

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ
ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԳՐԻՇԿՈ ԱՆՆԱ ՄԻՔԱՅԵԼԻ

ԸՍՏ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ՀԱՄԱՉՈՓ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌՈՒԹՅԱՄԲ ՍԱԼԵՐԻ
ՏՍՏԱՆՄԱՆ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա.02.04 - «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2018

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ГРИШКО АННА МИКАЕЛОВНА

ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С
НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04 - «Механика деформируемого твердого тела»

ЕРЕВАН-2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ Երևանի Պետական Համալսարանում
Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ. մաթ. գիտությունների թեկնածու,
պրոֆեսոր Մ.Վ.Բելուբեկյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
Ս.Վ.Սարգսյան
ֆիզ. մաթ. գիտությունների թեկնածու
Ս.Ռ.Մարտիրոսյան
Առաջատար կազմակերպություն՝ Պետական ճարտարագիտական
Համալսարան (Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ հունիսի 22-ին ժամը 14⁰⁰-ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի
ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի – 047 մասնագիտական խորհրդում
(Հասցեն՝ 0019թ. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2, avсах@mechins.sci.am)
Սեղմագիրն առաքված է 18 մայիսի 2018թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ս.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете

Научный руководитель

к.ф.м.н., профессор М.В.Белубекийн

Официальные оппоненты:

д.ф.м.н., профессор С.В.Саркисян

к.ф.м.н. С.Р.Мартirosян

Ведущая организация:

Государственный Инженерный Университет
Армении (Политехник)

Защита состоится 22-ого июня 2018г. в 14⁰⁰ на заседании специализированного совета Механика
– 047 в Институте механика НАН РА.

Адрес: 0019г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, avсах@mechanics.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 18-ого мая 2018г.

Ученый секретарь
специализированного совета д.ф.м.н.



А. В. Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В теории упругой устойчивости большое внимание уделяется вопросам устойчивости пластин и оболочек, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Такие задачи представляют большой интерес из-за вибраций, которые возникают в обшивках современных летательных аппаратов. Потеря устойчивости в аэроупругих системах является одним из опасных явлений, поскольку влечет за собой быстрое разрушение конструкции.

В наши дни вопрос изучения панельного флаттера остается актуальной проблемой в связи с совершенствованием характеристик ЛА, внедрением новых материалов (композиты, полимеры и т. п.). В настоящее время проектируются и испытываются летательные аппараты с гибкими крыльями, которые адаптируются к условиям полета. С внедрением новых материалов и требованиями к весовым характеристикам, обшивки этих конструкции становятся все более тонкими. Разработка новых геометрических форм, новые подходы управления схемой обтекания и пограничным слоем меняет параметры обтекания панелей потоком воздуха и их физические свойства. Это все может привести к возникновению проблем, связанных с потерей устойчивости панелей конструкции.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является исследование колебаний и устойчивости пластин с несимметричной по толщине неоднородностью. Для этого были поставлены и решены следующие задачи:

- рассмотрена проблема аэроупругой статической неустойчивости (дивергенция) пластины с несимметричной по толщине неоднородностью с жестким контактом между слоями при наличии пружины вдоль одной из кромок. Задача решена в предположении, что для каждого слоя действительна теория Кирхгофа.
- исследована задача динамической неустойчивости пластины с несимметричной по толщине неоднородностью с жестким контактом между слоями, в предположении действительности гипотезы Кирхгофа и без условия постоянства коэффициента Пуассона. Рассмотрена зависимость изгибных колебаний от планарных колебаний.
- исследованы задачи колебания и устойчивости несимметрично неоднородной двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями, на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

Научная новизна. В диссертационной работе:

- Получена зависимость критической скорости потери статической устойчивости пластинки в зависимости от приведенной жесткости пружины вдоль одной из кромок при жестком закреплении (шарнирном опирании) вдоль другой.
- Решена задача динамической неустойчивости пластинки с несимметричной по толщине неоднородностью в условиях жесткого контакта между слоями. Показано, что изгибные колебания вызывают планарные колебания и наоборот, что может вызвать явление резонанса. Рассмотрены частные случаи.
- Получены дифференциальные уравнения изгибных и планарных колебаний несимметрично по толщине неоднородной двухслойной пластинки с ортотропными слоями на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности. Получен критерий живучести (условие отсутствия расслоения) двухслойной ортотропной пластины.

- Рассмотрены колебания двухслойной пластинки в условиях свободного скольжения между контактными слоями при граничных условиях шарнирного закрепления по краям. Показано, что задача приводится к системе уравнений, решение которой может существовать в трех случаях. В одном случае показано, что изгибные колебания пластины приводят к возникновению планарных колебаний с такой же частотой колебаний как у изгибных. В других двух случаях - планарные колебания слоев пластины приводят к возникновению изгибных колебаний. Определены условия возникновения резонанса.
- Рассмотрена задача Коненкова для двухслойной пластинки, при наличии скольжения между слоями. Показано, что в случае двухслойных пластин с проскальзыванием, в отличие от уравнения Коненкова, здесь вместо коэффициента Пуассона участвует среднее значение коэффициентов Пуассона двух слоев. Также показано, что в случае двухслойных пластин возбуждение локализованных изгибных колебаний приводит к появлению локализованных продольных колебаний.

Практическая ценность работы состоит в изучении колебаний и устойчивости слоистых тонких пластин в зависимости от граничных условий и типа контакта между слоями. Результаты, полученные в работе, могут найти применение в решении новых проблем, связанных как со статической, так и с динамической неустойчивостью тонких слоистых пластин.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на семинаре «Волновые процессы» Института Механики НАН РА (2012-2016гг.)
- на международной конференции, посвященной 100-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна, (2012 Цахкадзор, Армения)
- на международной школе-конференции молодых ученых, посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении, (2013, Цахкадзор, Армения)
- на международной школе-конференции молодых ученых, (2016, Цахкадзор, Армения)
- на семинаре кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ (2017г.)

Диссертационная работа в целом обсуждена на научном семинаре кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ (2018г.) и на общем семинаре Института механики НАН Армении (2018г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 133 наименований. Общий объем работы составляет 117 страниц печатного текста, включая 9 таблиц и 17 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведен обзор литературы, посвященной задачам локализованных колебаний, устойчивости деформируемых тонких тел, находящихся в сверхзвуковом потоке газа, и поршневой теории. Приведено обоснование актуальности темы и краткое описание диссертационной работы.

В первой главе приведены основные сведения из теории упругости сплошного тела, необходимые для дальнейшего использования.

Дано описание напряженно – деформированного состояния сплошного анизотропного тела, дифференциальные уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат. Приведен обобщенный закон Гука для однородного упругого тела и определение ортотропного материала.

В данной главе приведены граничные условия для жестко защемленного края, шарнирно опертого, свободного края, в случае свободного скольжения. Дано краткое описание поршневой теории. Приведена формула определения давления на поверхность при обтекании сверхзвуковым потоком газа. Также описана гипотеза Кирхгофа.

В первом параграфе главы 2 рассмотрена упругая пластинка при условиях жесткого закрепления вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.

Изгиб неоднородной по толщине пластинки будет описываться уравнением (1)

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + s^3 \frac{dw}{dy} = 0, \quad s = \sqrt[3]{\frac{kV}{D}} \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dy^3} - \gamma_1 w = 0 \quad \text{при } y = 0 : \gamma_1 = c_1 D^{-1}, \\ w = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0 \quad \text{при } y = b, \end{aligned} \quad (2)$$

где c_1 - жесткость пружины.

Решая задачу (1), (2) приходим к характеристическому уравнению:

$$\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5e^{-\frac{3sb}{2}} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} (0.5e^{\frac{sb}{2}} + e^{-sb} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}) = 0 \quad (3)$$

На Рис. 1 и Рис. 2 приведена зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ .

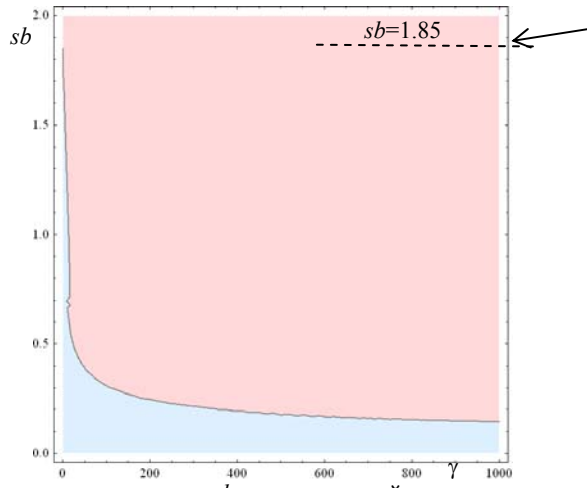


Рис. 1 Зависимость параметра sb от приведенной жесткости пружины γ

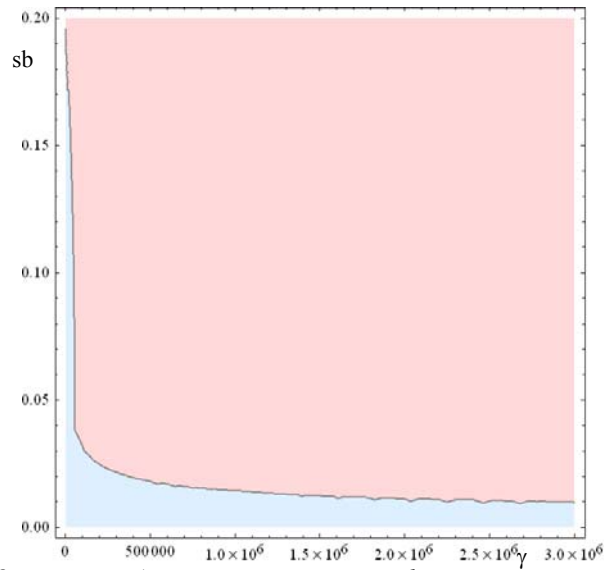


Рис. 2 Зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ при больших значениях γ

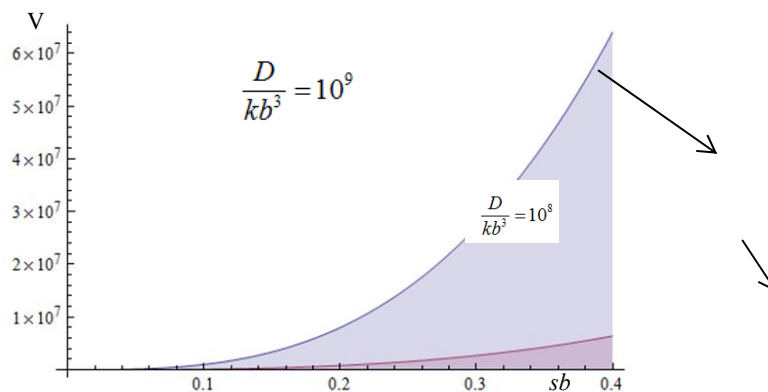


Рис. 3 Зависимость критической скорости потока V от параметра sb при следующих соотношениях: $D/(kb^3) = 10^9$ [см] / [сек] и $D/(kb^3) = 10^8$ [см] / [сек]

Для наглядности в таблице 1 приведены значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при значениях параметра $\gamma < 400$. Скорость звука в воздухе: $c_\infty = 3.3 \cdot 10^4$ см / сек .

Таблица 1 Значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при $D/(c_\infty kb^3) = 3 \cdot 10^3$

$\gamma \backslash sb$	0.2	0.5	0.65	0.75	1	1.5	1.6
374.5	24.24	-	-	-	-	-	-
23.5005	-	378.75	-	-	-	-	-
10.4251	-	-	832.114	-	-	-	-
6.61285	-	-	-	1278.28	-	-	-
2.50412	-	-	-	-	3030	-	-
0.402782	-	-	-	-	-	10226.3	-
0.249281	-	-	-	-	-	-	12410.9

В таблице 2 приведены значения критической скорости потока V в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при значениях параметра $\gamma > 400$.

Как видно из таблицы 2, критическая скорость потока равняется скорости звука в воздухе когда безразмерный параметр sb принимает значения в промежутке (0.05; 0.1). С целью определения приведенной жесткости пружины, в случае когда критическая скорость обтекания пластины равна скорости звука в воздухе, в таблице

3 приведены значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ при значениях параметра sb в промежутке (0.05; 0.1).

Таблица 2 Значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ при значениях параметра sb в промежутке (0.05; 0.1)

γ \ sb	0.055	0.06	0.0691066	0.07	0.08	0.08248	0.09	0.0938
18031.1	0.504116	-	-	-	-	-	-	-
13888.4	-	0.65448	-	-	-	-	-	-
9089.47	-	-	1.00	-	-	-	-	-
8745.86	-	-	-	1.03929	-	-	-	-
5858.88	-	-	-	-	1.55136	-	-	-
5346.07	-	-	-	-	-	1.70016	-	-
4114.73	-	-	-	-	-	-	2.20887	-
3634.57	-	-	-	-	-	-	-	2.50064

Из таблицы 1 – 3 видно, что критическая скорость дивергенции пластины при граничных условиях жесткого закрепления вдоль одной кромки и наличии пружины вдоль другой уменьшается при увеличении приведенной жесткости пружины.

Из таблицы 3 следует, что критическая скорость дивергенции пластины равна скорости звука в воздухе при приведенной жесткости пружины: $\gamma = 9089.47$.

Известно, что при применении поршневой теории сравнение результатов с экспериментом дает хорошее совпадение уже при $M \geq 1.7$, в таблице 3 также определена приведенная жесткость пружины при которой соотношение критической скорости потока и скорости звука в воздухе равна 1.7.

Таблица 3 Значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в случае $\gamma > 400$
 при $D/(c_\infty kb^3) = 3.03 \cdot 10^3$

$\gamma \backslash sb$	0.0001	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.185	0.19
$2.99958 \cdot 10^{12}$	$3.03 \cdot 10^{-9}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$2.4 \cdot 10^{10}$	-	$3.7875 \cdot 10^{-7}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3 \cdot 10^9$	-	-	$3.03 \cdot 10^{-6}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$2.4 \cdot 10^7$	-	-	-	0.00037875	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3 \cdot 10^6$	-	-	-	-	0.00303	-	-	-	-	-	-	-	-
23999.5	-	-	-	-	-	0.37875	-	-	-	-	-	-	-
2999.5	-	-	-	-	-	-	3.03	-	-	-	-	-	-
1735.61	-	-	-	-	-	-	-	5.23584	-	-	-	-	-
1092.79	-	-	-	-	-	-	-	-	8.31432	-	-	-	-
731.922	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12.4109	-	-	-
513.903	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17.671	-	-
473.312	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	19.1848	-
436.882	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20.7828

Во втором параграфе рассмотрена упругая пластина при условиях шарнирного опирания вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.

Изгиб неоднородной по толщине пластинки будет описываться уравнением (1) при следующих граничных условиях:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dy^3} - \gamma_1 w = 0 \quad \text{при } y = 0 : \gamma_1 = c_1 D^{-1},$$

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dy^2} = 0 \quad \text{при } y = b \quad (4)$$

Решая задачу (1), (4) приходим к характеристическому уравнению:

$$\frac{sb}{e^2} \left(e^{\frac{-3sb}{2}} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right) -$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma+1} e^{\frac{-sb}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} (2 + e^{\frac{3sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}) + \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} (1 - e^{\frac{3sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}) \right) = 0 \quad (5)$$

Как видно из (5) при $\gamma = 0$ (получаем физический механизм), $sb = 0$ удовлетворяет уравнению (4). Следовательно, критическая скорость потока получается равным 0.

При $\gamma \rightarrow \infty$ из (5) получается уравнение для задачи шарнирного опирания вдоль кромок $y=0; b$.

На Рис. 4 приведена зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ .

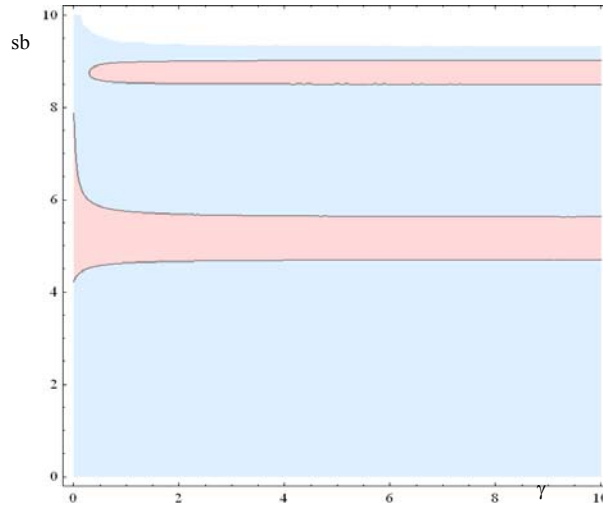


Рис. 4 Зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ согласно уравнению дивергенции (5)

Таблица 4 Соотношение критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при $D/(c_\infty kb^3) = 3 \cdot 10^3$

$\gamma \backslash sb$	4.25	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
0.00722966	232600	-	-	-	-	-
0.0320221	-	240906	-	-	-	-
0.104841	-	-	258108	-	-	-
0.247648	-	-	-	276109	-	-
0.657028	-	-	-	-	294928	-
9.43615	-	-	-	-	-	314584

Как видно из таблицы 4, критическая скорость дивергенции пластины при граничных условиях шарнирного закрепления вдоль одной из кромок и наличии пружины вдоль другой при увеличении приведенной жесткости пружины увеличивается.

В третьей главе рассматривается задача динамической неустойчивости пластинки с несимметричной по толщине неоднородностью в предположении действительности гипотезы Кирхгофа и без условия постоянности коэффициента Пуассона. Несимметричность механических характеристик материала в данной задаче понимается следующим образом: если функции механических характеристик материала пластинки непрерывны по толщине, они несимметричны по отношению к срединной поверхности пластинки. В случае, когда функции кусочно-непрерывны - задача несимметрична по отношению к любой из слоев и к срединной поверхности пластинки.

В первом параграфе приведена постановка задачи и описание метода решения в общем случае.

Колебания пластинки с несимметричной по толщине неоднородностью при жестком контакте между слоями будут описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$C\Delta\varphi = m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad B_0 \Delta \psi = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$D\Delta^2 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K\Delta^2 \varphi = p_i - p_e, \quad D = D_0 - C^{-1}K^2 \quad (7)$$

Уравнения (6) показывают, что уравнения относительно φ и ψ – уравнения продольных и планарных колебаний, являются автономными. Из (7) следует, что возбуждение продольных планарных колебаний приводит к появлению поперечных колебаний.

Рассмотрена задача динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки при следующих граничных условиях шарнирного закрепления кромки $y = 0$ и l :

$$T_2 = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad M_y = 0 \quad (8)$$

вместо граничных условий (8) для гармонических колебаний приходим к условиям:

$$\varphi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad y = const \quad (9)$$

Из (9) следует, что при таких граничных условиях уравнения (6) определяют задачу планарных колебаний независимо от изгибных.

Для упрощения принято $a \gg l$, что позволяет рассмотреть цилиндрический изгиб срединной поверхности неоднородной по толщине пластинки относительно координаты y .

Решая поставленную задачу, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{ml}{2} \ddot{w}_1(t) + \frac{kl}{2} \dot{w}_1(t) + \frac{D\pi^4}{2l^3} w_1(t) - \frac{4kV}{3} w_2(t) - \frac{K\pi^4}{2l^3} \varphi_1(t) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{ml}{2} \ddot{w}_2(t) + \frac{kl}{2} \dot{w}_2(t) + \frac{8D\pi^4}{l^3} w_2(t) + \frac{4kV}{3} w_1(t) - \frac{8K\pi^4}{l^3} \varphi_2(t) = 0 \quad (11)$$

где: $k = \chi p_\infty / c_\infty$.

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, из условия равенства нулю детерминанта системы алгебраических уравнений относительно неизвестных получены условия возникновения резонанса.

Во втором параграфе Рассмотрен частный случай динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки в случае, когда планарные колебания $\varphi_1(t) = \varphi_{10} \cos \beta t$, $\varphi_2(t) \equiv 0$, $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv 0$ вызывают изгибные колебания.

Получено характеристическое уравнение определяющее условие возникновения резонанса:

$$\begin{aligned} & 16\alpha^8 m^4 l^4 + \frac{128\alpha^4 l^2 m^2 k^8 V^2}{9} + \frac{256k^4 V^4}{8l} + \frac{257\alpha^4 m^2 l^4 \beta^2}{16} - 34\alpha^6 l^4 m^3 \beta^2 - \frac{8}{9} k^4 l^2 V^2 \beta^2 - \\ & - \frac{136\alpha^2 k^2 m^2 l^2 V^2 \beta^2}{9} + \frac{1}{16} k^4 l^4 \beta^4 - \frac{17}{8} \alpha^2 k^2 m^2 l^4 \beta^4 + \frac{321\alpha^4 m^4 l^4 \beta^4}{16} + \frac{8}{9} k^2 l^2 m^2 V^2 \beta^4 + \\ & + \frac{1}{8} k^2 l^4 m^2 \beta^6 - \frac{17}{8} \alpha^2 m^4 l^4 \beta^6 + \frac{1}{16} l^4 m^4 \beta^8 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha^2 = D\pi^4 / ml^4$.

Рассмотрен случай, когда отсутствует обтекание. В случае, когда частота планарных колебаний совпадает с собственной частотой изгибных колебаний неоднородной пластинки, возникает резонанс: $\beta^2 = D\pi^4 / ml^4$.

Для амплитуды изгибных колебаний получено:

$$A_2 = \frac{\pi^4 K}{2l^3} \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right)^{-1} \varphi_{10} \quad (13)$$

Рассмотрен случай, когда в системе дифференциальных уравнений (10), (11) члены с коэффициентам $kl/2$ равны нулю. В этом случае получено условие возникновения резонанса:

$$\left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) + \frac{16k^2 V^2}{9} = 0 \quad (14)$$

и амплитуда изгибных колебаний:

$$A_2 = - \frac{9\pi^4 (-ml^4 \beta^2 + 16\pi^4 D)}{2l^3 \left(9 \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) + 16k^2 V^2 \right)} K \varphi_{10} \quad (15)$$

$$A_4 = -\frac{12\pi^4 kV}{9\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right) + 16k^2 V^2} K\varphi_{10} \quad (16)$$

В четвертой главе решаются задачи колебания и устойчивости несимметрично неоднородной двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями, на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

В первом параграфе рассматривается двухслойная пластина при условии скользящего контакта между ортотропными слоями.

Уравнения колебания слоев имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \rho_k \frac{\partial^2 u_j^{(k)}}{\partial t^2}, \quad k=1,2 \quad (17)$$

Допустим, внешняя лицевая сторона слоя с индексом (1) находится под нормальной нагрузкой (см. Рис. 5):

$$\sigma_{33}^{(1)} = -q(x, y, t), \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{32}^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = h_1 \quad (18)$$

Внешняя сторона второго слоя свободна (см. Рис. 5):

$$\sigma_{33}^{(2)} = \sigma_{31}^{(2)} = \sigma_{32}^{(2)} = 0 \quad \text{при } z = h_2 \quad (19)$$

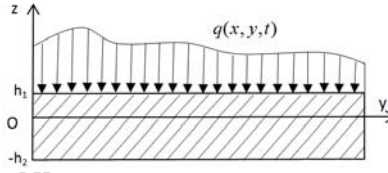


Рис. 5 Нагружение прямоугольной пластинки

Условия скользящего контакта на стыке слоев (непрерывность поперечного перемещения и нормального напряжения, равенство нулю касательных напряжений) записывается в следующем виде:

$$U_3^{(1)} = U_3^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{31}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{32}^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = 0$$

$$\sigma_{31}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{32}^{(2)} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (20)$$

Задача колебаний пластин с несимметричной по толщине неоднородностью при скользящем контакте между слоями приводится к решению системы из шести уравнений относительно шести искомых функций $u_1, u_2, v_1, v_2, w, \sigma_{33}(0)$ от переменных x, y, t .

$$C_{66}^{(1)} \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left((C_{11}^{(1)} - C_{66}^{(1)}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (C_{11}^{(1)} \nu_{22}^{(1)} + C_{66}^{(1)}) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) -$$

$$\frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{11}^{(1)} \nu_{22}^{(1)} + 2C_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
& C_{66}^{(1)} \Delta v_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left((C_{22}^{(1)} - C_{66}^{(1)}) \frac{\partial v_1}{\partial y} + (C_{22}^{(1)} \nu_{11}^{(1)} + C_{66}^{(1)}) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \\
& \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_{22}^{(1)} \nu_{11}^{(1)} + 2C_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& C_{66}^{(2)} \Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left((C_{11}^{(2)} - C_{66}^{(2)}) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (C_{11}^{(2)} \nu_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)}) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \\
& \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{11}^{(2)} \nu_{22}^{(2)} + 2C_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& C_{66}^{(2)} \Delta v_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left((C_{22}^{(2)} - C_{66}^{(2)}) \frac{\partial v_2}{\partial y} + (C_{22}^{(2)} \nu_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)}) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \\
& \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_{22}^{(2)} \nu_{11}^{(2)} + 2C_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& \frac{2}{3} h_1 [K_{11}^{(1)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_{22}^{(1)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}] - K_{66}^{(1)} \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - f_1^1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - f_2^1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3} \\
& - F_{2,1}^1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y} - F_{1,2}^1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} + \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q(x, y) - \sigma_{33}(0) \\
& \frac{2}{3} h_2 [K_{11}^{(2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_{22}^{(2)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + A_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}] + K_{66}^{(2)} \Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \\
& + f_1^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + f_2^2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial y^3} + F_{2,1}^2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^2 \partial y} + F_{1,2}^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial y^2} + \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma_{33}(0)
\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, из (21) следует, что в рассмотренной постановке задачи изгибных и планарных колебаний не отделяются. Это означает, что изгибные колебания пластинки могут вызвать планарные колебания и наоборот.

Для приведенной выше модели исследования задач изгиба и колебаний двухслойной пластинки исключается возможность отделения слоев друг от друга в процессе деформации. Условие отсутствия расслоения есть: $\sigma_{33}(0) < 0$.

Рассмотрена пластинка, которая изгибается в виде цилиндрической поверхности под действием равномерно распределенной нагрузки $q = q_0 = const > 0$.

Для нормального напряжения на стыке слоев получено:

$$\sigma_{33}(0) = - \frac{h_2 K_{11}^{(2)}}{h_1 K_{11}^{(1)} + h_2 K_{11}^{(2)}} q_0 \tag{22}$$

Как видно из (22) для данной задачи, независимо от граничных условий, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение будет отсутствовать.

Рассмотрена также возможность расслоения в частном случае, когда на двухслойную пластину действует лишь объемная сила веса (сила притяжения). Для нормального напряжения на стыке слоев получено:

$$\sigma_{33}(0) = -\frac{h_1 h_2 g}{h_1 K_{11}^{(1)} + h_2 K_{11}^{(2)}} (\rho_2 K_{11}^{(1)} - \rho_1 K_{11}^{(2)}) \quad (23)$$

Поскольку обычно задача стоит в определении толщин монослоев, критерий живучести можно записать в виде зависимости соотношения толщин слоев от физических свойств материала слоев:

$$\frac{h_1^2}{h_2^2} > \frac{\rho_1 E_{11}^{(2)} (1 - \nu_1^{(1)} \nu_2^{(1)})}{\rho_2 E_{11}^{(1)} (1 - \nu_1^{(2)} \nu_2^{(2)})} \quad (24)$$

Используя условие (24) можно определить необходимые толщины слоев, чтобы предотвратить расслоение, не утяжеляя конструкцию.

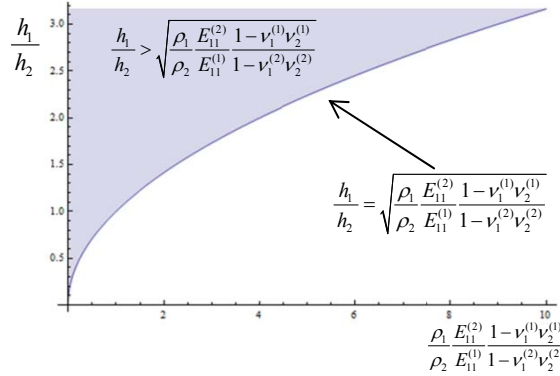


Рис. 6 Соотношение толщин слоев пластинки в зависимости от физических свойств материала слоев

Таблица 5 Критерий расслоения слоистой пластинки в зависимости от толщин монослоев

Материал	E_{11}^1	E_{11}^2	μ_{11}^1	μ_{22}^1	μ_{11}^2	μ_{22}^2	ρ_1	ρ_2	h_1^2 / h_2^2
слой 1 - КМКС 2м.120.Т10 слой 2 - КМКС 2м.120.Т15	280418	193743	0.3	0.33	0.31	0.29	0.0018	0.0015	0.82080
слой 1 - КМКС 2м.120.Т60 слой 2 - КМКС 2м.120.Т64	428274	316107	0.31	0.3	0.32	0.29	0.0017	0.00174	0.72097
слой 1 - КМКУ 3м.150.УОЛ(У) слой 2 - КМКУ 3м.150.Р14535	1305216	1233837	0.3	0.33	0.29	0.31	0.0013	0.00184	0.66121

Во втором параграфе рассмотрены колебания двухслойной пластины при условии шарнирного закрепления по краям. В одномерном случае условие Навье совпадает со свободным опиранием. Приходим к системе уравнений, решение которой может существовать в трех случаях. Каждый случай рассмотрен отдельно. В первом случае показано, что изгибные колебания пластины приводят к возникновению планарных колебаний с такой же частотой колебаний как у изгибных.

Во втором (в третьем) случае - планарные колебания первого слоя (второго слоя) пластины приводят к возникновению изгибных колебаний, когда планарные колебания второго слоя (первого слоя) отсутствуют. Определены условия возникновения резонанса.

Рассмотрена также задача колебаний двухслойной пластины при жестком закреплении по краю $x=0$ и свободном крае по $x=a$. Получена частота колебаний, при которой возникнет резонанс.

Для первой резонансной частоты получено: $\omega^2 = (1.8751)^4 D_{11}^* / ma^4$, для последующих:

$$\omega_n^2 = \frac{(2n-1)^4 D_{11}^*}{ma^4} \quad (25)$$

В третьем параграфе рассмотрены задачи колебаний пластины из двух слоев, в случае, когда между слоями касательные напряжения равны нулю (скольжения между слоями). Показано, что условия Навье приводятся к условиям шарнирного закрепления для пластин. Принимая гипотезу Кирхгофа, устанавливаются граничные условия свободного края двухслойной пластинки с проскальзыванием.

Приведена постановка задачи Коненкова для двухслойной пластинки, при наличии скольжения между слоями. Рассматривается полу бесконечная пластина – полоса $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq h_1$. Пластина состоит из двух слоев $0 < z \leq h_1$ и $-h_2 \leq z < 0$, касательные напряжения между которыми равны нулю. Требуется найти решения системы уравнений (26) – (27)

$$\Delta \psi_k - \frac{1}{C_{ik}^2} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} = 0, \quad C_{ik}^2 = \frac{E_k}{(1-\nu_k^2)\rho_k}, \quad \Delta \varphi_k - \frac{1}{C_{ik}^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} = \pm \frac{h_k}{2} \left(\Delta w - \frac{1}{C_{ik}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (26)$$

$$\Delta^2 (Dw - K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_2) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (27)$$

удовлетворяющих граничным условиям Навье (шарнирного закрепления) на сторонах $y = 0; b$, граничным условиям свободного края $x = 0$ и условиям затухания:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_k = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_k = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (28)$$

Граничные условия шарнирного закрепления $y = 0; b$, будут иметь вид:

$$\varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (29)$$

Решая данную задачу, приходим к характеристическому уравнению, которое определяет безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний:

$$p_1^2 p_2^2 + 2(1-\nu_c) p_1 p_2 - \nu_c^2 = 0 \quad (30)$$

Отличие от уравнения Коненкова заключается в том, что здесь вместо коэффициента Пуассона участвует среднее значение коэффициентов Пуассона двух слоев. Другое отличие рассматриваемой здесь задачи – возбуждение локализованных изгибных колебаний приводит к появлению локализованных продольных колебаний:

$$\varphi_{kn} = \mp \frac{h_k}{2} \left(A_{1n} e^{-\sqrt{1+\eta} \lambda_n x} + A_{2n} e^{-\sqrt{1-\eta} \lambda_n x} \right) \quad (31)$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В данной работе рассмотрены колебания и устойчивость плоских упругих пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа.

1. Исследована проблема аэроупругой статической неустойчивости (дивергенция) несимметрично по толщине неоднородной пластинки при жестком контакте между слоями. Рассмотрены два случая граничных условий: жесткое закрепление вдоль одной из длинных кромок и наличие пружины вдоль другой; шарнирное опирание вдоль одной из длинных кромок и наличие пружины вдоль другой. Получена зависимость критической скорости потока от жесткости пружины [1].

2. Рассмотрена задача динамической неустойчивости несимметрично по толщине неоднородной прямоугольной пластинки в предположении действительности гипотезы Кирхгофа и без условия постоянности коэффициента Пуассона. Показано, что в отличие от однородных пластин, в случае несимметрично по толщине неоднородных пластин при воздействиях, возбуждающих планарные колебания, будут возникать изгибные колебания и наоборот, что может привести к резонансу. Для данной задачи рассмотрен частный случай динамической неустойчивости несимметрично по толщине неоднородной прямоугольной пластинки в случае, когда планарные колебания по заданному закону вызывают изгибные колебания. Приведены численные расчеты для конкретного материала при разных толщинах пластики [2, 3].

3. Исследованы задачи колебания и устойчивости несимметрично по толщине неоднородной двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями, на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

Рассмотрена двухслойная пластина при условии скользящего контакта между ортотропными слоями. В предположении, что гипотеза Кирхгофа действительна для каждого слоя в отдельности, получены дифференциальные уравнения изгибных и планарных колебаний. Показано, что, в общем случае, задачи изгибных и планарных колебаний не отделяются. Приведены граничные условия на кромках пластины.

Проверена возможность отделения слоев в случае изгибных колебаний после решения задачи и определены напряжения. Показано, что независимо от граничных условий, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение будет отсутствовать.

Возможность возникновения расслоения рассмотрена также в частном случае, когда на двухслойную пластину действует только объемная сила веса (сила притяжения). Получен критерий живучести (условие отсутствия расслоения) двухслойной ортотропной пластины. Показано, что критерий живучести существенно зависит от толщин слоев пластинки [4].

Исследована задача колебаний двухслойной пластинки в условиях свободного скольжения между контактными слоями. Рассмотрены колебания двухслойной пластины при условии шарнирного закрепления по краям. В одномерном случае условие Навье совпадает со свободным опиранием. Показано, что задача приводится к системе уравнений, решение которой может существовать в трех случаях. Каждый случай рассмотрен отдельно. В одном случае показано, что изгибные колебания пластины приводят к возникновению планарных колебаний с такой же частотой колебаний как у изгибных. В другом случае - планарные колебания пластины

приводят к возникновению изгибных колебаний. Определены условия возникновения резонанса.

Рассмотрена также задача колебаний двухслойной пластины при жестком закреплении по краю $x=0$ и свободном крае по $x=a$. Как результат получена частота колебаний, при которой возникнет резонанс[5].

Исследованы задачи колебаний пластины из двух слоев, в случае, когда между слоями касательные напряжения равны нулю (скольжения между слоями). Показано, что условия Навье приводятся к условиям шарнирного закрепления для пластин. Принимая гипотезу Кирхгофа, установлены граничные условия свободного края двухслойной пластинки с проскальзыванием [6].

Рассмотрена задача Коненкова для двухслойной пластинки, при наличии скольжения между слоями. Исследована полу бесконечная пластина – полоса с граничными условиями Навье на сторонах $y = 0; b$, и свободного края $x = 0$ с заданными условиями затухания. Существование решения этой задачи означает существование локализованных в окрестности свободного края колебаний.

В случае двухслойных пластин с проскальзыванием, в отличие от уравнения Коненкова, здесь вместо коэффициента Пуассона участвует среднее значение коэффициентов Пуассона двух слоев. Это отличие может иметь значение для анизотропных материалов, либо если есть материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона.

Еще одно отличие рассматриваемой здесь задачи состоит в том, что в случае двухслойных пластин возбуждение локализованных изгибных колебаний приводит к появлению локализованных продольных колебаний.

Список научных работ по теме диссертации

1. Гришко А. М. Дивергенция пластины при сверхзвуковом обтекании. // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды международной конференции, посвященной 100-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. 08-12 октября 2012. Цахкадзор. Армения. Ереван. Тигран Мец. 2012. Том 1. 347 с. С. 191 – 195.
2. M. V. Belubekyan, A. M. Grishko. The problem of flutter of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdansk, Poland, 16 – 18 October 2013. 281 – 284 p.
3. Гришко А. М. Об одной задаче устойчивости двухслойной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Механика 2013. Труды международной школы – конференции молодых ученых, посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении. 1 – 4 октября 2013. Цахкадзор. Армения. – Ер.: ЕГУАС. 2013. 284с. С. 137-141.
4. Гришко А. М. Изгиб двухслойной пластинки при условии свободного скольжения между ортотропными слоями. // Механика 2016: Труды международной школы- конференции молодых ученых, 3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения-Ер.: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2016. – 198с. С. 50-54.
5. A. M. Grishko. Vibrations of two-layered plates in case of sliding contact between contact surfaces of the plate. // Proceedings of Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2017. V. 51. № 3. 255 – 261 p.
6. Belubekyan M. V., Grishko A. M. Localized bending vibrations of a rectangular two-layer plate in the presence of slip between layers. // Изв. НАН Армении. Механика. 2018. Т. 71. №1. С. 4-11.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկայացված աշխատանքում ուսումնասիրվում են հարթ առաձգական սալերի տատանումները և կայունությունը:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլխից, վերջաբանից և օգտագործված գրականության ցանկից:

Ատենախոսության երկրորդ գլխում դիտարկված է ըստ հաստության անհամասեռ սալի աերոառաձգական ստատիկ կայունության խնդիրը կախված եզրային պայմաններից: Խնդիրը լուծված է ենթադրությամբ, որ յուրաքանչյուր շերտի համար տեղի ունի Կիրխոֆի հիպոթեզը: Դիտարկված է եզրային պայմանների երկու դեպք – 1. պինդ ամրակցում մի եզրի երկայնքով և զսպանակի առկայություն մյուս եզրի երկայնքով, 2. հողակապ մի եզրի երկայնքով և զսպանակի առկայություն մյուս եզրի երկայնքով: Ուսումնասիրված է շրջհոսման կրիտիկական արագության կախումը զսպանակի կոշտությունից: Ցույց է տրված, որ առաջին դեպքում զսպանակի կոշտության մեծացման հետ զուգահեռ շրջհոսման կրիտիկական արագությունը փոքրանում է, երկրորդ դեպքում՝ մեծանում [1]:

Երրորդ գլխում դիտարկված է ըստ հաստության անհամասեռ ուղղանկյուն սալի դինամիկ անկայունության խնդիրը: Խնդիրը դիտարկված է ենթադրությամբ, որ տեղի ունի Կիրխոֆի հիպոթեզը և առանց Պուասսոնի գործակցի հաստատուն լինելու պայմանի:

Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն համասեռ սալերի, ըստ հաստության անհամասեռ սալերի դեպքում պլանար և ծոման տատանումները չեն անջատվում, որի հետևանքով հնարավոր է ռեզոնանս: Դիտարկված է ըստ հաստության անհամասեռ սալի դինամիկ անկայունության մասնավոր դեպք, երբ տրված օրենքով պլանար տատանումները առաջացնում են ծոման տատանումներ [2,3]:

Չորրորդ գլխում դիտարկված է ըստ հաստության անհամասեռ երկշերտ սալի տատանումների և կայունության խնդիրներ շերտերի միջև ազատ սահքի դեպքում: Ենթադրվում է, որ Կիրխոֆի հիպոթեզը ճիշտ է յուրաքանչյուր շերտի համար առանձին:

Անհամասեռ երկշերտ սալի օրոտորոպ շերտերի միջև ազատ սահքի դեպքում ստացվել են ծոման և պլանար տատանումների հավասարումները: Ցույց է տրված, որ ծոման և պլանար տատանումների հավասարումները ընդհանուր դեպքում չեն անջատվում: Դիտարկված խնդրում բացատրվում է դեֆորմացիայի հետևանքով շերտերի անջատումը: Ցույց է տրված, որ հավասարաչափ բաշխված բեռի դեպքում, անկախ եզրային պայմաններից, շերտերի հպման մակերևույթում նորմալ լարումը սեղմող է, հետևաբար շերտերի անջատումը բացառվում է:

Շերտերի անջատման հնարավորությունը ստուգվել է նաև մասնավոր դեպքում, երբ սալի վրա ազդում է միայն սեփական ծանրության ուժը: Ստացվել է երկշերտ օրտոտրոպ սալի շերտերի անջատման բացառման պայման [4]:

Դիտարկված է երկշերտ սալի կայունության խնդիրը շերտերի միջև սահքի առկայության դեպքում: Խնդիրը դիտարկված է եզրերում հոդակապի առկայության դեպքում: Ցույց է տրված, որ ծռման տատանումների առկայության դեպքում սալի շերտերում առաջանում են պլանար տատանումներ: Այն դեպքում, երբ սալի առաջին (երկրորդ) շերտում ազդում են պլանար տատանումներ, սալում առաջանում են ծռման տատանումներ, քանի դեռ երկրորդ (առաջին) շերտում պլանար տատանումներ չեն առաջանում: Ստացվել է ռեզոնանսի առաջացման պայմանը [5]:

Դիտարկված է անհամասեռ երկշերտ սալի տեղայնացված տատանումների խնդիրը շերտերի միջև սահքի առկայության դեպքում: Ցույց է տրված, որ Նավյեի պայմանները բերվում են հոդակապի պայմաններին [6]:

Դիտարկվել է Կոնենկովի խնդիրը անհամասեռ երկշերտ սալի համար շերտերի միջև սահքի առկայության դեպքում: Ի տարբերություն Կոնենկովի հավասարման, ստացված բնութագրիչ հավասարման մեջ Պուասսոնի գործակցի փոխարեն մտնում է երկու շերտերի Պուասսոնի գործակիցների միջին մեծությունը:

Ցույց է տրված, որ դիտարկված խնդրում տեղայնացված ծռման տատանումները առաջացնում են տեղայնացված երկայնական տատանումներ:

PROBLEMS OF VIBRATIONS AND STABILITY OF NON-SYMMETRIC OVER THICKNESS PLATES

ABSTRACT

In this paper, we consider the oscillations and stability of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate.

1. The problem of aeroelastic static instability (divergence) of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate with rigid contact between layers is investigated. Two cases of boundary conditions are considered: rigid fixation along one of the long edges and the presence of a spring along the other; Hinged support along one of the long edges and the presence of a spring along the other. The dependence of the flow critical velocity from the spring stiffness is obtained [1].

2. The problem of dynamic instability of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate with rigid contact between layers is considered under the assumption of validity of the hypothesis of Kirchhoff and without the condition of constant Poisson's ratio. It is shown that, in contrast to homogeneous over thickness plates, in the case of a non-symmetric non-homogeneous over thickness plate bending vibrations may cause planar oscillations and vice versa. As a result, resonance is possible. For this problem, a particular case of dynamical instability is considered when planar oscillations cause bending vibrations according to a given law [2, 3].

3. The problems of oscillation and stability of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate under conditions of free sliding between layers are considered, based on the Kirchhoff hypothesis for each layer separately.

A two-layer plate is considered under the condition of sliding contact between orthotropic layers. Assuming that the hypothesis of Kirchhoff is valid for each layer separately, differential equations of bending and planar oscillations are obtained. It is shown that, in the general case, the problems of bending and planar oscillations are not separated. The boundary conditions on the edges of the plate are given.

The possibility of the layers separating in the case of bending vibrations after solving the problem was verified and the normal stresses were determined. It is shown that, regardless of the boundary conditions, the normal stress at the junction of layers of the plates is compressive in case of constant distributed load, so the lamination will be absent.

The possibility of the appearance of a lamination is also considered in the special case when only the force of weight acts on the two-layer plate. The criterion of absence of lamination of a two-layer orthotropic plate is obtained. It is shown that the survivability criterion depends essentially on the thicknesses of the plate layers [4].

The problem of vibrations of a two-layer plate under conditions of free sliding between contact layers is investigated. The oscillations of a two-layer plate are considered under the condition of hinging at the edges. In the one-dimensional case, the Navier condition coincides with free plumage. It is shown that the problem is reduced to a system of equations, the solution of which can exist in three cases. Each case is considered separately. In one case it is shown that bending vibrations of the plate lead to the appearance of planar oscillations with the same frequency of oscillations as in bending vibrations. In the other case, planar vibrations of the plate lead to the appearance of bending vibrations. The conditions for the appearance of a resonance are determined.

The problem of oscillations of a two-layer plate is also considered for rigid fixation along the edge $x = 0$ and a free edge with respect to $x = a$. As a result, the frequency of the oscillations at which resonance arises is obtained [5].

The problems of oscillations of a plate of two layers are considered, in the case when the tangential stresses between the layers are zero (slip between layers). It is shown that the Navier conditions are reduced to the conditions of articulation for plates. Accepting the Kirchhoff hypothesis, the boundary conditions of the free edge of a two-layer slip plate are established [6].

The Konenkov problem for a two-layer plate is considered, in the presence of sliding between layers. The semi-infinite plate with the Navier boundary conditions on the sides $y = 0$; b , and the free edge $x = 0$ with given damping conditions. The existence of a solution to this problem means the existence of oscillations localized in the vicinity of the free edge.

In the case of two-layer slip plates, in contrast to the Konenkov equation, here, instead of the Poisson ratio, the mean value of the Poisson coefficients of the two layers is involved. This difference may be important for anisotropic materials, or if there are materials with a negative Poisson's ratio.

Another difference between the problem considered here is that in the case of two-layered plates, the localized bending vibrations leads to the appearance of localized longitudinal oscillations.

