

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ ԳԱՅԱՆԵ ԱԼԲԵՐՏԻ

ՇԵՐՏԵՐԻ ԵՎ ՍԱԼԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՐԵՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ  
ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ

Ա.02.04-“Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա”  
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի  
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2011

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН АРМЕНИИ

ПЕТРОСЯН ГАЯНЭ АЛЬБЕРТОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
ПОЛОС И ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.02.04 – “Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН – 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ. Ա.Մ. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ. ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ս.Ն. Սարգսյան  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ռ.Ս. Գևորգյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական  
ճարտարագիտական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011թ. հունիսի 17-ին, ժամը 15<sup>00</sup>-ին Մեխանիկայի  
ինստիտուտում գործող 047 Մասնագիտական խորհրդում (հասցեն՝ 0019թ.  
Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24թ, avсах@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի  
գրադարանում:

Մեղմագիրն առաքված է 2011թ. մայիսի 16-ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական  
քարտուղար, տ.գ.դ., պրոֆ.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

---

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: д.ф.м.н. А.М. Хачатрян

Официальные оппоненты: д.ф.м.н., чл. корр. НАН РА С.О. Саркисян  
д.ф.м.н., проф. Р.С. Геворгян

Ведущая организация: Государственный  
инженерный университет Армении

Защита состоится 17-го июня 2011г. в 15<sup>00</sup> часов на заседании  
специализированного совета 047 в Институте механики  
по адресу: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, avсах@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА

Автореферат разослан 16-го мая 2011г.

Ученый секретарь специализированного совета  
д.т.н., проф.

Р.М. Киракосян

**Актуальность темы.** В современной технике часто используются балки, стержни, пластины и оболочки, обладающие общей анизотропией.

При исследовании напряженно-деформированных состояний балок, пластин и оболочек применяются много различных методов, таких как метод гипотез, метод разложения по параметру толщины, асимптотический метод, вариационный метод, метод асимптотического осреднения, численные методы.

На основе метода гипотез были построены классические теории балок, пластин и оболочек, базирующиеся на предположениях типа гипотез Бернулли-Кирхгофа-Лява. Основные уравнения тонкой упругой слоистой пластинки на основе этой гипотезы для пакета в целом получены С.Г. Лехницким. Теория анизотропных слоистых оболочек на основе той же гипотезы для пакета в целом построена С.А. Амбарцумяном.

В методе разложения по параметру толщины все искомые величины представляются в виде произведения двух функций, первая из которых есть функция от поперечной координаты, вторая – от координат срединной поверхности. В итоге получаются краевые задачи общего вида и все группы неизвестных приходится определять одновременно, решая для этого краевую задачу тем более высокого порядка, чем больше членов сохранено в разложении.

Краевые задачи при асимптотическом методе имеют итерационный характер, то есть процесс их решения заключается в решении краевых задач, различающихся между собой только смыслом известных функций, входящих в правые части уравнений и в граничные условия.

Сущность асимптотического метода заключается в представлении искомых величин в виде асимптотического ряда по степеням некоторого безразмерного физического или геометрического малого параметра и получении рекуррентных формул для вычисления неизвестных.

Асимптотический метод в теории изотропных пластин и оболочек разработан и развит А.Л. Гольденвейзером, К.О. Фридрихсом, А.Е. Грином. Асимптотическая теория изотропных оболочек построена А.Л. Гольденвейзером, а для анизотропных пластин и оболочек – Л.А. Агаловяном.

Р.С. Геворкяном асимптотическим методом решены смешанные краевые задачи теории упругости для двухслойных анизотропных пластин.

В работах А.М. Хачатряна асимптотический метод был применен для решения различных краевых задач для многослойных анизотропных полос, пластин и оболочек при полном и неполном контакте между слоями.

С. О. Саркисяном построена асимптотическая двумерная теория магнитоупругости проводящих тонких пластинок и оболочек.

Сравнительно мало работ, касающаяся исследований напряженно-деформированных состояний анизотропных тел на основе геометрически нелинейной теории упругости.

В диссертационной работе решены смешанные краевые задачи для анизотропных полос и пластин в рамках как линейной, так и на геометрически нелинейной теории упругости. Установлена асимптотика для компонентов

тензора напряжений и вектора перемещений и получены решения внутренней задачи. Построены решения типа пограничного слоя для анизотропных полос и пластин. Определены собственные числа, характеризующие скорости затухания решений типа пограничного слоя для ортотропных полос и пластин. Исследованы полученные решения и выяснено, в каких случаях необходимо учесть нелинейность задачи.

**Целью диссертационной работы является:**

- нахождение асимптотики и решение смешанных краевых задач для полос и пластин с общей анизотропией;
- построение решений типа пограничного слоя и вывода трансцендентных уравнений для определения собственных значений, характеризующие скорости затухания этих решений;
- получение точных решений внутренней задачи для полос и пластин на основе линейной теории упругости;
- нахождение асимптотики и решение смешанных краевых задач для полос и пластин с общей анизотропией на основе геометрически нелинейной теории упругости;
- проведение сравнительного анализа решений анизотропной полосы и пластины по линейной и по геометрически нелинейной теории упругости и выявление эффекта учета геометрически нелинейности исходных уравнений

**Научная новизна.** В диссертационной работе

- найдена асимптотика и решена смешанная краевая задача анизотропной полосы, когда на одной из продольных сторон заданы значение вектора перемещения в направлении оси ординат и касательное напряжение, а на другой - значение вектора перемещения в направлении оси абсцисс и нормальное напряжение.
- построено решение типа пограничного слоя для анизотропной полосы. Получены формулы для определения напряжений и перемещений пограничного слоя для ортотропной полосы. Выявлен характер затухания этих величин.
- найдена асимптотика и решена задача определения напряженно-деформированного состояния в пространственной задаче теории упругости для анизотропной пластинки, на продольных сторонах которой заданы смешанные условия.
- построено решение типа пограничного слоя анизотропной пластинки. Показано, что в общем случае анизотропии оно приводится к одному дифференциальному уравнению шестого порядка.
- для ортотропной пластинки выведены формулы искомых величин погранслоя в зависимости от упругих коэффициентов материала.

- решены задачи для анизотропных полос и пластинок на основе геометрически нелинейной теории упругости и приведены сравнения с решениями этих задач в линейной постановке.
- указаны случаи, когда учет нелинейных членов становится необходимым.

**Практическая ценность работы.** Полученные в работе результаты могут быть использованы в расчетах различных конструкций современной техники, машиностроения, строительства, фундаментостроения и других областей.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на

- семинарах кафедры математики АргУ (Степанакерт, 2007-2011гг.)
- VI международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” (сентябрь 21-26, 2008г. Горис-Степанакерт)
- семинаре “Механика тонкостенных систем” Института механики НАН Армении (Ереван, 2011г.)
- общем семинаре Института механики НАН Армении (Ереван, 2011г.)

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 5 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и литературы из 132 наименований. Общий объем работы составляет 109 страниц печатного текста, включая 25 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы, дано краткое описание работы по главам.

**В первой главе** рассматривается смешанная краевая задача для анизотропной полосы-прямоугольника. Получены решение внутренней задачи и решение типа пограничного слоя. Подробно рассмотрено решение пограничного слоя для ортотропной полосы. Получены трансцендентные уравнения, корни которых характеризуют скорости затухания найденного решения.

**В первом параграфе** сформулирована смешанная краевая задача для прямоугольника-полосы с общей анизотропией. Необходимо найти решение плоской задачи теории упругости в области  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, |y| \leq h, h \ll l\}$ , когда на продольных сторонах полосы заданы следующие смешанные краевые условия

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^-(x), v = \frac{l}{h}v^-(x), \text{ при } y = -h, \quad (1.1)$$

$$u = \frac{l}{h}u^+(x), \sigma_y = \frac{l}{h}\sigma_y^+(x), \text{ при } y = h$$

а на торцах  $x=0, l$  могут быть заданы различные комбинации торцевых условий.

**Во втором параграфе** найдено решение внутренней задачи. Для решения данной краевой задачи в уравнениях и соотношениях плоской задачи теории упругости перейдя к безразмерным переменным и перемещениям –  $\xi = x/l, \zeta = y/h, U = u/l, V = v/l$ , получена сингулярно возмущенная малым параметром  $\varepsilon = h/l$  система дифференциальных уравнений:

Решение этой системы складывается из двух типов решений – внутреннего и типа пограничного слоя.

Решение внутренней задачи ищем в виде

$$Q = \varepsilon^q \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q^{(s)}, \quad (1.2)$$

где  $Q$  любое из напряжений и безразмерных перемещений, а непротиворечивые значения  $q$  выбираются следующим образом:

$$q = -1 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, U, V, \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{xy}. \quad (1.3)$$

С учетом (1.2)-(1.3) получены рекуррентные формулы для определения искомых напряжений и перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(s)} &= \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{+(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_y^{+(s)} - \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1) + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \zeta), \\ \sigma_{xy}^{(s)} &= \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} (1 + \zeta) - \frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{+(s)}}{d\xi^2} (1 + \zeta) + \sigma_{xy}^{-(s)} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d\sigma_y^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi} (1 + \zeta) + \\ &+ \frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi^2} (1 + \zeta) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1), \\ \sigma_y^{(s)} &= \sigma_y^{+(s)} + \sigma_y^{*(s)}(\xi, \zeta) - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1), \\ U^{(s)} &= u^{+(s)} + u^{*(s)}(\xi, \zeta) - u^{*(s)}(\xi, 1), \quad V^{(s)} = v^{-(s)} + v^{*(s)}(\xi, \zeta) - v^{*(s)}(\xi, -1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Величины со звездочками известные функции и для каждого приближения они выражаются через предыдущие приближения и определяются следующими формулами

$$\begin{aligned} v^{*(s)} &= \int_0^{\zeta} (a_{12} \sigma_x^{(s-1)} + a_{22} \sigma_y^{(s-1)} + a_{26} \sigma_{xy}^{(s-2)}) d\zeta, \quad \sigma_{xy}^{*(s)} = - \int_0^{\zeta} \frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial \xi} d\zeta, \\ u^{*(s)} &= \int_0^{\zeta} \left( a_{16} \sigma_x^{(s-1)} + a_{26} \sigma_y^{(s-1)} + a_{66} \sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\sigma_y^{*(s)} = - \int_0^{\zeta} \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-2)}}{\partial \xi} d\zeta, \quad \sigma_x^{*(s)} = \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{*(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_y^{*(s)} - \frac{a_{16}}{a_{11}} \sigma_{xy}^{(s-1)}$$

$$Q^{(s-k)} \equiv 0 \text{ при } s < k.$$

**В третьем параграфе** рассмотрены иллюстрирующие примеры. Показано, что если внешние нагрузки, а также компоненты перемещений на продольных краях являются полиномами от  $x$ , то функции, входящие в правые части краевых условий (1.1), также будут полиномами от  $x$  (в безразмерных координатах - от  $\xi$ ) и соответствующий итерационный процесс оборвется на определенном приближении. В итоге, решение внутренней задачи также представляется в виде конечной суммы, которое является точным решением внутренней задачи. Например, при

$$\sigma_{xy}^- = \tau = const, v^- \equiv 0, \quad u^+ \equiv 0, \sigma_y^+ = -\left(p + q \frac{x}{l}\right), \quad (1.6)$$

итерационный процесс обрывается на втором приближении и получается точное решение. Напряжения определяются по формулам

$$\sigma_x = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{l}{h} \left(p + q \frac{x}{l}\right) - \frac{A_{16}}{a_{11}} q \left(\frac{y}{h} - 1\right) - \frac{a_{16}}{a_{11}} \tau + \frac{a_{12} a_{16}}{a_{11}^2} q \left(\frac{y}{h} + 1\right), \quad (1.7)$$

$$\sigma_{xy} = \tau - \frac{a_{12}}{a_{11}} q \left(\frac{y}{h} + 1\right), \quad \sigma_y = -\frac{l}{h} \left(p + q \frac{x}{l}\right).$$

**В четвертом параграфе** построено решение типа пограничного слоя для анизотропной полосы, в соответствии с краевой задачей, которая сформулирована в первом параграфе. Для построения пограничного слоя вблизи торца  $x = 0$ , в преобразованных уравнениях теории упругости введена новая переменная  $t = \xi/\varepsilon = x/h$ . Решение полученной системы должно удовлетворять следующим однородным условиям

$$\sigma_{xyp} = 0, \quad v_p = 0 \quad \text{при } y = -h \quad u_p = 0, \quad \sigma_{yp} = 0 \quad \text{при } y = h \quad (1.8)$$

Решение вновь полученных уравнений отыскивается в виде функций типа пограничного слоя

$$R_p = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{\chi_p + s} R_p^{(s)}(t, \zeta), \quad (1.9)$$

где  $R_p$  - любое из напряжений и перемещений пограничного слоя и представляются в виде

$$(\sigma_{xp}^{(s)}, \sigma_{xyp}^{(s)}, \sigma_{yp}^{(s)}) = (\sigma_1^{(s)}(\zeta), \sigma_{12}^{(s)}(\zeta), \sigma_2^{(s)}(\zeta)) \exp(-\lambda t), \quad (1.10)$$

$$(u_p^{(s)}, v_p^{(s)}) = (u_1^{(s)}(\zeta), u_2^{(s)}(\zeta)) \exp(-\lambda t).$$

$$\chi_p = \chi \quad \text{для напряжений}, \quad \chi_p = \chi + 1 \quad \text{для перемещений}, \quad (1.11)$$

$\lambda = const$  характеризует изменимость напряжений и перемещений пограничного слоя и  $\text{Re } \lambda > 0$ .

Все неизвестные величины выражаются через  $\sigma_2^{(s)}$ , а определение  $\sigma_2^{(s)}$  приводится к известному дифференциальному уравнению четвертого порядка.

$$a_{11} \frac{d^4 \sigma_2^{(s)}}{d\zeta^4} - 2\lambda a_{16} \frac{d^3 \sigma_2^{(s)}}{d\zeta^3} + (a_{66} + 2a_{12}) \lambda^2 \frac{d^2 \sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2} - 2\lambda^3 a_{26} \frac{d\sigma_2^{(s)}}{d\zeta} + a_{22} \lambda^4 \sigma_2^{(s)} = 0 \quad (1.12)$$

Условия (1.8) выражаются через напряжение  $\sigma_2^{(s)}$  и его производные:

$$\begin{aligned}
\sigma_2^{(s)}(\zeta = 1) = 0, \quad \frac{d\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1)}{d\zeta} = 0, \\
\frac{a_{11}}{\lambda^2} \frac{d^2\sigma_2^{(s)}(\zeta = 1)}{d\zeta^2} + a_{12}\sigma_2^{(s)}(\zeta = 1) + a_{16} \frac{d\sigma_2^{(s)}(\zeta = 1)}{d\zeta} = 0 \\
\frac{a_{11}}{\lambda^2} \frac{d^3\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1)}{d\zeta^3} + (a_{12} + a_{66}) \frac{d\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1)}{d\zeta} + \lambda a_{26}\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1) + \\
+ \frac{2a_{16}}{\lambda} \frac{d^2\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1)}{d\zeta^2} = 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Решение типа пограничного слоя приведено к краевой задаче (1.12)-(1.13), являющаяся задачей о собственных значениях (задачей типа Штурма-Лиувилля).

**В пятом параграфе** построено решение типа пограничного слоя для ортотропной полосы. Краевая задача (1.12)-(1.13) упрощается:

$$a_{11} \frac{d^4\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^4} + (a_{66} + 2a_{12})\lambda^2 \frac{d^2\sigma_2^{(s)}}{d\zeta^2} + a_{22}\lambda^4\sigma_2^{(s)} = 0, \tag{1.14}$$

$$\sigma_2^{(s)}(\zeta = 1) = 0, \quad \frac{a_{11}}{\lambda^2} \frac{d^3\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1)}{d\zeta^3} + (a_{12} + a_{66}) \frac{d\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1)}{d\zeta} = 0, \tag{1.15}$$

$$\frac{d\sigma_2^{(s)}(\zeta = -1)}{d\zeta} = 0, \quad \frac{a_{11}}{\lambda^2} \frac{d^2\sigma_2^{(s)}(\zeta = 1)}{d\zeta^2} + a_{12}\sigma_2^{(s)}(\zeta = 1) = 0.$$

Уравнение (1.14), в зависимости от коэффициентов  $a_{ij}$ , может иметь следующие решения:

$$\text{а) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) = (A^{(s)} + B^{(s)}\zeta)\cos\lambda\beta\zeta + (C^{(s)} + D^{(s)}\zeta)\sin\lambda\beta\zeta \tag{1.16}$$

$$\text{б) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) = A^{(s)}\cos\lambda\beta_1\zeta + B^{(s)}\sin\lambda\beta_1\zeta + \\ + C^{(s)}\cos\lambda\beta_2\zeta + D^{(s)}\sin\lambda\beta_2\zeta \tag{1.17}$$

$$\text{в) } \sigma_2^{(s)}(\zeta) = A^{(s)}ch\alpha\lambda\zeta\cos\lambda\beta\zeta + B^{(s)}sh\alpha\lambda\zeta\sin\lambda\beta\zeta + \\ + C^{(s)}ch\alpha\lambda\zeta\sin\lambda\beta\zeta + D^{(s)}sh\alpha\lambda\zeta\cos\lambda\beta\zeta. \tag{1.18}$$

Для каждого из этих случаев, получены решения типа пограничного слоя, а также уравнения, для определения собственных значений  $\lambda$ .

Интеграл задачи представится в виде

$$J = Q + R_p^{[1]} + R_p^{[2]}, \tag{1.19}$$

где  $Q$  - решение внутренней задачи,  $R_p^{[1]}$  и  $R_p^{[2]}$  решения пограничных слоев, при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ , соответственно.

Представление (1.19) содержит достаточное число произвольных постоянных, с помощью которых удовлетворяются торцевые условия.

**Во второй главе** решена смешанная краевая задача для анизотропной пластинки.

**В первом параграфе** сформулирована смешанная краевая задача для анизотропной пластинки. Требуется найти решение трехмерных уравнений

теории упругости, когда на лицевых плоскостях заданы следующие смешанные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^-(x, y), \quad \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^-(x, y), \quad w = \frac{l}{h} w^-(x, y) \quad \text{при } z = -h, \\ u = \frac{l}{h} u^+(x, y), \quad v = \frac{l}{h} v^+(x, y), \quad \sigma_z = \frac{l}{h} \sigma_z^+(x, y) \quad \text{при } z = h. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Краевые условия на торцах  $x = 0, a$  и  $y = 0, b$  пока произвольные.

**Во втором параграфе** в трехмерных уравнениях теории упругости введена безразмерная координатная система  $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h$  и безразмерные перемещения  $U = u/l, V = v/l, W = w/l$ . После чего получена система, которая содержит геометрически малый параметр  $\varepsilon = h/l, l = \max(a, b)$ .

Эта система, как и в плоской задаче, сингулярно возмущенная и ее решение состоит из внутреннего (проникающего) и типа пограничного слоя (быстрозатухающего при удалении от границы в глубь пластинки) решений.

Для решения внутренней задачи все напряжения и перемещения представлены в виде суммы (1.3), где целое число  $q$  подбирается следующим образом

$$q = -1 \quad \text{для } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_z, U, V, W, \quad q = 0 \quad \text{для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}. \quad (2.2)$$

С учетом (1.3), (2.2) получены рекуррентные формулы и определены все искомые напряжения и перемещения внутренней задачи.

**В третьем параграфе** рассмотрены конкретные примеры. Нагрузки, действующие на пластинку, постоянны или действует только внешняя нормальная нагрузка, меняющаяся линейном образом. Для рассмотренных примеров получены точные решения внутренней задачи.

**В четвертом параграфе** построено решение типа погранслоя для анизотропной пластинки. Для этого в преобразованные трехмерные уравнения теории упругости вводится новая переменная  $t$  и решение ищется в виде функций типа погранслоя (1.9)

Из полученных уравнений все неизвестные величины выражаются через напряжения  $\sigma_{yzp}^{(s)}$  и  $\sigma_{zpz}^{(s)}$ , для определения которых получена система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_1 \sigma_{zp}^{(s)} + L_2 \sigma_{yzp}^{(s)} &= R_1^{(s-1)} \\ L_2 \sigma_{zp}^{(s)} + L_3 \sigma_{yzp}^{(s)} &= R_2^{(s-1)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= A_{11} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + 2A_{15} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (2A_{13} + A_{35}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{45} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{43} \lambda^4 \\ L_2 &= A_{16} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (A_{14} + A_{25}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (A_{23} + A_{34}) \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{44} \lambda^4, \\ L_3 &= A_{26} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{24} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{41} \lambda^4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

При  $s = 0$ , уравнения (2.3) становятся однородными и решение системы можно определить при помощи функции напряжений  $\Phi$

$$\sigma_{yz}^{(s)} = L_1 \Phi, \quad \sigma_{zp}^{(s)} = -L_2 \Phi. \quad (2.5)$$

Граничные условия, при  $y = \pm h$ , также выражаются через функцию напряжений. Задача приводится к следующей краевой задаче о собственных значениях:

$$(L_1 L_3 - L_2^2) \Phi = 0, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} A_{11} L_2 \Phi''(\zeta = 1) + \lambda(A_{15} L_2 - A_{16} L_1) \Phi'(\zeta = 1) + \lambda^2(A_{13} L_2 - A_{14} L_1) \Phi(\zeta = 1) &= 0 \\ A_{16} L_2 \Phi''(\zeta = 1) + \lambda(A_{25} L_2 - A_{26} L_1) \Phi'(\zeta = 1) + \lambda^2(A_{23} L_2 - A_{24} L_1) \Phi(\zeta = 1) &= 0 \\ L_2 \Phi(\zeta = 1) = 0, \quad L_2 \Phi'(\zeta = -1) = 0, \quad L_1 \Phi(\zeta = -1) = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} A_{11} L_2 \Phi'''(\zeta = -1) + \lambda(2A_{15} L_2 - A_{16} L_1) \Phi''(\zeta = -1) + \lambda^2((A_{13} + A_{51}) L_2 - \\ - (A_{14} + A_{25}) L_1) \Phi'(\zeta = -1) + \lambda^3(A_{33} L_2 - A_{34} L_1) \Phi(\zeta = -1) = 0. \end{aligned}$$

**В пятом параграфе** построено решение типа погранслоя для пластин из ортотропных материалов.

Для ортотропных материалов система уравнений (2.3) распадается на два уравнения, которым соответствуют решения типа плоского и антиплоского погранслоев.

При  $s = 0$  будем иметь:

а) плоский пограничный слой

$$A_{11} \frac{\partial^4 \sigma_{zp}^{(0)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{13} + A_{55}) \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{33} \lambda^4 \sigma_{zp}^{(0)} = 0, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = 1)}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = -1)}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial^3 \sigma_{zp}^{(0)}(\zeta = -1)}{\partial \zeta^3} = 0 \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) может иметь решения трех типов, в зависимости от значения  $D = (2A_{13} + A_{55})^2 - 4A_{11}A_{33}$ .

$$1) \quad D > 0, \quad q_{1,2}^2 = \frac{-(2A_{13} + A_{55}) \pm \sqrt{D}}{2A_{11}} < 0,$$

следовательно корни уравнения мнимые и отличны друг от друга:

$$r_{1,2} = \pm i q_1 \lambda, \quad r_{3,4} = \pm i q_2 \lambda.$$

$$2) \quad D = 0, \quad q_{1,2}^2 = -\frac{2A_{13} + A_{55}}{2A_{11}} < 0.$$

Корни характеристического уравнения мнимые и кратные:  $r = \pm i q_3 \lambda$ .

$$3) \quad D < 0, \quad q_{1,2}^2 = \frac{-(2A_{13} + A_{55}) \pm \sqrt{D}}{2A_{11}} < 0.$$

Корни уравнения комплексно-сопряженные:

$$r_{1,2} = (p \pm i q) \lambda, \quad r_{3,4} = (-p \pm i q) \lambda,$$

$$p^2 = (2\sqrt{A_{11}A_{33}} + A_{55} + 2A_{13}) / (4A_{11}), \quad q^2 = (2\sqrt{A_{11}A_{33}} - A_{55} - 2A_{13}) / (4A_{11}).$$

В каждом из этих случаев решена задача (2.8)-(2.9). Получены уравнения для определения собственных чисел. Они либо тригонометрические, либо трансцендентные:

$$1) \cos 2q_1 \lambda \cos 2q_2 \lambda = 0, \quad (2.10)$$

$$2) \cos 2q_3 \lambda = 0, \quad (2.11)$$

$$3) sh^2 z \sin^2 z + ch^2 kz \cos^2 kz = 0. \quad (2.12)$$

б) антиплоский пограничный слой

$$A_{66} \lambda^2 \frac{\partial^2 \sigma_{yzp}^{(0)}}{\partial \zeta^2} + A_{44} \lambda^4 \sigma_{yzp}^{(0)} = 0, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{yzp}^{(0)}(\zeta = -1) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yzp}^{(0)}(\zeta = 1)}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.14)$$

Собственные значения  $\lambda_n$  задачи (2.13)-(2.14), определяются из тригонометрического уравнения, как следствие условий (2.14)

$$\lambda_n = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} (2n + 1). \quad (2.15)$$

Величины антиплоского погранслоя определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{yzpa}^{(0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi}{4} (2n + 1)(1 + \zeta), \\ v_{pa}^{(0)} &= -a_{44} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} \cos \frac{\pi}{4} (2n + 1)(1 + \zeta) \\ \sigma_{xypa}^{(0)} &= \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{\pi}{4} (2n + 1)(1 + \zeta), \\ \sigma_{xypa}^{(0)} &= \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{\pi}{4} (2n + 1)(1 + \zeta), \\ \sigma_{zpa}^{(0)} &= \sigma_{xpa}^{(0)} = \sigma_{xzpa}^{(0)} = \sigma_{ypa}^{(0)} = u_{pa}^{(0)} = w_{pa}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

**В третьей главе** рассматриваются смешанные краевые задачи для анизотропных полос и пластин на основе геометрически нелинейной теории упругости.

**В первом параграфе** приведены исходные двумерные уравнения геометрически нелинейной теории упругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_y \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_x + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xy} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_y \right] &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \sigma_{xy},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \sigma_{xy},$$

и сформулирована краевая задача для анизотропной полосы.

Требуется найти решение системы (3.1) в области  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, |y| \leq h, h \ll l\}$ , которое удовлетворяет следующим смешанным краевым условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \left( \frac{h}{l} \right)^4 \sigma_{xy}^-(x), \quad v = \left( \frac{h}{l} \right)^3 v^-(x), \quad \text{при } y = -h, \\ u &= \left( \frac{h}{l} \right)^3 u^+(x), \quad \sigma_y = \left( \frac{h}{l} \right)^3 \sigma_y^+(x), \quad \text{при } y = h, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а на торцах  $x=0, l$  могут быть заданы различные комбинации торцевых условий.

**Во втором параграфе** для решения поставленной задачи, как и в линейных задачах, вводятся безразмерные переменные и безразмерные перемещения. Решение полученной системы вновь отыскивается в виде суммы (1.3), а асимптотика подбирается следующим образом

$$q = 3 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, U, V, \quad q = 4 \text{ для } \sigma_{xy}. \quad (3.3)$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости и получены от линейной, прибавляя четыре, то есть  $q^{\text{н.л.}} = q^{\text{л.}} + 4$ . Асимптотике (3.3) соответствует выбор представления (3.2).

В результате, получена система, из которого определяются все величины внутренней задачи:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_1^{*(s)} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_2^{*(s)} = 0,$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_x^{(s)} + a_{12} \sigma_y^{(s)} + a_{16} \sigma_{xy}^{(s-1)} - U_{\xi}^{(s-3)}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{12} \sigma_x^{(s-1)} + a_{22} \sigma_y^{(s-1)} + a_{26} \sigma_{xy}^{(s-2)} - V_{\zeta}^{(s-2)},$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} = a_{16} \sigma_x^{(s-1)} + a_{26} \sigma_y^{(s-1)} + a_{66} \sigma_{xy}^{(s-2)} - U_{\xi \zeta}^{(s-3)}$$

Решение задачи (3.1)-(3.2) имеет вид

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(s)} &= \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{+(s)}}{d\xi} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_y^{+(s)} - \frac{1}{a_{11}} \frac{du^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1) + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \zeta), \\
\sigma_{xy}^{(s)} &= \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d\sigma_y^{+(s)}}{d\xi} (1 + \zeta) - \frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{+(s)}}{d\xi^2} (1 + \zeta) + \sigma_{xy}^{-(s)} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{d\sigma_y^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi} (1 + \zeta) + \\
&\quad + \frac{1}{a_{11}} \frac{d^2 u^{*(s)}(\xi, 1)}{d\xi^2} (1 + \zeta) + \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, \zeta) - \sigma_{xy}^{*(s)}(\xi, -1), \\
\sigma_y^{(s)} &= \sigma_y^{+(s)} + \sigma_y^{*(s)}(\xi, \zeta) - \sigma_y^{*(s)}(\xi, 1), \\
U^{(s)} &= u^{+(s)} + u^{*(s)}(\xi, \zeta) - u^{*(s)}(\xi, 1), \\
V^{(s)} &= v^{-(s)} + v^{*(s)}(\xi, \zeta) - v^{*(s)}(\xi, -1).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Члены, обусловленные нелинейностью исходных уравнений входят в величины  $\sigma_1^{*(s)}$ ,  $\sigma_2^{*(s)}$ ,  $U_\xi^{(s)}$ ,  $V_\zeta^{(s)}$ ,  $U_{\xi\zeta}^{(s)}$ .

Величины со звездочками в каждом приближении  $s$  известны, если построены предыдущие приближения.

Решение (3.5) в нулевом приближении совпадает с решением той же задачи в линейной постановке.

**В третьем параграфе** рассмотрены частные решения двумерной нелинейной задачи.

В частности, для задачи (1.7), рассмотренной в третьем параграфе, гл. I, получены

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \left\{ \frac{l a_{12}}{h a_{11}} \left(p + q \frac{x}{l}\right) - \frac{A_{16}}{a_{11}} q \left(\frac{y}{h} - 1\right) + \frac{a_{12} a_{16}}{a_{11}^2} q \left(\frac{y}{h} + 1\right) - \right. \\
&\quad - \frac{a_{16}}{a_{11}} \tau + \left(\frac{h}{l}\right)^3 \left[ \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} (A_{16} + A_{66}) q \left(p + q \frac{x}{l}\right) \left(\frac{y}{h} - 1\right) - \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{a_{16}}{a_{11}} \left( A_{11} - \frac{a_{16} A_{16}}{a_{11}} - \frac{a_{12} A_{66}}{a_{11}} \right) q \left(p + q \frac{x}{l}\right) \left(\frac{y}{h} + 1\right) + \dots \right] \right\}, \\
\sigma_{xy} &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \left\{ \tau - \frac{a_{12}}{a_{11}} q \left(\frac{y}{h} + 1\right) + \left(\frac{h}{l}\right)^3 \left[ \left( A_{11} - \frac{a_{16} A_{16}}{a_{11}} - \frac{a_{12} A_{66}}{a_{11}} \right) q \left(p + q \frac{x}{l}\right) + \right. \right. \\
&\quad + \frac{h}{l} \left( \frac{a_{12} A_{66}}{a_{11}} - \frac{a_{16} A_{11}}{2a_{11}} + \frac{a_{16}^2 A_{16}}{2a_{11}^2} + \frac{a_{12} a_{16} A_{66}}{2a_{11}^2} \right) q^2 \left(\frac{y}{h} + 1\right) - \frac{2h}{l} A_{16} q \tau - \\
&\quad \left. \left. - \frac{h a_{12}^2}{l 2a_{11}^2} (A_{16} + A_{66}) q^2 \left(\frac{y}{h} - 3\right) + \dots \right] (y + h) \right\}, \\
\sigma_y &= \left(\frac{h}{l}\right)^4 \left\{ -\frac{l}{h} \left(p + q \frac{x}{l}\right) + \left(\frac{h}{l}\right)^3 \left[ -\frac{a_{12}}{a_{11}} (A_{16} + A_{66}) q \left(p + q \frac{x}{l}\right) + \dots \right] \right\} \left(\frac{y}{h} - 1\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Для этой задачи по линейной теории упругости, итерационный процесс обрывается после двух приближений, а поправки, вносимые к линейной теории,

с учетом нелинейности задачи, появляются начиная с третьего приближения. Они взяты в квадратные скобки и будут значительными только в том случае, когда имеют порядок  $O(\varepsilon^{-3})$ . Для реальных материалов это условие практически не выполняется, так как нарушается условие прочности.

**В четвертом параграфе** сформулирована смешанная краевая задача для анизотропной пластинки в нелинейной постановке. Приведены трехмерные уравнения геометрически нелинейной теории упругости, решение которых должно удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{xz}^-(x, y), \sigma_{yz} = \left(\frac{h}{l}\right)^4 \sigma_{yz}^-(x, y), w = \left(\frac{h}{l}\right)^3 w^-(x, y) \text{ при } z = -h \\ u = \left(\frac{h}{l}\right)^3 u^+(x, y), v = \left(\frac{h}{l}\right)^3 v^+(x, y), \sigma_z = \left(\frac{h}{l}\right)^3 \sigma_z^+(x, y) \text{ при } z = h \end{aligned} \quad (3.7)$$

После ввода безразмерной координатной системы, получена сингулярно возмущенная геометрически малым параметром  $\varepsilon$  система, решение которой ищется в виде асимптотического разложения (1.3), где значения для  $q$  подбираются следующим образом

$$q = 3 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_z, U, V, W, \quad q = 4 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}. \quad (3.8)$$

С помощью выбранной асимптотики (3.8), из преобразованных уравнений теории упругости, найдем все искомые величины задачи. В частности,

$$U^{(s)} = u^{+(s)} + u^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - u^{*(s)}(\xi, \eta, 1) \quad (U, V), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(s)} = B_{11} \frac{\partial u^{+(s)}}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial \eta} + B_{16} \left( \frac{\partial u^{+(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{+(s)}}{\partial \xi} \right) + a_3 \sigma_z^{+(s)} - \\ - B_{11} \frac{\partial u^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} - B_{12} \frac{\partial v^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} - B_{16} \left( \frac{\partial u^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{*(s)}(\xi, \eta, 1)}{\partial \xi} \right) + \\ + \sigma_x^{*(s)}(\xi, \eta, \zeta) - a_3 \sigma_z^{*(s)}(\xi, \eta, 1), \end{aligned}$$

Здесь также, члены, обусловленные нелинейностью задачи, входят в величины со звездочками. В нулевом приближении величины всех напряжений и перемещений совпадают с соответствующими величинами по линейной теории упругости.

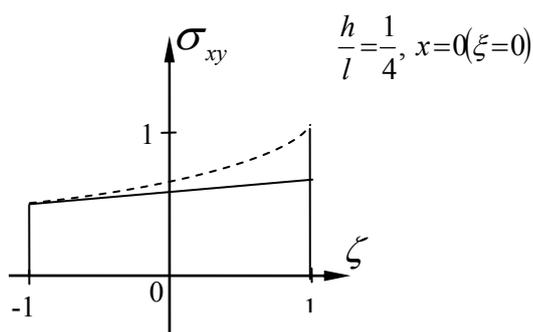
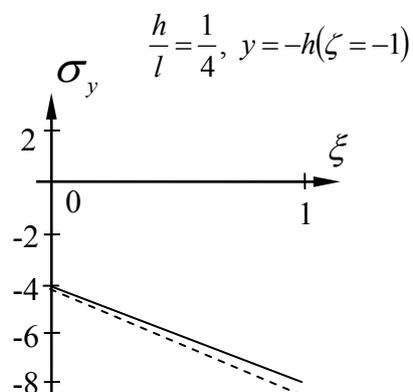
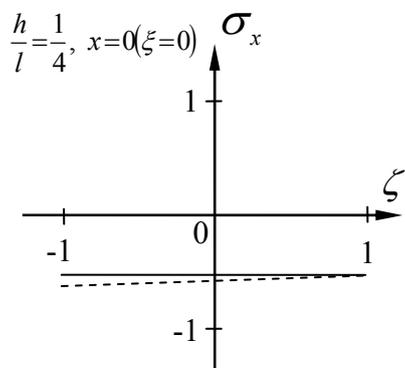
**В шестом параграфе**, решены примеры, которые были рассмотрены и в линейной постановке.

Результаты показывают, что учет нелинейности будет существенным при сильной анизотропии и большой изменчивости внешних нагрузок.

**В седьмом параграфе** с помощью численного анализа и построения графиков, на конкретном примере показано, насколько результаты, полученные по нелинейной теории упругости, отклоняются от результатов той же задачи по линейной теории упругости.

В примере (1.6)-(1.7) при различных значениях относительной толщины  $h/l$  были построены графики напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_{xy}$  в разных сечениях

прямоугольника, когда материал прямоугольника стеклопластик СТЭТ. Ниже приведены графики при  $h/l = 1/4$ .



На рисунках сплошными линиями построены графики линейной задачи, а пунктирными линиями - графики нелинейной задачи. В рассмотренном примере максимальные отклонения значений напряжений  $\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y$  по нелинейной теории от значений по линейной теории при  $h/l = 1/4$  составляют 1,98%, 46%, 1,8%, соответственно. При  $h/l = 1/5$  максимальное отклонение значения по нелинейной теории от значений по линейной теории для напряжения  $\sigma_{xy}$  составляет 23%, в то время, как отклонения для напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$  незначительны. Это объясняется тем, что поправки от учета нелинейности для напряжения  $\sigma_{xy}$  выявляются начиная с приближения  $s = 3$ , в то время, как для напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  они проявляются с приближения  $s = 4$ .

Численный анализ рассмотренных примеров показывает, что для относительно толстых прямоугольников  $\left(\frac{h}{l} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{5}\right)$  учет нелинейности имеет существенное значение. Для более тонких прямоугольников, с относительной толщиной менее  $1/5$ , отклонения значений по нелинейной теории от значений по линейной теории оказываются незначительными.

**В заключении** представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе. Асимптотическим методом решены смешанные краевые задачи для анизотропных полос и пластинок как в линейной, так и на основе геометрически нелинейной теории упругости. Получены рекуррентные формулы, которые позволяют определить напряженно-деформированное состояния анизотропных полос и пластинок. Изучены решения типа пограничного слоя. Эти решения более подробно рассмотрены в случае ортотропных материалов. Для некоторых конкретных примеров получены точные решения. Исследовано влияние присутствия нелинейных членов в уравнениях теории упругости на полученные решения для данных задач.

В диссертационной работе, в частности, получены следующие новые результаты:

- На основе уравнений теории упругости найдена асимптотика решения смешанной краевой задачи анизотропной полосы, когда на одной из продольных сторон заданы значение вектора перемещения в направлении оси ординат и касательное напряжение, а на другой - значение вектора перемещения в направлении оси абсцисс и нормальное напряжение.
- Построено решение типа пограничного слоя для анизотропной полосы. Вычислены значения напряжений и перемещений пограничного слоя для ортотропной полосы. Выявлен характер затухания этих величин.
- Найдена асимптотика и решена задача определения напряженно-деформированного состояния в пространственной задаче теории упругости для анизотропной пластинки, на продольных сторонах которой заданы смешанные условия.
- Построено решение типа пограничного слоя анизотропной пластинки. Показано, что в общем случае анизотропии оно приводится к одному дифференциальному уравнению шестого порядка.
- Для ортотропной пластинки выведены формулы искомых величин погранслоя в зависимости от упругих коэффициентов материала.
- Найдены асимптотики и построены решения внутренних задач для анизотропных полос и пластинок на основе геометрически нелинейной теории упругости. Приведен сравнительный анализ решений задач в линейной и геометрически нелинейной теории упругости.
- На основе проведенных исследований показано, что для недлинных прямоугольников и пластин неучет нелинейности может оказывать существенное влияние на решение задачи.

### **Список научных работ по теме диссертации**

1. Петросян Г.А. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной полосы-прямоугольника// Уч. записки АрГУ. 2007. N1(14). С.36-42.
2. Петросян Г.А. Об одной смешанной краевой задаче анизотропной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости. Труды VI межд. конф.(сентябрь 21-26. Горис-Степанакерт. 2008). Инст. Механики НАН РА. 2008. С.368-372.
3. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки// Изв. НАН РА. Механика. 2009. Т.62. N4. С.65-72.
4. Петросян Г.А. О решениях типа пограничного слоя одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки// Уч. записки АрГУ. 2009. N2(20). С.59-65.
5. Петросян Г.А., Хачарян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости// Изв. НАН РА. Механика. 2011. Т.64. N1. С. 50-57.

## Ամփոփում

Ժամանակակից տեխնիկայում, շինարարության մեջ հաճախ են կիրառվում անիզոտրոպ հեծաններ, սալեր և թաղանթներ:

Համեմատաբար քիչ են երկրաչափորեն ոչ գծային տեսությամբ անիզոտրոպ մարմինների լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակների ուսումնասիրությանը նվիրված աշխատանքները:

Ատենիտությունը նվիրված է անիզոտրոպ շերտերի և սալերի խառը եզրային խնդիրների լուծմանը ինչպես գծային, այնպես էլ երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա: Ասիմպտոտիկ մեթոդով ստացված են ներքին խնդրի և սահմանային շերտի տիպի լուծումները:

Ատենախտությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից:

Առաջին գլուխը նվիրված է անիզոտրոպ շերտի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրությանը երկրաչափորեն գծային տեսության հիման վրա: Կառուցված են ներքին խնդրի և սահմանային շերտի տիպի լուծումները: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ [1]:

Երկրորդ գլխում ուսումնասիրված է անիզոտրոպ սալի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը գծային տեսության հիման վրա: Կառուցված են ներքին խնդրի և սահմանային շերտի տիպի լուծումները [3,4]:

Երրորդ գլխում լուծված են անիզոտրոպ շերտի և սալի համար ներքին խնդիրը երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա: Հետազոտությունների միջոցով ցույց է տրված, թե երբ և ինչպիսի ազդեցություն կարող են ունենալ ոչ գծայնությամբ պայմանավորված անդամները խնդրի լուծման վրա [2,5]:

Աշխատանքում, մասնավորապես, ստացված են հետևյալ նոր արդյունքները.

- անիզոտրոպ շերտ-ուղղանկյան համար խառը եզրային խնդրում գտնված է ասիմպտոտիկան և լուծված է ներքին խնդիրը առաձգականության տեսության երկչափ հավասարումների հիման վրա, երբ շերտի երկայնական կողմերից մեկի վրա տրված են տեղափոխության վեկտորի կոմպոնենտը օրդինատների ուղղությամբ և շոշափող լարում, իսկ մյուս կողմի վրա՝ տեղափոխության վեկտորի կոմպոնենտը և նորմալ լարումը
- ցույց է տրված, որ երբ շերտի վրա ազդող արտաքին ուժերն ու տեղափոխության վեկտորի կոմպոնենտները հանդիսանում են բազմանդամներ, ստացվում է ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծում
- կառուցված է սահմանային շերտի տիպի լուծումը անիզոտրոպ շերտ-ուղղանկյան համար

- օրթոտրոպ շերտի համար որոշված են սահմանային շերտի տիպի լուծման բոլոր անհայտները և նրանց մարման արագությունները բնութագրող մեծությունները
- գտնված է ասիմպտոտիկան և լուծված է անիզոտրոպ սալի ներքին լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի որոշման խնդիրը առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդրում, երբ սալի դիմային հարթություններից մեկի վրա տրված են լարման թենզորի կոմպոնենտներն ու տեղափոխության վեկտորի արժեքը, իսկ մյուսի վրա՝ տեղափոխության վեկտորի մյուս կոմպոնենտներն ու նորմալ լարումը
- կոնկրետ օրինակների վրա ցույց է տրված, որ երբ սալի վրա ազդում են միայն բազմանդամի տեսք ունեցող ուժեր, ապա որոշակի մոտավորություններից հետո իտերացիոն պրոցեսն ընդհատվում է, և ստացվում է ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծում
- ուսումնասիրված է սալի սահմանային շերտի տիպի լուծումը: Ընդհանուր անիզոտրոպիայի դեպքում խնդիրը բերված է վեցերորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծման: Ստացված է սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների խնդիր:
- ցույց է տրված, որ օրթոտրոպ սալի դեպքում սահմանային շերտի տիպի լուծումը տրոհվում է հարթ և հակահարթ սահմանային շերտի տիպի լուծումների
- անիզոտրոպ շերտերի համար գտնված է ներքին խնդրի ասիմպտոտիկան և որոշված են լարման թենզորի և տեղափոխության վեկտորի կոմպոնենտները երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա խառը եզրային խնդրում
- գտնված է առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդրի ներքին լուծումը անիզոտրոպ սալի համար երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա
- շերտերի և սալերի համար երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ և ցույց է տրված, որ, ի տարբերություն գծային դրվածքով խնդիրների, իտերացիոն պրոցեսը չի ընդհատվում
- կատարված են թվային հաշվարկներ: Համեմատված են գծային տեսության և երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հիման վրա ստացված արդյունքները: Կատարված ուսումնասիրությունների հիման վրա եզրակացված է, որ ոչ երկար շերտերի համար անհրաժեշտ է հաշվի առնել խնդրի ոչ գծայնությամբ պայմանավորված անդամները:

## ABSTRACT

In modern technology often used beams, plates and shells with general anisotropy. Relatively few works concerning the research of stress-strain states of anisotropic bodies on the basis of geometrically nonlinear elasticity.

This dissertation is decided to the mixed boundary value problems for anisotropic strips and plates both in linear and on the basis of geometrically nonlinear elasticity theory.

The dissertation consists of three chapters, introduction, conclusion and references.

Chapter I is devoted to the study of stress-strain state of the anisotropic strip. The asymptotic solution of the internal problem of the anisotropic strip is determined. For the components of the stress tensor and displacement vector the asymptotics are determined and the solutions of internal problem is obtained. The solutions of boundary layer are constructed. The eigenvalues characterizing the rate of damping of solutions of boundary layer for orthotropic strips are determined. Some cases examples are considered [1].

In the chapter II of the asymptotic solution of the internal problem is determined and the solutions of boundary layer are constructed for anisotropic plates. The eigenvalues characterizing the rate of damping of solutions of boundary layer for orthotropic plates are determined. Special caseses are considered [3,4].

The chapter III is devoted to the study of stress-strain state of the anisotropic strip and plate on the basis of geometrically nonlinear elasticity theory. The asymptotic solution of the internal problem of the anisotropic strip and plate is determined on the basis of geometrically nonlinear elasticity theory. The obtained exact solutions are investigated and as well the cases, underwhich the non-linearity of problem should be taking into account, are pointed [2,5].

In this dissertation, in particular, the following new results are received:

- Based on elasticity theory asymptotic solutions of mixed boundary value problem of anisotropic strip when at one of the longitudinal sides is set values of vector of displacement in the direction of the vertical axis and the concerning stress, on the other - the value of the displacement vector in the direction of axis of abscisses and normal stress is determined.
- Examples for the strips considered and it is shown that if the external stresses and components of the vector of displacement are polynomials, then the exact solution is obtained for internal problem.
- Solution of boundary layer for anisotropic strip is constructed. The values of stresses and displacements of the boundary layer for an orthotropic strip are determined. The character of the damping of these quantities is received.
- The asymptotics are finded and the problem of determining the stress-strain state in the three-dementional problem of elasticity theory for anisotropic plates is solved, when on the longitudinal sides are given mixed conditions.

- Examples for the plates are considered and it is shown that if the external stresses and components of the vector of displacement are polynomials, then the exact solution is obtained for internal problem.
- The solution of boundary layer of anisotropic plate is constructed. It is shown that, in general cases of anisotropy is reduced to one sixth-order differential equation.
- For the orthotropic plate the problem of solution of boundary layer is divided into the plane and out-of-plane problems. Formulas required quantities of the boundary layer are derived, depending on the elastic coefficients of the material.
- The solution of internal problem for an anisotropic strip on the basis of geometrically nonlinear elasticity theory is determined.
- The values of stresses and displacements in internal problem for an anisotropic plate on the basis of geometrically nonlinear elasticity theory is obtained.
- There are indicated the cases when taking into account of the nonlinear terms becomes necessary.