

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԴԱՎԹՅԱՆ ԱՆՈՒՇ ՎՈԼՈԴՅԱՅԻ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ՍՏԱՅԻՈՆԱՐ  
ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ  
ՇԱՐԺՎՈՂ ՃԱՔԵՐԻ ԵՎ ԴՐՈՇՄՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա.02.04 “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա” մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի  
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2014

---

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ДАВТЯН АНУШ ВОЛОДЯЕВНА

**РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН И ШТАМПОВ,  
ДВИЖУЩИХСЯ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.02.04- “Механика деформируемого твердого тела”

Ереван 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա.Ն.Մարտիրոսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդ., ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ս.Մ. Մխիթարյան  
ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Ս.Հ. Զիլավյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի ճարտարագիտական  
պետական համալսարան (Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2015թ. հունվարի 30-ին, ժամը՝ 14<sup>00</sup>-ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի  
ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում:  
Հասցեն՝ 0019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պողոտա, 24/2, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի  
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ 19 դեկտեմբերի 2014թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական  
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ա.Վ.Սահակյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: д.ф.м.н., профессор А.Н. Мартиросян

Официальные оппоненты: чл.-корр. НАН РА, д.ф.м.н., профессор С.М. Мхитарян  
к.ф.м.н., доцент С.А. Джилавян

Ведущая организация: Государственный инженерный  
университет Армении (Политехник)

Защита состоится 30 января 2015г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании специализированного совета 047 в  
Институте механики НАН РА.

Адрес: 375019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 19 декабря 2014г.

Ученый секретарь  
специализированного совета, д.ф.м.н.



А.В. Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Контактные и смешанные динамические задачи составляют обширную и интенсивно развивающуюся область механики. Их развитие с одной стороны стимулируется необходимостью теоретического обобщения и обогащения, а с другой стороны - растущими запросами инженерной практики. Большое теоретическое и прикладное значение динамических задач в значительной мере обусловлено тем, что методы динамической теории упругости успешно применяются при решении многочисленных прикладных задач, которые возникают при расчетах на прочность и долговечность вибрационных машин и отдельных их деталей, во взрывном деле, при изучении распространения сейсмических волн в земной коре, в транспорте и в других областях инженерной практики. Решения таких динамических контактных задач используются также в строительном деле при расчетах балок и плит на упругом основании, гидротехнических сооружений, а также разнообразных деталей машин на действие динамической нагрузки. Указанные задачи рассматриваются в режиме как установившихся колебаний, так и ударных нагрузок. Динамические смешанные задачи исследуются также в механике разрушения при распространении трещин в деформируемых средах.

Несмотря на многочисленные основополагающие исследования по динамическим задачам механики деформируемого твердого тела, сравнительно мало изучены нестационарные динамические задачи, представляющие большой теоретический и практический интерес. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию одного класса нестационарных смешанных граничных задач динамической теории упругости. Здесь рассматриваются нестационарные динамические задачи при наличии штампов и трещин, а также задачи о проникании воздушной ударной волны вглубь упругой среды при наличии твердой опоры на части границы. В рассмотренных задачах используются различные сложные динамические граничные условия, где учтены фактор износа поверхностей контакта в задачах о штампов и влияние осаждения примесей на границе геофизической трещины, содержащихся в жидкости (флюиде), который в начальный момент времени с постоянной скоростью поступает в трещину. Наряду со случаем, когда точка раздела граничных условий предполагается неподвижной, рассмотрены также задачи, когда граница, разделяющая область задания смешанных условий, движется со скоростью, зависящей от времени и меньшей скорости распространения поперечных волн в упругой среде.

Исследуемые в настоящей работе задачи представляют как теоретический, так и практический интерес, чем и обусловлена актуальность темы диссертации.

При их решении развиваются метод интегральных преобразований, метод Винера-Хопфа, мощный аппарат сверток при решении динамических смешанных граничных нестационарных задач с движущейся с переменной скоростью точкой раздела граничных условий.

**Целью диссертационной работы** является исследование одного класса краевых задач динамической теории упругости для изотропной среды и заключается:

- в получении эффективных аналитических формул простой структуры для перемещений и напряжений упругой среды при наличии ряда сложных динамических смешанных граничных условий,

- в исследовании решений в наиболее опасных для прочности областях, т.е. в получении коэффициентов концентрации напряжений у края штампов, трещин, а в задачах проникания ударной волны - у края твердой опоры, которые в общем случае движутся с переменной скоростью,
- в получении аналитических формул для перемещений и в определении времени залечивания трещины за счет осаждения примесей, содержащихся в жидкости, текущей в трещине,
- в установлении факта отсутствия особенности у края штампа при учете фактора износа поверхностей контакта в рассмотренных нестационарных динамических задачах.

**Общая методика исследования.** В диссертационной работе все исследования выполнены на основе применения единого метода интегральных преобразований с приведением решения к эффективной форме Смирнова-Соболева, который в задачах с неподвижной границей дополняется методом Винера - Хопфа, причем при его применении также проводится контурное интегрирование с выделением решений в виде отдельных волн. В задачах с движущейся границей применяется метод интегральных преобразований, метод сверток в сочетании с техникой Винера-Хопфа. В работе также многократно использованы методы теории функций комплексного переменного (контурное интегрирование, вычисление интегралов с помощью вычетов, формулы Сохоцкого - Племяля, принцип аргумента, формула Коши для неограниченных областей и др.). Выполнение расчетов, анализ их результатов и построение по ним графиков проводилось в среде для символьных вычислений Wolfram Mathematica 9.

**Научная новизна** полученных результатов заключается в следующем:

- в работе развиваются методы динамической теории упругости применительно к новым нестационарным задачам при смешанных граничных условиях для полубесконечных областей,
- показана эффективность метода интегральных преобразований в сочетании с методом Винера-Хопфа и методом сверток при решении смешанных нестационарных динамических задач,
- построены решения трибологических задач с учетом фактора износа материалов под штампами и изучен процесс залечивания трещин, встречающихся в биологических, сейсмологических и технических исследованиях,
- в задачах с учетом фактора износа материалов под штампами показано, что наличие износа приводит к устранению особенности у края штампа, приведены графики и соответствующие выводы качественного характера,
- в рассмотренных задачах построены факторизации функций типа Рэлея для упругой и термоупругой среды,
- получены простые формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в различных динамических задачах о проникании ударной волны и в задачах о штампах.

**Практическая ценность работы.** В связи с необходимостью расчета влияния импульсных и, вообще, нестационарных воздействий на деформируемые среды из различных материалов, особенно в, важных с точки зрения механики

разрушения, областях концентрации напряжения, важно иметь простые расчетные формулы, позволяющие по заданным внешним воздействиям выявить возможные зоны неупругого поведения среды. Рассмотрен широкий круг задач, в которых из-за износа особенность упругого решения у краев штампов отсутствует, хотя численный расчет указывает на наличие, при определенных нагрузках, области хрупкого разрушения материалов, что может сказаться на прочности конструкций. Рассмотренные задачи о залечивании геофизических трещин, помимо теоретического значения, имеют приложение в таких областях науки, техники и природных процессов, как биология, сейсмология, технология охлаждения режущих инструментов, механика трещин в сооружениях из металла и композита, а также в земной коре. Предлагается несложный метод расчета задач о залечивании геофизических трещин под действием флюида, протекающего в трещине и содержащего примеси, что можно применять к биологическим и техническим трещинам, геотермальным трещинам, где примесями является кремнезем. В задачах о проникании ударной волны полученные аналитические зависимости для напряжений могут быть использованы в расчетах напряжений, действующих на жесткую опору, что представляет интерес для изучения явлений на ударном стенде, при расчетах таких процессов, как вбивание упругой сваи, стыковка металлических конструкций и т.д., в вопросах определения напряжений в задачах сейсмологии.

**Обоснованность и достоверность.** Рассмотренные в работе динамические задачи поставлены и решены строгими методами математической теории упругости и на основе математического аппарата теории волновых движений. Полученные результаты проверены в известных частных случаях, показано их совпадение с ранее известными решениями, полученными другими методами.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посв. 100-летию со дня рождения академика Н.Х. Арутюняна (8-12 октября, 2012 Цахкадзор, Армения),
- международной школе-конференции молодых ученых “Механика 2013”, посв. 70-летию основания НАН РА, (1-4 октября, 2013, Цахкадзор, Армения),
- VIII международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” (22-26 сентября, 2014, Горис-Степанакерт).

Диссертационная работа целиком обсуждена на семинаре отдела динамики деформируемых систем и связанных полей Института механики НАН РА и на общем семинаре Института механики НАН РА.

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликованы 8 научных статей, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав, заключения и содержит 148 страниц машинописного текста, 29 фигур, 4 таблицы и список цитированной литературы из 158 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цель и круг обсуждаемых в ней вопросов, дан краткий обзор основных результатов и работ, тесно примыкающих к исследуемой тематике, приведен анализ состояния проблемы и изложено краткое содержание диссертации.

**В первой главе** излагаются основные соотношения линейной теории упругости (§1.1) и математические методы динамической теории упругости (интегральные преобразования (§1.2), метод Винера-Хопфа (§1.3)), а также эффективный метод (метод сверток) решения динамических нестационарных смешанных задач с движущейся границей раздела краевых условий (§1.4).

**Во второй главе** излагается применение метода интегральных преобразований и метода Винера-Хопфа при решении нестационарных смешанных граничных задач динамической теории упругости. Дается решение задач проникания ударной волны в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жесткую опору, плоской и пространственной задач о наращивании слоя примесей, содержащихся в жидкости (флюиде), который с постоянной скоростью поступает в трещину в бесконечной термоупругой плоскости, а также контактные задачи для горизонтальных и вертикальных штампов при наличии износа.

**В §2.1** решаются плоские смешанные задачи проникания ударной волны в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жесткую опору. Опора занимает часть границы  $x < 0$ . Сначала рассмотрена более простая задача о взрыве на опоре в некоторой точке  $x = \xi$  ( $\xi < 0$ ) среды. Фронт ударной волны в момент  $-\frac{\xi}{V}$ , где  $V$  есть скорость ударной волны ( $V > a$ , где  $a$  есть скорость распространения продольных волн в среде), достигает края опоры и после этого начинается распространение давления вглубь упругой изотропной среды.

Граничные условия при  $y = 0$  имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \rho b^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \sigma^- = -P_1 H(Vt + \xi - x) \quad (x > 0); \\ u(t, x) &= u^+(t, x) = 0 \quad (x < 0); \\ \sigma_{yy} &= \rho \left( (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (|x| < \infty); \\ u, v &= 0(r^{1/2}), r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad (\text{условие на ребре}),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\rho$  - плотность среды,  $a, b$  - скорости продольных и поперечных волн,  $H(x)$  - единичная функция Хевисайда.

При  $t = 0$  имеем нулевые начальные условия:  $u = v = \partial u / \partial t = \partial v / \partial t = 0$ .

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ . Решение задачи приводится к решению уравнения Винера-Хопфа

$$\Omega^+ - \frac{P_1 e^{\frac{s\xi}{V}}}{2\pi s \left( \frac{s}{V} + i\bar{\alpha} \right)} = \frac{i\rho b^4 R(\bar{\alpha})}{\omega^2 \bar{\beta}_2} u^-, \quad (2)$$

$$R(\bar{\alpha}) = \left( \frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 \right)^2 + 4\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2, \quad \bar{\beta}_n(\bar{\alpha}) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b,$$

$$\Omega^+(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \sigma_{xy}^L \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \quad u^-(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} u^L \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \quad s = -i\omega,$$

где  $s, \bar{\alpha}$  - спектральные параметры преобразования Лапласа и Фурье, соответственно. Решение уравнения (2) получено в виде

$$\Omega^+ = \frac{P_1 e^{\frac{s\xi}{V}} \sqrt{\frac{\omega}{b} + \bar{\alpha}}}{2\pi s i \left( \bar{\alpha} - \frac{\omega}{V} \right)} \left( 1 - \frac{\left( \bar{\alpha} + \frac{\omega}{c_R} \right) \sqrt{\frac{\omega}{b} + \frac{\omega}{V}} D_+ \left( \frac{\omega}{V} \right)}{\left( \frac{\omega}{c_R} + \frac{\omega}{V} \right) \sqrt{\frac{\omega}{b} + \bar{\alpha}} D_+ (\bar{\alpha})} \right), \quad (3)$$

$$u^- = \frac{P_1 e^{\frac{s\xi}{V}} \sqrt{\frac{\omega}{b} - \bar{\alpha}} \sqrt{\frac{\omega}{b} + \frac{\omega}{V}} G_+ \left( \frac{\omega}{V} \right) G_- (\bar{\alpha})}{4\pi \rho b^4 (a^{-2} - b^{-2}) s \left( \bar{\alpha} - \frac{\omega}{V} \right) \left( \bar{\alpha} - \frac{\omega}{c_R} \right) \left( \frac{\omega}{c_R} + \frac{\omega}{V} \right)},$$

$$\text{где } D_{\pm}(\bar{\alpha}) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\omega}{a}}^{\frac{\omega}{b}} \text{arctg} \left[ 4\bar{\alpha}^2 \left( \frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\zeta}^2 \right)^{-2} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{\zeta}^2} \sqrt{\bar{\zeta}^2 - \frac{\omega^2}{a^2}} \right] - \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} \pm \bar{\alpha}} \right\},$$

а  $c_R$  есть скорость волны Рэлея.

Обратные преобразования Лапласа и Фурье от (3) дают решение задачи в форме Смирнова-Соболева и при  $y=0$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma^+ = & \frac{-P_1 \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{a}{V}} D_+ \left( \frac{a}{V} \right)}{\frac{a}{V} + \frac{a}{c_R}} \left\{ \frac{2}{\pi} H \left( \frac{a}{-x} \left( t + \frac{\xi}{V} \right) - \frac{a}{b} \right) \left( \frac{\frac{a}{c_R} + \frac{a}{b}}{\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{a}{V}}} \text{arctg} \frac{\sqrt{\frac{a}{-x} \left( \frac{\xi}{V} + t \right) - \frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{a}{V}}} \right. \right. \\ & - \frac{\sqrt{\frac{a}{-x} \left( \frac{\xi}{V} + t \right) - \frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{a}{V}}} + \int_1^{\frac{a}{b}} \frac{F_2 \left( \frac{u}{a} \right) \left( \frac{a}{c_R} - u \right)}{\left( u + \frac{a}{V} \right) \sqrt{\frac{a}{b} - u}} \text{arctg} \frac{\sqrt{\frac{a}{-x} \left( t + \frac{\xi}{V} \right) - \frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b} - u}} du - \\ & \left. \left. - \int_1^{\frac{a}{b}} \frac{F_2 \left( \frac{u}{a} \right) \left( \frac{a}{c_R} + \frac{a}{V} \right)}{\left( u + \frac{a}{V} \right) \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{a}{V}}} \text{arctg} \frac{\sqrt{\frac{a}{-x} \left( t + \frac{\xi}{V} \right) - \frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{a}{V}}} du \right) + \int_1^{\frac{a}{-x \left( t + \frac{\xi}{V} \right)}} \frac{F_2 \left( \frac{u}{a} \right) \left( \frac{a}{c_R} - u \right)}{\left( u + \frac{a}{V} \right) \sqrt{\frac{a}{b} - u}} du H \left( \frac{a}{b} + \frac{a}{x} \left( t + \frac{\xi}{V} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

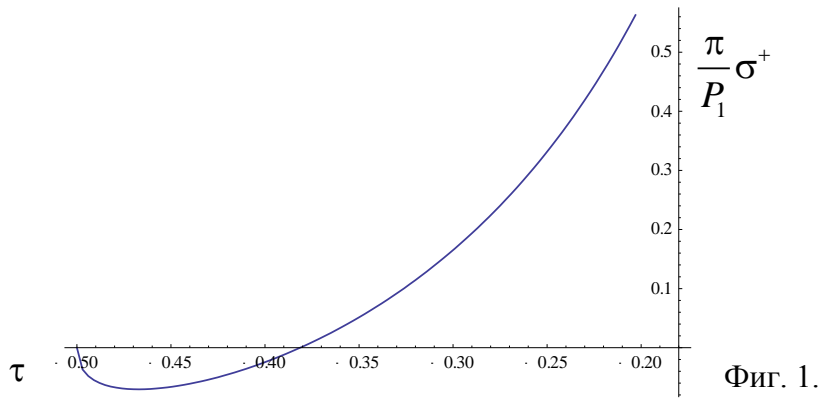
где

$$D_{\pm}(\alpha) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_1(u) \frac{du}{u \pm \alpha}, D_{\pm}^{-1}(\alpha) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_2(u) \frac{du}{u \pm \alpha}, \chi(u) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - u},$$

$$F_1(u) = \gamma(u) \exp[\chi(u)], F_2(u) = -\gamma(u) \exp[-\chi(u)], \quad (5)$$

$$\gamma(u) = \frac{\frac{4}{\pi} u^2 \sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - 2u^2\right)^4 + 16u^4 \left(\frac{1}{b^2} - u^2\right) \left(u^2 - \frac{1}{a^2}\right)}}, \quad \varphi(\zeta) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2}}{\left(\frac{1}{b^2} - 2\zeta^2\right)^2} \right].$$

Проведены расчеты по (4) для значений параметров  $a/b=2, a/V=0.5$ , и построен график функции  $\pi\sigma^+/P_1$  в зависимости от  $\tau = x/a(t + \xi/V)$  (фиг. 1). Как видно из фиг. 1, в точке  $\tau = -0.38$   $\sigma_{xy}$  изменяет знак.



Фиг. 1.

Из (4) получен коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sigma^+ \sqrt{2\pi(-x)} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} P_1 \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{a}{V}} G_+ \left( \frac{a}{V} \right) \sqrt{a \left( t + \frac{\xi}{V} \right) \left( \frac{a}{V} + \frac{a}{c_R} \right)^{-1}} \quad (6)$$

Из (6) видно, что при  $x \rightarrow -0$  имеется особенность вида  $(-x)^{-1/2}$ .

Аналогичным образом из второго уравнения (3) можно получить структурно похожее представление для  $u^-$ . При этом при  $x \rightarrow 0$  имеем  $u^- \rightarrow 0$ .

В случае, когда взрыв производится при  $x = \xi, \xi > 0$  вне опоры в момент  $t = 0$ , граничные условия при  $y = 0$  имеют вид

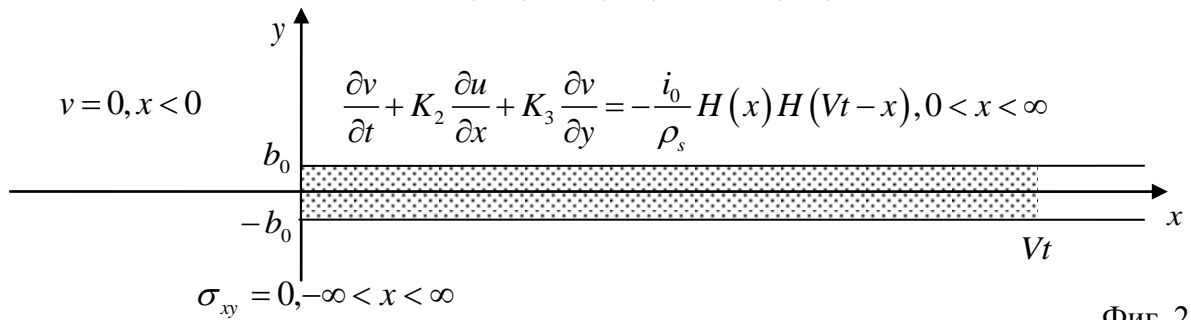
$$\sigma_{xy} = \sigma_- = -P_1 H(Vt - x + \xi) H(Vt + x - \xi) \quad (x > 0); \quad u(t, x) = u^+(t, x) = 0 \quad (x < 0);$$

$$\sigma_{yy} = \rho \left( (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (|x| < \infty). \quad (7)$$

В результате решения задачи получено выражение  $\sigma_{xy}$  при  $x < 0$  и показано, что при  $x \rightarrow -0$  имеется корневая особенность.



**В §2.2** изложена постановка общей задачи о трещине при наличии потока жидкости с учетом термоупругих напряжений и влияния осаждения, за счет термодиффузии, примесей на границе трещины на залечивание трещины. При некоторых упрощающих предположениях на характер влияния диффузии примесей на залечивание трещины, удалось решить прикладную нестационарную смешанную задачу о трещине в термоупругой среде, когда граничными условиями являются равенство нулю касательных напряжений на всей оси и касательного перемещения вне трещины, а на трещине ставятся условие для нормального перемещения с учетом термодиффузии и связанного с ней градиента температуры по направлению потока движущейся жидкости, износа, наращивания, и задается нестационарный поперечный диффузионный поток примесей. Флюид при  $t=0$  поступает в трещину, которая вначале представляет полуполосу  $x>0$  малой толщины  $2b_0$ , причем в силу симметрии уравнение трещины в момент  $t$  будет  $y = \pm b_1(x,t)$ ,  $b_1(x,t) = b_0 + v(x,t)$ ,  $y \approx 0$ .



Фиг. 2.

Здесь  $\xi = \frac{C_p - C_v}{C_v l} \frac{vb_0 \gamma \rho}{\alpha \rho_s}$ ,  $K_2 = \frac{K(\bar{a}^2 - 2b^2)\rho}{\rho_s} + \xi$ ;  $K_3 = \frac{K\bar{a}^2 \rho}{\rho_s} + \xi$ ,  $\bar{a}^2 = a^2 + \bar{\delta}$ ,  $\bar{\delta} = \frac{K_4}{\rho} \frac{C_p - C_v}{C_v}$ ,

$K_4 = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  - объемный модуль,  $\rho$  - плотность упругой среды,  $a, b$  - скорости продольных и поперечных волн,  $C_p, C_v$  - теплоемкости,  $K = const$  есть экспериментальная постоянная,  $\rho_s$  - плотность выпавшего осадка,  $c$  - концентрация примесей в жидкости,  $\gamma = \partial c / \partial T$ ,  $\gamma = const$ ,  $q = \rho_j V b_0$ ,  $\rho_j$  - плотность жидкости,  $i_0$  - плотность диффузионного потока по оси  $y$ , в линейном приближении величины  $q$  и  $i_0$  взяты такими же, как в начальном сечении  $x=0$ ,  $\rho$  - плотность упругой среды,  $V = const$  есть скорость движения флюида,  $l$  - характерная средняя длина вдоль трещины,  $\alpha$  - коэффициент температуропроводности, для разности температур  $T(x, y, t) - T_0$  предположено, что она одинакова в упругой среде и в жидкости, где приближенно считается  $y \approx 0$ , обозначено  $T(x, t) = T(x, 0, t) - T_0$ .

Решение задачи ищется методом интегральных преобразований Лапласа по  $t$  и Фурье по  $x$ . Решение приведено к решению уравнения Винера-Хопфа в виде

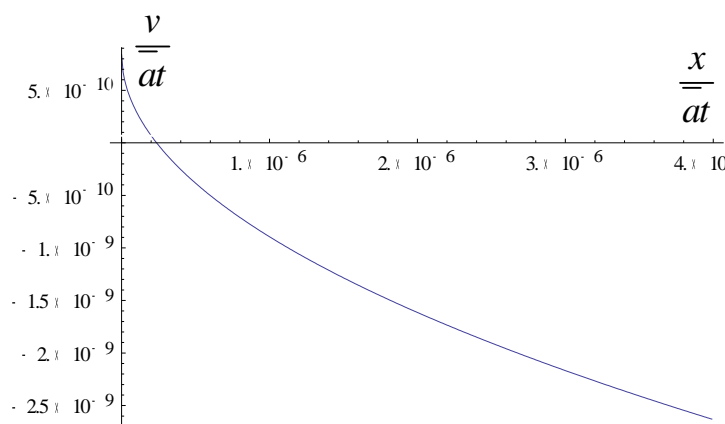
$$\Omega_2^+ - \frac{i_0}{2\pi s \rho_s \left( \frac{s}{v} + i\bar{\alpha} \right)} = \frac{R(\bar{\alpha})}{i \frac{\omega^2}{b^2} \beta_1} v^-, \quad (8)$$

где  $R^*(\bar{\alpha}) = \bar{\beta}_1 \frac{\omega^3}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (K_3 - K_2) - \left( K_3 \frac{\omega^2}{a^2} - (K_3 - K_2) \bar{\alpha}^2 \right) \left( \frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 \right)$ ,

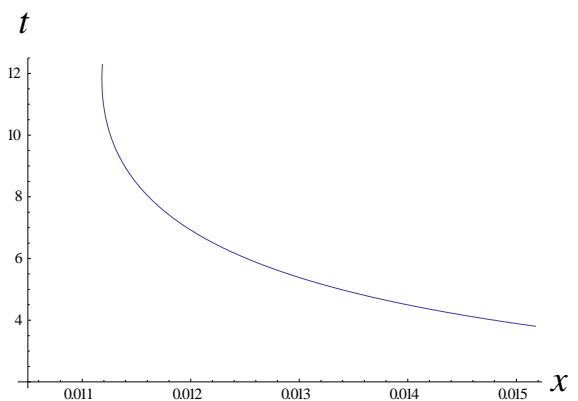
$$\Omega_2^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left( sv^L + K_2 \frac{\partial u^L}{\partial x} + K_3 K_2 \frac{\partial v^L}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \quad v^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} v^L \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx,$$

$u^L, v^L$  - образы преобразования Лапласа по  $t$  компонентом перемещений  $u, v$ . Методами теории аналитических функций комплексного переменного доказано, что функция типа Рэлея  $R^*(\bar{\alpha})$  в комплексной плоскости имеет точно два корня, которые являются вещественными числами. Построена факторизация функции  $R^*(\bar{\alpha})$  и получено решение уравнения (8) такой же структуры, что и выше.

При определенных значениях параметров проведены расчеты и построен график зависимости  $\frac{v}{at}$  от  $\frac{x}{at}$  (фиг. 3).



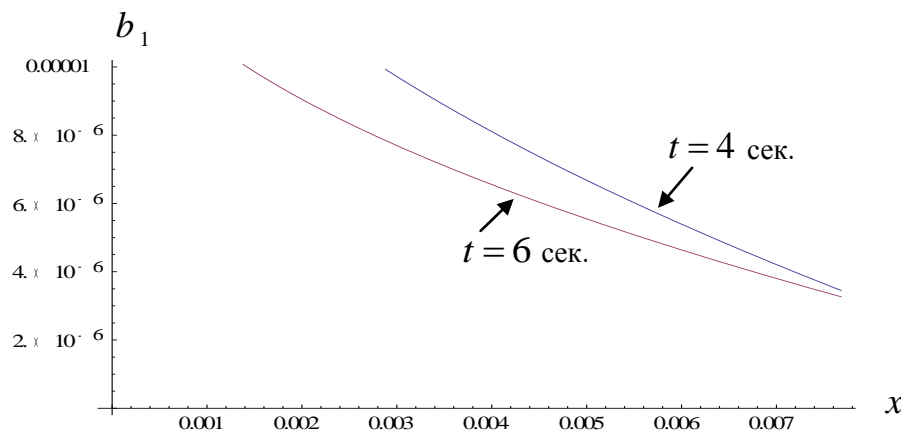
Фиг. 3



Фиг. 4

В результате вычислений показано, что при  $\frac{x}{at} \leq 2.1 \cdot 10^{-7}$  имеем  $\frac{v}{at} > 0$ , а при  $\frac{x}{at} \geq 2.1 \cdot 10^{-7}$  имеем  $\frac{v}{at} < 0$ , и ширина трещины  $b_1 = b_0 + v$  уменьшается. Полагая  $b_0 = 10^{-5}$  см, построена зависимость времени  $t$  залечивания трещины от координаты  $x$  (фиг.4).

В моменты времени  $t = 4$  сек. и  $t = 6$  сек. профиль верхнего берега трещины на участке  $10^{-7} < x < 0.008$  будет иметь вид, представленный на фиг. 5.



Фиг. 5

**В §2.3** дается решение нестационарных смешанных граничных плоских задач для горизонтальных и вертикальных штампов при наличии износа. Показано, что при наличии износа решения у края штампа особенности не имеют. Однако расчеты показывают, что при некоторых значениях граничного перемещения под штампом возникает область, где напряжения превосходят предел упругости и имеет место разрушение среды.

В первой задаче граничные условия имеют вид ( $y = 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \rho \left( (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (x < 0); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + k\sigma_{yy} &= C_0 H(x) \delta(t) \quad (x > 0); \quad \sigma_{xy} = b^2 \rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k$  - коэффициент износа,  $\delta(t)$  - функция Дирака.

Решение этой задачи, как и выше, получено на всей плоскости в форме Смирнова-Соболева. Структура решения позволяет заметить, что при  $x \rightarrow \pm 0$  оно не имеет особенностей. Выполнены численные расчеты и построен график зависимости величины  $\pi k t C_0^{-1} \sigma_{yy}$  от  $x/at$  (фиг. 6).

Рассмотрен частный случай  $k = 0$ , тогда граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= b^2 \rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (|x| < \infty); \quad \frac{\partial v}{\partial t} = C_0 H(x) \delta(t) \quad (x > 0); \\ \sigma_{yy} &= \rho \left( (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

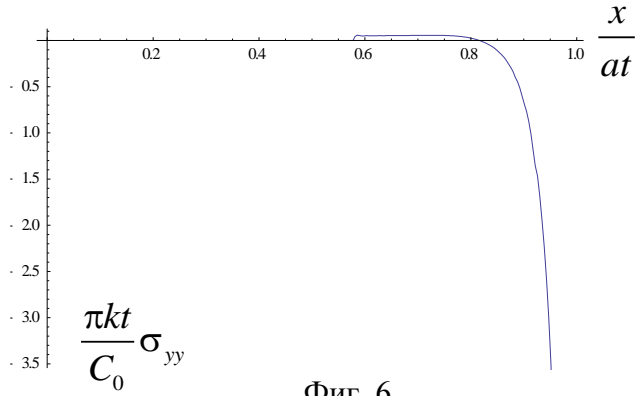
Аналогичным путем получено решение задачи (10) в виде

$$\sigma_{yy}^- = - \frac{2C_0 \rho b^4 \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right)}{a^2 c_R D^+(0)} H(x) \left[ \frac{a \delta(t)}{c_R D^-(0)} - \frac{1}{\pi t} \frac{\left( \frac{a}{c_R} - \frac{at}{x} \right) H\left( \frac{at}{x} - 1 \right)}{D^-\left( \frac{t}{x} \right) \sqrt{\frac{at}{x} - 1}} \right], \quad (11)$$

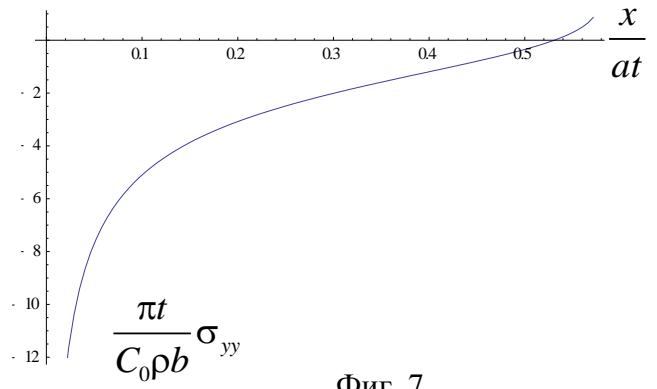
где функции  $D_{\pm} \left( \frac{t}{x} \right), D_{\pm}^{-1} \left( \frac{t}{x} \right)$  даются формулами (5). Из (11) видно, что у края штампа имеем известную особенность вида  $x^{-1/2}$ . Проведены численные расчеты при значении  $a/b = \sqrt{3}$  и получен график зависимости величины  $\pi t (C_0 \rho b)^{-1} \sigma_{yy}$  от  $x/at$  (фиг. 7), несколько значений приведены в таблице 1.

Таблица 1.

$x/at$	$1 \cdot 10^{-45}$	0.0057735	0.254034	0.392598	0.496521	0.548483
$\frac{\pi t}{C_0 \rho b} \sigma_{yy}$	$-5.7597 \cdot 10^{22}$	-23.8199	-2.4489	-1.2514	-0.382335	0.26338



Фиг. 6



Фиг. 7

Решена также граничная задача о штампе при динамических условиях и при наличии износа, когда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \rho \left( (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \\ \sigma_{xy} &= b^2 \rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (x < 0); \quad \frac{\partial u}{\partial t} + k \sigma_{yy} = C_0 H(x) \delta(t) \quad (x > 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь получено уравнение Винера-Хопфа в следующем виде

$$k \sigma_{xy}^- \left( 1 - \frac{\omega^3 \bar{\beta}_2}{k \rho b^4 R(\alpha)} \right) = \Omega_0^+(\alpha) + \frac{C_0}{2\pi i \alpha}, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$\sigma_{xy}^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sigma_{xy}^L \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx, \quad \Omega_0^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (su^L + k \sigma_{xy}^L) \Big|_{y=0} e^{-i\bar{\alpha}x} dx.$$

В результате получено

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{C_0}{k} \frac{a}{\alpha_0 c_R} \frac{D^+(0)}{D_4^+(0)} H(x) \left[ \frac{a}{\alpha_0 c_R} \frac{D^-(0)}{D_2^-(0)} \delta(t) - \frac{a}{\alpha_0} \left( \frac{1}{c_R} - \frac{\alpha_0}{a} \right) \frac{D^-(\alpha_0/a)}{D_4^-(\alpha_0/a)} \delta\left(t - \frac{\alpha_0}{a} x\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{F_1^{**}\left(\frac{t}{x}\right) \left(\frac{1}{c_R} - \frac{t}{x}\right)}{t \left(\frac{\alpha_0}{a} - \frac{t}{x}\right)} H\left(\frac{1}{b} - \frac{t}{x}\right) H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{a}\right) \right]; \end{aligned}$$

$$F_1^{**}(u) = \mu_2(u) \exp(\chi_2(u)), \quad \chi_2(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/a}^{1/b} \varphi_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - u}, \quad \varphi_2(\zeta) = \ell n \frac{R_2(\zeta) \overline{R(\zeta)}}{R(\zeta) R_2(\zeta)},$$

$$\mu_2(u) = \frac{-\frac{4}{\pi} u^2 \frac{1}{\rho k b^4} \left(\frac{1}{b^2} - u^2\right) \sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}} \left( \left( 4u^2 \sqrt{u^2 - \frac{1}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{b^2} - 2u^2\right)^4 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{16u^4 \left(u^2 - \frac{1}{a^2}\right) \left(\frac{1}{b^2} - u^2\right) + \left( \left(\frac{1}{b^2} - 2u^2\right)^2 - \frac{1}{\rho k b^4} \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2} \right)^2}},$$

$$D_2^-(0) = \frac{a^2}{b\alpha_0} \sqrt{\frac{1}{ak\rho} - 1}, D_4^\pm(\alpha) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \operatorname{arctg} \frac{4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2}}{\left(\frac{1}{b^2} - 2\zeta^2\right)^2 - \frac{1}{k\rho b^4} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2}} \frac{d\zeta}{\zeta \pm \alpha} \right\},$$

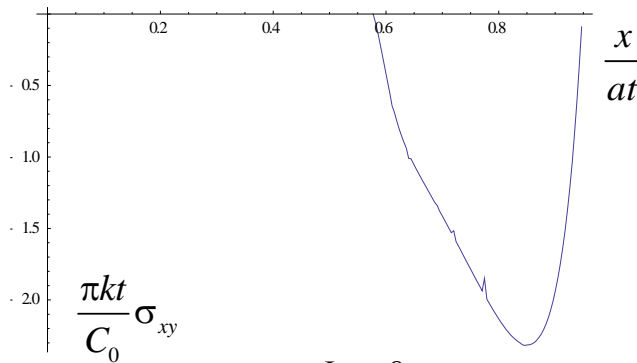
$$R_2(\zeta) = \left(\frac{1}{b^2} - 2\zeta^2\right)^2 - 4i\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{a^2}} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2} - \frac{1}{\rho k b^4} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2},$$

где  $\pm\alpha_0$  ( $\alpha_0 > 0$ ) - корни функции  $R_2(\zeta)$ .

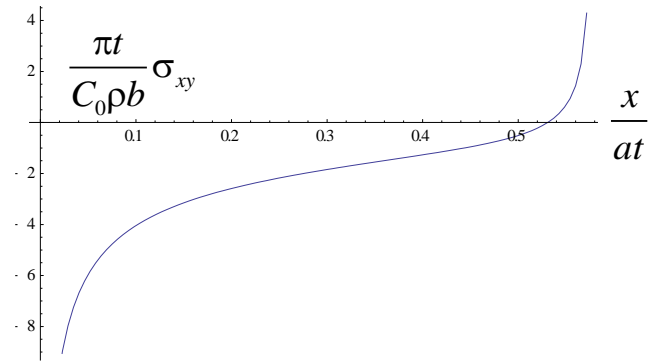
Отсюда следует, что решение при  $x \rightarrow \pm 0$  не имеет особенностей. Проведены численные расчеты для значений  $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$ ,  $ak\rho = 1.8$  и построен график зависимости величины  $\pi k t C_0^{-1} \sigma_{xy}$  от  $x/at$  (фиг. 8).

Рассмотрен также случай  $k = 0$  и получено решение в виде

$$\sigma_{xy} = \frac{\rho b^4 \sqrt{\frac{b}{a}} C_0 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)}{c_R D_+(0)} \left[ -\frac{b}{c_R} \frac{\delta(t)}{D_-(0)} + \right. \\ \left. + H(x) H\left(\frac{t}{x} - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{a}{c_R} - \frac{at}{x}\right) \left( \frac{F_2\left(\frac{t}{x}\right)}{t \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{at}{x}}} H\left(\frac{1}{b} - \frac{t}{x}\right) + \frac{D_-^{-1}\left(\frac{t}{x}\right)}{\pi t \sqrt{\frac{at}{x} - \frac{a}{b}}} H\left(\frac{at}{x} - \frac{a}{b}\right) \right) \right]. \quad (14)$$



Фиг. 8



Фиг. 9

Из последнего видно, что у края штампа имеем известную особенность вида  $x^{-1/2}$ . Выполнены численные расчеты для (14) при  $a/b = \sqrt{3}$  и получен график зависимости величины  $\pi t (C_0 \rho b)^{-1} \sigma_{xy}$  от  $x/at$  (фиг. 9, табл. 2.).

Таблица 2.

$x/at$	$1 \cdot 10^{-44}$	0.0057735	0.254034	0.392598	0.496521	0.548483
$\frac{\pi t}{C_0 \rho b} \sigma_{xy}$	$-1.3839 \cdot 10^{22}$	-5.51296	-2.14761	-1.31002	-0.550923	0.601387

**В §2.4** дается решение пространственной задачи для геофизической трещины при наличии трения и наращивания примесей на границе трещины.

**В третьей главе** рассматриваются нестационарные смешанные граничные плоские задачи динамической теории упругости, в которых точка границы, разделяющая области задания смешанных условий, движется вдоль прямой со скоростью, которая, вообще говоря, является зависящей от времени величиной.

Основными методами, использованными в решениях этих задач, является метод интегральных преобразований Лапласа и Фурье, метод сверток в сочетании с методом Винера-Хопфа. Некоторые из задач, которые рассмотрены в этой главе (§3.1, §3.3), являются обобщением задач, уже решенных в главе II (§2.1, §2.2). Следует отметить, что в этих задачах полученные решения упрощены на случай неподвижной границы, и показано, что решения совпадают с результатами, полученными методом Винера-Хопфа.

**В §3.1** рассматривается задача распространения давления в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жесткую опору и опора движется с произвольной скоростью  $\dot{\ell}(t)$ , где  $\ell(t)$ - закон движения края опоры. Опора занимает часть границы  $x < \ell(t)$ . Эта задача - обобщение задачи, рассмотренной в §2.1.

Граничные условия при  $y = 0$  имеют вид

$$\sigma_{xy} = \rho b^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \sigma^+ = -P_1 H(Vt + \xi - x) \quad (x > \ell(t));$$

$$u(t, x) = u^-(t, x) = 0 \quad (x < \ell(t)); \quad \sigma_{yy} = \rho \left( (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (|x| < \infty) \quad (15)$$

При  $t = 0$  имеем нулевые начальные условия  $u = v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ .

Значения  $\sigma_{xy} = \sigma^-(t, x)$  при  $x < \ell(t)$  и  $u = u^+(t, x)$  при  $x > \ell(t)$  неизвестны.

Решение ищется с помощью преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по координате (преобразование LF) в виде

$$\{u(t, x), v(t, x)\} = \frac{1}{4\pi^2 i} \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \{u_n^{LF}(s, q), v_n^{LF}(s, q)\} \exp(st - i\bar{\beta}_n y - iqx) ds dq \quad (16)$$

Подставляя (17) в уравнения движения и в граничные условия, получаем соотношение, связывающее изображения  $\sigma_{xy}^{LF}$ ,  $u^{LF}$  функций  $\sigma_{xy}(t, x)$ ,  $u(t, x)$ ,

$$u^{LF}(s, q) = S^{LF}(s, q) \sigma_{xy}^{LF}(s, q), \quad (17)$$

$$S^{LF}(s, q) = -\frac{s^2}{\rho b^4 R(s, q)} \sqrt{\frac{s^2}{b^2} + q^2}, \quad R(s, q) = \left( \frac{s^2}{b^2} + 2q^2 \right)^2 - 4q^2 \sqrt{\frac{s^2}{a^2} + q^2} \sqrt{\frac{s^2}{b^2} + q^2},$$

где  $s = -i\omega$  - параметр преобразования Лапласа.

Компоненты факторизации функции  $S^{LF}(s, q)$  имеют вид

$$S_+^{LF}(s, q) = \frac{\sqrt{\frac{s}{b} - iq}}{\frac{s}{c_R} - iq} D_+ \left( \frac{iq}{s} \right), S_-^{LF} = -\frac{1}{2\rho b^4 \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)} \frac{\sqrt{\frac{s}{b} + iq}}{\frac{s}{c_R} + iq} D_- \left( \frac{iq}{s} \right), \quad (18)$$

$$D_{\pm} \left( \frac{iq}{s} \right) = \exp \left( \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta \mp \frac{iq}{s}} d\zeta \right), \varphi(\zeta) = \arctg \left[ 4\zeta^2 \left( \frac{1}{b^2} - 2\zeta^2 \right)^{-2} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \zeta^2} \sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{a^2}} \right].$$

Далее введены функции  $P_{\pm}^{LF} = 1/S_{\pm}^{LF}$ . С помощью обратных преобразований вычислены оригиналы  $S_{\pm}(t, x)$ ,  $P_{\pm}(t, x)$

$$S_+(t, x) = \frac{H(x)}{\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ 1 - \frac{\sqrt{\frac{1}{c_R} - \frac{1}{b}}}{\sqrt{\frac{1}{c_R} - \frac{t}{x}}} BH \left( \frac{1}{c_R} - \frac{t}{x} \right) \right] H(bt - x) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{t}{x}} \frac{F_1(u) \sqrt{\frac{1}{b} - u} H(x - bt)}{\left( \frac{1}{c_R} - u \right) \sqrt{\frac{t}{x} - u}} du H(at - x) \right\},$$

$$P_+(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{c_R} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \left[ D_+^{-1} \left( \frac{1}{b} \right) \delta \left( t - \frac{x}{b} \right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_3(h) \delta(t - hx) dh \right] \right\},$$

$$F_3(h) = \int_{\frac{1}{a}}^h \frac{d}{du} \left( \frac{F_2(u)}{\sqrt{\frac{1}{b} - u}} \right) \frac{du}{\sqrt{h - u}}, \quad D_+^{-1} \left( \frac{1}{b} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_2(u) du}{u - \frac{1}{b}}, \quad B = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_1(u) du}{u - \frac{1}{c_R}}.$$

Здесь  $F_1(u), F_2(u)$  даются формулами (5), а функции  $S_-(t, x), P_-(t, x)$  получают-ся из последних заменой  $x$  на  $-x$  и умножением на постоянные  $\left( -2\rho b^4 (b^{-2} - a^{-2}) \right)^{-1}$  и  $-2\rho b^4 (b^{-2} - a^{-2})$  соответственно. Аналогичным образом, как в §1.4, решение записывается в виде свертки

$$\sigma_-(t, x) = -P_- ** \left[ (S_- ** \sigma_+) H(\ell - x + 0) \right], \quad u_+(t, x) = S_+ ** \left[ (S_- ** \sigma_+) H(x - \ell + 0) \right], \quad (19)$$

где  $\sigma_-(t, x)$  неизвестное напряжение  $\sigma_{xy}$  на опоре. Решение получено в виде

$$\sigma_-(t, x) = \frac{P_1 B_1}{\pi} \left[ D_+^{-1} \left( \frac{1}{b} \right) N \left( x, t, \xi, \frac{1}{b} \right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_3(h) N(x, t, \xi, h) dh \right], \quad (20)$$

$$B_1 = \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{V} \right) \left( \frac{1}{c_R} + \frac{1}{V} \right)^{-1} D_- \left( \frac{1}{V} \right), \quad L = \frac{t_0}{\ell - \xi}, \quad \ell = \ell(t_0), \quad \ell(t_0) - x - \frac{t - t_0}{h} = 0,$$

$$N(x, t, \xi, h) = \frac{1 + \frac{\dot{\ell}}{c_R}}{1 + h\dot{\ell}} \sqrt{\frac{\ell - \xi}{\ell - x}} \frac{\sqrt{L - \frac{1}{V}}}{\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}}} H \left( L - \frac{1}{V} \right) + \frac{\frac{1}{c_R} + \frac{1}{V}}{\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}} \sqrt{h + \frac{1}{V}}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{(\ell - \xi) \left( L - \frac{1}{V} \right)}{(\ell - x) \left( h + \frac{1}{V} \right)}} \right) H \left( L - \frac{1}{V} \right).$$

Учитывая, что при  $x \rightarrow \ell(t)$  имеем  $t_0 \rightarrow t$  и  $\frac{\ell(t) - x}{\ell(t_0) - x} \rightarrow 1 + h\dot{\ell}(t)$ , можно получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x \rightarrow \ell-0} \sigma^- \sqrt{2\pi(\ell - x)} = \frac{P_1 B_1 \sqrt{2} (1 + c_R^{-1} \dot{\ell})}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{V}} \sqrt{1 + \frac{1}{b} \dot{\ell}}} \sqrt{T - \frac{1}{V}} \sqrt{\ell - \xi} H\left(T - \frac{1}{V}\right), \quad (21)$$

$$K(\dot{\ell}) = \left\{ 1 + \dot{\ell} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_2(u)}{1 + u\dot{\ell}} du \right\}, T = \frac{t}{\ell - \xi}, \ell = \ell(t), \dot{\ell} = \dot{\ell}(t).$$

Аналогичным путем получено значение функции  $u^+(t, x)$  при  $x > \ell(t)$ .

Рассмотрен также случай, когда взрыв производится при  $x = \xi, \xi > 0$  вне опоры и край опоры движется со скоростью  $\dot{\ell}(t)$ . Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = \sigma_+ = -P_1 H(Vt - x + \xi) H(Vt + x - \xi) \quad (x > \ell(t)); \quad u(t, x) = u^-(t, x) = 0 \quad (x < \ell(t)); \\ \sigma_{yy} = \rho \left( (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (|x| < \infty). \end{aligned} \quad (22)$$

Решение задачи получено тем же методом, что и в предыдущей задаче.

**В §3.2** дается решение задач о распространении ударной волны в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жесткую опору, и край опоры движется с переменной скоростью, при сквозном нулевом условии для касательного напряжения на границе. Вначале рассмотрена более простая задача о взрыве на опоре в некоторой точке  $x = -\xi, \xi > 0$ . Фронт ударной волны в момент времени  $\frac{\xi}{V}$ , где  $V$  есть скорость ударной волны, достигает края опоры и после этого начинается проникание давления вглубь упругой изотропной среды.

Граничные условия при  $y = 0$  имеют вид

$$\sigma_{yy} = \sigma^+ = -P_1 H(Vt - \xi - x) \quad (x > \ell(t)); \quad v = v^- = 0 \quad (x < \ell(t)); \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (|x| < \infty) \quad (23)$$

где  $\ell(t)$  – закон движения края опоры. При  $t = 0$  имеем нулевые начальные условия  $u = 0, v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ . Здесь  $t = \frac{\xi}{V}$  – момент достижения ударной волны края опоры. Опора занимает часть границы  $x < 0$  в момент  $t = 0$ . Значения  $\sigma_{yy} = \sigma^-(t, x)$  при  $x < \ell(t)$  и  $v = v^+(t, x)$  при  $x > \ell(t)$  неизвестны.

Задача решена аналогичным образом, как в §3.1. Решение получено в виде

$$\sigma^-(t, x) = \frac{P_0}{\pi} \left[ AN_1^0 \left( t, x, \xi, \frac{1}{a} \right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} F_4(h) N_1^0(t, x, \xi, h) dh \right], \quad (24)$$



$$N_1^0(t, x, \xi, h) = N^0(t, x, \xi, h) + \frac{c_R + V}{c_R V \sqrt{h + \frac{1}{V}}} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{\frac{(\ell(t_0) + \xi) \left( L - \frac{1}{V} \right)}{(\ell(t_0) - x) \left( h + \frac{1}{V} \right)}} H \left( L - \frac{1}{V} \right) \right] H \left( T - \frac{1}{V} \right),$$

$$N^0(t, x, \xi, h) = \frac{(c_R + \dot{\ell}) \sqrt{t_0 - \frac{\ell + \xi}{V}}}{c_R \sqrt{\ell(t_0) - x} (1 + h \dot{\ell})} H \left( t_0 - \frac{\ell + \xi}{V} \right), \quad F_4(h) = \int_h^{\frac{1}{b}} \frac{d}{du} \left( \frac{F_2(u)}{\sqrt{u - \frac{1}{a}}} \right) \frac{du}{\sqrt{u - h}},$$

$$P_0 = \frac{2P_1 c_R V}{c_R + V} D^+ \left( \frac{1}{V} \right) \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{V}}, \quad D^\pm \left( \frac{1}{V} \right) = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_1(u)}{u \pm \frac{1}{V}} du, \quad A = 1 + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_2(u)}{u - \frac{1}{a}} du, \quad L = \frac{t_0}{\ell + \xi}, \quad T = \frac{t}{x + \xi},$$

где  $\ell = \ell(t_0)$ ,  $t - t_0 + h(x - \ell(t_0)) = 0$ ,  $F_1(u), F_2(u)$  даются формулами (5). Для коэффициента интенсивности получено

$$\lim_{x \rightarrow \ell(t) - 0} \sqrt{2\pi(\ell(t) - x)} \sigma^- = \frac{\sqrt{2} P_0 (c_R + \dot{\ell}) \sqrt{a} K(\dot{\ell})}{c_R \sqrt{\pi(a + \dot{\ell})}} \sqrt{\left( \frac{t}{\ell + \xi} - \frac{1}{V} \right) (\ell + \xi) H \left( \frac{t}{\ell + \xi} - \frac{1}{V} \right)}. \quad (25)$$

В случае, когда взрыв производится при  $x = \xi$  вне опоры в момент  $t = 0$  и край опоры движется со скоростью  $\dot{\ell}(t)$ , граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \sigma^+(t, x) = -P_1 H(Vt - x + \xi) H(Vt + x - \xi) & (x > \ell(t)); \\ v &= v^-(t, x) = 0 & (x < \ell(t)); \quad \sigma_{xy} = 0 & (|x| < \infty). \end{aligned} \quad (26)$$

Решение этой задачи получено как и в предыдущих задачах.

**В §3.3** решается обобщение задачи, которая была рассмотрена в §2.2, на случай, когда край трещины движется по переменному закону  $\ell(t)$ . Решение задачи ищется методами, использованными в §3.1, §3.2. Показано, что для неподвижной трещины, т.е. когда  $\ell(t) \equiv 0$ , полученное решение совпадает с решением, которое ранее было получено в §2.2.

**В §3.4** дается решение нестационарной плоской задачи о движении изотропной упругой среды, занимающей полуплоскость  $y > 0$ , когда точка раздела граничных условий движется по переменному закону  $\ell(t)$ . Граничные условия при  $y = 0$  имеют вид

$$\sigma_{yy} = \rho \left[ (a^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \quad (-\infty < x < \infty); \quad \sigma_{xy} = \sigma^+ = \rho b^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \quad (x > \ell(t));$$

$u = u_- = f(x, t)$ ,  $x < \ell(t)$ ,  $u, v = O(r^{1/2})$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ ,  $\xi < \ell(\tau)$  (условие на ребре),

где  $\rho$  - плотность среды, а функция  $f(x, t)$  предполагается ограниченной с конечным числом линий разрыва при  $x \leq \ell(t), t \geq 0$ .  $\ell(t)$  есть закон движения точки раз-

дела граничных условий. В частном случае, когда  $f(x, t) = -P_1 H(x - \xi) H(t - \tau)$ ,  $P_1 = const$ , получено явное решение задачи и показано, что в точке  $x = \ell(t)$  имеется известная корневая особенность  $1/\sqrt{\ell(t) - x}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие основные результаты:

- Показана применимость современных математических методов аналитических исследований нестационарных смешанных контактных задач теории упругости /интегральные преобразования Лапласа, Фурье, метод Винера-Хопфа, метод свертки, методы теории функций комплексного переменного/ к решению широкого круга краевых нестационарных задач для упругой изотропной среды при наличии полубесконечных трещин и штампов.
- Методами теории функций комплексного переменного доказано, что полученные функции типа Рэлея в комплексной плоскости имеют точно два корня, которые являются вещественными противоположными числами. Построены компоненты факторизации этих функций.
- Получены аналитические решения задач распространения давления вглубь изотропной упругой полуплоскости при наличии твердой опоры вдоль части границы полуплоскости. Рассмотрен как случай, когда фронт давления возникает на жесткой опоре, так и случай, когда взрыв происходит на границе полуплоскости вне опоры. Получено распределение напряжений вдоль опоры. Построенные для напряжений графики позволяют выявить влияние ударной волны на грунт при наличии опоры. Найдены решения как для неподвижной опоры, так и для опоры, край которой движется с переменной скоростью.
- Поставлены и решены плоская и пространственная задачи о трещине при наличии в ней потока жидкости с учетом термоупругих напряжений и осаднения, за счет термодиффузии, примесей, имеющихся в жидкости. Эти результаты обобщают ранее выполненные работы для геофизических трещин и разломов в породах, где изучается залечивание трещины за счет температурных эффектов без учета упругих напряжений. Плоская задача обобщена на случай, когда край трещины движется с переменной скоростью.
- Констатировано, что исследованные задачи, помимо теоретического значения, имеют приложение в таких областях науки, техники и природных процессов, как биология, сейсмология, сварка взрывом, технология охлаждения режущих инструментов, механика трещин в сооружениях из металла и композита, а также в земной коре.
- В плоской задаче о геофизической трещине проведен расчет времени закрытия трещины за счет осаднения примесей из флюида, текущего по трещине, и построен график зависимости времени залечивания трещины от координаты.
- В смешанных краевых задачах о штампах, где изучается влияние износа поверхности контакта на поведение напряжений у края штампа, показано,

что наличие износа приводит к устранению особенности у края штампа. Однако проведенные расчеты указывают на возможность превышения контактными напряжениями предела текучести, но уже не на краю, как было в классических постановках без износа, а в некоторой области под штампом.

- Построены эффективные решения широкого класса новых нестационарных смешанных граничных задач для упругой полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью. Изучен характер особенности вблизи точек смены граничных условий.

### Список научных работ по теме диссертации

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Исследование задачи о залечивании трещины в термоупругой среде // Докл. НАН РА. 2010, т.110, №2, с.151-162.
2. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Решения задач о залечивании движущихся трещин в термоупругой среде // Сб. трудов “Проблемы механики деформируемого твердого тела”, посв. 90-летию академика НАН РА С.А.Амбарцумяна, Институт механики НАН РА, 2012, стр. 193-202.
3. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Нестационарная задача залечивания трещины, движущейся с переменной скоростью // Сб. трудов межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посв. 100-летию академика Н.Х.Арутюняна, 2012г., Цахкадзор, Армения, т.2, стр. 24-28.
4. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Нестационарная задача о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью // Доклады НАН РА, т.112, №2, 2012, стр. 176-184.
5. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В. Решение задачи о горизонтальном штампе для упругой полуплоскости при движении с произвольной скоростью // Доклады НАН РА, т.112, №3, 2012, стр. 239-245.
6. Давтян А.В. Нестационарная плоская задача залечивания трещины в отсутствии трения // Сб. трудов межд. школы-конференции молодых ученых, посв. 70-летию НАН РА, 2013, Цахкадзор, Армения, стр. 147-150.
7. Давтян А.В. Проникание ударной волны в упругую изотропную полуплоскость, часть границы которой имеет движущуюся жесткую опору // Изв. НАН Армении Механика. 2014, №3, стр. 17-25.
8. Мартиросян А.Н., Динунц А.С., Давтян А.В., Мартиросян Г.А. Исследование плоской задачи о залечивании трещины, движущейся с переменной скоростью в термоупругой среде // Сб. трудов VIII межд. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис-Степанакерт, 2014, стр. 286-290.

## ԴԱՎԹՅԱՆ ԱՆՈՒՇ ՎՈԼՈՂՅԱՅԻ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽԱՌՈՐ ԵԶՐԱՅԻՆ  
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ ՇԱՐԺՎՈՂ  
ՃԱՔԵՐԻ ԵՎ ԴՐՈՇՄՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

### ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքը նվիրված է առաձգականության դինամիկական տեսության խառը եզրային պայմաններով ոչ ստացիոնար խնդիրների հետազոտմանը: Դիտարկված են խնդիրներ, որտեղ խառը եզրային պայմանների տարանջատման կետը ենթադրվում է անշարժ, ինչպես նաև խնդիրներ, որտեղ եզրային պայմանների փոփոխման կետը շարժվում է օրենքով, որը ժամանակից կախված կամայական ֆունկցիա է: Աշխատանքում զարգացված են առաձգականության դինամիկական տեսության ժամանակակից մեթոդները, այն է՝ ինտեգրալ ձևափոխությունների, Վիներ-Հոպֆի, փաթույթների մեթոդները: Վերջնական լուծումները ստացված են հակադարձ ինտեգրալ ձևափոխությունների միջոցով՝ լուծումները բերելով Սմիթոնով-Սոբոլևի փակ տեսքի: Նշված մեթոդներով տրված են հարվածային ալիքի՝ իզոտրոպ կիսահարթություն ներթափանցման ոչ ստացիոնար խնդիրների լուծումը, երբ կիսահարթության եզրի մի մասում առկա է կոշտ հիմք, խառնուրդային հեղուկ պարունակող գեոֆիզիկական ճաքի՝ հեղուկում առկա խառնուրդների նստվածքագոյացման շնորհիվ փակման հարթ և տարածական, ինչպես նաև կիսաանվերջ դրոշմների վերաբերյալ ոչ ստացիոնար խնդիրների լուծումը, ընդ որում՝ նաև կոնտակտային մակերևույթի մաշվածության գործոնի հաշվառումով:

Աշխատանքում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Ցույց է տրված առաձգականության դինամիկական տեսության անալիտիկ հետազոտության մեթոդների կիրառելիությունը կիսաանվերջ ճաքերի և դրոշմների առկայությամբ առաձգական իզոտրոպ կիսահարթության համար բարդ խառը եզրային պայմաններով ոչ ստացիոնար խնդիրների լայն դասի լուծման մեջ:

- Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեթոդներով ապացուցված է, որ խնդիրներում ստացված Ռեյլեի տիպի ֆունկցիաները ունեն ճիշտ երկու զրո: Կառուցված են այդ ֆունկցիաների ճշգրիտ ֆակտորիզացիաները:

- Ստացված են ճնշման հարվածային ալիքի՝ իզոտրոպ կիսահարթություն ներթափանցման խնդիրների անալիտիկ լուծումները, երբ կիսահարթության եզրի մի մասում առկա է կոշտ հիմք: Քննարկված է հարվածային ալիքի ճակատի ինչպես հիմքի վրա ձևավորման խնդիրը, այնպես էլ այն դեպքը, երբ պայթյունը տեղի է ունենում կիսահարթության եզրի՝ հիմքից դուրս կետում: Ստացված է լարումների բաշխումը հիմքի երկայնքով: Խնդիրների լուծումները

ստացված են ինչպես անշարժ հիմքի, այնպես էլ փոփոխական օրենքով շարժվող հիմքի համար:

- Ստացված է խառնուրդային հեղուկ պարունակող գեոֆիզիկական ճաքի վերաբերյալ հարթ և տարածական ընդհանուր դրվածքով խնդիրների լուծումը, երբ հաշվի են առնված ջերմաառաձգական լարումները և ճաքում պարունակվող հեղուկում առկա խառնուրդների՝ ջերմադիֆուզիայի հաշվին ճաքի պատերին նստվածքագոյացման ազդեցությունը ճաքի փակման վրա: Այդ արդյունքները ընդհանրացնում են գեոֆիզիկական ճաքերի համար մինչ այժմ կատարված աշխատանքները, որտեղ ուսումնասիրվում է ճաքերի փակումը ջերմային էֆեկտների հաշվին՝ առանց հաշվարկելու ջերմաառաձգական լարումները: Լուծված է հարթ խնդրի ընդհանրացումը այն դեպքի համար, երբ ճաքի եզրը տարածվում է ժամանակից կախված փոփոխական օրենքով:

- Հաստատագրված է, որ հետազոտված խնդիրները տեսական նշանակության հետ մեկտեղ ունեն կիրառական նշանակություն գիտության, տեխնիկայի և բնական գործընթացների այնպիսի ոլորտներում, ինչպիսիք են սեյսմոլոգիան, կենսաբանությունը, կտրող գործիքների սառեցման տեխնոլոգիական գործընթացները, պայթյունով զոդումը, ճաքերի տարածումը մետաղներում, կառուցվածքներում, կոմպոզիտներում, երկրակեղևի սեյսմոակտիվ գոտիներում:

- Խառնուրդային հեղուկ պարունակող գեոֆիզիկական ճաքի վերաբերյալ հարթ խնդրում պարամետրերի որոշակի արժեքների համար կատարված են թվային վերլուծություններ և ստացված է ճաքի փակման ժամանակի՝ կոորդինատից կախվածության գրաֆիկը:

- Ստացված է խառը եզրային պայմաններով ոչ ստացիոնար դինամիկական խնդիրների լուծումը կիսաանվերջ դրոշմների առկայությամբ, որտեղ հետազոտված է կոնտակտային մակերևույթի մաշվածության գործոնի ազդեցությունը դրոշմի եզրին լարումների վարքի վրա: Ցույց է տրված, որ մաշվածության հաշվառումը հանգեցնում է դրոշմի եզրին քառակուսային արմատանշանով տրվող հայտնի եզակիության վերացմանը: Կատարված են թվային հաշվումներ դրոշմի տակ լարումների բաշխվածության համար, որոնց միջոցով կարելի է առանձնացնել լարումների՝ առաձգական սահմաններից դուրս գալու տիրույթները:

- Տրված է առաձգականության դինամիկական տեսության բարդ խառը եզրային պայմաններով ոչ ստացիոնար խնդիրների լայն դասի անալիտիկ լուծումները, երբ եզրային պայմանների փոփոխման կետը շարժվում է փոփոխական օրենքով: Հետազոտված է լուծման վարքը եզրային պայմանների փոփոխման կետի շրջակայքում:

SOLUTION OF THE ELASTICITY THEORY NON-STATIONARY MIXED  
BOUNDARY PROBLEMS IN THE PRESENCE OF CRACKS AND STAMPS  
MOVING WITH A FINITE VELOCITY

SUMMARY

The thesis is devoted to the study of non-stationary mixed problems of the dynamic theory of elasticity. Except for of a case when the separation point of the boundary conditions is assumed to be a stationary one, we also consider problems when the boundary separating the domain of definition of mixed conditions is moving with a velocity described by time-dependent function in general. A considerable part of the work are analytical research which develops the modern methods of the dynamic theory of elasticity such as the Wiener-Hopf method, the convolution method, along with the Laplace and Fourier integral transforms. Final solutions are received by the inversion of integral transformations with reduction to a closed Smirnov-Sobolev form. Based on the above-mentioned methods solutions of non-stationary mixed boundary problem are obtained: for shock wave penetration into elastic isotropic semi-plane the boundary part of which has a rigid support; for problems of geophysical semi-infinite crack in the presence of increasing border crack through the allocation of impurities from the liquid stream flowing into the crack, as well as, for the problems with stamps, where the wear of the contact surfaces is also taken into account.

The main results of the thesis are as follows:

- It has been shown that the modern advanced mathematical analytical methods of the non-stationary mixed contact problems of the elasticity theory // Laplace integral transforms, Fourier methods, Wiener-Hopf method, methods of the theory of the functions of a complex variable// are applicable to the solution of a wide range of boundary mixed non-stationary problems in an elastic isotropic medium having semi-infinite cracks and stamps.
- By means of methods of the theory of functions of a complex variable it is proved that the Rayleigh type functions in the complex plane have two exactly roots, which are the real opposite numbers. The factorization of these functions is constructed.
- Analytical solutions are obtained for a pressure penetration into an isotropic elastic semi-plane in the presence of a solid support along the border of the semi-plane. Both cases are studied when a front pressure occurs on a rigid support, and when the explosion takes place at the semi-plane border outside of support. The pressure distribution along the supports is also received. The graphics of the pressure allows to reveal the impact of the shock wave on the soil in the presence of the support. Solutions are given both for the cases of a fixed support and moving support edge with a variable velocity.
- The formulation and solution of the plane and spatial problems of the geophysical crack in case of the flow of fluid are given, where the thermoelastic stress and the impact of the deposition of impurities in the fluid due to the thermo-diffusion to heal the crack are taken into account. These results summarize the recent research for geo-

physical cracks and faults in the outcrops where the healing of the cracks caused by temperature effects is studied without the consideration of elastic stresses. The plane problem is generalized applicable to the case when the edge of the crack moves at a variable speed. The results of this problem solution is matched with those received by the means of the Wiener-Hopf method in case of a steady crack and the coincidence of these approaches is shown.

- It is established that the results of investigated problems, in addition to the theoretical value, may have an application in many fields of science, technology and natural processes, such as biology, seismology, explosive welding, hammering the pile, processes of cooling and cutting tools, cracks in metals, structures, composites, as well as in the study of terrestrial rocks with seismic activity.

- In the plane problem of geophysical crack numerical calculations are carried out for vertical displacement of crack bound and a graphic is constructed for crack healing time dependence from a coordinate.

- In the analytical solution of the mixed boundary problems of stamps where the impact of the wear of contact surface on the performance of the stresses on the edge of a stamp is studied, it is shown that the wear eliminates the singularities on the edge of the stamp.

- The calculations of the stress distribution under the stamp are given in the form of graphs, on which one can notice the possibility of exceeding the yield stress, not on the edge, as in the classical formulations without wear, but in some areas under the stamp, i.e. for certain values of the boundary movements of stamps the stresses exceed the elastic limit for these materials resulting in destruction of structure.

- Some effective solutions of a new class of non-stationary mixed boundary problems for elastic semi-planes are constructed, when the point of the separation of boundary conditions moves with a variable speed. The character of the singularity the near points of change of boundary conditions is studied.