

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՍԱՐԳՍՅԱՆ ՆԱՐԻՆԵ ՍՈՒՐԵՆԻ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ
ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ ԱՌԱԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՐԵՆ
ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄԱՆ ՎՐԱ

Ա.02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2019

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

САРКИСЯН НАРИНЕ СУРЕНОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛОС И ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.02.04 – «Механика деформируемого твёрдого тела»

ЕРЕВАН – 2019

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ա.Մ. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս.Հ. Սարգսյան
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Լ.Գ. Ղուլղազարյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան


Պաշտպանությունը կայանալու է 2019թ. *օգոստոսի 30-ին*, ժամը 14.00-ին
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի
նիստում

(հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2, avsah@mechins.sci.am):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ *2019թ. հունիսի 25-ին*

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ.մաթ.գիտ. դոկտոր

 Ա.Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Научный руководитель: д.ф.м.н., проф. А.М.Хачатрян

Официальные оппоненты: член кор. НАН РА, д.ф.м.н., проф. С.О.Саркисян
д.ф.м.н., проф. Л.Г. Гулгазарян


Ведущая организация: Ереванский государственный университет

Защита диссертации состоится *30-ого августа 2019г. в 14⁰⁰ часов*
на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА
по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, avsah@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан *25-ого июня 2019г.*

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физико-математических наук

 А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современной технике составными элементами большинства конструкций являются однослойные и многослойные стержни, пластины и оболочки. Они обычно состоят из анизотропных материалов, иногда с существенно различными физико-механическими свойствами. Контакт между контактирующими слоями, в зависимости от условий работы, может быть как полным, так и неполным. В связи с этим разработка эффективных методов расчета элементов таких конструкций является актуальной. При исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) балок, пластин и оболочек применяются различные методы. Одним из самых распространенных методов расчета тонкостенных конструкций является метод гипотез. Важный пример теории, построенной методом гипотез, представляет собой классическая теория, базирующаяся на предположениях типа гипотез Бернулли-Кирхгофа-Лява. Основные уравнения анизотропной упругой слоистой пластинки на основе гипотезы Кирхгофа-Лява для всего пакета в целом получены С.Г.Лехницким. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе той же гипотезы для всего пакета в целом построена С.А. Амбарцумяном. В дальнейшем были предложены различные уточненные теории. Большинство научных работ по этой проблеме посвящено разработке методов расчета изотропных и ортотропных однослойных и многослойных балок, пластин и оболочек, на основе геометрически линейной теории упругости.

Другой важный метод изучения напряженно-деформированных состояний балок, пластин и оболочек – метод разложения по параметру толщины. Этим методом все искомые величины представляются в виде произведения двух функций, первая из которых есть функция от поперечной координаты, вторая – от координат срединной поверхности. В итоге получаются краевые задачи общего вида и все группы неизвестных приходится определять одновременно.

Краевые задачи при асимптотическом методе имеют итерационный характер. Процесс их решения заключается в решении краевых задач, различающихся между собой только смыслом известных функций, входящих в правые части уравнений и в граничные условия. Сущность асимптотического метода заключается в представлении искомых величин в виде асимптотического специфического ряда по степеням некоторого безразмерного физического или геометрического малого (или большого) параметра и получением рекуррентных формул для вычисления неизвестных.

Асимптотический метод определения НДС произвольных изотропных пластин и оболочек разработан А.Л. Гольденвейзером, К.О. Фридрихсом, А.Е. Грином. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек построена Л.А. Агаловяном.

В теории анизотропных пластин и оболочек асимптотический метод получил развитие в работах Л.А.Агаловяна и его учеников Р.С. Геворкяна, А.М.Хачатряна, М.Л. Агаловяна, Л.Г. Гулгазарян и др.

Изучению взаимодействия пластин и оболочек с различными физическими полями с использованием асимптотического метода посвящены работы С.А.Амбарцумяна, Г.Е.Багдасаряна, М.В.Белубекяна, С.О.Саркисяна,

К настоящему времени разработаны различные варианты физически и геометрически нелинейной теории упругости изотропных и анизотропных тел. Создание новых, прикладных методов расчета слоистых балок, пластин и оболочек на основе линейной и нелинейной теории упругости, представляет большой теоретический и практический интерес.

Диссертационная работа посвящена проблеме нахождения и изучения напряженно-деформированных состояний анизотропных слоистых полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями на основе геометрически нелинейной теории упругости. Материалы слоев обладают анизотропией самого общего вида. Асимптотическим методом построены решения внутренней задачи. Показана эффективность выбранного метода для расчета таких элементов конструкций.

Цель работы заключается в исследовании следующих вопросов:

- нахождение асимптотики решения и определения самого решения для краевых задач двухслойных анизотропных полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями на основе геометрически нелинейной теории упругости;

- вывод для расчетных прикладных приложений рекуррентных формул для вычисления НДС анизотропных двухслойных полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями, когда анизотропия общая.

- проведение сравнительного анализа решений по линейной и нелинейной теорий упругости и выявлении эффекта учета нелинейности в исходных уравнениях.

Научная новизна. В работе рассмотрен новый класс задач для анизотропных двухслойных полос и пластин на основе геометрически нелинейной теории упругости, когда анизотропия общая.

Найдены асимптотики и построены решения краевых задач анизотропных двухслойных полос и пластин, когда на лицевых плоскостях заданы смешанные условия теории упругости, а между слоями – условия полного или неполного контакта.

Асимптотическим методом выведены системы разрешающих уравнений и расчетные формулы для определения всех компонентов тензора напряжений и вектора перемещения анизотропных двухслойных полос и пластин на основе геометрически нелинейной теории упругости.

Указаны случаи, когда учет нелинейных членов становится необходимым.

Практическая значимость. Результаты исследований, приведенных в работе, расширяют область применимости асимптотического метода, позволяют решить новый класс задач для слоистых анизотропных тел. Результаты могут быть использованы в конструкторских бюро по новой технике, в фундаментостроении, сейсмологии и др. областях.

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечены применением известных постановок задач, строгих математических методов, а

также совпадением некоторых результатов вытекающих, как частные случаи, из полученных автором, с ранее известными.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- на Международной школе–конф. молодых ученых, посв. 70–летию НАН Армении. Цахкадзор, 1–4 октября, 2013.

- на VIII и IX Международных конференциях «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис–Степанакерт (22–26 сентября, 2014, 01–06 октября, 2018).

- на семинаре «Методы расчета тонкостенных систем» Института механики НАН Армении (2019 г.);

- на общем семинаре Института механики НАН Армении (2019 г.).

- на семинарах кафедры математики Арцахского государственного университета (2012–2019 г.).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 7 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 105 страницах, включая введение, три главы, заключение, библиографический список, содержащий 149 наименований цитируемой литературы и 2 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дается краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами, а также краткое содержание работы. В обзоре наиболее полно отражены исследования, в которых используется асимптотический или близкое к нему методы.

В первой главе методом асимптотического интегрирования двумерных геометрически нелинейных уравнений теории упругости получены разрешающие уравнения и соотношения для определения и анализа напряженно-деформированных состояний двухслойных анизотропных полос при полном и неполном контакте между слоями. Слои полос обладают анизотропией общего вида. Построены решения, соответствующие внутреннему напряженному состоянию. Показано, что найденные уравнения и соотношения в первом приближении совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями тех же задач в линейной постановке. Рассмотрены численные примеры и показано, что поправки, обусловленные нелинейностью задачи, проявляются начиная с третьего приближения.

В первом параграфе главы ставятся краевые задачи для двухслойных анизотропных полос длиной l и шириной $2h$ при полном и неполном контакте между слоями. Считается, что слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$, k — номер слоя ($k = 1, 2$).

Условия на продольных кромках задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(1)} &= \varepsilon^4 \sigma_{xy}^+(x), \sigma_y^{(1)} = \varepsilon^3 \sigma_y^+(x), \text{ при } y = h_1 \\ \sigma_{xy}^{(2)} &= \varepsilon^4 \sigma_{xy}^-(x), \nu^{(2)} = \varepsilon^3 \nu^-(x), \text{ при } y = -h_2 \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon = h/l$ геометрический малый параметр.

На линии раздела слоев задано одно из следующих условий контакта:

Задача 1. На линии раздела слоев $y = 0$ заданы условия полного контакта:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \nu^{(1)} = \nu^{(2)}, u^{(1)} = u^{(2)} \quad (2)$$

Задача 2. На линии раздела слоев $y = 0$ заданы следующие условия неполного контакта (*скользящий контакт*):

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \nu^{(1)} = \nu^{(2)}, u^{(2)} - u^{(1)} = f(x) \quad (3)$$

Задача 3. На линии раздела слоев $y = 0$ заданы условия неполного контакта – закон распределения тангенциальных напряжений:

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} = f(x), \nu^{(1)} = \nu^{(2)} \quad (4)$$

Функция $f(x)$ в (3) и в (4) считается заданным и в зависимости от выбранной модели контакта, может иметь различный вид.

Требуется найти решение уравнений геометрически нелинейной теории упругости для анизотропной двухслойной полосы, когда на нижней и верхней сторонах полосы заданы условия (1), а на линии раздела слоев – условия полного или неполного контакта (2) – (4).

Во втором параграфе для решения сформулированных краевых задач преобразуем геометрически нелинейные уравнения теории упругости анизотропного тела, вводя безразмерную координатную систему $\xi = x/l$, $\zeta = y/h$, а также безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = \nu^{(k)}/l$. В результате получим, содержащую малый параметр $\varepsilon = h/l$ при производных, сингулярно возмущенную систему, решение которой складывается из двух типов решений – внутреннего и типа пограничного слоя. Решение внутренней задачи ищется в виде специфических рядов по степеням малого параметра

$$Q^{(k)} = \varepsilon^{q_k} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(k,s)} \quad (5)$$

где $Q^{(k)}(\xi, \zeta)$ любое из напряжений или безразмерных перемещений, S – число приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(k,s)}(\xi, \zeta)$:

$$q_k = 3 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, q_k = 4 \text{ для } \sigma_{xy}^{(k)} \quad (6)$$

Эта асимптотика, по сути, не отличается от той, что применялась для решения тех же задач в линейной теории упругости. Однако здесь, чтобы

получить итерационный процесс, асимптотическое представление (5) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Асимптотике (6) соответствует выбор представления (1). Подставив (5) с учетом (6) в преобразованную систему геометрически нелинейных уравнений и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим новую систему, которая интегрируется относительно ξ . Интеграл содержит неизвестные функции интегрирования $\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi)$, $u_0^{(k,s)}(\xi)$, $v_0^{(k,s)}(\xi)$, которые определяются с помощью граничных условий (1) и условий контакта (2) – (4).

В третьем параграфе рассмотрен вопрос определения напряженно-деформированного состояния в плоской краевой задаче для анизотропной слоистой полосы по геометрически нелинейной теории упругости при условиях (1) на продольных кромках и условиях полного контакта (2) между слоями (задача 1).

Удовлетворив условиям полного контакта (2), получим

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)}, \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)}, v_0^{(1,s)} = v_0^{(2,s)}, u_0^{(1,s)} = u_0^{(2,s)} \quad (7)$$

Удовлетворив граничным условиям (1), для неизвестных функций интегрирования $\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi)$, $v_0^{(k,s)}(\xi)$ получим

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1), v_0^{(1,s)} = v^{-(s)} - v^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \quad (8)$$

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 \frac{d\sigma_{y0}^{(1,s)}}{d\xi} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 \frac{d^2 u_0^{(1,s)}}{d\xi^2} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)$$

Для определения $u_0^{(1,s)}$ получим дифференциальное уравнение

$$C_{11} \frac{d^2 u_0^{(1,s)}}{d\xi^2} = p^{(s)} \quad (9)$$

где

$$p^{(s)} = \sigma_{xy}^- - \sigma_{xy}^+ + \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \zeta_2 \right) \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \left(\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \right)$$

$$C_{11} = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}, \zeta_1 = \frac{h_1}{h}, \zeta_2 = -\frac{h_2}{h}$$

Выведенные уравнения и соотношения в нулевом приближении совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями анизотропных полос при линейной постановке задачи

В четвёртом параграфе рассмотрена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы при условиях (1) на продольных кромках и при неполном контакте между слоями (3) (задача 2).

Пользуясь общим решением и удовлетворив условиям неполного контакта (3), получим

$$\sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)}, \sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)}, \nu^{(1,s)} = \nu^{(2,s)}, u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + f^{(s)}(\xi) \quad (10)$$

где

$$f^{(0)}(\xi) = f(x/l), f^{(s)}(\xi) = 0 \text{ при } s > 0. \quad (11)$$

Удовлетворив граничным условиям (1), получим следующее дифференциальное уравнение для определения перемещения $u^{(1,s)}$:

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} + C_2 \frac{d^2 f^{(s)}(\xi)}{d\xi^2} = p^{(s)} \quad (12)$$

где

$$C_1 = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}}, C_2 = -\frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}, C = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}} - \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}} \\ p^{(s)} = \sigma_{xy}^- - \sigma_{xy}^+ + \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 - \frac{a_{12}^{(2)}}{a_{11}^{(2)}} \zeta_2 \right) \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \\ + \left(\sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) - \sigma_{xy}^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2) \right)$$

Для определения неизвестных функций интегрирования $\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi)$ и $w^{(k,s)}(\xi)$ получим формулы

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)} = \sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1), \nu^{(1,s)} = \nu^{(2,s)} = \nu^{-(s)} - \nu^{*(2,s)}(\xi, \zeta_2), \\ \sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)} = \sigma_{xy}^{+(s)}(\xi) - \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \zeta_1 \frac{d\sigma_{y0}^{(1,s)}}{d\xi} + \frac{1}{a_{11}^{(1)}} \zeta \frac{d^2 u_0^{(1,s)}}{d\xi^2} - \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \quad (13) \\ \sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}, \sigma_y^{+(0)} = \sigma_y^+, \nu^{-(0)} = \nu^-, \sigma_{xy}^{\pm(s)} = \sigma_y^{+(s)} = 0, \nu^{-(s)} = 0, s > 0$$

Более подробно рассмотрен модель нежесткого контакта. Принимается

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi \frac{l}{h} \sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) \quad (14)$$

где коэффициент χ постоянная величина. Предельному случаю $\chi \rightarrow 0$ соответствует жесткий (полный) контакт, другому предельному случаю $\chi \rightarrow \infty$ – скользящий контакт $\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0$.

Остальные же условия контакта (3) остаются неизменными. Принимая условие (14), тем самым, мы задаем функцию $f(x) = \chi \frac{l}{h} \sigma_{xy}^{(1)}(x, 0)$, что в свою очередь, последнее условие (10) превращает в условие

$$u^{(2,s)} = u^{(1,s)} + \chi \sigma_{xy0}^{(1,s)} \quad (15)$$

В итоге уравнение (12) принимает вид

$$C \frac{d^2 u^{(1,s)}}{d\xi^2} - \chi C_1 C_2 \frac{d^4 u^{(1,s)}}{d\xi^4} = \bar{p}^{(s)} \quad (16)$$

$$\bar{p}^{(s)} = p^{(s)} + \chi C_2 \left[\frac{d^2 \sigma_{xy}^{+(s)}}{d\xi^2} - \frac{d^2 \sigma_{xy}^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi^2} - \zeta \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \left(\frac{d^3 \sigma_y^{+(s)}}{d\xi^3} - \frac{d^3 \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi^3} \right) \right] \quad (17)$$

Уравнение (16) при $\chi = 0$ совпадает с уравнением (12). Если $\chi \neq 0$, то уравнение (16) уже имеет четвертый порядок, то есть модель нежесткого контакта приводит к повышению порядка разрешающих уравнений.

В пятом параграфе рассмотрена плоская краевая задача для анизотропной двухслойной полосы при граничных условиях (1) и при неполном контакте между слоями (4).

Пользуясь общим решением и удовлетворив условиям неполного контакта (4), получим

$$\sigma_{y0}^{(1,s)} = \sigma_{y0}^{(2,s)}, \nu^{(1,s)} = \nu^{(2,s)}, \sigma_{xy0}^{(1,s)} = \sigma_{xy0}^{(2,s)} = f^{(s)}(\xi) \quad (18)$$

где $f^{(s)}(\xi)$ определяется по формуле (11).

Удовлетворив граничным условиям (1), определяем неизвестные функции интегрирования $\sigma_{y0}^{(k,s)}(\xi)$, $\sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi)$ и $\nu^{(k,s)}(\xi)$, а для вычисления перемещения $u^{(k,s)}(\xi)$, получим дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$C_{kk} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} = f^{(s)}(\xi) + p_k^{(s)}, \quad (k=1,2) \quad (19)$$

где $C_{11} = \frac{\zeta_1}{a_{11}^{(1)}}$, $C_{22} = \frac{\zeta_2}{a_{11}^{(2)}}$, $\sigma_{xy}^{\pm(0)} = \sigma_{xy}^{\pm}$, $\sigma_{xy}^{\pm(s)} = 0$, $s \neq 0$,

$$p_k^{(s)} = -\sigma_{xy}^{\pm(s)} + \frac{a_{12}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} \zeta_k \left(\frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} - \frac{d\sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1)}{d\xi} \right) + \sigma_{xy}^{*(k,s)}(\xi, \zeta_k) \quad (20)$$

Уравнения (19) отличаются от соответствующих уравнений при полном контакте между слоями тем, что во-первых, вместо одного уравнения при полном контакте, здесь имеем два уравнения относительно двух перемещений $u^{(k,s)}(\xi)$, во-вторых, в правых частях уравнений (19) содержится функция $f^{(s)}(\xi)$, которая в зависимости от выбранной модели, может повысить порядок дифференциальных уравнений.

Если слои взаимодействуют по закону сухого трения Кулона, то

$$\sigma_{xy0}^{(1)} = \sigma_{xy0}^{(2)} = \chi \sigma_{y0}^{(1)}, f^{(s)}(x) = \chi \sigma_{y0}^{(1,s)} = \chi \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right) \quad (21)$$

и, как следствие, из (19), с учетом (21), получим

$$C_{kk} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} = \bar{p}_k^{(s)} \quad (22)$$

где $\bar{p}_k^{(s)} = \chi \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right) + p_k^{(s)}$, $\chi = const$ – коэффициент трения.

В шестом параграфе рассмотрены иллюстрирующие примеры. В частности, рассмотрен пример, когда на нижней и верхней сторонах двухслойной полосы заданы условия

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^+ &= \tau^+ = const, \quad \sigma_y^+ = -p = const \\ \sigma_{xy}^- &= \tau^- = const, \quad v^-(x) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

а на линии раздела слоев $y = 0$ заданы условия неполного контакта (4), где

$$f(x) = \chi \sigma_{y0}^{(1)} = \chi \left(\sigma_y^{+(s)} - \sigma_y^{*(1,s)}(\xi, \zeta_1) \right)$$

Пользуясь решением задачи 3 и вычисляя приближения до $s = 3$ включительно, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)} &= -p, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = -\chi p \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_1} \right) + \tau^+, \quad \sigma_{xy}^{(2)} = -\chi p \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_2} \right) + \tau^- \\ \sigma_x^{(1)} &= \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} p - \frac{1}{\zeta_1} (\chi p + \tau^+) \xi - \left\{ \frac{(\chi p + \tau^+) \xi^2}{2\zeta_1} \left(\frac{5(\chi p + \tau^+)}{2\zeta_1} - 1 \right) + \right. \\ &+ \frac{\xi}{\zeta_1} \left(\frac{a_{12}^{(1)} (\chi p + \tau^-)}{a_{11}^{(1)}} p - (\chi p + \tau^+) \left(\frac{C_1^{(1,0)}}{\zeta_1} + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} p \right) \right) + \\ &+ \left. \frac{C_1^{(1,0)}}{a_{11}^{(1)}} \left(1 - \frac{\chi p + \tau^+}{\zeta_1} \right) \xi \right\} \varepsilon^3 - \frac{C_1^{(1,3)}}{a_{11}^{(1)}} \varepsilon^3 + \frac{a_{11}^{(1)}}{4\zeta_1^2} (\chi p + \tau^+)^2 \xi^2 \varepsilon^3 + \frac{C_1^{(1,0)}}{\zeta_1} + \frac{C_1^{(1,1)}}{\zeta_1} \varepsilon + \frac{C_1^{(1,2)}}{\zeta_1} \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (24)$$

На этом примере поправки, обусловленные нелинейностью задачи, проявляются, начиная с приближения $s \geq 3$.

Из (24) видно, что линейный член в формуле для $\sigma_x^{(1)}$ имеет порядок $O(\chi p + \tau^+)$, а нелинейный член – порядок $O(\varepsilon^3 (\chi p + \tau^+)^2)$. Из выражения для перемещения $U^{(1)}$ (оно здесь не приводится) видно, что они имеют соответственно порядки $O(a_{11}^{(1)} (\chi p + \tau^+))$ и $O(\varepsilon^3 (a_{11}^{(1)})^2 (\chi p + \tau^+)^2)$.

Во второй главе рассмотрен вопрос определения напряженно-деформированного состояния двухслойной анизотропной пластинки, слои которой обладают анизотропией общего вида. Найдена асимптотика и из геометрически

нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки. Выведены формулы для определения всех перемещений и напряжений. Предполагается, что на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, на нижней – смешанные условия теории упругости, а на плоскости раздела слоев – условия полного контакта.

Показано, что выведенные асимптотическим методом уравнения и соотношения для нулевого приближения совпадают с уравнениями линейной плоской задачи анизотропной двухслойной пластинки, когда для каждого слоя имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости пластинки.

В первом параграфе главы ставится краевая задача для двухслойной анизотропной пластинки длиной l и шириной $2h$ при полном контакте между слоями. Считается, что слои имеют различные толщины h_k , коэффициенты упругости $a_{ij}^{(k)}$. Задача решается при следующих условиях на лицевых плоскостях пластинки $z = h_k$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^+(x, y), \quad \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^+(x, y), \quad \sigma_z = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_z^+(x, y), \quad z = h_1 \\ w &= \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^-(x, y), \quad \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^-(x, y), \quad \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^-(x, y), \quad z = -h_2 \end{aligned} \quad (25)$$

и условиях полного контакта между слоями. Плоскость отсчета Oxy совпадает с плоскостью раздела слоев, параллельна лицевым плоскостям пластинки.

Условия полного контакта имеют вид

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} \quad (26)$$

Краевые условия на торцах $x=0, a$ и $y=0, b$ не конкретизируются, ими обусловлен пограничный слой.

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела в области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1\}$ при условиях на лицевых плоскостях пластинки (25) и условиях полного контакта (26).

Во втором параграфе для решения поставленной краевой задачи в трехмерных уравнениях теории упругости введем безразмерные переменные $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерные перемещения $U^{(k)} = u^{(k)}/l$, $V^{(k)} = v^{(k)}/l$, $W^{(k)} = w^{(k)}/l$, где l – характерный размер пластинки ($h \ll l$). В результате получим систему, содержащую малый параметр $\varepsilon = h/l$ при производных, решение которой складывается из двух типов решений – внутреннего и типа пограничного слоя. Решение внутренней задачи ищется в виде суммы (5), где $Q^{(k)}(\xi, \eta, \zeta)$ любое из напряжений или безразмерных перемещений, S – число приближений. Целое число q_k подбирается так, чтобы получилась непроти-

воречивая система для определения $Q^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta)$. Они подбираются следующим образом

$$q_k = 3 \text{ для } \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}; q_k = 3 \text{ для } \sigma_{xz}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)} \quad (27)$$

Подставив (5) в преобразованные, введением безразмерных координат и безразмерных компонент вектора перемещения, уравнения теории упругости анизотропного тела, с учетом (27), получим новую систему для определения $Q^{(k,s)}(\xi, \eta, \zeta)$, решив которую, получим

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(k,s)} &= \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_z^{*(k,s)}, \quad U^{(k,s)} = u^{(k,s)} + u^{*(k,s)}, \quad (u, v, w) \\ \sigma_x^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{16}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + a_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_x^{*(k,s)}, \\ \sigma_{xy}^{(k,s)} &= B_{16}^{(k)} \frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \xi} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \eta} + B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k,s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(k,s)}}{\partial \xi} \right) + c_3^{(k)} \sigma_{z0}^{(k,s)} + \sigma_{xy}^{*(k,s)}, \\ \sigma_{xz}^{(k,s)} &= - \left[L_{11} \left(B_{ij}^{(k)} \right) u^{(k,s)} + L_{12} \left(B_{ij}^{(k)} \right) v^{(k,s)} \right] \zeta - \left(a_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \xi} + c_3^{(k)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(k,s)}}{\partial \eta} \right) \zeta + \\ &+ \sigma_{xz0}^{(k,s)} + \sigma_{xz}^{*(k,s)}, \quad (1, x, \xi, u, a_3^{(k)}; 2, y, \eta, v, b_3^{(k)}) \end{aligned} \quad (28)$$

где $L_{ij} \left(B_{ij}^{(k)} \right)$ известные дифференциальные операторы.

Неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, u^{(k,s)}, v^{(k,s)}, w^{(k,s)}$ определяются с помощью условий (25) и (26). Величины со звездочками, входящие в формулы (26), как обычно, известны для каждого приближения. Сюда же входят члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи.

В третьем параграфе используя решение (28), удовлетворив условиям полного контакта (26), получим

$$\begin{aligned} u^{(1,s)} &= u^{(2,s)} = u^{(s)}, \quad v^{(1,s)} = v^{(2,s)} = v^{(s)}, \quad w^{(1,s)} = w^{(2,s)} = w^{(s)} \\ \sigma_{z0}^{(1,s)} &= \sigma_{z0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{xz0}^{(1,s)} = \sigma_{xz0}^{(2,s)}, \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} \end{aligned} \quad (29)$$

Удовлетворив поверхностным условиям (25) определяем неизвестные функции интегрирования $\sigma_{xz0}^{(k,s)}, \sigma_{yz0}^{(k,s)}, \sigma_{z0}^{(k,s)}, w^{(k,s)}$, а для определения перемещений $u^{(s)}, v^{(s)}$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} L_{11} \left(C_{ij} \right) u^{(s)} + L_{12} \left(C_{ij} \right) v^{(s)} &= p_1^{(s)} \\ L_{12} \left(C_{ij} \right) u^{(s)} + L_{22} \left(C_{ij} \right) v^{(s)} &= p_2^{(s)} \end{aligned} \quad (30)$$

где $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ обобщенные нагрузки.

Легко убедиться, что при $s = 0$ система уравнений (30), как в той же задаче для однослойной пластинки, совпадает с уравнениями линейной обобщенной плоской задачи, когда имеется плоскость упругой симметрии. Для приближений $s > 0$ меняются лишь правые части уравнений, куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

В четвертом параграфе приведены уравнения и расчетные формулы для двухслойной пластинки из ортотропных материалов.

В пятом параграфе в качестве иллюстрации, рассмотрены частные примеры. В частности, рассмотрен следующий пример. Пусть пластинка нагружена только тангенциальными силами

$$\sigma_{xz}^+ = \tau_1 \sin \frac{\pi}{a} x = \tau_1 \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \sigma_{yz}^+ = \tau_2 \sin \frac{\pi}{b} y = \tau_2 \sin \frac{\pi l}{b} \eta \quad (31)$$

$$\sigma_{xz}^- = \sigma_{yz}^- = \sigma_z^+ = 0, w^- = 0$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u = 0, w = 0 & \quad \text{при } x = 0, x = a \\ v = 0, w = 0 & \quad \text{при } y = 0, y = b \end{aligned} \quad (32)$$

В нулевом приближении получено решение

$$U^{(k,0)} = \frac{1}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right)^2 \tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi, V^{(k,0)} = \frac{1}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right)^2 \tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta,$$

$$W^{(k,0)} = 0, \sigma_{xy}^{(k,0)} = \sigma_z^{(k,0)} = 0$$

$$\sigma_x^{(k,0)} = \frac{B_{11}^{(k)}}{C_{11}} \left(\frac{a}{\pi l} \right) \tau_1^{(0)} \cos \frac{\pi l}{a} \xi + \frac{B_{12}^{(k)}}{C_{22}} \left(\frac{b}{\pi l} \right) \tau_2^{(0)} \cos \frac{\pi l}{b} \eta \quad (x, y, \xi, \eta; a, b; 1, 2) \quad (33)$$

$$\sigma_{xz}^{(1,0)} = \left[1 + \frac{B_{11}^{(1)}}{C_{11}} (\zeta - \zeta_1) \right] \tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \sigma_{yz}^{(1,0)} = \left[1 + \frac{B_{22}^{(1)}}{C_{22}} (\zeta - \zeta_1) \right] \tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta,$$

$$\sigma_{xz}^{(2,0)} = \left[1 + \frac{B_{11}^{(2)}}{C_{11}} \zeta - \frac{B_{11}^{(1)}}{C_{11}} \zeta_1 \right] \tau_1^{(0)} \sin \frac{\pi l}{a} \xi, \sigma_{yz}^{(2,0)} = \left[1 + \frac{B_{22}^{(2)}}{C_{22}} \zeta - \frac{B_{22}^{(1)}}{C_{22}} \zeta_1 \right] \tau_2^{(0)} \sin \frac{\pi l}{b} \eta$$

Эффект обусловленный геометрически нелинейностью исходных уравнений теории упругости также проявляется начиная с приближения $s = 3$.

В третьей главе найдена асимптотика и из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности тангенциальных перемещений или закон распределения тангенциальных напряжений. Построено решение внутренней задачи и показано, что когда на плоскости раздела слоев задан закон

распределения разности тангенциальных перемещений, то это приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений.

В первом параграфе ставятся краевые задачи для двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы условия (25), а на плоскости раздела слоёв – условия неполного контакта.

Задача 1. На плоскости раздела слоев $z = 0$ задан закон распределения разности тангенциальных перемещений

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)}, \quad \sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)} \\ u^{(2)} = u^{(1)} + f_1(x, y), \quad v^{(2)} = v^{(1)} + f_2(x, y) \end{aligned} \quad (34)$$

Задача 2. На плоскости раздела слоев $z = 0$ задан закон распределения тангенциальных напряжений

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = f_1(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = f_2(x, y) \quad (35)$$

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при условиях на лицевых плоскостях (25) и условиях неполного контакта слоев (35) или (35).

Во втором параграфе показано, то найденное общее решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости (28) можно использовать для решения краевых задач (25), (34) и (25), (35).

В третьем параграфе найден общий интеграл краевой задачи (25), (34), получены формулы для определения неизвестных функций интегрирования. Для неизвестных перемещений $u^{(k,s)}, v^{(k,s)}$ выведена система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{11}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) = p_1^{(s)} \\ L_{12}(C_{ij})u^{(1,s)} + L_{22}(C_{ij})v^{(1,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(2)})f_1^{(s)}(\xi, \eta) + L_{22}(C_{ij}^{(2)})f_2^{(s)}(\xi, \eta) = p_2^{(s)} \end{aligned} \quad (36)$$

где $p_1^{(s)}$ и $p_2^{(s)}$ обобщенные нагрузки.

В четвертом параграфе более подробно рассмотрена модель нежесткого контакта:

$$u^{(2)} - u^{(1)} = \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_{xz}(z=0), \quad v^{(2)} - v^{(1)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_{yz}(z=0) \quad (37)$$

Постоянные χ_1, χ_2 для анизотропных материалов имеют, вообще говоря, разные количественные значения. Тогда из (29) и (35) следует

$$f_1^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_1 \sigma_{xz0}^{(k,s)}, \quad f_2^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_2 \sigma_{yz0}^{(k,s)} \quad (38)$$

Подставив значения $f_1^{(s)}(\xi, \eta)$ и $f_2^{(s)}(\xi, \eta)$ из (38) в (36) с учетом формулы определения $\sigma_{xz0}^{(k,s)}$ и $\sigma_{yz0}^{(k,s)}$, получим систему уравнений для определения $u^{(1,s)}$ и $v^{(1,s)}$

$$\begin{aligned}\bar{L}_{11}(C_{ij})u^{(1,s)} + \bar{L}_{12}(C_{ij})v^{(1,s)} &= \bar{p}_1^{(s)} \\ \bar{L}_{21}(C_{ij})u^{(1,s)} + \bar{L}_{22}(C_{ij})v^{(1,s)} &= \bar{p}_2^{(s)}\end{aligned}\quad (39)$$

где операторы $\bar{L}_{ij}(C_{ij}^{(k)})$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}\bar{L}_{11}(C_{ij}) &= \left[L_{11}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)})L_{11}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)})L_{12}(C_{ij}^{(1)}) \right] \\ \bar{L}_{12}(C_{ij}) &= \left[L_{12}(C_{ij}) + \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)})L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)})L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right] \\ \bar{L}_{22}(C_{ij}) &= \left[L_{22}(C_{ij}) + \chi_1 L_{12}(C_{ij}^{(2)})L_{12}(C_{ij}^{(1)}) + \chi_2 L_{22}(C_{ij}^{(2)})L_{22}(C_{ij}^{(1)}) \right]\end{aligned}\quad (40)$$

Обобщенные нагрузки $\bar{p}_1^{(s)}$ и $\bar{p}_2^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}\bar{p}_1^{(s)} &= p_1^{(s)} - \left[\chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)})\sigma_{xz}^{+(s)}(\xi, \eta) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)})\sigma_{yz}^{+(s)}(\xi, \eta) \right] + \\ &+ \left[\chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(1)})\sigma_{xz}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta_1) + \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(1)})\sigma_{yz}^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right] - \\ &- \chi_1 L_{11}(C_{ij}^{(2)}) \left(a_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \zeta_1 - \\ &- \chi_2 L_{12}(C_{ij}^{(2)}) \left(b_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c_3^{(1)} \frac{\partial \sigma_{z0}^{(s)}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \zeta_1; \\ &(1, 2; x, y; \xi, \eta; u^{(1,s)}, v^{(1,s)}; a_3^{(k)}, b_3^{(k)})\end{aligned}\quad (41)$$

Заметим, что если операторы $L_{ij}(C_{ij})$ ($i, j = 1, 2$) имеют второй порядок, то операторы $\bar{L}_{ij}(C_{ij})$ будут иметь четвертый порядок. Таким образом, в отличие случаев полного контакта, контакт (34) приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений и, как следствие, увеличению числа произвольных констант в решении внутренней задачи. Значения этих постоянных могут быть определены из граничных условий при $x=0, a$ и $y=0, b$ с привлечением решения пограничного слоя.

Отметим, что при $s=0$ правые части системы уравнений (36), не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи. Для приближений $s>0$ меняются лишь правые части уравнений (36), куда входят коэффициенты, характеризующие общую анизотропию, а также члены, обусловленные геометрически нелинейностью исходных уравнений.

В пятом параграфе найдено решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела при граничных условиях (25) и условиях неполного контакта слоев (35).

Используя общее решение (28) из условиях контакта (35), получим

$$\begin{aligned}w^{(1,s)} &= w^{(2,s)} = w^{(s)}, \quad \sigma_{z0}^{(1,s)} = \sigma_{z0}^{(2,s)}, \\ \sigma_{xz0}^{(1,s)} &= \sigma_{xz0}^{(2,s)} = f_1^{(s)}(\xi, \eta), \quad \sigma_{yz0}^{(1,s)} = \sigma_{yz0}^{(2,s)} = f_2^{(s)}(\xi, \eta),\end{aligned}\quad (42)$$

$$f_k^{(0)}(\xi, \eta) = f_k(x/l, y/l), f_k^{(s)}(\xi, \eta) = 0, s > 0, k = 1, 2;$$

С учетом (42) удовлетворив поверхностным условиям (25), получим следующие формулы для определения неизвестных функций интегрирования

$$\sigma_{z_0}^{(k,s)}, w^{(k,s)}$$

$$w^{(s)} = w^{-(s)} - w^{*(2,s)}(\xi, \eta, \zeta_2), \sigma_{z_0}^{(k,s)} = \sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \quad (43)$$

а также систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных перемещений $u^{(k,s)}, v^{(k,s)}$

$$L_{11}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} - f_1^{(s)}(\xi, \eta) = p_1^{(k,s)}$$

$$L_{12}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} - f_2^{(s)}(\xi, \eta) = p_2^{(k,s)} \quad (44)$$

Здесь $p_1^{(k,s)}$ и $p_2^{(k,s)}$ обобщенные нагрузки.

Система уравнений (44) при $s=0$ распадается на две системы относительно $u^{(1,0)}, v^{(1,0)}$ и $u^{(2,0)}, v^{(2,0)}$, которые совпадают с уравнениями обобщенной плоской задачи, теории упругости, когда имеется плоскость упругой симметрии. Однако, вместо двух уравнений, здесь имеем систему из четырёх уравнений. Для приближений $s > 0$, как в ранее рассмотренных задачах, меняются лишь правые части уравнений.

В шестом параграфе подробно рассмотрен случай взаимодействия слоев по закону сухого трения Кулона. Тогда

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} = \chi_1 \frac{l}{h} \sigma_z(x, y, 0), \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \chi_2 \frac{l}{h} \sigma_z(x, y, 0) \quad (45)$$

и, как следствие, получим

$$f_k^{(s)}(\xi, \eta) = \chi_k \left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right), k = 1, 2; \quad (46)$$

Система уравнений (44) преобразуется к системе

$$L_{11}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{12}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} = \bar{p}_1^{(k,s)}$$

$$L_{12}(C_{ij}^{(k)})u^{(k,s)} + L_{22}(C_{ij}^{(k)})v^{(k,s)} = \bar{p}_2^{(k,s)} \quad (47)$$

Обобщенные нагрузки определяются по формулам

$$\bar{p}_1^{(k,s)} = p_1^{(k,s)} + \chi_k \left(\sigma_z^{+(s)} - \sigma_z^{*(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) \right), (1, 2) \quad (48)$$

Отметим, что при $s=0$ обобщенные нагрузки $\bar{p}_1^{(0)}$ и $\bar{p}_2^{(0)}$ не содержат члены, обусловленные геометрически нелинейностью поставленной задачи.

В седьмом параграфе рассмотрены частные решения задач для ортотропных материалов.

В заключении представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе. Методом асимптотического интегрирования двухмерных уравнений геометрически нелинейной теории упругости выведены одномерные

и двухмерные уравнения, рекуррентные формулы и соотношения для определения и анализа НДС двухслойных анизотропных полос и пластин при полном и неполном контактах между слоями. Считается, что на верхней лицевой линии полосы и на верхней лицевой плоскости пластинки заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. Построено решение, соответствующее внутренней задаче. В диссертационной работе, в частности, получены следующие новые результаты.

1. Из уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела асимптотическим методом выведены одномерные уравнения, описывающие внутреннее напряженно-деформированное состояние двухслойной полосы при полном контакте между слоями. Проведен анализ результатов по линейной и нелинейной теориям упругости. Показано, что полученные уравнения и соотношения по нелинейной теории в нулевом приближении совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями анизотропных полос при линейной постановке задачи.

2. Найдена асимптотика и построено решение внутренней задачи анизотропной двухслойной полосы, когда на продольных сторонах заданы смешанные условия теории упругости, а на линии контакта – закон распределения разности (скачка) тангенциального перемещения, в частности – модель нежесткого контакта или закон распределения касательного напряжения, в частности – закон сухого трения Кулона. Показано, что поправки, обусловленные нелинейностью задачи, проявляются начиная с третьего приближения.

3. Из нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости асимптотическим методом выведены двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной пластинки, состоящую из анизотропных слоев при полном контакте между слоями.

4. Асимптотическим методом из геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи теории упругости выведены линейные двухмерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на верхней лицевой плоскости которой заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, а на нижней – смешанные условия теории упругости. На плоскости раздела слоев задан закон распределения разности тангенциальных перемещений.

5. Асимптотическим методом из уравнений пространственной задачи теории упругости выведены двумерные дифференциальные уравнения с частными производными для расчета двухслойной анизотропной пластинки, на лицевых плоскостях которой заданы значения напряжений, а между слоями закон распределения касательного напряжения, в частности – закон сухого трения Кулона.

6. Проведен сравнительный анализ решений по линейной и нелинейной теориям упругости, указаны порядки линейных и нелинейных членов в расчетных формулах для напряжений и перемещений, выявлен эффект учета нелинейности в исходных уравнениях.

7. Показана эффективность асимптотического метода при расчете анизотропных двухслойных полос и пластин по геометрически нелинейной теории упругости при полном и неполном контактах между слоями.

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертационной работы изложены в следующих работах:

1. Саркисян Н.С. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости. Ученые Записки АрГУ, 2013, 1(27). С. 116-123.

2. Саркисян Н.С. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной двухслойной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями. Труды межд. школы-конф. молодых ученых. Цахкадзор, 01-04 октября 2013. Ереван 2013. С. 222-226.

3. Саркисян Н.С. Асимптотическое решение одной плоской задачи для двухслойной балки с проскальзыванием. Тр. VIII Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис- Степанакерт, 22-26 сентября 2014. Ереван 2014. С. 384-388.

4. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки по нелинейной теории упругости. Изв. НАН Армении. Механика. 2017. Т. 70. № 1. С.64–73.

5. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости при неполном контакте между слоями. Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т.71. № 3. С.44-54.

6. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при заданных тангенциальных напряжениях на плоскости раздела слоев. Тр. IX Межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» Горис. Армения. 01-06 октября 2018. Ереван 2018. С. 268-272.

7. Саркисян Н.С., Хачатрян А.М. О двухмерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки когда слои взаимодействуют по закону сухого трения.//Изв. НАН Армении. Механика. 2019. Т.72. № 2. С.68-79.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունում ասիմպտոտիկ մեթոդը օգտագործված է ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված երկշերտ հեծանների ու սալերի հաշվարկման համար, շերտերի միջև կոնտակտի լրիվ և ոչ լրիվ պայմանների դեպքում: Առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված երկշերտ հեծանների ու սալերի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակները նկարագրող միաչափ և երկչափ հավասարումներ, ինչպես նաև ռեկորենտ բանաձևեր բոլոր լարումների և տեղափոխությունների հաշվման համար: Ստացված արդյունքները համեմատված են գծային տեսության հայտնի լուծումների հետ: Աշխատանքում բերված հետազոտությունների արդյունքները ընդլայնում են ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառության շրջանակները և հնարավորություն են տալիս լուծելու խնդիրների նոր դաս բազմաշերտ բարակապատ մարմինների համար: Հետազոտության արդյունքները կարող են կիրառվել կոնստրուկտորական բյուրոներում, հիմքերի և հիմնատակերի կառուցման ժամանակ, սեյսմոլոգիայում և այլ բնագավառներում:

1. Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից ասիմպտոտիկ մեթոդով արտածված են միաչափ դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք բնութագրում են անիզոտրոպ երկշերտի խառը եզրային խնդրի ներքին լարվածային վիճակը շերտերի միջև լրիվ կոնտակտի դեպքում: Կատարված է գծային և ոչ գծային տեսություններով ստացված արդյունքների վերլուծություն: Մասնավոր օրինակների վրա պարզաբանված են երկրաչափորեն ոչ գծայնությամբ պայմանավորված անդամների կարգերը:

2. Գտնված է ասիմպտոտիկան և առաձգականության երկրաչափորեն ոչ գծային տեսությամբ լուծված է առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդիր անիզոտրոպ երկշերտի համար, երբ շերտերի հպման գծի վրա տրված է տանգենցիալ տեղափոխությունների տարբերության բաշխման օրենքը, մասնավորապես՝ ոչ կոշտ կոնտակտի մոդելը: Ստացված են բանաձևեր լարումների թենզորի և տեղափոխությունների վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար:

3. Առաձգականության երկրաչափորեն ոչ գծային տեսությամբ լուծված է առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդիր անհիզոտրոպ երկշերտի համար, երբ շերտերի հպման գծի վրա տրված է շոշոփող լարումների բաշխման օրենքը, մասնավորապես՝ կուլոնյան շփման օրենքը: Ստացված են բանաձևեր լարումների և տեղափոխությունների վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար:

4. Առաձգականության տեսության տարածական խնդրի երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված ընդհանուր անհիզոտրոպիայով օժտված երկշերտ սալի համար մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ և ռեկուրենտ բանաձևեր, որոնք հնարավորություն են տալիս որոշելու երկշերտ սալերի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակները, երբ շերտերի հպման հարթության վրա տրված են լրիվ կոնտակտի պայմանները: Ստացված արդյունքները համեմատված են գծային տեսության լուծումների հետ: Մասնավոր օրինակների վրա պարզաբանված են երկրաչափորեն ոչ գծայնությամբ պայմանավորված անդամների կարգերը:

5. Ասիմպտոտիկ մեթոդով անհիզոտրոպ երկշերտ սալի համար երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ, երբ սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա՝ խառը եզրային պայմաններ, իսկ սալի շերտերի միջև տրված են տանգենցիալ տեղափոխությունների տարբերությունների բաշխման օրենքները:

6. Ասիմպտոտիկ մեթոդով անհիզոտրոպ երկշերտ սալի համար երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից դուրս են բերված գծային երկչափ մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ, երբ սալի դիմային մակերևույթներից մեկի վրա տրված են լարումների թենզորի բաղադրիչների արժեքները, մյուսի վրա՝ խառը եզրային պայմաններ, իսկ սալի շերտերի հպման հարթության վրա տրված են շոշոփող լարումների բաշխման օրենքը, մասնավորապես՝ կուլոնյան շփման օրենքը:

7. Ցույց է տրված ասիմպտոտիկ մեթոդի էֆեկտիվությունը ընդհանուր անհիզոտրոպիայով օժտված երկշերտի և երկշերտ սալի համար առաձգականության տեսության երկրաչափորեն ոչ գծային հավասարումներից միաչափ և երկչափ հավասարումները ստանալիս, երբ շերտերի միջև կոնտակտը լրիվ է կամ ոչ լրիվ:

ABSTRACT

of the dissertation «Asymptotic solution of mixed edge problems of anisotropic band and plates on the basis of geometrically nonlinear equations of the elasticity theory» N.S. Sarkisyan.

Asymptotic solutions of boundary problems of anisotropic two-layer strips and plates are constructed, when mixed conditions of elasticity theory are specified on the face planes, and conditions of complete or incomplete contact are set between layers.

The asymptotic method is used to derive systems of resolving equations and calculation formulas for determining all components of the stress tensor and displacement vector of anisotropic two-layer bands and plate-based geometrically nonlinear theory of elasticity.

In the dissertation work, in particular, the following new results were obtained.

1. From the geometrically nonlinear equations of the plane problem of the theory of elasticity of an anisotropic body, the asymptotic method derived one-dimensional equations describing the internal stress-strain state of a two-layer strip with full contact between the layers. It is shown that the obtained equations and relations in the nonlinear theory in the zero approximation coincide with the corresponding equations and relations of anisotropic bands in the linear formulation of the problem. It is shown, that the corrections due to the nonlinearity of the problem appear from the third approximation.

2. An asymptotic solution was found and a solution to the internal problem of an anisotropic two-layer strip was constructed, when mixed elasticity theory conditions were set on the longitudinal sides and the law of distribution of the difference tangential displacement, in particular, a no rigid contact model. Retrieved formulas for detecting stress tensor and displacement vector components.

3. An asymptotic solution was found and a solution to the internal problem of an anisotropic two-layer strip was constructed, when mixed elasticity theory conditions were set on the longitudinal sides, and the law of tangential stress distribution, particular - the law of dry friction Coulomb. Formulas are obtained for determining all desired quantities.

4. The asymptotics was found and two-dimensional equations were derived from the geometrically nonlinear equations of the spatial problem of elasticity theory for studying the stress-strain state of a two-layer anisotropic plate, when mixed elastic theory conditions are specified on the face planes, and full contact conditions are specified on the contact plane. It is shown that the equations derived by the asymptotic method and the relations for the zero approximation coincide with the

equations of the plane problem of an anisotropic two-layer plate, when for each layer there is a plane of elastic symmetry parallel to the middle plane of the plate.

5. Asymptotic method from geometrically nonlinear equations of the spatial problem of the theory of elasticity derived linear two-dimensional partial differential equations for calculating a two-layer anisotropic plate, on the upper front plane of which the values of the corresponding components of the stress tensor are specified, and on the lower one the mixed conditions of elasticity theory. The solution of the internal problem is constructed and it is shown that when the distribution law of the difference of tangential displacements is specified on the plane of the layers, this leads to an increase in the order of the resolving differential equations. It is also shown that the terms due to the geometrically non-linearity of the original equations appear in subsequent approximations and will be significant especially for materials with strong anisotropy and in the case when external loads have large variability.

6. An asymptotic method from the equations of the spatial problem of elasticity theory derived two-dimensional partial differential equations for calculating a two-layer anisotropic plate, on the front planes of which stress values are specified, and the distribution of tangential stress, in particular, Coulomb dry friction law. It is shown that when the elastic layers interact according to the Coulomb dry friction law, this, in contrast to the first boundary value problem of the theory of elasticity for a two-layer plate, does not lead to an increase in the order of resolving differential equations

7. The efficiency of the asymptotic method for calculating anisotropic two-layer strips and plates according to the geometrically nonlinear theory of elasticity with complete and incomplete contacts between the layers is shown.

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'H. Kuznetsov', located at the bottom center of the page.