

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՂՈՒԼՂԱԶԱՐՅԱՆ ԼՈՒՍԻՆԵ ԳՈՒՐԳԵՆԻ

ՄԱԼԵՐԻ ԵՒ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ա.02.04.-<<Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա>> մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսությամբ

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2014

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН АРМЕНИИ

ГУЛГАЗАРЯН ЛУСИНЕ ГУРГЕНОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.02.04.–Механика
деформируемого твердого тела

ЕРЕВАН-2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս.Ն. Սարգսյան
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Գ.Բ. Միխասև
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ա.Մ.Խաչատրյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

Հայաստանի Պետական
ճարտարագիտական համալսարան
(Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2014թ. հոկտեմբերի 24-ին, ժամը 14⁰⁰-ին,
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի – 047 մասնագիտական
խորհրդում:

Հասցե՝ 0019, ք.Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2, avсах@mechins.sci.am
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում

Մեղմագիրը առաքված է 2014թ. սեպտեմբերի 12 -ին

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
Ֆ.մ.գ.դ.



Ա.Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН Армении

Официальные оппоненты:

член корр. НАН Армении, д.ф.м.н., проф. С.О.Саркисян
д.ф.м.н., проф. Г.И.Михасев
д.ф.м.н., проф. А.М.Хачатрян

Ведущая организация:

Государственный инженерный
университет Армении (Политехник)

Защита состоится 24 октября 2014г., в 14⁰⁰ часов на заседании
Специализированного совета Механика – 047 в Институте
механики НАН РА

Адрес: 0019, г. Ереван, пр. М. Баграмяна 24/2, avсах@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
механики НАН Армении

Автореферат разослан 12 сентября 2014г.

Ученый секретарь
Специализированного совета,
д.ф.м.н.



А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Почти во всех областях современной техники – строительном деле, самолетостроении, ракетостроении, судостроении, приборостроении, ядерных энергетических установок и др. в качестве оптимальных конструктивных элементов широко применяются тонкие упругие элементы типа балок, пластин и оболочек. Пластины и оболочки, применяемые в технике, в основном, естественно или конструктивно анизотропны (однослойные или многослойные).

В силу того, что соответствующие уравнения пространственной задачи теории упругости невозможно было интегрировать, первоначально большое распространение получил метод гипотез. Классическая теория пластин и оболочек была построена на основе известной гипотезы Кирхгофа-Лява. Эта теория для изотропных пластин и оболочек окончательно была построена и решены множество прикладных задач статики и динамики в монографиях С.П. Тимошенко, В.З. Власова, А.Л.Гольденвейзера, В.В.Новожилова, В.Флюгге, К.Ф.Черныха, А.П.Филина и др. Нелинейная теория пластин и оболочек была построена Х.М.Муштари и К.З.Галимовым, Э.И.Григолоком, М.С.Корнишиным и др. Теория слоистых пластин и оболочек были построены в работах С.Г.Лехницкого, Э.И.Григолока, В.В.Болотина, Я.М. Григоренко и др. Классическая теория анизотропных слоистых оболочек, построена С.А. Амбарцумяном, им и его учениками Г.Е. Багдасаряном, В.Ц.Гнуни, А.А.Хачатряном, М.В.Белубекианом, К.Б.Казаряном решено огромное количество прикладных задач по статике, вынужденным колебаниям и устойчивости пластин и оболочек. Этим же вопросам посвящен ряд работ Л.А.Мовсисяна, Р.М.Киракосяна.

Более жесткие условия налагаемые на конструкции и их элементы, а также внедрение новых материалов явились основой для появления уточненных теорий. Большое распространение получили теория пластин Е. Рейсснера, С.А.Амбарцумяна, типа Тимошенко. Для построения теории пластин и оболочек был предложен метод разложения по поперечной координате, берущий свое начало с работ Коши. Этот метод использован Н.А.Кильчевским. Метод разложения искомых величин по полиномам Лежандра по поперечной координате предложен И.Н.Векуа. Этот же метод применен В.В.Понятовским для вывода двумерных уравнений трансверсально изотропных пластин, и И.Ю. Хома для анизотропных оболочек.

По своей сути любая теория пластин и оболочек есть асимптотическая теория, поскольку принимая ту или иную гипотезу, или ограничившись тем или иным приближением в методе разложений по поперечной координате, получаем некоторую асимптотику и всегда возникает вопрос о точности полученного решения с точки зрения трехмерной задачи теории упругости.

Используя тот факт, что толщина пластин и оболочек намного меньше от их тангенциальных размеров всегда имеется возможность образовать малый геометрический параметр в уравнениях равновесия (движения) и соотношениях упругости. Казалось бы, что разложив все искомые величины в обычный степенной ряд по этому параметру задачу можно решить с заранее заданной точностью. Но оказалось, что после перехода к безразмерным величинам система уравнений трехмерной задачи оказывается сингулярно возмущенной малым параметром. Поэтому асимптотическая теория пластин и оболочек была построена позже других.

Математическая теория сингулярно возмущенных уравнений начало интенсивно развиваться с конца 40-ых годов 20-ого века в работах А.Н.Тихонова, М.И.Вишика и Л.А.Люстерника, А.Л. Гольденвейзера, К.О.Фридрикса, В.Вазова и др.

В основном были рассмотрены такие уравнения, у которых малый параметр является коэффициентом старшего оператора. В уравнениях же для пластин и оболочек малый параметр является коэффициентом части старшего оператора, что не позволяет непосредственно применить ранее известные математические подходы, хотя математические исследования по сингулярным возмущениям развиваются интенсивно и имеется ряд монографий: А.Х.Найфэ, А.Б.Васильева и В.Ф.Бутузов, С.А.Ломов, А.И.Ильин и др. Первые работы по применению асимптотического метода для решения трехмерных уравнений теории упругости для пластин и оболочек были выполнены К.О.Фридрихсом, А.Л.Гольденвейзером, А.Е.Грином, И.И.Воровичем.

Асимптотическая теория изотропных пластин и оболочек построена А.Л.Гольденвейзером, а для анизотропных пластин и оболочек Л.А. Агаловяном. Решено множество статических задач для полос, пластин и оболочек, в том числе, когда анизотропия общая Р.С. Геворкяном, А.М. Хачатрян и др.

Классическая и существующие уточненные теории балок, пластин и оболочек рассматривают лишь один класс задач – когда на лицевых поверхностях заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений. Между тем во многих областях строительства и техники возникают задачи, когда на лицевых поверхностях заданы иные условия – значения компонент вектора перемещения или смешанные условия теории упругости. В частности, такие задачи возникают в расчетах оснований-фундаментов сооружений. Для решения этих классов задач гипотезы плоских сечений и недеформируемых нормалей не применимы.

Асимптотический метод оказался весьма эффективным для решения подобных задач. Л.А.Агаловяном была найдена принципиально новая асимптотика, позволившая найти соответствующие решения без привлечения каких-либо гипотез. Метод и соответствующая асимптотика были использованы и для слоистых сред. Как следствие из математически точных решений был определен коэффициент постели для ортотропных слоистых оснований. Уточнены рамки применимости модели Винклера-Фусса. Полученные результаты по статике пластин и оболочек обобщены в монографиях Л.А. Агаловяна, Л.А. Агаловяна и Р.С. Геворкяна.

Метод физического и геометрического малых параметров приводящих к регулярно возмущенным уравнениям развит В.С. Саркисяном.

В изучение динамических процессов в средах взаимодействующих с различными физическими полями большой вклад внесли ученые Армении, в частности С.А. Амбарцумян, Г.Е. Багдасарян, М.В. Белубекян, З.Н. Даноян, К.Б. Казарян, А.С.Аветисян, С.В. Саркисян и др.

Асимптотический метод был использован для исследования колебаний и устойчивости пластин и оболочек на основе уравнений и соотношений классической теории А.Л.Гольденвейзером, В.Б.Лидским, П.Е.Товстиком, Ю.Д.Каплуновым, Л.Ю.Коссовичем, Г.И.Михасевым, М.В. Белубекяном, Г.Р.Гулгазаряном, М.В.Вильде, Д.А.Приказчиковым и др. В работах С.О.Саркисяна асимптотическим методом построена двумерная теория магнитоупругости электропроводящих тонких тел. Им же разработана асимптотическая теория пластин и оболочек на основе несимметричной теории упругости.

Асимптотический метод оказался эффективным для решения задач о собственных и вынужденных колебаниях однослойных и многослойных полос, пластин и оболочек, как при условиях первой краевой задачи теории упругости на лицевых поверхностях, так и при второй и смешанной краевых задач. Подобные задачи, в частности, возникают при исследовании вибраций фундаментов и оснований сооружений, при изучении распространения волн в слоистых средах, в сейсмологии и сейсмостойком строительстве. Большой интерес представляют рассмотрение собственных и вынужденных колебаний для оболочек в пространственной постановке, а также рассмотрение новых краевых задач

для однослойных и многослойных пластин.

Диссертационная работа посвящена определению частот и форм собственных колебаний однослойных и слоистых ортотропных полос, пластин и оболочек, в том числе при наличии вязкого сопротивления; исследованию пограничного слоя при колебаниях; исследованию вынужденных колебаний полос и оболочек на основе решений соответствующих уравнений теории упругости.

Целью диссертационной работы является:

на основе уравнений движения и соотношений теории упругости:

- определение частот и собственных функций при собственных колебаниях однослойных и слоистых ортотропных полос, пластин, порожденными заданными на лицевых поверхностях смешанными однородными граничными условиями. Установлено, в частности, что собственные функции строго зависят от поперечной координаты,
- исследование собственных колебаний ортотропных оболочек при большой серии однородных граничных условий на лицевых поверхностях,
- исследование вынужденных колебаний ортотропных двухслойных полос при различных условиях контакта между слоями,
- исследование вынужденных колебаний ортотропных оболочек, когда на лицевых поверхностях заданы условия второй или смешанной краевых задач теории упругости,
- исследование вынужденных колебаний ортотропных оболочек, когда на лицевых поверхностях заданы значения соответствующих компонент тензора напряжения (первая краевая задача),
- исследование собственных и вынужденных колебаний ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления
- изучение пограничного слоя при собственных и вынужденных колебаниях.

Научная новизна. *Впервые в трехмерной постановке рассмотрены пространственные динамические краевые задачи теории упругости о собственных и вынужденных колебаниях однослойных и двухслойных ортотропных оболочек, а также при наличии внутреннего вязкого сопротивления.*

Найдено общее асимптотическое решение соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости. В случае вынужденных колебаний рассмотрены случаи, когда на нижней лицевой поверхности оболочки задан вектор перемещения, который во времени меняется гармонически, а на верхней лицевой поверхности заданы два варианта граничных условий.

Найдены решения задачи о вынужденных колебаниях оболочек, когда на лицевых поверхностях заданы условия первой краевой задачи теории упругости, т. е. соответствующие компоненты тензора напряжений, которые во времени меняются гармонически.

Определены функции типа пограничного слоя, установлены скорости их убывания при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки. Разработана процедура сопряжения решений внутренней задачи и пограничного слоя, которая проиллюстрирована, когда на боковой поверхности заданы условия жесткой заделки. Показано, что в случае оболочек пограничный слой через граничные условия влияет на решение внутренней задачи.

В трехмерной постановке рассмотрены собственные колебания ортотропных оболочек при серии граничных условий на лицевых поверхностях. Найдены асимптотические решения соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости. Показано, что в оболочке возникают собственные колебания трех типов: два сдвиговых и продольное, которые обусловлены лишь граничными условиями на лицевых поверхностях. При этом в отличие от пластин, где влияние последующих приближений на значения частот порядка $O(\epsilon^2)$, эффект оболочки проявляется начиная с приближения $s=1$.

Рассмотрены собственные колебания в зоне пограничного слоя. Доказано, что каждой собственной частоте соответствует свой пограничный слой.

Рассмотрены собственные колебания слоистых оболочек при полном и неполном контактах между слоями. Выведены уравнения частот, когда верхняя лицевая поверхность оболочки свободна, нижняя – закреплена, а между слоями выполняются условия полного или неполного контактов.

Рассмотрены собственные и вынужденные колебания оболочек при наличии вязкого сопротивления. Из уравнений трехмерной задачи теории упругости с учетом внутреннего вязкого сопротивления выведены уравнения частот собственных колебаний соответствующие случаям, когда на верхней лицевой поверхности оболочки заданы однородные условия для напряжений или однородные условия для перемещений, а нижняя поверхность оболочки жестко закреплена. Определены главные значения частот, исследован вклад высших приближений. Для этих же случаев изучен пограничный слой.

Рассмотрен новый класс динамических задач для слоистых полос, а также ортотропных пластин.

Практическая ценность работы. Результаты исследований приведенных в работе могут быть использованы в сейсмологии, сейсмостойком строительстве, авиационной и космической технике, приборостроении и других областях.

Апробация работы. Основные результаты включенные в диссертационную работу докладывались и обсуждались на:

- XI Республиканской конференции молодых ученых: Механика. Дилижан, Армения, 1998.
- XII Респ. конференции молодых ученых: Механика. Агавнадзор. Армения. 2001.
- The 3rd World Conference on Structural Control, 7-12 April, Como, Italy. 2002.
- Международной конференции посвященной 95-летию акад. Арутюняна “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Цахкадзор, Армения. 2007.
- Межд. научной конференции “Динамика и прочность механических систем”. Горис-Степанакерт. Армения. 2008.
- Межд. летней школы “Математическое моделирование тонкостенных конструкций”. Цахкадзор. Армения. 2009.
- Межд. школы-конф. молодых ученых: Механика 2009. Агавнадзор. Армения 2009.
- Межд. научной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Дилижан. Армения. 2010.
- Межд. научной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Цахкадзор. Армения. 2012.
- Межд. школы-конференции молодых ученых: Механика. Цахкадзор, Армения, 2013.
- The International Scientific Conference “Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: from Macro- to Nanoscale Structures” (SMT in MB 2013). Minsk. Belarus. 2013.
- Международной научной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис-Степанакерт. Армения. 2014.
- Семинарах “Методы расчета тонкостенных систем” Института механики НАН Армении (Ереван 1998-2014)
- Общем семинаре Института механики НАН Армении (Ереван, 2014г.)

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 22 научные работы, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 179 наименований. Общий объем работы составляет 256 страниц печатного текста, включая 65 рисунков и 20 таблиц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы и сделан краткий обзор по проблемам затронутым в диссертации. Изложены практическая ценность и краткое содержание работы.

В первой главе исследуются собственные колебания однослойных и двухслойных ортотропных полос, вынужденные колебания двухслойных полос при различных граничных условиях на лицевых поверхностях и условиях контакта между слоями, а также колебания в зоне пограничного слоя.

В §1.1 на основе динамических уравнений плоской задачи теории упругости рассмотрены собственные колебания ортотропной полосы при смешанных граничных условиях на продольных краях. Определены частоты собственных колебаний, исследован вопрос о вкладе высших приближений асимптотического разложения и представлен способ удовлетворения начальным условиям. Показана ортогональность форм собственных колебаний. Проведен сравнительный анализ значений частот собственных колебаний, когда на лицевых поверхностях заданы другие, отличные от рассмотренных, граничные условия.

Рассмотрена полоса $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, l], |y| \leq h, h \ll l\}$ при граничных

$$\sigma_{yy}(h) = 0, \sigma_{xy}(h) = 0, \sigma_{xy}(-h) = 0, u_y(-h) = 0 \quad (1.1)$$

и начальных условиях

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x0}(x, y), \quad u_y = v_{y0}(x, y) \\ u'_{xt} &= u_{x1}(x, y), \quad u'_{yt} = v_{y1}(x, y) \end{aligned} \quad \text{при } t=0 \quad (1.2)$$

Решение сформулированной задачи ищется в виде

$$\sigma_{ik} = \sigma_{mn}(x, y)e^{i\omega t}, \quad u_k = \bar{u}_k(x, y)e^{i\omega t}, \quad i, k = x, y; m, n = 1, 2 \quad (1.3)$$

где ω – неизвестная частота собственных колебаний.

После перехода к безразмерным переменным $\xi = x/l, \zeta = y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u = \bar{u}_x/l, v = \bar{u}_y/l$, получается сингулярно возмущенная малым параметром $\varepsilon = h/l$ система уравнений. Решение внутренней задачи отыскивается в виде

$$Q_{ik} = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{q_{ik}+s} Q_{ik}^{(s)}, \quad \omega_*^2 = \varepsilon^s \omega_s^2, \quad \omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2, \quad s = \overline{0, N} \quad (1.4)$$

где Q_{ik} – любая из величин (1.3), а $q_{ik} = -1$ для напряжений, $q_{ik} = 0$ для перемещений.

Для определения частот собственных колебаний сначала рассмотрено нулевое приближение. После удовлетворения граничных условий (1.1), получены две независимые системы однородных алгебраических уравнений. Из условия существования ненулевых решений которых выведены уравнения частот:

$$\sin \sqrt{a_{66}\rho} \omega_* = 0 \Rightarrow \omega_{*sn} = \frac{\pi n}{\sqrt{a_{66}\rho}} = \pi n V_s \Rightarrow \omega_{cn} = \frac{\pi n}{h} V_s, \quad n \in N, \quad V_s = \sqrt{\frac{G_{12}}{\rho}} \quad (1.5)$$

$$\cos 2\sqrt{A_{11}\rho} \omega_* = 0 \Rightarrow \omega_{*pn} = \frac{\pi(2n-1)}{4} V_p \Rightarrow \omega_{pn} = \frac{\pi(2n-1)}{4h} V_p, \quad n \in N, \quad V_p = \sqrt{\frac{1}{A_{11}\rho}} \quad (1.6)$$

где $A_{11} = (a_{11}a_{22} - (a_{12})^2)/a_{11}$, V_s и V_p – известные скорости сейсмических сдвиговых и продольных волн соответственно. Эти значения названы главными значениями частот собственных колебаний, поскольку последующие приближения вносят вклад порядка $O(\epsilon^2)$ и в приложениях обычно ими пренебрегают. Таким образом, в полосе возникают собственные сдвиговые и продольные колебания. При этом сдвиговые колебания обусловлены тангенциальными, а продольные – нетангенциальными граничными условиями.

B §1.2 доказано существование пограничного слоя при собственных колебаниях ортотропной полосы при смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях. Асимптотическим методом определен общий интеграл пограничного слоя. Показано, что величины погранслоя убывают экспоненциально при удалении от кромки, выведено характеристическое уравнение для определения показателей экспонент, характеризующих скорость убывания величин погранслоя:

$$(B_2 D_1 + B_1 D_2) \sin 2\lambda(z_1 - z_2) + (B_2 D_1 - B_1 D_2) \sin 2\lambda(z_1 + z_2) = 0 \quad (2.1)$$

Приведены таблицы с первыми некоторыми значениями показателя, характеризующего скорость убывания величин погранслоя для полосы из изотропного и ортотропного материалов. Показано, что каждой частоте собственных колебаний соответствует отдельный класс пограничных функций.

B §1.3 рассмотрены собственные колебания двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями ($u_y^I = u_y^{II}, \sigma_{yy}^I = \sigma_{yy}^{II}, \sigma_{xy}^I = \sigma_{xy}^{II} = 0$), когда верхняя лицевая поверхность свободна, а нижняя жестко заземлена. Исследован вопрос об ортогональности форм собственных колебаний. Показано, что неполный контакт приводит к тому, что возникают три группы собственных значений, две из которых соответствуют сдвиговым собственным колебаниям (в случае полного контакта один вид сдвиговых колебаний), а третья – продольным.

B §1.4 исследован пограничный слой при собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями, когда одна из лицевых поверхностей свободна, а другая жестко заземлена. Определен общий интеграл пограничного слоя. Выведено характеристическое уравнение, корни которого характеризуют скорость убывания величин пограничного слоя при удалении от поперечного края.

B §1.5 изучены вынужденные колебания двухслойной ортотропной полосы при полном контакте между слоями

$$u_x^I = u_x^{II}, u_y^I = u_y^{II}, \sigma_{yy}^I = \sigma_{yy}^{II}, \sigma_{xy}^I = \sigma_{xy}^{II} \quad \text{при } y = 0 \quad (5.1)$$

когда нижняя кромка второго слоя подвержена динамическому воздействию (в частности, сейсмическому):

$$u_x^{II} = u^-(\xi) \exp(i\Omega t), u_y^{II} = v^-(\xi) \exp(i\Omega t) \quad (5.2)$$

а на верхней кромке первого слоя заданы следующие два случая краевых условий:

$$1) \sigma_{xy}^I = 0, \quad \sigma_{yy}^I = 0 \quad (5.3)$$

$$2) u_x^I = 0, \quad u_y^I = 0 \quad (5.4)$$

Асимптотическим методом определены интегралы задач для обоих случаев. Если функции u^- , v^- являются многочленами, итерационный процесс обрывается на определенном приближении и получается математически точное решение во внутренней задаче. В качестве иллюстраций приведены решения соответствующие случаям, когда

амплитуда динамического воздействия постоянна по координате или меняется по линейному закону.

В §1.6 и §1.7 изучены вынужденные колебания двухслойной ортотропной полосы при неполном:

$$u'_y = u''_y, \sigma'_{yy} = \sigma''_{yy}, \sigma'_{xy} = \sigma''_{xy} = 0 \quad \text{при } y=0 \quad (6.1)$$

а также кулоновом трении:

$$u'_y = u''_y, \sigma'_{yy} = \sigma''_{yy}, \sigma'_{xy} = \sigma''_{xy} = f\sigma'_{yy} \quad \text{при } y=0 \quad (7.1)$$

между слоями, при тех же условиях на лицевых поверхностях.

Во второй главе рассмотрены собственные колебания ортотропной пластинки, когда лицевая поверхность $z=h$ свободна, а на второй лицевой поверхности $z=-h$ заданы различные случаи смешанных краевых условий.

В §2.1 получен общий интеграл внутренней задачи и определены частоты собственных колебаний пластинки. Исследован вопрос о вкладе высших приближений асимптотического разложения. Приведено сравнение значений частот собственных колебаний со случаем, когда лицевая поверхность $z=h$ свободна, а вторая $z=-h$ – жестко закреплена.

Рассматривается ортотропная пластинка $D = \{x, y, z : x, y \in D_0, |z| \leq h\}$, где D_0 – срединная поверхность пластинки, характерный размер которой ℓ ($h \ll \ell$), при следующих однородных условиях:

на лицевой поверхности $z=h$

$$\sigma_{xz}(h) = 0, \sigma_{yz}(h) = 0, \sigma_{zz}(h) = 0 \quad (1.1)$$

на поверхности $z=-h$ одна из следующих трех групп условий:

$$1) W(-h) = 0, \sigma_{xz}(-h) = 0, \sigma_{yz}(-h) = 0 \quad (1.2)$$

$$2) W(-h) = 0, U(-h) = 0, \sigma_{yz}(-h) = 0 \quad (1.3)$$

$$3) W(-h) = 0, \sigma_{xz}(-h) = 0, V(-h) = 0 \quad (1.4)$$

Решение ищется в виде:

$$U = \bar{u}(x, y, z)e^{i\omega t}, V = \bar{v}(x, y, z)e^{i\omega t}, W = \bar{w}(x, y, z)e^{i\omega t}$$

$$\sigma_{ik} = \sigma_{nm}(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad i, k = x, y, z; \quad n, m = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

После перехода к безразмерным переменным $\xi = x/\ell$, $\eta = y/\ell$, $\zeta = z/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u = \bar{u}/\ell$, $v = \bar{v}/\ell$, $w = \bar{w}/\ell$ получается сингулярно возмущенная малым параметром ε система уравнений, решение внутренней задачи которой представляется в виде:

$$\sigma_{ik} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ik}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$u = \varepsilon^s u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (u, v, w), \quad \omega_*^2 = \varepsilon^s \omega_{*s}^2, \quad s = \overline{0, N}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2 \quad (1.6)$$

Определены частоты собственных колебаний и приведено сравнение частот собственных колебаний со случаем, когда лицевая поверхность $z=h$ свободна, а поверхность $z=-h$ – жестко закреплена. Установлено, что при неизменности условий в определенном направлении соответствующие главные значения частот собственных колебаний не изменяются.

При граничных условиях (1.1), (1.2) главные частоты сдвиговых колебаний

определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin \sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi n / \sqrt{a_{55}} \\ \sin \sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi n / \sqrt{a_{44}} \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos \sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}}) \\ \sin \sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi n / \sqrt{a_{44}} \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \text{с) } \sin \sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi n / \sqrt{a_{55}} \\ \cos \sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \text{д) } \cos \sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}}) \\ \cos \sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.10)$$

В случае граничных условий (1.1), (1.3):

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos 2\sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{55}}) \quad n \in N \\ \sin \sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi n / \sqrt{a_{44}} \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos 2\sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{55}}) \quad n \in N \\ \cos \sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.12)$$

Граничным условиям (1.1), (1.4) соответствуют:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin \sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi n / \sqrt{a_{55}} \quad n \in N \\ \cos 2\sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{44}}) \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos \sqrt{a_{55}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}}) \\ \cos 2\sqrt{a_{44}} \omega_* = 0 &\Rightarrow \omega_{*ns}^{(2)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{44}}) \quad n \in N \end{aligned} \quad (1.14)$$

а для продольных собственных колебаний имеем:

$$\cos 2\sqrt{\Delta / \Delta_{11}} \omega_* = 0 \Rightarrow \omega_{*np} = \frac{\pi(2n-1)}{4} \sqrt{\Delta_{11} / \Delta} \quad n \in N \quad (1.15)$$

В §2.2 изучен пограничный слой ортотропной пластинки при собственных колебаниях, когда верхняя лицевая поверхность свободна, а на нижней – задана одна из групп условий (1.2)-(1.4) или

$$W(-h) = 0, \quad U(-h) = 0, \quad V(-h) = 0 \quad (2.1)$$

Асимптотическим методом построен общий интеграл задачи.

Выведены характеристические уравнения для определения скорости убывания величин антиплоского пограничного слоя.

При условиях (1.1),(1.2) и (1.1), (1.3) возможны следующие два случая:

$$1) \cos \sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)} = 0 \Rightarrow \lambda_{kn} = \sqrt{a_{66}(\pi^2(2k-1)^2 - 4\omega_{*n}^2 a_{44})} / (4a_{44}) \quad k, n \in N \quad (2.2)$$

$$2) \sin \sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)} = 0 \Rightarrow \lambda_{kn} = \sqrt{a_{66}(\pi^2 k^2 - \omega_{*n}^2 a_{44})} / a_{44} \quad k, n \in N \quad (2.3)$$

При граничных условиях (1.1), (1.4) и (1.1), (2.1) характеристическое уравнение имеет вид:

$$\cos 2\sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)} = 0 \Rightarrow \lambda_{kn} = \sqrt{a_{66}(\pi^2(2k-1)^2 - 16\omega_{*n}^2 a_{44})} / (16a_{44}) \quad k, n \in N \quad (2.4)$$

Характеристическим уравнением для определения скорости убывания величин плоского пограничного слоя при граничных условиях (1.1), (1.2) и (1.1), (1.4) будет:

$$(A_1 A_4 + A_2 A_3) \sin 2\lambda(\beta_1 - \beta_2) + (A_1 A_4 - A_2 A_3) \sin 2\lambda(\beta_1 + \beta_2) = 0 \quad (2.5)$$

При граничных условиях (1.1), (1.3) и (1.1), (2.1) характеристическое уравнение имеет вид:

$$B_1 \cos 2\lambda(\beta_1 - \beta_2) + B_2 \cos 2\lambda(\beta_1 + \beta_2) + B_3 \sin 2\lambda\beta_1 + B_4 \sin 2\lambda\beta_2 + B_5 = 0 \quad (2.6)$$

Приведены таблицы с первыми значениями показателя, характеризующего скорость убывания величин погранслоя. Показано, что они возрастают достаточно быстро и в прикладных вычислениях можно ограничиться первыми несколькими корнями этих уравнений.

В третьей главе в пространственной постановке рассматриваются вынужденные колебания ортотропных оболочек при двух вариантах граничных условий на верхней лицевой поверхности, когда на нижней лицевой поверхности задан вектор перемещения, который во времени меняется гармонически. Рассмотрен также весьма важный случай, когда на лицевых поверхностях заданы условия первой краевой задачи. Общеизвестна существенная трудность, с которой сталкиваются при решении соответствующих статических задач. Найдены асимптотические решения соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости. Определены амплитуды вынужденных колебаний и установлены условия возникновения резонанса. Как частный случай, в качестве иллюстрации полученных общих результатов, рассмотрены вынужденные колебания цилиндрической оболочки.

В §3.1 рассмотрены вынужденные колебания ортотропной оболочки толщины $2h$: $D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, -h \leq \gamma \leq h\}$, где D_0 – срединная поверхность, α, β – линии кривизны срединной поверхности оболочки, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Требуется найти решения динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости в выбранной триортогональной системе координат при серии граничных условий на лицевых поверхностях $\gamma = \pm h$ и на боковой поверхности оболочки. Для упрощения выкладок используются компоненты несимметричного тензора напряжений τ_{ij} .

$$\tau_{\alpha\alpha} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \tau'_{\alpha\alpha}, \quad \tau_{\alpha\beta} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \tau'_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta; 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \tau'_{\alpha\gamma} \quad (\alpha, \beta), \quad \tau_{\gamma\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \tau'_{\gamma\gamma}$$

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \tau_{\alpha\alpha}) - k_\beta \tau_{\beta\beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (A \tau_{\beta\alpha}) + k_\alpha \tau_{\alpha\beta} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} + \\ & + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}}{R_1} = \rho \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (A, B; \alpha, \beta; R_1, R_2; U, V) \\ & \frac{\partial \tau_{\gamma\gamma}}{\partial \gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}}{R_2}\right) + \frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial \beta} + k_\beta \tau_{\alpha\gamma} + \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$+k_{\alpha}\tau_{\beta\gamma}=\rho\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2W}{\partial t^2}$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\alpha\beta}=\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\beta\alpha}\quad (\text{условие симметрии})$$

Уравнения состояния (соотношения упругости):

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+k_{\alpha}V+\frac{W}{R_1}\right)=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{11}\tau_{\alpha\alpha}+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{12}\tau_{\beta\beta}+a_{13}\tau_{\gamma\gamma}$$

$(A, B; \alpha \leftrightarrow \beta; R_1 \leftrightarrow R_2; U \leftrightarrow V; a_{11}, a_{22}; a_{13}, a_{23})$

$$\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial W}{\partial\gamma}=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{13}\tau_{\alpha\alpha}+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{23}\tau_{\beta\beta}+a_{33}\tau_{\gamma\gamma}$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial\beta}-k_{\beta}V\right)+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial\alpha}-k_{\alpha}U\right)=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{66}\tau_{\alpha\beta}\quad (1.3)$$

$$\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial U}{\partial\gamma}-\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{U}{R_1}+\frac{1}{A}\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{55}\tau_{\alpha\gamma}$$

$(A, B; \alpha, \beta; R_1 \leftrightarrow R_2; U, V; a_{55}, a_{44})$

где k_{α}, k_{β} – геодезические кривизны, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности, ρ – плотность, a_{ij} – постоянные упругости.

На лицевой поверхности $\gamma = h$ задана одна из следующих групп условий:

$$\tau_{\alpha\gamma}(h)=0, \quad \tau_{\beta\gamma}(h)=0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(h)=0\quad (1.4)$$

или

$$U(h)=0, \quad V(h)=0, \quad W(h)=0\quad (1.5)$$

а на поверхности $\gamma = -h$

$$U(-h)=u^-(\alpha, \beta)\exp(i\Omega t), \quad (u, v, w; U, V, W)\quad (1.6)$$

Условия на боковой поверхности пока не конкретизируются, поскольку они в основном влияют на решение пограничного слоя.

Общее решение подобных задач представляет собой сумму решения внутренней задачи и решений пограничных слоев: $I=Q^{\text{int}}+R_j$. При решении задач совершается переход к безразмерным переменным и компонентам вектора перемещения: $\alpha=R\xi$, $\beta=R\eta$, $\gamma=\varepsilon R\zeta=h\zeta$, $U=Ru$, $V=Rv$, $W=Rw$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров срединной поверхности), $\varepsilon=h/R$ – малый параметр. Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q_{\alpha\beta}=Q_{jk}(\xi, \eta, \zeta)\exp(i\Omega t) \quad (\alpha, \beta, \gamma); \quad j, k=1, 2, 3\quad (1.7)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ – любая из величин напряжений и перемещений, Ω – частота вынуждающего внешнего воздействия. В результате получим следующие приведенные уравнения и соотношения упругости:

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \xi} (B\tau_{11}) - k_{\beta} R\tau_{22} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \eta} (A\tau_{21}) + k_{\alpha} R\tau_{12} + (\varepsilon^{-1} + r_1\zeta) \frac{\partial \tau_{13}}{\partial \zeta} + 2r_1\tau_{13} =$$

$$= -\varepsilon^{-2} \Omega_*^2 u - (r_1 + r_2) \varepsilon^{-1} \zeta \Omega_*^2 u - r_1 r_2 \zeta^2 \Omega_*^2 u$$

$$(1 + \varepsilon r_2 \zeta) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \xi} + k_{\alpha} Rv + r_1 w \right) = (1 + \varepsilon r_1 \zeta) a_{11} \tau_{11} + (1 + \varepsilon r_2 \zeta) a_{12} \tau_{22} + a_{13} \tau_{33}$$

$$[\varepsilon^{-1} + \zeta(r_1 + r_2) + \varepsilon \zeta^2 r_1 r_2] \frac{\partial w}{\partial \zeta} = (1 + \varepsilon r_1 \zeta) a_{13} \tau_{11} + (1 + \varepsilon r_2 \zeta) a_{23} \tau_{22} + a_{33} \tau_{33}$$

Предполагается, что параметр $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$ порядка единицы, если же он порядка $O(\varepsilon)$ процесс будет квазистатическим, т.е. инерционные члены не будут присутствовать в уравнениях исходного приближения итерационного процесса. При $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^{-1})$ и выше – будет высокочастотным динамическим процессом. При $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^{-1})$ это состояние можно описать рассматриваемыми уравнениями движения, если вместо $\Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2$ взять $\Omega_*^2 = \rho h R \Omega^2$, а при $\Omega_*^2 = O(\varepsilon^{-2})$ – $\Omega_*^2 = \rho R^2 \Omega^2$. В случае $\Omega_*^2 \geq O(\varepsilon^{-3})$ надо искать другую асимптотику.

Зная вышеуказанную структуру общего решения, для определения величин $\tau_{jk}^{(s)}$, $u^{(s)}$, (u, v, w) внутренней задачи из условий (1.4)-(1.6) соответственно будут следовать следующие граничные условия:

$$\tau_{13}^{(s)}(\zeta=1) = -\bar{\tau}_{13b}^{(s)}(\zeta=1) \quad (13,23,33) \quad (1.8)$$

или

$$u^{(s)}(\zeta=1) = -\bar{u}_b^{(s)}(\zeta=1) \quad (u, v, w) \quad (1.9)$$

и условия при $\zeta=-1$

$$u^{(s)}(\zeta=-1) = u^{-(s)}(\xi, \eta) \quad (u, v, w) \quad (1.10)$$

где $u^{-(0)} = u^- / R$, $u^{-(s)} = -\bar{u}_b^{(s)}(\zeta=-1)$, $s \neq 0$ (u, v, w) .

Величины $\bar{\tau}_{jk}^{(s)}$, $\bar{u}_b^{(s)}$ (u, v, w) будут известны после построения решения пограничного слоя, в частности при $s=0$ они равны нулю.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического представления:

$$\tau_{jk}^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{-1+s} \tau_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j, k = 1, 2, 3; \quad s = \overline{0, N} \quad (1.11)$$

$$(u^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta), v^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta), w^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta)) = \varepsilon^s (u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta))$$

Компоненты тензора напряжений можно выразить через перемещения $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, $w^{(s)}$:

$$\tau_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} - P_u^{(s-1)} \right], \quad \tau_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left[\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} - P_v^{(s-1)} \right] \quad (1.12)$$

$$\tau_{12}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)}, \quad \tau_{21}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)} - r_2 \zeta \tau_{21}^{(s-1)} + r_1 \zeta \tau_{12}^{(s-1)}$$

$$\tau_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left[\Delta_2 \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + \Delta_{23} P_{2\tau}^{(s-1)} + \Delta_1 P_{3\tau}^{(s-1)} - \Delta_2 P_w^{(s-1)} \right]$$

$$(11, 22, 33; \quad \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12}; \quad \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \quad \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3)$$

где

$$\Delta_1 = a_{13} a_{23} - a_{33} a_{12}, \quad \Delta_2 = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}, \quad \Delta_3 = a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23} \quad (1.13)$$

$$\Delta_{ij} = a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \Delta = a_{11} \Delta_{23} + a_{13} \Delta_2 + a_{12} \Delta_1$$

Для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 u^{(s)} = a_{55} P_{6\tau}^{(s-1)} + \frac{\partial P_u^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \quad (u, v; \quad a_{55}, a_{44}; \quad 6\tau, 5\tau)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}} \Omega_*^2 w^{(s)} = F_w^{(s-1)} \quad (1.14)$$

решения которых имеют вид

$$u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_1^{(s)}(\xi, \eta) \sin \chi^u \zeta + C_2^{(s)}(\xi, \eta) \cos \chi^u \zeta + \bar{u}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.15)$$

$$(u, v, w; \quad 1, 3, 5; \quad 2, 4, 6)$$

где

$$\chi^u = \sqrt{a_{55}} \Omega_*, \quad \chi^v = \sqrt{a_{44}} \Omega_*, \quad \chi^w = \sqrt{\Delta / \Delta_{12}} \Omega_*$$

а $\bar{u}^{(s)}$, $\bar{v}^{(s)}$, $\bar{w}^{(s)}$ являются частными решениями уравнений (1.14).

При граничных условиях (1.8), (1.10) решение внутренней задачи имеет вид

$$u^{\text{int}(s)} = (\cos 2\chi^u)^{-1} (\Phi_u^{(s)}(\zeta = 1) \sin \chi^u (1 + \zeta) - \cos \chi^u (1 - \zeta) (\bar{u}^{(s)}(\zeta = -1) - u^{-s}(\zeta = -1))) + \bar{u}^{(s)} \quad (1.16)$$

$$(u, v, w)$$

Приводимые решения конечны, если $\cos 2\chi^u \neq 0$ (u, v, w). А поскольку уравнения $\cos 2\chi^u = 0$ (u, v, w) являются уравнениями главных значений частот собственных колебаний ортотропных оболочек, то резонанс наступит, когда значения частот вынуждающих внешних воздействий совпадут с этими частотами собственных колебаний. При заданной частоте Ω , во избежание резонанса, необходимо соответствующим образом подобрать параметры оболочки (толщина, плотность, упругие характеристики), чтобы уравнения частот собственных колебаний тождественно не удовлетворялись.

При граничных условиях (1.9), (1.10) компоненты вектора перемещения выражаются формулами:

$$u^{\text{int}(s)} = \frac{1}{\sin 2\chi^u} [(u^{-s}(\zeta = -1) - \bar{u}^{(s)}(\zeta = -1)) \sin \chi^u (1 - \zeta) - (\bar{u}_b^{(s)}(\zeta = 1) + \bar{u}^{(s)}(\zeta = 1)) \sin \chi^u (1 + \zeta)] + \bar{u}^{(s)}, \quad (u, v, w) \quad (1.17)$$

Эти решения справедливы, если $\chi''(u, v, w)$ не является решением уравнения частот собственных колебаний, т.е. необходимо, чтобы $\sin 2\chi'' \neq 0(u, v, w)$.

Если функции u^-, v^-, w^- являются полиномами от переменных α, β , итерационный процесс, в случае пластинок, обрывается на определенном приближении, в результате получается математически точное решение во внутренней задаче, которое совпадает с решением для слоя. Для оболочек же итерационный процесс не обрывается и речь может идти об асимптотической точности решения, которую для конкретных случаев несложно оценить. Отметим также, что в случае оболочек пограничный слой, начиная с приближения $s=1$, влияет на решение внутренней задачи.

Рассмотрен случай, когда внешнее воздействие по координате постоянно: $u^-(\xi, \eta) = u^- = const, v^-(\xi, \eta) = v^- = const, w^-(\xi, \eta) = w^- = const$.

Решениям для U^{int}, V^{int} соответствуют сдвиговые колебания оболочки, а для W^{int} – продольные колебания. В исходном приближении, они независимы, а погранслоем не влияет на них, для последующих они взаимовлияют.

Особый интерес представляет исследование вынужденных колебаний оболочек, когда на лицевых поверхностях заданы условия первой краевой задачи теории упругости:

$$\tau_{j\gamma}(\alpha, \beta, \pm h, t) = \tau_{j\gamma}^{\pm}(\alpha, \beta) \exp(i\Omega t), \quad j = \alpha, \beta, \gamma \quad (1.18)$$

где Ω – частота вынуждающего воздействия.

После удовлетворения граничных условий (1.18), для компонент вектора перемещения получаются

$$u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\cos\chi''} (T_u^+ + T_u^-) \sin\chi''\zeta + \frac{1}{2\sin\chi''} (T_u^- - T_u^+) \cos\chi''\zeta + \bar{u}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (u, v, w) \quad (1.19)$$

Из формул (1.19) следует, что во избежание резонанса необходимо, чтобы выполнялись следующие условия

$$\sin 2\chi'' \neq 0 \quad (u, v, w) \quad (1.20)$$

т.е. частота вынуждающего воздействия не совпала с частотой собственных колебаний.

На рис.3.1. приведены графики изменения по поперечной координате абсолютных значений безразмерных перемещений, а на рис. 3.2 графики напряжений $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ в диапазоне $[0; 10^4]$ изменения частоты Ω для ортотропной оболочки из стеклопластика 2:1 при $h=0.2$ м, когда на нижнюю лицевую поверхность действует постоянное по координате внешнее воздействие: $u^- = v^- = w^- = const$, а верхняя лицевая поверхность жестко закреплена.

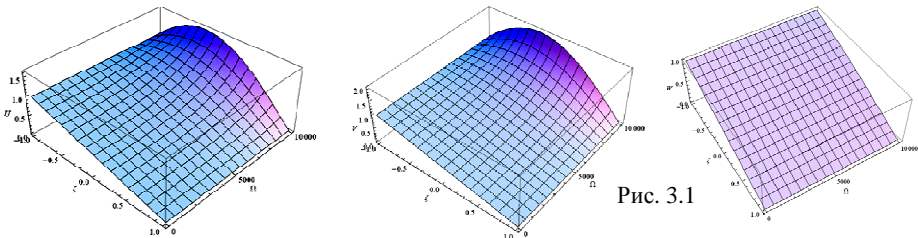


Рис. 3.1

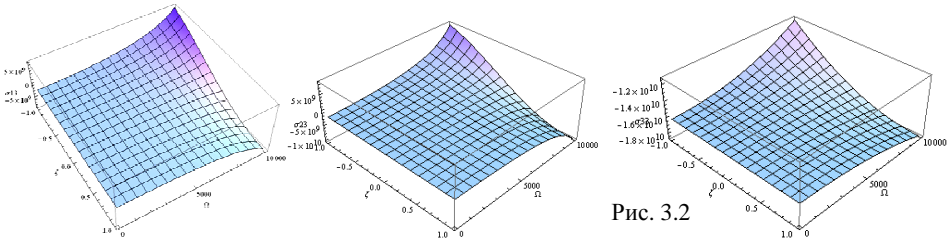


Рис. 3.2

На рис. 3.3 показано поведение абсолютных безразмерных значений перемещений, когда частота внешнего воздействия находится в зоне собственной частоты.

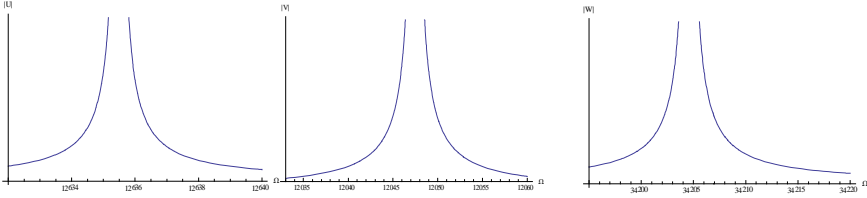


Рис. 3.3

Полученное решение внутренней задачи в общем случае не удовлетворяет условиям на боковых поверхностях (торцах). Поэтому необходимо иметь второе решение, каким является решение типа пограничного слоя.

В § 3.2 определено решение типа пограничного слоя, установлена скорость его убывания при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки. Приведена процедура сопряжения решений внутренней задачи и пограничного слоя, когда на боковой поверхности заданы условия жесткой заделки.

После перехода к новым координатам: $\alpha - \alpha_0 = h\xi$, $\beta = R\eta$, $\gamma = h\zeta$, решение полученной системы уравнений ищется в виде (1.7), (1.11).

Компоненты тензора напряжений можно выразить через перемещения $u_b^{(s)}$, $v_b^{(s)}$, $w_b^{(s)}$:

$$\tau_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left[\frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_{4\tau}^{(s-1)} \right], \quad \tau_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left[A_0 \frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \xi} - R_{6\tau}^{(s-1)} \right], \quad \tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)} \quad (2.1)$$

$$\tau_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[A_0 \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_{5\tau}^{(s-1)} \right] \quad (2.2)$$

$$\tau_{11b}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(A_0 \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \xi} - R_u^{(s-1)} \right) \Delta_{23} + R_v^{(s-1)} \Delta_1 + \left(\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} - R_w^{(s-1)} \right) \Delta_2 \right]$$

$$(11b, 22b, 33b; \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3; \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12})$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{1}{a_{66}} A_0^2 \frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Omega_*^2 v_b^{(s)} = T_v^{(s-1)} \quad (2.3)$$

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta} A_0^2 \frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \xi^2} + A_0 \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} + \delta_1 \right) \frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}} \frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Omega_*^2 u_b^{(s)} = T_u^{(s-1)} \quad (2.4)$$

$(u, w; \Delta / \Delta_{23}, a_{55}; a_{55}, \Delta / \Delta_{12})$

Уравнение (2.3) и соотношения (2.1) описывают антиплоский, а (2.4) и (2.2) – плоский пограничные слои.

Особый интерес представляет исходное приближение. При $s=0$ правые части уравнений (2.3) и (2.4) обращаются в нуль.

Решив уравнение (2.3) и используя (2.1), удовлетворив соответствующим однородным условиям относительно σ_{23b} и v_b для антиплоского пограничного слоя получено уравнение

$$\cos 2\sqrt{a_{44}(\Omega_*^2 + \frac{A_0^2}{a_{66}}\lambda_a^2)} = 0 \quad (2.5)$$

откуда получим вещественные значения для λ_a

$$\lambda_{an} = \sqrt{\frac{a_{66}}{A_0^2} \left(\frac{\pi^2 (2n+1)^2}{16a_{44}} - \Omega_*^2 \right)} \quad (2.6)$$

которые должны быть положительны. Соответствующими собственными функциями являются

$$v_{bn}^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_{an}\xi) C_1^{(0)}(\eta) \cos \pi(2n+1)(1-\zeta) / 4 \quad (2.7)$$

Решение системы (2.4) при $s=0$ ищется в виде

$$\begin{aligned} u_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) &= K_b^{(0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k\zeta) \\ w_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) &= LK_b^{(0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k\zeta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где L – неопределенный пока множитель, k – корень соответствующего характеристического уравнения

$$B_2 k^4 + (\lambda_p^2 B_3 + B_5) k^2 + \lambda_p^4 B_1 + \lambda_p^2 B_4 + \Omega_*^4 = 0 \quad (2.9)$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} k_{1,2}^2 &= (-\lambda_p^2 B_3 - B_5 \pm \sqrt{D}) / (2B_2) \\ D &= \lambda_p^4 (B_3^2 - 4B_1 B_2) + 2\lambda_p^2 (B_3 B_5 - 2B_2 B_4) + B_5^2 - 4B_2 \Omega_*^4 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Каждому k_i соответствует свой множитель L_i :

$$L_i = \frac{\Delta_{23} a_{55} \lambda_p^2 A_0^2 + \Delta k_i^2 + \Delta a_{55} \Omega_*^2}{(\Delta + \Delta_2 a_{55}) A_0 \lambda_p k_i}$$

В результате решение системы (2.4) при $s=0$ примет вид

$$\begin{aligned} u_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) &= \exp(-\lambda_p \xi) \sum_{i=1}^4 K_{ib}^{(0)}(\eta) \exp(k_i \zeta) \\ w_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) &= \exp(-\lambda_p \xi) \sum_{i=1}^4 L_i K_{ib}^{(0)}(\eta) \exp(k_i \zeta) \end{aligned}$$

После удовлетворения соответствующих однородных граничных условий относительно $u_b, w_b, \sigma_{13b}, \sigma_{33b}$ получается характеристическое уравнение для определения λ_p для плоского погранслоя

$$\sum_{(1,2,3,4)} (-1)^i S_i [Q_2(L_3 - L_4) + Q_3(L_4 - L_2) + Q_4(L_2 - L_3)] = 0 \quad (2.11)$$

$$S_i = (\Delta_{12} k_i L_i - \Delta_2 \lambda_p A_0) \exp Q k_i, \quad Q_i = (k_i - \lambda_p A_0 L_i) \exp Q k_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

При $s > 0$ компоненты вектора перемещения в зоне пограничного слоя имеют вид:

$$v_{bn}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_a \xi) C_{1n}^{(s)}(\eta) v_{b0n}^{(0)}(\zeta) + \bar{v}_{bn}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad n = \overline{0, N}$$

$$u_b^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_{pn} \xi) \sum_{i=1}^4 K_{ibn}^{(s)}(\eta) \exp(k_i \zeta) + \bar{u}_{bn}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad n = \overline{0, N}$$

$$w_b^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_{pn} \xi) \sum_{i=1}^4 L_{in} K_{ibn}^{(s)}(\eta) \exp(k_i \zeta) + \bar{w}_{bn}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad n = \overline{0, N}$$

где $\bar{v}_{bn}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \bar{u}_{bn}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \bar{w}_{bn}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$ – частные решения уравнений (2.3) и (2.4).

При удалении от боковой поверхности $\alpha = \alpha_0$ во внутрь оболочки величины антиплоского погранслоя убывают как $\exp(-\lambda_{an} \xi)$, а плоского погранслоя как $\exp(-Re \lambda_{pn} \xi)$. В практических расчетах можно ограничиться первыми несколькими пограничными функциями, т.к. функции с большими номерами убывают очень быстро и их вкладом можно пренебречь.

Данные для пограничного слоя соответствующего противоположному краю $\alpha = \alpha_1$ можно получить от вышеприведенных формул формальной заменой в них ξ на

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h} - \xi = \frac{\alpha_1 - \alpha}{h}, \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1].$$

Проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя при условиях жесткой заделки на боковой поверхности: $u(\xi = 0) = 0, v(\xi = 0) = 0, w(\xi = 0) = 0$.

При решении краевых задач теории упругости асимптотическим методом, как вообще сингулярно возмущенных краевых задач, считается что пограничный слой локализованный вблизи края $\alpha = \alpha_1$ не влияет на данные при $\alpha = \alpha_0$ и наоборот. В данном случае при удовлетворении условий при $\alpha = \alpha_0$ пренебрегается пограничным слоем соответствующим краю $\alpha = \alpha_1$. Это ставит ограничение на длину образующей $l = \alpha_1 - \alpha_0$ оболочки. Необходимо, чтобы

$$1 + \exp\left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h} \lambda_{a1}\right) \approx 1, \quad 1 + \exp\left(-\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{h} Re \lambda_{p1}\right) \approx 1$$

где λ_{a1} – первый корень уравнения (2.5), λ_{p1} – уравнения (2.10).

Доказано, что решение внутренней задачи влияет на значения величин (амплитуд) пограничного слоя, но не на скорость убывания (показатель экспоненты). Пограничный же слой влияет на решение внутренней задачи, начиная с приближений $s \geq 1$.

В четвертой главе в трехмерной постановке рассмотрены собственные колебания ортотропных оболочек при серии граничных условий на лицевых поверхностях. Найдены асимптотические решения соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости. Определены главные значения частот собственных колебаний. Показано, что в оболочке возникают собственные колебания трех типов: два сдвиговых и продольное, которые обусловлены лишь граничными условиями на лицевых поверхностях. Доказано, что каждой собственной частоте соответствует свой пограничный слой. Определены функции типа пограничного слоя, установлены скорости их экспоненциального убывания при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки.

В §4.1 рассмотрены собственные колебания ортотропной оболочки толщины $2h$, занимающая область $D = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in D_0, -h \leq \gamma \leq h\}$.

Считается, что на лицевой поверхности $\gamma = h$ задана одна из следующих групп условий

$$\tau_{\alpha\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(h) = 0 \quad (1.1)$$

$$U(h) = 0, \quad V(h) = 0, \quad W(h) = 0 \quad (1.2)$$

а на поверхности $\gamma = -h$

$$U(-h) = 0, \quad V(-h) = 0, \quad W(-h) = 0 \quad (1.3)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}(-h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(-h) = 0, \quad W(-h) = 0 \quad (1.4)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}(-h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(-h) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(-h) = 0 \quad (1.5)$$

Решение преобразованных уравнений ищется в виде:

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{jk}(\xi, \eta, \zeta)e^{i\omega t} \quad (\alpha, \beta, \gamma); \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ – любая из величин напряжений и перемещений, ω – неизвестная частота собственных колебаний.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического представления

$$\tau_{jk}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{-1+s} \tau_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad \omega_*^2 = \varepsilon^s (\omega_{*s}^2), \quad s = \overline{0, N}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2 \quad (1.7)$$

$$(u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta), w(\xi, \eta, \zeta)) = \varepsilon^s (u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta))$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через компоненты вектора перемещения по формулам аналогичным (1.12) из главы 3.

Для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \omega_{*m}^2 u^{(s-m)} = a_{55} P_{6\tau}^{(s-1)} + \frac{\partial P_u^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \quad m = \overline{0, s}$$

$$\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \omega_{*m}^2 v^{(s-m)} = a_{44} P_{5\tau}^{(s-1)} + \frac{\partial P_v^{(s-1)}}{\partial \zeta} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}} \omega_{*m}^2 w^{(s-m)} = F_w^{(s-1)}$$

При $s=0$ после удовлетворения граничных условий (1.1), (1.3) вытекают следующие уравнения главных частот и соответствующие им значения:

$$\cos 2\sqrt{a_{55}} \omega_{*0} = 0 \Rightarrow \omega_{*0n}^u = \pi(2n+1)/(4\sqrt{a_{55}}) \quad (1.9)$$

$$\cos 2\sqrt{a_{44}} \omega_{*0} = 0 \Rightarrow \omega_{*0n}^v = \pi(2n+1)/(4\sqrt{a_{44}}) \quad (1.10)$$

$$\cos 2\sqrt{\Delta/\Delta_{12}} \omega_{*0} = 0 \Rightarrow \omega_{*0n}^w = \frac{\pi(2n+1)}{4} \sqrt{\Delta_{12}/\Delta} \quad (1.11)$$

Показано, что собственные функции составляют ортогональную систему на отрезке $[-1;1]$. Частотам (1.9), (1.10) соответствуют сдвиговые собственные колебания оболочки, а частотам (1.11) – продольные колебания. Укажем также, что частоты (1.9)-(1.11) совпадают с главными значениями частот сдвиговых и продольных колебаний ортотропных пластин при аналогичных граничных условиях (1.1), (1.3). Эффект оболочки проявляется начиная с $s=1$.

В диссертационной работе найдены главные значения частот и собственные функции при остальных комбинациях граничных условий (1.1)-(1.5).

Решение при $s \geq 1$ зависит от того, какое из значений частот ω_{*0n}^u , ω_{*0n}^v , ω_{*0n}^w взять за основу вычислений, в частности, при решении уравнений (1.8). При $s=1$ и частоте $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^u$ при граничных условиях (1.1), (1.3) получаются следующие значения компонент вектора перемещения:

$$\begin{aligned} v_n^{(1,u)} &= \frac{-1}{\cos \sqrt{a_{44}/a_{55}} \pi(2n+1)/2} \left(\frac{4\sqrt{a_{44}a_{55}}}{\pi(2n+1)} \bar{\tau}_{23b}^{(1,u)}(\zeta=1) \times \right. \\ &\times \sin(\sqrt{a_{44}/a_{55}} \pi(2n+1)/4 (1+\zeta)) + \\ &\left. + \bar{v}_b^{(1,u)}(\zeta=-1) \cos(\sqrt{a_{44}/a_{55}} \pi(2n+1)/4 (1-\zeta)) \right) \\ w_n^{(1,u)} &= C_{5n}^{(1,u)} \sin \sqrt{\Delta/\Delta_{12}} \omega_{*0n}^u \zeta + C_{6n}^{(1,u)} \cos \sqrt{\Delta/\Delta_{12}} \omega_{*0n}^u \zeta + w_0^{(1,u)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $w_0^{(1,u)}$ – частное решение третьего уравнения из (1.8).

Для частоты ω_{*1n}^u имеем:

$$(\omega_{*1n}^u)^2 = \frac{(-1)^n \pi(2n+1) Q_1 + 4 Q_2}{a_{55} C_{2n}^{(0,u)}} - \frac{(r_1 + r_2)}{2a_{55}} \quad (1.13)$$

$$Q_1 = \frac{\bar{u}_b^{(1,u)}(\zeta=-1)}{4}, \quad Q_2 = \frac{1}{4} (a_{55} \bar{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=1) - r_1 C_{2n}^{(0,u)})$$

То есть поправка к значению частоты порядка $O(\varepsilon)$, в пластинах же поправка порядка $O(\varepsilon^2)$.

§4.2 посвящен изучению пограничного слоя при собственных колебаниях ортотропной оболочки. Решение пограничного слоя ищется таким же образом, как и

в §3.2. Из исходного приближения выводятся характеристические уравнения для определения скорости убывания величин антиплоского и плоского пограничных слоев.

Решение антиплоского пограничного слоя имеет вид:

$$v_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = e^{-\lambda_a \xi} C^{(0)}(\eta) v_{1b}^{(0)}(\zeta). \quad (2.1)$$

После удовлетворения граничных условий (1.1), (1.3) выводится характеристическое уравнение для определения λ_a – скорости убывания величин антиплоского погранслоя:

$$\cos 2\sqrt{a_{44}(\omega_{*0}^2 + \frac{A_0^2}{a_{66}}\lambda_a^2)} = 0 \Rightarrow \lambda_{ank} = \sqrt{\frac{a_{66}}{A_0^2} \left(\frac{\pi^2 (2n+1)^2}{16a_{44}} - \omega_{*0k}^2 \right)} \quad (2.2)$$

Решение плоского пограничного слоя представляется в виде:

$$u_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = K_b^{(0)}(\eta) e^{-\lambda_p \xi + k \zeta}, \quad w_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = LK_b^{(0)}(\eta) e^{-\lambda_p \xi + k \zeta} \quad (2.3)$$

где λ_p в случае граничных условий (1.1), (1.3), определяется из характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & S_1 [Q_2(L_3 - L_4) + Q_3(L_4 - L_2) + Q_4(L_2 - L_3)] + \\ & + S_2 [Q_1(L_4 - L_3) + Q_3(L_1 - L_4) + Q_4(L_3 - L_1)] + \\ & S_3 [Q_1(L_2 - L_4) + Q_2(L_4 - L_1) + Q_4(L_1 - L_2)] + \\ & + S_4 [Q_1(L_3 - L_2) + Q_2(L_1 - L_3) + Q_3(L_2 - L_1)] = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$S_i = e^{2k_i} (k_i L_i \Delta_{12} - \lambda_p A_0 \Delta_2), \quad Q_i = e^{2k_i} (k_i - \lambda_p A_0 L_i), \quad i = \overline{1,4}$$

Получены также решения плоского и антиплоского пограничных слоев при остальных комбинациях граничных условий.

В решения пограничных слоев в качестве параметра входит Ω_0 и каждому его значению будет соответствовать счетное множество λ_a и λ_p . При этом собственные колебания одного типа порождают в зоне пограничного слоя колебания и другого типа. То есть в зоне пограничного слоя создается весьма пестрая картина собственных колебаний. Приведены таблицы с некоторыми первыми значениями λ_a и λ_p для оболочки из ортотропного материала. Доказано, что при приближениях $s \geq 1$ пограничный слой через граничные условия влияет на решение внутренней задачи, которое порядка $O(\varepsilon)$.

В пятой главе рассматриваются собственные колебания двухслойной ортотропной оболочки при полном и неполном контактах между слоями. Доказано, что при собственных колебаниях двухслойной оболочки, как при полном, так и неполном контакте между слоями, возникают три типа колебаний – два сдвиговых и продольные, при этом в исходном приближении значения частот колебаний оболочки совпадают со значениями частот колебаний пластинки при аналогичных условиях. Влияние специфических характеристик (кривизн) оболочки проявляется при $s \geq 1$. Вносимая поправка порядка $O(\varepsilon)$. В случае же пластинок поправка к значениям частот порядка $O(\varepsilon^2)$. В силу условий свободного контакта в тангенциальном направлении в каждом слое возникают свои собственные колебания с соответствующими значениями частот сдвиговых колебаний. Эти частоты отличны от главных значений частот собственных

колебаний, когда контакт между слоями полный. Для всех случаев определены формы собственных колебаний.

Исследован пограничный слой для двухслойных ортотропных оболочек. Выведены характеристические уравнения для определения показателя экспоненциального убывания величин погранслоя. Вычислены первые некоторые значения этих показателей при полном и неполном контактах между слоями.

В § 5.1 рассматриваются собственные колебания двухслойной ортотропной оболочки, $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in \Omega_0, -h_2 \leq \gamma \leq h_1\}$, где Ω_0 – поверхность контакта слоев, $\max\{h_1, h_2\} = h, h \ll R$.

На лицевой поверхности $\gamma = h_1$ заданы условия:

$$\tau_{\alpha\gamma}^I(h_1) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}^I(h_1) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}^I(h_1) = 0 \quad (1.1)$$

а на поверхности $\gamma = -h_2$ – условия

$$U^{II}(-h_2) = 0, \quad V^{II}(-h_2) = 0, \quad W^{II}(-h_2) = 0 \quad (1.2)$$

На поверхности контакта должны выполняться условия полного контакта

$$\tau_{\alpha\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\alpha\gamma}^{II}(\gamma=0), \quad \tau_{\beta\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\beta\gamma}^{II}(\gamma=0), \quad \tau_{\gamma\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\gamma\gamma}^{II}(\gamma=0) \quad (1.3)$$

$$U^I(\gamma=0) = U^{II}(\gamma=0), \quad V^I(\gamma=0) = V^{II}(\gamma=0), \quad W^I(\gamma=0) = W^{II}(\gamma=0) \quad (1.4)$$

Решение задачи ищется в виде:

$$Q_{\alpha\beta}^{(j)} = Q_{mk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) e^{i\omega t} \quad (\alpha, \beta, \gamma); m, k = 1, 2, 3; j = I, II \quad (1.5)$$

где $Q_{\alpha\beta}^{(j)}$ – любая из величин напряжений и перемещений, ω – неизвестная частота собственных колебаний. Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического представления

$$\begin{aligned} \tau_{mk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) &= \varepsilon^{-1+s} \tau_{mk}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad m, k = 1, 2, 3; \quad s = \overline{0, N}, \quad j = I, II \\ (u^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)) &= \varepsilon^s (u^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta)) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\omega_s^2 = \varepsilon^s \omega_s^2, \quad \omega = h\omega$$

Для определения компонент вектора перемещения получают уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(j)} \omega_{sm}^2 \rho^{(j)} u^{(j,s-m)} &= a_{55}^{(j)} P_{6\tau}^{(j,s-1)} + \frac{\partial P_u^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} \quad (u, v; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau) \\ \frac{\partial^2 w^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}} \omega_{sm}^2 \rho^{(j)} w^{(j,s-m)} &= F_w^{(j,s-1)}, \quad m = \overline{0, s} \end{aligned} \quad (1.7)$$

а напряжения выражаются через перемещения u, v, w по формулам, аналогичным (1.12) из главы 3.

При $s=0$ уравнения (1.7) становятся независимыми. Решив эти уравнения и удовлетворив условиям (1.1)-(1.4), получают следующие характеристические уравнения для определения главных значений частот:

$$A_u^- \cos(\omega_{*0} B_u^-) - A_u^+ \cos(\omega_{*0} B_u^+) = 0 \quad (u, v, w) \quad (1.8)$$

где

$$A_u^\pm = \sqrt{\rho^I a_{55}^{II} / (\rho^{II} a_{55}^I)} \pm 1 \quad (u, v, w; a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)}, \Delta^{(j)} / \Delta_{12}^{(j)}) \quad (1.9)$$

$$B_u^\pm = \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}} \zeta_2 \pm \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta_1$$

Из этих уравнений несложно определить значения частот. Определены собственные функции. Доказано, что они ортогональны с весом $\sqrt{\rho^j}$ на интервале $[-\zeta_2, \zeta_1]$.

В § 5.2 рассмотрен пограничный слой при собственных колебаниях двухслойных ортотропных оболочек при полном контакте между слоями.

Выведены характеристические уравнения для определения показателей экспоненциальных функций соответствующие антиплоскому и плоскому пограничным слоям.

Доказано, что каждому собственному значению ω_{*0} соответствует свое семейство пограничных функций. При этом собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания и другого типа.

В §5.3 рассмотрены собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при неполном контакте между слоями:

$$\tau_{\alpha\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\alpha\gamma}^{II}(\gamma=0) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\beta\gamma}^{II}(\gamma=0) = 0 \quad (3.1)$$

$$\tau_{\gamma\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\gamma\gamma}^{II}(\gamma=0), \quad W^I(\gamma=0) = W^{II}(\gamma=0)$$

при условиях (1.1), (1.2).

Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости, выведены следующие характеристические уравнения для определения частот:

$$\sin \sqrt{a_{55}^I \rho^I} \omega_{*0} \zeta_1 = 0 \quad (a_{55}, a_{44}) \quad (3.2)$$

$$\cos \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}} \omega_{*0} \zeta_2 = 0 \quad (a_{55}, a_{44}) \quad (3.3)$$

$$D_w(\omega_{*0}) = A_w^- \cos(\omega_{*0} B_w^-) - A_w^+ \cos(\omega_{*0} B_w^+) = 0$$

$$A_w^\pm = \sqrt{\frac{\rho^I \Delta^{II} \Delta_{12}^I}{\rho^{II} \Delta^I \Delta_{12}^{II}}} \pm 1, \quad B_w^\pm = \sqrt{\Delta^{II} / \Delta_{12}^{II} \rho^{II}} \zeta_2 \pm \sqrt{\Delta^I / \Delta_{12}^I \rho^I} \zeta_1 \quad (3.4)$$

Значения частот сдвиговых колебаний вычисляются непосредственно:

$$\omega_{*0n}^{(1,u)} = \pi n / (\sqrt{a_{55}^I \rho^I} \zeta_1) \quad (u, v; a_{55}, a_{44}) \quad (3.5)$$

$$\omega_{*0n}^{(2,u)} = \pi(2n+1) / (2\sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}} \zeta_2) \quad (u, v; a_{55}, a_{44}) \quad (3.6)$$

Из формул (3.5), (3.6) следует, что в силу условий свободного контакта в тангенциальном направлении, в каждом слое возникают свои собственные колебания с соответствующими значениями частот сдвиговых колебаний. Эти частоты отличны от главных значений частот собственных колебаний, когда контакт между слоями полный (уравнения (1.10)).

Частотам $\omega_{*0n}^{(i,u)}$ и $\omega_{*0n}^{(i,v)}$ соответствуют сдвиговые собственные колебания оболочки, а частотам ω_{*0n}^w – продольные колебания. Как и следовало ожидать, характеристическое уравнение для определения частот продольных колебаний совпадает со случаем полного контакта между слоями.

В § 5.4 рассмотрен пограничный слой при собственных колебаниях двухслойных ортотропных оболочек когда контакт между слоями неполный.

Определены значения показателей экспонент в антиплоском пограничном слое, которые различны для различных слоев:

$$\lambda_{an}^I = \sqrt{a_{66}^I (\pi^2 n^2 - \omega_{*0}^2 \rho^I a_{44}^I \zeta_1^2)} / (A_0^2 a_{44}^I \zeta_1^2) \quad (4.1)$$

$$\lambda_{an}^{II} = \sqrt{a_{66}^{II} (\pi^2 (2n+1)^2 - 4 \omega_{*0}^2 \rho^{II} a_{44}^{II} \zeta_2^2)} / (4 A_0^2 a_{44}^{II} \zeta_2^2)$$

Асимптотическим методом выведено характеристическое уравнение для определения показателей экспоненты λ_p в плоском погранслое.

Решены соответствующие трансцендентные уравнения. В табл.1 приведены некоторые первые значения λ_a и λ_p для оболочки, у которой первый слой состоит из стеклопластика 2:1, а второй – из графито-эпоксидного материала.

Таблица 1

λ_p (плоский пограничный слой)				
n	$\omega_{*0n}^{(1,u)} = \pi n / (\zeta_1 \sqrt{a_{55}^I \rho^I})$	$\omega_{*0n}^v = \pi n / (\zeta_1 \sqrt{a_{44}^I \rho^I})$	n	$\omega_{*0n}^{(2,u)} = \pi(2n+1) / (2\zeta_2 \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}})$
1	0.40735+0.82296 i 1.05711+0.97062 i	0.43489+0.842446 i 1.00791+0.925451 i	0	0.06368+2.37012 i 0.342771+1.29636 i
2	0.13445+1.04832 i 0.44037+3.18922 i	0.184086+4.26358 i 0.261385+0.97629 i	1	0.030468+4.88082 i 0.13747+4.66854 i
3	0.35142+1.74458 i 1.79803+0.39222 i 3.17133+2.91186 i	0.339101+3.1777 i 0.3554+1.64291 i 1.69712+0.659668 i	$\omega_{*0}^w = 6364.47$ 0.105058+1.1298 i 1.33116+1.22225 i	
λ_a (антиплоский пограничный слой)				
$\lambda_{an}^I = \sqrt{\frac{a_{66}^I}{A_0^2 a_{44}^I \zeta_1^2} (\pi^2 n^2 - \omega_{*0}^2 \rho^I a_{44}^I \zeta_1^2)}$				
n	$\omega_{*0n}^{(1,u)} = \pi n / (\zeta_1 \sqrt{a_{55}^I \rho^I})$	$\omega_{*0n}^v = \pi n / (\zeta_1 \sqrt{a_{44}^I \rho^I})$	n	$\omega_{*0n}^{(2,u)} = \pi(2n+1) / (2\zeta_2 \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}})$
1	4.83371 7.97802 10.9566	4.91635 8.02836 10.9933	0	1
2	6.08781 9.66743 12.883	6.34698 9.83269 13.0074	$\omega_{*0}^w = 6364.47$ 4.2631 7.64579	
$\lambda_{an}^{II} = \sqrt{\frac{a_{66}^{II}}{4 A_0^2 a_{44}^{II} \zeta_2^2} (\pi^2 (2n+1)^2 - 4 \omega_{*0}^2 \rho^{II} a_{44}^{II} \zeta_2^2)}$				
n	$\omega_{*0n}^{(1,u)} = \pi n / (\zeta_1 \sqrt{a_{55}^I \rho^I})$	$\omega_{*0n}^v = \pi n / (\zeta_1 \sqrt{a_{44}^I \rho^I})$	n	$\omega_{*0n}^{(2,u)} = \pi(2n+1) / (2\zeta_2 \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}})$
1	8.95819 29.1185 48.8176	9.03753 29.143 48.8322	0	1
2	5.75613 28.2979 48.3326	6.2325 28.3986 48.3917	$\omega_{*0}^w = 6364.47$ 8.42915 28.9601	

Шестая глава посвящена свободным и вынужденным колебаниям ортотропных оболочек $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in \Omega_0, -h \leq \gamma \leq h\}$ при наличии вязкого сопротивления.

В §6.1 рассмотрены собственные колебания ортотропных оболочек, соответствующие однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(h) = 0 \\ U(-h) = 0, \quad V(-h) = 0, \quad W(-h) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

или

$$\begin{aligned} U(h) = 0, \quad V(h) = 0, \quad W(h) = 0 \\ U(-h) = 0, \quad V(-h) = 0, \quad W(-h) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В силу наличия слагаемого вязкого сопротивления пропорционального скорости точек (k_1 – коэффициент вязкого сопротивления), решение динамических уравнений 3D задачи ищется в виде:

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{jk}(\xi, \eta, \zeta)e^{\omega t} \quad (\alpha, \beta, \gamma); j, k = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ – любая из величин напряжений и перемещений, ω – неизвестная частота собственных колебаний.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического представления

$$\begin{aligned} \tau_{jk}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{-1+s} \tau_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j, k = 1, 2, 3; \quad s = 0, N, \quad \omega_* = \varepsilon^s \omega_{*s}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2 \\ (u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta), w(\xi, \eta, \zeta)) = \varepsilon^s (u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение внутренней задачи должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\tau_{13}^{(s)}(\zeta = 1) = -\bar{\tau}_{13b}^{(s)}(\zeta = 1) \quad (13, 23, 33) \quad (1.5)$$

или

$$u^{(s)}(\zeta = 1) = -\bar{u}_b^{(s)}(\zeta = 1) \quad (u, v, w) \quad (1.6)$$

и условия при $\zeta = -1$

$$u^{(s)}(\zeta = -1) = -\bar{u}_b^{(s)}(\zeta = -1) \quad (u, v, w) \quad (1.7)$$

где $\bar{u}_b^{(0)} = 0, \quad \bar{\tau}_{m3b}^{(0)} = 0, \quad m = 1, 2, 3.$

Компоненты тензора напряжений выражаются через перемещения $u^{(s)}, v^{(s)}, w^{(s)}$.

Для определения последних получены уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{55}(2K\omega_m + c^{(m)})u^{(s-m)} = a_{55}P_{6\tau}^{(s-1)} + \frac{\partial P_u^{(s-1)}}{\partial \zeta} \quad (u, v; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau), m = 0, s \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\Delta}{\Delta_{12}}(2K\omega_m + c^{(m)})w^{(s-m)} = F_w^{(s-1)}, \quad 2K = k_1 h / \sqrt{\rho}, \quad c^{(j)} = \sum_{n=0}^j \omega_{(j-n)} \omega_{(n)}$$

которые при $s = 0$ независимы.

Граничным условиям (1.1) соответствуют следующие значения частот:

$$\omega_{*0n} = -K \pm \sqrt{K^2 - \pi^2(2n+1)^2 / (16a_{55})} \quad (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12}) \quad (1.9)$$

а условиям (1.2):

$$\omega_{*0n} = -K \pm \sqrt{K^2 - \pi^2 n^2 / (4a_{55})} (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12}) \quad (1.10)$$

Показано, что при

1) $K > \pi(2n+1)/(4\sqrt{a_{55}}) (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$ при условиях (1.1), и при $K > \pi n/(2\sqrt{a_{55}}) (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$ при условиях (1.2), собственные колебания затухают без явного колебания, как

$$\exp\left(-\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta t\right), \quad 0 < \theta < 2 \quad (\theta \neq 1) \quad (1.11)$$

При $K < \pi(2n+1)/(4\sqrt{a_{55}}) (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$ условиям (1.1) соответствуют

$$\omega_{*0n} = K \left(-1 \pm i \sqrt{\left(\pi(2n+1)/(4\sqrt{a_{55}}K) \right)^2 - 1} \right) (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12}; I, II, III) \quad (1.12)$$

а при и $K < \pi n/(2\sqrt{a_{55}}) (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$ условиям (1.2) –

$$\omega_{*0n} = K \left(-1 \pm i \sqrt{\left(\pi n/(2\sqrt{a_{55}}K) \right)^2 - 1} \right) (a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12}, I, II, III) \quad (1.13)$$

То есть в этих случаях затухание будет колебательным.

В §6.2 рассмотрены собственные колебания в зоне пограничного слоя. Выведены характеристические уравнения для определения показателей экспонент для антиплоского и плоского пограничных слоев.

Граничным условиям (1.1) соответствует уравнение

$$\cos 2\alpha_0 = 0, \quad \alpha_a = \sqrt{a_{44}(A_0^2 \lambda_a^2 / a_{66} - 2K\omega_{*0} - \omega_{*0}^2)} \quad (2.1)$$

для антиплоского пограничного слоя, откуда вычисляется λ_{ank} :

$$\lambda_{ank} = \sqrt{a_{66}A_0^{-2}(\pi^2(1+2n)^2/(16a_{44}) + 2K\omega_{*0k} + \omega_{*0k}^2)} \quad (2.2)$$

а условиям (1.2) соответствует уравнение

$$\sin 2\alpha_0 = 0, \quad \alpha_a = \sqrt{a_{44}(A_0^2 \lambda_a^2 / a_{66} - 2K\omega_{*0} - \omega_{*0}^2)} \quad (2.3)$$

откуда

$$\lambda_{ank} = \sqrt{a_{66}A_0^{-2}(\pi^2 n^2 / (4a_{44}) + 2K\omega_{*0k} + \omega_{*0k}^2)} \quad (2.4)$$

Получено также уравнение для определения λ_p плоского пограничного слоя.

При условиях (1.1):

$$\sum_{(1,2,3,4)} (-1)^i S_1 [Q_2(L_3 - L_4) + Q_3(L_4 - L_2) + Q_4(L_2 - L_3)] = 0 \quad (2.5)$$

$$S_i = (\Delta_{12} k_i L_i - \Delta_2 \lambda_p A_0) \exp(2k_i), \quad Q_i = (k_i - \lambda_p A_0 L_i) \exp(2k_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

а при условиях (1.2):

$$(L_2 - L_3)(L_4 - L_1) \operatorname{ch}(k_2 + k_3 - k_1 - k_4) + (L_1 - L_3)(L_2 - L_4) \operatorname{ch}(k_1 + k_3 - k_2 - k_4) + (L_1 - L_2)(L_4 - L_3) \operatorname{ch}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) = 0 \quad (2.6)$$

Значения параметров k_i, L_i входящие в уравнения (2.5) и (2.6) приведены в диссертационной работе.

В §6.3 рассматриваются вынужденные колебания ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления, когда на верхней лицевой поверхности $\gamma = h$ оболочки заданы два варианта пространственных граничных условий:

$$\tau_{\alpha\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}(h) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}(h) = 0 \quad (3.1)$$

или

$$U(h) = 0, \quad V(h) = 0, \quad W(h) = 0 \quad (3.2)$$

а на нижней лицевой поверхности $\gamma = -h$ задан вектор перемещения

$$U(-h) = u^-(\alpha, \beta) \sin(\Omega t), \quad (U, V, W; u, v, w) \quad (3.3)$$

Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости. Определены амплитуды вынужденных колебаний и установлено, что наличие вязкого сопротивления приводит к тому, что становится невозможным обращение в бесконечность компонентов тензора напряжений и вектора перемещения.

Решения задач разыскиваются в виде

$$Q(x, y, z, t) = Q_I(\xi, \eta, \zeta) \sin(\Omega t) + Q_{II}(\xi, \eta, \zeta) \cos(\Omega t) \quad (3.4)$$

где Q – любая из величин напряжений и перемещений, Ω – частота вынуждающего внешнего воздействия.

Решение внутренней задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{mkj}^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta) &= \varepsilon^{-1+s} \tau_{mkj}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad m, k = 1, 2, 3; \quad s = \overline{0, N}; \quad j = I, II \\ \left(u_j^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta), v_j^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta), w_j^{\text{int}}(\xi, \eta, \zeta) \right) &= \varepsilon^s \left(u_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), v_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), w_j^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Принимается, что с самого начала имеется установившийся динамический процесс. Показано, что решение внутренней задачи должно удовлетворять условиям:

$$\tau_{13j}^{(s)}(\zeta = 1) = -\bar{\tau}_{13jb}^{(s)}(\zeta = 1) \quad (1, 3, 2, 3, 3) \quad j = I, II \quad (3.6)$$

или

$$u_j^{(s)}(\zeta = 1) = -\bar{u}_{jb}^{(s)}(\zeta = 1) \quad (u, v, w), \quad j = I, II \quad (3.7)$$

$$\text{и условиям при } \zeta = -1: \quad u_j^{(s)}(\zeta = -1) = u_j^{-s}(\xi, \eta) \quad (u, v, w) \quad (3.8)$$

где

$$u_I^{-0} = u^- / R, \quad u_{II}^{-0} = 0, \quad \bar{\tau}_{m3jb}^{(0)} = 0.$$

$$u_j^{-s} = -\bar{u}_{jb}^{(s)}(\zeta = -1), \quad s \neq 0 \quad (u, v, w), m = 1, 2, 3, \quad j = I, II$$

По известной процедуре для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}(\Omega_*^2 u_I^{(s)} + 2K\Omega_* u_{II}^{(s)}) &= a_{55} P_{6\tau I}^{(s-1)} + \frac{\partial P_{ul}^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \quad (u, v; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau) \\ \frac{\partial^2 u_{II}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}(\Omega_*^2 u_{II}^{(s)} - 2K\Omega_* u_I^{(s)}) &= a_{55} P_{6\tau II}^{(s-1)} + \frac{\partial P_{ul}^{(s-1)}}{\partial \zeta}, \quad (u, v; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau) \\ \frac{\partial^2 w_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\Delta_{12}}(\Omega_*^2 w_I^{(s)} + 2K\Omega_* w_{II}^{(s)}) &= F_{wI}^{(s-1)} \quad (+K \rightarrow -K; I \leftrightarrow II) \end{aligned} \quad (3.9)$$

После некоторых преобразований системы (3.9), ее решение сводится к определению $u_I^{(s)}, v_I^{(s)}, w_I^{(s)}$ из уравнений:

$$\frac{\partial^4 u_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{55}\Omega_*^2 \frac{\partial^2 u_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^2 \Omega_*^2 (\Omega_*^2 + 4K^2) u_I^{(s)} = Q_{ul}^{(s-1)} \quad (3.10)$$

$$(u, v, w; a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$$

Решениями уравнений (3.10) являются

$$u_I^{(s)} = u_{I0}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + u_{Iu}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w) \quad (3.11)$$

Остальные величины выражаются через $u_I^{(s)}, v_I^{(s)}, w_I^{(s)}$.

В результате имеем решение

$$u_I^{(s)} = \frac{1}{\Delta_u} (D_1^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{1u} + D_2^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{2u} + D_3^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{3u} + D_4^{(u,s)}(\xi, \eta) \varphi_{4u}) + u_{Iu}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1u} &= \text{ch} \gamma_u \zeta \cos \delta_u \zeta, \quad \varphi_{2u} = \text{sh} \gamma_u \zeta \sin \delta_u \zeta, \quad \varphi_{3u} = \text{ch} \gamma_u \zeta \sin \delta_u \zeta, \quad \varphi_{4u} = \text{sh} \gamma_u \zeta \cos \delta_u \zeta \\ \gamma_u &= \sqrt{\frac{a_{55} \Omega_u}{2} (\sqrt{\Omega_u^2 + 4K^2} - \Omega_u)}, \quad \delta_u = \sqrt{\frac{a_{55} \Omega_u}{2} (\sqrt{\Omega_u^2 + 4K^2} + \Omega_u)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$(u, v, w; a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12})$$

при условиях (3.1), (3.3)

$$\Delta_u = -1/2(\gamma_u^2 + \delta_u^2)(\text{ch}(4\gamma_u) + \cos(4\delta_u)) \quad (u, v, w) \quad (3.14)$$

а при условиях (3.2), (3.3)

$$\Delta_u = 1/2(\cos(4\delta_u) - \text{ch}(4\gamma_u)) \quad (3.15)$$

Рассматривая подробнее поведение уравнений $\Delta_u = 0$, (u, v, w) , при граничных условиях (3.1), (3.3) и (3.2), (3.3) в зависимости от коэффициента вязкого сопротивления и частоты вынуждающего воздействия, можно заключить, что при отсутствии вязкого сопротивления $\Delta_u(u, v, w)$, обращается в нуль, когда Ω_* совпадает со значениями собственной частоты, т.е. возникает резонанс, а при наличии вязкого сопротивления эти уравнения не имеют действительных корней, т.е. амплитуда вынужденных колебаний не может превратиться в бесконечность.

Таким образом, наличие вязкого сопротивления приводит к тому, что в оболочке не может возникнуть ситуаций, когда некоторые величины обращаются в бесконечность.

На рис. 6.1 приведены графики значений $U = \sqrt{U_I^2 + U_{II}^2}$, (U, V, W) , т.е. безразмерных амплитуд вынужденных колебаний ортотропной оболочки из стеклопластика 2:1 с параметрами: $h=0.2\text{м}$, $K=0.1$, когда на нижнюю лицевую поверхность действует постоянное внешнее воздействие: $u^- = v^- = w^- = \text{const}$, а верхняя лицевая поверхность жестко закреплена.

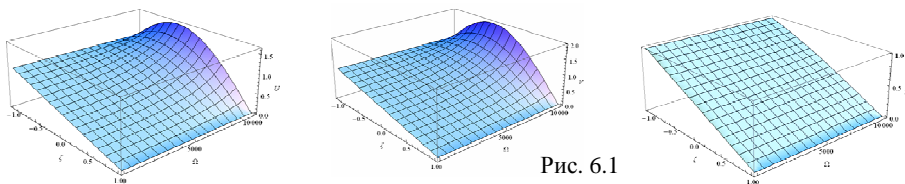


Рис. 6.1

Таблица 2

$\Delta_u = 0$	$\Delta_v = 0$	$\Delta_w = 0$
12635.48+0.012127 I	12047.46+0.012127 I	34204.57+0.012126 I
25270.96+0.012126 I	24094.92+0.012128 I	68409.15+0.012115 I
37906.44+0.012126 I	36142.37+0.012127 I	102613.72+0.012126 I

В табл.2 приведены некоторые частоты собственных колебаний выше рассмотренной ортотропной оболочки в случае условий второй краевой задачи на лицевых поверхностях.

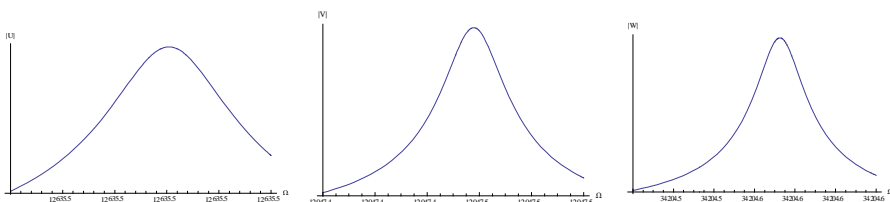


Рис. 6.2

На рис.6.3 приведены графики напряжений $\sigma_{13} = \sqrt{\sigma_{13I}^2 + \sigma_{13II}^2}$, (1,3,2,3,3) для той же оболочки.

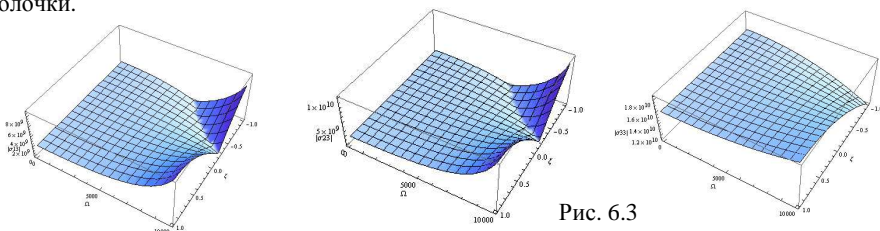


Рис. 6.3

Сравнивая графики перемещений и напряжений в случае отсутствия вязкого сопротивления, с соответствующими графиками при наличии вязкого сопротивления, заключаем, что вдали от зоны собственных частот амплитуды вынужденных колебаний в обоих случаях имеют одинаковое поведение.

Когда частота внешнего воздействия приближается к частоте собственных колебаний, в случае отсутствия вязкого сопротивления происходит резонанс(рис.3.3), а при наличии вязкого сопротивления амплитуда возрастает, но остается конечной (рис. 6.2).

В §6.4 рассмотрены вынужденные колебания в зоне пограничного слоя вблизи боковой поверхности $\alpha = \alpha_0$. Решение ищется в виде (3.4). Дальнейшая процедура определения погранслоя аналогична случаю собственных колебаний с учетом вязкого сопротивления.

В заключении приведены основные результаты работы:

- Исследованы собственные колебания ортотропных полос, когда на продольных краях заданы смешанные граничные условия теории упругости. Определены частоты собственных колебаний и установлены собственные функции. Доказано, что эти функции строго зависят от поперечной координаты, установлена их ортогональность.

- Этот же вопрос исследован для двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями, и для ортотропной пластинки при различных смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях.

- Доказано, что в ортотропных полосах возникают два типа собственных колебаний – сдвиговые и продольные, а в пластинках – три типа собственных колебаний – два сдвиговых и продольные.

- Доказано, что в двухслойной ортотропной полосе в случае неполного контакта, в отличие от полного контакта, возникают три группы собственных колебаний, две из которых собственные сдвиговые, а третья – продольные колебания.

- Показано, что в полосе и пластине сдвиговые собственные колебания будут сопровождаться продольными собственными колебаниями с той же частотой и наоборот, продольным собственным колебаниям будут сопутствовать сдвиговые колебания. Установлено, что сопутствующие колебания имеют амплитуды на порядок меньше основных, а вклад последующих приближений для частот и амплитуд собственных колебаний порядка $O(\epsilon^2)$.

- Доказано существование пограничного слоя при собственных колебаниях полос и пластин. Установлено, что каждой частоте собственных колебаний соответствует свой класс пограничных функций. Выведены характеристические уравнения для определения показателя экспоненциальной функции, характеризующую скорость убывания величин пограничного слоя при удалении от края. Составлены таблицы, где приведены некоторые первые значения показателя экспоненты.

- Определены амплитуды вынужденных колебаний двухслойной ортотропной полосы при различных условиях контакта между слоями, при условиях I и II краевых задач теории упругости на верхней лицевой поверхности, когда нижняя кромка полосы подвержена динамическому воздействию. Указанные задачи, в частности, моделируют влияние сейсмических воздействий на основание-фундамент сооружений.

- Проведен аналитический и графический анализ поведения напряжений и безразмерных перемещений по ширине полосы в зависимости от значений частот вынуждающего воздействия. Доказано, что когда частота вынуждающего воздействия совпадает с частотой собственных колебаний, возникает резонанс. В силу того, что рассмотренные задачи, в частности, моделируют работу фундамента-основания сооружений при динамических (сейсмических) воздействиях, показано, что при подходящем подборе параметров слоев (толщины, плотности, характеристики упругости) можно избежать резонанса.

- Впервые решена трехмерная динамическая задача о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек при серии условий на лицевых поверхностях. Определены амплитуды вынужденных колебаний. Установлены условия возникновения резонанса.

- Показано, что если внешнее воздействие описывается функциями являющимися полиномами от переменных α, β , итерационный процесс, в случае полос и пластин, обрывается на определенном приближении, в результате получается математически точное решение во внутренней задаче, которое совпадает с решением для слоя. Для оболочек же итерационный процесс не обрывается и решение можно определить с заранее заданной асимптотической точностью.

- Для ортотропных оболочек исследован 3D пограничный слой. Выведены характеристические уравнения для определения показателя экспоненциальной функции, характеризующая скорость убывания величин пограничного слоя.

- Проведено сращивание решений внутренней задачи и пограничного слоя при жестко закрепленной боковой поверхности. Доказано, что решение внутренней задачи влияет на значения величин (амплитуд) пограничного слоя, но не на скорость убывания (показатель экспоненты). При высших же приближениях во внутренней задаче ($s > 0$) пограничный слой через граничные условия влияет на решение внутренней задачи, которое порядка $O(\epsilon)$.

- В трехмерной постановке впервые рассмотрены собственные колебания ортотропных оболочек при серии граничных условий на лицевых поверхностях. Найдены асимптотические решения соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости. Для каждой серии условий определены значения частот собственных колебаний. Показано, что в оболочке возникают собственные колебания трех типов: два сдвиговых и продольное, которые обусловлены однородными граничными условиями на лицевых поверхностях. Доказано, что каждой собственной частоте соответствует свой пограничный слой. При этом собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания другого типа. Показано, что в отличие от пластин, где влияние последующих приближений на значения частот порядка $O(\epsilon^2)$, эффект оболочки проявляется уже начиная с приближения $s=1$.

- Доказано, что при собственных колебаниях двухслойной оболочки, как при полном, так и неполном контакте между слоями, возникают три типа колебаний – два сдвиговых и продольные, при этом в исходном приближении значения частот колебаний оболочки совпадают со значениями частот колебаний пластинки при аналогичных условиях. В силу условий свободного контакта в тангенциальном направлении в каждом слое возникают свои собственные колебания с соответствующими значениями частот сдвиговых колебаний. Эти частоты отличны от главных значений частот собственных колебаний, когда контакт между слоями полный.

- Для двухслойных ортотропных оболочек выведены характеристические уравнения для определения показателя экспонент как плоского, так и антиплоского пограничных слоев. Определены первые некоторые значения этих показателей как при полном, так и при неполном контакте между слоями.

- На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях

ортотропных оболочек при наличии вязкого внутреннего сопротивления, когда на верхней лицевой поверхности оболочки заданы два варианта пространственных однородных граничных условий, а нижняя лицевая поверхность жестко закреплена.

- Показано, что в оболочке возникают три типа колебаний – два сдвиговых и продольные, и в зависимости от значения коэффициента вязкого сопротивления собственные колебания затухают без явного колебания или затухание является колебательным. В исходном приближении эти колебания независимы, а для последующих приближений один тип колебаний вызывает колебания другого типа.

- Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости при вынужденных колебаниях ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления. Считается, что на верхней лицевой поверхности оболочки заданы два варианта пространственных однородных граничных условий (поверхность свободна или жестко закреплена), а на нижней лицевой поверхности задан вектор перемещения, который изменяется во времени гармонически. Определены амплитуды вынужденных колебаний и установлено, что наличие вязкого сопротивления приводит к тому, что амплитуды вынужденных колебаний в области значений собственных колебаний возрастают, но остаются конечными.

- Определены функции типа пограничного слоя, установлены характеристические уравнения для определения скорости убывания колебаний в зоне пограничного слоя при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки.

Список научных работ по теме диссертации

1. *Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.* О характере пограничного слоя при собственных колебаниях ортотропной полосы. Доклады НАН, 2000, Т.100, №4, с. 314-321.
2. *Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.* О частотах собственных колебаний и пограничном слое для ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче. Изв. НАНА, Механика, 2001, Т. 54, № 2.
3. *Гулгазарян Л.Г.* О характере собственных колебаний двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями. В сб.: Материалы республ. конф. молодых ученых. Ереван, 1999, с. 39-44.
4. *Гулгазарян Л.Г.* Смешанная краевая задача о собственных колебаниях ортотропной полосы. Изв. НАН Армении, Механика, 1999, Т. 52, № 4, с. 30-37.
5. *Гулгазарян Л.Г.* О пограничном слое в задаче о собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями. В сб. научн. тр.: Математический анализ и его приложения, Ереван, "Манкаварж", 2000, Выпуск1, стр.110-117.
6. *Гулгазарян Л.Г.* О высших приближениях асимптотического представления и решении пограничного слоя в задаче о собственных колебаниях двухслойной полосы. Изв. НАН Армении, Механика, Т. 53, № 2, 2000, с. 30-38.
7. *Agalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V., Ghulghazaryan L.G.* Analysis of forced vibrations of base-foundation packet and seismoisolator on the base of dynamic equations of elasticity theory. Proceedings of the 3rd World Conference on Structural Control 7-12 April, 2002, Como, Italy. Vol. 2, p.759-764.

8. *Гулгазрян Л.Г.* Вынужденные колебания двухслойной ортотропной полосы. В сб.: Материалы XII республ. конф. молодых ученых. Механика. Ереван. 2003. с. 68-77.
9. *Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G.* Asymptotic solutions of non-classical boundary-value problems of the natural vibrations of orthotropic shells. ELSEVIER. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 70 (2006). pp.102-115.
10. *Гулгазрян Л.Г.* О характере пограничного слоя при собственных колебаниях ортотропных оболочек при различных граничных условиях В сб. тр. междунар. конф. посвящ. 95-летию акад. Арутюняна: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Цахкадзор, Армения. 2007. стр.159-163.
11. *Гулгазрян Л.Г.* Собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при полном контакте между слоями. В сб. тр. конф.: Динамика и прочность механических систем. (Горис 21-26 сен.) 2008. Ереван. стр. 202-211.
12. *Гулгазрян Л.Г.* О пограничном слое в трехмерной постановке задачи о собственных колебаниях двухслойных ортотропных оболочек. В сб. тр. межд. школы-конф. Молодых ученых: Механика 2009. Ереван. 2009. стр. 190-194.
13. *Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G.* Non-classical boundary-value problems of the forced vibrations of orthotropic shells. International sciences journal of Applied Mechanics. SPRINGER. Т. 45, N8, 2009. pp. 888-903.
14. *Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Ghulghazaryan L.G.* The asymptotic solutions of 3d dynamic problems for orthotropic cylindrical and toroidal shells. Proceedings of National Academy of Sciences. Mechanics. 2010. Т. 63, N 1, pp. 6-22.
15. *Гулгазрян Л.Г.* Асимптотика собственных колебаний ортотропных оболочек при условиях первой краевой задачи на лицевых поверхностях. Сб. научн. трудов межд. конф.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван. 2010. Т.1. стр. 224-228.
16. *Гулгазрян Л.Г.* Собственные пространственные колебания ортотропных оболочек в зоне пограничного слоя при условиях первой краевой задачи. Сб. научн. трудов межд. конф: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван. 2012. Т.1. стр. 201-205.
17. *Агаловян Л.А., Гулгазрян Л.Г.* К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек. Ученые записки АГПУ им. Х. Абовяна. 2012. N 2(17). стр. 29-42.
18. *Гулгазрян Л.Г.* О характере собственных колебаний ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления. Межд. научно-технический журнал «Механика машин, механизмов и материалов», Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси Минск, 2013. стр. 20-26.
19. *Гулгазрян Л.Г.* Характер собственных колебаний ортотропной оболочки в зоне пограничного слоя при наличии вязкого сопротивления. Сб. научн. трудов межд. школы-конференции молодых ученых. Ереван, 2013, стр. 142-146.
20. *Гулгазрян Л.Г.* Собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при неполном контакте между слоями. Вестник Фонда фундаментальных исследований, Минск, 2013, N3(65), стр. 51-69.
21. *Гулгазрян Л.Г.* Собственные колебания ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления. Материалы международной научной конф. теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур. Минск, 2013, стр. 69-72.
22. *Гулгазрян Л.Г.* Асимптотика вынужденных колебаний ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления. Сб. научн. трудов межд. конф: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван. 2014. стр. 192-196.

Ամփոփում

Ատենախոսությունը նվիրված է օրթոտրոպ շերտերի, սալերի, թաղանթների սեփական և ստիպողական տատանումների ուսումնասիրմանը՝ հիմք ընդունելով առաձգականության տեսության շարժման հավասարումները և առաձգականության առնչությունները: Դիտարկված են դեպքեր, երբ առկա է ներքին մածուցիկ դիմադրություն: Մանրամասն ուսումնասիրված է սահմանային շերտը, կատարված է ներքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումների լծորդումը:

Աշխատանքում՝

- Հիմք ընդունելով օրթոտրոպ մարմնի համար առաձգականության տեսության դինամիկ հավասարումները, ասիմպտոտիկ եղանակով ապացուցված է, որ օրթոտրոպ շերտերում առաջանում են երկու տիպի սեփական տատանումներ – սահքային և երկայնական, իսկ սալերում՝ երեք տիպի սեփական տատանումներ – երկուսը սահքային և երկայնական: Որոշված են սեփական տատանումների հաճախությունները և սեփական ֆունկցիաները՝

- օրթոտրոպ շերտի համար խառը եզրային պայմանների դեպքում,
- օրթոտրոպ երկշերտի համար ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում,
- օրթոտրոպ սալի համար դիմային հարթությունների վրա տարբեր տիպի խառը եզրային պայմանների դեպքում:

- Ապացուցված է, որ օրթոտրոպ երկշերտում, ի տարբերություն լրիվ կոնտակտի, ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքում առաջանում են երեք տիպի սեփական տատանումներ՝ երկուսը սահքային, իսկ երրորդը՝ երկայնական:

- Ցույց է տրված, որ շերտում և սալում սահքային տատանումները ուղեկցվում են նույն հաճախությամբ երկայնական տատանումներով և հակառակը՝ երկայնական տատանումները ուղեկցվում են սահքային տատանումներով՝ երկայնական տատանումների հաճախություններով, սակայն ուղեկցող տատանումները ունեն ավելի ցածր կարգ ունեցող ամպլիտուդներ քան հիմնական տատանումները: Ընդ որում հաջորդ մոտարկումների ներդրումը սեփական տատանումների հաճախությունների և ամպլիտուդների արժեքների համար $O(\varepsilon^2)$ կարգի է:

- Սալերի և շերտերի սեփական տատանումների դեպքում ապացուցված է սահմանային շերտի գոյությունը: Ցույց է տրված, որ յուրաքանչյուր սեփական արժեքին համապատասխանում է սահմանային շերտի տիպի ֆունկցիաների իր դասը: Ցույց է տրված, որ սահմանային շերտում եզրից հեռանալիս բոլոր մեծությունները նվազում են էքսպոնենցիալ օրենքով: Արտածված են բնութագրիչ հավասարումներ, որտեղից որոշվում են էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի ցուցիչները: Բերված են աղյուսակներ, որտեղ զետեղված են էքսպոնենտի ցուցիչի առաջին մի քանի արժեքները:

- Որոշված են օրթոտրոպ երկշերտի ստիպողական տատանումների ամպլիտուդները շերտերի միջև կոնտակտի տարբեր պայմանների դեպքում, երբ վերին դիմային մակերևույթի վրա տրված են առաձգականության տեսության I և II եզրային խնդիրների համասեռ պայմանները, իսկ շերտի ներքևի մակերևույթը ենթարկված է դինամիկ ազդեցության:

- Կախված արտաքին ազդեցության հաճախություններից՝ կատարված է լարումների և անչափ տեղափոխությունների ըստ շերտի լայնության փոփոխության վարքի տեսական և գրաֆիկական վերլուծություն: Ապացուցված է, որ արտաքին ազդեցության տատանումների հաճախությունների համընկնումը երկշերտի սեփական սահքային կամ երկայնական տատանումների որևէ հաճախության հետ բերում է ռեզոնանսի: Հիմք ընդունելով, որ դիտարկվող խնդիրները, մասնավորապես, մոդելավորում են կառուցվածքների հիմք-հիմնատակերի աշխատանքը դինամիկ (սեյսմիկ) ազդեցությունների դեպքում, ցույց է տրված, որ նրանց համապատասխան բնութագրիչների (խտության, հաստության, առաձգականության գործակիցների) ընտրությամբ կարելի է խուսափել ռեզոնանսից:

- Առաջին անգամ լուծված են օրթոտրոպ թաղանթների ստիպողական տատանումների վերաբերյալ եռաչափ դինամիկ խնդիրները, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են մի շարք կիրառությունների համար կարևոր եզրային պայմաններ: Որոշված են ստիպողական տատանումների ամպլիտուդները: Արտածված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները:

- Ցույց է տրված, որ եթե արտաքին ազդեցությունը նկարագրվում է α, β փոփոխականների նկատմամբ բազմանդամային ֆունկցիաների տեսքով, ապա իտերացիոն պրոցեսը, շերտերի և սալերի դեպքում, ընդհատվում է որոշակի մոտարկման վրա և ներքին խնդրում ստացված է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ լուծում: Թաղանթների դեպքում իտերացիոն պրոցեսը չի ընդհատվում և լուծումը կարելի է որոշել նախօրոք տրված ասիմպտոտիկ ճշտությամբ:

- Օրթոտրոպ թաղանթների համար առաջին անգամ ուսումնասիրված է 3D սահմանային շերտը: Սահմանային շերտի մեծությունների նվազման արագությունը բնութագրող էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի ցուցիչի որոշման համար արտածված են բնութագրիչ հավասարումներ:

- Կատարված է ներքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումների լծորդում, երբ կողմնային մակերևույթը կոշտ ամրակցված է: Ապացուցված է, որ ներքին խնդրի լուծումը ազդում է սահմանային շերտի մեծությունների վրա, բայց չի ազդում նրանց նվազման արագությունը բնութագրող էքսպոնենտի ցուցիչի վրա: Բարձր մոտարկումների դեպքում սահմանային շերտը եզրային պայմանների միջոցով ազդում է ներքին խնդրի լուծման վրա և այն $O(\epsilon)$ կարգի է:

- Եռաչափ դրվածքով առաջին անգամ դիտարկված են օրթոտրոպ թաղանթների սեփական տատանումները, երբ դիմային մակերևույթների վրա տրված են մի շարք կիրառությունների համար կարևոր եզրային պայմաններ: Որոշված են առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի համապատասխան դինամիկ հավասարումների ասիմպտոտիկ լուծումները: Ցուրաքանչյուր եզրային պայմանների խմբի համար որոշված են սեփական տատանումների հաճախությունները: Ցույց է տրված, որ թաղանթում առաջանում են երեք տիպի սեփական տատանումներ՝ երկուսը սահքային, իսկ երրորդը՝ երկայնական: Ապացուցված է, որ յուրաքանչյուր սեփական հաճախությանը համապատասխանում է իր սահմանային շերտը: Ընդ որում մի տիպի սեփական տատանումները սահմանային շերտում առաջացնում են նաև հակադիր տիպի սեփական

տատանումներ: Յույց է տրված, որ ի տարբերություն սալերի, որտեղ բարձր մոտարկումների ազդեցությունը հաճախությունների վրա $O(\varepsilon^2)$ կարգի է, թաղանթի էֆեկտը (կորության առկայությունը) ի հայտ է գալիս սկսած $s=1$ մոտարկումից:

- Սպացուցված է, որ երկշերտ թաղանթի սեփական տատանումների ժամանակ, տանգենցիալ ուղղությամբ ոչ լրիվ կոնտակտի պայմանների դեպքում յուրաքանչյուր շերտում առաջանում են իր սեփական տատանումները, պայմանավորված համապատասխան սահքային տատանումների հաճախություններով: Այդ հաճախությունները տարբերվում են լրիվ կոնտակտի դեպքում սեփական սահքային տատանումների հաճախությունների գլխավոր արժեքներից:

- Երկշերտ օրթոտրոպ թաղանթների համար արտածված են էքսպոնենտի ցուցիչի որոշման համար բնութագրիչ հավասարումներ, ինչպես հարթ, այնպես էլ հակահարթ սահմանային շերտերի համար: Հաշվված են այդ ցուցիչների մի քանի առաջին արժեքները շերտերի միջև ինչպես լրիվ, այնպես էլ ոչ լրիվ կոնտակտի դեպքերում:

- Հիմք ընդունելով առաձգականության տեսության տարածական խնդրի հավասարումները, ներքին մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում ստացված են օրթոտրոպ թաղանթների սեփական տատանումների ոչ դասական խնդիրների ափսոսալից լուծումները, երբ թաղանթի վերին դիմային մակերևույթի վրա տրված են երկու տիպի տարածական եզրային պայմաններ, իսկ ստորին դիմային մակերևույթը կոշտ ամրակցված է:

- Յույց է տրված, որ այս դեպքում ևս թաղանթում առաջանում են երեք տիպի սեփական տատանումներ – երկուսը սահքային, երրորդը՝ երկայնական, և կախված մածուցիկ դիմադրության գործակցի արժեքից, սեփական տատանումները մարում են առանց հարմոնիկների, կամ մարումը կրում է տատանողական բնույթ: Սկզբնական մոտարկման մեջ այդ տատանումները անկախ են, իսկ հաջորդ մոտարկումներում մի տիպի տատանումները առաջացնում են հակադիր տիպի տատանումներ, որոնց ամպլիտուդները կարգով ցածր են:

- Ստացված է օրթոտրոպ թաղանթների ստիպողական տատանումների 3D խնդրի լուծումը՝ մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում: Ընդունված է, որ վերևի դիմային մակերևույթի վրա տրված են երկու տիպի տարածական եզրային պայմաններ, իսկ ներքևի դիմային մակերևույթը ենթարկված է արտաքին ազդեցության, որը ըստ ժամանակի փոխվում է ներդաշնակորեն: Որոշված են ստիպողական տատանումների ամպլիտուդները: Յույց է տրված, որ մածուցիկ դիմադրության առկայությունը բերում է նրան, որ ստիպողական տատանումների ամպլիտուդների արժեքները սեփական տատանումների հաճախությունների արժեքների շրջակայքում աճում են, բայց մնում են վերջավոր:

- Որոշված է սահմանային շերտը օրթոտրոպ թաղանթներում մածուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում:

SUMMARY

The thesis is devoted to investigation of free and forced vibrations of orthotropic strips, plates and shells basing on the dynamic equations and elasticity relations of elasticity theory. The cases when viscous resistance is present are considered. The boundary layer is studied in detail and solutions of the internal problem and the boundary layer are conjugated.

- Basing on the dynamic equations of elasticity theory of orthotropic body and using the asymptotic method it is proved that in orthotropic strips two types of free vibrations appear – shear and longitudinal, and in plates – three types of free vibrations – two shear and one longitudinal. Frequencies of free vibrations and the corresponding eigenfunctions are obtained for:

- orthotropic strip for mixed boundary conditions,
- orthotropic two-layered strip for incomplete contact between layers,
- orthotropic plate for different cases of mixed boundary conditions on facial plane.

- It is proved that for two-layered orthotropic strip in case of incomplete contact, in contrast to full contact case, three types of free vibrations appear – two shear and one longitudinal.

- It is shown that for strip and plate shear free vibrations go with longitudinal free vibrations of the same frequency and vice versa, but the accompanying vibrations have order smaller amplitudes than main ones. The contribution of the next order approximation to frequencies and amplitudes of free vibrations is of order $O(\epsilon^2)$.

- The existence of boundary layer of free vibrations of strips and plates is proved. It is established that for each frequency of free vibrations there corresponds an own class of boundary functions. Characteristic equations for obtaining the index of exponential function that characterizes the damping rate of boundary layer magnitudes by moving from the edge are derived. Tables with some first values of index of exponent are given.

- Amplitudes of forced vibrations of a two-layered orthotropic strip with different contact conditions between layers are obtained for conditions I and II of boundary problem of elasticity theory on top of facial surface when bottom edge of the strip is under dynamical action. In particular, the considered problems are model the influence of seismic effects on the base-foundation of constructions.

- Dynamics of stresses and dimensionless displacements over width of the strip are studied analytically and graphically versus the frequency of forced action. It is proved that resonance appear when the frequency of forced action coincides with the frequency of free vibrations. Since the considered problems, in particular, model base foundations of constructions under dynamical (seismic) actions it is proved that by properly selecting the parameters of layers (thicknesses, densities, elasticity characteristics) it is possible to avoid resonance.

- For the first time three dimensional dynamical problem of forced vibrations of orthotropic shells with different boundary conditions on facial surfaces is solved.

- It is shown that if the external force is defined as functions of polynomials of variables α , β then in the case of strips and plates the iteration process is stopped for some approximation and mathematically exact solution is obtained for the internal problem, which coincides with solution for a layer. The iteration process does not stop for shells and the solution of the problem may be obtained with a priori given asymptotic accuracy.

- 3D boundary layer for orthotropic shells is investigated. Characteristic equations for obtaining the index of exponential function which characterizes the damping rate of boundary layer magnitudes are derived.

- Solutions of the internal problem and the boundary layer for rigidly mounted lateral surface are conjugated. It is proved that the solution of the internal problem influences on the

values of magnitudes (amplitudes) of boundary layer but does not effect on the damping rate (the index of exponent). Meanwhile for the higher order approximations of the internal problem ($s>0$) the boundary layer effects the solution of the internal problem (of order $O(\epsilon)$), via boundary conditions.

- In the scope of three dimensional formulations, for the first time, free vibrations of orthotropic shells for different boundary conditions on facial surfaces are considered. Asymptotic solutions of the corresponding dynamic equations of 3D problem of elasticity theory are obtained. Frequencies of free vibrations are determined for each type of boundary conditions. It is shown that three types of free vibrations appear in a shell: two shear and one longitudinal, that are due to homogeneous boundary conditions on facial surfaces. It is proved that a boundary layer corresponds to each eigenfrequency. Meanwhile in the boundary layer free vibrations of one type generate vibrations of other type. It is shown that in contrast to plates where the effect of next approximations of frequencies is of order $O(\epsilon^2)$, the effect of shell reveals starting from approximation $s=1$.

- It is proved that for free vibrations of two-layered layers either for complete or incomplete contact between layers there appear three types of vibrations – two shear and one longitudinal. Meanwhile in the original approximation the values of frequencies of vibrations of a shell coincide with the values of frequencies of vibrations of plate in similar conditions. Due to the conditions of free contact in tangential direction in each layer its own free vibrations with the corresponding values of frequencies of shear vibrations appear. These frequencies are different from the main values of frequencies of free vibrations when there is a complete contact between the layers.

- Characteristic equations for obtaining the index of exponents for plane and antiplane boundary layers of two-layered orthotropic shells are derived. Some first values of these indexes are obtained either for complete or incomplete contact between layers.

- Basing on the spatial problem of elasticity theory asymptotic solutions of nonclassical boundary value problems about free vibrations of orthotropic shells in the presence of internal viscous resistance are obtained when on top facial surface of the shell two types of spatial homogeneous boundary conditions are given, and the bottom facial surface of the rigidly fixed.

- It is shown that three types of vibrations appear in a shell - two shear and one longitudinal, and depending on the values of coefficient of viscous resistance free vibrations are damping without explicit vibrations or damping is vibrational. In the original approximation these vibrations are independent, and for the next order approximations one type of vibration generates vibrations of other type.

- Using the asymptotic method the solution of the corresponding dynamical equations of 3D problem of elasticity theory of forced vibrations of orthotropic shells in the presence of viscous resistance is obtained. It is considered that on the top of facial surface of the shell two types of spatial homogeneous boundary conditions (the surface is free or rigid mounted) are defined, and on the bottom facial surface displacement vector which changes in time harmonically is defined. Amplitudes of forced vibrations are defined and it is established that the presence of viscous resistance leads to the fact that amplitudes of forced vibrations in the range of frequencies of free vibrations are increasing, but remain finite.

- Functions of type boundary layer in the presence of viscous resistance are defined.