stress Concentrators Various Types. Topical Problems of Continuum Mechanics. Proc. of Int. Conference dedicated to the 95th Anniversary of Acad. N.Kh. Harutyunyan. Yerevan, 2007
15. Korn, G. and Korn, T.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).

Information about authors

Kanetsyan E.G. – PhD in Phys. and Math., Senior scientific researcher, Institute of Mechanics of NAS RA, (374 93) 46 15 88; E-mail: ekanetsyan@gmail.com

Mkrtchyan M.S. – PhD in Phys. and Math., Leading researcher, Institute of Mechanics of NAS RA, (374 98) 80 19 56 E-mail: muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

HIGH ORDER ASYMPTOTIC MODEL OF A PROPULSIVE MOTION OF AN OSCILLATING CYLINDRICAL BODY IN FLUID

Nuriev A.N., Anisimov V.D.

The paper examines the hydrodynamics of the propulsive motion of a cylindrical body undergoing translational-rotational oscillations in a viscous incompressible fluid. Using an asymptotic approach under the assumption of small translational oscillation amplitudes, an approximate solution to the problem is constructed, retaining four terms of the expansion. The obtained solution allows determining the dependencies of the cruising speed of the body's motion and the unsteady forces acting on it on all four parameters of the problem: dimensionless frequency, amplitudes of translational and rotational oscillations, and the phase shift. The applicability of the results is investigated by comparing them with known experimental and direct numerical simulation data.

Introduction

The theory of propulsive oscillatory motion of bodies in a flow began to develop in the early 20th century based on ideal fluid theory. Classical models describing the oscillatory motion of a body in a flow require additional assumptions—such as flow separation points or the structure of the vortex wake. These assumptions can be entirely avoided by describing hydrodynamics using the full Navier-Stokes equations. Direct numerical methods for solving the Navier-Stokes equations involve high computational complexity, which significantly limits research of unsteady propulsive motion — even in a two-dimensional approximation — due to the large number of governing parameters. In the special case of small oscillation amplitudes, approximate asymptotic approaches serve as a useful alternative to direct numerical methods, sometimes even permitting analytical solutions. In the studies by A.N. Nuriev [1], A.N. Nuriev and A.G. Egorov [2, 3], and A.N. Nuriev, A.G. Egorov, O.S. Zaitseva, and A.M. Kamalutdinov [4], analytical approximate solutions of the Navier-Stokes equations were first obtained within an asymptotic approach, describing the propulsive characteristics of a flapping circular cylindrical wing under small-amplitude oscillations. This paper further develops this approach.

Problem statement and solution

The plane-parallel motion of a circular cylindrical body of radius a, performing synchronous translational and rotational harmonic oscillations with frequency ω in a viscous incompressible fluid, is considered. The translational oscillations are assumed to occur with amplitude A along the x-axis of the Cartesian coordinate system (x, y), and the rotational oscillations occur around the cylinder axis with amplitude θ. The mathematical formulation of the problem is written in a moving polar coordinate system that translates with the center of the cylinder using dimensionless variables. Spatial coordinates r, t, and velocity u are normalized by a, ω^{-1}, $U = A\omega$. The governing hydrodynamic equations are expressed in terms of vorticity w and stream function ψ as:

$$1 < r < \infty: \qquad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\kappa}{r}\frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} - \beta^{-1}\Delta w = 0, \quad w = \Delta\psi,$$

$$\frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial r},$$

where Δ is the Laplace operator, κ is the dimensionless amplitude of translational oscillations: $\kappa = \frac{A}{a}$.

The boundary conditions are written as

$$r = 1: \psi = 0, \frac{\partial\psi}{\partial r} = \Theta\kappa^{-1}\cos t, \quad r \to \infty: \psi \sim -\mathrm{Re}\left[e^{i\theta} \sum_{k=-1}^{1} a_k e^{ikt} \right] r.$$

The solution to the problem is constructed as an asymptotic expansion of the unknowns ψ and w in powers of κ, retaining the first four terms

$$\psi = \kappa^{-1}\psi^{(-1)} + \psi^{(0)} + \kappa\psi^{(1)} + \kappa^2\psi^{(2)} + \ldots,$$
$$w = \kappa^{-1}w^{(-1)} + w^{(0)} + \kappa w^{(1)} + \kappa^2 w^{(2)} + \ldots$$

The first term $O(\kappa^{-1})$ allows determining the initial contributions to the torque acting on the cylinder and the rotational dissipation. At the second term $O(\kappa^0)$, the initial contribution to the energy dissipation for translational oscillations and the cruising speed u_∞^1 are determined. For u_∞^1 the following approximation is constructed:

$$u_\infty^1 = u_\infty^{1,1}(\beta)\Theta + u_\infty^{1,3}(\beta)\Theta^3 + u_\infty^{1,5}(\beta)\Theta^5 + \ldots,$$

$$k>1: \quad u_\infty^{1,k} = c_0^k \frac{\beta + c_1^k\sqrt{\beta}}{\beta + c_2^k\sqrt{\beta} + c_3^k\sqrt{\beta}}, \; u_\infty^{1,k} = u_{\infty,c}^k \cos\varphi + u_{\infty,s}^k \sin\varphi.$$

The third term $O(\kappa^1)$ allows determining the correction to rotational dissipation. Additionally, the solution at this term shows that the stationary force acting on the cylinder can be considered zero only up to terms of order $O(\kappa^2)$.

The problem for the fourth term $O(\kappa^2)$ of the asymptotic expansion takes the form:

$$\frac{\partial}{\partial t} w^{(2)} - \frac{\Theta}{r}\mathcal{M}\left(\beta\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\theta}, \frac{\partial w^{(2)}}{\partial\theta}\right) - \beta^{-1}\Delta w^{(2)} = G^{(2)}, \quad w^{(2)} = \Delta\psi^{(2)}.$$

The presence of the first and third azimuthal harmonics in G_2 determines the following structure of the solution:

$$\psi^{(2)} = \mathrm{Re}\left(e^{3i\theta}\Psi^{(2,3)}(r,t) + e^{i\theta}\Psi^{(2,1)}(r,t)\right),$$
$$w^{(2)} = \beta\mathrm{Re}\left(e^{3i\theta}W^{(2,3)}(r,t) + e^{i\theta}W^{(2,1)}(r,t)\right).$$

The results are obtained for the first azimuthal harmonic of the solution $\Psi^{(2,1)}$, $W^{(2,1)}$. The problem for it is written as follows after expansion into temporal harmonics:

$$ikW_k^{(2,1)} - \frac{i\Theta}{r}\left[\Phi W_{k-1}^{(2,1)} + \bar{\Phi}W_{k+1}^{(2,1)} + i\bar{\Phi}\Psi_{k+1}^{(2,1)} - i\Phi\Psi_{k-1}^{(2,1)}\right] -$$
$$-\beta^{-1}\mathcal{L}_1 W_k^{(2,1)} = \frac{1}{2r}G_k^{(2,1)}, \quad W_k^{(2,1)} = \beta^{-1}\mathcal{L}_1\Psi_k^{(2,1)}.$$

It is shown that the general solution for the zero temporal harmonic at $r \gg 1$ has the form

$$W_0^{(2,1)} = -\frac{qb_0}{r^3} + \frac{p}{r} + c^{(2)}r + exp, \quad \Psi_0^{(2,1)} = \frac{qb_0}{2r}\ln r + \frac{pr}{2}\ln r + a^{(2)}r + \frac{b^{(2)}}{r} + exp.$$

In the paper, the solution of this stationary subproblem is numerically constructed for the case where $p=0$ (i.e., when the flow does not contain a logarithmic singularity at infinity). This solution allows determining the correction of order of O(κ^2) to the cruising speed $\kappa^2 u_\infty^2 = -\kappa^2 a^{(2)}$.

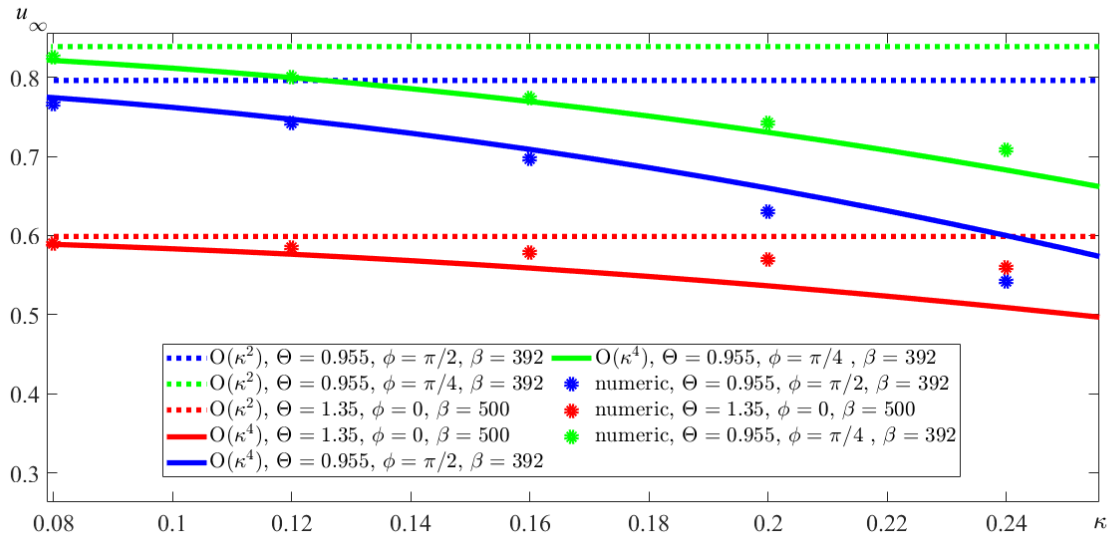


Fig. 1 — Changes in cruising speed depending on the dimensionless amplitude of translational oscillations κ.

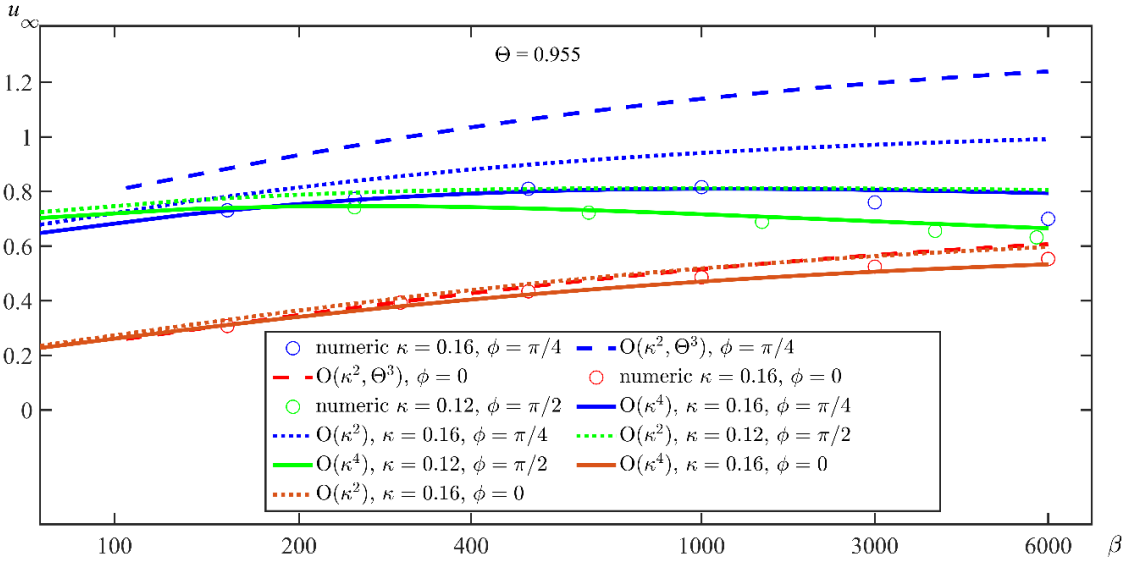


Fig. 2 — Changes in cruising speed depending on the dimensionless oscillation frequency β.

The results presented in Figs. 1–2 show that the constructed asymptotic expansion for the cruising speed agrees well with the results of direct numerical simulations over a wide range of parameters β, θ, κ. The most noticeable correction to the basic linear approximation is obtained for the case $\varphi = \pi/2$. For example, at $\beta = 6000$, $\varphi = \pi/2$, the cruising speed in the $O(\kappa^2, \theta^3)$ approximation is determined with an error of over 70%, in the approximation of order $O(\kappa^2)$ the error is over 40%, and in the approximation of order $O(\kappa^4)$ the error is less than 14%. At the same time, for the case of in-phase oscillations at $\varphi = 0$, the differences between the various approximations and numerical data are less significant.

Conclusion

The obtained solution significantly expands the applicability of the asymptotic theory of propulsive motion of a cylindrical body in a fluid. Within the framework of the four-term expansion, the correction to the cruising speed u_∞ of order $O(\kappa^2)$ was found for the first time, thus determining the nonlinear dependence of the speed on all four parameters of the problem: dimensionless frequency β, amplitudes of translational κ and rotational θ oscillations, and the phase shift φ.

REFERENCE

1. Нуриев, А. Н. Колебательное движение удлиненных тел в вязкой жидкости: дис. док. физ.-мат. наук: 1.1.9 / А. Н. Нуриев. — Казань, 2023. 258 с.
2. Nuriev, A. N. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section / A. N. Nuriev, A. G. Egorov // Journal of Fluid Mechanics. 2022. Vol. 941. A23.
3. Egorov, A. Cruising Speed of a Cylindrical Wing Performing Small Translational-Rotational Oscillations / A. Egorov, A. Nuriev // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko Matematicheskie Nauki. 2022. Sept Vol. 164. P. 170—180.
4. Nuriev, A. Asymptotic Study of the Aerohydrodynamics of a Flapping Cylindrical Wing in the High-Frequency Approximation / A. Nuriev [et al.] // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Nov. Vol. 43. P. 2250—2256.

Information about authors

Artem Nuriev – Doctor of Science, Professor, Kazan (Volga region) Federal University, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, E-mail nuriev_an@mail.ru

Vadim Anisimov – PhD, Assistant professor, Kazan (Volga region) Federal University, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, E-mail anvad96@bk.ru

MODELING THE THIRD DIMENSION: QUATERNION TECHNIQUES IN MECHANICS AND FLOW DYNAMICS

Orelma H.

This text provides an introductory overview of quaternionic analysis and its applications in mathematical physics. Quaternions extend complex numbers to four dimensions and allow for the definition of *monogenic functions*, which generalize the notion of analyticity to higher-dimensional spaces. The Dirac operator plays a central role in this theory, acting as a generalization of the gradient and enabling the factorization of the Laplace operator. The decomposition of the Dirac operator reveals its connection to classical vector calculus operations, such as divergence and curl. Applications of monogenic functions are illustrated in the context of three-dimensional fluid flow and linear elasticity. In both cases, quaternion-valued potentials satisfying a generalized Cauchy–Riemann system provide compact formulations of fundamental equations. This demonstrates the potential of quaternionic methods as a natural extension of complex analysis to three-dimensional physical problems.

1. Introduction

Quaternions constitute a four-dimensional, non-commutative algebraic system. Although the French mathematician *Olinde Rodrigues* discovered them in 1840, the credit is commonly given to *William Rowan Hamilton*, who formally defined quaternions in 1843; see [1] for further details.

As quaternions form a number system analogous to the complex numbers, a natural progression was to explore an associated function theory. The first work to introduce a class of functions analogous to those in complex analysis was a 1931 article by Romanian mathematicians *Grigore Moisil* and *Nicolae Theodorescu* [2]. Despite these earlier contributions, it was the Swiss mathematician *Rudolf Fueter* who formally defined *quaternionic regular functions* in his paper [3]. The functions introduced by these authors are commonly referred to as either *regular* or *monogenic*.

Today, quaternionic function theory is a well-developed field. Just as complex numbers are used in the analysis of two-dimensional domains, quaternions find applications in physical problems involving three-dimensional space. This short text provides only a brief introduction to this rich area of mathematics and includes references for readers interested in further study.

2. Quaternions

Complex numbers $\mathbb{C}$ form a two-dimensional number system consisting of numbers of the form
$z = x + yi,$
where the imaginary unit i satisfies the condition $i^2 = -1$. Geometrically, complex numbers can be identified with the points (x, y) in the plane $\mathbb{R}^2$, and thus they provide a convenient way to model two-dimensional physical problems.

Quaternions $\mathbb{H}$, in turn, are a four-dimensional generalization of complex numbers, with elements of the form
$q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k.$

Quaternions include three imaginary units that satisfy the multiplication rules
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$

Quaternion multiplication is associative but non-commutative, meaning that $(q_1 q_2)q_3 = (q_1 q_2)q_3$ but $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$, for $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$. The identity element of the quaternion algebra is 1, and thus we obtain the multiplication table for the basis elements as follows:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

From the multiplication table, it can be seen that the basis vectors anticommute with each other, that is,
$ij = -ji, \quad ik = -ki, \quad \text{and}, \quad jk = -kj.$

A quaternion $x \in \mathbb{H}$ is commonly written in the form
$x = x_0 + \mathbf{x}$

where x_0 is called the *real part* of the quaternion, and $\mathbf{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ is its *vector part.* Using the above form, the *quaternion conjugate* can be defined as
$\bar{x} = x_0 - \mathbf{x}$.

Quaternion conjugation is an anti-automorphism, satisfying $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$ for all $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Using the conjugate, a quadratic form can be defined by setting
$|x|^2 = x\bar{x} = \bar{x}x = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

For every nonzero quaternion x, an inverse element can be defined by setting

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}.$$

which satisfies $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$.

A substantial amount of literature on quaternions is available. Beyond the references cited in the previous section, the theory may also be studied from an introductory textbook, such as [4].

How can the three-dimensional space $\mathbb{R}^3$ be embedded into the quaternions?

To address physical problems, we need to resolve this question. There are two commonly used approaches. *The first approach* is to interpret the vector part **x** of a quaternion as corresponding to a point (x_1, x_2, x_3) in three-dimensional space. *The second approach* involves the use of so-called *reduced quaternions*, which are of the form

$\tilde{x} = x_0 + x_1 i + x_2 j,$

and are identified with the points (x_0, x_1, x_2) in three-dimensional space. Reduced quaternions are essentially complex numbers augmented with an additional imaginary unit.

3. Monogenic functions

Complex analytic functions are characterized as the solutions of the equation $(\partial_x + i\partial_y)f(z) = 0$, where f is a differentiable complex valued function defined on some open subset of the complex plane. An analogous procedure is used in the context of quaternions.

Let $U \subset \mathbb{R}^3$ be an open set, where $\mathbb{R}^3$ is considered as described above. We consider differentiable functions $f: U \to \mathbb{H}$, that is,

$$f = f_0 + f_1 i + f_2 j + f_3 k.$$

In quaternionic analysis, the counterparts of complex analytic functions are called either *regular* or *monogenic* functions. The definition depends on how $\mathbb{R}^3$ is embedded. In the first approach, monogenicity is defined by requiring that
$D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) := (i\partial_{x_1} + j\partial_{x_2} + k\partial_{x_3})f(\mathbf{x}) = 0,$
while in the second approach, monogenicity is defined via the condition
$D_{\tilde{x}} f(\tilde{x}) := (\partial_{x_0} + i\partial_{x_1} + j\partial_{x_2})f(\tilde{x}) = 0.$

The operator $D_{\mathbf{x}}$ is called the *Dirac operator*, and the operator $D_{\tilde{x}}$ is called the *Cauchy–Riemann operator*. The *Laplace operator* can be factorized using the Dirac operator in such a way that
$D_{\mathbf{x}}^2 = -\Delta_{\mathbf{x}},$
where
$\Delta_{\mathbf{x}} := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2.$

It is observed that the Dirac operator corresponds exactly to the gradient when acting on real-valued functions. On the other hand, the Dirac operator can also act on quaternion-valued functions, in which case the operations between the basis elements are carried out in the quaternion algebra. In many texts, the Dirac operator is denoted by ∇. Moreover, when applied to a vector-valued function $\mathbf{f} = f_1 i + f_2 j + f_3 k$, the Dirac operator decomposes into the sum of the divergence and the rotor as follows
$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f} = -D_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} + D_{\mathbf{x}} \times \mathbf{f},$
where

$$D_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

and

$$D_{\mathbf{x}} \times \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) i + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) j + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) k.$$

The monogenicity of quaternion-valued functions differs notably from complex analyticity in that powers of the variables are not monogenic. Otherwise, the theory can be developed in much the same way, although the anticommutativity introduces its own challenges.

There is extensive literature on quaternionic analysis that explains the fundamental concept of monogenicity. At this point, we refer the reader to sources [4–8].

4. Monogenic flow potentials

Let us consider a two-dimensional flow with a velocity vector field given by $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Assume that the flow is source-free and irrotational, and that ϕ is the velocity potential of the flow. The two-dimensional stream function ψ is defined as a function that fulfills the conditions

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \text{and} \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

The velocity potential ϕ and the stream function ψ together form an analytic complex potential $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, where $z = x + yi$. The function f is analytic and a potential function, i.e., $v_1 + v_2 i = \overline{f'(z)}$.

In the three-dimensional case, an analogous approach can be applied; however, instead of one stream function, three are needed. Let us consider a three-dimensional flow with a velocity vector field given by Consider a three-dimensional irrotational and source-free flow, with a velocity vector field given by $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ and a velocity potential ϕ. In this case, there exist three stream functions ψ_1, ψ_2, and ψ_3, with which the velocity components can be expressed as

$$v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z}, \quad and \quad v_3 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y}.$$

The velocity potential and the stream functions determine a quaternion-valued *monogenic flow potential*

$$w(\tilde{x}) = \phi(x, y, z) + \psi_1(x, y)i + \psi_2(x, z)j + \psi_3(y, z)k,$$

where $\tilde{x} = x + yi + zj$. As the name suggests, the function w is monogenic, that is, it satisfies the equation $D_{\tilde{x}} w = 0$, and it is a potential, meaning that

$$v_1 + v_2 i + v_3 j = \frac{1}{2} D_{\tilde{x}} \overline{w}.$$

It can be seen that in three-dimensional problems, the methods of quaternionic analysis can be applied in a manner analogous to complex analysis in planar problems. For more details on monogenic flow potentials, see [9].

5. Quaternions in three-dimensional elasticity

Let us consider linear elasticity theory and the homogeneous Lamé equation

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) = 0,$$

where $\vec{u}$ is the displacement vector. By utilizing the factorization property of the Dirac operator, and noting that it corresponds to the gradient when applied to a scalar-valued function, one obtains

$$D_{\mathbf{x}}(-\mu D_{\mathbf{x}} \vec{u} + (\lambda + \mu)(\nabla \cdot \vec{u})) = 0.$$

We observe that the function $f := -\mu D_{\mathbf{x}} \vec{u} + (\lambda + \mu)(\nabla \cdot \vec{u})$ is monogenic. By extracting the real and vector parts from the function $f = f_0 + \mathbf{f}$, we obtain

$$f_0 = (\lambda + 2\mu)(\nabla \cdot \vec{u}), \quad and \quad \mathbf{f} = -\mu \nabla \times \vec{u}.$$

By means of the previous equations, it is seen that the displacement field $\vec{u}$ can be expressed using monogenic functions. This, in turn, motivates the use of quaternionic analysis methods in the theory of linear elasticity.

Further information on the application of quaternionic methods in linear elasticity theory can be found in the research articles by Yuri M. Grigor'ev, such as [10,11]. See also article [12].

REFERENCE

1. Altmann S. L., Hamilton, Rodrigues and the quaternion scandal, Mathematics Magazine. Vol. 62, no. 5. (1989), 291–308.
2. Moisil G. C., Teodorescu N., Fonctions holomorphes dans l'espace, Mathematica (Cluj), 5, 142–150 (1931)
3. Fueter, R., Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen, Commentarii mathematici Helvetici 7 (1934/35): 307-330.
4. Gürlebeck, K., Habetha, K., Sprößig, W., Funktionentheorie in der Ebene und im Raum, Grundstud. Math., Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
5. Gürlebeck, K., Sprößig, W., Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems, Birkhäuser, Basel, 1990.
6. Бицадзе А.В., Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения, Изв. АН СССР. Сер. матем., 17:6 (1953), 525–538
7. Виноградов В.С., Об одном аналоге системы Коши–Римана в четырехмерном пространстве, Докл. АН СССР, 154:1 (1964), 16–19
8. Orelma H, Symmetries in quaternionic analysis, Mathematical Notes of NEFU, 29(1), pp. 88–102.
9. Orelma, H., Three-Dimensional Stream Functions and Monogenic Flow Potentials, to appear as a chapter in the book Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications.
10. Grigor'ev, Y.M., Three–dimensional quaternionic analogue of the Kolosov-Muskhelishvili formulae, Hypercomplex Analysis: New perspectives and applications, Trends in Mathematics, (Eds. S. Bernstein, U.Kaehler, I. Sabadini, F. Sommen), Birkhäuser, Basel, pp. 145-166, 2014.
11. Grigor'ev Y.M., Regular quaternionic polynomials and their properties, Complex Variables and Elliptic Equations, 62(9), pp. 1343-1363, 2017.
12. Legatiuk D., Orelma H., In memoriam of Yuri M. Grigor'ev: An overview of his research, to appear in AACA.

Information about the author

Heikki Orelma – Tampere Institute of Mathematics, Hepolamminkatu 51, 33720 Tampere, Finland
E-Mail: heikki.orelma@proton.me

ON STRESS SINGULARITIES IN AN ELASTICITY PROBLEM FOR A POROELASTIC WEDGE

Sargsyan A.M., Kanetsyan E.G.

An energy-based solution is constructed for the second homogeneous singular boundary-value problem for a poroelastic wedge with an arbitrary opening angle, under the assumption that displacement components vanish on the wedge boundaries. The approach is based on the asymptotic representations of solutions to the second boundary-value problem of elasticity theory in a wedge-shaped domain near the wedge tip. A local solution to the homogeneous problem is derived depending on the wedge opening angle and elastic constants. Various particular cases corresponding to specific wedge angles are discussed, and graphical illustrations are provided.

1. Introduction

One of the generalized models of elastic media is the Cowin–Nunziato theory of poroelasticity [1], which provides a refined description of the deformation processes in elastic porous materials. Porosity and deformation are coupled fields that exhibit a unified response to external loads.

Since the classical equations of elasticity theory break down near angular points of elastic bodies, it becomes necessary to study these regions separately in order to identify characteristic features of stress and strain behavior. The origins of such investigations trace back to the well-known work by M.L. Williams [2], and they have since been continued by many researchers, including in [3,4].

In [5], the first homogeneous singular boundary-value problem in the theory of poroelasticity was considered under the condition that elastic stresses are prescribed on the faces of the wedge.

In the present paper, the second homogeneous singular boundary-value problem of elasticity theory is investigated for a poroelastic wedge with an arbitrary opening angle.

2. Formulation of the problem and derivation of basic equations

If the displacements of the points of a poroelastic body $u_x(x,y)$ and $u_y(x,y)$ are taken as the primary unknowns, then their determination is governed by the following system of equations [6]:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+c^2\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\left(1-c^2\right)\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+H\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+c^2\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\left(1-c^2\right)\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}+H\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0,$$
$$\alpha\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)-\xi\Phi-\beta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=0, \tag{1}$$

where function $\Phi(x,y)$ describes changes in the volume fraction of pores, α is the void diffusion coefficient, β is the parameter of the relationship between micro and macro dilation properties, ξ is the void rigidity, λ_0 and μ_0 are Lame constants, $c^2=\mu_0/(\lambda_0+2\mu_0)$, $H=\beta/(\lambda_0+2\mu_0)$.

In addition to systems (1), the fundamental set of equations in the theory of poroelasticity also includes the kinematic relations between displacements and strains, as well as the generalized Hooke's law

$$\varepsilon_x=\partial u_x/\partial x,\qquad \varepsilon_y=\partial u_y/\partial y,\qquad \varepsilon_{xy}=\left(\partial u_y/\partial x+\partial u_x/\partial y\right)/2, \tag{2}$$

$$\frac{\sigma_x}{\lambda_0+2\mu_0}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\left(1-2c^2\right)\frac{\partial u_y}{\partial y}+H\Phi,$$
$$\frac{\sigma_y}{\lambda_0+2\mu_0}=\left(1-2c^2\right)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+H\Phi,\qquad \frac{\tau_{xy}}{\mu_0}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}. \tag{3}$$

These equations must be supplemented by boundary conditions on the body's surface, where either stresses and/or displacements are prescribed. Evidently, equations (1)– (3) also remain valid when $\beta=0$, in which case they reduce to the well-known equations of classical elasticity theory. In what follows, we first seek a fundamental solution to system (1) and then construct a solution satisfying the boundary conditions by superposing appropriate particular solutions corresponding to $\beta=0$.

To obtain a fundamental solution to the system of equations (1), we introduce, by analogy with thermoelasticity theory, the concept of a poroelastic displacement potential $\Psi(x,y)$. It is assumed that the displacements u_x and u_y can be expressed as

$$\bar{u}_x = \partial\Psi/\partial x,\ \bar{u}_y = \partial\Psi/\partial y. \tag{4}$$

Then, it follows from (1) that

$$\Delta\Psi = -H\Phi,\ \ \Delta\Phi - k_1\Phi = 0, \tag{5}$$

where Δ is the Laplace operator in Cartesian coordinate system, $k_1 = (\xi - H\beta)/\alpha > 0$ [7].

Thus, by introducing the poroelastic displacement potential, the associated poroelasticity problem is reduced to determining the function $\Phi(x,y)$ from the second equation of system (5). Once the function $\Phi(x,y)$ is obtained, the functions $\Psi(x,y)$ and the displacements $\bar{u}_x, \bar{u}_y$ can be determined.

Eqs (2) and (3) take the following form, respectively:

$$\bar{\varepsilon}_x = \partial^2\Psi/\partial x^2,\ \bar{\varepsilon}_y = \partial^2\Psi/\partial y^2,\ \bar{\varepsilon}_{xy} = \partial^2\Psi/\partial x\partial y, \tag{6}$$

$$\bar{\sigma}_x = -2\mu_0\partial^2\Psi/\partial y^2,\ \bar{\sigma}_y = -2\mu_0\,\partial^2\Psi/\partial x^2,\ \bar{\tau}_{xy} = 2\mu_0\partial^2\Psi/\partial x\partial y, \tag{7}$$

These solutions may only incidentally satisfy the prescribed values on the boundary of the poroelastic body, since expression (4) for $\bar{u}_x$ and $\bar{u}_y$ at $\beta = 0$ generally does not represent a general solution of the equations of elasticity theory. If the obtained solution does not satisfy the boundary conditions, it is supplemented with a solution of the elasticity equations at $\beta = 0$ in order to fulfill the prescribed boundary conditions.

Let us consider a specific problem. Suppose that the poroelastic wedge is in a state of plane strain. Assuming that zero displacements are prescribed on the portions of the boundary adjacent to the corner point—namely, on the cross-sections of the wedge $\varphi = 0$ and $\varphi = \varphi_1$—the boundary conditions can be written in the form

$$u_r(r,0) = u_\varphi(r,0) = 0, \tag{8}$$

$$u_r(r,\varphi_1) = u_\varphi(r,\varphi_1) = 0. \tag{9}$$

For the function $\Phi(x,y)$, we impose the following boundary conditions [6,7]:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1} = 0, \tag{10}$$

$$\Phi(r,0) = \Phi(r,\varphi_1) = 0, \tag{11}$$

$$\Phi(r,0) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1} = 0. \tag{12}$$

In the polar coordinate system, formulas (5) take the form

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + H\Phi = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - k_1\Phi = 0 \tag{14}$$

Representing the solution $\Phi(x,y)$ as

$$\Phi(r,\varphi) = \Phi_1(r)\Phi_2(\varphi) \tag{15}$$

and proceeding in the same manner as in [5], for the displacements we have the following formulas:

$$\bar{u}_r = -\chi(\lambda)\left(\tilde{A}\cos\left(\lambda^+\varphi_1\right)+\tilde{B}\sin\left(\lambda^+\varphi_1\right)\right)r^\lambda,\ \bar{u}_\varphi = \chi(\lambda)\left(-\tilde{A}\sin\left(\lambda^+\varphi_1\right)+\tilde{B}\cos\left(\lambda^+\varphi_1\right)\right)r^\lambda,$$
$$\chi(\lambda) = \frac{H}{k_1}\cdot\frac{k/2\lambda^-}{\Gamma(\lambda+2)}\lambda^+, \qquad \lambda^\pm = \lambda\pm 1, \tag{16}$$

where λ is a parameter that determines the degree of singularity of stresses in the vicinity of the wedge apex. From (16) it is evident that the corresponding stresses for $0<\mathrm{Re}\,\lambda<1$ at the wedge apex will have a singularity of the order $1-\mathrm{Re}\,\lambda$.

To satisfy the boundary conditions (8) – (12), we impose on $\bar{u}_r$, $\bar{u}_\varphi$ the solution of the elasticity theory solution $\tilde{u}_r, \tilde{u}_\varphi$, corresponding to $\beta = 0$ [2] ($u_r = \bar{u}_r + \tilde{u}_r$, $u_\varphi = \bar{u}_\varphi + \tilde{u}_\varphi$):

$$E\tilde{u}_r = r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+ s_\varphi^+ - B\lambda^+\nu^+ c_\varphi^+ + C(4-\lambda^+\nu^+)s_\varphi^- + D(4-\lambda^+\nu^+)c_\varphi^-\right],$$
$$E\tilde{u}_\varphi = r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+ c_\varphi^+ + B\lambda^+\nu^+ s_\varphi^+ - C(4+\lambda^-\nu^+)c_\varphi^- + D(4+\lambda^-\nu^+)s_\varphi^-\right],$$

where E and ν are the modulus of elasticity and Poisson's ratio of the wedge, $s_\varphi^\pm = \sin(\lambda\pm1)\varphi$, $c_\varphi^\pm = \cos(\lambda\pm1)\varphi$, $\nu^+ = \nu+1$.

By satisfying the boundary conditions (10), (8), (9); (11), (8), (9); and (12), (8), (9), we obtain a homogeneous system of linear algebraic equations for the unknown coefficients $A, B, C, D, \tilde{A}_2$, and $\tilde{B}_2$.

The conditions for the existence of a non-trivial solution to these systems leads to the equation $\Delta_6 = \Delta_2\cdot\Delta_4 = 0$.

From the conditions $\Delta_4 = 0$, follows the well-known Williams transcendental equation [2]

$$\kappa\sin^2\lambda\varphi_1 - \lambda^2\sin\varphi_1 = 0,\ \kappa = (3-4\nu)/(1+\nu). \tag{17}$$

From the condition $\Delta_2 = 0$, we have for λ:

1) in the case of boundary conditions (10), (11)

$$\lambda_n = n\pi/\varphi_1 - 1, \tag{18}$$

2) in the case of boundary conditions (12)

$$\lambda_m = (2m-1)\pi/2\varphi_1 - 1. \tag{19}$$

The requirement of finite elastic deformation energy in a small vicinity of the wedge apex (under a finite external load) imposes the condition $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ on the roots (17) - (19). This condition, depending on the wedge opening angle, limits the range of variation for the parameters n and m as follows:

for boundary conditions (10), (11)

a) $n = 2,3,4,...$ for $0<\varphi_1<2\pi$; b) $n = 1,2,3,...$ for $0<\varphi_1<\pi$; c) $n = 2,3,4,...$ for $\pi<\varphi_1<2\pi$;

for boundary condition (12)

a1) $m = 3,4,5,...$ for $0<\varphi_1<2\pi$; , b1) $m = 1,2,3,...$ for $0<\varphi_1<\pi/2$;

c1) $m = 2,3,4,...$ for $\pi/2<\varphi_1<3\pi/2$, d1) $m = 3,4,5,...$ for $3\pi/2<\varphi_1<2\pi$.

Figures 1a and 1b show graphs of roots (18) and (19) as a function of the wedge opening angle; at certain values of the angle φ_1, there are infinite stresses in the vicinity of the apex of the poroelastic wedge.

Thus, the stress behavior near the wedge apex should be investigated in different regions of variation of the wedge opening angle φ_1.

So, for case (a), the limiting opening angle of the wedge is $\varphi_1^* = \pi$. If $\varphi_1<\pi$, the stresses tend to zero as $r\to 0$ (the vicinity of the wedge apex is in a low-stress state [8]). In the case of $\varphi_1>\pi$, the

stresses exhibit a singularity (a local stress concentration field forms near the wedge apex [8]). The maximum order of the singularity varies within the range $0<1-\tilde{\lambda}_2<1.$

As $\varphi_1 \to 2\pi$, the maximum order of singularity can reach up to unity, i.e., up to the order of the stress singularity under a concentrated force. Such types of stress singularities arise in contact problems on the interaction of an elastic half-plane with two dissimilarly loaded absolutely rigid stamps or two pads loaded with horizontal forces that are absolutely rigid in tension and absolutely flexible in bending [9].

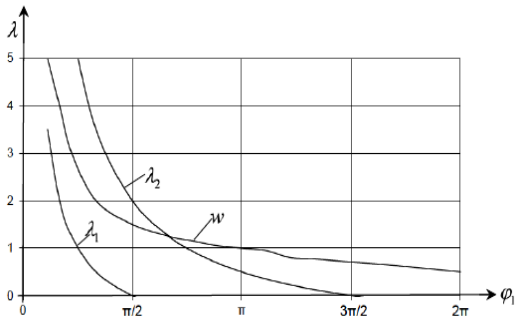


Fig.1a. Dependence of the parameter λ on the opening angle of the poroelastic wedge for boundary condition (10)

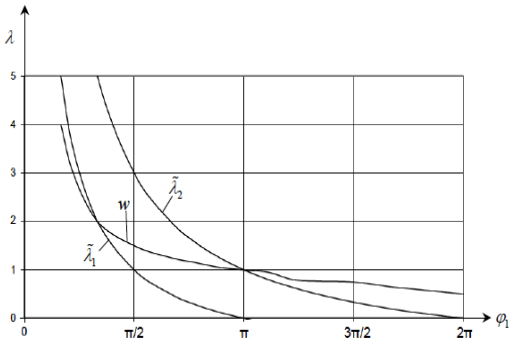


Fig.1b. Dependence of the parameter λ on the opening angle of the poroelastic wedge for boundary conditions (11), (12)

The graph of the real part of the first root of equation (17), which gives the maximum order of stress singularity $|\mathrm{Re}\,\lambda-1|$ (curve w), is provided for comparison. The intersection of these graphs with the line $\mathrm{Re}\,\lambda=1$ determines the limiting wedge opening angles, beyond which the stresses in the vicinity of the sector vertex tend to infinity (for larger angles) or to zero (for smaller angles).

So, for case a), the limiting angle of the wedge opening is $\varphi_1^*=\pi$. If $\varphi_1<\pi,$ the stresses tend to zero as $r\to 0$ (the vicinity of the wedge apex is in a low-stress state [8]). In the case of $\varphi_1>\pi,$ the stresses exhibit a singularity (a local stress concentration field forms near the wedge apex [8]). The maximum order of the singularity varies within the range $0<1-\tilde{\lambda}_2<1.$ When $\varphi_1\to 2\pi$ the maximum order of singularity can reach up to unity, i.e., up to the order of the stress singularity under the concentrated force. Stress singularities of this kind arise in contact problems on the interaction of two unequally loaded absolutely rigid stamps or two pads loaded with horizontal forces that are absolutely rigid in tension and absolutely flexible in bending with an elastic half-plane [9].

For case b), $\varphi_1^*=\pi/2$, and the maximum order of singularity $1-\tilde{\lambda}_1$ tends to unity as $\varphi_1\to\pi$.

For case c), the vicinity of the wedge's apex is always in a concentrated state and as $\varphi_1\to 2\pi,$ $1-\tilde{\lambda}_2\to 1.$

For case a_1), $\varphi_1^*=\pi,$ and the maximum order of singularity tends to $1/2$ as $\varphi_1\to 2\pi$ (see curve w).

For case b_1), $\varphi_1^*=\pi/4$, and the maximum order of singularity $1-\tilde{\lambda}_1\to 1$ as $\varphi_1\to\pi/2$

For case c_1), $\varphi_1^*=3\pi/4,\ 1-\lambda_2^*\to 1.$

For d_1), $\varphi_1^*=\pi$, the maximum order of singularity is $1/2$ as $\varphi_1\to 2\pi$.

3. Conclusion

In homogeneous singular boundary-value problems within the framework of poroelasticity, the ideas and methods developed in William's work [2] have been extensively applied and further developed. These methods enable the construction and analysis of other homogeneous boundary-value problems for a poroelastic wedge. Determining the orders of stress singularities and other physical quantities, such as dislocation densities on the crack faces, is of significant importance in contact and mixed problems of the theory of elasticity, as well as in fracture mechanics.

References

1. Covin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. Journal of Elasticity, 1983, 13, pp. 145 – 147.
2. Williams M.L.: Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extention, J.Appl. Mech., 1952, 19(4), pp 526-528.
3. Kalandia A.I.: Remarks of Singularities of Elastic Solutions Near Corners. Applied Mathematics and Mechanics, 1969, 33(1), pp.132-135.
4. Sargsyan A.M.: On homogeneous singular problems of elasticity theory. Reports of NAS RA, 118(2), pp. 134-141.
5. Sargsyan A.M., Kanetsyan E.G.: On a homogeneous singular boundary value problem of poroelasticity theory. LJM, 2025, 46(7) in press.
6. Scalia A.A., Sumbatyan M.A. Contact problem for porous elastic half-plane. Journal of Elasticity. 2000, vol.60, p. 91–102.
7. Cowin S.C., Puri P.: The elastic pressure vessel problems for linear elastic materials with voids. Journal of Elasticity, 1983, 13, pp.157–163.
8. Chobanyan K.S. (1987) Stresses in composite elastic bodies. Publishing house of the Academy of Sciences of the ArmSSR, Yerevan.
9. Alexandrov V.M. and Mkhitaryan S.M. (1983) Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. Nauka, Moscow.

Information about authors

Sargsyan A.M. – PhD in Phys. and Math., Leading researcher, Institute of Mechanics of NAS RA, (374) 93 217350 e-mail: azat-sargsyan@mail.ru

Kanetsyan E.G. – PhD in Phys. and Math., Senior scientific researcher, Institute of Mechanics of NAS RA, (374) 93 46 15 88; E-mail: ekanetsyan@gmail.com

TRANSFER MODEL'S MECHANISM OF SMART SYSTEMS THEORY BASED ON QUASI – FRACTAL LOGIC

Serdyukov V.I., Serdyukova N.A., Shishkina S.I.

In this paper we continue to investigate possibilities of searching the analogies and constructing generalizations from different arias of smart modeling based on [1 - 3]. The paper proposes the transfer model's mechanism of general systems theory based on algebraic quasi-fractal predicates as a part of algebraic quasi-fractal logic. By a model transfer we shall understand a quasi – fractal homomorphism which preserves quasi – fractal predicates of a special type. The proposed transfer model's mechanism can help spread verified models onto new arias: from classical mechanics to computer sciences and software engineering (the notion of sustainability of a system). The quasi-fractal operator QF is used to write down higher order logics in the form of a quasi-fractal to study higher order logic's properties. Also, we touch upon the mathematical logic knowledge base system $Knw_{\mathfrak{A}}$ of a higher order logic complex system $\mathfrak{A}$ from the point of view of sustainability. New characteristic of Artificial Intelligent from the point of Algebraic formalization of systems is introduced.

1. Introduction. Topic background

Logic is now widely recognized as one of the foundational disciplines of computing and has applications in virtually all aspects of the subject, from software engineering and hardware to programming languages and artificial intelligence, mathematical modeling, mechanics of nano systems, robotics, theory of optimal design and control.

There are a lot of examples of transfer model's as well as in theory, and so are in practice:

- Sustainability in mechanics, sustainability or robustness in mathematical statistic, sustainability in finance; sustainability or robustness in computer sciences and in software engineering
- The analogy between the eigenvector of a linear transformation of a vector space and the fixed-point theorem.

Definition 1. Model transfer is a quasi – fractal model homomorphism that preserves quasi-fractal transfer predicates.

Examples:

1) Examples of transferring models - the Erdös-Renyi theorem (Model 2) can be applied to the language of category theory, to the language of Boolean algebras to construct forecasts, etc., [3, Ch 8]

2) Transfer of the model from the theory of financial markets to the theory of learning/rating assessments, forecasts - Sharpe and Markowitz models, models of the optimal risk-benefit ratio/rating knowledge assessment is considered in [4, Ch 7]

3) Practice example. The model of the knowledge system Knw_S of a system S can be considered as a homomorphic image of the system S , [4]. That is, it turns out that the model of the knowledge system Knw_S of the system S is a risk model of the system S.

Now it is impossible to speak about the knowledge system Knw_S not mention Artificial intelligence.

From the point of view Algebraic formalization of smart systems, [1], Artificial intelligence is a dynamic tensor indicator of the level of development of the mathematical logic knowledge base system

$Knw_{\mathfrak{A}}$ of the system $\mathfrak{A}$.

1.1 Problem state. General system theory transfer models based on algebraic quasi – fractal logic/ predicates

The main problem is to construct transfer model mechanism between different areas of smart modelling. In [4, 6] transfer model's method was used to spread Cantor-Schroeder-Bernstein theorem for decision classification problem and it was shown there why it was impossible to describe Abelian torsion -free groups of finite ranks up to isomorphism. Here we use transfer model's method to quasi-fractal operator QF to write down higher order logic in the form of a quasi-fractal to study higher order logic's properties.

1.2 Transfer model's mechanism from the point of view of algebraic formalization concept

Transfer model's mechanism consists of Boolean algebra $\mathfrak{H}$ corresponding to closed formulas of the L which is the first order language NPC, set of predicates $\{\mathcal{P}_i | i \in I\}$ on the Boolean algebra $\mathfrak{H}$ and quasi-fractal technic, [1,2,3].

Here we want to describe transfer model's mechanism from the point of view of Algebraic formalization of smart system theory, [1].

To transfer systems theory models from one subject area to another, predicates that identify stable connections in the system can be used. Stable connections in the system can be outlined experimentally and theoretically. Let' the system $\boldsymbol{S}$ be modeled by the algebraic system of factors $\boldsymbol{A_S} = \langle A_S, \Omega\rangle, \boldsymbol{B_S} = \langle B_S, \vee\ , \wedge, \neg, 0,1\ \rangle$ be a Boolean algebra which corresponds an elementary theory $\boldsymbol{Th}(\boldsymbol{A_S})$ of the algebraic system of factors $\boldsymbol{A_S}$, [3, Ch 1, Def 1.21]. In [3] a Boolean algebra $\mathfrak{H}$ corresponding to closed formulas of the L which is the first order language NPC of the signature with equality $\Omega = \langle \{f_1, \dots, f_n | n < \aleph_0\}, \{P_1, \dots, P_m | m < \aleph_0\}, = \rangle$, where $f_i, i < n,$ is a n_i – ary function, $P_j, j < m,$ is a m_j – ary predicate as follows: $\mathfrak{H} = \langle \langle L \rangle, , \vee, \wedge, \neg, 0,1\ \rangle$ was constructed. As $\mathfrak{H}$ is a countable Boolean algebra, then by Stone Theorem $\mathfrak{H}$ is isomorphic to the algebra of sets, so $\mathfrak{H}$ is σ-algebra.

Transferring models predicates on Boolean algebras can be defined as follows.

1. The predicate $\mathcal{P}_1$ identifies the elements $x_1, \dots, x_n$ of the Boolean algebra $\mathfrak{H}$ which corresponds to the system of axioms defining the system $\boldsymbol{S}$, or a subalgebra $\mathfrak{H}'$ generated by these elements $x_1, \dots, x_n$ of Boolean algebra $\mathfrak{H}$. So $\mathcal{P}_1$ is a unary predicate on the Boolean algebra $\mathfrak{H}$.

2. The predicate $\mathcal{P}_2$ highlights the goal A of the system $\boldsymbol{S}$ which corresponds the element g of the Boolean algebra $\mathfrak{H}$ **,** or a subalgebra of Boolean algebra $\mathfrak{H}$ **,** generating by g.

3. For specific classes of models / classification of mathematical models

Let $\mathcal{P}_3$ be a predicate, highlighting the key property/that is a classification property of a class of models under studying. In other words, predicate $\mathcal{P}_3$ outlines the models $\boldsymbol{A_S}$ of the system S, such that $\mathcal{P}_3$(S) is true. So, $\mathcal{P}_3$ is a unary predicate on the set of $\{\boldsymbol{A_S} | \boldsymbol{A_S}\ is\ a\ model\ of\ S\}$.

So, we have:

$\mathcal{P}_1 : \mathfrak{H} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

$\mathcal{P}_2 : \mathfrak{H} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

$\mathcal{P}_3 : \{\boldsymbol{A_S} | \boldsymbol{A_S}\ is\ a\ model\ of\ S\} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

4. For concreate classes of models

Predicate $\mathcal{P}_4$ highlights models based on equilibrium assessment can be outlined:

The emergence of so-called logical holes during the transfer of models.

Using quasi-fractal operator QF quasi – fractal predicates $\mathcal{P}_i, i = 1,2,3,4$ can be constructed

2. Main Results. Notation higher order logic in the form of polybasic (with n main sets) algebraic system. Notation higher order logic in the form of a quasi-fractal

Here we want to apply quasi-fractal operator QF to description of logics of high orders.

Let $\gamma = 0, \omega_\gamma = \omega_0$.

Let $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega = \{\mathrm{P}, \Phi\}\rangle = \mathfrak{A}_\mathbf{0} = \langle A_0, \Omega_0 = \{\mathrm{P}_0, \Phi_0\}\rangle$**,**

$\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}$ – predicates on $A_0, \Phi_0 = \Phi$ –operations on A_0,

$\mathrm{P}_0 = \{P_{0i} | i \in I_0\}$, $\Phi_0 = \{\Phi_{0j} | j \in J_0\}$,

$\mathfrak{A}_\mathbf{1} = \langle A_0, A_1 = \Omega_0, \Omega_1 = \{\mathrm{P}_1, \Phi_1\}\rangle$, here Ω_1 – predicates and operations on A_1. So,

$\mathfrak{A}_\mathbf{1} = \langle A_0, A_1 = \Omega_0, \Omega_1 = \{\mathrm{P}_1, \Phi_1\}\rangle$ is an algebraic system with two main sets A_0, A_1,

$\mathrm{P}_1 = \{P_{1i} | i \in I_1\}$, $\Phi_1 = \{\Phi_{1j} | j \in J_1\}$,

$\mathfrak{A}_\mathbf{2} = \langle A_0, A_1 = \Omega_0, A_2 = \Omega_1, \Omega_2 = \{\mathrm{P}_2, \Phi_2\}\rangle$ is an algebraic system with three main sets A_0, A_1, A_2

$\mathrm{P}_2 = \{P_{2i} | i \in I_2\}$, $\Phi_2 = \{\Phi_{2j} | j \in J_2\}$. Here Ω_2 – predicates and operations on A_2. So,

$\mathfrak{A}_\boldsymbol{n} = \langle A_0, A_1 = \Omega_0, \dots, A_{n-1} = \Omega_{n-1}, , \dots, A_n = \Omega_n, \Omega_{n+1} = \{\mathrm{P}_{n+1}, \Phi_{n+1}\}\rangle$ is an algebraic system with n main sets $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$,

$\mathrm{P}_n = \{P_{ni} | i \in I_n\}$, $\Phi_n = \{\Phi_{nj} | j \in J_n\}$. Here Ω_n – predicates and operations on A_{n-1}.

So, $\mathfrak{A}_\boldsymbol{n} = \langle A_0, A_1 = \Omega_0, \dots, A_{n-1} = \Omega_{n-1}, \dots, A_n = \Omega_n, \Omega_{n+1} = \{\mathrm{P}_{n+1}, \Phi_{n+1}\}\rangle$ is logic of the order n.

Then

$\mathfrak{A}_{\boldsymbol{n+1}} = \langle A_0, A_1 = \Omega_0, \dots, A_{n-1} = \Omega_{n-1}, , \dots, A_n = \Omega_n, \Omega_{n+1} = \{\mathrm{P}_{n+1}, \Phi_{n+1}\}\rangle$ is an algebraic system with $n+1$ main sets $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$,

$\mathrm{P}_{n+1} = \{P_{n+1i} | i \in I_{n+1}\}$, $\Phi_{n+1} = \{\Phi_{n+1j} | j \in J_{n+1}\}$. Here $\Omega_n + 1$ – predicates and operations on A_n.

So, $\mathfrak{A}_{n+1} = \langle A_0, A_1 = \Omega_0, \dots, A_{n-1} = \Omega_{n-1}, , \dots, A_n = \Omega_n, \Omega_{n+1} = \{\mathrm{P}_{n+1}, \Phi_{n+1}\}\rangle$ is logic of the order $n+1$.

Let's now consider the question of notation higher order logic in the form of a quasi-fractal

Let's consider quasi-fractal operator $QF^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}(\mathfrak{A}^{\alpha}_{k} = \langle A^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}, \Omega_k\rangle, \alpha \in \Lambda_k))$, here ω_γ is an ordinal, to write down logic of ω_γ – order in the form of the quasi – fractal.

Let's now consider

$QF^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}(\mathfrak{A}^{\alpha}_{k} = \langle A^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}, \Omega_k\rangle, \alpha \in \Lambda_k))$, here ω_γ is an ordinal.

level 0 $\mathfrak{A}^{0}_{k} = \langle A^{0}_{k}, \Omega^{0}_{k} = \{P^{0}_{k}, \Phi^{0}_{k}\}\rangle$,
P^{0}_{k}– predicates on A^{0}_{k}, Φ^{0}_{k} –operations on A^{0}_{k},
$P^{0}_{k} = \{P^{0}_{ki} | i \in I_{k0}\}$, $\Phi^{0}_{kj} = \{\Phi^{0}_{kj} | j \in J_{k0}\}$,

level 1 $\mathfrak{A}^{1}_{k} = \langle \{a_0 = A_1, \dots, a_{\delta,\dots}\}\ \Omega_1 = \{\mathrm{P}_1, \Phi_1\}\rangle$,
P^{1}_{k}– predicates on A^{1}_{k}, Φ^{1}_{k} –operations on A^{1}_{k},
$P^{1}_{k} = \{P^{1}_{ki} | i \in I_{k1}\}$, $\Phi^{1}_{kj} = \{\Phi^{1}_{kj} | j \in J_{k1}\}$,

……..

level α $\mathfrak{A}^{\alpha}_{k} = \langle A^{\alpha}_{k}, \Omega^{\alpha}_{k} = \{P^{\alpha}_{k}, \Phi^{\alpha}_{k}\}\rangle$, $\mathfrak{A}^{\alpha}_{k} = \langle \{\dots, a_{\alpha-1} = \{A^{\alpha}_{k}\}, \dots, a_\gamma, \dots\}, \Omega_{\alpha}\rangle$
P^{α}_{k}– predicates on A^{α}_{k}, Φ^{α}_{k} –operations on A^{α}_{k},
$P^{\alpha}_{k} = \{P^{\alpha}_{ki} | i \in I_{k\alpha}\}$, $\Phi^{\alpha}_{kj} = \{\Phi^{\alpha}_{kj} | j \in J_{k\alpha}\}$,

if $\alpha - 1$ exists.

If α is a limit ordinal, then

$$\mathfrak{A}^{\alpha}_{k} = \bigcup\nolimits_{k}^{\beta<\alpha} \mathfrak{A}^{\beta}_{k}$$

as for the direct limit

Theorem 1.

Fixed-point theorem applied to $\mathfrak{A} = QF^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}(\mathfrak{A}^{\alpha}_{k} = \langle A^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}, \Omega_k\rangle, \alpha \in \Lambda_k))$, here ω_γ is an ordinal, gives a quasi-fractal level at which higher order logic does not change its expressive possibilities.

Let's call this level an indicator of the stability of higher-order logic with respect to the compressive mapping.

Definition 2.

The level a defined by a fixed – point theorem called a level of sustainability of a quasi – fractal system of higher order logic $\mathfrak{A} = QF^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}(\mathfrak{A}^{\alpha}_{k} = \langle A^{\alpha}_{k<\omega_\gamma}, \Omega_k\rangle, \alpha \in \Lambda_k))$, here ω_γ is an ordinal, or a level of complexity of a system $\mathfrak{A}$.

There is no change in logic at the fixed-point (level a of the corresponding fixed-point).

Example. 1. In [5, 6] Cantor-Schroeder-Bernstein theorem was spread for decision classification problem and it was shown there why it was impossible to describe Abelian torsion -free groups of finite ranks up to isomorphism.

2. The Cantor – Bernstein - Schroeder scheme can be applied to higher-order logics

The common scheme of Cantor - Bernstein - Schroeder theorem runs as follows, [6]:

Let $\mathfrak{A}$ be a class of all algebraic systems $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega\rangle$ of the signature Ω with equality, $P, Q \subseteq \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ be binary predicates given on the class $\mathfrak{A}$, $P(\boldsymbol{A}), P(\boldsymbol{B})$ be true. Let $\boldsymbol{A}\,\beta\boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B}\beta\boldsymbol{B'}$. Then $\boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{B}$, that is:$(\boldsymbol{A}\,\beta\boldsymbol{A'}) \wedge (\boldsymbol{B}\beta\boldsymbol{B'}) \Rightarrow \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{B}$.

Then $Q(A), Q(B)$ are true.

So, Theorem 1 and Cantor - Bernstein - Schroeder scheme explain following results concerning description of algebraic systems from [7,8]:

Let's clarify P, Q, β, δ for two – base algebraic systems or for two – base algebras.

2.1` Cantor - Bernstein - Schroeder scheme for two – base algebraic systems

The key point in determining the realization Cantor - Bernstein - Schroeder scheme for two – base algebraic systems $\boldsymbol{S} = \langle S_1, S_2, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_{1,2}\rangle$, here $\Theta_1$is the set of predicates and operations given on S_1, Θ_2 is the set of predicates and operations given on S_2 , $\Theta_{1,2}$ is the set of predicates and operations, outlining links between S_1, S_2 , is defining P, Q, β, δ on it.

Definition 3.
Let $\mathfrak{E}$ be a class of all two – base algebraic systems $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \theta_1, \theta_2, \theta_{1,2} \rangle$ with equality, $P, Q \subseteq \mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$
$P(\boldsymbol{\mathcal{S}}), P(\boldsymbol{\mathcal{K}})$ be true
Let $\boldsymbol{\mathcal{S}}\ \beta\boldsymbol{\mathcal{S}}', \boldsymbol{\mathcal{K}}\beta\boldsymbol{\mathcal{K}}'$**.** Then $\boldsymbol{\mathcal{S}}\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}$**,** that is: $(\boldsymbol{\mathcal{S}}\ \beta\boldsymbol{\mathcal{S}}')\wedge(\boldsymbol{\mathcal{K}}\beta\boldsymbol{\mathcal{K}}') \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}$ (1)
Then $Q(\boldsymbol{\mathcal{S}}), Q(\boldsymbol{\mathcal{K}})$ are true.
So, one uses $\mathfrak{A}_2 \restriction \boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, while considering $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \langle \mathcal{S}_1, \theta_1 \rangle$, $\mathfrak{A}_2 \restriction \boldsymbol{\mathcal{S}}_2$, while considering $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \langle \mathcal{S}_2, \theta_2 \rangle$
In some cases, one of these restrictions coincides with $\mathfrak{A}_1$**.**
Examples
1. In [7, description Mikhalev and Bunina results concerning description modules over rings up to elementary equivalence], modules over rings are considered as a two-base algebra, so second-order logic appears.
According to the scheme (1), Mikhalev Bunina, [7], these descriptions are essentially implemented with the usage of second order logics, but without the explanation the reason why one can't escape the second order logic's usage. Let's e[plain it now. To the results of Mikhalev and Bunina, second-order logic is used when we describe the multiplication of a vector by scalars of a field or module $\boldsymbol{M} = \langle M, +, -, 0 \rangle$ by elements of a ring $\boldsymbol{K} = \langle K, \oplus, \ominus, \odot, 0, 1 \rangle$:
for any scalar $\lambda \in K$, for any $a, b \in M$ we have $\tilde{\lambda}(a + b) = \tilde{\lambda}a + \tilde{\lambda}b$. Here $\{\tilde{\lambda} | \lambda \in K\}$ is a set of unary operations from $\theta_{1,2}$ and the phrase "for any scalar $\lambda \in K$" should be written as follows:
$\Psi(\tilde{\lambda}, a, b) = ((\forall\tilde{\lambda} \in \theta_{1,2})(\forall a, b \in M)(\tilde{\lambda}a + \tilde{\lambda}b)$, so $\Psi(\tilde{\lambda}, a, b)$ contains
multiplication operation $\tilde{\lambda}$ by a scalar, i.e. quantifier $\forall$ by operations and predicates from $\theta_{1,2}$.
2. In the common case, let
$\Psi(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m) \in Th(\boldsymbol{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \theta_1, \theta_2, \theta_{1,2} \rangle)$, here $Th(\boldsymbol{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \theta_1, \theta_2, \theta_{1,2} \rangle)$ is the set of all formulas of the signature $\langle \theta_1, \theta_2, \theta_{1,2} \rangle$ which are true on $\boldsymbol{\mathcal{S}}$**.** So, one uses $\mathfrak{A}_2 \restriction \boldsymbol{\mathcal{S}}_1$, while considering $\boldsymbol{\mathcal{S}}_1 = \langle \mathcal{S}_1, \theta_1 \rangle$, $\mathfrak{A}_2 \restriction \boldsymbol{\mathcal{S}}_2$, while considering $\boldsymbol{\mathcal{S}}_2 = \langle \mathcal{S}_2, \theta_2 \rangle$
In some cases, one of these restrictions coincides with $\mathfrak{A}_1$**.** As practice application see [8].
2. Practice example from a knowledge system of a complex system S. Now it is impossible to speak about knowledge system of a complex system S without using higher - ordered logics. As we already mentioned, Knw_S of a system S can be considered as a homomorphic image of the system S, [5]. So, Knw_S can also be considered as a risk system of a system S, [5,6]. The main idea of both considerations is the descriptions as models with intermission connections. Now it is impossible to speak about knowledge system of a complex system S without mentioning Artificial intelligence.
Definition 4.
Artificial intelligence is a dynamic tensor indicator of the level of development of the mathematical logic knowledge base system $Knw_{\mathfrak{A}}$ of a higher order logic complex system $\mathfrak{A}$ from the point of view [1].

3. Applications

In this paper algebraic quasi – fractal models transfer method is used to clear up the following question: to investigate the of sustainability or a level of complexity of a higher order logic complex system, Theorem 1, Definition 2. The level of sustainability of a system $\mathfrak{A}$, or a level of complexity of a system $\mathfrak{A}$ is defined by Fixed – point theorem. The explanation of necessity of using second – order logic for description of algebraic systems with additional connections (modules over rings, so on, [7]) is received.
The results can be used in studying knowledge system of a higher order logic complex system $\mathfrak{A}$:
Artificial intelligence is a dynamic tensor indicator of the level of development of the mathematical logic knowledge base system $Knw_{\mathfrak{A}}$ of the system $\mathfrak{A}$ from the point of view [1], Definition 4. It is well known, that higher-ordered logics is applicated in computer science, [10,11,12-16] It is also possible to build further practical applications of the theory proposed by us, based on the works [1-4] for different spheres from software engineering and hardware to programming languages and artificial intelligence, mathematical modeling, mechanics of nano systems, robotics, theory of optimal design and control.

REFERENCE

1. Serdyukova N, Serdyukov V 2018 Algebraic Formalization of Smart Systems. Theory and Practice *Smart Innovation, Systems and Technologies* vol 91, (Switzerland: Springer Nature).
2. Serdyukova N, Serdyukov V 2021 Algebraic Identification of Smart Systems. Theory and Practice, Intelligent *Systems Reference Library*, 191 (Switzerland: Springer Nature)
3. Serdyukova N, Serdyukov V 2024 Algebraic Quasi- Fractal Logic of Smart Systems Theory and Practice *Intelligent Systems Reference Library* vol 251 Springer Nature Switzerland.
4. Serdyukova N A, Serdyukov V I 2025 Advances in Algebraic Quasi-fractal Modelling of Smart Systems - Towards a Linguistic Approach to Systems Modeling, *Preprint.*
5. Serdyukova N, Serdyukov V Algebraic quasi-fractal dynamics: Modeling of the risk system of a complex energy-saving system (Conference Paper) *Green Horizon 2024: International Forum on Energy Management, Ecological Innovation, and Agro-Industrial Practices, YIFHG 2024; Zhengzhou; China; 16 June 2024 - 18 June 2024*
6. Serdyukova N A, Serdyukov V I 2025 Algebraic Quasi – fractal Models Transfer Method, *in Print* Bunina E I, Automorphisms and elementary equivalence of Chevalley groups and other derived structures *Abstract dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences Moscow 2010*
7. Coskey S. 2012 The classification of torsion – free abelian groups of finite rank up to isomorphism and up to quasi – isomorphism *Transactions of the American mathematical society 364:175-194.*
8. Tolstykh V A 2006 Groups of automorphisms, *Abstract of dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences*.
9. Arkor N, McDermott D 2020 Higher – order algebraic theories, *Preprint*
10. Gabbay D M, Hogger C, Robinson J A 1993 Handbook of Logic in Artificial Intelligence: Logic Programming: *ISBN: 0-19-853745-X, © 1993, 534pp*
11. R´edei M 1998 Quantum logic in algebraic approach, (The Netherlands: Kluwer Academic Publishers) 252 p
12. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. On the possibilities of the boundary element method in modelling continuum systems, *Information Technology*. 1997. No. 3. p. 18-20.
13. Zarubin V.S., Mathematical modeling of processes in continual systems, *Information Technology*.1995. No.0. p. 11
14. Kolin K.K., Norenkov I.P., Narinyani A.S., Zarubin V.S., Status and prospects of development of information technologies, *Information technologies*. 1999. No. 1. S. 44.
15. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I. Yu., Physical and mathematical models of micromechanics, Textbook / Moscow, 2021.

Information about authors

Vladimir I. Serdyukov - Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,
(+7)915 242-14-01
E-mail wis24@yandex.ru

Natalia A. Serdyukova - Gubkin Russian State University of Oil and Gas (NIU)
(+7)915 146-42-51
E-mail nsns25@yandex.ru

Svetlana I. Shishkina - Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,
(+7)910 435-47-05
E-mail shishkina@bmstu.ru

ON THE CONVERGENCE OF TRIGONOMETRIC SERIES OF BENDING MOMENTS ON A CLAMPED CONTOUR OF A RECTANGULAR DOUBLE ANTISYMMETRICALLY LOADED PLATE

Seyranyan S.P.

The problem of bending a rectangular plate clamped on a contour under a transverse load that is doubly antisymmetric relative to the axes of symmetry of the rectangle is considered. Previously, the author, representing the bending moments on the contour of a rectangular plate by supposedly convergent trigonometric series containing unknown coefficients, and applying the method of S.P. Timoshenko in a modified way, obtained an infinite completely regular system of linear algebraic equations. However, when deriving an infinite system, an assumption of the type of S.P. Timoshenko is accepted about the convergence of trigonometric series of bending moments on the contour of the plate and about the admissibility of changing the order of summation in the appearing repeated series. In the presented work it is proved that for the accepted type, but an arbitrary mechanical load: a) there is a solution (simultaneously unique) of the infinite system tending to zero, which can be obtained by the reduction method, b) the initial assumptions about the convergence of trigonometric series of bending moments on the contour of the plate and about changing in the order of summation in repeated series are performed.

The solution to the problem of bending a rectangular plate clamped on a contour is the subject of works reflected in the review [1], as well as in the review sections of books [2], [3], etc. One of the well-known and universal methods for solving this problem is the method of S.P. Timoshenko [2], which, however, as noted in [4], refers to a mathematically non-rigorous method. In this paper, as a continuation of work [5], the gap that has arisen is filled.

1. Original known author's results. The solution to the problem of bending a rectangular plate clamped on a contour under a transverse load $q(x,y)$ that is antisymmetric relative to the symmetry axes of the rectangle for a deflection $w(x,y)$ in a rectangle $[-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$, starting from work [2], in work [5] was sought in the form

$$w(x,y)=\frac{1}{D}\sum_{m=2,4...}^{\infty}\sum_{n=2,4...}^{\infty}\frac{q_{mn}\sin\lambda_m x\,\sin\mu_n y}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}+\frac{1}{2D}\sum_{m=2,4...}^{\infty}E_m\frac{(-1)^{m/2}}{\lambda_m^2\operatorname{sh}\alpha_m}\,(\alpha_m\operatorname{cth}\alpha_m\operatorname{sh}\lambda_m y-\lambda_m y\,\operatorname{ch}\lambda_m y)\sin\lambda_m x+\frac{1}{2D}\times$$

$$\times\sum_{n=2,4..}^{\infty}F_n\frac{(-1)^{n/2}}{\mu_n^2\operatorname{sh}\beta_n}\,(\beta_n\operatorname{th}\beta_n\operatorname{sh}\mu_n x-\mu_n x\,\operatorname{ch}\mu_n x)\sin\mu_n y. \qquad (1)$$

Here D is the bending stiffness of the plate, $\lambda_m=m\pi/a$, $\mu_n=n\pi/b$, $\alpha_m=m\pi b/(2a)$, $\beta_n=n\pi a/(2b)$,

$$q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}q(x,y)\sin\lambda_m x\sin\,\mu_n y\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Representation (1) initially satisfies the Sophie Germaine–Lagrange equation with the right-hand side being the load $q(x,y)$ and the support conditions of the edges, bent by moments

$$M_y(x,b/2)=-M_y(x,-b/2)=\sum_{m=2,4...}^{\infty}(-1)^{m/2}E_m\sin\lambda_m x,\ M_x(a/2,y)=-M_x(-a/2,y)=\sum_{m=2,4...}^{\infty}(-1)^{m/2}F_m\sin\mu_m y. \qquad (3)$$

Further, $w(x,y)$ on the sides of the plate obeys the edge clamping conditions. Assuming the convergence of series (3) and the admissibility of changing the order of summation in expansions in repeated trigonometric series, in [5] a completely regular infinite system of linear algebraic equations [6] with respect to unknowns $\hat{E}_m=(b/a)^{1/2}E_m$, $\hat{F}_n=(b/a)^{1/2}F_n$, was obtained

$$\begin{cases}\hat{E}_m=-\dfrac{8\xi_m^2}{\pi\varphi(\alpha_m)}\displaystyle\sum_{n=2,4,...}^{\infty}\frac{n}{(\xi_m^2+n^2)^2}\hat{F}_n+b_m^{(1)}\\ \hat{F}_n=-\dfrac{8\chi_n^2}{\pi\varphi(\beta_n)}\displaystyle\sum_{m=2,4,...}^{\infty}\frac{m}{[\chi_n^2+m^2]^2}\hat{E}_m+b_n^{(2)}\end{cases}\text{, where } m,n=2,4,\ldots,\ \varphi(t)=\operatorname{cth}t-t/\operatorname{sh}^2 t,\ t=\alpha_m,\beta_m, \qquad (4)$$

$$b_m^{(1)}=\frac{(-1)^{m/2}}{\varphi_1(\alpha_m)}\sqrt{\frac{b}{a}}\int_{-a/2}^{a/2}(y/b\,\operatorname{ch}\lambda_m y-0.5\operatorname{cth}\alpha_m\operatorname{sh}\lambda_m y)\int_{-b/2}^{b/2}q(x,y)\sin\lambda_m x\,dx\,dy, \qquad (5)$$

$$b_n^{(2)}=\frac{(-1)^{n/2}}{\varphi_1(\beta_n)}\sqrt{\frac{a}{b}}\int_{-a/2}^{a/2}(x/a\,\operatorname{ch}\mu_n x-0.5\operatorname{cth}\beta_n\operatorname{sh}\mu_n x)\int_{-b/2}^{b/2}q(x,y)\sin\,\mu_n y\,dx\,dy, \qquad (6)$$

$\xi_m = mb/a,\ \chi_n = na/b,\ \varphi_1(t) = \varphi(t)\,\mathrm{sh}t = \mathrm{ch}\,t(1-2t/\mathrm{sh}2t) > 0,\ t = \alpha_m,\ \beta_n.$ (7)

2. Analysis of the limit behavior of free members of an infinite system.

Let the plate be loaded with four concentrated forces of a quantity P/4

$$q(x,y) = P/4[\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) - \delta(x-\xi)\delta(y+\eta) - \delta(x+\xi)\delta(y-\eta) + \delta(x+\xi)\delta(y+\eta)]. \quad (8)$$

Substituting (8) into (5), (6), we receive the following results

$$b_m^{(1)} = P(-1)^{m/2}\sqrt{b/a}\,(\,\eta/b\,\mathrm{ch}\,\lambda_m\eta - 0.5\,\mathrm{cth}\,\alpha_m\mathrm{sh}\,\lambda_m\eta)/\varphi_1(\alpha_m)\,\sin\lambda_m\xi = O(e^{\lambda_m(\eta-b/2)}), \quad (9)$$

$$b_n^{(2)} = P(-1)^{n/2}\sqrt{a/b}\,(\xi/a\,\mathrm{ch}\,\mu_n\xi - 0.5\,\mathrm{cth}\,\beta_n\mathrm{sh}\,\mu_n\xi)/\varphi_1(\beta_m)\sin\mu_n\eta = O(e^{\mu_n(\xi-a/2)}). \quad (10)$$

Now, let be $q(x, y)$ a distributed limited load – $|q(x,y)| \le q^* = const > 0$. Let us show that the integrand in (5), containing *y*, when $0 \le y \le b/2$ is not positive.

$$f(y) = y/b\,\mathrm{ch}\,\lambda_m y - 0.5\,\mathrm{cth}\,\alpha_m\mathrm{sh}\,\lambda_m y = \mathrm{ch}\,\lambda_m y\ (2y/b - \mathrm{cth}\,\alpha_m\mathrm{th}\,\lambda_m y)/2 \le 0. \quad (11)$$

Let us put $y = tb/2,$ where $0 \le t \le 1.$ Then statement (11) is reduced to the form

$$f_1(t) = t - \mathrm{cth}\,\alpha_m\mathrm{th}\,\alpha_m t \le 0. \quad (12)$$

Note that $f_1(0) = f_1(1) = 0.$ Moreover

$$f_1'(t) = 1 - \alpha_m\mathrm{cth}\,\alpha_m/\mathrm{ch}^2\alpha_m t < \infty,\ 0 \le t \le 1. \quad (13)$$

Then, according to Rolle's theorem [7] (**111)**, there exists a value *t* = *t** such that 0 < *t** < 1, at which $f_1'(t^*) = 0.$ But from the monotonic increase $\mathrm{ch}\,\alpha_m t,$ and with it $\mathrm{ch}^2\alpha_m t$ when $t \in [0,\ 1]$ in (13) it follows that for $t \in [0, t^*)$ ((t*, 1]) $f_1'(t) < 0$ ($f_1'(t) > 0$). Thus the function $f_1(0) = 0,$ decreases monotonically when $t \in (0, t^*)$, at $t = t^*$ – takes on a minimum value, at $t \in (t^*, 1)$– increases monotonically [7, 109], and $f_1(1) = 0.$ Hence, inequality (12), and with it (11), are satisfied.

Let us now move on to estimating the free term $b_m^{(1)}$ for a distributed load satisfying the condition $|q(x,y)| \le q^*$. Taking into account inequalities (7) and (11), we have

$$|b_m^{(1)}| \le \frac{4}{\varphi_1(\alpha_m)}\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{a/2}|\sin\lambda_m x|\,dx\int_0^{b/2}|q(x,y)|(-f(y))\,dy \le \frac{2\sqrt{ab}\,q^*}{\pi\varphi_1(\alpha_m)}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha_m - 1}{\lambda_m}\left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha_m}\right) =$$

$= O(1/m^2)$. Similarly $|b_n^{(2)}| = O(1/n^2).$ (14)

But *q*(*x*,*y*) in the general case consists of the sum of a distributed limited load and a finite number of loads of type (8). Therefore, in the general case *q*(*x*,*y*), which follows from (9), (10) and (14),

$$|b_m^{(1)}| = O(1/m^2) \le K/m^2,\ m = 2,4,...,\ |b_n^{(2)}| = O(1/n^2) \le K/n^2,\ n = 2,4,..., \quad (15)$$

where $K > 0$ is some constant.

3. On the existence of a solution to an infinite system that converges to zero.

The system of equations (4) is a completely regular infinite system of linear algebraic equations [6] with limited, as follows from (15), free terms. Therefore, this system has a main limited solution [6]. Let us now show that at infinity the solution $\tilde{E}_m, \tilde{F}_n$ tends to zero, which will simultaneously lead to its uniqueness in the class of limited solutions [6]. Let us consider the series summed in [2] (p. 165)

$$I_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{(\alpha^2+n^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{4\alpha^3}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(\pi-z)}{\mathrm{sh}\,\pi\alpha} - \frac{\pi(\pi-z)}{4\alpha^2}\frac{\mathrm{sh}\,\alpha(\pi-z)}{\mathrm{sh}\,\pi\alpha} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha(\pi-z)\,\mathrm{ch}\,\pi\alpha}{\mathrm{sh}^2\,\pi\alpha},$$ г

де $\alpha \ne 0,\ 0 \le z \le 2\pi$ (16)

Then

$$\frac{I_1(0)+I_1(\pi)}{2} = \sum_{n=2,4,...}^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2+n^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{8\alpha^3}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha\pi+1}{\mathrm{sh}\,\pi\alpha} - \frac{\pi^2}{8\alpha^2} + \frac{\pi^2}{8\alpha^2}\left(\frac{\mathrm{ch}^2\,\alpha\pi}{\mathrm{sh}^2\,\pi\alpha} + \frac{\mathrm{ch}\,\pi\alpha}{\mathrm{sh}^2\,\pi\alpha}\right) = -\frac{1}{2\alpha^4} +$$

$$+\frac{\pi}{8\alpha^3}\frac{2\mathrm{ch}^2\alpha\pi/2}{2\mathrm{sh}\,\alpha\pi/2\;\mathrm{ch}\,\alpha\pi/2}+\frac{\pi^2}{8\alpha^2}\frac{1+\mathrm{ch}\,\alpha\pi}{\mathrm{sh}^2\pi\alpha}=-\frac{1}{2\alpha^4}+\frac{\pi}{8\alpha^3}\left(\mathrm{cth}\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\alpha\pi}{2\mathrm{sh}^2\alpha\pi/2}\right)=-\frac{1}{2\alpha^4}+$$

$$+\frac{\pi^2}{8\alpha^2\mathrm{sh}^2\alpha\pi/2}+\frac{\pi}{8\alpha^3}\left(\mathrm{cth}\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\mathrm{sh}^2\alpha\pi/2}\right)<-\frac{1}{2\alpha^4}+\frac{\pi^2}{8\alpha^2(\alpha\pi/2)^2}+\frac{\pi}{8\alpha^3}\left(\mathrm{cth}\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\mathrm{sh}^2\alpha\pi/2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8\alpha^3}\left(\mathrm{cth}\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{2\mathrm{sh}^2\alpha\pi/2}\right). \qquad (17)$$

Here we used the inequality $\mathrm{sh}\,t>t$ for t > 0. Hence

$$\frac{8\alpha^3}{\pi(\mathrm{cth}\,(\alpha\pi/2)-\alpha\pi/(2\mathrm{sh}^2\,\alpha\pi/2)}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2+n^2)^2}<1. \qquad (18)$$

Further, using (18) the Cauchy–Bunyakovsky inequality for infinite series [7] (**133, 375**) and the complete regularity of system (4) [8], [9], when $\alpha>0$ we obtain

$$\frac{8\alpha^{5/2}}{\pi\varphi(\pi\alpha/2)}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{n^{1/2}}{(\alpha^2+n^2)^2}=\frac{8\alpha^{5/2}}{\pi\,\varphi(\pi\alpha/2)}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^2+n^2}\,\frac{n^{1/2}}{\alpha^2+n^2}\right)\le\frac{8\alpha^{5/2}}{\pi\varphi(\pi\alpha/2)}\sqrt{\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2+n^2)^2}}\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{n}{(\alpha^2+n^2)^2}}=\sqrt{\frac{8\alpha^3}{\pi\varphi(\pi\alpha/2)}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2+n^2)^2}}\sqrt{\frac{8\alpha^2}{\pi\varphi(\pi\alpha/2)}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{n}{(\alpha^2+n^2)^2}}<\sqrt{0.871}<0.934. \qquad (19)$$

Let us now note that the replacement of unknowns in system (4)

$$\hat{E}_m=\bar{E}_m(a/b)^{1/4}/m^{1/2},\hat{F}_n=\bar{F}_n(b/a)^{1/4}/n^{1/2} \qquad (20)$$

again for $0<b/a<\infty$ leads to a completely regular infinite system

$$\begin{cases}\bar{E}_m=-\dfrac{8\xi_m^{5/2}}{\pi\varphi(\alpha_m)}\displaystyle\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{n^{1/2}}{(\xi_m^2+n^2)^2}\bar{F}_n+b_m^{(1)}m^{1/2}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/4}\\ \bar{F}_n=-\dfrac{8\chi_n^{5/2}}{\pi\varphi(\beta_n)}\displaystyle\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{m^{1/2}}{[\chi_n^2+m^2]^2}\bar{E}_m+b_n^{(2)}n^{1/2}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/4}\end{cases}, \qquad (21)$$

since (19) for the value $\alpha=i\,b/a$ and $\alpha=i\,a/b$ is the executed condition of complete regularity [6] for the first and second equations of the infinite system (21). But the free members of the named system are limited, because taking into account (15) $\left|b_m^{(1)}\right|(b/a)^{1/4}m^{1/2}=O(1/m^{3/2}),\left|b_n^{(2)}\right|(b/a)^{1/4}n^{1/2}=$ $=O(1/n^{3/2})$. This means that the resulting system has a principal bounded solution $\left|\hat{E}_m\right|\le K_1$, $\left|\hat{F}_n\right|\le K_1$, where $K_1>0$ is some constant [6]. Therefore, the main solution of the original system (4), taking into account (20), satisfies the

$$\left|\tilde{E}_m\right|\le(a/b)^{1/4}K_1/m^{1/2},\ \left|\tilde{F}_n\right|\le(b/a)^{1/4}K_1/n^{1/2}. \qquad (22)$$

Therefore $\tilde{E}_m$ and $\tilde{F}_n\to0$ when m and $n\to\infty$, which simultaneously leads to the uniqueness of the solution in the class of bounded solutions [6].

4. On changing the order of summation in repeated series.

In the work [5] the derivation of the above system [4] was attended by an assumption similar to S.P. Timoshenko [2] about changing the order of summation in repeated series**,** which, when replacing the initial unknowns E_m, F_n with solutions $\tilde{E}_m,\tilde{F}_n$ of the system [4], are written in the form

$$\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m/2}\tilde{F}_n\,nm}{[(mb/a)^2+n^2]^2}\sin\lambda_m x=\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m/2}\tilde{F}_n\,nm}{[(mb/a)^2+n^2]^2}\sin\lambda_m x, \qquad (23)$$

$$\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m/2}\tilde{E}_n nm}{[(ma/b)^2+n^2]^2}\sin\mu_m x=\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m/2}\tilde{E}_n\,nm}{[(ma/b)^2+n^2]^2}\sin\mu_m x. \qquad (24)$$

Let us prove that equalities (23), (24) are true. We will use Young's inequality, transformed in [10] with a generalization to the form

$\alpha^2+\beta^2 \ge C\alpha^{\gamma}\beta^{2-\gamma}$, where $0\le\gamma\le 2$, $\alpha,\beta\ge 0$ and $C>0$ is some constant. (25)

Then applying (22), (25) to the evaluation of the common terms in (23), (24) leads to the results

$$\left|\frac{(-1)^{m/2}\tilde F_n\, nm}{[(mb/a)^2+n^2]^2}\sin\lambda_m x\right| \le \frac{\left|\tilde F_n\right| nm}{[(mb/a)^2+n^2]^2} \le \frac{(b/a)^{1/4}K_1 n^{1/2}m}{[(mb/a)^2+n^2]^2} \le \left.\frac{(b/a)^{1/4}K_1 n^{1/2}m}{C^2(mb/a)^{2\gamma}n^{4-2\gamma}}\right|_{\gamma=9/8} =$$

$$= \frac{K_1}{C^2(b/a)^2\, m^{5/4}n^{5/4}}\ .\ \text{Similarly}\ \left|\frac{(-1)^{m/2}\tilde E_n nm}{[(ma/b)^2+n^2]^2}\sin\mu_m x\right| \le \frac{K_1}{C^2(a/b)^2\, m^{5/4}n^{5/4}}\ . \quad (26)$$

Hence replacing the common terms in the repeated series on the left in (23), (24) with their moduli leads to convergent series, which, according to theorem 3 [7] (**394**), establishes equalities (23), (24).

5. On the convergence of trigonometric series of bending moments at the edges of a plate.

A proof of the convergence of series (3) is given. Let us first note that when $x=\pm a/2$, $y=\pm b/2$ the sum of these series is equal to zero. Now let $-a/2 < x < a/2$, $-b/2 < y < b/2$. Let's put

$$c_m = (ma/b)^2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \tilde F_n n / \Lambda_{nm}^2, \text{ где } \Lambda_{nm} = (na/b)^2 + m^2. \quad (27)$$

Then using (22) and (25) we obtain

$$|c_m| \le \left(\frac{ma}{b}\right)^2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\left|\tilde F_n\right| n}{\Lambda_{nm}^2} \le \left(\frac{ma}{b}\right)^2 \frac{K_1}{C^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{(ma/b)^{2\gamma}n^{4-2\gamma}}\Bigg|_{\gamma=9/8} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\frac{K_1}{m^{1/4}}\sum_{m=2,4,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}} = \frac{K_2}{m^{1/4}},$$

$$\lim_{m\to\infty} c_m = 0. \quad (28)$$

Next we have

$$\sum_{m=2,4,\dots}^{N}(-1)^{m/2}c_m\sin\lambda_m x = \frac{1}{2\cos\lambda_1 x}\sum_{m=2,4,\dots}^{N}(-1)^{m/2}c_m(\sin\lambda_{m+1}x+\sin\lambda_{m-1}x) = \frac{1}{2\cos\lambda_1 x}[-c_2\sin\lambda_1 x +$$

$$+(-1)^{N/2}c_N\sin\lambda_{N+1}x - \sum_{m=3,5,\dots}^{N-1}(-1)^{(m-1)/2}(c_{m+1}-c_{m-1})\sin\lambda_m x]. \quad (29)$$

Tending to the limit in (29) as $N\to\infty$ tends and taking into account (28), we arrive at the result

$$\sum_{m=2,4,\dots}^{\infty}(-1)^{m/2}c_m\sin\lambda_m x = -\frac{1}{2\cos\lambda_1 x}[c_2\sin\lambda_1 x + \sum_{m=3,5,\dots}^{\infty}(-1)^{(m-1)/2}(c_{m+1}-c_{m-1})\sin\lambda_m x]. \quad (30)$$

Here we used the convergence of the series on the right, which led to the convergence of the series on the left. Indeed, using (22), (25) and the **Mathematica11** package, we have

$$|c_{m+1}-c_{m-1}| = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty}\left|\tilde F_n\right| n\left|\frac{(m+1)^2}{(\Lambda_{nm}+2m+1)^2} - \frac{(m-1)^2}{(\Lambda_{nm}-2m+1)^2}\right| \le \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty}\left|\tilde F_n\right| nm\times$$

$$\times\left|\frac{4(\Lambda_{nm}^2-2m^2(\Lambda_{nm}-1)-1)}{((\Lambda_{nm}+1)^2-4m^2)^2}\right| \le \left(\frac{a}{b}\right)^2 K_1K_3\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty}\frac{mn^{1/2}}{\Lambda_{nm}^2} \le \left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{K_1K_3}{C^2}\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty}\frac{mn^{1/2}}{(a/b)^{2\gamma}n^{2\gamma}m^{4-2\gamma}}\Bigg|_{\gamma=7/8} =$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{1/4}\frac{K_1K_3}{C^2}\frac{1}{m^{5/4}}\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4}}, \quad (31)$$

where $\left|\frac{4(\Lambda_{nm}^2-2m^2(\Lambda_{nm}-1)-1)}{((\Lambda_{nm}+1)^2-4m^2)^2}\right| = O\left(\frac{1}{\Lambda_{nm}^2}\right) \le \frac{K_3}{\Lambda_{nm}^2}$, $K_3>0$ is some constant [7] (**707**).

Estimate (31) shows that the series on the right in (30) is majorized by a numerical convergent series, and therefore converges [7] (**430**). Therefore, in (30) the series on the left also converges.

Let us now note that

$$\left|(1/\varphi(\alpha_m)-1)(-1)^{m/2}c_m\sin\lambda_m x\right| = \left|(-e^{-\alpha_m}+\alpha_m/\operatorname{sh}\alpha_m)/\varphi_1(\alpha_m)\right||c_m| = O(e^{-2\alpha_m}m^{-1/4}) \le K_4 e^{-2\alpha_m}, \quad (32)$$

where $K_4 > 0$ – is some constant.

Then

$$\sum_{m=2,4...}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2} c_m \sin \lambda_m x}{\varphi(\alpha_m)} = \sum_{m=2,4,...}^{\infty} \frac{-e^{-\alpha_m} + \alpha_m / \operatorname{sh} \alpha_m}{\varphi_1(\alpha_m)} (-1)^{m/2} c_m \sin \lambda_m x + \sum_{m=2,4....}^{\infty} (-1)^{m/2} c_m \sin \lambda_m x < \infty . \quad (33)$$

Since here the second series on the right is the series in (30) on the left, it has been proven that it converges. The first series on the right is majorized by a numerical convergent series, which follows from inequalities (28), (32). Hence, statement (33) is true [7] (**430**). Then

$$\sum_{m=2,4,...}^{\infty} (-1)^{m/2} b_m^{(1)} \sin \lambda_m x < \infty. \quad (34)$$

Since taking into account (15) and [7] **(430)**

$$\sum_{m=2,4,...}^{\infty} \left| (-1)^{m/2} b_m^{(1)} \sin \lambda_m x \right| \le \sum_{m=2,4,...}^{\infty} \left| b_m^{(1)} \right| \le K \sum_{m=2,4,...}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty. \quad (35)$$

Hence, substituting the solution $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i$ of the infinite system (4) into the first equation of system (4), multiplying this equation by $(-1)^{m/2} \sqrt{b/a} \sin \lambda_m x$, summing over *m* for values *m* = 2, 4,… and taking into account (3), (33) and (34), we arrive at the required proof.

$$M_y(x, \pm b/2) = \sum_{m=2,4,...}^{\infty} (-1)^{m/2} \sqrt{\frac{b}{a}} \tilde{E}_m \sin \lambda_m x = \sqrt{\frac{b}{a}} \left[-\frac{8}{\pi} \sum_{m=2,4,...}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2} \sin \lambda_m x}{\varphi(\alpha_m)} c_m + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=2,4,...}^{\infty} (-1)^{m/2} b_m^{(1)} \sin \lambda_m x \right] < \infty . \quad (36)$$

The convergence of the series of bending moments $M_x(\pm a/2, y)$ (3) is established in a similar.

REFERENCES

1. Meleshko V.V. Biharmonic problem for a rectangle: history and modernity // Mat. Met. I Fiz.-Mekh.Polya, v.47, no. 3, 2004. Pp. 45-63 [in Russian].
2. Timoshenko S.P., Voinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1963. P. 580.
3. Sukhoterin M.V. Method of superpositions of correcting functions. Saint Petersburg: Publishing house of the Polytechnic University, 2009. P. 265 [in Russian].
4. . Darevsky V.M., Sharinov I.L. New solution to the problem of bending of a rectangular plateclamped at the edges // In the collection Advances in the Mechanics of Deformable Media. Moscow, Nauka, 1975. Pp. 183-194 [in Russian].
5. Seyranyan S.P. On the solution for the problem of antisymmetric bending of a rectangular plate lamped along the contour using the modified method of S.P. Timoshenko // Proceedings of the XIV International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry, September 4–13, 2022, Alushta. Moscow: MAI Publishing House, 2022. Pp. 229-232 [in Russian].
6. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Approximate methods of higher analysis. Leningrad, Moscow, Gosudarstwennoe izdatelstwo texnicko-teoreticheskoj literaturi,1949. P. 695 [in Russian].
7. Fikhtengolts G.M. Course of differential and integral calculus. Moscow: Fizmatlit, vol. II, 2003. P. 863 / vol. III, 2008. P. 727 [in Russian].
8. Seyranyan S.P. On the solution of the first boundary plane problem of the theory of elasticity for the rectangle with antisymmetrical relative axial symmetry of the boundary conditions // Topical problems of continuum mechanics. Proceedings of the VI International Conference, RA, Dilijan, October 1– 6, 2019. Publishing House of NUACA RA, IM NAS RA, IPMech. RAS, 2019. Pp. 304-308 [in Russian].
9. Seyranyan S.P. On one infinite system of linear algebraic equations of B.L.Abramyan in the first boundary plane problem theory of elasticity for a rectangle // Proceedings of the XIII International Conference on Applied Mathematics and Mechanics in the Aerospace Industry, September 6-13, 2020, Alushta. M.: MAI Publishing House, 2020. Pp. 337-310 [in Russian].
10. Seyranyan S.P. On one Navier solution for a partially loaded rectangular plate // Vestnik Tomskogo gosunta. Mathematics and Mechanics, 2009, № 1(5). Pp. 82-95 [in Russian].

Seyranyan Suren Paruir – senior reseacher of Institute of Mechanics of RA. E-mail: surenparuir@ gmail.com, seysuren@yandex.ru, phone: (+374 55) 542838.

BULK HARMONIC WAVE PROPAGATION IN A FRACTIONAL DERIVATIVE RZHANITSYN MEDIUM

Shitikova M.V., Brygar O.A.

In this study, the propagation of longitudinal and transverse plane waves in three-dimensional viscoelastic media is investigated. The shear modulus operator is described by the Rzhanitsyn fractional order operator without considering the relaxation of the bulk modulus. The frequency dependence of the following characteristics of stationary harmonic waves has been found: velocity, damping coefficient, and logarithmic decrement.

Introduction

In nature, it is not possible to find a material or body that could be considered absolutely elastic, as noted, for example, in the work of Yu. N. Rabotnov [1]. Practically all media exhibit intricate physical and mechanical characteristics that evolve over time. Consequently, the concept of viscoelasticity was formulated, which has become a fundamental tool in the investigation of both novel and conventional materials. Given the significant interest in this field, numerous comprehensive works have been dedicated to the theory and methodologies for calculating viscoelastic media [2-4].

A review of papers that explore wave propagation in viscoelastic materials using fractional-order operator models reveals that the majority of studies focus on one-dimensional media, specifically waves in viscoelastic rods [5-8].

In [9], the propagation of plane harmonic waves in a linear three-dimensional viscoelastic medium with a kernel represented by the fractional exponential function, as proposed by Yu. N. Rabotnov [1], was examined in the context of acoustic and sound waves. The relationship between the hereditary kernel and the corresponding distribution function was established, and the frequency dependence of the attenuation coefficient was explored.

In the monograph [2], the study of harmonic waves in three-dimensional thermoviscoelastic media revealed that, in addition to attenuation, these waves also exhibit dispersion, which is the frequency dependence of the phase velocity.

In this paper, we investigate the propagation of plane harmonic waves in three-dimensional viscoelastic media, the properties of which are described by fractional-order operators with the Rzhanitsyn kernel [10]. We consider media with small volume relaxation in comparison to shear relaxation, resulting in its neglecting. In this case, the fractional operator is employed to model the time dependence of the shear modulus operator. The similar formulation of the problem was considered in [11,12] adopting the simplest fractional derivatives models, namely: Kelvin-Voigt, Maxwell, and standard linear solid body models.

The equations corresponding to two models with Rzhanitsyn operators $\left(1+\tau_i\, d/dt\right)^{-\gamma}$ [10] have the form:

$$\varepsilon = J_\infty \left[\sigma + \nu_\sigma \left(1+\tau_\sigma\, d/dt\right)^{-\gamma} \sigma \right], \tag{1}$$

$$\sigma = E_\infty \left[\varepsilon - \nu_\varepsilon \left(1+\tau_\varepsilon\, d/dt\right)^{-\gamma} \varepsilon \right], \tag{2}$$

where ε and σ are the strain and stress, respectively, E_∞ and E_0 are the non-relaxed and relaxed values of the elastic modulus, $J_\infty = E_\infty^{-1}$ and $J_0 = E_0^{-1}$ are the non-relaxed and relaxed values of compliance, respectively, τ_σ and τ_ε are the creep and relaxation times, respectively, $\nu_\sigma = \Delta J / J_\infty$, $\Delta J = J_0 - J_\infty$, $\nu_\varepsilon = \Delta E / E_\infty$, $\Delta E = E_\infty - E_0$, γ $(0 \le \gamma \le 1)$ is the order of the fractional operator.

Governing equations for longitudinal and transverse waves in linear viscoelastic media

The dynamic behavior of a homogeneous isotropic viscoelastic medium is described by the following system of equations [1,2,4]:

$$\sigma_{ij} = \hat{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\hat{\mu}\varepsilon_{ij}, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \tag{1.2}$$

where σ_{ij} and ε_{ij} are the stress and strain tensors, respectively, u_i is the displacement vector, ρ is the density of the medium, an over dot denotes the time derivative of the corresponding value, the index after the comma labels differentiation with respect to the corresponding spatial coordinate, and $\hat{\lambda}$ and $\hat{\mu}$ are time-dependent operators of the Lame parameters

$$\hat{\lambda}\varepsilon = \int_0^\infty \lambda(t')\varepsilon(t-t')dt'; \quad \hat{\mu}\varepsilon = \int_0^\infty \mu(t')\varepsilon(t-t')dt'. \tag{1.3}$$

Using the relation between displacements and deformations (Cauchy relations)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{1.4}$$

and generalized Hooke's law (1.1), equations of motion (1.2) could be rewritten as

$$\rho\ddot{u}_i = \hat{\lambda}u_{k,ki} + \hat{\mu}\left(u_{k,ki} + u_{i,kk}\right). \tag{1.5}$$

Let us represent the solution as an attenuating wave

$$u_i = A_i \exp\left[\mathrm{i}\omega t - \left(\alpha + \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right)x_k\nu_k\right], \tag{1.6}$$

where A_i, c, ω, and α are the amplitude, velocity, frequency, and attenuation coefficient of the wave, respectively, ν_k is a unit vector in the direction of wave propagation, and i is an imaginary unit.

Substituting the solution (1.6) in equations of motion (1.5) yields

$$-\rho\omega^2 A_i = \left(\alpha + \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[A_k\nu_k\nu_i\tilde{\lambda} + \left(A_i + A_k\nu_k\nu_i\right)\tilde{\mu}\right], \tag{1.7}$$

From hereafter a tilde over a value will mean the Fourier image of the kernel of its operator

$$\tilde{\lambda}(\omega) = \int_0^\infty \lambda(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt, \quad \tilde{\mu}(\omega) = \int_0^\infty \mu(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}dt. \tag{1.8}$$

Relationships (1.7) allow us to determine the characteristics of wave propagation: the velocity c, the attenuation coefficient α, and the logarithmic decrement δ, that characterizes the wave attenuation in space. It is necessary to consider separately the cases of longitudinal and transverse waves since have independent characteristics. Further, the lower indices t and l would be used to indicate the characteristics of transverse and longitudinal waves, respectively.

In the case of a transverse wave $A_k\nu_k = 0$, then from (1.7) we obtain

$$\left(\alpha_t + \mathrm{i}\frac{\omega}{c_t}\right)^2 = -\frac{\omega^2\rho}{\tilde{\mu}}. \tag{1.9}$$

In the case of longitudinal waves $A_k\nu_k \neq 0$, then multiplying (1.8) by ν_i yields

$$\left(\alpha_l + \mathrm{i}\frac{\omega}{c_l}\right)^2 = -\frac{\omega^2\rho}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}. \tag{1.10}$$

It is known that relationships between the Lame parameters λ and μ and the bulk modulus K for an isotropic elastic medium are the following [13]:

$$\lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}\mu = \frac{3K(3K+E)}{9K-E}. \tag{1.11}$$

Using the Volterra correspondence principle, for an isotropic linear viscoelastic medium we have

$$\hat{M} \equiv \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} = \hat{K} + \frac{4}{3}\hat{\mu} = \frac{3\hat{K}(3\hat{K}+\hat{E})}{9\hat{K}-\hat{E}}; \quad \tilde{M} = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} = \tilde{K} + \frac{4}{3}\tilde{\mu} = \frac{3\tilde{K}(3\tilde{K}+\tilde{E})}{9\tilde{K}-\tilde{E}}, \tag{1.12}$$

where $\hat{K}$ is the bulk operator, $\hat{E}$ is the Young's modulus, and $\hat{M}$ is the operator of the so-called P-wave modulus.

Also let us introduce the loss angles as

$$\varphi_t = \arg\tilde{\mu} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\tilde{\mu}}{\operatorname{Re}\tilde{\mu}}\right), \tag{1.13}$$

$$\varphi_l = \arg\tilde{A} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}\tilde{M}}{\operatorname{Re}\tilde{M}}\right). \tag{1.14}$$

Relationships (1.9) and (1.10) allow us to obtain expressions for physical quantities of frequency that characterize the propagation and attenuation of transverse and longitudinal waves in a three-dimensional viscoelastic linear medium:

the wave number

$$\tilde{k}_t = k_{1t} + \mathrm{i}k_{2t} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\alpha_t + \mathrm{i}\frac{\omega}{c_t}\right) = \frac{\omega}{c_t} - \mathrm{i}\alpha_t = \sqrt{\frac{\omega^2\rho}{|\tilde{\mu}|}}e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi_t}{2}}, \tag{1.15}$$

$$\tilde{k}_l = k_{1l} + \mathrm{i}k_{2l} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\alpha_l + \mathrm{i}\frac{\omega}{c_l}\right) = \frac{\omega}{c_l} - \mathrm{i}\alpha_l = \sqrt{\frac{\omega^2\rho}{|\tilde{M}|}}e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi_l}{2}}; \tag{1.16}$$

the wave velocity

$$c_t^2 = \frac{\omega^2}{|\tilde{k}|^2}\sec^2\frac{\varphi_t}{2} = \frac{|\tilde{\mu}|}{\rho}\sec^2\frac{\varphi_t}{2}, \tag{1.17}$$

$$c_l^2 = \frac{\omega^2}{|\tilde{k}|^2}\sec^2\frac{\varphi_l}{2} = \frac{|\tilde{M}|}{\rho}\sec^2\frac{\varphi_l}{2}; \tag{1.18}$$

the attenuation coefficient

$$\alpha_t^2 = |\tilde{k}|^2\sin^2\frac{\varphi_t}{2} = \frac{\omega^2\rho}{|\tilde{\mu}|}\sin^2\frac{\varphi_t}{2}, \tag{1.19}$$

$$\alpha_l^2 = |\tilde{k}|^2\sin^2\frac{\varphi_l}{2} = \frac{\omega^2\rho}{|\tilde{M}|}\sin^2\frac{\varphi_l}{2}; \tag{1.20}$$

the logarithmic decrement

$$\delta_t = 2\pi\frac{\alpha_t c_t}{\omega} = 2\pi tg\frac{\varphi_t}{2}, \tag{1.21}$$

$$\delta_l = 2\pi\frac{\alpha_l c_l}{\omega} = 2\pi tg\frac{\varphi_l}{2}. \tag{1.22}$$

For further investigation of the wave propagation in viscoelastic media, we will introduce a specific type of viscoelastic operators that incorporate the Rzhanitsyn kernel.

Propagation of viscoelastic waves considering fractional operator models

In the case of isotropic elastic materials, there are only two independent constants, and all others could be derived from the given two [13]. Similarly, in the case of isotropic viscoelastic media, two time-dependent operators should be pre-defined or selected based on experimental data [14].

Let us assume that the operator for the bulk modulus $\hat{K}$ is time-independent, i.e. volume relaxation is not taken into account. This assumption is valid for materials the volume relaxation of which is much lower than the shear relaxation [1], i.e. $\tilde{K} = K = \text{const}$.

Thus, it is necessary to set the second operator, for which we will consider model with the Rzhanitsyn fractional order operator [5].

Modeling the shear modulus operator using the Rzhanitsyn model as a relaxation kernel

Let us define the shear operator $\hat{\mu}$ using the Rzhanitsyn model as the relaxation kernel [5]

$$\hat{\mu} = \mu_\infty\left[1 - \nu_\varepsilon^\mu\left(1 + \tau_\varepsilon^\mu\, d/dt\right)^{-\gamma}\right], \tag{2.1}$$

where μ_∞ and μ_0 are non-relaxed and relaxed shear moduli, respectively, $\Delta\mu = \mu_\infty - \mu_0$ is the defect of the shear modulus showing the difference between $\mu_\infty - \mu_0$, $\nu_\varepsilon^\mu = \Delta\mu/\mu_\infty$ is the relative defect of the shear modulus, τ_ε^μ is the shear relaxation time.

The Fourier image of the kernel of the shear modulus operator will take the form:

$$\tilde{\mu} = \mu_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon^\mu \left(1 + \tau_\varepsilon^\mu i\omega \right)^{-\gamma} \right]; \tag{2.2}$$

Let us find the real and imaginary parts, and the square of the absolute value:

$$\operatorname{Re}\tilde{\mu} = \mu_\infty \left(1 - \nu_\varepsilon^\mu \left(D_\varepsilon^\mu \right)^{-\gamma} \cos\left(\gamma d_\varepsilon^\mu \right) \right); \quad \operatorname{Im}\tilde{\mu} = \mu_\infty \nu_\varepsilon^\mu \left(D_\varepsilon^\mu \right)^{-\gamma} \sin\left(\gamma d_\varepsilon^\mu \right); \tag{2.3}$$

$$\left|\tilde{\mu}\right|^2 = \mu_\infty^2 \left(1 + \left(\nu_\varepsilon^\mu \right)^2 \left(D_\varepsilon^\mu \right)^{-2\gamma} - 2\nu_\varepsilon^\mu \left(D_\varepsilon^\mu \right)^{-\gamma} \cos\left(\gamma d_\varepsilon^\mu \right) \right); \tag{2.4}$$

Using the expressions for the real and imaginary parts (2.3), we could calculate the tangent of the loss angle according to the formula (1.14):

$$\tan\varphi_t = \frac{\nu_\varepsilon^\mu \left(D_\varepsilon^\mu \right)^{-\gamma} \sin(\gamma d_\varepsilon^\mu)}{1 - \nu_\varepsilon^\mu \left(D_\varepsilon^\mu \right)^{-\gamma} \cos(\gamma d_\varepsilon^\mu)}; \quad D_\varepsilon^\mu = \sqrt{1 + \left(\tau_\varepsilon^\mu \omega \right)^2}; \quad d_\varepsilon^\mu = \arctan\left(\omega \tau_\varepsilon^\mu \right). \tag{2.5}$$

The asymptotic values of the transverse wave velocity, attenuation coefficient, and logarithmic decrement are the following:

when $\omega \to 0$:

$$\lim_{\omega\to 0} c_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega\to 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega\to 0} \delta_t = 0; \tag{2.6}$$

when $\omega \to \infty$

$$\lim_{\omega\to \infty} c_t = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \quad \lim_{\omega\to \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega\to \infty} \delta_t = 0; \tag{2.7}$$

Asymptotic values of the longitudinal wave velocity, attenuation coefficient, and logarithmic decrement:

when $\omega \to 0$:

$$\lim_{\omega\to 0} c_l = \sqrt{\frac{4/3\mu_0 + K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \quad \lim_{\omega\to 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega\to 0} \delta_l = 0; \tag{2.8}$$

when $\omega \to \infty$:

$$\lim_{\omega\to \infty} c_l = \sqrt{\frac{4/3\mu_\infty + K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \quad \lim_{\omega\to \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega\to \infty} \delta_l = 0; \tag{2.9}$$

where λ_0 and λ_∞ are the relaxed and non-relaxed values of the first Lame coefficient, respectively.

Conclusion

The behavior of harmonic waves in three-dimensional isotropic viscoelastic media, the properties of which have been represented by models with the fractional Rzhanitsyn operator as the relaxation kernel has been explored. Analytical formulas for the real and imaginary parts of the operator, as well as for the tangent of the loss angle have been derived. The asymptotic values of the velocities of longitudinal and transverse waves, their damping coefficients, and logarithmic decrements have been calculated.

From relationships (2.6)-(2.9) it is evident that the wave propagation velocity varies from one finite magnitude to another, what means that the considered model really describe wave-type processes.

This research has been supported by the Russian Science Foundation (Project No. 25-11-00140).

REFERENCES

1. Rabotnov Yu.N. Creep Problems in Structural Members. North-Holland: Amsterdam, The Netherlands, 1969.
2. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York: Academic Press, 1971.
3. Rabotnov Yu.N. Elements of Hereditary Solid Mechanics. Nauka: Moscow, Russia, 1980 (in Russian).
4. Tschoegl N.W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 769 p.
5. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. Applied Mechanics Reviews vol. 50, iss. 1, 1997. P. 15–67.
6. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Waves in fractional Zener type viscoelastic media. Journal of Mathematical Analysis and Applications. vol. 365, iss. 1, 2010, P. 259–268.
7. Atanackovi´c T., Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods. Abstract and Applied Analysis. 2011. Vol. 2011. P. 1–32.
8. Brown T. S., Du S., Eruslu H., Sayas F.-J. Analysis of models for viscoelastic wave propagation. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. vol. 3, iss. 1, 2018, P. 55–96.
9. Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A. Propagation of acoustic waves in a hereditary elastic medium. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, vol. 9, iss. 5, 1968, P. 589–592.
10. Rzhanitsyn A. R. Theory of Creep. Moscow: Stroyizdat Publ., 1968 (in Russian).
11. Shitikova M.V., Modestov K.A. Mathematical modelling of viscoelastic media without bulk relaxation via fractional calculus approach. Mathematics, vol. 13, iss. 3, 2025, PaperID 350.
12. Modestov K.A., Shitikova M.V. Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models. Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, vol. 25, iss. 2, 2025, P. 214–230 (in Russian).
13. Landau L.D., Lifshits E.M. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).
14. Shitikova M.V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: A review. Mechanics of Solids, vol. 57, iss. 1, 2022, P. 1–33.

Information about authors

Shitikova M.V. – Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Institute of Digital Technologies and Modeling in Construction, +7 (910) 345-04-12
E-mail: ShitikovaMV@mgsu.ru

Brygar O.A. – Master student, Moscow State University of Civil Engineering, Institute of Digital Technologies and Modeling in Construction, +7 (978) 872-15-32
E-mail: BrygarOA@mgsu.ru

ANALYSIS OF HARMONIC WAVE PROPAGATION IN VISCOELASTIC MEDIA CONSIDERING THE P-WAVE MODULUS VIA THE FRACTIONAL DERIVATIVE STANDARD LINEAR SOLID MODEL

Shitikova M.V., Modestov K.A.

In the present paper, harmonic waves propagating in 3D isotropic viscoelastic media are analyzed using the fractional derivative standard linear solid model. It is known that only the first and second Lamé constants, or the bulk and shear moduli, appear in Hooke's law for three-dimensional media, but not Young's modulus or Poisson's ratio. This indicates that the bulk and Lamé operators are the most intrinsic operators to express stress in terms of strain when studying wave propagation in 3D viscoelastic media. That is why in the present paper, the emphasis is made on the comprehensive analysis of time-dependent operator for the P-wave modulus. In so doing, the fractional derivative standard linear solid model is utilized for defining the time-dependent modulus of the P-wave, which governs the velocity of the longitudinal wave. Asymptotic values of the wave velocities, their coefficients of attenuation and logarithmic decrements have been found.

1. **Introduction**

As noted by Yu.N. Rabotnov [1], absolutely elastic bodies do not exist in nature. All media exhibit viscoelastic properties to some extent, and their main physical and mechanical characteristics are time-dependent. Due to the widespread application of viscoelasticity theory in the study of the behavior of new and traditional materials, a considerable attention has been paid for theories and methods of investigating viscoelastic media under various types of loads [2-6].

That is why in the present paper, the emphasis will be made on the comprehensive analysis of time-dependent operators for Lamé parameters. Using the procedure for the study of viscoelastic operators suggested in Rossikhin and Shitikova [7,8], below the fractional derivative standard linear solid model would be utilized for the case when the P-wave modulus $M = \lambda + 2\mu$ (which governs the velocity of the longitudinal wave) is given a priori.

2. **Governing equations for the analysis of longitudinal and transverse waves in linear viscoelasticity**

The set of equations describing the dynamic behaviour of linear isotropic viscoelastic media has the form [1,2,6]:

$$\sigma_{ij} = \hat{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\hat{\mu}\varepsilon_{ij}, \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i, \tag{2.2}$$

where σ_{ij} and ε_{ij} are the stress and strain tensor components, respectively, u_i are the displacement vector components, ρ is the density, an overdot denotes the time-derivative, a low index after a comma labels the spatial differentiation with respect to the corresponding coordinate, and $\hat{\lambda}$ and $\hat{\mu}$ are Lamé's parameters operators which depend on the time t

$$\hat{\lambda}\varepsilon = \int_0^\infty \lambda(t')\varepsilon(t-t')\,dt', \tag{2.3}$$

$$\hat{\mu}\varepsilon = \int_0^\infty \mu(t')\varepsilon(t-t')\,dt'. \tag{2.4}$$

The strain-displacement relationships

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.5}$$

and stress-strain relationships (2.1), the equations of motion (2.2) could be reduced to

$$\rho\ddot{u}_i = \hat{\lambda}u_{k,ki} + \hat{\mu}\left(u_{k,ki} + u_{i,kk}\right). \tag{2.6}$$

Let us seek the solution of (2.3) in the form of the decaying wave

$$u_i = A_i \exp\left[i\omega t - \left(\alpha + i\frac{\omega}{c}\right)x_k\nu_k\right], \tag{2.7}$$

where A_i, c, ω, and α are, respectively, the wave amplitude, its velocity, frequency, and damping coefficient, and ν_k are components of the unit vector normal to the direction of the wave propagation.

Substituting (2.6) in the equations of motion (2.7) yields

$$-\rho\omega^2 A_i = \left(\alpha + i\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[A_k \nu_k \nu_i \tilde{\lambda} + \left(A_i + A_k \nu_k \nu_i\right)\tilde{\mu}\right], \tag{2.8}$$

where a tilde over a certain physical value denotes the Fourier image of a kernel of its operator

$$\tilde{\lambda}(\omega) = \int_0^\infty \lambda(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{2.9}$$

$$\tilde{\mu}(\omega) = \int_0^\infty \mu(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{2.10}$$

Relationships (2.8) allow one to determine the wave velocities c, damping coefficient α and logarithmic decrement δ, defining the wave attenuation in space. In so doing it is needed to separate two types of waves, namely: transverse waves and longitudinal waves propagating with different velocities, c_t and c_l, respectively. From hereafter all characteristics of transverse and longitudinal waves will be denoted with lower indices t and l, respectively.

Multiplying (2.8) by ν_i and considering that for the longitudinal wave $A_k \nu_k \neq 0$ yield

$$\left(\alpha_l + i\frac{\omega}{c_l}\right)^2 = -\frac{\omega^2\rho}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} = -\frac{\omega^2\rho}{M} \tag{2.11}$$

where

$$\hat{M} \equiv \hat{\lambda} + 2\hat{\mu}, \tag{2.12}$$

$$M = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}. \tag{2.13}$$

Introduce the mechanical loss angle

$$\varphi_l = \arg M = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im} M}{\operatorname{Re} M}\right). \tag{2.14}$$

Then from relationships (2.11) it is possible to obtain relationships for the physical values characterizing the propagation and attenuation of transverse and longitudinal waves in a three-dimensional viscoelastic medium, namely:
velocities of longitudinal waves

$$c_l^2 = \frac{\omega^2}{\left|\tilde{k}\right|^2}\sec^2\frac{\varphi_l}{2} = \frac{|M|}{\rho}\sec^2\frac{\varphi_l}{2}; \tag{2.15}$$

damping coefficients

$$\alpha_l^2 = \left|\tilde{k}\right|^2 \sin^2\frac{\varphi_l}{2} = \frac{\omega^2\rho}{|M|}\sin^2\frac{\varphi_l}{2}, \tag{2.16}$$

and logarithmic decrements of attenuation

$$\delta_l = 2\pi\frac{\alpha_l c_l}{\omega} = 2\pi\tan\frac{\varphi_l}{2}. \tag{2.17}$$

For further analysis of wave propagation in viscoelastic media, it is a need to specify a concrete type of viscoelastic operators.

3. The analysis of viscoelastic wave propagation via the fractional derivative standard linear solid model

Fractional derivative standard linear solid model provides the following form of the operator of the P-wave modulus:

$$\hat{M} = M_0\frac{1 + \tau_\sigma^\gamma D^\gamma}{1 + \tau_\varepsilon^\gamma D^\gamma}, \tag{3.1}$$

where M_0 is the relaxed magnitude of the P-wave modulus, τ_ε is the relaxation time, τ_σ is the retardation time, and D^γ is the Riemann-Liouville fractional derivative of the order $0 < \gamma < 1$ [10].

From relationship (3.1) it is evident that the function $M(t)$ varies according to the following relaxation law:

$$M(t) \equiv \hat{M}H(t) = M_0 + (M_\infty - M_0) e_\gamma\left(\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right),$$

where $e_\gamma(t) \equiv E_\gamma(-t^\gamma)$ [11], and $E_\gamma(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\gamma n + 1)}$ is the Mittag-Leffler function.

Thus, for the given model, $M(t)$ varies from its nonrelaxed (instantaneous) magnitude M_∞ to relaxed (prolonged) magnitude M_0.

In this case, the Fourier-image of the operator of the P-wave modulus, its absolute value and argument, as well as the mechanical loss angle take the form

$$M = M_0 \frac{1 + (\omega\tau_\sigma)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega\tau_\varepsilon)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}, \tag{3.2}$$

$$|M|^2 = M_0^2 \frac{1 + 2(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + (\omega\tau_\sigma)^{2\gamma}}{1 + 2(\omega\tau_\varepsilon)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + (\omega\tau_\varepsilon)^{2\gamma}}, \tag{3.3}$$

$$\varphi_l = \arg M = \operatorname{atan}\left\{\frac{\left[(\omega\tau_\sigma)^\gamma - (\omega\tau_\varepsilon)^\gamma\right]\sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}{1 + \left[(\omega\tau_\sigma)^\gamma + (\omega\tau_\varepsilon)^\gamma\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + (\omega\tau_\sigma)^\gamma(\omega\tau_\varepsilon)^\gamma}\right\}. \tag{3.4}$$

Asymptotic magnitudes of the longitudinal wave velocity, damping coefficient, and logarithmic decrement are the following:

at $\omega \to 0$:

$$\lim_{\omega\to 0} c_{l(0)} = \sqrt{\frac{M_0}{\rho}}, \quad \lim_{\omega\to 0}\alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega\to 0}\delta_l = 0; \tag{3.5}$$

at $\omega \to \infty$:

$$\lim_{\omega\to\infty} c_{l(\infty)} = \sqrt{\frac{M_\infty}{\rho}}, \quad \lim_{\omega\to\infty}\alpha_l = \begin{cases} \infty, & \gamma < 1, \\ \dfrac{\tau_\varepsilon^{-1} - \tau_\sigma^{-1}}{2c_{l(\infty)}}, & \gamma = 1, \end{cases} \quad \lim_{\omega\to\infty}\delta_l = 0. \tag{3.6}$$

The dimensionless frequency dependence of the dimensionless characteristics of the longitudinal wave, the P-wave modulus of which is defined by the fractional derivative standard linear solid model, are shown in Fig. 1, when the fractional parameter takes on the following magnitudes: $\gamma =$ 0.4 (solid line), 0.6 (dashed line), 0.8 (dash-and-dot line), and 1 (dotted line).

Reference to Fig. 1 shows that for any magnitudes of the fractional parameter, as frequency varies from 0 to infinity, the wave velocity monotonically increases from one finite value to another (Fig.1, a), which, as is seen from (3.5) and (3.6), are governed by the nonrelated and relaxed magnitudes of the P-wave modulus, respectively. The damping coefficient for $0 < \gamma < 1$ increases

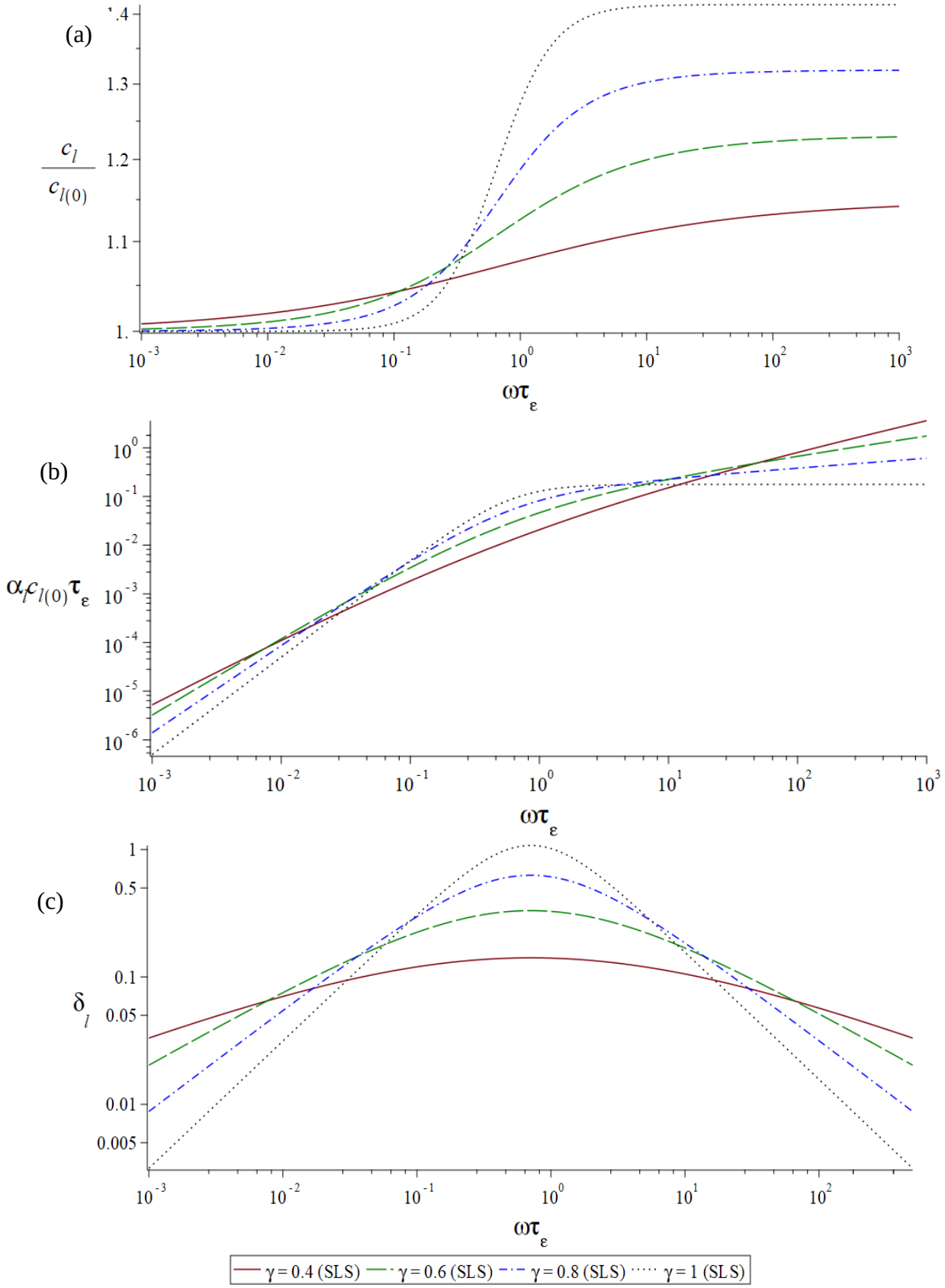


Fig.1. The dimensionless frequency dependence of the dimensionless characteristics of the longitudinal wave, the P-wave modulus of which is defined by the fractional derivative standard linear solid model: a) wave velocity, b) damping coefficient, and c) decrement

monotonically from 0 to infinity, while for the classical standard linear solid model at $\gamma = 1$ it tends to a certain finite magnitude (Fig.1, b). The logarithmic decrement of the wave attenuation first increases from zero to a certain maximum magnitude, and then decreases to zero with the unbound increase in the frequency (Fig.1, c).

4. **Conclusion**

Since the application of the standard linear solid model provides finite magnitudes of wave propagation velocities for all frequencies, then it refers to the pure wave models.

The approach proposed in this paper for modelling viscoelastic media via pre-assignment of the time-dependent P-wave modulus without considering bulk relaxation, is of practical importance, since identifying Lamé parameters from time-dependent elastic wave measurements is assumed to be the easiest way for this purpose.

This research was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 25-11-00140).

REFERENCE

1. Rabotnov Yu.N. Creep Problems in Structural Members. Amsterdam: North-Holland, 1969.
2. Christensen R. M. Theory of Viscoelasticity: An Introduction. New York: Academic Press, 1982.
3. Bland D. The Theory of Linear Viscoelasticity. New York: Pergamon Press, 1960.
4. Rabotnov Yu.N. Elements of Hereditary Solid Mechanics. Moscow: Nauka, 1980.
5. Lokshin A.A., Suvorova Yu.V. Mathematical Theory of Wave Propagation in Hereditary Media [in Russian]. Moscow: Moscow State University, 1982.
6. Tschoegl N.W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. Berlin: Springer, 1989.
7. Shitikova M.V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: A review; Mechanics of Solids, vol. 57, issue 1, pp. 1-33 (2022).
8. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids, In: Fractional Calculus: History, Theory and Applications, Eds. R. Daou and M. Xavier, pp. 165–22. New York: Nova Science Publishers, 2015.
9. Modestov K.A., Shitikova M.V. Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models, Izvestiya of Saratov University. New series. Mathematics. Mechanics. Informatics, vol. 25, issue 2, pp.214-230 (2025).
10. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987 (Engl ed. Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993).
11. Holm S. Waves with Power-Law Attenuation. Cham: Springer, 2019.
12. Shitikova M.V., Modestov K.A. Mathematical modelling of viscoelastic media without bulk relaxation via fractional calculus approach. Mathematics, vol. 13, issue 3, PaperID 350 (2025).

Information about authors

Shitikova Marina V. – Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Department of High Mathematics
E-mail ShitikovaMV@mgsu.ru

Modestov Konstantin A. – post graduate student, Voronezh State Technical University, Faculty of Civil Engineering
E-mail modestovk@mail.ru

SOME ANALYTICAL SOLUTIONS OF PROBLEMS RELATED TO INTERFACE CRACKS

Ustinov K.B.

Linear elastic problems are considered related to interface cracks in isotropic and anisotropic media; in particular, problems of semi-infinite crack in elastic bi-layer and composed half-plane, problems of central semi-infinite crack in anisotropic bi-layers, problems of composed wedges are addressed. The method of solving consisted in application of integral transform (Bi-lateral Laplace, Fourier or Mellin transforms to the system of equations of elasticity and boundary conditions, followed by reducing the problems in question to scalar or matrix Riemann boundary value problems. Application of Wiener-Hopf method allowed obtaining closed form solutions of the formulated problems. The key advantage of the method is that the obtained solutions are valued for any range of parameters, including extreme values, where researches usually face the difficulties when applying conventional numerical methods. Meanwhile due to inherent limitation of the method the solutions were obtained only for vanishing second Dundur's parameter of elastic mismatch. For all above problems closed forms analytical expressions were obtained for stress intensity factors. For some problems T-stresses were also obtained. Besides asymptotics of displacements far from the crack tip were obtained allowing posing adequate boundary conditions when modeling delaminations in the frame of structural theories.

1. **Introduction.** The problems related to appearance and growth of cracks along the materials interfaces are given serious attention in fracture mechanics, primarily due to their importance for applications, such as delamination of multilayer structures and delamination of coatings.

Among the works devoted to interface cracks, one should emphasize the fundamental works [1, 2]; in [1] the distribution of stresses near the crack tip was obtained, and the type of singularity was described, in [2] the generalization of Irwin formula i.e. the relation between the stress intensity factors (SIF) and the energy release rate (ERR) was obtained. In [3] it was shown that the nature of the distribution of stress fields for a wide class of problems in the two-dimensional isotropic case, including problems on interface cracks, is determined by only two combinations of elastic parameters, which were later called Dundurs parameters.

Oscillation of stresses and displacements near the crack tip is a factor that complicates the analysis of the behavior of interface cracks [1]. A lot of attention was paid to the study of the mathematical aspects of this fact and ways to overcome this "non-physical" behavior. However, the existence of oscillations in the solution, very similarly to the existence of stress singularity in the solution of a crack in a homogeneous elastic medium, is caused by the mathematical formulation of the problem, in particular, by the assumptions about linear elasticity for any arbitrarily large stresses, continuity on arbitrarily small scales, zero radius of the crack tip. In reality, all these conditions are satisfied only approximately and only within certain limits. Therefore, the solutions obtained are valid only for those scales and up to the extent for which the specified conditions are valid. Solutions of problems with such singularities can be considered as external asymptotics for internal problems, the solutions of which will give the necessary criteria of fracture. However, for any such internal problem, all external (boundary) conditions will be determined only by the coefficient at the singularity for the external problem, which will play the role of the critical value.

Fracture parameters (SIF and ERR) do not exhaust the range of problems on interface cracks. For sufficiently extended delaminations, when the sizes of cracks become much larger than the thicknesses of the structural layers, it becomes attractive to use the theory of plates (or shells, for curved sections) to describe the deformation of the delaminations [4–7]. If the base is sufficiently rigid, the plate simulating the delamination is usually considered as rigidly clamped [4], allowing quite easy modeling evolution of the delamination [5]. More accurate solutions are obtained using elastic clamping as boundary conditions, when the kinematic quantities at the clamping point (two components of displacements and rotation angle) are considered as depending on the force parameters - longitudinal and transverse force and bending moment by means of the compliance matrix [15]. Previously [6, 8–14], similar boundary conditions of a simpler form were considered (2x2 matrix, accounting for only the influence of force factors on rotation). Compliance matrix components cannot be calculated from elementary considerations. FEM [6, 10–13], numerical methods for solving integral equations [9], and asymptotic analytical methods [8, 15] can be used to calculate them.

2. **Application of integral transforms and reduction to the matrix Riemann problem.** One of the effective methods for solving problems of theory of elasticity related to interface cracks, in particular, related to delamination of multilayer structures and delamination of coatings, is the reduction of them to scalar or matrix Riemann problems [16, 17, 8, 15, 18].

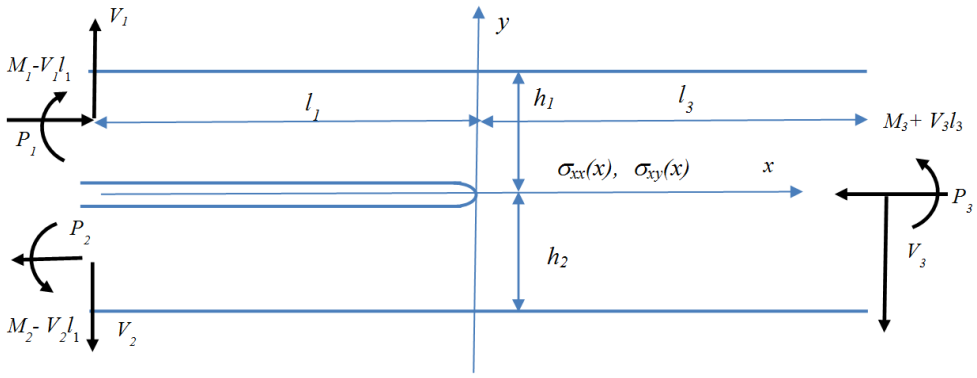


Figure 1. Geometry and applied loading.

Consider in 2-D (plane strain or plane stress) elastic layer $-h_2 < y < h_1$ composed by two layers $-h_2 < y < 0$ and $0 < y < h_1$ of different elastic properties, separated by a semi-infinite crack $y = 0, \quad x < 0$ (Fig. 1). Limit $h_2 \to \infty$ corresponds to half-plane. Mechanical behavior is determined by equations of elasticity

$$\sigma_{ij,i} = 0\,,\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right),\ \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{11,22} = 2\varepsilon_{12,12}\,,\ \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}\,,\ i = 1,2 \tag{1}$$

Here σ_{ij} are components of stress tensor; ε_{ij} are components of strain tensor; u_i are components of displacement vector; s_{ijkl} are components of tensor of compliance (the inverse of tensor of elasticity). Boundaries $y = h_1,\ y = -h_2$ and $y = 0, \quad x < 0$ are free of stresses:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \text{for } y = \pm h, \text{ and for } y = 0, \quad x < 0 \tag{2}$$

The load is applied at infinity in the form of bending moments, M_i, longitudinal and transverse forces $P_i, V_i, \mathrm{i} = 1 \div 3$ (Fig. 1). Additional moments $V_i l_i \ \left(l \to \infty\right)$ are applied to compensate moments due to the transverse forces.

Due to the global equilibrium among nine introduced values only six are independent:

$$P_3 = P_1 - P_2\,,\ M_3 = M_1 - M_2 + \frac{P_1 h_1 + P_2 h_2}{2} + P_3\Delta_h\,,\ V_3 = V_1 - V_2\,,\ \Delta_h = h_1\frac{1 - \Sigma\eta^2}{2\eta\left(1 + \Sigma\eta\right)} \tag{3}$$

Here and η and Σ are ratios of thicknesses of the layers and elastic constants

$$\eta = h_1 / h_2\,, \qquad \Sigma = s_{1111}^{(2)} / s_{1111}^{(1)} \tag{4}$$

Note that there exist two combinations of loads (so called void loads) that do not affect the stress intensity [5], thus 4 independent values determining stress intensity is chosen in the form of [15]:

$$M = -\int_0^\infty x\sigma_{yy}\left(x,0\right)dx\,,\ N = \int_0^\infty \sigma_{yy}\left(x,0\right)dx\,,\ T = \int_0^\infty \sigma_{xy}\left(x,0\right)dx\,,\ \tau_\infty = \lim_{x\to\infty}\sigma_{xy}\left(x,0\right) \tag{5}$$

Their relations to the values depicted in Fig. 1 are

$$\begin{gathered} M = \frac{M_1\left(3\eta^2\Sigma + 4\eta\Sigma + 1\right) + M_2\eta^2\Sigma\left(3 + 4\eta + \eta^2\Sigma\right)}{\Delta} + \frac{\left(P_1 + \eta\Sigma P_2\right)\left(1 - \eta^2\Sigma\right)h}{2\Delta} \\ T = \frac{\left(P_1 + \eta\Sigma P_2\right)\left(\eta^3\Sigma + 1\right)}{\Delta} + \frac{\left(M_2 - M_1\right)6\eta^2(\eta + 1)\Sigma}{h\Delta} \\ N = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2}\frac{\left(\Sigma^2\eta^4 + 4\Sigma\eta^3 - 4\Sigma\eta - 1\right)}{\Delta}\,,\ \tau_\infty = \frac{6\Sigma\eta^2(\eta + 1)}{h\Delta}\left(V_2 - V_1\right) \\ \Delta = \eta^4\Sigma^2 + 4\eta^3\Sigma + 6\eta^2\Sigma + 4\eta\Sigma + 1 \end{gathered} \tag{6}$$

For each half-layer (or half-plane) the solution relating derivatives of displacements and stresses along the internal boundary is obtained. Those relations may be written in the form of systems of integral equations, and after performing an integral transform (Fourier [18], or bi-lateral Laplace [8, 15]) in the form of a system of ordinary differential equations. Summing the values for the transforms of the derivative displacements, we obtain the desired system corresponding to the matrix Riemann problem (in the case of applying the Laplace transform - on the imaginary axis, Fourier - on the real one).

$$\mathbf{F}_{-}(p)=\mathbf{K}(p)\mathbf{F}_{+}(p)$$

$$\mathbf{F}_{-}(p)=\frac{E^{(1)}}{2(1+\Sigma)}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix}v^{(1)}(x,0)-v^{(2)}(x,0)\\ u^{(1)}(x,0)-u^{(2)}(x,0)\end{Bmatrix}e^{-px}dx,\quad \mathbf{F}_{+}(p)=\int_{0}^{\infty}\begin{Bmatrix}\sigma_{yy}(x,0)\\ \sigma_{xy}(x,0)\end{Bmatrix}e^{-px}dx \tag{7}$$

Here matrix-functions $\mathbf{F}_{\pm}(p)$ are holomorphic in the left and right half-planes of complex plane p. Matrix-function (the problem coefficient) $\mathbf{K}(p)$ is known for particular configurations. To pose the problem it is also necessary to restrict behavior of the solution at the key points, which is done by using "physical" consideration [16, 8]

$$\mathbf{F}_{+}(p)=\begin{Bmatrix}N+Mp+o(p)\\ \tau_{\infty}p^{-1}+T+o(1)\end{Bmatrix},\ \mathrm{Re}\,p\to 0+,\qquad \mathbf{F}_{+}(p)=O\left(p^{1-\nu}\right),\ \ \nu<1,\ \mathrm{Re}\,p\to\infty \tag{8}$$

3. Solution of the matrix Riemann problem. The key part of the solution consists in factorization of the coefficient $\mathbf{K}(p)$, i.e. its representations as a product of matrix-functions, holomorphic in the left and right parts of the complex plane. At present, the general solution to this problem is still unknown. For the problems under consideration, in a number of special cases, the form of the matrix makes it possible to apply the Khrapkov method [16], or to reduce the coefficient of the problem to a diagonal form. In particular, solutions were obtained for the following problems:

- A layer on a half-plane when the second Dundurs parameter is equal to zero [8].
- Two layers of the same thickness when the second Dundurs parameter is equal to zero [15].
- Orthotropic layer with a central semi-infinite crack, the principal axes of elasticity tensor being aligned with the external boundaries of the layer [19].
- A layer with a central semi-infinite crack composed by two orthotropic elastic half-layers of the same material but with the principal axes of elasticity tensor aligned at the opposed angles (to be published).

For the first problem, three independent solutions were obtained, corresponding to the bending moment and the longitudinal and transverse forces applied to the peeling section of the layer. For the other three problems, four independent solutions were obtained, corresponding to bending moments, pairs of longitudinal and transverse forces applied to the peeling areas, and asymmetrically applied transverse forces. Besides, a solution for particular combination of elastic properties and thicknesses of parts of bilayer was obtained by scaling technique [20].

This used method is efficient for obtaining the values of interest: SIF and compliance coefficients. The asymptotics of the Laplace images of the found matrix functions at infinity correspond to the behavior of the originals at zero, which makes it possible to obtain the SIF.

$$\begin{Bmatrix}K_I\\ K_{II}\end{Bmatrix}=\mathbf{k}_{\mathbf{M}}M+\left(\mathbf{k}_{\mathbf{T}}+\frac{\alpha}{2}\mathbf{k}_{\mathbf{M}}\right)T+\mathbf{k}_{\mathbf{N}}N+\mathbf{k}_{\mathbf{A}}\tau_{\infty} \tag{9}$$

$$\mathbf{k}_{\mathbf{M}}=\sqrt{12}\begin{pmatrix}\cos\omega\\ \sin\omega\end{pmatrix},\ \mathbf{k}_{\mathbf{T}}=\sqrt{4-3\alpha^2}\begin{pmatrix}-\sin\omega\\ \cos\omega\end{pmatrix},\ \mathbf{k}_{\mathbf{N}}=\delta\mathbf{k}_{\mathbf{M}}-\frac{\alpha\sqrt{3}}{\sqrt{4-3\alpha^2}}\mathbf{k}_{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{k}_{\mathbf{A}}=\frac{\alpha}{2}\left(\delta-\frac{\sqrt{4-3\alpha^2}}{\sqrt{12}}\right)\mathbf{k}_{\mathbf{M}}+\left(\delta_p-\frac{\sqrt{3}\alpha^2}{2\sqrt{4-3\alpha^2}}\right)\mathbf{k}_{\mathbf{T}} \tag{10}$$

The asymptotics of the Laplace transforms of the found matrix-functions at zero correspond to the displacements of the crack edges far from the tip [15], and their finding allows one to extract the required coefficients of the compliance matrix. For the kinematic values corresponding to the relative

displacement of the inner banks, after correcting typos [15], the coefficients of the compliance matrix have the form (for the same problem)

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v' h \\ \Delta v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E^{(1)}} + \frac{1}{E^{(2)}} \right) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ Mh^{-1} \\ N \\ \tau_\infty \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$g_{11} = \frac{4-3\alpha^2}{2}\delta_p + \frac{3\alpha^2}{2}\delta - \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2}\alpha^2,\ g_{12} = \alpha\left(3\delta - \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} \right),$$

$$g_{13} = \frac{\alpha}{8}\left(\sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 - \frac{1}{5}\alpha,$$

$$g_{14} = \frac{1}{15} + \delta_p^2 + \frac{\alpha^2}{4}\left(1 + 3\delta^2 - 3\delta_p^2 \right) - \frac{\alpha^2}{4}\sqrt{12-9\alpha^2}\left(\delta + \delta_p \right)$$

$$g_{21} = \left(\frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2} - 3\delta \right)\alpha,\ g_{22} = -6\delta,\ -g_{23} = \frac{3}{5} + 3\delta^2 + \frac{3}{4}\alpha^2,$$

$$g_{24} = \alpha\left(\frac{7}{10} - \frac{9}{8}\alpha^2 - \frac{3}{2}\delta^2 + \frac{\sqrt{12-9\alpha^2}}{2}\delta_m \right),$$

$$g_{31} = \frac{\alpha}{8}\left(\sqrt{4-3\alpha^2} - \sqrt{12}\delta \right)^2 + \frac{1}{5}\alpha,\ \ g_{32} = -\frac{3}{5} + 3\delta^2 + \frac{3}{4}\alpha^2,$$

$$g_{33} = \delta_V = 2\delta^3 - \frac{24\zeta(3)}{\pi^3} + \frac{3\alpha^2}{2}\left(2\delta - \delta_p \right) - \left(J_3 + \beta_3 \right),$$

$$g_{34} = \alpha\delta^3 - \frac{12\alpha\zeta(3)}{\pi^3} + \frac{3\alpha^3}{4}\left(2\delta - \delta_p \right) + \frac{\alpha^3 - 4\alpha\delta\delta_p}{8}\sqrt{12-9\alpha^2} - \frac{\alpha}{2}\left(J_3 + \beta_3 \right) \tag{12}$$

$$2A(s) = \tanh s \left(\tanh s + s\sqrt{1+\alpha^2 s^2}\cosh^{-2} s \right) / \left(1 - s^2 \sinh^{-2} s \right)$$

$$2B(s) = \left(1 - s\sqrt{1+\alpha^2 s^2}\sinh^{-1}\cosh^{-1} s \right) / \left(1 - s^2 \sinh^{-2} s \right)$$

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left\{ \ln\sqrt{A(s)B(s)} \right\}\frac{ds}{s},\ \beta_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left\{ \left(1+\alpha^2 s^2 \right)^{-1/2} \ln\left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}}\frac{\alpha s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2}+1} \right] \right\}\frac{ds}{s} \tag{13}$$

$$J_3 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3}\left\{ \ln\sqrt{A(s)B(s)} \right\}\frac{ds}{s},\ \beta_3 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d^3}{ds^3}\left\{ \left(1+\alpha^2 s^2 \right)^{-1/2} \ln\left[\sqrt{\frac{A(s)}{B(s)}}\frac{\alpha s \coth s}{\sqrt{1+\alpha^2 s^2}+1} \right] \right\}\frac{ds}{s}$$

$$\delta = \frac{4\log 2}{\pi} + J_1 + \beta_1 \quad \delta_p = \frac{4\log 2}{\pi} + J_1 - \beta_1,\ \ \zeta(3) \approx 1.2021$$

4. Problems for composed wedges. A set of analytical solutions has been obtained for problems of composed wedges with interface cracks: an edge crack between a wedge and half-plane of different elastic isotropic materials, an edge crack in a half-plane composed by two wedges, a kinked crack in a plane composed by two wedges. The solutions have been obtained with the help of Mellin transform and reducing the problem to the matrix Wiener-Hopf problem. The coefficients of the problems allowed factorization by Krhapkov's technique, however also for zero second Dundurs parameter only.

The work has been done under financial support of Russian State Assignment, Project Reg. FFGN-2024-0007.

REFERENCE

1. Williams M.L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. Bull. Seismol. Soc. Am., vol. 49, 199–204, 1959.
2. Salganik R.L. The brittle fracture of cemented bodies. J. Appl. Math. Mech, 27, 1468–1478, 1963.
3. Dundurs J. Discussion: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 36, 650–651, 1969.
4. Kachanov L.M. Delamination Buckling of Composite Materials. Kluwer, 1988. 95 p
5. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. Int. J. Fract., 43, 1–18, 1990.
6. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. Int. J. Fracture., vol. 104 (2), 169–179, 2000.
7. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates. J. Mech. Phys. Solids., vol. 50, 1847–1864, 2001.
8. Ustinov K. On separation of a layer from the half-plane: elastic fxation conditions for a plate equivalent to the layer. Mech. Solid. 50 (1), 62–80, 2015.
9. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. Int. J. Fract., vol. 113, 39-55, 2002.
10. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. Eng. Fract. Mech., vol. 74, 2700–2720, 2007.
11. Barbieri L., Massabò R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams. Eng. Fract. Mech., vol. 201, 298–321, 2018.
12. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials. J. Mech. Phys. Solids, vol. 52, 193–214, 2004.
13. Thouless M. The effects of transverse shear on the delamination of edge-notch flexure and 3-point bend geometries. Compos. B Eng. vol. 40 (4), 305–312, 2009.
14. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic Analysis of Extensive Crack Growth Parallel to Free Boundary. In 3rd Int. Conf. Localized Damage 94, Southampton: Comput. Mech. Publ., 623–630, 1994.
15. Ustinov, K. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer. Eur. J. Mech. A Solids, vol. 75, 56–69, 2019.
16. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. Semi-infinite crack parallel to the boundary of an elastic half-plane. Sov. Phys. Dokl., 31, 1009, 1986.
17. Khrapkov A. Winer-Hopf Method in Mixed Elasticity Theory Problems. Ed. B.E. Vedeneev, VNIIG Publishing House, 2001.
18. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (Plane Strain). Mech. Solids, 47, 415–425, 2012.
19. Ustinov, K., Massabo`, R., Lisovenko, D., 2020. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution. Eng. Failure Anal. 110, 104410.
20. Ustinov K.B., Idrisov D.M. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: Exact analytical solutions for some particular cases ZAMM, 2021, 101(4),
21. Ustinov, K.B. Certain cases of elastic equilibrium of a composed wedge with an interface crack. Mathematics and Mechanics of Solids 25(12), 2199–2209 (2020).

Information about authors

Ustinov Konstantin Borisovich – Leading Researcher, Laboratory of Geomechanics, A. Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.
E-mail ustinov@ipmnet.ru

RESEARCH OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF AGED GLASS TEXTOLITE SUBJECTED TO REPEATED STATIC LOADING

Valesyan S. Sh.

Aged glass textolite (GFRP composite-laminates) subjected to repeated static loading is studied. Hysteresis curves are plotted and approximated. Based on these ones, the dependence between maximal strain and the number of loading/unloading cycles are brought and compared with similar dependences obtained as a result of research carried our 35 years ago. The energy dissipation coefficient is defined and corresponding curves (dependence between the energy dissipation coefficient and the number of loading/unloading cycles) are charted.

Introduction.

The investigation of the change of mechanical properties of the glue junctions of structural component and polymeric composites with time (natural ageing) are very important. Ageing of composites is a highly topical subject given the increasing use of composites in structural applications in many industries. Ageing of composites addresses many of the uncertainties about the long-term performance of composites and how they age under conditions encountered in service. The mechanical behavior of these materials both at short-term, and at long-term force influences is rather sensitive to "age".

The results of research are necessary for the understanding of the mode of deformation and the evaluation of the reliability of the structure. For this reason, the creepage of fiberglass type of SVAM with different time periods after the manufacturing of material was investigated in [1]. At the reference [2] was studied the influence of long-term storage on the mechanical properties of reinforced polymeric plastics. The research carried out in [3] is studied strength properties and ageing of sheet fiberglasses in the various climatic conditions. Research dedicated to the effect of natural ageing on fiberglass materials in various climatic areas is carried out in [4]. The influence of the ageing medium, temperature, and hydrostatic pressure are discussed, then an example of the application of ageing test results to predict long term behavior of the thermal insulation coating of a flow line are presented in reference [5].

The first part of the book [6] reviews processes and modeling of composite ageing including physical and chemical ageing of polymeric composites, ageing of glass-ceramic matrix composites, chemical ageing mechanisms, stress corrosion cracking, thermo-oxidative ageing, spectroscopy of ageing composites, modeling physical and accelerated ageing and ageing of silicon carbide composites; the second part examines ageing of composites in transport applications including aircraft, vehicles and ships; and the third part reviews ageing of composites in non-transport applications such as implants in medical devices, oil and gas refining, construction, chemical processing and underwater applications.

In the paper [7] the influence of extremal conditions in cosmos on the parts of construction subjected to tension, compression, and shear are investigated. Meanwhile, the conditions of ageing both the laboratory conditions and open space are compared.

A range of papers is dedicated to the investigation of the dissipative properties of composite materials in view of physical and mechanical nature of their components, the orientation of the reinforcement, processing of the material, temperature - moisture conditions of the environment.

The research of dissipative properties of plate reinforced composited cut out of the composite under $\varphi=0^0$; 5^0; 15^0; 30^0; 45^0; 60^0; 90^0 angles to the direction of reinforcement carried out in paper [8].

In view of the wide application of composites in construction and civil engineering over the last decade, the experimental and theoretical investigation of a composite beam for bridge structures is contemporary issue [9]. Deformation behavior, strength and mechanical properties of unidirectional carbon fiber laminates are considered in paper [10]. The fatigue failure criteria and degradation characteristics of composite laminates subjected to multiaxial loadings are investigated in reference [11]. The load-carrying capacity of circular plates manufactured from the fiber-reinforced composite is studied in [12]. Results of study of the influence of possible deviation of the symmetric reinforcement relative to the axis (the disorientation of reinforcement) occurred during the material technological processing into a product on the deformation behavior and dissipative properties thin-walled glass-plastic tubular elements subjected to repeated-static internal hydrostatic pressure are discussed [13].

In this paper is studying the results of experimental research of the "age" (ageing) influence on dissipative properties of Glass Fibre Reinforced Polimer composite-laminates (GFRP composite-laminates). GFRP composite-laminates are applicable in various branches of engineering. In monography [14], the results of GFRP composite-laminates deformation research under different types of static, repeated-static, low- and multi-cycle loading are brought.

Experimental part.

Research was carried out with the application of glass textolite (GFRP composite-laminate) test pieces. Glass textolite is a Glass Fibre Reinforced Polimer composite-laminate made of glass-cloth saturated by the thermosetting tar. Products of constructional purposes and multi-layered sheets can be produced from glass textolite (GFRP composite-laminate).

Test pieces of glass textolite (GFRP composite-laminate) as double-sided blades, which dimensions satisfy the requirements of GOST (State Standard Specification) 1199-78 (Fig.2), were cut out from the sheet of glass textolite (GFRP composite-laminate) with the angle of the woven fiber orientation of 0^0 and 90^0, and thickness ≈ 9 mm.

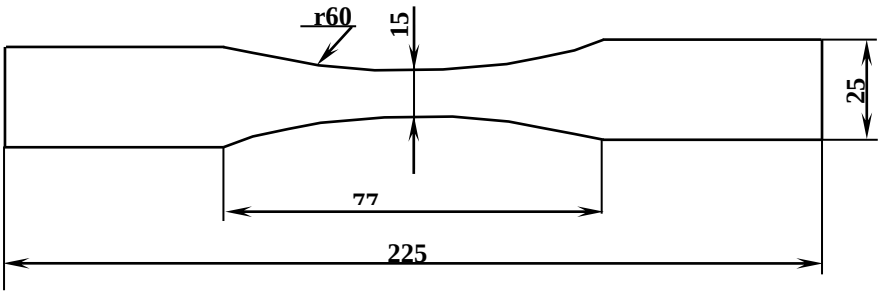


Figure1. Experimental double-sided spattle-shape GFRP composite-laminate test piece.

Glass textolite (GFRP composite-laminate) test pieces were stored in a horizontal position at a distance of not less than 50 mm from the floor. The storage room was closed, dry indoor air temperature was 20-25 ^{0}C (the temperature interval stated by State Standard Specification from -10 °C to + 35 °C), while the relative humidity did not exceed 80 % according to State Standard Specification.

The repeated-static tests were performed by the testing machine ZD 10/90 at the loading speed 5 mm / min.

After the manufacturing of glass textolite (GFRP composite-laminate) test pieces, experimental researches were carried out in about 35 years.

Test pieces were subjected to repeated-static loading with the step of $0{,}1\sigma_u$ (σ_u - ultimate strength of samples). The maximal value of the applied loading was $0.7\ \sigma_u$. The experimental data were written down from the clock-type meter.

Approximation of experimental data (σ and ε) on the sites of ascending (→) and descending (←) branches of hysteresis loop is defined by equation:

$$\sigma = \overleftarrow{\alpha}\,\varepsilon + \overleftarrow{\beta}\,\varepsilon^{\overleftarrow{n}} \qquad (1)$$

where ε – value of the strain determined from the value of permanent set, and α, β, n - parameters of approximation defined for every ascending (→) and descending (←) branches of hysteresis loop given in the table.

Based on the known formula given in [15], the non-elastic deformation of material subjected to the repeated static loading can be estimated through the coefficient of energy dissipation ψ.

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \qquad (2)$$

where ΔW - value of dissipated energy per a cycle, and W - value of the full energy of deformation of samples.

Applying equations (1) and (2), and taking into account that values ΔW and W are the area of hysteresis loop and the area restricted between the ascending branch of hysteresis loop and the axis ε, correspondingly, the coefficient of energy dissipation ψ can be defined by the following equation:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{max}} (\vec{\alpha}\,\varepsilon + \vec{\beta}\,\varepsilon^{\vec{n}})d\varepsilon - \int_0^{\varepsilon_{max}} (\overleftarrow{\alpha}\,\varepsilon + \overleftarrow{\beta}\,\varepsilon^{\overleftarrow{n}})d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{max}} (\vec{\alpha}\,\varepsilon + \vec{\beta}\,\varepsilon^{\vec{n}})d\varepsilon} \quad (3)$$

Integrating equation (3), the value of the coefficient of energy dissipation ψ can be obtained by equation (4):

$$\psi = \frac{\frac{\varepsilon_{max}^2}{2}(\vec{\alpha} - \overleftarrow{\alpha}) + \vec{\beta}\frac{\varepsilon^{\vec{n}+1}}{\vec{n}+1} - \overleftarrow{\beta}\frac{\varepsilon^{\overleftarrow{n}+1}}{\overleftarrow{n}+1}}{\frac{\vec{\alpha}}{2}\varepsilon_{max}^2 + \vec{\beta}\frac{\varepsilon^{\vec{n}+1}}{\vec{n}+1}} \quad (4)$$

Results and discussion.

Research of the mechanical properties of aged glass textolite test pieces subjected to repeated static loading was started with the maximal value of the applied loading 0.8 σ_u. However, the test-piece was failed during the third cycle loading/unloading. So that, one was above-mentioned, the tests were carried out with the application of maximal loading equal to 0.7 σ_u.

Experimental data are evaluated and curves are plotted (Fig. 2 and 3).

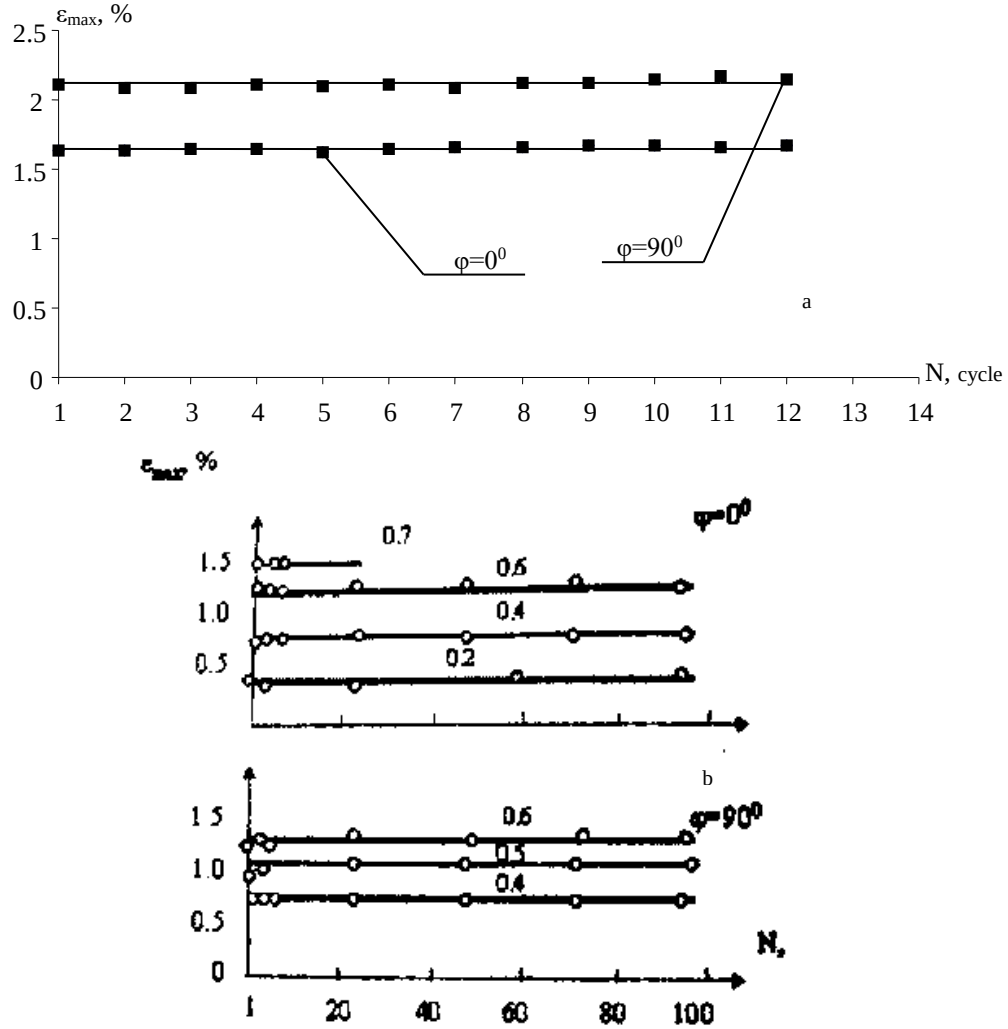


Figure 2. Charts of maximal stain ε_{max} and number of loading/unloading cycles N dependences for aged glass textolite (GFRP composite-laminate) (a) and glass textolite tested about 35 years ago (b) with the angle of the woven fiber orientation of 0^0 and 90^0.

Aged glass textolite (GFRP composite-laminate) subjected to N=12 cycles of repeated static loading until 0.7 σ_u tested for both angles of the woven fiber orientation (Fig.2a). Glass textolite subjected to N=20 cycles of repeated static loading until 0.7 σ_u for angle 0^0 of the woven fiber orientation tested by Prof. N. E. Sargsyan [14] about 35 years ago (Fig.2b).

For aged glass textolite (GFRP composite-laminate) test pieces with the angle 0^0 of the woven fiber orientation subjected to repeated static loading, the value of maximal stain ε_{max} is increased by 6.25% in comparison with the glass textolite test pieces tested about 35 years ago.

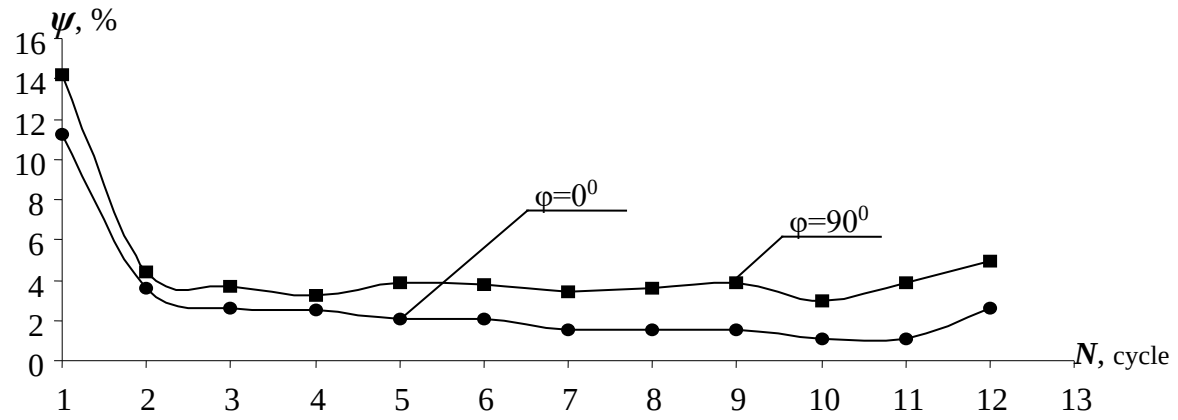


Figure 3. Curves of dependences between the coefficient of energy dissipation ψ and the number of loading/unloading cycles N for aged glass textolite (GFRP composite-laminate) with the angle of the woven fiber orientation of 0^0 and 90^0.

Dependences between the coefficient of energy dissipation ψ and the number of loading/unloading cycles N for glass textolite (GFRP composite-laminate) with the angle of the woven fiber orientation of 0^0 and 90^0 are plotted as parallel curves (Fig. 3). The value of the energy dissipation coefficient ψ is decreased from the first hysteresis curve to the twelfth one for test pieces of both angles of the woven fiber orientation (0^0 and 90^0). For the test pieces with the angle 0^0 of woven fiber orientation, the value of the energy dissipation coefficient ψ is decreased in about 23.3%, meanwhile, for test pieces with the angle 90^0 of woven fiber orientation, the value of the energy dissipation coefficient ψ is decreased in about 35% due to the increase of loading/unloading cycles from N=1 to N=12 (Fig.3). Comparing the obtained experimental data, the following was noted that the energy dissipation coefficient ψ value for test pieces with the angles 90^0 is greater than the energy dissipation coefficient ψ value for test pieces with the angles 0^0 of woven fiber orientation. These values are varying from 20.7% for N=1 to 47.4% for N=12.

Conclusions.

The increase of aged glass textolite (GFRP composite-laminate) deformation properties by 6.25% is noticed. So that, the influence of ageing (about 35 years) on the mode of deformation is not significant.

Meanwhile, for aged glass textolite (GFRP composite-laminate) with the angle of the woven fiber orientation of 0^0 and 90^0, the comparison of the energy dissipation coefficient ψ values is defined that the glass textolite with the angle of the woven fiber orientation of 0^0 can be applied for long-term functioning items.

REFERENCE

1. Martirosyan M.M. Creepage of fiberglass SVAM in the different period after manufacturing of material. Proceed. of Academy of Sci. of Arm. SSR, Ser. of Phys.-Math. Sci., Vol. 17, No. 5, 1964.
2. Ogibalov P.M., Tuneeva I.M. Influence of long-term storage on the mechanical properties of reinforced plastics. Mech. of Polymer, No. 3, 1969.
3. Smirnova Z.A., Vlasov P.V. Strength properties and ageing of sheet fiberglasses in the various climatic conditions. Mech. of Polymer, No. 3, 1971.

4. Grakova T.S., Kiseleva G.I., Kochueva L.I. Research of natural ageing of fiberglass materials in various climatic areas. Sci.-tech. proceed., Ser. XXIV, Vol. 31, 1980.
5. P.-Y. Le Gac, P. Davies, D. Choqueuse Evaluation of long term behaviour of polymers for offshore oil and gas applications. Oil & Gas Science and Technology - Rev. IFP Energies nouvelles, 2014.
6. Martin R. Aging of Composites, Woodhead Publishing, 2008.
7. Jegun E. G., Ivonin U. N., Shlica R. P., Nikishin E. F. Effect of prolonged exposure at extreme conditions on the properties of pre-loaded composites subjected to tension, compression, and shear. Mechanics of Composite Materials, Latvian. AS, No. 5, 1987.
8. Limonov V.A., Perevozchikov V.G., Tamuzh V.P. Fatigue of layered composites with different reinforcement schemes. Mechanics of Composite Materials, Latvian.AS, No. 5, 1988.
9. V. Piskunov, B. Grinevitskii, and I. Finkelshtein Experimental and Theoretical Investigation of a Composite Beam for Bridge Structures. Mechanics of Composite Materials, Vol. 42, No. 4, 2006.
10. N.K. Kucher, M.P. Zemtsov, and M.N. Zarazovskii Deformation Behavior and Strength of Unidirectional Carbon Fiber Laminates. Mechanics of Composite Materials, Vol. 42, No. 5, 2006.
11. M. Gude, W. Hufenbach, I. Koch, and R. Protz Fatigue Failure Criteria and Degradation Rules for Composites under Multiaxial Loadings Laminates. Mechanics of Composite Materials, Vol. 42, No. 5, 2006.
12. Movsumov E.A., Shamiev F.H. Load-carrying capacity of circular plates made of a fiber-reinforced composite. Mechanics of Composite Materials, Vol. 41, No. 2, 2005.
13. K.A.Karapetyan, S.Sh.Valesyan About the Energy Dissipation Coefficient of Thin-Walled Glass-Plastic Pipes with the Internal Reinforcement Asymmetry with Respect to Axis Subjected to Pulsating Internal Hydrostatic Pressure. Book: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep, Springer, 2023, pp.175-184.
14. N.E.Sargsyan Anisotropy of fatigue of composites. Yerevan: Yerevan State University of Architecture and Construction, 2012, 220p.
15. Panovko Ja.G. Internal friction under the waving of elastic systems. M.: State Pub. of Phys.-Math. Literature, 1960, 193p.

Information about author

Valesyan Sona Shant - senior researcher, Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Republic of Armenia**;** E-mail: svalesyan@yahoo.com

AXISYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF INHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC CIRCULAR PLATES UNDER THE SHEAR DEFORMATIONS ALONG THICKNESS

Vasilyan N.G.

An analytical solution is presented for analyzing axisymmetric free vibrations of a functionally graded piezoelectric circular plate based on the three-dimensional elasticity theory of piezoelectric materials. It is assumed that the material properties are distributed across the thickness of the circular plate according to an exponential law. The equations for the free vibration of a functionally graded piezoelectric circular plate are developed based on the state space method. The finite Hankel transform is used to obtain an ordinary differential equation with variable coefficients. Following the assumptions of the proposed exponential law model, is obtained ordinary differential equations with constant coefficients.

1. Introduction:

Piezoelectric materials are widely used in smart systems due to their electroelastic coupling properties. In the view of engineering, vibrational properties have become one of the most researched fields for piezoelectric materials. From an engineering perspective, the vibrational properties of piezoelectric materials have become one of the most extensively researched areas. To achieve better performance in smart systems, piezoelectric materials are often combined with other materials and used in engineering in the form of multilayer structures. Such structures can offer various advantages, but they can also cause certain problems, such as interfacial stress concentration, interfacial cracks, and even structural failure. These defects can lead to reduced reliability and service life of piezoelectric devices. To overcome the constraints of conventional laminated piezoelectric components, novel composite materials, named functionally graded piezoelectric materials (FGPMs), have been developed by Zhu X. [7] and Wu C.C. [8].

FGPMs is classified under of piezoelectric materials characterized by spatial heterogeneity and mechanical properties that vary continuously in one or more spatial dimensions. The continuity of FGPM material properties reduces defects at the interface, and they can be designed with specific properties, which can be used for active control, condition monitoring, etc. Composite plate structures are widely used in mechanical engineering due to their excellent stiffness-to-weight ratio.

The problems of the possibility of separate excitation and propagation of electroelastic planar, or electroelastic anti-plane stress-strain states in homogeneous piezoelectric crystals are investigated. The necessary and sufficient conditions for the separate excitation and propagation of electroelastic plane and electroelastic antiplane stress-strain states in piezoelectric crystals are obtained [1].

In [2] the possibility of loss of the axisymmetric stability of a circular ring plate, when uniformly varying thermal field impacts over plate radius, is investigated. The inner border of the plate is clamped or is exposed to the impact of external mechanical forces.

Understanding how the internal properties of the material affect the dynamic behavior of FGPM plates is important for designing FGPM devices. The growing demand for FGPM has attracted the attention of many researchers. To the best of the authors' knowledge, the space state method for homogeneous plates has not been extended to a three-dimensional exact solution for the axisymmetric free vibration of a circular FGPM plate with an exponential distribution [3]. In this article, a study was conducted on the axisymmetric free vibrations of a circular plate made of FGPM using three-dimensional elasticity theory for piezoelectric materials. The properties of the FGPM circular plate material are assumed to vary exponentially with thickness. Based on the state method and Hankel's finite transformation [6], a three-dimensional exact solution for axisymmetric free vibrations of a circular FGPM plate is presented. The natural frequencies are obtained for elastic boundary conditions of simple support and rigid sliding support with different exponential coefficients and thickness-to-span ratios [5], and a comparison of the current model with models described in the literature is presented.

2. Geometrical Configuration and Material Properties

Consider an FGPM circular plate of radius a and thickness h consisting of N-ply in which the thickness of the j-th layer is h_j, as shown in Figure 1. A cylindrical coordinate system (r, θ, z) with origin O at the center of the top surface is utilized to describe the plate geometry and dimensions. The FGPM circular plate is modeled as the transversely isotropic piezoelectric materials in which the poling direction is along with the z-direction.

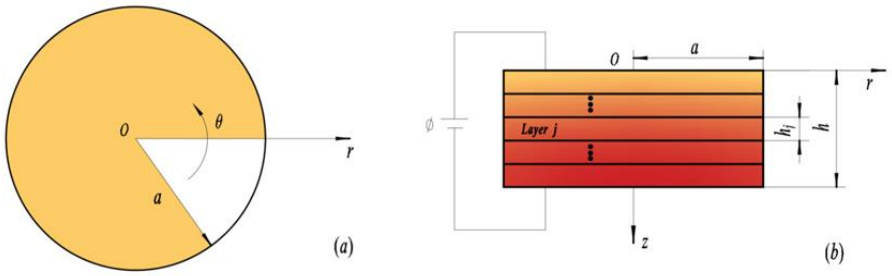


Figure 1. Configuration of an FGPM circular plate:(a) top view; (b) main view.

It is known that the material properties of FGPMs can usually be seen as a function of coordinates *(r,θ,z)* and vary continuously in one or two directions. In the present work, the material properties of the FGPM circular plate are presumed to change across the plate thickness with an exponential law distribution as follows:

$$C_{ij}(z) = C_{ij}^0 e^{\eta z},\ e_{ij}(z) = e_{ij}^0 e^{\eta z}, \xi_{ij}(z) = \xi_{ij}^0 e^{\eta z}, \rho(z) = \rho^0 e^{\eta z}, \quad (1)$$

Where $C_{ij}(z)$ denotes the elastic constants; $e_{ij}(z)$ refers to the piezoelectric constants; $\xi_{ij}(z)$ represents the dielectric constants; $\rho(z)$ is the mass density; η stands for the exponential factor. Notice that $C_{ij}^0,\ e_{ij,}^0, \xi_{ij}^0$ and ρ_{ij}^0 denote the corresponding material properties at the top surface of the FGPM circular plate.

3. Governing Equations for an FGPM Circular Plate

Equilibrium equations for circular cylindrical coordinates are:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.$$

Gauss's law in cylindrical (polar) coordinates under **axisymmetric conditions**:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{D_r}{r} = 0\ .$$

The constitutive equations for the anisotropic piezoelectric materials, in the cylindrical coordinate system, have the forms

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{6} c_{ij}^E\ \varepsilon_j - \sum_{k=1}^{3} e_{ki} E_k\ , for\ i = 1,2,\dots,6.$$

Where σ_{ij} denotes the stress tensor; u_r and u_z are the displacements components in r and z directions, respectively; r is the radial coordinate$(0 < r \le a)$, t is the time. The mass density ρ in equation (2) obeys the exponential law distribution, namely,$\rho = \rho(z) = \rho^0 e^{\eta z}$.

In the framework of axisymmetric free vibration of an FGPM circular plate, it is noted that all physical quantities are θ-independent, meaning that they do not vary with respect to the angular coordinate θ. Taking into account a harmonic solution, the equations of motion for each layer of the FGPM circular plate can be written as

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \tag{3}$$

The Gaussian equation without electric charges can be expressed in the form of

$$\frac{\partial D_r}{\partial r}+\frac{\partial D_z}{\partial z}+\frac{D_r}{r}=0, \tag{4}$$

where D_r and D_z represent the electric displacements in r and z directions, respectively.

The constitutive equations for the heterogeneous transversely isotropic piezoelectric materials, with respect to an axisymmetric problem in the cylindrical coordinate system, have the forms

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=C_{11}\varepsilon_{rr}+C_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+C_{13}\varepsilon_{zz}-e_{31}E_z,\\
&\sigma_{\theta\theta}=C_{12}\varepsilon_{rr}+C_{11}\varepsilon_{\theta\theta}+C_{13}\varepsilon_{zz}-e_{31}E_z,\\
&\sigma_{zz}=C_{13}\varepsilon_{rr}+C_{13}\varepsilon_{\theta\theta}+C_{33}\varepsilon_{zz}-e_{33}E_z,\\
&\sigma_{rz}=2C_{44}\varepsilon_{zr}-e_{15}E_r,\\
&D_r=2e_{15}\varepsilon_{zr}+\xi_{11}E_r,\\
&D_z=e_{31}\varepsilon_{rr}+e_{31}\varepsilon_{\theta\theta}+e_{33}\varepsilon_{zz}+\xi_{33}E_z.
\end{aligned} \tag{5}$$

In which $\varepsilon_{rr},\varepsilon_{\theta\theta},\varepsilon_{zz}$ and ε_{zr} are strain components; E_r and E_z are the electric field in tensities. The material constants C_{ij}, e_{ij}, and ξ_{ij}, in equation(4) follow the exponential law distribution, namely,

$$C_{ij}=C_{ij}(z)=C_{ij}^0e^{\eta z}, e_{ij}=e_{ij}(z)=e_{ij}^0e^{\eta z}, \xi_{ij}=\xi_{ij}(z)=\xi_{ij}^0e^{\eta z}. \tag{6}$$

The general geometric equations are defined as

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r}, \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rz}=0.5\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\\
&E_r=-\frac{\partial \phi}{\partial r}, E_z=-\frac{\partial \phi}{\partial z},
\end{aligned} \tag{7}$$

where ϕ is the electric potential.

For the convenience of deriving formulas, the following non-dimensional parameters are introduced as

$$\begin{aligned}
&\overline{r}=r/a\,, \overline{z}=z/h\,, \overline{h_j}=h_j/h\,, s=h/a\,, \overline{u_r}=u_r/h\,, \overline{u_z}=u_z/h,\\
&\overline{\sigma_{rr}}=\sigma_{rr}/C_{11}^{(1)}\,, \overline{\sigma_{\theta\theta}}=\sigma_{\theta\theta}/C_{11}^{(1)}\,, \overline{\sigma_{zz}}=\sigma_{zz}/C_{11}^{(1)}\,, \overline{\sigma_{rz}}=\sigma_{rz}/C_{11}^{(1)},\\
&\overline{C_{ij}}=C_{ij}/C_{11}^{(1)}\,, \overline{\xi_{ij}}=\xi_{ij}/\xi_{33}^{(1)}\,, \overline{e_{ij}}=e_{ij}/\sqrt{C_{11}^{(1)}\xi_{33}^{(1)}},\\
&\overline{D_i}=D_i/\sqrt{C_{11}^{(1)}\xi_{33}^{(1)}}\,, \overline{\phi}=\phi\sqrt{\xi_{33}^{(1)}/C_{11}^{(1)}}/h\,, \overline{\rho}=\rho/\rho^{(1)}\,, \Omega=\omega h\sqrt{\rho^{(1)}/C_{11}^{(1)}},
\end{aligned} \tag{8}$$

where s is the thickness-to-span ratio of the FGPM circular plate; ω refers to the natural frequency; Ω denotes the non-dimensional natural frequency; $C_{11}^{(1)}$, $\xi_{33}^{(1)}$, and $\rho^{(1)}$ are the elastic stiffness, dielectric coefficient, and mass density at the top surface of the FGPM circular plate, respectively. Therefore, the governing equations in Equations (2)–(4) can be rewritten as

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{rr}}}{\partial \overline{r}}+\frac{1}{s}\frac{\partial \overline{\sigma_{rz}}}{\partial \overline{z}}+\frac{\overline{\sigma_{rr}}-\overline{\sigma_{\theta\theta}}}{\overline{r}}=-\frac{1}{s}\overline{\rho u_r}\Omega^2; \tag{9}$$

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{rz}}}{\partial \overline{r}}+\frac{1}{s}\frac{\partial \overline{\sigma_{zz}}}{\partial \overline{z}}+\frac{\overline{\sigma_{rz}}}{\overline{r}}=-\frac{1}{s}\overline{\rho u_z}\Omega^2;$$

$$\frac{\partial \overline{D_r}}{\partial \overline{r}}+\frac{1}{s}\frac{\partial \overline{D_z}}{\partial \overline{z}}+\frac{\overline{D_r}}{\overline{r}}=0,\text{x}$$

and

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma_{rr}}=s\overline{C_{11}}\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \overline{r}}+s\,\overline{C_{12}}\frac{\overline{u_r}}{\overline{r}}+\overline{C_{13}}\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial \overline{z}}+\overline{e_{31}}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{z}},\\
&\overline{\sigma_{\theta\theta}}=s\overline{C_{12}}\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \overline{r}}+s\,\overline{C_{11}}\frac{\overline{u_r}}{\overline{r}}+\overline{C_{13}}\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial \overline{z}}+\overline{e_{31}}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{z}},
\end{aligned}$$

$$\overline{\sigma_{zz}} = s\overline{C_{13}}\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \overline{r}} + s\,\overline{C_{13}}\frac{\overline{u_r}}{\overline{r}} + \overline{C_{33}}\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial \overline{z}} + \overline{e_{33}}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{z}} \tag{10}$$

$$\overline{\sigma_{rz}} = \overline{C_{44}}\left(s\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial \overline{r}} + \frac{\overline{u_r}}{\overline{z}}\right) + s\overline{e_{15}}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{r}},$$

$$\overline{D_r} = \overline{e_{15}}\left(s\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial \overline{r}} + \frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \overline{z}}\right) - s\overline{\xi_{11}}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{r}},$$

$$\overline{D_z} = s\,\overline{e_{31}}\frac{\partial \overline{u_r}}{\partial \overline{r}} + s\overline{e_{31}}\frac{\overline{u_r}}{\overline{r}} + \overline{e_{33}}\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial \overline{z}} - \overline{\xi_{33}}\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{z}}.$$

4. State Space Equations for an FGPM Circular Plate

When an axisymmetric FGPM circular plate vibrates at its natural frequency ω, the following physical quantities can be assumed as

$$\overline{u_r} = \overline{u_r}(\overline{r},\overline{z})e^{i\omega t}, \overline{\sigma_{zz}} = \overline{\sigma_{zz}}(\overline{r},\overline{z})e^{i\omega t}, \overline{D_z} = \overline{D_z}(\overline{r},\overline{z})e^{i\omega t}, \tag{11}$$

$$\overline{\sigma_{rz}} = \overline{\sigma_{rz}}(\overline{r},\overline{z})e^{i\omega t}, \overline{u_z} = \overline{u_z}(\overline{r},\overline{z})e^{i\omega t}, \overline{\phi} = \overline{\phi}(\overline{r},\overline{z})e^{i\omega t}\ .$$

By choosing $\overline{u_r}, \overline{\sigma_{zz}}, \overline{D_z}, \overline{\sigma_{rz}}, \overline{u_z}, \overline{\phi}$ as the state variables, the state space equations for layer j of the FGPM circular plate can be given as:

$$\frac{\partial \overline{R_j}(\overline{r},\overline{z})}{\partial \overline{z}} = \begin{bmatrix} 0 & A_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix} \overline{R_j}(\overline{r},\overline{z}), \tag{12}$$

which $\overline{R_j} = \left[\overline{u_r}\ \overline{\sigma_{zz}}\ \overline{D_z}\ \overline{\sigma_{rz}}\ \overline{u_z}\ \overline{\phi}\right]^T$, A_j and B_j are operator matrixes with coefficients.

5. Conclusion

Functionally graded piezoelectric materials (FGPMs) represent a class of advanced materials that combine the advantages of both functionally graded composites and conventional piezoelectric ceramics. By merging the gradual variation of properties in functionally graded materials with the electromechanical coupling effect of piezoelectrics, FGPMs open up wide opportunities for the design and manufacture of innovative smart structures and devices. However, to harness their full potential and to take advantage of their design flexibility, it is crucial to carry out an in-depth study of their dynamic characteristics, particularly under vibration.

In this paper, a comprehensive mathematical model is developed to investigate the axisymmetric free vibration behavior of FGPM circular plates in which the material properties follow an exponent-law distribution through the thickness. An exact analytical solution is formulated for this class of problems, enabling accurate prediction of the vibrational response. The methodology is based on the state-space approach combined with the Hankel finite transform, which together provide a rigorous framework for analyzing the vibration modes of such plates. Using this framework, the natural frequencies of the FGPM circular plates are calculated by solving the governing state-space equations. The study further explores the influence of key parameters on the vibrational characteristics, including the exponential grading index, the thickness-to-span ratio, and different types of boundary conditions. The parametric investigation highlights how variations in these factors significantly affect the natural frequency spectrum and overall dynamic behavior of the structures.

The exact solutions obtained in this work are not only valuable for understanding the fundamental vibration mechanisms of FGPM circular plates but also serve as benchmark references for validating other approximate analytical formulations and numerical simulations. Consequently, the findings provide both theoretical insights and practical guidance for the application of FGPMs in engineering fields such as sensors, actuators, energy harvesting devices, and other smart structural systems.

REFERENCE

1. Avetisyan A.S., Two-dimensional problems of electroacoustics in homogeneous piezoelectric crystals, Mechanics, Proc. of NAS RA, (2019), vol. 72, N3, pp.56-80,
2. Avetisyan A.S., Aleksanyan R.K., Aleksanyan D.R., Axisymmetric stability of circular ring plate subjected to mechanical and thermal loads, Mechanics, Proc. of NAS RA, (2019), vol. 72, N1, pp.73-89,
3. W.Heywang, K.Lubitz, W.Wersing. Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals. Springer Series in Materials Science (Volume 114).2008.582p.
4. Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). “Theory of elasticity” (3rd ed.). McGraw-Hill.
5. Audoly, B., & Pomeau, Y. (2010). “Elasticity and geometry: From hair curls to the non-linear response of shells”. Oxford University Press.
6. Zhu, X.; Wang, Q.; Meng,Z. Functionally gradient piezoelectric actuator prepared by powder metallurgical process in PNN-PZ-PT system. J. Mater. Sci. Lett. 1995, 14, 516–518.
7. Wu,C.C.; Kahn, M.; Moy, W. Piezoelectric ceramics with functional gradients: A new application in material design. J. Am. Ceram. Soc. 1996, 79, 809–812.

Information about author

Narine Vasilyan – Researcher of Institute of Mechanics of NAS of Armenia (374 91)70 79 39
E-mail: nvasilyan@yahoo,com

EFFECT OF PARTICLES AND LUBRICANT VISCOSITY ON FRICTION IN THREE-BODY MIXED LUBRICATION

Yang-Yuan Chen, Jeng-Haur Horng

The debris at the contact interface and the variation in viscosity of lubricants with working temperature are important factors affecting the tribological performance. This study will analyze the friction behavior under different conditions of lubricating oil viscosity, average particle diameter and various operating conditions. The expected analysis results can serve as a reference for filtering wear debris at the contact interface and selecting the appropriate lubricant viscosity for precision mechanical components

When the debris enters between two moving surfaces, a three-body contact system will be formed at the contact interface, as shown in Figure 1. The total contact load (F_t) is the sum of the solid contact load (F_s) and the fluid contact load (F_f). The real contact area includes the particle-surface contact area (A_{sa}) and the surface peak-surface peak contact area (A_{ss}). The relationship between the solid contact load and the real contact area is obtained from equations (2) and (3) [1]

$$F_t = F_s + F_f, \qquad F_s = F_{ss} + F_{sa} \tag{1}$$

$$F_s = F_{ss} \times \left(1 - \frac{\pi H_{s1} \eta_a}{H_{s1} + H_{s2}} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} x_a^2 \varphi_a(x) dx \right) + \frac{\pi H_{s1} H_{s2} \eta_a A_n}{H_{s2} + H_{s1}} \left[\frac{9\pi^2}{4} \left(\frac{H_{s1}^2}{E_{sa}^2} + \frac{H_{s2}^2}{E_{ss}^2} \right) \int_{d-h_e}^{d} x_a^2 \varphi_a(x) dx + \int_{d}^{x_{\max}} x_a^2 \varphi_a(x) dx \right] \tag{2}$$

$$A_s = A_{ss} \times \left(1 - \frac{\pi H_{s1} \eta_a}{H_{s1} + H_{s2}} \int_{d}^{X_{\max}} x_a^2 \varphi_a(x) dx \right) + \frac{\pi H_{s2} \eta_a A_n}{H_{s2} + H_{s1}} \left[\frac{9\pi^2}{4} \left(\frac{H_{s1}^2}{E_{sa}^2} + \frac{H_{s2}^2}{E_{ss}^2} \right) \int_{d-h_e}^{d} x_a^2 \varphi_a(x) dx + \int_{d}^{x_{\max}} x_a^2 \varphi_a(x) dx \right] \tag{3}$$

where A_n is apparent area, x_a is average particle diameter, η_a is particle density, $\psi_a(x)$ is distribution function of particle diameter, H_{s1} and H_{s2} are the material hardness of surface 1 and surface 2, respectively. E_{ss} is equivalent Young's modulus of surface 1 and surface 2, E_{sa} is equivalent Young's modulus of particle and surface 2, x_{max} is maximum particle diameter, d is distance between the mean asperity heights of surface 2 and surface 1. The results of an extensive set of simulations are then used to obtain the following curve-fit expressions for the film thickness[2].

$$H_c = \frac{h_c}{R_x} = 3.672 W^{-0.045\kappa^{0.18}} U^{0.663\kappa^{0.025}} G^{0.502\kappa^{0.064}} (1 - 0.573 e^{-0.74\kappa}) \times \\ \times (1 + 0.025 \sigma^{*1.248} V^{0.119} W^{-0.133} U^{-0.884} G^{-0.977} \kappa^{0.081}) \tag{4}$$

where h_c is average film thickness, R_x is equivalent contact radius in x direction, κ is ellipticity parameter and parameters U, W, G, σ^*, and V denote the dimensionless speed, load, material, surface roughness, and surface hardness, respectively.

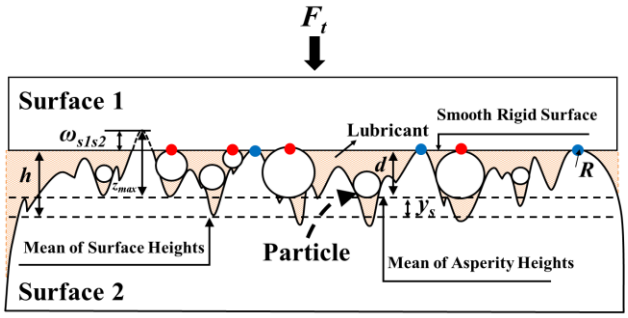


Figure 1 Schematic of a 3-body contact system.

When the particle, and two surfaces make contact in the mixed lubrication conditions. The friction coefficient in the contact regime is the sum of fluid friction (μ_f)[3] and solid friction (μ_s)[4], that can be calculated from three-body friction model.

$$\mu_t = \mu_s + \mu_f = \frac{A_{ss}\tau_{ss} + A_{ss}\tau_a + A_{ss}\tau_a \times (\sigma/\beta)^2 + A_{sa}\tau_{sa} + A_{sa}\tau_a + \pi\, a^2\tau_0 \sinh^{-1}\times(\eta\, u/\tau_0 h_c)}{F_t} \tag{5}$$

where β is the correlation length, τ_0, τ_a, τ_{ss}, and τ_{sa} are the Eyring shear stress, shear stress of adhesion, the shear stress of deformation between surfaces, and the shear stress of deformation between the particles and the surface, respectively. η is viscosity of lubricant, u is relative speed.

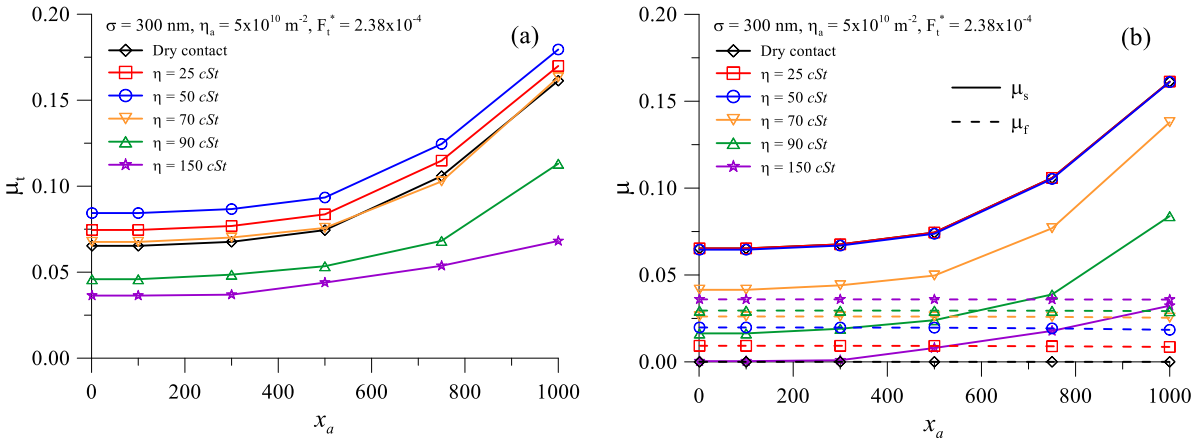


Figure 2 Average particle diameter versus friction coefficient at various viscosities of lubricant (a) total friction coefficient (b) components of friction coefficient.

As shown in Figure 2(a), the total friction coefficient increases with increasing the average particle diameter at the same viscosity. As shown in Figure 2(b), the solid friction coefficient increases with increasing average particle diameter, while the fluid friction coefficient decreases slowly. This indicates that the total friction coefficient is mainly dominated by solid friction, and the particle diameter has little effect on fluid friction. Under the same particle diameter, as shown in Figure 2(a), when the $\eta \le 50\,cSt$, the total friction coefficient increases with the increase of viscosity and that it decreases when the $\eta > 50\,cSt$. This phenomenon can be observed from Figure 2(b), the fluid friction coefficient increases with the increase of viscosity, while the solid friction coefficient and dry contact friction coefficient almost overlap when the $\eta \le 50\,cSt$. However, the solid friction coefficient

decreases with the increase of viscosity when the $\eta > 50 cSt$. It shows that when the $\eta \leq 50 cSt$, the lubrication regime of the contact interface is in the boundary lubrication, and when the $\eta > 50 cSt$, the lubrication regime has entered the mixed lubrication.

REFERENCE

1. Chern, S.Y. Chen Y.Y. Liu W.L. Horng J.H. Contact characteristics at interface in three-body contact conditions with rough surfaces and foreign particles. Lubricants, vol. 10, 164, 2022.
2. Masjedi M. Khonsari M. M. On the effect of surface roughness in point-contact EHL: formulas for film thickness and asperity load. Tribol. Int., vol. 82(A), 228-244, 2015.
3. Liu L. Gangopadhyay A. Friction reduction in lubricated rough contacts: numerical and experimental studies. J. Tribol., vol. 138, 021506, 2016.
4. Wu H.W. Chen Y.Y. Horng J.H. The analysis of three-body contact temperature under the different third particle size, density and value of friction. Micromachines, vol. 8(302), 1-16 2018.

Information about authors

Yang-Yuan Chen – postdoctoral researcher, Department of Power Mechanical Engineering, National Formosa University, Taiwan
E-mail td7211@gmail.com

Jeng-Haur Horng – professor, International Master's Program in Interdisciplinary Sustainability Studies, National Cheng Kung University, Taiwan
E-mail jhhorng@gmail.com

GENERALIZED HAMILTONIAN MECHANICS FOR DISSIPATIVE CONTINUA: FROM ELASTIC WAVES TO VISCOUS FLUIDS

Zimin B.A., Sudenkov Yu.V., Yalych E.S.

This work develops a generalized Hamiltonian framework for deriving equations of motion in dissipative continua. We establish the foundations of Hamiltonian mechanics and its key extension: abandoning phase-space symplecticity via Poisson bracket deformation (Eqs. 2–3) and symplectic matrix perturbation (Eq. 15). The approach generates physically consistent theories that accurately describe dissipation in viscoelastic media (Eqs. 6, 20) and thermoelastic materials (Eq. 24), extending Hamiltonian formalism to viscous hydrodynamics and continuum dynamics with irreversible processes.

1. **Foundations: Lagrangian and Hamiltonian Mechanics**

Classical mechanics originates in the Lagrangian formalism [1]. Hamiltonian mechanics—employing generalized coordinates q_i, and momenta p_i —proved pivotal in quantum mechanics [1]. Despite shared differential-equation and variational principles, Hamiltonian Mechanics (HM) and Lagrangian Mechanics (LM) exhibit fundamental differences [1]. HM requires three components:

— phase space: an even-dimensional manifold M^{2n};

— symplectic form: antisymmetric bilinear map defining phase-space geometry $\omega^2 = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$;

— Hamiltonian function $H(x) \equiv H(q,p)$.

Generalizations of HM arise from relaxing these conditions. Here, we focus on perturbing the symplectic form ω^2, leading to physically meaningful dissipation theories in viscous hydrodynamics.

2. Dissipative Mechanics via Modified Poisson Brackets

For damped oscillations, we retain the standard Hamiltonian:

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2), \tag{1}$$

but deform the Poisson bracket:

$$\{f,g\} \to \{f,g\}_\alpha = \{f,g\} - \alpha\{f,g\}_+, \tag{2}$$

$\alpha > 0.$

$$\{f,g\}_+ = \sum h^{ij}\partial_i f \partial_j f, \quad h^{ij} = h^{ji}. \tag{3}$$

Hamilton's equations with deformed brackets yield:

$$\dot{q} = \{q,H\}_\alpha, \qquad \dot{p} = \{p,H\}_\alpha; \tag{4}$$

$$\dot{q} = \omega p - \alpha\omega q, \qquad \dot{p} = -\omega q - \alpha\omega p. \tag{5}$$

Eliminating $\dot{q}$ produces the damped oscillator equation:

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + (\omega^2 + \alpha^2)q = 0. \tag{6}$$

While standard Lagrangians $L = T - V$ cannot describe dissipation, generalized approaches (e.g., Rayleigh dissipation) are possible.

3. Lagrangian Limitations in Continuum Mechanics

Consider the Lagrangian density for isotropic thermoelastic media:

$$L = \frac{\rho}{2}[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] - \frac{1}{2}\left\{\lambda\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)^2 + \mu\left[2\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2\right) + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2\right]\right\} + (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_T T\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right), \tag{7}$$

where $u, v, w -$ displacements; $\varepsilon_{ij} -$ strain tensor; $\lambda, \mu -$ Lamé constants; $T -$ temperature; $\rho -$ density.

Applying Hamilton's principle [2] gives:

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i_{,t}}\right) - \frac{d}{dx^j}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i_{,t}}\right) = 0, \tag{8}$$

yielding the thermoelasticity equations:

$$\mu\Delta u^i + (\lambda + \mu)\frac{\partial \varepsilon_{kt}}{\partial x_i} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \frac{\partial T}{\partial x_i} = \rho\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}. \tag{9}$$

4. Hamiltonian Formalism: Rigorous Generalization

Standard HM prescribes a phase space M^{2n} and a nondegenerate closed 2-form:

$$\omega^2 = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j, \qquad x \in M^{2n}, \qquad \det(\omega_{ij}) \neq 0. \tag{10}$$

Time evolution follows:

$$\dot{f} = \{f, H\} = \omega^{ij} f_{,i};\ \omega^{ij}\omega_{ij} = \delta^i_j, \tag{11}$$

$\{\ \} -$ the Poisson brackets [1]; $f -$ any differentiable function; $\delta^i_j -$ the Kronecker symbol; $\omega_{ij} -$ the antisymmetric form.

Generalizing HM by relaxing symplecticity enables dissipation modeling [1, 2].

Example: 1D Elastic Medium – Hamiltonian density:

$$H = \frac{c}{2}\left[\pi^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right], \tag{12}$$

$c -$ speed of sound; $u -$ displacement.

General evolution:

$$\dot{F} = \{F, H\} = \left(\frac{\delta F}{\delta u}, \frac{\delta H}{\delta u}\right) \bar{\omega} \begin{pmatrix} \delta F/\delta \pi \\ \delta H/\delta \pi \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$\frac{\delta}{\delta u}, \frac{\delta}{\delta \pi} -$ are variational derivatives;

$\bar{\omega} -$ is a symplectic matrix.

Substituting (12) into (13) and replacing $F \to u$ and $F \to \pi$, we obtain a system of Hamiltonian equations of vibrations of a one-dimensional elastic medium:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \pi c, \\ \dot{\pi} &= c\frac{d^2u}{dx^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

5. Dissipative Continua via Symplectic Deformation

Deform $\bar{\omega}$ antisymmetrically (symplectic perturbation introducing viscosity):

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \bar{\omega} - \alpha I, \\ I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

Using:

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2). \tag{16}$$

damped oscillator with position-dependent damping:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \omega p - \alpha\omega q, \\ \dot{p} &= -\omega q - \alpha p; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \alpha(\omega^2 q\dot{q} - \omega^3 q^3 + \omega\dot{q}) = 0. \tag{18}$$

For elastic media strain-gradient-dependent dissipation:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= c\pi + \alpha c u_{xx}, \\ \dot{\pi} &= c u_{xx} + \alpha c u_{xx}; \end{aligned} \tag{19}$$

$$u_{tt} - c^2(\alpha + 1)u_{xx} - \alpha c u_{xxt} = 0. \tag{20}$$

Equation (20) generalizes the Kelvin-Voigt model, where u_{xxt} corresponds to viscous friction with $\alpha = \eta/\rho, (\eta\ -$ dynamic viscosity).

6. Advantages over Conventional Approaches

The symplectic deformation (15) preserves the Hamiltonian structure while introducing dissipation, avoiding complications of non-local operators in fractional models. For dissipative elastic media [3], the Lagrangian:

$$L = \frac{m\ddot{u}^2}{2}\exp(-\gamma t) - \frac{E}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \exp(-\gamma t), \tag{21}$$

yields an unphysical equation:

$$\ddot{u} - \frac{E}{m}\exp(2\gamma t)\frac{d^2u}{dx^2} - \gamma\dot{u} = 0. \tag{22}$$

Conversely, the Hamiltonian density [3]:

$$H = \frac{p^2}{2m}\exp(-\gamma t) + v(x)\exp(\gamma t), \tag{23}$$

gives physical dynamics:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma u_t = 0, c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{24}$$

HM provides a geometrically consistent mechanism for embedding dissipation, overcoming LM limitations.

The generalization of Hamiltonian formalism to continuum mechanics provides a versatile framework for deriving and analyzing equations of motion that accurately describe physical processes in dispersive and dissipative media. Building on foundational ideas [1], we implement two approaches for constructing dynamical models of continua. First, we rigorously derive the vibration equation for a viscoelastic medium with shear viscosity-induced dissipation using Poisson bracket deformation. Second, we obtain the equation of motion for an elastic medium with mass-proportional dissipation via a generalized Hamiltonian representation. This methodology enables simulations of physical processes in structurally complex media.

This work was supported by the Russian Science Foundation (Grant No. 25-29-00218).

REFERENCE

1. L.V. Prokhorov, S.V. Shabanov, Hamiltonian mechanics of calibration systems. St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 1997.
2. A.A. Isaev, M.Yu. Kovalevsky, S.V. Peletminsky, On Hamiltonian Approach to Dynamics of Continuum. 102, № 2, 1995.
3. V.B. Ibarra-Sierra, A. Inzaldo-Menessis, Annals of Physics, 335, 86-107 (2013).

Information about authors

Zimin B.A. – Senior Research, Faculty of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg State University, Associate Professor, BSTU «VOENMEH» named after D.F. Ustinov +7 (921) 572 80-67
E-mail: bazimin@mail.ru

Sudenkov Yu.V. – Leading Researcher, Faculty of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg State University, +7 (921) 978 06-85

E-mail: y.sudenkov@yandex.ru

Yalych E.S. – post graduate student, Department of Autonomous Information and Control Systems, BSTU «VOENMEH» named after D.F. Ustinov, +7 (920) 664 10-40
E-mail: ialych_es@voenmeh.ru

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
Материалы IX международной конференции
22-26 сентября 2025, Цахкадзор, Армения

ՀՈՇ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ
IX միջազգային գիտաժողովի նյութեր
22-26 սեպտեմբերի 2025թ., Ծաղկաձոր, Հայաստան

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS
Proceedings of IX International Conference
22-26 September 2025, Tsaghkadzor, Armenia

Изд. заказ .№ 1393
Объем 23.25.печ. листов
Тираж 100 экз.
Типография НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24

СОДЕРЖАНИЕ

1. **Агаловян М.Л., Закарян Т.В., Товмасян А.Б.** Об одной пространственной задаче для пластин имеющих плоскость упругой симметрии 5
2. **Агаян К.Л., Атоян Л.А.** Упруго-спиновые волны в ферромагнитной структуре с полубесконечным магнитным экраном 9
3. **Агаян К.Л., Закарян В.Г.** Сдвиговые волны в составном пьезоэлектрическом пространстве со смещанными электромеханическими контактными условиями 14
4. **Айроян С.Г., Григорян Д.Г., Манукян Е.С., Тиранян Ш.М.,** Исследование сопротивления сдвигу набухающих грунтов без армирования и армирование волокнами базальта 19
5. **Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Саакян А.А.** Плоско-деформированное состояние упругой составной плоскости с межфазным, частично оторванным от матрицы, включением под воздействием динамических нагрузок 24
6. **Амирджанян А.А., Саакян С.К.** Антиплоская динамическая задача для кусочно-однородного полупространства с периодической системой межфазных частично оторванных от матрицы тонких включений 28
7. **Арутюнян Л.А., Закарян В.Г.** Плоская задача для составной плоскости с конечным отверстием 31
8. **Барсегян В. Р., Барсегян Э. А.** Об одной задаче управления линейной нестационарной динамической системой с фазовыми ограничениями интегрального типа 36
9. **Барсегян В.Р., Мкртчян М. Г., Матевосян А. Г.** Координатно–временная зависимость управляемого БПЛА и наземного обьекта 41
10. **Богачев И.В.** Методика совместной идентификации функций-параметров дробного-дифференциального аналога модели зинера 46
11. **Бузмаков М.Д., Красняков И.В., Брацун Д.А.** Численное моделирование динамики заполнения пор растущей эпителиальной тканью в статическом биореакторе в условиях десорбции факторов роста из матрицы скаффолда 51
12. **Власова О.А.** Дифференциальное вращение легкой сферы, всплывающей во вращающемся вертикальном цилиндре с жидкостью 56
13. **Вяткин А.А., Козлов В.Г., Петухов С.А.** Структура конвекции и теплоперенос во вращающемся горизонтальном цилиндрическом слое жидкости 60
14. **Гайбарян С.А., Зубов Л.М.** Нелинейные деформации цилиндрической трубы с распределенными винтовыми дислокациями осевого, радиального и азимутального направлений 64
15. **Галичян Т.А., Филиппов Д.А., Сапельников С.О.** Технология изготовления и характеристики трехслойного магнитоэлектрического гиратора на основе аморфного сплава и пьезокерамики 69
16. **Гандилян Д. В., Лисовенко Д. С.** Механика деформирования стенок брюшной аорты в нормальном состоянии и при аневризме с дефектами 74
17. **Геворгян Г.З., Дарбинян А.З.** Об устойчивости и изгибных колебаниях трансверсально изотропных круглых балок переменного радиуса с учетом поперечных эффектов при граничных условиях упругой заделки 79
18. **Геворкян Г.А., Курдина С.П.** Задача о точном позиционировании центра масс исполнительного звена двухзвенного упругого манипулятора 84
19. **Горячева И.Г., Яковенко А.А.** Моделирование контактного взаимодействия упругих тел с учетом микрогеометрии их поверхностей 88
20. **Гукасян А.А.** Кинематика вращательного движения упругой пластинки 92

21. **Гулгазарян Л.Г., Амбарцумян П.Р.** Смешанная динамическая 3d задача теории упругости двухслойной оболочки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта 97
22. **Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.** Контактная задача для кусочно-однородной плоскости с межфазным разрезом с учетом трения покоя 102
23. **Джилавян С. А., Василян Т. Г., Саркисян К. С**. Поперечные колебания анизотропной пластинки в связанной задаче термоупругости 105
24. **Джилавян С.А., Саргсян А.С., Галичян Т.А.** Дифракция локализованной электроупругой сдвиговой волны на краю полубесконечной трещины в пьезоэлектрическом составном пространстве 109
25. **Долгих Д.А., Ташкинов М.А.** Численный анализ влияния микроархитектуры на прочность 3d-печатных гильз с локальным армированием 113
26. **Ерофеев В.И., Шекоян А.В., Мальханов А.О.** Квазигармонические волны в нелинейных диэлектрических кристаллах с заряженными дислокациями 118
27. **Зарубин В. С., Зимин В. Н., Рахимов Д. Р., Савельева И. Ю.** Математическая модель термопластичности композиционных материалов 122
28. **Земцова Е.Г., Морозов Н.Ф, Семенов Б.Н., Смирнов И.В., Смирнов В.М.** Механические свойства алюмоматричного композита, армированного карбидом титана 127
29. **Земцова Е.Г., Морозов П.Е., Кудымов В.К., Семенов Б.Н.** Влияние наноструктурирования поверхности частиц армирующей фазы никелевой матрицы на механические свойства композита 131
30. **Зимин В.Н., Крылов А.В., Шахвердов А.О.** Моделирование безударного привода из материала с эффектом памяти формы для трансформируемых космических конструкций 135
31. **Казаков К.Е.** Задача о взаимодействии осесимметричной вставки и трубы с внутренним неоднородным покрытием, помещенной в жесткую оправку 140
32. **Карапетян К.А.** об одном подходе к оптимальному проектированию конструкционных тонкостенных труб из слоистого стеклопластика, предназначенных для трансмиссии крутящего момента. 144
33. **Козлов В.Г., Дьякова В.В., Власова О.А.** осредненные потоки вблизи колеблющейся в щелевом канале межфазной границы,их влияние на массоперенос растворимой примеси через границу 149
34. **Максимова И.С.** Выпуклость множеств достижимости в исследовании задач с переменной структурой 154
35. **Мартиросян С.Р.** Сверхзвуковая локализованная дивергенция широкой панели с одним свободным краем, первоначально растянутой по двум направлениям 157
36. **Мкртчян М.М., Григорян М.С., Мкртчян М.С.** О напряженом состоянии кусочно-однородного слоя армированный стрингером с коллинеарной системой трещин и жестких включений при антиплоской деформации 162
37. **Мурадян Н.С.** Зависимость сопротивления деформированию и разрушению при кручении стеклопластиковых труб от предварительно приложенных нормальных напряжений 167
38. **Мурашкин Е.В.** О распространении гармонических волн в гемитропном микрополярном термоупругом волноводе 171
39. **Олейникова Ю.В., Митюшов А.И., Крылов В.А., Инюшов И.А.** Исследование математической модели алгоритма с динамическим изменением параметров зондирующего сигнала для предотвращения ложного срабатывания при измерении дальности 175
40. **Павлова Н.Г.** Положение равновесия в модели открытого рынка 179

41. Пахомов Б.М. Модель деформирования разносопротивляющихся материалов 184
42. **Пирогова Ю.В., Ташкинов М.А.** Взаимосвязь морфологических параметров и механических свойств армированных полимеров для 3д-печати 189
43. **Полякова П.В., Баимова Ю.А.** Анализ влияния толщины диаманов и борнитранов на механические свойства: молекулярная динамика 194
44. **Рожнова Е.А., Баимова Ю.А.** Влияние морфологии углеродного аэрогеля на прочность: атомистическое моделирование 197
45. **Саакян А.В., Григорян А.А.** Крутильные колебания круглого штампа, сцепленного со составным полупространством с межфазным круговым включением.....200
46. **Савельева И.Ю., Соколов А.А., Евсеева М.М.** Исследование математической модели нелокальной термоупругости в кольцевом слое 205
47. **Саитова Р.Р., Арутюнян А.Р.** Прогнозирование длительной прочности металлических материалов при высоких температурах 210
48. **Стрелков К.С.** Резьбовые соединения класса «Премиум» и их герметичность в условиях повышенных температур.....214
49. **Сумбатян М.А.** Метод граничных интегральных уравнений с изменяющимся импедансом для гармонического волнового уравнения 219
50. **Титаренко Е.А., Сумбатян М.А.** Тестирование улучшенного метода ГИУ для волнового уравнения на примерах канонических треугольников 224
51. **Тоноян В.У., Гарибян С.М., Аракелян А.А.** Упругий изгиб тонкой пластинки при одноосном сжатии 229
52. **Торосян М.С., Стакян М.Г.** Повышение несущей способности деталей машин из конструкционных сталей методом поверхностного пластического деформирования.....234
53. **Торская Е.В., Степанов Ф.И.** Моделирование влияния фрикционного разогрева тонких поверхностных слоев на характеристики контакта 239
54. **Устинов К.Б., Гандилян Д.В.** Об упруго-пластическом изгибе осесимметричных пластин типа Феппля – Фон Кармана при граничных условиях обобщенной упругой заделки.....244
55. **Фомин Л.В., Басалов Ю.Г.** О применении кинетической теории к моделированию длительного разрушения составного стержня в условиях ползучести в активной среде 249
56. **Хачикян А.С.** К написанию дифференциальных уравнений эфира.....254
57. Яковенко А.А. Влияние остаточных напряжений на накопление повреждений и износ в условиях трения скольжения 257
58. **Avetisyan A., Ghazaryan K., Marzocca P.** Stability and Vibration Analysis of Multi-Span Beams on Periodic Supports Using Bloch–Floquet Theory of Forbidden Frequencies 262
59. **Avetisyan A.S., Khachatryan V.M., Kamalyan A.A.** Hierarchy Of Geometric Nonlinearity in the Energy Harvesting Process in Dynamic Problems of Thin-Walled Piezoelectric Elements.....266
60. **Avetisyan V.V.** On The Structure Of Optimal Control In An Electromechanical System With Thermal Losses Under Control Constraints 271
61. Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G. Free Vibrations of Thin Elastic Composed Panel with Rigid-Clamped Edge Generator 276
62. Ivanov O.O. Vortex-induced vibrations of an elastic cylinder near rigid bodies 281
63. Kazakov E.A., Bondarchuk A.A. Two-Dimensional Integral Equations in Aerodynamics of Thin Rotating Blade.....284

64. **Kerobyan A. V.** Adhesive Contact Problem for an Elastic Infinite Sheet Strengthened by the Systems of Finite Number Finite-Length Stringers 289

65. **Mazmanyan S., Sargsyan T., Sargsyan H., Mazmanyan J., Papyan G., Baghdagyulyan A.** Development of expanding cement compositions using polyplast RD additives 294

66. **Mikilyan M.A., Hambardzumyan H.H., Araqelyan A.A.** Nature of wave propagation magnetostrictive media 298

67. **Mikilyan M.A., Tonoyan V.U., Cestino E.** Effect of magnetic field on critical speed of aero-thermo-elastic oscillations of high aspect ratio plate 303

68. **Mkhitaryan S.M., Kanetsyan E.G., Mkrtchyan M.S.** The Interaction of Crack-Type Stress Concentrators IN AN Elastic Plate AND A Rigid Thin Inclusion Taking INTO Consideration their Adhesion 308

69. **Nuriev A.N., Anisimov V.D.** High Order Asymptotic Model of a Propulsive Motion of an Oscillating Cylindrical Body in Fluid 313

70. **Orelma H.** Modeling The Third Dimension: Quaternion Techniques In Mechanics And Flow Dynamics 317

71. **Sargsyan A.M., Kanetsyan E.G.** On Stress Singularities in an Elasticity Problem for a Poroelastic Wedge 321

72. **Serdyukov V.I., Serdyukova N.A., Shishkina S.I.** Transfer model's mechanism of smart systems theory based on quasi – fractal logic. 326

73. **Seyranyan S.P.** On the Convergence of Trigonometric Series of Bending Moments on a Clamped Contour of a Rectangular Double Antisymmetrically Loaded Plate 331

74. **Shitikova M.V., Brygar O.A.** Bulk Harmonic Wave Propagation in a Fractional Derivative Rzhanitsyn Medium 336

75. **Shitikova M.V., Modestov K.A.** Analysis of Harmonic Wave Propagation in Viscoelastic Media Considering the P-Wave Modulus Via the Fractional Derivative Standard Linear Solid Model 341

76. **Ustinov K.B.** Some analytical solutions of problems related to interface cracks 346

77. **Valesyan S. Sh.** Research of the Mechanical Properties of Aged Glass Textolite Subjected to Repeated Static Loading 351

78. **Vasilyan N.G.** Axisymmetric free vibrations of inhomogeneous piezoelectric circular plates under the shear deformations along thickness 356

79. **Yang-Yuan Chen, Jeng-Haur Horng** Effect of Particles and Lubricant Viscosity on Friction in Three-Body Mixed Lubrication 361

80. **Zimin B.A., Sudenkov Yu.V., Yalych E.S.** Generalized Hamiltonian Mechanics for Dissipative Continua: from Elastic Waves to Viscous Fluids 364