

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ ԳԱՅԱՆԵ ՍՈՎՐԱՏԻ

ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԵՐԻ
ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ և
ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա 02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2014

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

АЙРАПЕТЯН ГАЯНЕ СОКРАТОВНА

ПОСТРОЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЕЙ
МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН И
РЕШЕНИЕ СООТВЕТСТВУЮЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.02.04-
“Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН 2014


Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում:
Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս. Ն. Մարգարյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ.,
պրոֆեսոր Գ.Ե.Բաղդասարյան
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ռ.Ս. Գևորգյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Ճարտարապետության և շինարարության
Հայաստանի ազգային համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2015թ. Հունվարի 23-ին՝ ժամը 14⁰⁰-ին
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի- 047
մասնագիտական խորհրդի նիստում
(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2) avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 15 դեկտեմբերի 2014թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.  Ա.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА
Научный руководитель: член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., профессор С.О.Саркисян

Официальные оппоненты: акад. НАН РА, д.ф.м.н., профессор Г.Е.Багдасарян
д.ф.м.н., профессор Р.С.Геворкян

Ведущая организация: Национальный университет Армении архитектуры и
строительства

Защита состоится 23-ого января 2015г. в 14⁰⁰ часов на заседании
Специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА
(адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2) avsah@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 15 декабря 2014г.

Ученый секретарь
специализированного совета, д.ф.м.н.  А.В. Саакян

Այս մոդելների հիման վրա ուսումնասիրվում են միկրոպոլյար օրթոտրոպ և
իզոտրոպ ուղղանկյուն և կլոր սալերի ծոման դեֆորմացիայի կոնկրետ խնդիրներ:
Կառուցվում են այդ խնդիրների ճշգրիտ լուծումները, որոնք հասցվում են մինչև
վերջնական թվային արդյունքների ստացումը: Թվային անալիզի հիման վրա
հաստատվում են միկրոպոլյար նյութի էֆեկտիվ յուրահասկությունները
ամրության և կոշտության իմաստով նաև այս մոդելների տեսանկյունուց:

Abstract

In the dissertation work S.H. Sargsyan's approach is developed and general mathematical models of bending deformation and stress strain state of micropolar elastic orthotropic thin plates are constructed. Energy balance equations are obtained and all energetic theorems are proved. General variation functionals of bending deformation and stress strain state of micropolar elastic orthotropic thin plates are constructed. On the basis of these hypotheses variation functionals of Lagrange and Castilianos' types are obtained as private cases for bending deformation and stress strain state of micropolar elastic orthotropic thin plates. It is mentioned that minimum principle takes place for these functionals, which justifies the use of Ritz and Bubnov-Galerkins' variation methods during the solution of boundary-value problems of bending deformation and stress strain state of micropolar elastic orthotropic thin plates and also the application of finite element method in these boundary-value problems. In the work three-dimensional boundary-value problem of micropolar theory of elasticity in thin domain of the plate is studied with the help of the asymptotic method. The internal asymptotic problem and boundary layer are constructed, qualitative properties of the solution of the boundary layer are revealed. Problem of jointing of the internal problem and boundary layer is studied. As a result, on the basis of the internal asymptotic problem, two-dimensional asymptotic models of bending deformation and stress strain state of micropolar elastic orthotropic thin plates are constructed. Main equations and boundary conditions of these asymptotic models are constructed. These asymptotic models are compared with applied models of micropolar orthotropic elastic thin plates, hypotheses, which are put in the base of the construction of applied models, are justified.

Concrete problems of deformations of rectangular and circular plates are studied on the basis of the applied models of bending deformation of micropolar elastic orthotropic and isotropic thin plates. Solutions of these problems are constructed and final numerical results are obtained. On the basis of numerical analysis advantages of the micropolar material are approved compared with the classical material (from the point of view of stiffness and rigidity).

Hypotheses method is developed and mathematical models with constrained rotation and "small shear rigidity" are constructed in the case of the bending of the plate. Concrete problems of bending deformation of rectangular and circular plates of orthotropic and isotropic material are studied on the basis of these models. Solutions of these problems are constructed and final numerical results are obtained. On the basis of numerical analysis effective peculiarities of the micropolar material are approved from the point of view of stiffness and rigidity.

Ամփոփում

Աշխատանքում զարգացվում է Ս.Հ.Սարգսյանի վարկածների մեթոդը, որի հիման վրա կառուցվել է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ բարակ սալերի ծռման դեֆորմացիայի և հարթ լարվածային վիճակի մաթեմատիկական ընդհանուր մոդելները: Այդ մոդելների համար ստացված են էներգետիկ հաշվեկշռի հավասարումները, ապացուցվում են էներգետիկ բոլոր թեորեմները: Կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ բարակ սալերի ծռման դեֆորմացիայի և հարթ լարվածային վիճակի վարիացիոն ընդհանուր ֆունկցիոնալները: Այդ ֆունկցիոնալների հիման վրա, որպես մասնավոր դեպքեր ստացվում են Լագրանժի տիպի և Կաստիլյանոյի տիպի վարիացիոն ֆունկցիոնալները միկրոպոլյար օրթոտրոպ բարակ սալերի ծռման և հարթ լարվածային վիճակի դեֆորմացիայի համար, նշվում են, որ այդ ֆունկցիոնալների համար տեղի ունի մինիմումի սկզբունքը, որն իր հերթին հիմնավորում է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի կիրառական ծռման և հարթ լարվածային վիճակի մոդելների եզրային խնդիրների համար վարիացիոն Ռիտցի և Բարնոլ-Գալյորկինի մեթոդների կիրառումը, ինչպես նաև այդ խնդիրներում վերջավոր էլեմենտների մեթոդի կիրառումը:

Աշխատանքում օրթոտրոպ նյութի համար առաձգականության միկրոպոլյար տեսության եռաչափ եզրային խնդիրը սալի բարակ տիրույթում ուսումնասիրվում է ասիմպտոտիկ մեթոդի օգնությամբ: Կառուցվում են ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծությունը և սահմանային շերտը, հաստատվում՝ սահմանային շերտի տիպի խնդրի լուծման որակական հատկությունները: Ուսումնասիրվում է ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծության և սահմանային շերտի համակցման խնդիրը: Արդյունքում ներքին ասիմպտոտիկ վերլուծության հենքի վրա կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ բարակ սալի ծռման դեֆորմացիայի և հարթ լարվածային վիճակի ասիմպտոտիկ երկչափ մոդելները: Այնուհետև ասիմպտոտիկ այս մոդելները համեմատվել են միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ բարակ սալերի կիրառական մոդելների հետ, հիմնավորվում են կիրառական մոդելների կառուցման հիմքում ընդունված վարկածները:

Միկրոպոլյար առաձգական օրթոտրոպ և իզոտրոպ բարակ սալերի ծռման դեֆորմացիայի կիրառական մոդելի հիման վրա ուսումնասիրվում են ուղղանկյուն և կլոր սալերի դեֆորմացիաներին վերաբերող կոնկրետ խնդիրներ: Կառուցվում են այդ խնդիրների ճշգրիտ լուծումները, որոնք հասցվում են մինչև վերջնական թվային արժեքների ստացումը: Թվային անալիզի հիման վրա հաստատվում են միկրոպոլյար նյութի էֆեկտիվ յուրահատկությունները դասական նյութի նկատմամբ ամրության և կոշտության տեսանկյունից:

Զարգացվում է վարկածների մեթոդը և դրա հիման վրա կառուցվում են կաշկանդված պտույտներով և «փոքր սահքային կոշտություն» տեսություններով սալերի ծռման դեֆորմացիայի մաթեմատիկական մոդելները:

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Классическая теория упругости довольно хорошо объясняет поведение реальных твердых тел, находящихся под различной нагрузкой, во всех случаях, когда “зернистость” или дискретная структура строения рассматриваемых тел не является для этих явлений характерной. Из всего многообразия теорий, учитывающих микроструктуру материалов при механических расчетах наиболее развитой в общем математическом плане является микрополярная теория упругости (теория Коссера, несимметричная теория упругости, моментная теория упругости). Носителями моментных напряжений потенциально обладают многие реальные материалы с микроструктурными неоднородностями: гранулированные и сыпучие среды, поликристаллические материалы, композиты, геоматериалы, бетон, а в последнее время – также и наноматериалы. Микрополярная теория упругости хорошо зарекомендовала себя при решении задач статики при наличии концентраторов напряжений в окрестности вершин трещин и отверстий, в задачах динамики при распространении высокочастотных волн в конструкционных материалах, кристаллических полимерах и т.д. Начиная с работы (1909г.) братьев Э. и Ф. Коссера и по настоящее время, механика микрополярной среды получила большое развитие благодаря работам: А.А.Адамова, Э.Л.Аэро, П.А.Белова, М.В. Белубекяна, В.В. Болотина, Г.Л.Бровко, А.Н.Бульгина, М.П.Варыгиной, Ю.М.Григорьева, А.Н. Гузя, В.А.Еремеева, В.И.Ерофеева, А.А. Ильющина, П.А. Жилина, Л.М.Зубова, М.М. Кантора, В.В. Корепанова, М.Р. Короткиной, Е.В.Кувшинского, М.А.Кулеша, И.А.Кунина, В.Д. Купрадзе, В.А. Ломакина, С.А.Лурье, В.П.Матвееенко, Н.Ф.Морозова, Ю.Н.Немиша, В.Н.Николаевского, В.А.Пальмова, В.А.Панина, Б.Е. Победра, Г.Н. Савина, В.М. Садовского, О.В. Садовской, Л.И.Седова, И.Ю.Смолина, А.Г. Угодчикова, И.Н.Шардакова, J.Diszlewicz, А.С. Eringen, G.Grioli, S.Forest, W.T. Koiter, R.S.Lakes, R.D.Mindlin, P.Neff, W.Nowacki, M. Ostoja-Starzewski, E.Reissner, A.F.Tiersten, R.A.Toupin, C.Truedell и др.

Исторически большое развитие получила так называемая псевдоконтинуум Коссера или теория упругости со стесненным вращением. По общей микрополярной теории упругости (с независимыми полями перемещений и вращений) в последнее время появились многочисленные обобщения с учетом анизотропии и неоднородности: работы А.В. Diskin and E. Pasternak, D. Iesen и др.; связанных полей: работы W. Nowacki и др. по микрополярной термоупругости; работы Е.Ф. Грековой и П. А. Жилина, Д.Д. Асаняна и Г. Е. Багдасаряна, А.С. Eringn, S. Kaliski and W. Nowacki, Е.А. Maugin и др. по микрополярной электро-магнитоупругости.

Следует отметить работы Беринского, Е.А.Ивановой, А.М. Кривцова и Н.Ф. Морозова, Л. И.Маневича, А.И. Потапова, И. С. Павлова, А. S. I.Suiker, A. V.Metrikina and de Borst R. и др., в которых развит метод построения моментной модели континуального образца с учетом его атомной структуры. Эти исследования весьма перспективны с точки зрения определения макроскопических микрополярных постоянных с помощью параметров атомно - молекулярных масштабных уровней.

Работы чисто экспериментального характера для определения физических постоянных микрополярного материала и, в частности, о создании материалов с

микрополярными свойствами посвящены работы R.S.Lakes, R.D. Gauthier and Jahsmann W.E. В.В. Корепанова, М.А.Кулеша, В.П.Матвеевко и И.Н.Шардакова и др.

Отдельная область, как это было в прикладной теории классической упругости, в микрополярной теории упругости занимает теория тонких балок, пластин и оболочек типа Коссера (или теории микрополярных балок, пластин и оболочек) построенные на основе метода гипотез. Развитие этой области прикладной микрополярной теории упругости связано с работами: С.А.Амбарцумяна, М.В.Белубекяна, Д.В.Бабича, Г.Л.Бровко, Л.П.Винокурова и Н.И. Дервянко, Н.С. Ганиева, Г. А. Геворгияна, В.В. Елисеева, В.А. Еремеева и Л.М. Зубова, П.А. Жилина, А.А. Илюхина, Л.А. Мовсисяна, М.У.Никабадзе, В.А. Пальмова, Л.И.Шкутина, Н. Altenbach and V. Eremeyev, J. Altenbach, Н. Altenbach and V.Eremeyev, M. Birsan, J. Chroscielowski, J. Makowski and W. Pietraszkiwicz, A.C. Eringen, A. E. Green and P.M. Naghdi, M. V. Rubin и др.

Весьма большую роль в развитие микрополярной теории пластин и оболочек и, в частности, в НАН Армении, играли и играют труды С.А. Амбарцумяна.

Асимптотические методы получают в последнее время все более широкое и разнообразное применение в математической физике. Особенно естественным является использование этого подхода в построении теорий пластин и оболочек, так как последние представляют собой тонкое деформируемое тело и малый параметр (относительная толщина) естественным образом входит в определение самого объекта исследований.

Задача о построении асимптотическим методом математических моделей пластин и оболочек в классической теории упругости поставлена в работах К.О. Friedrichs, А.Е. Green и основательным образом это направление было развито в работах И.И.Воровича и А.Л.Гольденвейзера, их учеников и коллег: Л.А.Агаловяна, Ю.Л.Каплунова, Л.Ю. Косовича, Е.В.Нольде, Н.Н.Рогачевой, С.О.Саркисяна, Ю.А.Устинова и др.

Асимптотическая теория тонких пластин и оболочек с неклассическими граничными условиями на основе классической теории упругости развиты в работах Л.А. Агаловяна и его учеников: Р.С. Геворгияна, М. Л. Агаловяна, Л. Г. Гулгазарян, Л.С. Саркисян, А. М. Хачатряна и др.

Ближе к асимптотическому методу, метод физического и геометрического малого параметра при построении анизотропных тонких пластин и оболочек развивался в работах В. С. Саркисяна и его учеников.

В микрополярной теории пластин асимптотический метод впервые был применен в работе В.А. Дудникова и С.А Назарова.

Оригинальный подход построения теорий микрополярных упругих изотропных тонких балок, пластин и оболочек развит в работах С.О.Саркисяна. Суть этого подхода заключается в следующем. Сначала, на основе асимптотического метода изучения сингулярно возмущенных с малым геометрическим параметром граничных задач микрополярной теории упругости в тонких областях, строятся асимптотическое решение, далее качественные стороны поведения в тонких областях этого решения принимаются как основополагающие гипотезы построения прикладных моделей микрополярных тонких балок, пластин и оболочек.

Как сам асимптотический метод, так и указанный подход построения статических и динамических математических моделей микрополярных тонких балок, пластин и оболочек развивался в работах С.О. Саркисяна и его учеников: А. Ж. Фарманян, А.А.

моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов VI Всероссийской школы-семинара. Ростов-на-Дону. 30 мая-2 июня. 2011г. С.10.

4. Sargsyan S. H., Hayrapetyan G. S., Margaryan L.M., Alvajyan Sh.I. Mathematical models of micropolar elastic thin bars and plates. //Proceedings of the Mesomechanics, 2011. 13th International Conference. Vicenza, Italy 6-8 July, 2011. P.60-63.
5. Sargsyan S.H., Hayrapetyan G. S., Construction of Mathematical Models of Micropolar Anisotropic (Orthotropic) Elastic Thin Plates. //Book of Abstracts. International Conference on Optimization and Analysis of Structures. OAS 2011. Tartu, Estonia. August 25-27, 2011 P.13.
6. Айрапетян Г.С. Построение погранслоя для микрополярных ортотропных тонких пластин со свободным вращением // Материалы республиканской научной конференции. Гюмрийский гос.педагогический институт им.М.Налбандяна. Гюмри, 2011. 28-29 ноября, 2011г. С.6-11.
7. Sargsyan S.H., Hayrapetyan G. S., Farmanyan A. J. Mathematical Models of Micropolar Anisotropic (Ortotropic) Elastic Single and Multilayered Thin Plates. // Book of Abstracts. International conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro Composite Structures. Politecnico di Torino, Italy, 18-20 June 2012. 2P.
8. Sargsyan S.H., Hayrapetyan G. S., Mathematical Model of Micropolar Orthotropic Elastic Thin Plates // Book of Abstracts. 8th European Solid Mechanics Conference. Graz, Austria; July 9-13, 2012. 2P.
9. Айрапетян Г.С., Саркисян С.О. Теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. Т.65. №3. 2012. С.22-33.
10. Hayrapetyan G.S., Aslanyan N.S., Sargsyan S.H. Mathematical Models of Elastic Deformation and Temperature Stresses of Micropolar Orthotropic Thin Plates //International Summer School-Conference, Advanced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia, July 1-6, 2013. P.57.
11. Айрапетян Г.С., Асланян Н.С., Варданян С.А., Саркисян С.О. Задачи прочности и термоупругости микрополярных ортотропных упругих тонких пластин // 54-я международная конференция «Актуальные проблемы прочности». Россия, Екатеринбург 11-15 ноября 2013г. Тезисы докладов. С.46-47.
12. Айрапетян Г.С., Саркисян С.О. Математические модели микрополярных ортотропных упругих тонких пластин и задачи прочности на их основе. //Материалы 55-й международной конференции «Актуальные проблемы прочности». Харьков, Украина. 9-13 июня 2014г. С.172.
13. Sargsyan S., Hayrapetyan G., Aslanyan N. Elasticity and thermoelasticity of micropolar orthotropic thin plates. // Book of Abstracts. European Mechanics of Materials Conference. EMMC14. Gothenburg August 27-29, 2014. 2P.
14. Айрапетян Г.С., Асланян Н.С., Саркисян С.О. Изгиб микрополярной упругой прямоугольной пластинки // Доклады НАН Армении. 2014. Т.114. №4. С.333-342.

ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений; на основе частных вариационных функционалов типа Лагранжа и Кастиляно обосновываются принципы минимума полной потенциальной энергии и дополнительной энергии системы, следовательно, считаются обоснованным применением вариационных методов Ритца, Бубнова-Галеркина и метода конечных элементов для решения граничных задач прикладных моделей изгиба и плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных упругих тонких пластин.

- построено асимптотическое решение трехмерных граничных задач микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой области пластинки, как в случае изгибной деформации, так и в случае плоского напряженного состояния; построены внутренний итерационный процесс и микрополярный пограничный слой, изучен вопрос сращивания внутренней и погранслойной задач; выведены отдельные граничные условия для внутренней-двумерной задачи (асимптотической модели) и погранслойной задачи; обосновываются гипотезы построения прикладных моделей,

-построены точные решения конкретных задач изгиба микрополярных прямоугольных и круглых пластин из ортотропного и изотропного материалов, получены численные результаты, приведены их анализы и установлены эффективные свойства микрополярных материалов с точки зрения их прочности и жесткости.

-на основе развиваемого метода гипотез построены прикладные модели изгиба микрополярных упругих ортотропных и изотропных тонких пластин со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”, при которых полностью учитываются влияния поперечных сдвигов. На основе этих моделей изучены конкретные задачи изгиба микрополярных ортотропных и изотропных прямоугольных и круглых пластин. На основе численного анализа установлены эффективные свойства также для таких микрополярных материалов с точки зрения прочности и жесткости.

Список научных работ по теме диссертации

1. Айрапетян Г.С. Построение двумерных уравнений статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких пластин асимптотическим методом.//Актуальные проблемы механики сплошной среды.Труды II международной конференции.2010.4-8 октября,Дилижан,Армения.Том 1.Ереван.2010.С.56-60.
2. Айрапетян Г.С. Построение асимптотического решения для граничных задач статики анизотропных микрополярных тонких пластин //Материалы республиканской научной конференции.Гюмрийский гос.педагогический институт им.М.Налбандяна.Гюмри, 2010. 13-14 декабря,2010г.С.413-417.
3. Айрапетян Г.С.,Саркисян С.О. Математические модели микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких пластин. //Математическое

Атояна, М. Н. Мутафян, Г. С. Никогосян, С. А. Варданян, Л. С. Саркисян, А.А. Саркисян, Л. М.Маргарян, Ш. И. Алваджян, К. А. Жамакочян, Н. С. Асланян и др.

В диссертационной работе развивается подход С.О.Саркисяна для построения математической модели изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений ,и на основе этой модели изучаются разные задачи изгиба прямоугольных и круглых пластин.

Целью диссертационной работы является:

-на основе метода гипотез построение математических моделей изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений,

-изучение энергетический явления, получение уравнение баланса энергии и доказательству энергетических теорем для модели микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, как для задачи изгибной деформации,так и для задачи плоского напряженного состояния,

-построение общего вариационного функционала изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений и в частности, вариационные функционалы Лагранжа и Кастиляно, обоснование применимости вариационных методов Ритца, Бубнова-Галеркина и метода конечных элементов при решении соответствующих граничных задач,

- построение асимптотического решения трехмерных граничных задач микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой области пластинки, как в случае изгибной деформации,так и в случае плоского напряженного состояния; построение внутреннего итерационного процесса, микрополярного пограничного слоя и изучение задачи сращивания внутренней и погранслойной задач; вывод отдельных граничных условий для внутренней-двумерной задачи и погранслойной задачи;построение асимптотических моделей микрополярных ортотропных тонких пластин для задачи изгиба и плоского напряженного состояния ;обоснование гипотез построения прикладных моделей,

-решение конкретных задач изгиба микрополярных прямоугольных и круглых пластин из ортотропного и изотропного материалов, получение численных результатов и изучение эффективных свойств микрополярных материалов с точки зрения их прочности и жесткости,

-развитие метода гипотез и построение математических моделей микрополярных упругих ортотропных и изотропных тонких пластин на основе трехмерной микрополярной теории упругости со стесненным вращением и по теории “с малой сдвиговой жесткостью”;решение конкретных задач изгиба прямоугольных и круглых пластин;получение численных результатов и установление эффективных свойств микрополярных материалов с точки зрения их прочности и жесткости.

Научная новизна. На основе гипотез С.О.Саркисяна ,которые вполне адекватны поведению асимптотического решения трехмерной граничной задачи в тонкой области пластинки, построены математические модели с вариационными принципами изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений с учетом поперечных сдвиговых деформаций.Построены асимптотические модели

изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных тонких пластин и обоснование прикладных моделей. Изучены конкретные задачи изгибной деформации микрополярных ортотропных и изотропных прямоугольных и круглых пластин и, при помощи численного анализа, установлены эффективные свойства микрополярных материалов с точки зрения их прочности и жесткости.

Практическая ценность работы. Построенные модели изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных и изотропных тонких пластин могут найти значительные приложения в механике гранулированных и сыпучих сред, кристаллических полимеров, композитов, а также в наномеханике.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- II Международной конференции: Актуальные проблемы механики сплошной среды 2010. 4-8 октября, Дилижан, Армения.
- Республиканской научной конференции профессорско-преподавательского состава Гюмрийского гос. педагогического института им. М. Налбандяна. 13-14 декабря, 2010 г. Гюмри, Армения.
- VI Всероссийской школы-семинара Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Ростов-на-Дону. 30 мая-2 июня. 2011 г.
- 13th International Conference Mesomechanics. Vicenza, Italy. 6-8 July, 2011.
- International Conference on Optimization and Analysis of Structures. Tartu, Estonia. August 25-27, 2011.
- Республиканской научной конференции профессорско-преподавательского состава Гюмрийского гос. педагогического института им. М. Налбандяна. Гюмри, Армения. 28-29 ноября, 2011 г.
- International conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro Composite Structures. Torino, Italy, 18-20 June 2012.
- 8th European Solid Mechanics Conference. Graz, Austria; July 9-13, 2012.
- International Summer School-Conference, Advanced Problems in Mechanics. St.-Petersburg, Russia, July 1-6, 2013.
- 54-й международной конференции «Актуальные проблемы прочности». Россия, Екатеринбург 11-15 ноября 2013 г.
- 55-й международной конференции «Актуальные проблемы прочности». Харьков, Украина. 9-13 июня 2014 г.
- 14th European Mechanics of Materials Conference. Gothenburg, Sweden, August 27-29, 2014
- Семинаре «Механика тонкостенных систем» института механики НАН Армении (Ереван, 4 ноября 2014)
- общем семинаре Института механики НАН Армении (Ереван, 20 ноября 2014)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 научные работы, список которых приводится в конце автореферата.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + (D_{88} - D_{77}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} - (C_{66} + \tilde{C}_{55} - 2C_{56}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - (C_{44} + C_{55} - 2C_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = q_3 + h \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \right) \quad (4.2.6)$$

а изотропного случая-

$$D \Delta \Delta w - 8h \alpha \Delta w = q_3 + h \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \right) \quad (4.2.7)$$

Численный счет на основе этих моделей показывает те же качественные результаты, что и имели для прямоугольной пластинки.

Далее рассматривается изгиб микрополярных ортотропных круглых тонких пластин «с малой сдвиговой жесткостью».

Приведем значение максимального прогиба изотропной пластинки ($w_{\max} = w(0)$)

для конкретного гипотетического материала: $\mu = 1093 \frac{\text{кз}}{\text{см}^2}$, $\nu = 0.3$; геометрические

размеры $a = b = 10 \text{ см}$, $h = 0.1 \text{ см}$ ($\delta = \frac{1}{100}$). Для приложенной нагрузки будем

считать, что она имеет интенсивность $q = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кз}}{\text{см}^2}$. Имеем $w_{\max}^{\text{кл}} = 0.03 \text{ см}$,

$$1) \text{ при } \alpha = 0.46 \frac{\text{кз}}{\text{см}^2}, \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0.0156 \text{ см}, \quad \frac{w_{\max}^{\text{мик}}}{w_{\max}^{\text{кл}}} = 0.5;$$

$$2) \text{ при } \alpha = 2.3 \frac{\text{кз}}{\text{см}^2} \cdot 90^\circ, \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0.0051 \text{ см}, \quad \frac{w_{\max}^{\text{мик}}}{w_{\max}^{\text{кл}}} = 0.2;$$

$$3) \text{ при } \alpha = 4.6 \frac{\text{кз}}{\text{см}^2}, \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0.0028 \text{ см}, \quad \frac{w_{\max}^{\text{мик}}}{w_{\max}^{\text{кл}}} = 0.1.$$

В заключении приведены основные результаты работы:

-на основе метода гипотез построены общие прикладные модели изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений. При изгибной деформации полностью учитываются влияния поперечных сдвигов,

-изучена энергетика явления, получены уравнения баланса энергии и доказаны энергетические теоремы для прикладной модели микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, как для задачи изгибной деформации, так и для задачи плоского напряженного состояния,

-построен общий вариационный функционал прикладных моделей изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих

Физические соотношения упругости для изотропного случая:

$$N_{i3} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{3i}, \quad N_{3i} = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{i3},$$

$$M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{ii} + \nu K_{jj}), \quad M_{ij} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}], \quad (4.2.3)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{3i} = \psi_i, \Gamma_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, K_{ij} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}, \quad (4.2.4)$$

Граничные условия для силовой части задачи будут

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*; M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*. \quad (4.2.5)$$

В этой модели полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

На основе этой модели рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки, когда граничные условия шарнирного опирания, а нагрузка нормальная, равномерно- распределенная. Решение этой задачи будем построить в виде двойных тригонометрических рядов.

Рассмотрим конкретный численный пример (изотропный случай, материал гипотетический).

Проследим изменение величин $\frac{\bar{w}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{w}_{\max}^{\text{кл}}}$, $\frac{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{кл}}}$ от значения $\frac{\alpha}{\mu}$ (см.таблица 6).

Таблица 6. Перемещения и напряжения в зависимости от значений $\frac{\alpha}{\mu}$		
$\nu = 0.3, \delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}, \frac{q}{\mu} = 26 \cdot 10^{-7}$		
$\frac{\alpha}{\mu}$	$\frac{\bar{w}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{w}_{\max}^{\text{кл}}}$	$\frac{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{кл}}}$
10^{-5}	0.982	0.982
$0.0625 \cdot 10^{-3}$	0.898	0.897
10^{-4}	0.846	0.845
$0.25 \cdot 10^{-3}$	0.687	0.686
$0.5 \cdot 10^{-3}$	0.523	0.523
$0.2 \cdot 10^{-2}$	0.216	0.215

Отметим, что когда в основу примем обобщенную на микрополярный случай кинематическую гипотезу Кирхгоффа, определяющее уравнение модели “ с малой сдвиговой жесткостью” можно привести к одному разрешающему уравнению относительно прогиба W .

Для ортотропного случая это уравнение имеет вид

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литератур из 221 наименований. Общий объем работы составляет 130 страниц печатного текста, включая 6 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемой темы, дается обзор литературы по диссертации, формулируется цель работы, в сжатом виде излагается содержание всех глав.

В первой главе в основу применяя гипотезы С.О.Саркисяна, построены математические модели изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций. Выведены уравнения баланса энергии и построены вариационные функционалы для математических моделей изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин. Основные уравнения этих моделей построены также в общих криволинейных ортогональных координатах в срединной плоскости пластинки и, в частности, эти уравнения приведены в полярной системе координат в срединной плоскости пластинки для изучения задач круглых пластин.

В §1.1 приведены основные уравнения и граничные условия трехмерной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для ортотропного материала в декартовой системе координат x_i (форма тела, эта пластинка с толщиной $2h$):

$$\text{Уравнения равновесия} \\ \partial_j \sigma_{ij} = 0, \partial_j \mu_{ij} - \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\text{Геометрические соотношения} \\ \gamma_{ij} = \partial_j U_i + \varepsilon_{ijk} \omega_k, \chi_{ij} = \partial_j \omega_i, \quad (1.1.2)$$

$$\text{Физические соотношения упругости} \\ \hat{\gamma} = A \hat{\sigma}, \hat{\chi} = B \hat{\mu}, \quad (1.1.3)$$

где σ_{ij} -обычные напряжения; μ_{ij} -моментные напряжения; u_i -перемещения; ω_i - свободные вращения; γ_{ij} -деформации; χ_{ij} -изгиб-кручения; $\hat{\gamma}$ -тензор деформации; $\hat{\sigma}$ - тензор обычных напряжений; $\hat{\chi}$ - тензор изгиба-кручения; $\hat{\mu}$ - тензор моментных напряжений; А и В-матрицы упругих податливостей (общее число физических постоянных-30); $i, j, k = 1, 2, 3$.

Для изотропного микрополярного материала физические соотношения упругости(1.1.3) принимают вид

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \gamma_{kk} + (\mu + \alpha) \gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \gamma_{ji}, \\ \mu_{ij} = \beta \delta_{ij} \chi_{kk} + (\gamma + \varepsilon) \chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \chi_{ji}, \quad (1.1.4)$$

в этом случае имеем шесть физических постоянных; здесь λ, μ -коэффициенты Ламе, а $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ -новые упругие постоянные микрополярного материала.

К основным уравнениям (1.1.1)-(1.1.3) микрополярной теории упругости необходимо присоединить следующие граничные условия:

$$\sigma_{3i} = \pm p_i^\pm, \quad \sigma_{33} = \pm p_{33}^\pm, \quad \mu_{3i} = \pm m_i^\pm, \quad \mu_{33} = \pm m_3^\pm \text{ на } x_3 = \pm h, \quad (1.1.5)$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки Σ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Отметим, что решение поставленной краевой задачи складывается из суммы решений симметричной и обратно-симметричной по x_3 задач (оси x_1 и x_2 расположены в срединной плоскости пластинки). В симметричной задаче $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{13}, \mu_{23}, U_1, U_2, \omega_3$ - четные по x_3 функции, а $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, U_3, \omega_1, \omega_2$ - нечетные (это случай плоского напряженного состояния); в обратно-симметричной задаче - наоборот (это случай изгиба).

На основе уравнений (1.1.1)-(1.1.3) и граничных условий (1.1.5) и на Σ , известным образом получено уравнение баланса энергии для трехмерной микрополярной теории упругости ортотропного материала:

$$\iint_S \int_{-h}^h W dx_1 dx_2 dx_3 = A, \quad (1.1.6)$$

где W представляет собой упругий потенциал, A - работа внешних приложенных на пластинку сил и моментов.

Выражение упругого потенциала в компонентах тензоров деформаций и изгиба-кручений представляет собой положительно определенная квадратичная форма, следовательно, для поставленной граничной задачи трехмерной микрополярной теории упругости имеет место теорема единственности. Имеют место и другие энергетические теоремы.

Законы деформирования микрополярного упругого ортотропного тела могут быть выражены в виде общего вариационного принципа. Рассмотрим в этой связи общий функционал для напряженного-деформированного состояния микрополярного ортотропного упругого тела:

$$\begin{aligned} I = & \iint_S \int_{-h}^h \left\langle W - \left[\sigma_{11} \left(\gamma_{11} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \left(\gamma_{22} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + \sigma_{33} \left(\gamma_{33} - \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) + \right. \right. \\ & + \sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) \right] + \sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \omega_3 \right) \right] + \sigma_{21} \left[\gamma_{21} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \omega_3 \right) \right] + \\ & \left. + \sigma_{13} \left[\gamma_{13} - \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \omega_2 \right) \right] + \sigma_{31} \left[\gamma_{31} - \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \omega_2 \right) \right] + \sigma_{23} \left[\gamma_{23} - \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \omega_1 \right) \right] \right\rangle dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

$$\text{при } q = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{\kappa^2}{\text{см}^2} \quad w_{\max}^{\text{мик}} = 0.0025 \text{ см}, \quad w_{\max}^{\text{кл}} = 0.0032 \text{ см}, \quad \frac{w_{\max}^{\text{мик}}}{w_{\max}^{\text{кл}}} = 0.78.$$

В §4.2 на основе метода гипотез построена модель микрополярных пластин “с малой сдвиговой жесткостью”.

Если в уравнениях равновесия (1.1.1) разности нормальных напряжений $\sigma_{23} - \sigma_{32}$, $\sigma_{31} - \sigma_{13}$, $\sigma_{12} - \sigma_{21}$ можно пренебрегать относительно величин $\frac{\mu_{km}}{a}$ ($k, m=1, 2, 3$), в

этом случае легко убедиться, что моментная часть отделяется от силовой части задачи. И, в частном случае, когда моментная часть задачи нулевая, силовая часть полностью становится независимой. Будем принимать те же кинематические и статические гипотезы, что и при построении модели микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений (§1.2, главы 1).

Прикладная модель силовой части задачи микрополярных тонких пластин “с малой сдвиговой жесткостью” выражается так:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} &= -\tilde{q}_3, \\ N_{31} - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \right) &= h\tilde{p}_1, \quad N_{32} - \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) = h\tilde{p}_2; \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Физические соотношения упругости для ортотропного случая:

$$\begin{aligned} N_{13} &= 2h \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13} - 2h \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31}, \\ N_{31} &= 2h \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31} - 2h \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13}, \\ M_{11} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left(K_{11} - \frac{a_{12}}{a_{22}} K_{22} \right), \\ M_{12} &= \frac{2h^3}{3} \left[\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} \right], \\ N_{23} &= 2h \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23} - 2h \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32}, \\ N_{32} &= 2h \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32} - 2h \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23}, \\ M_{22} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left(K_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} K_{11} \right), \\ M_{21} &= \frac{2h^3}{3} \left[\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$\text{где } D_{11}^* = d_{88} + D_{11}, D_{12}^* = \left(D_{12} + \frac{4h^3}{3} \frac{1}{a_{77} + a_{88} - 2a_{78}} \right) + \left(h \frac{\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{11}}{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}} - d_{78} \right),$$

$$D_{22}^* = d_{77} + D_{22}.$$

Для изотропного случая, это уравнение имеет вид:

$$D_* \Delta \Delta w = q_3, D_* = D + 2h(\gamma + \varepsilon), D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \quad (4.1.5)$$

Последнее уравнение ранее получены другими авторами (Геворгян Г.А.(1966), Винокуров Н.И.(1966), Ганиев Н.С.(1970), Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.(2010).

Рассмотрим изгиб прямоугольной изотропной или ортотропной пластинки по модели со стесненным вращением, когда края пластинки шарнирно оперты. Решение этой задачи решается в виде двойных тригонометрических рядов.

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим конкретный микрополярный материал (гипотетический), для которого упругие константы (изотропный случай) имеют следующие значения: $E = 2\mu(1+\nu) = 3060 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, $\gamma = 2.4\text{кГ}$, $\varepsilon = 2.4\text{кГ}$, $\nu = 0.4$.

Для геометрических размеров пластинки приняты следующие значения: $a = b = 10\text{см}$, $h = 0.1\text{см}$. Для приложенной нагрузки будем считать, что она равномерно распределенная и имеет интенсивность: $q = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$.

Приведем результаты вычислений по микрополярной модели со стесненным вращением (1.2.8), (4.1.3), при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации, и имеем:

$$w_{\max}^{\text{мик}} = 0.006\text{см},$$

$$w_{\max}^{\text{кл}} = 0.008\text{см}, \frac{w_{\max}^{\text{мик}}}{w_{\max}^{\text{кл}}} = 0.72, \sigma_{\max}^{\text{мик}} = 0.31 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \sigma_{\max}^{\text{кл}} = 0.43 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \frac{\sigma_{\max}^{\text{мик}}}{\sigma_{\max}^{\text{кл}}} = 0.72.$$

Приведенные численные результаты показывают, что и по модели со стесненным вращением, микрополярность материала дает пластинке довольно ощутимое жесткость, а также, прочность.

В случае круглой пластинки (контур которого жестко зашпемлен, а пластинка равномерно-распределенной нагрузкой) основная система уравнений стесненного вращения, можно привести к системе уравнений относительно w и ψ_1 , которая решается в бесселовых функциях.

Приведем результат численного счета, когда материал пластинки тот же самый, что и для прямоугольной пластинки.

Имеем

$$\begin{aligned} & + \sigma_{32} \left[\gamma_{32} - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \omega_1 \right) \right] + \mu_{11} \left(\chi_{11} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \right) + \mu_{22} \left(\chi_{22} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) + \mu_{33} \left(\chi_{33} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \right) + (1.1.7) \\ & + \mu_{12} \left(\chi_{12} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + \mu_{21} \left(\chi_{21} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) + \mu_{13} \left(\chi_{13} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} \right) + \mu_{23} \left(\chi_{23} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right) + \\ & + \mu_{23} \left(\chi_{23} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \right) + \mu_{31} \left(\chi_{31} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \right) + \mu_{32} \left(\chi_{32} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \right) \Bigg\} ds dx_3 - \\ & - \iint_{S^+ = S} \left[\left(p_1^+ U_1 + p_2^+ U_2 + p_3^+ U_3 \right) + \left(m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3 \right) \right] ds - \\ & - \iint_{S^- = S} \left[\left(p_1^- U_1 + p_2^- U_2 + p_3^- U_3 \right) + \left(m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3 \right) \right] ds - \\ & - \int_l \left\{ \int_{-h}^h \left[\left(p_1^0 U_1 + p_2^0 U_2 + p_3^0 U_3 \right) + \left(m_1^0 \omega_1 + m_2^0 \omega_2 + m_3^0 \omega_3 \right) \right] dx_3 \right\} dl, \end{aligned}$$

На основе функционала (1.1.7), формулируя $\delta I = 0$ вариационное уравнение, из него легко выводятся все основные уравнения (1.1.1)-(1.1.3) микрополярной теории упругости-т.е. уравнения равновесия, геометрические и физические соотношения, а также, граничные условия на плоскостях $x_3 = \pm h$ и на поверхности Σ .

На основе общего вариационного функционала (1.1.7), как частные случаи, можем получить вариационные функционалы типа Лагранжа и Кастильяно в трехмерной теории микрополярной упругости.

Второй параграф главы один посвящена построению математической модели микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, как для деформаций изгиба, так и для плоского напряженного состояния. Развивается метод гипотез С.О.Саркисяна на случай микрополярного ортотропного материала.

Рассмотрим задачу изгиба. Для задачи изгиба в соответствии с кинематической формулировкой вводятся предположения о линейном распределении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате x_3 следующего характера:

$$U_i = x_3 \psi_i(x_1, x_2) \quad U_3 = w(x_1, x_2) \quad (i=1,2) \quad (1.2.1)$$

$$\omega_i = \Omega_i(x_1, x_2) \quad \omega_3 = x_3 \iota(x_1, x_2) \quad (i=1,2) \quad (1.2.2)$$

Кинематическая гипотеза (1.2.1) относительно перемещений представляет собой известные гипотезы Тимошенко в классической теории упругих пластин. По этой гипотезе нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, свободно вращается под некоторым углом, не изменяя при этом своей длины. В этом повороте нормального элемента свою долю имеет свободное вращение (по формуле (1.2.2)).

Кинематическая гипотеза (1.2.1), (1.2.2) в целом в работах С.О.Саркисяна названа обобщенной гипотезой Тимошенко в микрополярной теории пластин.

К статическим относятся следующие гипотезы:

1) силовое напряжение σ_{33} в обобщенном законе Гука (1.1.3) для γ_{11}, γ_{22} можем пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22} , аналогично, в обобщенном законе Гука (1.1.3) для χ_{i3} ($i=1,2$), моментное напряжение μ_{3i} можем пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} ($i=1,2$).

2) для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала для их примем

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(x_1, x_2) \quad (i=1,2) \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(x_1, x_2) \quad (1.2.3)$$

После определения указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим, соответственно, как сумму значения (1.2.3) и результата интегрирования первых двух и шестого из (1.1.1) уравнений равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усредненные по толщине пластинки величины были равны нулю;

На основе принятых гипотез для компонент тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= x_3 K_{11}(x_1, x_2), \quad \gamma_{12} = x_3 K_{12}(x_1, x_2), \quad \gamma_{31} = \Gamma_{31}(x_1, x_2), \quad \gamma_{32} = \Gamma_{32}(x_1, x_2), \quad \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{22} &= x_3 K_{22}(x_1, x_2), \quad \gamma_{21} = x_3 K_{21}(x_1, x_2), \quad \gamma_{13} = \Gamma_{13}(x_1, x_2), \quad \gamma_{23} = \Gamma_{23}(x_1, x_2), \\ \chi_{11} &= k_{11}(x_1, x_2), \quad \chi_{12} = k_{12}(x_1, x_2), \quad \chi_{31} = 0, \quad \chi_{13} = x_3 l_{13}(x_1, x_2), \\ \chi_{22} &= k_{22}(x_1, x_2), \quad \chi_{21} = k_{21}(x_1, x_2), \quad \chi_{32} = 0, \quad \chi_{23} = x_3 l_{23}(x_1, x_2), \\ \chi_{33} &= k_{33}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \left(K_{11} - \frac{a_{12}}{a_{22}} K_{22} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \left(K_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} K_{11} \right), \\ \sigma_{12} &= \left(\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} \right) x_3, \\ \sigma_{21} &= \left(\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} \right) x_3, \\ \sigma_{13} &= \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31}, \quad \sigma_{23} = \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32}, \\ \sigma_{32} &= \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23}, \quad \sigma_{31} = \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13}, \\ \sigma_{31} &= \sigma_{31}^0(x_1, x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} (a_{66} + a_{56})N_{13} + (\tilde{a}_{55} + a_{56})N_{31} &= 4h(\Gamma_{31} + \Gamma_{13}), \\ (a_{44} + a_{45})N_{23} + (a_{55} + a_{45})N_{32} &= 4h(\Gamma_{32} + \Gamma_{23}), \\ M_{11} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left(K_{11} - \frac{a_{12}}{a_{22}} K_{22} \right), \\ M_{22} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left(K_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} K_{11} \right), \\ (a_{77} + a_{78})M_{12} + (a_{88} + a_{78})M_{21} &= \frac{2h^3}{3} (K_{12} + K_{21}), \\ L_{11} &= 2h \frac{\tilde{b}_{22}}{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}} k_{11}, \quad L_{22} = 2h \frac{\tilde{b}_{11}}{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}} k_{22}, \\ L_{12} &= 2h \left[\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{12} - \frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{21} \right], \\ L_{21} &= 2h \left[\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{21} - \frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} k_{12} \right], \\ \Lambda_{13} &= \frac{2h^3}{3} \left(\frac{1}{b_{66}} l_{13} - \frac{b_{56}}{b_{66}} \frac{\tilde{m}_1}{2h} \right), \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \left(\frac{1}{b_{44}} l_{23} - \frac{b_{45}}{b_{44}} \frac{\tilde{m}_2}{2h} \right), \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Геометрические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} &= \psi_i + \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{12} + K_{21} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \quad k_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad k_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \\ \text{где } \Omega_i &= -\frac{1}{2} (-1)^j \left(\psi_j - \frac{\partial w}{\partial x_j} \right), \quad t = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right), \quad l_{i3} = \frac{\partial t}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

В указанной системе уравнений, пренебрегая поперечные сдвиги переходим к модели изгиба микрополярных пластин со стесненным вращением, когда кинематические гипотезы являются обобщенные на микрополярный случай гипотезы Кирхгоффа. Как в случае ортотропной пластинки, так и в случае изотропной пластинки, основная система уравнений можно привести к одному уравнению относительно прогиба $w = w(x, y)$. Для ортотропного случая это уравнение имеет вид:

$$D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{12}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q_3, \quad (4.1.4)$$

сторону усиления жесткости пластинки, так и в обратном направлении.

В §3.2 рассматривается изгиб (осесимметричный) микрополярной ортотропной и изотропной круглой сплошной пластинки (радиуса a), когда она нагружена равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности $q(r) = const = q$, на границе принимаются граничные условия жесткого защемления.

Основная система и граничные условия получаются из результатов §1.4 (в осесимметричном случае). Решение этой задачи выражается через соответствующие функции Бесселя.

Приведем численные результаты. Как материал пластинки выбран тот же полиуретан.

Для максимального прогиба пластинки (т.е. $w(r)$ при $r = 0$) имеем

$$\text{при } q = 0.5 \cdot 10^{-4} \frac{K_2}{\text{см}^2}, w_{\max}^{\text{мик}} = 0.0023 \text{ см}, w_{\max}^{\text{кл}} = 0.0032 \text{ см}, \frac{w_{\max}^{\text{мик}}}{w_{\max}^{\text{кл}}} = 0.72.$$

Приведенный результат показывает эффективные свойства микрополярного материала с точки зрения жесткости пластинки. Отметим, что аналогичный результат получается и для напряжений, т.е. с точки зрения прочности пластинки.

В главе четыре развивается метод гипотез для построения моделей изгиба микрополярных ортотропных и изотропных тонких пластин со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”, а также, к изучению конкретных граничных задач для прямоугольных и круглых пластин.

В §4.1 построена модель деформации изгиба микрополярных ортотропных тонких пластин на основе микрополярных теорий со стесненным вращением. Изучаются конкретные задачи изгиба прямоугольных и круглых пластин.

В микрополярной трехмерной теории со стесненным вращением принимается, что повороты точек тела при деформации не свободны, они зависят от перемещений как в случае классической теории упругости: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{U}$, но моментные напряжения не равны нулю (уравнения и граничные условия трехмерной теории см. в работе В.Т.Койтера-1965).

Для построения прикладной модели изгиба микрополярных изотропных пластин в основу примем те же гипотезы, которые сформулированы в общей микрополярной теории со свободным вращением (§1.2 глава 1).

Основная система уравнений изгибной деформации микрополярных изотропных тонких пластин со стесненным вращением в декартовых координатах имеет вид:

Уравнения равновесия выражаются аналогично как в §1.2 главы 1 (т.е. уравнения (1.2.8)), физические соотношения для изотропного микрополярного материала выражаются так:

$$\begin{aligned} N_{i3} + N_{3i} &= 4\mu h (\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i}), M_{12} + M_{21} = \frac{4\mu h^3}{3} (K_{12} + K_{21}), \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}, \\ M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (K_{ii} + \nu K_{jj}), L_{ij} = 2h [(\gamma + \varepsilon)k_{ij} + (\gamma - \varepsilon)k_{ji}], L_{ii} = 4\gamma h k_{ii}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

а для микрополярного ортотропного материала так:

$$\sigma_{32} = \sigma_{32}^0(x_1; x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{22}^1}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial x_1} \right), \sigma_{33} = -x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{13}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^1}{\partial x_2} \right),$$

Здесь $\sigma_{11}^1, \sigma_{22}^1, \sigma_{12}^1, \sigma_{21}^1$ - коэффициенты при x_3 в выражениях $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$;

$$\mu_{41} = d_{11}k_{11} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{33}, \mu_{42} = d_{21}k_{11} + d_{22}k_{22} + d_{23}k_{33},$$

$$\mu_{33}^0 = d_{31}k_{11} + d_{32}k_{22} + d_{33}k_{33}, \mu_{42} = d_{88}k_{12} + d_{78}k_{21}, \mu_{21} = d_{77}k_{21} + d_{78}k_{12}, \quad (1.2.6)$$

$$\mu_{31} = -x_3 \left(\frac{\partial \mu_{41}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}^0}{\partial x_2} + \sigma_{23}^1 - \sigma_{32}^1 \right), \mu_{32} = -x_3 \left(\frac{\partial \mu_{42}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}^0}{\partial x_2} + \sigma_{31}^1 - \sigma_{13}^1 \right),$$

$$\mu_{33}^0 = \mu_{33}^0(x_1; x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \mu_{13}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}^1}{\partial x_2} + \sigma_{12}^1 - \sigma_{21}^1 \right), \mu_{43} = x_3 \frac{1}{b_{66}} l_{13},$$

$$\mu_{23} = x_3 \frac{1}{b_{44}} l_{23}.$$

$$\text{где } d_{11} = \frac{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, d_{12} = -\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, d_{13} = \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, d_{88} = \frac{b_{88}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2},$$

$$d_{22} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta}, d_{21} = -\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{23} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, d_{23} = -\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{12} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, d_{77} = \frac{b_{77}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2},$$

$$d_{33} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, d_{31} = \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta}, d_{32} = -\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b}, d_{78} = -\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2},$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

С целью приведения трехмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих пластин вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия N_{i3}, N_{3i} , моменты M_{ii}, M_{ij} от силовых напряжений, моменты L_{ii}, L_{33}, L_{ij} от моментных напряжений и гипермоменты Λ_{i3} от моментных напряжений:

$$N_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ii} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ii} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{ij} dx_3,$$

$$L_{ii} = \int_{-h}^h \mu_{ii} dx_3, \quad L_{33} = \int_{-h}^h \mu_{33} dx_3, \quad L_{ij} = \int_{-h}^h \mu_{ij} dx_3, \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^h x_3 \mu_{i3} dx_3 \quad (i=1,2). \quad (1.2.7)$$

Математическая модель статической изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных тонких пластин будет выражаться следующей системой основных уравнений и граничных условий:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -\tilde{p}_3, \quad N_{3i} - \left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} \right) = h\tilde{p}_i \quad (1.2.8)$$

$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -\tilde{m}_i, \quad L_{33} - \left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + (M_{12} - M_{21}) \right] = h\tilde{m}_3$$

Физические соотношения упругости

$$N_{13} = \tilde{C}_{55}\Gamma_{13} + C_{56}\Gamma_{31}, \quad N_{31} = C_{66}\Gamma_{31} + C_{56}\Gamma_{13}, \quad L_{11} = d_{11}k_{11} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{33},$$

$$N_{23} = C_{55}\Gamma_{23} + C_{45}\Gamma_{32}, \quad N_{32} = C_{44}\Gamma_{32} + C_{45}\Gamma_{23}, \quad L_{22} = d_{22}k_{22} + d_{21}k_{11} + d_{23}k_{33}$$

$$M_{11} = D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22}, \quad M_{22} = D_{22}K_{22} + D_{12}K_{11}, \quad L_{33} = d_{31}k_{11} + d_{32}k_{22} + d_{33}k_{33}, \quad (1.2.9)$$

$$M_{12} = D_{88}K_{12} + D_{78}K_{21}, \quad M_{21} = D_{77}K_{21} + D_{78}K_{12}, \quad \Lambda_{13} = \lambda_{66}l_{13},$$

$$L_{12} = d_{88}k_{12} + d_{78}k_{21}, \quad L_{21} = d_{77}k_{21} + d_{78}k_{12}, \quad \Lambda_{23} = \lambda_{44}l_{23}.$$

Геометрические соотношения

$$K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad K_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad K_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota, \quad K_{21} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota,$$

$$\Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \quad \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \quad (1.2.10)$$

$$k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \quad k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \quad k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \quad k_{33} = \iota, \quad l_{13} = \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, \quad l_{23} = \frac{\partial \iota}{\partial x_2}.$$

Граничные условия

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*; \quad M_{12} = M_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*,$$

$$N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*; \quad (1.2.11)$$

$$L_{11} = L_{11}^* \quad \text{или} \quad k_{11} = k_{11}^*; \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad k_{12} = k_{12}^*; \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*$$

Здесь

В случае ортотропного материала наиболее интенсивно на значения перемещений и напряжений влияют две группы упругих постоянных: a_{45}, a_{56}, a_{78} и $a_{44}, a_{55}, \tilde{a}_{55}, a_{66}, a_{77}, a_{88}$. Рассматриваются влияние на перемещения пластинки каждой из этих групп упругих постоянных отдельно.

Приведем результаты численного вычисления (см. таблица 3 и таблица 4)

Таблица 3. Прогиб пластинки в ортотропном случае	
$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0.0003 \text{ см}^2/\text{кг}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = -0.00013 \text{ см}^2/\text{кг},$ $b_{44} = b_{55} = \tilde{b}_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = 0.2081/\text{кг}, \quad b_{45} = b_{56} = b_{78} = 0,$ $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0.13981/\text{кг}, \quad b_{12} = b_{13} = b_{23} = -0.06851/\text{кг},$	
$a_{45} = a_{56} = a_{78} = -0.0052 \text{ см}^2/\text{кг}$	
$a_{44} = a_{55} = \tilde{a}_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} \left(\text{см}^2/\text{кг} \right)$	$w \left(\text{см} \right)$
0.0004	0.042
0.0017	0.043
0.0037	0.048
0.0057	0.051
0.057	0.053
0.09	0.059
0.37	0.107

Таблица 4. Прогиб пластинки в ортотропном случае	
$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0.0003 \text{ см}^2/\text{кг}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = -0.00013 \text{ см}^2/\text{кг},$ $b_{44} = b_{55} = \tilde{b}_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = 0.2081/\text{кг}, \quad b_{45} = b_{56} = b_{78} = 0,$ $b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0.13981/\text{кг}, \quad b_{12} = b_{13} = b_{23} = -0.06851/\text{кг},$	
$a_{44} = a_{55} = \tilde{a}_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} = 0.0057 \text{ см}^2/\text{кг}$	
$a_{45} = a_{56} = a_{78} \left(\text{см}^2/\text{кг} \right)$	$w \left(\text{см} \right)$
10^{-3}	0.052
$2 \cdot 10^{-6}$	0.051
$-0.5 \cdot 10^{-1}$	0.036
$-0.8 \cdot 10^{-1}$	0.030
-0.2	0.011

Как видно из таблиц 3 и 4 анизотропия микрополярного материала интенсивно влияет на значения прогиба пластинки (и аналогично, на значения напряжений), как в

и проследим изменение величин $\frac{\bar{w}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{w}_{\max}^{\text{кл}}}$, $\frac{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{кл}}}$ в зависимости от значения $\frac{\alpha}{\mu}$ (см. таб. 1)

Таблица 1. Перемещения и напряжения в зависимости от значений $\frac{\alpha}{\mu}$		
$\frac{\gamma}{\mu a^2} = \frac{\varepsilon}{\mu a^2} = 22 \cdot 10^{-6}$, $\frac{\beta}{\mu a^2} = 11 \cdot 10^{-4}$, $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$, $\frac{q}{\mu} = 26 \cdot 10^{-7}$		
$\frac{\alpha}{\mu}$	$\frac{\bar{w}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{w}_{\max}^{\text{кл}}}$	$\frac{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{кл}}}$
10^{-5}	0.980	0.981
$0.125 \cdot 10^{-3}$	0.862	0.861
$0.5 \cdot 10^{-3}$	0.765	0.764
0.2	0.684	0.683

Как убедимся с увеличением физической постоянной α (при всех остальных равных условиях), прочность и жесткость пластинки увеличивается. Что касается ролей физических постоянных γ, ε и β , отметим, что их роли связаны со значением физической постоянной α . Если α имеет меньшее значение, влияние величин γ, ε на прогибы и напряжения малы, при увеличении α - наоборот (таб. 2). Влияние постоянной β - всегда мало.

Таблица 2. Перемещения и напряжения в зависимости от значений $\frac{\alpha}{\mu}$ и $\frac{\gamma}{a^2 \mu} = \frac{\varepsilon}{a^2 \mu}$			
$\frac{\beta}{\mu a^2} = 11 \cdot 10^{-4}$, $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$, $\frac{q}{\mu} = 26 \cdot 10^{-7}$			
$\frac{\alpha}{\mu}$	$\frac{\gamma}{a^2 \mu} = \frac{\varepsilon}{a^2 \mu}$	$\frac{\bar{w}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{w}_{\max}^{\text{кл}}}$	$\frac{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{мик}}}{\bar{\sigma}_{\max}^{\text{кл}}}$
$\frac{1}{16000}$	$5 \cdot 10^{-6}$	0.95	0.95
	$20 \cdot 10^{-6}$	0.91	0.91
$\frac{1}{1000}$	$5 \cdot 10^{-6}$	0.91	0.91
	$20 \cdot 10^{-6}$	0.74	0.73
$\frac{1}{5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	0.89	0.89
	$20 \cdot 10^{-6}$	0.71	0.71

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{55} &= 2h \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2}, C_{66} = 2h \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2}, C_{56} = -2h \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2}, \\
 C_{55} &= 2h \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}, C_{44} = 2h \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}, C_{45} = -2h \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2}, \\
 D_{11} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, D_{22} = \frac{2h^3}{3} \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, D_{12} = -\frac{2h^3}{3} \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\
 D_{88} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}, D_{77} = \frac{2h^3}{3} \frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}, D_{78} = -\frac{2h^3}{3} \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} \\
 \tilde{d}_{kk} &= 2hd_{kk}, k=1,2,3, \\
 \tilde{d}_{12} &= 2hd_{12}, \tilde{d}_{21} = 2hd_{21}, \lambda_{66} = \frac{2h^3}{3} \frac{1}{b_{66}}, \lambda_{44} = \frac{2h^3}{3} \frac{1}{b_{44}}.
 \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Эта система дифференциальных уравнений 12-го порядка с 6-ю граничными условиями на каждом крае срединной плоскости пластинки. Она содержит 35 уравнений относительно 35 неизвестных функций: $N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, M_{ij}, L_{ij}, L_{ij}, \Lambda_{i3}, L_{33}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, k_{ii}, k_{ij}, l_{i3}, \psi_i, w, \Omega_i, t$. В этой модели микрополярных ортотропных пластин полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Если в этой модели пренебрегать поперечные сдвиги, тогда получим модель микрополярных ортотропных пластин, когда в основу примем обобщенную на микрополярный случай кинематическую гипотезу Кирхгоффа.

II. Рассмотрим задачу плоского напряженного состояния. Основные гипотезы для плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин можем формулировать следующим образом:

Тангенциальные компоненты вектора перемещения и нормальная компонента вектора свободного поворота не зависят от поперечной координаты x_3 ; нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные компоненты вектора свободного поворота равны нулю:

$$U_1 = u_1(x_1, x_2), U_2 = u_2(x_1, x_2), \omega_3 = \Omega_3(x_1, x_2) \tag{1.2.13}$$

$$U_3 = 0, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0. \tag{1.2.14}$$

Как статическую гипотезу примем, что тензоры напряжений характеризуется следующими матрицами:

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \hat{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.15}$$

На основе принятых гипотез для компонент тензоров деформаций, изгибов - кручений, силовых и моментных напряжений будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \gamma_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \Omega_3, & \chi_{13} &= \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \\ \gamma_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \Omega_3, & \chi_{23} &= \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\Gamma_{11}(x_1, x_2) + A_{12}\Gamma_{22}(x_1, x_2), & \mu_{13} &= B_{66}k_{13}, & \mu_{23} &= B_{44}k_{23}, \\ \sigma_{22} &= A_{12}\Gamma_{11}(x_1, x_2) + A_{22}\Gamma_{22}(x_1, x_2), & \sigma_{33} &= A_{13}\Gamma_{11}(x_1, x_2) + A_{23}\Gamma_{22}(x_1, x_2), \\ \sigma_{12} &= A_{77}\Gamma_{12}(x_1, x_2) + A_{78}\Gamma_{22}(x_1, x_2), & \mu_{31} &= B_{56}k_{13}, & \mu_{32} &= B_{45}k_{23}. \\ \sigma_{21} &= A_{78}\Gamma_{12}(x_1, x_2) + A_{88}\Gamma_{21}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Для задачи плоского напряженного состояния вводим следующие силовые и моментные интегральные характеристики:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \int_{-h}^h \sigma_{ii} dx_3 = 2h\sigma_{ii}, & S_{12} &= \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_3 = 2h\sigma_{12}, & S_{21} &= \int_{-h}^h \sigma_{21} dx_3 = 2h\sigma_{21}, \\ L_{13} &= \int_{-h}^h \mu_{13} dx_3 = 2h\mu_{13}, & L_{23} &= \int_{-h}^h \mu_{23} dx_3 = 2h\mu_{23}. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Основная система уравнений математической модели плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться следующим образом:

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x_2} &= -p_1, & \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} &= -p_2, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + S_{12} - S_{21} &= -m_3. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Физические соотношения упругости:

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2h(A_{11}\Gamma_{11}(x_1, x_2) + A_{12}\Gamma_{22}(x_1, x_2)), \\ T_{22} &= 2h(A_{12}\Gamma_{11}(x_1, x_2) + A_{22}\Gamma_{22}(x_1, x_2)), & L_{13} &= 2hB_{66}k_{13}, \\ S_{21} &= 2h(A_{78}\Gamma_{12}(x_1, x_2) + A_{88}\Gamma_{21}(x_1, x_2)), & L_{23} &= 2hB_{44}k_{23}. \\ S_{12} &= 2h(A_{77}\Gamma_{12}(x_1, x_2) + A_{78}\Gamma_{22}(x_1, x_2)), \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}, & \Gamma_{12} &= \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \Omega_3(x_1, x_2), & k_{13} &= \frac{\partial \Omega_3(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \\ \Gamma_{22} &= \frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}, & \Gamma_{21} &= \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \Omega_3(x_1, x_2), & k_{23} &= \frac{\partial \Omega_3(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим конкретный микрополярный материал, это полиуретан (см. P. Lakse, 1995) для которого упругие константы имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 4370 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 1093 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & \alpha &= 46 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & \gamma &= 2.4 \text{кг}, & \varepsilon &= 2.4 \text{кг}, \\ \beta &= 120 \text{кг}. \end{aligned}$$

Для геометрических размеров пластинки приняты следующие значения: $a = b = 10 \text{см}$, $h = 0.1 \text{см}$ ($\delta = \frac{1}{100}$). Для приложенной нагрузки будем считать, что она

равномерно-распределенная и имеет интенсивность: $q = 0.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Приведем результаты вычислений:

$$w_{\max}^{\text{мик}} = 0.006 \text{см}, w_{\max}^{\text{кл}} = 0.008 \text{см}, \frac{w_{\max}^{\text{мик}}}{w_{\max}^{\text{кл}}} = 0.21, \sigma_{\max}^{\text{мик}} = 0.33 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\sigma_{\max}^{\text{кл}} = 0.47 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \frac{\sigma_{\max}^{\text{мик}}}{\sigma_{\max}^{\text{кл}}} = 0.19.$$

Здесь $w_{\max}^{\text{мик}}$, $\sigma_{\max}^{\text{мик}}$ - максимальный прогиб и напряжение, когда ее материал является микрополярным, а $w_{\max}^{\text{кл}}$, $\sigma_{\max}^{\text{кл}}$ - максимальный прогиб и напряжение, когда ее материал классический упругий с теми же классическими физическими константами, что и для рассмотренного материала.

Как убедимся, при всех равных условиях, микрополярность материала дает конструкционному элементу (пластинке) значительную прочность и жесткость.

Задача решена также на основе обобщенной на микрополярный случай кинематической гипотезы Кирхгоффа, получены аналогичные качественные результаты (в количественном отношении при указанных данных, получаются почти те же результаты, но следует отметить, что для другого микрополярного материала или при других геометрических данных результаты этих двух моделей могут разниться на 20% и более процентов).

Были выполнены также следующие исследования. Материал пластинки рассматривается как гипотетический, наша цель выяснить вопрос, какую роль играют в процессе деформирования микрополярного материала физические константы в отдельности.

Придерживаем следующие безразмерные величины $\frac{\gamma}{\mu a^2}, \frac{\varepsilon}{\mu a^2}, \frac{\beta}{\mu a^2}, \frac{h}{a}, \frac{q}{\mu}$ на

конкретных значениях:

$$\frac{\gamma}{\mu a^2} = \frac{\varepsilon}{\mu a^2} = 22 \cdot 10^{-6}, \frac{\beta}{\mu a^2} = 11 \cdot 10^{-4}, \delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}, \frac{q}{\mu} = 26 \cdot 10^{-7}$$

деформации γ_{11} и γ_{22} , относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22} , оправдано. С этой точки зрения ради некоторого упрощения физических соотношений упругости, при построении прикладной модели изгиба микрополярной тонкой пластинки, принята гипотеза, о пренебрежении σ_{33} в указанных выражениях относительно σ_{11}, σ_{22} . Если для определенных классов задач микрополярной теории пластин указанное пренебрежение оправдано, тогда следует принимать ввиду соотношения упругости (1.2.9), которые имеют более простой вид. Аналогичную почву имеет пренебрежение моментных напряжений μ_{31}, μ_{32} по сравнению с моментными напряжениями μ_{13}, μ_{23} в выражениях изгибов-кручений χ_{13} и χ_{23} . А если в некоторых случаях анизотропии или при некоторых случаях изменяемости внешних усилий и моментов, эти пренебрежения не оправданы, тогда следует использовать соотношения упругости (2.2.2), (2.2.4) асимптотической модели. В этом случае подчеркнутые в этих формулах члены, которые выражены через внешние усилия и моменты, в разрешающих уравнениях уйдут в правые части, т.е. нужно будет отыскивать частное решение указанных разрешающих уравнений, связанное с этими правыми частями.

Имея ввиду изложенное (о возможности пренебрежения σ_{33} и μ_{31}, μ_{32}) можем установить, что прикладная модель изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных тонких пластин, можем считать асимптотически точной моделью.

Что касается прикладной модели плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин, то она асимптотически точная модель, так как у обеих моделей полностью совпадают и основные уравнения и граничные условия.

Отметим, что построенные асимптотические модели изгиба и плоского напряженного состояния микрополярных пластин имеют важную особенность, что дают возможность всегда с использованием следующих асимптотических приближений, в случае необходимости, уточнения исходных моделей.

В третьей главе на основе построенной прикладной модели изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных тонких пластин рассматриваются некоторые конкретные задачи для прямоугольных и круглых пластин. Построены точные решения поставленных задач, которые доведены до окончательных численных результатов. На основе численного анализа устанавливаются эффективные свойства (с точки зрения прочности и жесткости) микрополярных материалов.

В §3.1 изучается задача изгиба микрополярной ортотропной и изотропной прямоугольной пластинки, когда края ее шарнирно – оперты и нагружена нормальной распределенной силовой нагрузкой. Разрешающая система уравнений изгиба микрополярной изотропной пластинки с независимыми полями перемещений и вращений можем получить на основе систем уравнений (1.2.8), (1.2.10), (1.5.1) – для изотропного случая и (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10) – для ортотропного случая.

Задачу будем решать в двойных тригонометрических рядах. В результате получим алгебраическую линейную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов в указанных разложениях. Решая указанную систему линейных алгебраических уравнений и определяя коэффициенты в двойных тригонометрических разложениях, в итоге, определим все основные функции участвующих в задаче и далее, по соответствующим формулам можем вычислить напряжения.

К основной системе уравнений (1.2.19)–(1.2.21) плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных тонких пластин будем присоединить соответствующие граничные условия (например для $x_1 = const$):

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } \Gamma_{11} = \Gamma_{11}^*, S_{12} = S_{12}^* \text{ или } \Gamma_{12} = \Gamma_{12}^*, L_{12} = L_{12}^* \text{ или } k_{12} = k_{12}^*. \quad (1.2.22)$$

Система уравнений (1.2.19)–(1.2.21) и граничные условия (1.2.22) определяют прикладную модель плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных тонких пластин.

В §1.3 на основе уравнений и граничных условий прикладной модели микрополярных упругих ортотропных тонких пластин получено уравнение баланса энергии

$$\iint_S \tilde{W} dx_1 dx_2 = \tilde{A}, \quad (1.3.1)$$

где для случая изгибной деформации

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & \frac{1}{2} \left[D_{11} K_{11}^2 + D_{22} K_{22}^2 + 2D_{12} K_{11} K_{22} + D_{88} K_{21}^2 + 2D_{78} K_{12} K_{21} + D_{77} K_{12}^2 + \right. \\ & + C_{66} \Gamma_{31}^2 + 2C_{56} \Gamma_{31} \Gamma_{13} + \tilde{C}_{55} \Gamma_{13}^2 + C_{44} \Gamma_{32}^2 + 2C_{45} \Gamma_{32} \Gamma_{23} + C_{55} \Gamma_{23}^2 + \\ & + d_{11} k_{11}^2 + d_{22} k_{22}^2 + d_{33} k_{33}^2 + 2d_{12} k_{11} k_{22} + 2d_{13} k_{11} k_{33} + 2d_{23} k_{22} k_{33} + d_{77} k_{21}^2 + \\ & \left. + 2d_{78} k_{12} k_{21} + d_{88} k_{12}^2 + \lambda_{66} l_{13}^2 + \lambda_{44} l_{23}^2 \right], \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

а для случая плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & \frac{1}{2} 2h \left(A_{11} \Gamma_{11}^2 + A_{22} \Gamma_{22}^2 + 2A_{12} \Gamma_{11} \Gamma_{22} + A_{77} S_{12}^2 + A_{88} S_{21}^2 + 2A_{78} S_{12} S_{21} + \right. \\ & \left. + B_{44} k_{23}^2 + B_{66} k_{13}^2 \right) \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

\tilde{A} – усредненная работа внешних сил и моментов соответственно для изгиба или плоского напряженного состояния.

Легко заметить, что для прикладной модели как изгибной деформации, так и плоского напряженного состояния, имеет место формулы типа Грина, теорема единственности и другие энергетические теоремы.

Общий вариационный потенциал прикладной модели изгиба микрополярных упругих ортотропных пластин выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{I} = & \iint_S \left\{ \tilde{W} - \left[M_{11} \left(K_{11} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) + M_{22} \left(K_{22} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) + M_{12} \left[K_{12} - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota \right) \right] + \right. \right. \\ & + M_{21} \left[K_{21} - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota \right) \right] + N_{13} \left[\Gamma_{13} - \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2 \right) \right] + N_{23} \left[\Gamma_{23} - \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1 \right) \right] \left. \right\} + \\ & + L_{11} \left(k_{11} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right) + L_{22} \left(k_{22} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) + L_{33} (k_{33} - \iota) + L_{12} \left(k_{12} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +L_{21}\left(k_{21}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right)+\Lambda_{13}\left(l_{13}-\frac{\partial t}{\partial x_1}\right)+\Lambda_{23}\left(l_{23}-\frac{\partial t}{\partial x_1}\right)\Bigg\}ds- \\
& -\iint_s\left[(p_1h\psi_1+p_2h\psi_2+p_3w)+(m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+m_3h)\right]ds- \\
& -\iint_l\left[(M_{11}^0\psi_1+M_{12}^0\psi_2+N_{13}^0w)+(L_{11}^0\Omega_1+L_{12}^0\Omega_2+\Lambda_{13}^0t)\right]dl
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

а в случае плоского напряженного состояния так:

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = & \iint_s\left\{\tilde{W}-\left[T_{11}\left(\Gamma_{11}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+T_{22}\left(\Gamma_{22}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+S_{12}\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\Omega_3\right)\right]+ \right. \right. \\
& \left. \left. +S_{21}\left[\Gamma_{21}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\Omega_3\right)\right]+L_{13}\left[k_{13}-\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}\right]+L_{23}\left[k_{23}-\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_2}\right]- \right. \right. \\
& \left. \left. -\iint_{(s)}\left[(p_1u_1+p_2u_2)+m_3\Omega_3\right]ds-\iint_l\left[(T_{11}^0u_1+T_{12}^0u_2)+L_{13}^0\Omega_3\right] \right. \right.
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

На основе этих функционалов можно формулировать общие вариационные уравнения ($\delta\tilde{I}=0$), из которых будут следовать либо основные уравнения и граничные условия изгибной деформации, либо плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что из указанных общих вариационных принципах (1.3.4),(1.3.5), как частные случаи, будут следовать вариационные принципы типа Лагранжа и Кастильяно для прикладных моделей изгиба и плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных упругих пластин. Следовательно, как в классической теории пластин, аналогичным образом, можем доказать теорему о минимуме потенциальной энергии или дополнительной энергии системы. Это означает, что обосновано применение вариационных методов Ритца или Бубнова-Галеркина для решения граничных задач изгиба и плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. Понятно, что на этой основе обосновано также применение метода конечных элементов (МКЭ) для решения указанных граничных задач.

В §1.4 построены основные уравнения и граничные условия прикладной модели микрополярных упругих ортотропных тонких пластин в ортогональной криволинейной системе координат в срединной плоскости пластинки, в частности, приведены эти уравнения и граничные условия в полярной системе координат для круглых пластин.

В §1.5 из общей модели микрополярных ортотропных пластин приведены основные уравнения, граничные условия и плотность потенциальной энергии для задачи изгиба и плоского напряженного состояния микрополярных изотропных пластин. В частности, физические соотношения упругости и упругий потенциал в задаче изгиба имеют вид:

$$N_{13}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}], \quad N_{31}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}],$$

$$+\frac{a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}}{2a_{11}a_{22}}\int_{-1}^1\zeta^2\sigma_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta, s=0,1;$$

В случае задачи плоского напряженного состояния

$$\int_{-1}^1\sigma_{11}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \int_{-1}^1\sigma_{12}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{2.4.7}$$

$$\int_{-1}^1\mu_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\frac{a_{11}(a_{78}+a_{88})}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\int_{-1}^1\nu_2^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{2.4.8}$$

$$\int_{-1}^1\omega_3^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta-\frac{a^2b_{56}}{a_{11}}\int_{-1}^1\zeta\mu_{41}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{2.4.9}$$

$$\int_{-1}^1\nu_1^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta+\frac{a_{23}a_{12}-a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}}\int_{-1}^1\zeta\sigma_{13}^{(s)}(\xi_1=0)d\zeta=0, \tag{2.4.10}$$

здесь $s=0,1$.

Эти равенства показывают, что когда на краю пластинки имеются самоуравновешенные нагрузки (силовые или моментные), тогда и перемещения и повороты тоже будут самоуравновешенными. Эти свойства погранслойных задач существенно используются при изучении вопроса срачивания внутреннего и погранслоя итерационных процессов.

В §2.5 осуществлено срачивание внутреннего и погранслоя итерационных процессов, в результате которого, данные трехмерные граничные условия на крае пластинки Σ , были разделены между внутренней задачей (асимптотической модели) и погранслоя, как для изгибной деформации, так и для плоского напряженного состояния.

В §2.6 проведено сравнение основных уравнений и граничных условий прикладной модели микрополярных ортотропных пластин построенной на основе метода гипотез и асимптотической модели. Показано, что для задачи изгиба уравнения равновесия, геометрические соотношения и граничные условия (свободно-загруженный край; шарнирное опирание и жестко защемленный край) у обеих моделей совпадают. Различие только в физических соотношениях (см. формулы (1.2.9) и (2.2.2),(2.2.4)). Если в этих формулах будем пренебрегать подчеркнутые в (2.2.2),(2.2.4) слагаемые, тогда указанные физические соотношения будут полностью совпадать. Указанные две слагаемые в выражениях (2.2.2), это результат того, что в асимптотической модели силовое напряжение σ_{33} не пренебрегается относительно напряжений σ_{11}, σ_{22} в выражениях деформации γ_{11}, γ_{22} . Как показывает расчеты конкретных примеров, вообще говоря влияние силового напряжения σ_{33} на напряженно-деформированное состояние микрополярной пластинки мало, как известно, в классической теории упругих пластин пренебрежение σ_{33} в формулах

(двумерная) плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что обосновывается кинематическая гипотеза для прикладной модели плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных пластин:

$$u_1^{(0)} = u_1^{(0)}(\xi, \eta), \quad u_2^{(0)} = u_2^{(0)}(\xi, \eta), \quad \omega_3^{(0)} = \omega_3^{(0)}(\xi, \eta),$$

а также обосновываются принятые статические гипотезы для этой модели.

Основная система асимптотической модели плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных тонких пластин представляют собой уравнения равновесия (1.2.19), геометрические соотношения (1.2.21) и физические соотношения (1.2.20) прикладной модели, которая построена в главе один на основе метода гипотез.

В §2.4 построена погранслои для теории микрополярных ортотропных пластин. Показано, что в исходном асимптотическом приближении погранслои распадается на четыре независимые группы уравнений, которые характеризуют плоский и антиплоский силовой и моментный погранслои задачи. Выявлены основные свойства погранслоевых задач, суть которых заключается в следующих равенствах:

в случае задачи изгиба

$$\int_{-1}^1 \sigma_{13}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi + \int_{-1}^1 \zeta \sigma_{11}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi + \frac{a_{11}}{a_{56}} \int_{-1}^1 V_3^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi = 0, \quad (2.4.1)$$

$$\int_{-1}^1 \mu_{11}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi - \frac{a_{45} + a_{44}}{a^2 a_{44}} \int_{-1}^1 \zeta \sigma_{12}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi = 0, \quad (2.4.2)$$

$$\int_{-1}^1 \mu_{12}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi + \frac{a_{56} + \tilde{a}_{55}}{a_{56}} \int_{-1}^1 \zeta \sigma_{11}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi = 0, \quad (2.4.3)$$

$$\int_{-1}^1 \omega_1^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi + \frac{a^2}{a_{11}} \frac{b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}}{b_{22}} \int_{-1}^1 \zeta \mu_{13}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi = 0, \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_{11}}{a^2} (b_{13} b_{22} - b_{12} b_{23}) \int_{-1}^1 \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \xi}(\xi_1 = 0) d\xi - \frac{a_{11}}{a^2} (b_{22} b_{33} - b_{23}^2) \int_{-1}^1 \frac{\partial \omega_1^{(s)}}{\partial \xi_1}(\xi_1 = 0) d\xi = \\ & = \frac{(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)(b_{22} b_{33} - b_{23}^2) - (b_{13} b_{22} - b_{12} b_{23})^2}{b_{23}} \int_{-1}^1 \mu_{11}^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

$$-2 \int_{-1}^1 \zeta V_1^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a^2 a_{22}} \frac{b_{88}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2} \int_{-1}^1 \omega_2^{(s)}(\xi_1 = 0) d\xi + \quad (2.4.6)$$

$$N_{23} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{23} + (\mu - \alpha)\Gamma_{32}], \quad N_{32} = [(\mu + \alpha)\Gamma_{32} + (\mu - \alpha)\Gamma_{23}],$$

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11} + \nu K_{22}), \quad M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22} + \nu K_{11}),$$

$$M_{12} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{12} + (\mu + \alpha)K_{21}], \quad M_{21} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{21} + (\mu + \alpha)K_{12}],$$

$$L_{11} = 2h(\beta + 2\gamma)k_{11} + 2h\beta(k_{22} + \iota), \quad L_{12} = 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}], \quad (1.5.1)$$

$$L_{22} = 2h(\beta + 2\gamma)k_{22} + 2h\beta(k_{11} + \iota), \quad L_{21} = 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12}],$$

$$L_{33} = 2h(\beta + 2\gamma)\iota + 2h\beta(k_{11} + k_{22}),$$

$$\Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23};$$

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & \frac{1}{2} \left[\frac{2h^3}{3} \left(\frac{E}{1-\nu^2} K_{11}^2 + \frac{E}{1-\nu^2} K_{22}^2 + 2 \frac{\nu E}{1-\nu^2} K_{11} K_{22} + (\mu + \alpha) K_{21}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(\mu - \alpha) K_{12} K_{21} + (\mu + \alpha) K_{12}^2 \right) + 2h \left((\mu + \alpha) \Gamma_{31}^2 + 2(\mu - \alpha) \Gamma_{31} \Gamma_{13} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\mu + \alpha) \Gamma_{13}^2 + (\mu + \alpha) \Gamma_{32}^2 + 2(\mu - \alpha) \Gamma_{32} \Gamma_{23} + (\mu + \alpha) \Gamma_{23}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. 2h \left((\beta + 2\gamma) k_{11}^2 + (\beta + 2\gamma) k_{22}^2 + (\beta + 2\gamma) k_{33}^2 + 2\beta k_{11} k_{22} + 2\beta k_{11} k_{33} + 2\beta k_{22} k_{33} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2h \left((\gamma + \varepsilon) k_{21}^2 + 2(\gamma - \varepsilon) k_{12} k_{21} + (\gamma + \varepsilon) k_{12}^2 \right) + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \left(l_{13}^2 + l_{23}^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

а для задачи плоского напряженного состояния вид:

$$\Gamma_{11} = 2h(\lambda + 2\mu)\Gamma_{11}(x_1, x_2) + \lambda\Gamma_{22}(x_1, x_2),$$

$$\Gamma_{22} = 2h(\lambda\Gamma_{11}(x_1, x_2) + (\lambda + 2\mu)\Gamma_{22}(x_1, x_2)),$$

$$S_{12} = 2h((\mu + \alpha)\Gamma_{12}(x_1, x_2) + (\mu - \alpha)\Gamma_{22}(x_1, x_2)), \quad (1.5.3)$$

$$S_{21} = 2h((\mu - \alpha)\Gamma_{12}(x_1, x_2) + (\mu + \alpha)\Gamma_{21}(x_1, x_2)),$$

$$L_{13} = 2h(\gamma + \varepsilon)k_{13}, \quad L_{23} = 2h(\gamma + \varepsilon)k_{23}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & \frac{1}{2} \left((\lambda + 2\mu) (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2) + 2\lambda\Gamma_{11}\Gamma_{22} + (\mu + \alpha) (S_{12}^2 + S_{21}^2) + \right. \\ & \left. 2(\mu - \alpha) S_{12} S_{21} + (\gamma + \varepsilon) (k_{23}^2 + k_{13}^2) \right) \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Во второй главе построено асимптотическое решение краевых задач трехмерной микрополярной теории упругости в тонкой области пластинки для ортотропного материала. Построена внутренняя задача, которая в терминах усредненных усилий, моментов и гипермоментов приводятся к общим двумерным (асимптотическим) моделям изгиба и плоского напряженного состояния микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений

.Обосновываются прикладные модели микрополярных упругих ортотропных пластин, которые построены в первой главе на основе метода гипотез.

В §2.1 построен внутренний итерационный процесс микрополярных упругих ортотропных тонких пластин, как для задачи изгибной деформации, так и для задачи плоского напряженного состояния.

Будем предполагать, что толщина пластинки $2h$ мала по сравнению с характерным размером a пластинки в плане, т. е. $2h \ll a$, $\delta = h/a \ll 1$; δ -основной малый геометрический параметр задачи.

В основу рассуждений кладем свойство напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкой пластинки, выражаемое структурной формулой

$$(НДС)_{полн} = (НДС)_{вн} + (НДС)_{кр}. \quad (2.1.1)$$

Здесь под $(НДС)_{полн}$, $(НДС)_{вн}$ и $(НДС)_{кр}$ подразумевается полное, внутреннее (охватывающего пластинку в целом) и краевое (локализованное вблизи боковой поверхности пластинки) НДС. При таком подходе на результатах исходного приближения внутренней задачи возможно будет построение прикладной двумерной (асимптотической) модели микрополярных тонких пластин.

В уравнениях (1.1.1)-(1.1.4) пространственной задачи микрополярной теории упругости перейдем к безразмерной системе координат и к безразмерным величинам по формулам:

$$\frac{x_1}{a} = \xi, \quad \frac{x_2}{a} = \eta, \quad \frac{x_3}{h} = \zeta, \quad (2.1.2)$$

$$a_{11}\sigma_{mn} = \bar{\sigma}_{mn}, \quad \frac{a_{11}\mu_{mn}}{a} = \bar{\mu}_{mn}, \quad \frac{V_i}{a} = \bar{V}_i, \quad m, n = 1, 2, 3. \quad (2.1.3)$$

$$\frac{1}{a_{11}}a_{mn}, \quad \frac{a^2}{a_{11}}b_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots, 8 \quad (2.1.4)$$

В итоге получим сингулярно-возмущенную с малым параметром δ краевую задачу, решение которой складывается из суммы решений внутренней задачи и погранслоевых задач.

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^S \delta^s Q^{(s)}, \quad (2.1.5)$$

где Q -любое из напряжений (силовых или моментных), перемещений и поворотов; q -натуральное число, которое различно для различных величин и которое определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях; для безразмерных физических

параметров примем значения: $\frac{1}{a_{11}}a_{mn} \sim 1$, $\frac{a^2}{a_{11}}b_{mn} \sim 1$, $m, n = 1, 2, \dots, 8$.

Таким образом в выражениях (2.1.5) для q получим:

1) для обратно-симметричной по x_3 задачи (для задачи изгиба):

$$q = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_{i3}, \bar{\sigma}_{3i}, \bar{\mu}_{ii}, \bar{\mu}_{ij}, \bar{\mu}_{33}, \bar{V}_3, \omega_i; \quad q = 0 \text{ для } \bar{\sigma}_{ii}, \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\sigma}_{33}, \bar{\mu}_{i3}, \bar{\mu}_{3i}, \bar{V}_i, \omega_3. \quad (2.1.6)$$

2) для симметричной по x_3 задачи (плоское напряженное состояние):

$$q = 2 \text{ для } \bar{\sigma}_{ii}, \bar{\sigma}_{ij}, \bar{\mu}_{i3}, \bar{\mu}_{3i}, \bar{V}_i, \omega_3,$$

$$q = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_{i3}, \bar{\sigma}_{3i}, \bar{\mu}_{ii}, \bar{\mu}_{ij}, \bar{\mu}_{33}, \bar{V}_3, \omega_i, \quad (2.1.7)$$

$$q = 0 \text{ для } \bar{\sigma}_{33}.$$

В §2.2 на результатах исходного приближения внутреннего итерационного процесса построена асимптотическая модель (двумерная) для изгибной деформации микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Важно отметить, что в исходном асимптотическом приближении обосновывается кинематическая гипотеза 1) прикладной модели изгиба микрополярных ортотропных пластин:

$$u_3^{(0)} = u_3^{(0)}(\xi, \eta), \quad u_1^{(0)} = \zeta \psi_1^{(0)}(\xi, \eta), \quad u_2^{(0)} = \zeta \psi_2^{(0)}(\xi, \eta),$$

$$\omega_1^{(0)} = \omega_1^{(0)}(\xi, \eta), \quad \omega_2^{(0)} = \omega_2^{(0)}(\xi, \eta), \quad \omega_3^{(0)} = \zeta \iota^{(0)}(\xi, \eta).$$

Обосновывается также гипотеза 2) относительно напряжений σ_{31}, σ_{32} и μ_{33} .

Основная система асимптотической модели изгиба микрополярных ортотропных тонких пластин представляют собой уравнения равновесия (1.2.8), геометрические уравнения (1.2.10) прикладной модели, которая построена в главе один на основе метода гипотез, а физические соотношения в данном случае имеют вид:

$$N_{13} = \tilde{C}_{55}\Gamma_{13} + C_{56}\Gamma_{31}, \quad N_{31} = C_{66}\Gamma_{31} + C_{56}\Gamma_{13}, \quad (2.2.1)$$

$$N_{23} = C_{55}\Gamma_{23} + C_{45}\Gamma_{32}, \quad N_{32} = C_{44}\Gamma_{32} + C_{45}\Gamma_{23},$$

$$M_{11} = D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} + \frac{h^2}{3} \frac{a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (p_3^+ + p_3^-),$$

$$M_{22} = D_{22}K_{22} + D_{12}K_{11} + \frac{h^2}{3} \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (p_3^+ + p_3^-), \quad (2.2.2)$$

$$M_{12} = D_{88}K_{12} + D_{78}K_{21}, \quad M_{21} = D_{77}K_{21} + D_{78}K_{12}$$

$$L_{11} = d_{11}k_{11} + d_{12}k_{22} + d_{13}k_{33}, \quad L_{22} = d_{22}k_{22} + d_{21}k_{11} + d_{23}k_{33},$$

$$L_{12} = d_{88}k_{12} + d_{78}k_{21}, \quad L_{21} = d_{77}k_{21} + d_{78}k_{12}, \quad (2.2.3)$$

$$L_{33} = d_{33}k_{33} + d_{31}k_{11} + d_{32}k_{22}$$

$$\Lambda_{13} = \lambda_{66}l_{13} - \frac{h^2}{3} \frac{b_{56}}{b_{66}} (m_1^+ + m_1^-), \quad \Lambda_{23} = \lambda_{44}l_{23} - \frac{h^2}{3} \frac{b_{45}}{b_{44}} (m_2^+ + m_2^-),$$

В §2.3 на основе результатах исходного приближения внутреннего итерационного процесса для плоского напряженного состояния построена асимптотическая модель