

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԽԱՉԱՆՅԱՆ ԱԼՎԱՐԴ ԱՐՏԱՎԱԶՐԻ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԷԶՐԱՅԻՆ և ԻՆՏԵՐՖԵՅՍ
ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա.02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2014

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ХАЧАНЯН АЛВАРД АРТАВАЗДОВНА

СОБСТВЕННЫЕ КРАЕВЫЕ И ИНТЕРФЕЙСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по
специальности 01.02.04 - «Механика деформируемого твердого тела»

ЕРЕВАН – 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ. , պրոֆեսոր Գ.Ռ. Ղուլդազարյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ. ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ս.Հ. Սարգսյան
ֆ.մ.գ.թ. , պրոֆեսոր Ս.Վ. Բելուբեկյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական
Ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2014թ. հունիսի 6-ին՝ ժամը 14⁰⁰-ին ՀՀ ԳԱԱ
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի – 047 մասնագիտական
խորհրդում

(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2) avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում

Մեղմագիրն առաքված է 2014թ. ապրիլի 28-ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար ֆ.մ.գ.դ.

Ա. Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: д.ф.м.н., профессор Г.Р. Гулгазрян

Официальные оппоненты: д.ф.м.н., чл. корр. НАН РА С.О. Саркисян

к.ф.м.н. , профессор М.В. Белубекян

Ведущая организация : Государственный инженерный
университет Армении

Защита состоится 6-ого июня 2014г. в 14⁰⁰ часов на заседании

Специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА

(адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2) avsah@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 28-ого апреля 2014г.

Ученый секретарь

Специализированного совета, д.ф.м.н.

А.В. Саакян

numerical analysis shows that for large wave numbers m or for small curvature all characteristics of the natural vibrations of momentless cylindrical shell tend to characteristics of planar vibrations of plate with free side, when other sides are rigidly restrained. Moreover, for large value $m\ell$ (ℓ be the length of plate) all characteristics tend to characteristics of planar vibrations of semi-infinite plate-stripe with free face while adjacent faces are rigidly restrained. As the square of curvature of directing curve of the cylindrical shell is rising the first frequencies is increasing and the decaying process is weakened.

- The natural interface vibrations of momentless closed and non-closed cylindrical shells, formed of semi-infinite orthotropic cylindrical shells with different elastic properties are studied. In case of non-closed cylindrical shell it is assumed that boundary generators are hinged. The dispersion equations for determining of natural interface vibrations of closed and non-closed cylindrical shells with variable curvature are obtained. The asymptotic coupling between the dispersion equations of stated problems and same problems for infinite orthotropic plates, formed of two semi-infinite orthotropic plates and two plate-strips with different elastic properties is revealed. The numerical analysis shows that for large wave numbers m or for small curvature of directing curve all characteristics of natural interface vibrations of momentless closed or non-closed cylindrical shell tend to characteristics of planar interface vibrations of infinite plate and plate-strip correspondingly. The numerical analysis shows that with increasing of square of directing curve curvature the first frequencies of interface vibrations are increasing and the process of decaying of vibrations depends on material properties and geometrical parameters.

- The existence of natural vibrations of thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged faces under case of rigid fixing on boundary generators is researched. The dispersion equations for finding natural frequencies of possible vibrations are obtained. The asymptotic coupling between dispersion equations of stated problem and the same problem for orthotropic rectangular plate is established. The asymptotic coupling between dispersion equations of stated problem and the same problem of natural frequencies on eigenvalue of semi-infinite orthotropic cylindrical shell of open profile with free face in the presence of rigid fixing on boundary generators is proved. By the example of non-closed orthotropic cylindrical shells with different lengths the approximate values of dimensionless characteristic of natural frequency and decaying characteristics for vibrations are obtained.

- The problem for existence of natural vibrations of thin elastic orthotropic circular non-closed cylindrical shell with free face and three rigidly fixing bounds is researched. The dispersion equations for determining the natural frequencies possible vibrations are obtained. The asymptotical relations between dispersion equations of stated problem and the same problem for orthotropic rectangular plate are established. The asymptotical coupling between dispersion equations of stated problem and problem on eigenvalue of semi-infinite orthotropic cylindrical shell of open profile with free face in presence of rigid fixing on boundary generators is proved. By the examples of non-closed orthotropic and isotropic cylindrical shells with different lengths the approximate values of dimensionless characteristics of natural frequency and decaying characteristics of corresponding vibrations are obtained.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Многие актуально-технические проблемы связаны с изучением закономерностей колебаний и распространения волн в твердых деформируемых средах. К ним, в частности, следует отнести проблемы сейсморазведки, авиастроения, судостроения, приборостроения, динамики энергетических сооружений и др. Среди различных составляющих колебательного поля важное прикладное значение имеют также собственные колебания, имеющие затухающий характер. В связи с этим особый интерес представляют колебания, локализованные у свободного торца оболочки – краевые колебания и локализованные у границы раздела свойств материала – интерфейсные колебания. Начало исследования упругих поверхностных волн, т.е. волн распространяющихся вблизи поверхности среды и не проникающие в глубь нее, связано с именем Рэлея (Rayleigh, 1885).

Трудности анализа колебаний стержней, пластин и оболочек на основе точных решений трехмерных задач теории упругости стимулировали сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории оболочек.

Для решения этой проблемы испробовано много методов, которые условно разделяют на аналитический и метод гипотез. Распространенным аналитическим методом решения указанной проблемы является асимптотический. Он получил развитие в работах Л.А. Агаловяна, С.А. Амбарцумяна и В.Ц. Гнуни, И.И. Воровича, Р.С. Геворкяна, А. Е. Грина, А.Л. Гольденвейзера, С.О. Саркисяна, К.О. Фридрихса и других. В трудах В.В. Власова, И.Н. Векуа, Н.А. Кильчевского, А.И. Лурье, Г.И. Михасева и П.Е. Товстика, Х.М. Муштари, И.Г. Терегулова, С.П. Тимошенко, Н.А. Шульги и других ученых получил развитие аналитический метод приведения трехмерной задачи к двумерной, основанный на разложении искомых функций в ряд по толщине оболочки (пластины), т.е. по малому геометрическому параметру. В.С. Саркисяном и его учениками были развиты и использованы методы разложения по малому физическому параметру.

Важный пример теории, построенной методом гипотез, представляет собой классическая теория Кирхгофа – Лява тонких оболочек, базирующаяся на гипотезе недеформируемых нормалей.

Уточненными называют теории, которые отличаются от обычных классических наличием в дифференциальных уравнениях дополнительных членов, расширяющих в некотором смысле область применения классических теорий.

На основе классической и уточненной теории решено огромное количество задач статики и динамики тонких тел. Им посвящены монографии и работы В.М. Александрова, С.А. Амбарцумяна, И.В. Андрианова, А.Г. Асланяна, Г.Е. Багдасаряна, Р.А. Багдасаряна, А.Г. Багдоева, М.В. Белубекяна, Е.И. Беспалова, В.В. Болотина, В.В. Василева, А.Т. Василенко, М.В. Вильде, В.В. Власова, И.И. Воровича, К.З. Галимова, В.Ц. Гнуни, А.Л. Гольденвейзера, Э.И. Григolloка, Я.М. Григоренко, А.Я. Григоренко, В.Т. Гринченко, А.Н. Гузя, Г.Р. Гулгазаряна, Л.Г. Гулгазарян, З.Н. Данояна, А.Ю. Ишлинского, К.Б. Казаряна, Ю.Д. Каплунова, Р.М. Киракосяна, А.В. Китайгородского, Ю.К. Коненкова, В.П. Костромина, В.Н. Кукуджанова, С.Г. Лехницкого, В.Б. Лидского, А.И. Лурье, В.В. Мелешко, Г.И. Михасева, Л.А. Мовсисяна, Х.М. Муштари, В.В. Новожилова, Б.Л. Пелеха, Э. Рейснера, В.С. Саркисяна, С.В. Саркисяна, И.Г. Терегулова, С.П. Тимошенко, П.Е. Товстика, К.Ф. Черныха, А.И. Шинкара, Н.А. Шульги и др.

Вопрос существования собственных колебаний, затухающих от свободного торца безмоментной круговой цилиндрической оболочки (ЦО) вдоль направления ее образующих, впервые изучены Р.А. Багдасаряном, М.В. Белубекяном, К. Б. Казаряном (1992).

Начало исследования собственных интерфейсных колебаний составных пластин связаны с работами А.С. Зильбергейта и И.Б. Сулова (1985) а также И.П. Гертмана и О.Н. Лисицкого (1988), в которых исследованы аналоги волн Стоунли.

В настоящей диссертации исследован вопрос существования собственных колебаний, локализованных у свободного края ортотропной безмоментной незамкнутой ЦО переменной кривизны.

Исследуются также собственные интерфейсные колебания составной бесконечной безмоментной ЦО переменной кривизны.

Исследованы собственные колебания тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой ЦО со свободным торцом с жестко защемленными граничными образующими.

Цель диссертационной работы.

- На основе уравнений классической теории ортотропных безмоментных ЦО исследовать собственные колебания незамкнутых ортотропных упругих ЦО, с произвольными плоскими гладкими направляющими, со свободным и шарнирно закрепленным торцами и со свободным и жестко защемленным торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

- Получить дисперсионные уравнения для полубесконечной безмоментной ЦО со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими .

- Получить дисперсионные уравнения для прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным противоположащими сторонами и с одной свободной стороной, когда остальные стороны жестко защемлены.

- Путем перехода длины пластинки к бесконечности, получить дисперсионные уравнения для полубесконечной пластинки - полосы со свободным торцом и жестко защемленными боковыми краями.

- На основе уравнений классической теории ортотропных безмоментных ЦО исследовать собственные интерфейсные колебания замкнутых и незамкнутых ЦО переменной кривизны, составленных из двух полубесконечных ортотропных ЦО с разными упругими свойствами. В случае незамкнутой ЦО предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены.

- Получить аналог дисперсионного уравнения Стоунли для составной пластинки и пластинки-полосы.

- Установить асимптотическую связь между дисперсионными уравнениями для круговых ЦО и дисперсионными уравнениями для бесконечных составных пластин и пластины – полосы.

- На основе уравнений классической теории тонких упругих ортотропных ЦО исследовать собственные колебания незамкнутых круговых ЦО (моментные задачи) со свободным и шарнирно закрепленным торцами и со свободным и жестко закрепленным торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

- Вывести дисперсионные уравнения для полубесконечной ЦО со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими.

- Получить дисперсионные уравнения для прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным противоположащими сторонами и с одной свободной стороной, когда остальные стороны жестко защемлены.

- Установить асимптотическую связь между дисперсионными уравнениями поставленных задач и аналогичных задач для прямоугольной пластины со свободным и

жестко защемленными образующими. Условие жесткого защемления граничных образующих реализуется введением в уравнения граничных условий соответствующих функций.

Выводы диссертации сводятся к следующему: исследованы собственные колебания ортотропных упругих незамкнутых цилиндрических оболочек с переменной кривизной, составленных из двух полубесконечных ортотропных упругих незамкнутых цилиндрических оболочек с переменной кривизной. Получены дисперсионные уравнения для полубесконечной ортотропной упругой незамкнутой цилиндрической оболочки с переменной кривизной со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями для круговых ортотропных упругих незамкнутых цилиндрических оболочек с переменной кривизной и дисперсионными уравнениями для бесконечных составных пластин и пластины – полосы.

- Исследованы собственные интерфейсные колебания составной бесконечной безмоментной ЦО переменной кривизны. Исследованы собственные колебания тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой ЦО со свободным торцом с жестко защемленными граничными образующими.

- На основе уравнений классической теории ортотропных безмоментных ЦО исследовать собственные колебания незамкнутых ортотропных упругих ЦО, с произвольными плоскими гладкими направляющими, со свободным и шарнирно закрепленным торцами и со свободным и жестко защемленным торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

- Получить дисперсионные уравнения для полубесконечной безмоментной ЦО со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими .

- Получить дисперсионные уравнения для прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным противоположащими сторонами и с одной свободной стороной, когда остальные стороны жестко защемлены.

- Путем перехода длины пластинки к бесконечности, получить дисперсионные уравнения для полубесконечной пластинки - полосы со свободным торцом и жестко защемленными боковыми краями.

- На основе уравнений классической теории ортотропных безмоментных ЦО исследовать собственные интерфейсные колебания замкнутых и незамкнутых ЦО переменной кривизны, составленных из двух полубесконечных ортотропных ЦО с разными упругими свойствами. В случае незамкнутой ЦО предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены.

- Получить аналог дисперсионного уравнения Стоунли для составной пластинки и пластинки-полосы.

- Установить асимптотическую связь между дисперсионными уравнениями для круговых ЦО и дисперсионными уравнениями для бесконечных составных пластин и пластины – полосы.

- На основе уравнений классической теории тонких упругих ортотропных ЦО исследовать собственные колебания незамкнутых круговых ЦО (моментные задачи) со свободным и шарнирно закрепленным торцами и со свободным и жестко закрепленным торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

- Вывести дисперсионные уравнения для полубесконечной ЦО со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими.

- Получить дисперсионные уравнения для прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным противоположащими сторонами и с одной свободной стороной, когда остальные стороны жестко защемлены.

- Установить асимптотическую связь между дисперсионными уравнениями поставленных задач и аналогичных задач для прямоугольной пластины со свободным и

SUMMARY

Under condition of natural vibrations taking into account the system of dynamic equations for classical theory of orthotropic cylindrical shells the following is obtained.

- The natural vibrations of momentless non-closed orthotropic elastic cylindrical shell of variable curvature with free and hinged faces, when boundary generators are rigidly restrained, are researched. Dispersion equations for finding the natural frequencies are obtained. Partially the dispersion equations for semi-infinite momentless non-closed cylindrical shell of variable curvature with free face, when boundary generators are rigidly restrained are obtained. For circle-shaped orthotropic momentless cylindrical shell with open profile the dispersion and characteristic equations to determine the natural frequencies and decay coefficient are found. The dispersion and characteristic equations for rectangular plate with free and hinged opposite sides, when other sides are rigidly restrained are derived. The analog of the Rayleigh equation for semi-infinite orthotropic plate-stripe with free face and rigidly restrained lateral edges is reduced. Non-circular non-closed cylindrical shells are considered and the numerical analysis is fulfilled. It is shown that for large wave numbers m or small curvature all characteristics of natural vibrations of momentless cylindrical shell are tend to characteristics of planar vibrations with free and hinged opposite sides while the other sides are rigidly restrained.

- The natural vibrations of momentless cylindrical shell of variable curvature with free face and three rigidly restrained edges are researched. The dispersion equations are found and the asymptotical relation between dispersion equations of the stated problem and the same problem for circle-shaped non-closed orthotropic momentless cylindrical shell and orthotropic rectangular plate are established. The asymptotical relation between dispersion equations of the stated problem and problem for eigenvalue of semi-infinite orthotropic momentless non-closed cylindrical shell with free face, when boundary generators are rigidly restrained is proved. The

• Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями для полубесконечной круговой ЦО открытого профиля со свободным торцом и жестко защемленными граничными образующими, и дисперсионными уравнениями (аналог уравнения Рэлея) для полубесконечной пластины – полосы со свободным торцом, когда смежные края жестко защемлены.

Практическая значимость. Результаты работы имеют ценность для приложений, в частности, при расчете динамического поведения тонких упругих ортотропных и изотропных ЦО с целью избежания опасных резонансных колебаний в тонких упругих оболочках.

Полученные дисперсионные и характеристические уравнения могут быть использованы для численных вычислений собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний.

Полученные асимптотические формулы, для дисперсионных уравнений, являются хорошим ориентиром для нахождения безразмерных характеристик собственных частот (составных) ЦО.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- Международной школе – конференции молодых ученых: Механика 2009 (Агванадзор 28 сентября – 1 октября 2009, Армения)
- Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан 4-8 октября 2010, Армения)
- Международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис – Степанакерт 19-23 сентября 2011, Армения)
- Семинарах кафедры математического анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна (Ереван 19 декабря 2012, 14 марта 2014, Армения).
- Семинарах «Механика тонкостенных систем» института механики НАН Армении (Ереван 19 января 2010, 4 марта 2014, Армения).
- Общем семинаре Института Механики НАН Армении (Ереван, 27 марта 2014, Армения)

Публикации. По теме диссертации опубликованы шесть научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 154 наименований. Общий объем работы составляет 124 страницы печатного текста, включая 18 таблиц и 10 рисунков.

В каждой главе параграфы имеют свои тройные нумерации формул. Первая цифра показывает номер главы, вторая цифра показывает номер параграфа в главе, третья – номер формулы в параграфе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы, дано краткое описание работы по главам.

В первой главе на основе уравнений классической теории ортотропных безмоментных ЦО исследуются собственные колебания незамкнутых ортотропных упругих ЦО, с произвольными плоскими гладкими направляющими, со свободным и

3. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Миклашевич И.А., Плетежов А.А., Хачанян А.А. Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей. Вестник фонда фундаментальных исследований. № 1, 2012, с. 59-80.

4. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Хачанян А.А. Колебания ортотропной цилиндрической панели с разными граничными условиями. Межд.ж. прикл. механика, Т.49, №5, 2013, с.40-61.

5. Хачанян А.А. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленным торцами и жестко защемленными граничными образующими. Труды II международной конференции. Ер.: ЕГУАС, 2010, том 2, с. 204-208.

6. Хачанян А.А. Колебания ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки открытого профиля с жестко защемленными двумя крайними образующими и шарнирно закрепленным одним краем. Механика 2009: Труды международной школы – конференций молодых ученых. Ер.: Изд-во ЕГУАС, 2009, с. 326-329.

Ամփոփում

Ելնելով օրթոտրոպ զլանային թաղանթների դասական տեսությանը համապատասխան դինամիկայի հավասարումների համակարգից.

• Ուսումնասիրված է փոփոխական կորության բաց անմոմենտ օրթոտրոպ առած-զական զլանային թաղանթի սեփական տատանումները, երբ ծայրերից մեկն ազատ է, մյուսը՝ հողակապրեն ամրակցված, իսկ եզրային ծնիչները՝ կոշտ ամրակցված: Սեփական հաճախությունները գտնելու համար ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ: Մասնավորապես, ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ փոփոխական կորության բաց անմոմենտ կիսաանվերջ զլանային թաղանթի համար, երբ մի ծայրն ազատ է, իսկ եզրային ծնիչները՝ կոշտ ամրակցված: Բաց անմոմենտ օրթոտրոպ շրջանային զլանային թաղանթի համար արտածված են դիսպերսիոն և բնութագրիչ հավասարումներ, որոնց միջոցով գտնվում են սեփական տատանումների հաճախությունները և համապատասխան ձևերի մարման գործակիցները: Ուղղանկյուն սալի համար, որի հակադիր կողմերը ազատ և հողակապրեն ամրակցված են, իսկ մնացած կողմերը՝ կոշտ ամրակցված, արտածված են դիսպերսիոն և բնութագրիչ հավասարումներ: Կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալ-շերտի համար, որի մի ծայրն ազատ է, իսկ եզրային կողմերը՝ կոշտ ամրակցված, ստացված են Ռեյլի տիպի հավասարումներ: Ուսումնասիրված են նաև ոչ շրջանային բաց զլանային թաղանթներ և կատարված է թվային վերլուծություն: Յուրյ է տրված, որ m ալիքային թվերի մեծացմանը կամ կորության փոքրացմանը զուգընթաց վերը նշված անմոմենտ զլանային թաղանթի սեփական տատանումների բոլոր բնութագրիչները ձգտում են սալի հարթ տատանումների բնութագրիչներին, որի հակադիր կողմերն ազատ և հողակապրեն ամրակցված են, իսկ մնացած կողմերը կոշտ ամրակցված:

• Ուսումնասիրված են փոփոխական կորության բաց անմոմենտ զլանային թաղանթի սեփական տատանումները, երբ մի ծայրն ազատ է, իսկ մյուս երեք եզրերը կոշտ ամրակցված են: Դիտարկվող խնդրի համար արտածված են դիսպերսիոն

интерфейсных колебаний замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек переменной кривизны. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной пластинки, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин-полос с разными упругими свойствами. Численный анализ показывает, что при больших волновых числах m или при малой кривизне направляющей кривой все характеристики собственных интерфейсных колебаний безмоментной замкнутой или незамкнутой цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных интерфейсных колебаний бесконечной пластинки и пластинки-полосы соответственно. Численный анализ показывает, что с увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты интерфейсных колебаний увеличиваются, а процесс затухания зависит от свойств материалов и геометрических параметров.

- Исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленным торцами при наличии жесткого защемления на граничных образующих. Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом, при наличии жесткого защемления на граничных образующих. На примерах незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек с разными длинами получены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответствующих форм колебаний.

- Исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом, при наличии жесткого защемления на граничных образующих. На примерах незамкнутых ортотропных и изотропных цилиндрических оболочек с разными длинами получены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответственных форм колебаний.

Публикации

1. Гулгазарян Г.Р., Хачанян А.А. Колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. Изв. НАН Армении Механика, т. 64, №1, 2011, с. 37-49.
2. Гулгазарян Г.Р., Хачанян А.А. Локализованные колебания у свободного торца тонкой упругой ортотропной незамкнутой цилиндрической оболочки с жестко защемленными граничными образующими. Труды VII международной конференции „Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” Ереван 2011, с.153-159.

шарнирно закрепленным торцами и со свободным и жестко защемленным торцами, когда граничные образующие жестко защемлены. Задачи самосопряженные, неотрицательно определенные и не допускают разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича – Власова. В качестве базисных функций используются следующие функции

$$w_m(\beta) = 1 - \cos km\beta, \quad k = 2\pi/s, \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

В § 1.1. Исследованы собственные колебания безмоментной незамкнутой ЦО переменной кривизны со свободным и шарнирно закрепленным торцами и жестко защемленными граничными образующими.

Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой поверхности оболочки можно представить в виде

$$R^{-2} = k^2(r_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta), \quad k = 2\pi/s, \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty. \quad (1)$$

где $\beta (0 \leq \beta \leq s)$ является текущей длиной дуги направляющей кривой, а s – длина направляющей кривой. В качестве исходных уравнений используются уравнения, которые соответствуют безмоментной теории ортотропных ЦО.

$$\sum_{j=1}^3 \ell_{ij} u_j = \lambda u_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (2)$$

$$\ell_{11} = -B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \ell_{12} = -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \ell_{13} = B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (3)$$

$$\ell_{21} = \ell_{12}, \quad \ell_{22} = -B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \ell_{23} = B_{22} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R} \right),$$

$$\ell_{31} = -\ell_{13}, \quad \ell_{32} = -B_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \ell_{33} = \frac{B_{22}}{R^2}$$

Здесь $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$ является текущей длиной образующей, а u_1, u_2, u_3 – проекции вектора перемещений, соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки. B_{ij} – коэффициенты упругости. $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота, ρ – плотность материала. Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=l} = u_2|_{\alpha=l} = 0 \quad (5)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = u_2|_{\beta=0,s} = 0 \quad (6)$$

Спектр задачи (2), (4)-(6) не является чисто дискретным, а имеет ограниченные участки непрерывного спектра [6].

Решение системы (2) удовлетворяющим условиям (6) ищется в виде

$$u_1 = \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin km\beta \right), \quad u_2 = \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m (1 - \cos km\beta) \right), \quad (7)$$

$$w = k \exp(k\chi\alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin km\beta \right), \quad w = u_3 / R.$$

где u_m, v_m, w_m - неопределенные коэффициенты, χ неопределенный коэффициент затухания. Используя метод Канторовича – Власова получим бесконечную систему уравнений

$$\left((r_0 - r_{2m})A_m - 2 \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 \right) w_m + \sum_{n=1, n \neq m}^{\infty} (r_{|n-m|} - r_{n+m}) A_n w_n = 0, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad (8)$$

$$A_n = p_n / c_n, \quad p_n = c_n + n^2 b_n - B_{12} / B_{22} \chi^2 a_n, \quad n = \overline{0, +\infty}$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta^2, \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}$$

$$b_m = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta^2 \quad (9)$$

$$c_m = \chi^4 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} m^2 \chi^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + (m^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right)$$

Бесконечный определитель системы (8) относится к известному классу сходящихся определителей. Приравняем определитель системы (8) к нулю

$$D(\chi^2, \eta^2, B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0 \quad (10)$$

Предположим, что $\chi_1, \chi_2, \chi_3 = -\chi_1, \chi_4 = -\chi_2$ различные корни уравнения (10) и χ_1

и χ_2 имеют неположительные действительные части.

Представим решение задачи (2) – (6) в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^4 u_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \quad w = \sum_{j=1}^4 w^{(j)} \quad (11)$$

где $u_i^{(j)}, w^{(j)}, i = 1, 2, j = \overline{1, 4}$ решения системы (2) имеющие вид (7) при $\chi = \chi_j$. Подставим (11) в граничные условия (4), (5). В итоге получим совокупность систем уравнений

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{\chi_j R_{2j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 \frac{b_m^{(j)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)}, \quad R_{2j}^{(m)} = (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}), \quad z_j = k\chi_j l.$$

а $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ - значения a_m, b_m, c_m из (9) при $\chi = \chi_j$. Приравняв определитель системы (12) к нулю, получим дисперсионные уравнения.

$$K_{2m}(\eta^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots)(1 - \exp 2z_1 + 2z_2) + \quad (13)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При условии собственных колебаний, исходя из системы уравнений динамики соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек:

- Исследованы собственные колебания безмоментной незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным и шарнирно закрепленным торцами, когда граничные образующие жестко защемлены. Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот. В частности, получены дисперсионные уравнения для полубесконечной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом, когда граничные образующие жестко защемлены. Для круговой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки открытого профиля найдены дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответственно. Получены дисперсионные и характеристические уравнения прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным противоположными сторонами, когда остальные стороны жестко защемлены. Получен аналог уравнения Рэлея для полубесконечной ортотропной пластины-полосы со свободным торцом и жестко защемленными боковыми краями. Исследованы также некруговые незамкнутые цилиндрические оболочки и проведен численный анализ. Показано, что при больших волновых числах m или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний безмоментной цилиндрической оболочки вышеуказанного типа стремятся к характеристикам планарных колебаний пластинки со свободной и шарнирно закрепленной противоположными сторонами, когда остальные стороны жестко защемлены.

- Исследованы собственные колебания безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. Находятся дисперсионные уравнения и устанавливается асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для круговой незамкнутой ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки и ортотропной прямоугольной пластинки соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом, когда граничные образующие жестко защемлены. Численный анализ показывает, что при больших волновых числах m или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний безмоментной цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных колебаний пластинки со свободной стороной, когда остальные стороны жестко защемлены. Более того, при больших $m\ell$ (ℓ – длина пластинки), все характеристики стремятся к характеристикам планарных колебаний полубесконечной пластинки-полосы со свободным торцом, когда смежные границы жестко защемлены. С увеличением квадрата кривизны направляющей кривой оболочки первые частоты увеличиваются, а процесс затухания ослабевает.

- Исследованы собственные интерфейсные колебания безмоментных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, составленных из полубесконечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. В случае незамкнутой цилиндрической оболочки предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены. Получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот

Исследованы изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластинки с одной свободной и тремя жестко защемленными сторонами. Получено дисперсионное уравнение

$$\bar{B}(\eta_m) = 0 \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}(\eta_m) &= K_{1m}(\eta_m)(1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 4(y_3^2 + y_3 y_4)(y_3 y_4 + B_{12}/B_{11})\exp(z_3 + z_4) - \\ &- [R_{33}(y_3^2 + y_3 y_4) + R_{43}(y_3 y_4 + B_{12}/B_{11})](\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - \\ &- 4y_3 \left[R_{33}R_{43} + \left(y_3 y_4 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) \left(y_3^2 - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{B_{11}} \right) \right] (\exp(z_4) - \exp(z_3)) [z_3 z_4] - \\ &- 4y_3^2 R_{33}R_{43} [z_3 z_4]^2; \quad [z_3 z_4] = km_* l (\exp(z_3) - \exp(z_4)) / (z_3 - z_4), \\ R_{33}^{(m)} &= y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}; \quad R_{43}^{(m)} = \left(y_3^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \right) y_3, \quad z_j = km_* y_j l, \quad j = 3, 4 \end{aligned} \quad (70)$$

где Y_3 и Y_4 корни уравнения (57) с неположительными действительными частями.

Исследован асимптотика дисперсионного уравнения (66) при $R^{-1} \rightarrow 0$. Предполагается, что $\eta_m = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m = \eta/m_*$. Доказывается, что уравнение (66) приводится к виду

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = B_{11}/B_{66} N^2(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) \bar{P}(\eta_m) \bar{B}(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad (71)$$

где $\bar{P}(\eta_m)$ и $\bar{B}(\eta_m)$ определяются формулами (68) и (70) соответственно.

Из (71) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнение (66) распадается на уравнения

$$\bar{P}(\eta_m) = 0; \quad \bar{B}(\eta_m) = 0; \quad K_{3m}(\eta_m) = 0. \quad (72)$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний в аналогичной задаче для ортотропной прямоугольной пластинки со свободным и тремя жестко защемленными сторонами (ср. (67) и (69)).

Исследована асимптотика дисперсионного уравнения (66) при $l \rightarrow \infty$. Предполагается, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (65)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (66) приводится к виду

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = \text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^4 \cdot \text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=5}^8 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k\chi_j l)) = 0. \quad (73)$$

Откуда следует, что при $m_* l \rightarrow \infty$ уравнение (66) распадается на уравнения

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^4 = 0; \quad \text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=5}^8 = 0. \quad (74)$$

Первое из них, при $m \in N$, определяет возможные локализованные собственные колебания у свободного торца полубесконечной ортотропной круговой ЦО открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих (ср. с (63)).

Результаты численных исследований показывают, что асимптотические формулы (71) и (73) дисперсионного уравнения (66) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот рассматриваемой задачи.

$$+ (x_1 + x_2) K_{5m}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) [z_1 z_2] (\exp(z_2) + \exp(z_1)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty},$$

$$[z_1 z_2] = (\exp(z_1) - \exp(z_2)) / (z_1 - z_2) kml$$

$$K_{im}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + (-1)^i \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4, \quad i = 2, 5,$$

$$\delta_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad \eta_m = \frac{\eta}{m}, \quad x_j = \frac{\chi_j}{m}, \quad j = 1, 2,$$

$$\delta_2 = -\eta_m^2 \left(\frac{B_{22}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{22} B_{66} - B_{12} B_{66})}{B_{11}^3} \eta_m^2 \right),$$

$$\delta_3 = \frac{B_{12}(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} \eta_m^2 (1 - \eta_m^2), \quad \delta_4 = \frac{B_{12} B_{66} (B_{12} + B_{22})}{B_{11}^3} \eta_m^4 (1 - \eta_m^2), \quad z_j = km x_j l.$$

Если $\chi_1 = m x_1$, $\chi_2 = m x_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $ml \rightarrow \infty$ уравнения (13) преобразуются к уравнениям

$$K_{2m}(\eta_m^2, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 (x_1^2 + x_2^2) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (14)$$

Уравнения (14) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой ЦО с произвольной плоской направляющей со свободными торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

Исследованы частные случаи.

Случай а) $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$ ($r_m = 0, m = \overline{1, +\infty}$), т.е. имеем безмоментную круговую ортотропную ЦО открытого профиля со свободным и шарнирно закрепленным торцами, когда граничные образующие жестко защемлены. В этом случае уравнение (10) распадается на совокупность уравнений

$$\begin{aligned} \left(\eta^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \frac{r_0}{2} \right) \chi^4 - \eta^2 \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} m^2 - \frac{(B_{11} + B_{66})}{B_{11}} \eta^2 + \right. \\ \left. + \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 + B_{66} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \frac{r_0}{2} \right) \chi^2 + \eta^2 (m^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 + \frac{B_{22} r_0}{B_{11} 2} \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \end{aligned} \quad (15)$$

В этом случае дисперсионные уравнения (13) принимают вид

$$K_{2m}(\eta_m^2, r_0) (1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + (x_1 + x_2) K_{5m}(\eta_m^2, r_0) [z_1 z_2] (\exp(z_2) + \exp(z_1)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad \varepsilon_m = \frac{r_0}{2m^2} \quad (16)$$

$$K_{im}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left[(1 + \varepsilon_m) \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2 \right] + (-1)^{i-1} x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \varepsilon_m \right), \quad i = 2, 5.$$

Если $\chi_1 = m x_1$ и $\chi_2 = m x_2$ корни уравнения (15) имеют отрицательные действительные части, то при $ml \rightarrow \infty$ уравнения (16) преобразуются к уравнениям

$$K_{2m}(\eta_m^2, r_0) = (1 - \eta_m^2) \left[(1 + \varepsilon_m) \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2 \right] - x_1 x_2 \left(\eta_m^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \varepsilon_m \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (17)$$

Уравнения (17) являются дисперсионными уравнениями безмоментной ортотропной полубесконечной круговой ЦО открытого профиля со свободным торцом, когда граничные образующие жестко защемлены.

При $r_0 / m^2 \rightarrow 0$ уравнения (15) преобразуются к уравнениям

$$\begin{aligned} c_m = \chi^4 - \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} m^2 - \frac{(B_{11} + B_{66})}{B_{11}} \eta^2 \right) \chi^2 + \\ + (m^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \end{aligned} \quad (18)$$

а уравнения (16) в этом случае преобразуются к уравнениям

$$\begin{aligned} K_{2m}(\eta_m^2)(1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + \\ + (x_2 + x_1)K_{5m}(\eta_m^2)[z_1 z_2] (\exp(z_1) + \exp(z_2)) = 0, \quad m = \overline{1, \infty} \\ K_{im}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) + (-1)^{i-1} \eta_m^2 x_1 x_2, \quad i = 2, 5 \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\chi_1 = x_1 m$ и $\chi_2 = x_2 m$ корни уравнения (18) с неположительными действительными частями. Уравнения (19) являются дисперсионными уравнениями прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным противоположащими сторонами, когда остальные стороны жестко защемлены. Если $\chi_1 = m x_1$ и $\chi_2 = m x_2$ корни уравнения (18) имеют отрицательные действительные части, то при $ml \rightarrow \infty$ уравнения (19) распадаются на совокупность уравнений

$$K_{2m}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (20)$$

Уравнения (25) являются уравнениями Рэлея для полубесконечной ортотропной пластины – полосы со свободным торцом и жестко защемленными боковыми краями.

Случай б) $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$ ($r_m = 0$, $m = \overline{2, +\infty}$). В этом случае для нахождения безразмерных характеристик коэффициентов затухания $k\chi_j^{(i)}$, $i, j = 1, 2$ можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j^{(i)} \approx - \left(\left(\chi_j^{(m)} \right)^2 + \alpha_{ij}^{(m)} r_1^2 \right)^{1/2}, \quad i, j = 1, 2 \quad (21)$$

где $\chi_j^{(m)}$ корни уравнения (15) и

$$\alpha_j^{(m)} = \frac{P_m (P_{m-1} r_{m+1m+1} + P_{m+1} r_{m-1m-1})}{r_{m-1m-1} r_{m+1m+1} r'_{mm}} \Bigg|_{\chi = \chi_j^{(m)}}, \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

Здесь r'_{mm} - производная по χ^2 . Для нахождения характеристик собственных частот η / m -используются уравнения (13). Произведены численные исследования.

В § 1.2 исследованы собственные колебания безмоментной незамкнутой ЦО переменной кривизны, со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями.

(62) дисперсионного уравнения (53) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (44), (45) - (47).

В § 3.2. исследованы собственные колебания тонкой упругой ортотропной незамкнутой ЦО со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями.

Граничные условия (45)-(47) сохраняются, только условия (46) заменяются на условия

$$u_1|_{\alpha=l} = 0; \quad u_2|_{\alpha=l} = 0; \quad u_3|_{\alpha=l} = 0; \quad \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=l} = 0; \quad (64)$$

Самосопряженность и неотрицательная определенность рассматриваемой задачи позволяет ее изучать в виде обобщенной задачи на собственные значения с применением обобщенного метода сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича – Власова.

Аналогичным образом как в § 3.1. выводятся дисперсионные уравнения

$$Det \| M_{ij}^{(m)} \|_{i,j=1}^8 = m_*^{34} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) Det \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = 0 \quad (65)$$

где K определено по формуле (52), а выражения для m_{ij} не приводятся [3].

Уравнение (65) эквивалентно уравнению

$$Det \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = 0 \quad (66)$$

Исследованы планарные колебания ортотропной прямоугольной пластинки с одной свободной и тремя жестко защемленными сторонами. Получено дисперсионное уравнение

$$\bar{P}(\eta_m) = 0 \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(\eta_m) = K_{2m}(\eta_m) Q_{2m}(\eta_m) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - \frac{4B_{11}m_{12}(m_{11}m_{21} + m_{22}m_{61}y_1)}{B_{12} + B_{66}} \exp(z_1 + z_2) + \\ + \frac{B_{11}(m_{11}m_{22} + m_{21}m_{42})(y_1m_{12} + m_{61})}{B_{12} + B_{66}} (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) + \frac{4B_{11}m_{11}m_{21}m_{61}y_1}{B_{12} + B_{66}} [z_1 z_2]^2 + \\ + \frac{2B_{11}[y_1m_{61}(m_{11}m_{22} + m_{21}m_{42}) + m_{11}m_{21}(y_1m_{12} + m_{61})]}{B_{12} + B_{66}} (\exp(z_2) - \exp(z_1))[z_1 z_2] \end{aligned} \quad (68)$$

$$k_{2m}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0$$

$$Q_{2m}(\eta_m^2) = (1 - \eta_m^2) \frac{B_{66}}{B_{11}} + y_1 y_2 = 0,$$

$$m_{11} = y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2), \quad m_{21} = y_1 (y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2)$$

$$m_{61} = y_1^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2), \quad m_{22} = y_1 y_2 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}$$

$$m_{12} = y_1 + y_2, \quad [z_1 z_2] = km_l (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1), \quad z_j = km_l y_j, \quad j = 1, 2$$

где y_j ($j = 1, 2$) корни уравнения (54) с неположительными действительными частями.

$$k_{im}(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + (-1)^{i-1} 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2, i = 1, 4;$$

$$[z_3 z_4] = (\exp(z_3) - \exp(z_4)) / (z_3 - z_4) km_* l, z_j = km_* y_j l, j = 3, 4$$

Если y_3 и y_4 корни уравнения (57) имеют отрицательные действительные части, то при $m_* l \rightarrow \infty$ уравнения (58) преобразуются к уравнениям

$$k_{1m}(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 = 0, m = \overline{1, +\infty} \quad (59)$$

которые являются дисперсионными уравнениями изгибного колебания для полубесконечной ортотропной пластинки – полосы со свободным торцом, когда смежные края жестко защемлены.

Исследована асимптотика дисперсионного уравнения (53) при $R^{-1} \rightarrow 0$. Предполагается, что $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m = \eta / m_*$. Доказывается, что уравнение (53) приводится к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = (1 - \eta_m^2) N(\eta_m) N_0(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) \bar{L}_m(\eta_m) \bar{G}_m(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad (60)$$

где $\bar{L}_m(\eta_m)$ и $\bar{G}_m(\eta_m)$ определяются по формулам (55) и (58) соответственно, а

$$N(\eta_m) = (y_3 + y_1)(y_3 + y_2)(y_4 + y_1)(y_4 + y_2), N_0(\eta_m) = (y_1 + y_2)(y_3 + y_4)N(\eta_m),$$

$$K_{3m}(\eta_m) = N_1(\eta_m) + a^2 m_*^2 N_2(\eta_m) + a^4 m_*^4 N_3(\eta_m), \varepsilon_m = r_0 / (2m),$$

Выражения для $N_1(\eta_m), N_2(\eta_m)$ и $N_3(\eta_m)$ не приводятся [2].

Из (60) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнения (53) распадаются на уравнения

$$\bar{L}_m(\eta_m) = 0, \bar{G}_m(\eta_m) = 0, K_{3m}(\eta_m) = 0. \quad (61)$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний прямоугольной пластинки (со свободной и шарнирно закрепленной противоположными сторонами, когда другие стороны жестко защемлены). Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания ЦО. Третье уравнение появляется в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных ЦО.

Исследована асимптотика дисперсионного уравнения (53) при $l \rightarrow \infty$. Предполагается, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (49)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (53) приводится к виду

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \cdot \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=5}^8 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k\chi_j l)) = 0 \quad (62)$$

Откуда следует, что при $m_* l \rightarrow \infty$ уравнение (53) распадается на уравнения

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0; \quad \text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=5}^8 = 0. \quad (63)$$

Первое из них, при $m \in N$, определяет возможные локализованные собственные колебания у свободного торца полубесконечной ортотропной круговой ЦО открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих.

Результаты численных исследований показывают, что асимптотические формулы (60),

Здесь квадрат кривизны имеет вид (1) и используется система уравнений (2). Граничные условия (4)-(6) сохраняются, только условия (5) заменяются условиями

$$u_1|_{\alpha=l} = u_2|_{\alpha=l} = 0 \quad (23)$$

Выводятся дисперсионные уравнения аналогичным образом как в § 1.1 ([1]).

Выведены дисперсионные уравнения аналогичной задачи для круговой ЦО и аналогичной задачи для прямоугольной пластинки. Приведены численные исследования.

В частности, показаны, что при больших m или при малой кривизне все характеристики собственных колебаний безмоментной ЦО стремятся к характеристикам планарных колебаний прямоугольной пластинки со свободной стороной, когда остальные стороны жестко защемлены.

Во второй главе исследуются собственные интерфейсные колебания безмоментных замкнутых и незамкнутых ЦО составленных из полубесконечных ортотропных ЦО с разными упругими свойствами.

§ 2.1 посвящен выводу общих дисперсионных уравнений для нахождения собственных частот интерфейсных колебаний составных безмоментных замкнутых и незамкнутых ЦО переменной кривизны, составленных из полубесконечных ортотропных ЦО с разными упругими свойствами.

Выбор систем координат и возможные формы оболочек показаны на рисунках. Здесь α - ориентированная длина образующей $-\infty < \alpha < +\infty$, а $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. β - текущая длина дуги направляющей кривой $0 \leq \beta \leq s$.

Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой составной ЦО можно представить в виде ряда Фурье:

$$R^{-2} = k^2 \left(\frac{r_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right) \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty \quad (24)$$

Здесь $k = 2\pi/s$ для замкнутой ЦО, где S полная длина направляющей кривой, и $k = \pi/s$ для незамкнутых ЦО, где S длина направляющей кривой между шарнирно закрепленными граничными образующими. При $\alpha = 0$ ставятся условия полного контакта. Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \leq \alpha < +\infty$), отмечаются верхним индексом (1), а к левой оболочке ($-\infty < \alpha \leq 0$) - индексом (2).

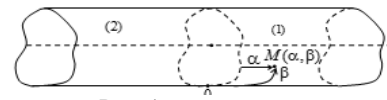


Рис. 1

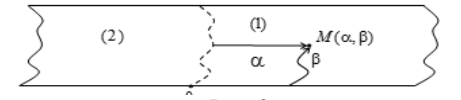


Рис. 2

В качестве исходных уравнений используются уравнения соответствующие безмоментной теории ортотропных ЦО

$$\sum_{j=1}^3 \ell_{ij}^{(r)} u_j^{(r)} = 0 \quad (i = \overline{1,3}, r = 1,2) \quad (25)$$

$$\ell_{11}^{(r)} = -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2}{\alpha^2} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2}{\beta^2} - \lambda^{(r)}, \quad \ell_{12}^{(r)} = \ell_{21}^{(r)} = -(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2}{\alpha\beta}, \quad \ell_{13}^{(r)} = -\ell_{31}^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial}{\alpha}$$

$$\ell_{22}^{(r)} = -B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2}{\alpha^2} - B_{22}^{(r)} \frac{\partial^2}{\beta^2} - \lambda^{(r)}, \quad \ell_{23}^{(r)} = B_{22}^{(r)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\cdot}{R} \right), \quad \ell_{32}^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \ell_{33}^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{R^2} - \lambda^{(r)}$$

Здесь $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$ ($r=1,2$) - проекции вектора перемещения соответственно в направлениях α, β и нормали поверхности оболочки. $\lambda^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2$, где ω - угловая частота собственных интерфейсных колебаний, а $\rho^{(r)}$ ($r=1,2$) - плотности материалов, $B_{ij}^{(r)}$ ($r=1,2$) - коэффициенты упругости составляющих полубесконечных оболочек.

Граничные условия имеют вид

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0} = T_1^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad u_1^{(1)}|_{\alpha=0} = u_1^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad u_2^{(1)}|_{\alpha=0} = u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \quad (26)$$

$$u_i^{(r)}(\alpha, \beta) = u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), \quad i = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2 \quad (27)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_i^{(1)} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_i^{(2)} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (28)$$

$$T_2^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0, \quad u_1^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0, \quad r = 1, 2 \quad (29)$$

где $T_i^{(r)}, i=1,2, S_{12}^{(r)}$ являются тангенциальными нормальными и сдвиговыми силами соответственно. Отметим, что спектр поставленных задач не чисто дискретен, а имеет ограниченные участки непрерывного спектра.

Решение системы (25) ищется в виде

$$u_1^{(r)} = \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(r)} \sin km\beta \right), \quad u_2^{(r)} = \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m^{(r)} \cos km\beta \right) \quad (30)$$

$$w^{(r)} = k \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(r)} \sin km\beta \right)$$

Подставляя выражения (30) в систему (25), получим системы уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-m} - r_{n+m}) A_n^{(r)} w_n^{(r)} - 2 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 w_m^{(r)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad r = 1, 2 \quad (31)$$

$$A_n^{(r)} = P_n^{(r)} / C_n^{(r)}, \quad P_n^{(r)} = C_n^{(r)} + n^2 b_n^{(r)} - B_{12}^{(r)} / B_{22}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 a_n^{(r)}, \quad n = \overline{1, +\infty}$$

$$a_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2, \quad (\eta^{(r)})^2 = \frac{\lambda^{(r)}}{k^2 B_{66}^{(r)}} \quad (32)$$

$$b_m^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (m^2 - (\eta^{(r)})^2)$$

$$C_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} m^2 (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 +$$

$$+ (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 \right), \quad m = \overline{1, +\infty}$$

Приравнявая определители системы (31) к нулю, получим характеристические уравнения аналогично (10).

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0, \quad r = 1, 2 \quad (33)$$

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = 0 \quad (53)$$

Учитывая возможные соотношения между $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, заключаем, что уравнение (53) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

Аналогичным образом исследованы планарные колебания ортотропной прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным торцами, когда граничные образующие жестко зашпелены. Получены характеристические уравнения

$$C_m = y^4 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} y^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 y^2 - (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0; \quad (54)$$

$$y = \frac{\chi}{m_*}, \quad \eta_m = \frac{\eta}{m_*}, \quad m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta_m$$

и дисперсионные уравнения

$$\bar{L}_m(\eta_m) = K_{2m}(\eta_m)(1 - \exp(2(z_1 + z_2))) + \quad (55)$$

$$+ (y_1 + y_2) k_{5m}(\eta_m)(\exp(z_1) + \exp(z_2)) [z_1, z_2] = 0, \quad m = \overline{1, \infty}$$

$$K_m(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - \eta_m^2}{B_{11} B_{66}} \right) + (-1)^{i+1} \eta_m^2 y_1 y_2, \quad i = 2, 5 \quad z_j = kn_* y_j l, \quad j = 1, 2$$

$$[z_1, z_2] = (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1) km_* l$$

где y_1, y_2 корни уравнения (54) с неположительными действительными частями. Если

y_1 и y_2 имеют отрицательные действительные части, то при $m_* l \rightarrow \infty$ уравнения (55) распадаются на совокупность уравнений

$$k_{2m}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - \eta_m^2}{B_{11} B_{66}} \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0 \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (56)$$

которые являются уравнением Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки - полосы, когда боковые края жестко зашпелены.

Аналогичным образом исследованы изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластинки со свободным и шарнирно закрепленным торцами, когда граничные образующие жестко зашпелены. Получены характеристические уравнения

$$R_{mm} = m_*^2 \alpha^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} y^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} y^2 + \frac{1}{\beta m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0; \quad (57)$$

$$y = \frac{\chi}{m_*}; \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}, \quad \eta_m = \frac{\eta}{m_*}; \quad \alpha^2 = \mu^4 k^2; \quad k = \frac{\pi}{s}; \quad m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta m,$$

и дисперсионные уравнения

$$\bar{G}_m(\eta_m) = k_{1m}(\eta_m)(1 - \exp(2(z_3 + z_4))) + \quad (58)$$

$$+ (y_3 + y_4) k_{4m}(\eta_m)(\exp(z_3) + \exp(z_4)) [z_3, z_4] = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

формально заменяется на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Пусть $R^{-1} = kr_0/2$, где $k = \pi/s$, а r_0 безразмерный параметр. Решение системы (44) ищется в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m(\theta_m \beta), v_m w'_m(\theta_m \beta), w_m(\theta_m \beta)\} \exp(k\chi\alpha), \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (48)$$

где $w_m(\theta_m \beta)$ - определяется по формуле (43), u_m, v_m - неопределенные коэффициенты, χ - неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (47) выполняются автоматически. Подставим (48) в (44). В итоге получим характеристические уравнения

$$R_{mm}c_m + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_m + m_*^2 b_m - \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi^2 a_m + a^2 \left[R_{mm} g_m d_m - m_*^2 b_m \left(\frac{2(B_{12} + 4B_{66})}{B_{22}} \chi^2 - \frac{m_*^2(1 + \beta_m^2)}{\beta_m^2} \right) \right] \right\} + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m \left(b_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 \right) + a^4 m_*^2 g_m l_m \left(\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - \frac{m_*^2}{\beta_m^2} \right) = 0, \quad (49)$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_2^2, \quad b_m = B_1 \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad B_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}}, \quad (50)$$

$$c_m = \chi^4 - B_2 m_*^2 \chi^2 + \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_1^2 + \eta_2^2 \right) m_*^2 \chi^2 + (m_*^2 - \eta_1^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_2^2 \right), \quad d_m = \frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - m_*^2,$$

$$B_2 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}}, \quad l_m = \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - m_*^2, \quad g_m = \frac{B_{22}}{B_{66}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2,$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66}) m_*^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{m_*^4}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_3^2, \quad m_*^2 = m^2 \mu^2 \beta_m, \quad \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66} k^2}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Пусть $\chi_j, j = \overline{1, 8}$ попарно различные корни уравнения (49). Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j = \overline{1, 8}$ нетривиальные решения вида (48) системы (44) при $\chi = \chi_j, j = \overline{1, 8}$ соответственно.

Решение задачи (44), (45) - (47) ищем в виде $u_i = \sum_{j=1}^8 w_j u_i^{(j)}, i = \overline{1, 3}$

Подставим в граничные условия (45) и (46). В итоге получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1, 8}. \quad (51)$$

Верхний индекс j в скобках означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j$. Выражения для M_{ij} не приводятся.

Дисперсионное уравнение задачи (44), (45) - (47) примет вид

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^8 = m_*^{34} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8, \quad (52)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

который, эквивалентно уравнению

Предположим, что $\chi_1^{(r)}, \chi_2^{(r)}$ ($r=1,2$) - различные корни уравнения (33) с положительными действительными частями. Учитывая условия (26) получим дисперсионные уравнения

$$d_m = \text{Det} \begin{vmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} m_{11}^{(2)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} m_{12}^{(2)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} m_{21}^{(2)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} m_{22}^{(2)} \\ m_{31}^{(1)} & m_{32}^{(1)} & m_{31}^{(2)} & m_{32}^{(2)} \\ m_{41}^{(1)} & m_{42}^{(1)} & -m_{41}^{(2)} & -m_{42}^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (34)$$

Выражения для m_{ij} не приводятся (см. [3]).

В § 2.2 установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной пластинки, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин с разными упругими свойствами (аналог задачи Стоунли для пластинки) и для бесконечной пластинки полосы, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин - полос с разными упругими свойствами.

Получены аналог дисперсионного уравнения Стоунли для составной пластинки и пластинки - полосы:

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (35)$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} \left[2(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - B_{12}^{(1)} / B_{11}^{(1)} (1 - (\eta_m^{(1)})^2)) (y_1^{(2)} y_2^{(2)} - B_{12}^{(2)} / B_{11}^{(2)} (1 - (\eta_m^{(2)})^2)) + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)}) (1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)} \right]$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \quad (\eta_m^{(r)})^2 = \frac{\lambda^{(r)}}{k^2 B_{66}^{(r)}}, \quad \eta_m^{(r)} = \frac{\eta^{(r)}}{m} \quad (36)$$

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)},$$

где $y_j^{(r)}, j = 1, 2$ различные корни уравнения, с положительными действительными частями:

$$c_m^{(r)} = (y^{(r)})^4 - \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (y^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 (y^{(r)})^2 + (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (37)$$

Пусть $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$ ($r_m = 0, m = \overline{1, +\infty}$), т.е. имеем безмоментные упругие круговые замкнутые и незамкнутые бесконечные ЦО. В этом случае характеристические уравнения (33) распадаются на уравнения

$$\left((\eta^{(r)})^2 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \frac{r_0}{2} \right) (\chi^{(r)})^4 - (\eta^{(r)})^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} m^2 - \right. \quad (38)$$

$$-\frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 + B_{22}^{(r)}B_{66}^{(r)}r_0}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}\left(\chi^{(r)}\right)^2 +$$

$$+ (\eta^{(r)})^2(m^2 - (\eta^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}r_0}{B_{11}^{(r)}2}\right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad r = 1, 2$$

При $r_0 \rightarrow 0$ уравнения (38) преобразуются к уравнениям (37), где $y^{(r)} = \chi^{(r)} / m$.

Для дисперсионных уравнений (34) справедливы следующие асимптотические формулы

$$d_m = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{66}^{(2)}}W^{(1)}(\eta_m^{(1)})N^{(2)}(\eta_m^{(2)})L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) + O\left(\frac{r_0}{2m^2}\right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (39)$$

$$N^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = \frac{B_{22}^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)}{(B_{11}^{(r)})^3} + \frac{B_{12}^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2) - B_{66}^{(r)}B_{12}^{(r)} - B_{66}^{(r)}B_{22}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^3}(\eta_m^{(r)})^2$$

а $L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)})$ имеет вид (36).

Исследованы свободные интерфейсные колебания замкнутых и незамкнутых составных некруговых ЦО. Предполагается, что $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$, ($r_m = 0, m = \overline{2, +\infty}$) где $k = 2\pi/s$ или $k = \pi/s$ а s - полная длина направляющей кривой. Доказано, что для нахождения коэффициентов затухания $k\chi_j^{(r)} / m$ ($j = 1, 2$)

можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j^{(r)} / m = ((\chi_{mj}^{(r)} / m)^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 / m^2)^{1/2}, \quad (j = 1, 2) \quad (40)$$

где $\chi_{mj}^{(r)} / m$ ($j \leq 1, 2$) корни уравнения (37) с положительными действительными частями и

$$\alpha_{mj}^{(r)} = \frac{P_m^{(r)}(P_{m-1}^{(r)}r_{m+1}^{(r)} + P_{m+1}^{(r)}r_{m-1}^{(r)})}{r_{m-1}^{(r)}r_{m+1}^{(r)}r_{mm}^{(r)}} \Big|_{\chi^{(r)} = \chi_{mj}^{(r)}} \quad j = 1, 2, \quad r = 1, 2$$

а для соответствующих характеристик собственных частот $\eta^{(r)} / m$ уравнения (34).

Произведены численные исследования для ЦО с направляющими

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad a = 2, b = 1.5; \quad a = 2, b = 1. \quad (41)$$

Численный анализ показывает, что с увеличением квадрата кривизны направляющей кривой ЦО первые частоты интерфейсных колебаний увеличиваются, а процесс затухания зависит от свойств материалов и геометрических параметров.

В третьей главе исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой ЦО со свободным и шарнирно закрепленным торцами при наличии жесткого защемления на граничных образующих [2]. Исследован также вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой ЦО со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями [4].

Задачи не допускают разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича – Власова.

В качестве базисных функций используются собственные функции задачи

$$w^{IV} = \theta^4 w, \quad w|_{\beta=0,s} = w'|_{\beta=0,s} = 0, \quad 0 \leq \beta \leq s \quad (42)$$

Собственным значениям θ_m^4 , $m = \overline{1, +\infty}$ задачи (42) соответствуют собственные функции

$$w_m(\theta, \beta) = \sin \frac{\theta_m s}{2} (c \theta_m \beta - \cos \theta_m \beta) - \cos \frac{\theta_m s}{2} (s \theta_m \beta - \sin \theta_m \beta), \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (43)$$

Вводятся обозначения

$$k = \frac{\pi}{s}; \quad \theta_m = k m \mu_m, \quad m \in N; \quad \beta_m = \int_0^s w^{n^2}_m(\theta_m, \beta) d\beta / \int_0^s w^{n^2}_m(\theta_m, \beta) d\beta$$

В § 3.1 исследованы локализованные колебания у свободного торца тонкой упругой ортотропной незамкнутой ЦО с шарнирно закрепленным торцом и жестко защемленными граничными образующими.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ЦО

$$\sum_{j=1}^3 (h^2 / 12 n_{ij} + l_{ij}) u_j = \lambda u_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (44)$$

где дифференциальные операторы l_{ij} и n_{ij} определены в [3-4]

Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{4\mu^4}{R} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \Big|_{\alpha=l} = u_2|_{\alpha=l} = u_3|_{\alpha=l} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \Big|_{\alpha=l} = 0. \quad (46)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = u_2|_{\beta=0,s} = u_3|_{\beta=0,s} = \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad (47)$$

u_1, u_2, u_3 - проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α, β и нормали к срединной поверхности оболочки, R - радиус направляющей окружности срединной поверхности, h - толщина оболочки, $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω - угловая частота собственных колебаний, ρ - плотность материала, B_{ij} - коэффициенты упругости.

Соотношения (45) являются условиями свободного края при $\alpha = 0$, условия (46) - условиями шарнирного закрепления при $\alpha = l$, а (47) - условия жесткого защемления при $\beta = 0, \beta = s$. Здесь l - длина образующей, а s - длина направляющей окружности между граничными образующими.

В первом, втором и третьем уравнениях системы (44), спектральный параметр λ