

ՀՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ  
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈՒՆԱՆՅԱՆ ԱՐԵԳ ԱՐՄԵՆԻ

ՍԱՀՔԻ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌՈՒՄԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԼԱՅՆՈՒՅԹԱ-ՓՈՒԼԱՅԻՆ  
ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՏԵՂԱՅՆԱՑՈՒՄԸ  
ՄԵՐՁՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԹՈՒՅԼ  
ԱՆՀԱՄԱՍԵՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՊՅԵԶՈՒԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՇԵՐՏՈՒՄ

Ա 02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա»  
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների  
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2017

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
АРМЕНИИ

УНАНЯН АРЕГ АРМЕНОВИЧ

АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И  
ЛОКАЛИЗАЦИЯ СДВИГОВОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ В  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С  
ПРИПОВЕРХНОСТНЫМИ СЛАБО-НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-  
математических наук по специальности 01.02.04 - «Механика  
деформируемого твердого тела»

ЕРЕВАН – 2017

Ատենախոսության թեման հաստատված է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ,  
Ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր, Ա.Ս. Ավետիսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր, Ս.Վ. Սարգսյան  
Ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր, Կ.Բ. Ղազարյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

ՀՀ ԳԱԱ Ֆիզիկայի կիրառական  
պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2017թ. հունիսի 23-ին, ժամը 14<sup>00</sup> -ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի – 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ 0019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am))

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2017թ. մայիսի 22-ին:

Մասնագիտական խորհրդի  
գիտական քարտուղար, Ֆ.մ.գ.դ.



Ս.Վ.Սահակյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте Механики НАН Армении.

Научный руководитель:

Член-корр. НАН РА, д.ф.м.н.,  
профессор А.С. Аветисян

Официальные оппоненты:

д.ф.м.н., профессор, С.В. Саркисян  
д.ф.м.н., профессор, К.Б. Казарян

Ведущая организация:

Институт прикладных проблем физики НАН РА

Защита состоится 23-го июня 2017г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании специализированного Совета Механика-047 в Институте механики НАН РА (адрес: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am))

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА. Автореферат разослан 22-ого мая 2017г.

Ученый секретарь  
Специализированного совета, д.ф.м.н.



А.В. Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** С развитием новых направлений современной техники, приложения *упругих волновых явлений* становятся все более важными в областях радиоэлектроники, измерительной техники и электросвязи (обработка, усиление и задержка сигнала), в медицине (лучевая диагностика, ультразвуковое измерение), в металлведении (неразрушающий контроль элементов конструкций из разных материалов), а также в других областях. Для мобильных телефонов, компьютеров и других точных измерительных приборов радиоэлектроники, каждый месяц производятся миллионы волновых фильтров, резонаторов и периодических топографических решеток.

Как правило, эти технические элементы являются простыми: - однослойными, или композитными: - многослойными волноводами, составленными из слоев разных материалов. Использование разных материалов в слоистых волноводах часто исходит из технической необходимости: - достичь нужных характеристик волнового поля.

В теории связанных физико-механических полей проблема исследования распространения высокочастотных волн в волноводах становится особенно важной при исследованиях динамических процессов в слоистых волноводах, со стыками между слоями негладких (шероховатых, волнистых) поверхностей. Из-за характера неоднородностей в приповерхностной зоне стыка слоев, конструкционный элемент реагирует граничным электромеханическим или термомеханическим нагрузкам по-разному. Это в свою очередь приводит к дополнительным поверхностным нагрузкам по сравнению со случаем модели идеально гладкой поверхности однородного материала.

Приповерхностные неоднородности в сэндвиче многослойного волновода рассматриваются, или как кусочно-однородные структуры, когда характеристики материала представляются кусочно-постоянными функциями, или как непрерывная неоднородность материала любого слоя волновода, когда те же характеристики материала описываются непрерывными функциями.

Независимо от способа обработки поверхности, количественно линейные характеристики шероховатости находятся в пределах: шаг - от 1 до 1000 мкм, а высота - от 0,01 до 10 мкм. Поэтому актуальны именно исследования волновых явлений с учетом *слабой неоднородности материалов слоев волновода и слабой геометрической неоднородности поверхностей этих слоев.*

**Цель диссертационной работы.** Целью диссертационной работы является выявление новых волновых явлений, обусловленных слабой геометрической неоднородностью поверхности слоя или слабой неоднородности материала в приповерхностной зоне. Также дать характеристику амплитудно-фазовому взаимодействию при распространении нормальной электроактивной сдвиговой упругой волны в пьезоэлектрическом волноводе.

**Научная новизна.** Благодаря вводу виртуальных сечений и гипотез магнето-упругих слоистых структур (гипотезы MEL-S-Magneto Elastic Layered Systems):

- Исследовались влияния продольной, слабой неоднородности упругого материала слоя-волновода на распространение нормального сдвигового волнового сигнала, при механически свободных или жестко зашеченных граничных условиях.

- Исследовано влияние механически свободных, геометрически слабо-неоднородных поверхностей упругого слоя-волновода на распространение нормальной сдвиговой волны.

- Исследуется распространение высокочастотного электро-упругого волнового сигнала в композитном волноводе из однородного пьезоэлектрического слоя с шероховатыми поверхностями, которые залиты соответственно идеальным проводником и идеальным диэлектриком.

- Обсуждены как воздействие шероховатости поверхностей, так и эффект поверхностного сглаживания разными материалами (эффект разных физико-механических

граничных условий) на процесс распространения высокочастотного электро-упругого нормального сигнала.

- Численно исследованы амплитудные распределение и частотная характеристика волнового поля в композитном волноводе при распространении нормального волнового сигнала.

- Приведены дисперсионные зависимости для всех возможных характерных мод волны упругого сдвига. Оказывается, что в случае распространения медленных волн, для волн определенных длин возникает зона частотного молчания.

**Практическая ценность.** Результаты, полученные в диссертационной работ, могут быть применены в разработках новых волновых фильтров, резонаторов и периодических топографических решеток, при совершенствовании работы мобильных телефонов, компьютеров и других точных измерительных приборов радиоэлектроники.

Работа в целом может быть включена в список спецкурсов в магистратуре по соответствующим специальностям технических вузов.

**Обоснованность и достоверность полученных результатов** обеспечена использованием известных методов конструкционного моделирования и математической постановки задач, а также проведенным сравнительным анализом полученных результатов при предельных значениях физических характеристик материалов и геометрических характеристик волновода с результатами известных классических задач.

**Апробация работы.** Приведенные в диссертации основные результаты докладывались и обсуждались:

-На семинаре профессора М.В. Белубекяна “Волновые процессы” в Институте механики НАН Армении,

-На IV международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 21-26 сентября, Цахкадзор, Армения, 2015,

-На Международной Школе-Конференции Молодых Ученых "Механика 2016", 3-7 октября, Цахкадзор, 2016.

Диссертационная работа в целом обсуждена на семинаре отдела “Динамика деформируемых систем и связанные поля” Института Механики НАН Армении и рекомендована к представлению защите общим семинаром Института Механики НАН Армении.

**Публикации.** По теме диссертационной работы автором опубликовано восемь научных статей, из которых шесть с соавторами. Список работ приводится в конце автореферата.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 112 наименований. Общий объем диссертации составляет 142 страниц, 50 рисунков, в том числе 38 графиков.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** приведено краткое описание состояния проблемы распространения нормальных волн в волноводе с неоднородностями материала и геометрии поверхностей. Приведен краткий обзор работ, в которых разными методами исследуются поведение волновых характеристик под влиянием поверхностных неоднородностей. Обоснована актуальность темы, представлена цель диссертационной работы и дано краткое описание содержания диссертационной работы по главам.

**Первая глава** состоит из трех параграфов и в основном имеет вспомогательный характер.

**В первом параграфе** приведены основные уравнения, материальные соотношения и граничные условия линейной электро-упругости для пьезо-диэлектрического слоя-волновода из неоднородного материала и с геометрическими неоднородностями поверхностей.

В общем случае анизотропии и неоднородности пьезо-диэлектрического материала квазистатические уравнения электро-упругости

$$c_{ijnk}(x_p) \cdot u_{n,jk}(x_p; t) + e_{mij}(x_p) \cdot \varphi_{,mj}(x_p; t) + c_{ijnk,j}(x_p) \cdot u_{n,k}(x_p; t) + e_{mij,j}(x_p) \cdot \varphi_{,m}(x_p; t) = \rho(x_p) \cdot \ddot{u}_i(x_p; t), \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mj}(x_p) \cdot \varphi_{,mj}(x_p; t) + \varepsilon_{mj,j}(x_p) \cdot \varphi_{,m}(x_p; t) = \\ = e_{mij}(x_p) \cdot u_{i,jm}(x_p; t) + e_{mij,j}(x_p) \cdot u_{i,m}(x_p; t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

получаются с учетом материальных соотношений для неоднородной среды

$$\sigma_{ij}(x_p) = c_{ijnk}(x_p) \cdot u_{n,k}(x_p) + e_{mij}(x_p) \cdot \varphi_{,m}(x_p), \quad (1.3)$$

$$D_m(x_p) = e_{nmk}(x_p) \cdot u_{n,k}(x_p) - \varepsilon_{nmk}(x_p) \cdot \varphi_{,k}(x_p). \quad (1.4)$$

Для полноты базы соотношений математической краевой задачи, образующейся в волноводах, необходимо уравнениям (1.1) и (1.2), присоединить также граничные условия о сопряженности электромеханических полей

$$\left( \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)} \right) \cdot n_j \Big|_{\Sigma_m(x_i)} = 0, \quad u_k^{(1)} \Big|_{\Sigma_m(x_i)} = u_k^{(2)} \Big|_{\Sigma_m(x_i)}, \quad (1.5)$$

$$\left( D_j^{(1)} - D_j^{(2)} \right) \cdot n_j \Big|_{\Sigma_m(x_i)} = 0, \quad \left( D_j^{(1)} - D_j^{(2)} \right) \cdot n_j \Big|_{\Sigma_m(x_i)} = 0, \quad (1.6)$$

налагающие на поверхность каждого составляющего элемента композитного волновода.

Не теряя общности в диссертационной работе приведены разные сочетания условий сопряженности физико-механических полей на негладких поверхностях пьезо-диэлектрического слоя

- В случае негладкой поверхности раздела двух сред  $x_2 = h_+(x_1, x_3)$ , граничными условиями линейной электро-упругости будут условия полной сопряженности механической и электрической полей

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{(1)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t) - \\ -\sigma_{ij}^{(2)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t) \end{bmatrix} \cdot n_j^{(+)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3) = 0, \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} D_j^{(1)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t) - \\ -D_j^{(2)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t) \end{bmatrix} \cdot n_j^{(+)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3) = 0, \quad (1.8)$$

$$u_i^{(1)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t) = u_i^{(2)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t), \quad (1.9)$$

$$\varphi^{(1)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t) = \varphi^{(2)}(x_1, h_+(x_1, x_3), x_3, t). \quad (1.10)$$

- На механически свободной поверхности  $x_2 = h_-(x_1, x_3)$ , где пьезо-диэлектрический слой граничит с вакуумом, условия сопряженности электрического и упругого полей запишутся в виде

$$\left[ \sigma_{ij}^{(1)}(x_1, h_-(x_1, x_3), x_3, t) \right] \cdot n_j^{(-)}(x_1, h_-(x_1, x_3), x_3) = 0, \quad (1.11)$$

$$\begin{bmatrix} D_j^{(1)}(x_1, h_-(x_1, x_3), x_3, t) - \\ -D_j^{(e)}(x_1, h_-(x_1, x_3), x_3, t) \end{bmatrix} \cdot n_j^{(-)}(x_1, h_-(x_1, x_3), x_3) = 0, \quad (1.12)$$

$$\varphi^{(1)}(x_1, h_-(x_1, x_3), x_3, t) = \varphi^{(e)}(x_1, h_-(x_1, x_3), x_3, t). \quad (1.13)$$

**Во втором параграфе** обсуждается амплитудно-фазовое нелинейное взаимодействие при распространении линейного сигнала в геометрически и физически слабо-неоднородном пьезо-диэлектрическом слое-волноводе.

Не нарушая общности обсуждений рассматривается распространение монохроматического электро-упругого чисто-сдвигового (**SH**) волнового сигнала  $A_0(y) \cdot \exp i(kx - \omega t)$  в неоднородном слое-волноводе из пьезо-диэлектрика класса *6mm* гексагональной симметрии  $\{|x| < \infty; h_-(x, z) \leq y \leq h_+(x, z); |z| < \infty\}$ , с шероховатыми поверхностями  $y = h_{\pm}(x, z)$ . В этом случае анти-плоская электро-активная деформация разделяется от плоской, не электро-активной деформаций, а уравнения для электро-упругих сдвиговых деформации относительно упругого сдвига  $w(x, y, t)$  и электрического потенциала  $\varphi(x, y, t)$  принимают довольно простой вид

$$\begin{aligned} & \left\{ c_{44}(x, y) w_{,x}(x, y) + e_{15}(x, y) \varphi_{,x}(x, y) \right\}_{,x} + \\ & + \left\{ c_{44}(x, y) w_{,y}(x, y) + e_{15}(x, y) \varphi_{,y}(x, y) \right\}_{,y} = \rho(x, y) \ddot{w}(x, y), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ e_{15}(x, y) w_{,x}(x, y) - \varepsilon_{11}(x, y) \varphi_{,x}(x, y) \right\}_{,x} + \\ & + \left\{ e_{15}(x, y) w_{,y}(x, y) - \varepsilon_{11}(x, y) \varphi_{,y}(x, y) \right\}_{,y} = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Упрощаются также граничные условия (1.11)-(1.13) для механически свободных поверхностей волновода

$$\begin{aligned} & \sigma_{zx}^{(1)}(x, h_{\pm}(x), t) \cdot h_{\pm,x}(x) + \sigma_{yz}^{(1)}(x, h_{\pm}(x), t) = 0, \\ & \left[ D_x^{(1)}(x, h_{\pm}(x), t) - D_x^{(e)}(x, h_{\pm}(x), t) \right] \cdot h_{\pm,x}(x) + \\ & + \left[ D_y^{(1)}(x, h_{\pm}(x), t) - D_y^{(e)}(x, h_{\pm}(x), t) \right] = 0, \\ & \varphi^{(1)}(x, h_{\pm}(x), t) = \varphi_{\pm}^{(e)}(x, h_{\pm}(x), t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

При распространении монохроматического электро-упругого волнового сигнала  $A_0(y) \cdot \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$  в неоднородной пьезо-диэлектрической среде, сигнал сталкивается с физической неоднородностью материала, а при наличии неровной поверхности раздела среды, сигнал сталкивается еще и с поверхностными неоднородностями. Возникающая диссипация приводит к амплитудно-фазовому взаимодействию и следовательно искомое волновое поле приобретает общее представление

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \exp \left\{ U_w(x, y) + i \left[ \theta_w(x, y) - \omega t \right] \right\}, \\ \varphi(x, y, t) &= \exp \left\{ U_{\varphi}(x, y) + i \left[ \theta_{\varphi}(x, y) - \omega t \right] \right\}, \\ \varphi_{\pm}^{(e)}(x, y, t) &= \exp \left\{ U_{\pm}(x, y) + i \left[ \theta_{\pm}(x, y) - \omega t \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где функций  $\{U_w(x, y); U_{\varphi}(x, y); U_{\pm}(x, y)\}$  логарифмы амплитуд соответствующих искомым параметрам волнового поля  $U_w(x, y) \triangleq \ln W_0(x, y)$ ;  $U_{\varphi}(x, y) \triangleq \ln \varphi_0(x, y)$ ;  $U_{\pm}(x, y) \triangleq \ln \varphi_{\pm}^{(0)}(x, y)$ . Фазовые функций  $\{\theta_w(x, y); \theta_{\varphi}(x, y); \theta_{\pm}(x, y)\}$  также по индексам соответствуют искомым параметрам образующего волнового поля.

Хоть и выбрана на наш взгляд более простая анизотропия пьезо-кристаллов, полученная математическая краевая задача из восьми нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами относительно амплитудных и фазовых функций, дает очевидно сложное амплитудно-фазовое взаимодействие. Естественно решить такую задачу возможно только численно, и то нужно иметь мощную математическую и программную подготовку. Однако численные решения не всегда выявляют полную гамму физических явлений для раздельного изучения.

**В третьем параграфе** приводится подход моделирования приповерхностных неоднородностей пьезо-диэлектрического волновода в задачах распространения высокочастотного электро-упругого волнового сигнала в нем.

Исходя из факта слабости приповерхностных неоднородностей предлагается отсечь приповерхностные тонкие слои переменных толщин, и в каждом выделенном слое ввести гипотезы MELs (hypotheses MELs – Magneto- (Electro-; Thermo-) Elastic Layered Systems).

В диссертационной работе обсуждаются две модели прикрепления пьезоэлектрических полупространств:

- Два пьезоэлектрические полупространства  $\Omega_1 = \{|x| < \infty, -\infty < y \leq h_1(x), |z| < \infty\}$  и  $\Omega_2 = \{|x| < \infty, h_2(x) \leq y < \infty, |z| < \infty\}$ , связаны между собой слоем пьезоэлектрического клея  $\Omega_3 = \{|x| < \infty, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), |z| < \infty\}$  той же анизотропии, с соответствующими физико-механическими характеристиками. Тогда в каждом полупространстве, а также во внутренней клеящей щели переменной ширины  $\xi(x) = |h_2(x) - h_1(x)|$  решаются соответствующие квазистатические уравнения электро-упругости

$$c_{ijkm} u_{k,im}^{(n)} + e_{ijm} \varphi_{n,im} = \rho_n \ddot{u}_j^{(n)}; \quad e_{ijm} u_{j,im}^{(n)} - \varepsilon_{im} \varphi_{n,im} = 0. \quad (1.18)$$

Количество уравнений  $n \in \{1; 2; \dots\}$  и искомым величин естественно зависит от связанных физико-механических полей. Приведенные выше три группы уравнений (1.18) и граничные условия на каждой поверхности  $y = h_m(x)$

$$\left( \sigma_{ij}^{(m)}(x, h_m(x), t) - \sigma_{ij}^{(3)}(x, h_m(x), t) \right) \cdot n_j^{(m)}(x, h_m(x)) = 0, \quad (1.19)$$

$$\left( D_j^{(m)}(x, h_m(x), t) - D_j^{(3)}(x, h_m(x), t) \right) \cdot n_j^{(m)}(x, h_m(x)) = 0, \quad (1.20)$$

$$w_i^{(m)}(x, h_m(x), t) = w_i^{(3)}(x, h_m(x), t), \quad (1.21)$$

$$\varphi_m(x, h_m(x), t) = \varphi_3(x, h_m(x), t), \quad (1.22)$$

с изменяющейся нормалью  $\bar{n}^{(m)}(x) = \{n_j^{(m)}(x, h_m(x))\}$  при  $m = 1; 2$ , вместе с условиями затухания соответствующих физико-механических полей в бесконечности, при индексах  $i; j \in \{1; 2; 3\}$  и  $m \in \{1, 2\}$

$$\lim_{y \rightarrow (-1)^m \infty} w_m(x, y, t) \rightarrow 0, \quad \lim_{y \rightarrow (-1)^m \infty} \varphi_m(x, y, t) \rightarrow 0 \quad (1.23)$$

образуют математическую граничную задачу в трехслойном композите с шероховатыми границами в контакте.

Избегая от сложностей построения решения в тонком слое, предлагается ввод гипотез MELs в виде функциональных распределений

$$w_3^*(x, y, t) = f(h_m(x), y) \cdot [w_2(x, h_2(x), t) - w_1(x, h_1(x), t)] + w_1(x, h_1(x), t), \quad (1.24)$$

$$\varphi_3^*(x, y, t) = f(h_m(x), y) [\varphi_2(x, h_2(x), t) - \varphi_1(x, h_1(x), t)] + \varphi_1(x, h_1(x), t), \quad (1.25)$$

где  $w_n(x, h_n(x), t)$  и  $\varphi_n(x, h_n(x), t)$  при  $n = 1; 2$ . граничные значения упругого сдвига и электрического потенциала на соответствующих негладких поверхностях. Функция распределения волнового поля  $f(h_m(x), y)$  в гипотезах (1.24) и (1.25) выбирается так, чтобы она довольно просто и полностью (без потерь физических явлений) описала характер изменения искомых величин на поверхностях и по толщине клеящего слоя  $h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$ . Во первых выбором этой функции должна быть обеспечена сопряженность физико-механических полей на поверхностях разделов сред  $y = h_m(x)$ ,  $m = 1; 2$ .

$$w_3^*(x, h_m(x), t) = w_m(x, h_m(x), t), \quad \varphi_3^*(x, h_m(x), t) = \varphi_m(x, h_m(x), t). \quad (1.26)$$

Для этого необходимо, чтобы на поверхностях  $y = h_m(x)$  выполнялись условия

$$f(h_m(x), y)|_{y=h_1(x)} = 0 \quad \text{и} \quad f(h_m(x), y)|_{y=h_2(x)} = 1. \quad (1.27)$$

Для полного описания характера изменения физико-механического поля в тонком слое пьезо-диэлектрического материала (клея), необходимо, чтобы представления (1.24) и (1.25) удовлетворяли уравнениям электро-упругости анти-плоской деформаций (1.18), при  $n = 3$ . Учитывая вид нормального сдвигового электро-упругого волнового сигнала на негладких поверхностях  $y = h_m(x)$ , получается представление для функции распределения

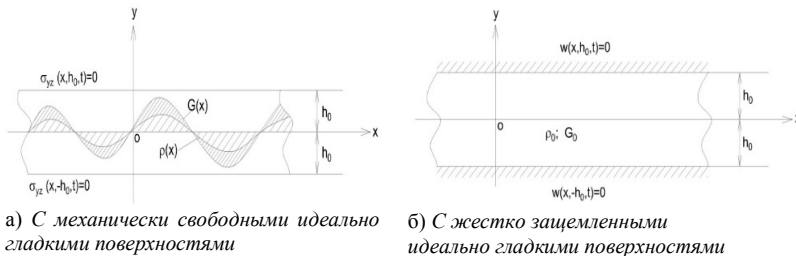
$$f(h_m(x), y) = \frac{e^{\alpha_3 k(y-h_1(x))} - e^{-\alpha_3 k(y-h_1(x))}}{e^{\alpha_3 k(h_2(x)-h_1(x))} - e^{-\alpha_3 k(h_2(x)-h_1(x))}} = \frac{sh[\alpha_3 k(y-h_1(x))]}{sh[\alpha_3 k(h_2(x)-h_1(x))]}, \quad (1.28)$$

которое включает также волновую характеристику внутреннего клеящего слоя

$$\alpha_3 k = \sqrt{k^2 - \left(G_3(1 + \chi_3^2)\omega^2\right) / \rho_3}.$$

**Вторая глава** диссертации посвящена изучению влияний слабой неоднородности материала и поверхностей упругого волновода на распространение высокочастотного упругого сдвигового ( $SH$ ) волнового сигнала.

**В первом параграфе** исследуется распространение высокочастотного чисто сдвигового ( $SH$ ) волнового сигнала в упругом слое-волноводе из слабо неоднородного материала с механически свободными (Рис. 2.1.а) или жестко заземленными идеально гладкими поверхностями (Рис. 2.1.б).



**Рис. 2.1** Упругий слой-волновод из слабо неоднородного изотропного материала

При распространении нормальной сдвиговой упругой волны



$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \cdot \sin(\mu_n y) \cdot e^{i\omega_n t} \quad (2.1)$$

в слабо неоднородном изотропном упругом слое с жестко заземленными идеально гладкими поверхностями, когда неоднородность материала описывается функциями

$$G(x) = G_0 [1 + \varepsilon_1 \sin(k_1 x) + \delta_1 \cos(k_1 x)], \quad \rho(x) = \rho_0 [1 + \varepsilon_2 \sin(k_1 x) + \delta_2 \cos(k_1 x)]. \quad (2.2)$$

Уравнение движения приводится к трем группам бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими переменными коэффициентами относительно амплитудных функций каждой последовательной  $n$ -ой моды волны

$$\begin{aligned} & \left[ w_n''(x) + \mu_n^2 (\eta_n^2 - 1) w_n(x) \right] + \\ & + \varepsilon_1 \sin(k_1 x) \left[ w_n''(x) - (k_1 \delta_1 / \varepsilon_1) w_n'(x) + \mu_n^2 (\varepsilon_2 \eta_n^2 - 1) w_n(x) \right] + \\ & + \delta_1 \cos(k_1 x) \left[ w_n''(x) + (k_1 \varepsilon_1 / \delta_1) w_n'(x) + \mu_n^2 (\delta_2 \eta_n^2 - 1) w_n(x) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $\eta_n^2 \triangleq \omega_n^2 / (c_{0i}^2 \mu_n^2)$  - обозначена приведенная фазовая скорость  $n$ -ой формы волны.

Очевидно, что из-за неоднородности материала процесс представляется взаимодействием трех связанных нормальных волновых мод, характеризуемые в уравнении (2.3) соотношениями в прямых скобках.

Вышеприняты обозначения:  $G(x)$  - модуль сдвига материала, которая, как и плотность материала -  $\rho(x)$ ,  $k_1 \triangleq \pi/a$  - число волнистости неоднородности материала слоя,  $a$  - полшаг волнистости неоднородности материала слоя,  $\varepsilon_1$ ;  $\varepsilon_2$ ;  $\delta_1$ ;  $\delta_2$  - малые амплитуды функций неоднородности, которые при слабой неоднородности материала удовлетворяют ограничению  $\varepsilon_n^2 + \delta_n^2 \ll 1$ ,  $\mu_n = \pi n/h_0$  - волновое число по толщине слоя,  $n \in \mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$  - натуральное число.

Исходя из того, что взаимодействие обусловлено функциями неоднородности  $\varepsilon_1 \sin(k_1 x)$  и  $\delta_1 \cos(k_1 x)$ , решение уравнению (2.3) с переменными периодическими коэффициентами естественно искать в общем виде разложений формами данных функций неоднородности

$$w_n(x) = a_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma^m \cdot (a_{mn} \cos(k_m x) + b_{mn} \sin(k_m x)), \quad \text{при } n; m \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

где  $k_m \triangleq m k_1 = (m\pi/a)$  - волновое число соответствующей  $m$ -ой гармонике волны, а  $\gamma \triangleq \max \left\{ \sqrt{\varepsilon_i^2 + \delta_i^2} \right\}$ ,  $i=1;2$  малый параметр, характеризующий слабую неоднородность материала.

В нулевом приближении слабо неоднородный слой пропускает только одну группу дискретных частот:  $\omega_{0n} = c_{0i} (\pi n/h_0)$ , для распространяющейся сдвиговой волны с соответствующими числами формообразования  $\mu_n = \pi n/h_0$ .

В первом же приближении  $m=1$  волновое число  $\mu_{1n}$  и амплитуды первого приближения находим из трех связанных бесконечных систем уравнений

$$\mu_n^2 \left[ (\eta_n^2 - 1) + \varepsilon_2 (\eta_n^2 - \varepsilon_{12}) \sin(k_1 x) + \delta_2 (\eta_n^2 - \delta_{12}) \cos(k_1 x) \right] a_{0n} = 0, \quad (2.5)$$

$$\left[ \mu_n^2 (\eta_n^2 - 1) - k_1^2 \right] \cdot b_{1n} \cdot \sin(k_1 x) = 0, \quad (2.6)$$

$$\left[ \mu_n^2 (\eta_n^2 - 1) - k_1^2 \right] \cdot a_{1n} \cdot \cos(k_1 x) = 0. \quad (2.7)$$

Из условий существования нетривиальных решений систем (2.5)-(2.7) получаем волновые числа формообразования первого приближения

$$\mu_{1n}(k_1 x) = (\pi n / h_0) \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_2 \sin(k_1 x) + \delta_2 \cos(k_1 x)}{1 + \varepsilon_1 \sin(k_1 x) + \delta_1 \cos(k_1 x)}}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что коэффициент формообразования  $\mu_{1n} = \mu_{0n} \cdot f(x)$  уже переменный из-за неоднородности материала (Рис. 2.2).

Из рис. 2.2 также видно, что при относительно больших по сравнению с плотностью и жесткостью, когда  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ,  $\delta_1 > \delta_2$ , и при относительно больших по сравнению с жесткостью, коэффициентах плотности, когда  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  и  $\delta_1 < \delta_2$ , характеры изменения частоты колебания получаются разными, оставаясь периодическими.

Из условий соответствия гармоник находим амплитуды  $\{a_{1n}\}$  и  $\{b_{1n}\}$  первого приближения выраженные через амплитуды волнового сигнала  $\{a_{0n}\}$

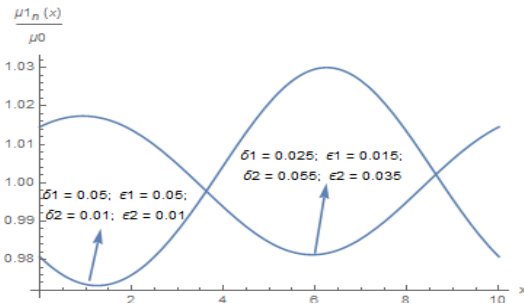
$$b_{1n} = \frac{\varepsilon_2 (\pi n / h_0)^2 - \mu_{1n}^2 \varepsilon_1}{\left( (\pi n / h_0)^2 - (\pi / a)^2 \right) - \mu_{1n}^2} a_{0n}, \quad a_{1n} = \frac{\delta_2 (\pi n / h_0)^2 - \delta_1 \mu_{1n}^2}{\left( (\pi n / h_0)^2 - (\pi / a)^2 \right) - \mu_{1n}^2} a_{0n}. \quad (2.9)$$

Из (2.9) видно, что амплитудное искажение по сравнению с искажением фазовой функции квадратное. Отсюда также находим номера резонансных гармоник, когда  $a_{1n} \rightarrow \infty$  и/или  $b_{1n} \rightarrow \infty$ , при которых возникает внутренний резонанс

$$N_r = (h_0 / a) \sqrt{\frac{1 + \gamma_1 \sin(k_1 x + \varphi_1)}{\gamma_\Delta \sin(k_1 x + \varphi_\Delta)}}. \quad (2.10)$$

В соответствующих интервалах при распространении волны

$$a(2m + 1 - \varphi_\Delta / \pi) > x_r > a(2m - \varphi_\Delta / \pi), \quad m = 0; 1; 2; \dots \quad (2.11)$$

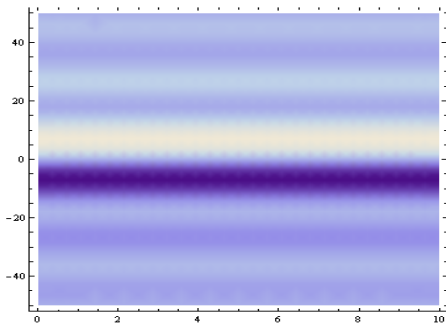


**Рис. 2.2** Формы изменения коэффициента формообразования (или частоты) при распространении нормального волнового сигнала

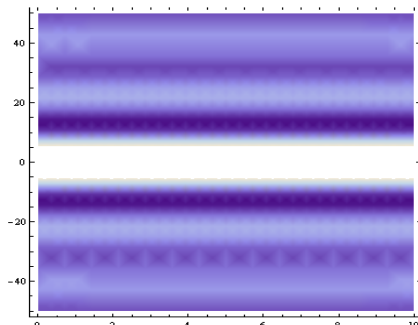
Так же исследованы воздействия неоднородности во втором приближении. В случае распространения нормальной предельной волны в волноводе с механически свободными поверхностями, частотные характеристики при разных граничных условиях на гладких поверхностях волновода из слабо неоднородного материала одинаковы и из-за неоднородности меняются одинаково.

На рисунках 2.3 а) и 2.3 б) приведены уровни волновых поверхностей при разных граничных условиях. Видно, что волновые поверхности в целом сохраняют уровненный характер, существующий в случае однородной среды: сохраняют симметричность (или

асимметричность) по толщине волновода, но искривляются по направлению распространения волны. На линиях изменений уровней четко фигурируют зубчатые отклонения, характеризующиеся неоднородностью материала волновода. При определенных частотах волнового сигнала, взаимодействие сигнала с неоднородностью приводит к параметрическому резонансу.



**Рис. 2.3 а)** Уровни волновой поверхности при жестко закрепленных поверхностях волновода



**Рис. 2.3 б)** Уровни волновой поверхности при механически свободных поверхностях волновода

**Во втором параграфе** двумя разными подходами исследуется влияние слабо неоднородных поверхностей при распространении чисто сдвигового ( $SH$ ) высокочастотного волнового сигнала в однородном упругом слое-волноводе  $\Omega := \{ |x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty \}$  с механически свободными или жестко защемленными слабо неоднородными поверхностями.

$$\begin{cases} h_+(x) = h_0 [1 + \varepsilon_+ \cdot \sin(k_+ \cdot x) + \delta_+ \cdot \cos(k_+ \cdot x)], \\ h_-(x) = -h_0 [1 + \varepsilon_- \cdot \sin(k_- \cdot x) + \delta_- \cdot \cos(k_- \cdot x)], \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $h_0$  - базовая полутолщина слоя-волновода,  $\varepsilon_{\pm}$  и  $\delta_{\pm}$  - амплитудные относительные коэффициенты высот профилей шероховатости, для которых известно, что  $\{\varepsilon_{\pm}; \delta_{\pm}\} \ll 1$ , поскольку высоты выступов шероховатости  $h_0 \cdot \varepsilon_{\pm}$  и  $h_0 \cdot \delta_{\pm}$  всегда намного меньше базовой толщины слоя:  $\{h_0 \cdot \varepsilon_{\pm}; h_0 \cdot \delta_{\pm}\} \ll h_0$ .  $k_{\pm} \triangleq 2\pi/\lambda_{\pm}$  - число волнистости профили шероховатости и  $\lambda_{\pm}$  - шаг (длина волны) профили шероховатости. Тогда граничные условия на механически свободных негладких поверхностях волновода  $\sigma_{ij}(x, y) \cdot n_j^{\pm}(x) = 0$  запишутся соответственно в виде

$$h'_{\pm}(x) \cdot \left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right|_{y=h_{\pm}(x)} + \left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right|_{y=h_{\pm}(x)} = 0. \quad (2.13)$$

Учитывая, что геометрическая неоднородность поверхностей волновода слабая и ее воздействие на распространяющуюся волну описывается граничными условиями (2.13), первым подходом решение краевой задачи представляется в виде ряда гармоник, функциями с разделенными переменными

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y) \cdot X_n(x) \cdot \exp(-i\omega_{0n}t), \quad (2.14)$$

где в свою очередь  $X_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \cdot A_{mn} \exp(ik_{*m}x)$ , при  $n; m \in \mathbb{N}^+$ .

Для решений в первом приближении легко получить разрешаемые длины волн

$$\lambda_*(x) = \lambda_0 \cdot 2\pi \arccos^{-1} \left\{ \frac{k_+ \cdot [\varepsilon_+ \cdot \cos(k_+ \cdot x) - \delta_+ \cdot \sin(k_+ \cdot x)]}{k_- \cdot [\varepsilon_- \cdot \cos(k_- \cdot x) - \delta_- \cdot \sin(k_- \cdot x)]} \right\}. \quad (2.15)$$

Тогда из граничных уравнений в первом приближении находим коэффициент формообразования генерированных искаженных волн

$$k_{1n}(x) = \left( \frac{\pi n}{h_0} \right) (h_+(x) - h_-(x)) \left[ h_0^2 + (h_+(x) - h_-(x))^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.16)$$

Из полученного видно, что волновое число первой генерированной гармоники уже зависит от поверхностных не гладкостей волновода. Уже в первом приближении взаимодействие нормальной волны с поверхностными не гладкостями приводит к

распространяющейся волне  $w_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{1n}(y) \cdot X_{1n}(x) \cdot \exp(-i\omega_{0n}t)$ , где

$$\begin{cases} W_{1n}(y) = C_{1n} \exp\left(i \frac{h_0 \cdot k_{1n}(x)y}{h_+(x) - h_-(x)}\right) + C_{2n} \exp\left(-i \frac{h_0 \cdot k_{1n}(x)y}{h_+(x) - h_-(x)}\right), \\ X_{1n}(x) = \gamma A_{0n} \exp(ik_{1n}(x) \cdot x). \end{cases} \quad (2.17)$$

Обсуждены случаи “симметричных” по отношению срединной плоскости волновода неоднородности  $-h_-(x) = h_+(x) = h(x) = h_0 [1 + \varepsilon \cdot \sin(k \cdot x) + \delta \cdot \cos(k \cdot x)]$  и

“синхронных” равнопараллельных  $h_{\pm}(x) = \pm h_0 [1 \pm \varepsilon \cdot \sin(k \cdot x) \pm \delta \cdot \cos(k \cdot x)]$  неоднородностях (шероховатостях) на поверхностях волновода.

Вторым подходом, исходя из слабой геометрической неоднородности в приповерхностных зонах волновода, виртуально выделяются приповерхностные тонкие слои переменной толщины, представляя имеющийся волновод в виде трехслойного

$\Omega = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+$ , где

$$\begin{cases} \Omega_- \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq -h_0 + \gamma_-; |z| < \infty\}, \\ \Omega_0 \triangleq \{|x| < \infty; -h_0 + \gamma_- \leq y \leq h_0 - \gamma_+; |z| < \infty\}, \\ \Omega_+ \triangleq \{|x| < \infty; h_0 - \gamma_+ \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty\}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Во всех трех упругих однородных слоях решается уравнение движения однородной среды с граничными условиями (2.13) на механически свободных негладких поверхностях  $y = h_-(x)$  и  $y = h_+(x)$  для упругих перемещений  $w_{\pm}(x, y, t)$  соответственно слоев  $\Omega_{\pm}$ , а также с условиями полной сопряженности на виртуальных сечениях  $y = -h_0 + \gamma_-$  и  $y = h_0 - \gamma_+$  между образованных слоев.

Учитывая тонкость приповерхностных слоев  $\Omega_{\pm}$ , решения в них представим в соответствии гипотез MELLS, в которых поверхностные значения  $w_+(x, h_+(x))$  и  $w_-(x, h_-(x))$  определяются из условий механически свободных поверхностей (2.13). Решения в приповерхностных тонких слоях волновода формирующиеся вследствие распространения нормальной волны  $w_0(x, y, t) = W_0(y) \cdot \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$  в базовом слое  $\Omega_0$  соответственно получаются

$$w_+(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{sh(\mu_+ [y - h_0 + \gamma_+])}{sh(\mu_+ [h_+(x) - h_0 + \gamma_+])} \times \\ \times \frac{h'_+(x)}{\mu_+ \cdot cth(\mu_+ [h_+(x) - h_0 + \gamma_+]) \cdot [1 - \{h'_+(x)\}^2] + h'_+(x)} \end{array} \right\} \cdot w_0(x, h_0 - \gamma_+), \quad (2.19)$$

$$w_-(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{sh(\mu_- [y + h_0 - \gamma_-])}{sh(\mu_- [h_-(x) + h_0 - \gamma_-])} \times \\ \times \frac{h'_-(x)}{\mu_- \cdot cth(\mu_- [h_-(x) + h_0 - \gamma_-]) \cdot [1 - \{h'_-(x)\}^2] + h'_-(x)} \end{array} \right\} \cdot w_0(x, -h_0 + \gamma_-). \quad (2.20)$$

Из условий сопряженности механических напряжений (2.24) получим дисперсионное уравнение для определения коэффициентов формообразования  $\mu_*$  (Рис. 2.4)

$$\begin{aligned} \mu_*^2 - \mu_* \cdot ctg(\mu_* (2h_0 - (\gamma_+ + \gamma_-))) \cdot (f_+(\mu_+; h_+(x)) - f_-(\mu_-; h_-(x))) = \\ = -f_+(\mu_+; h_+(x)) \cdot f_-(\mu_-; h_-(x)), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где введенные функциональные обозначения

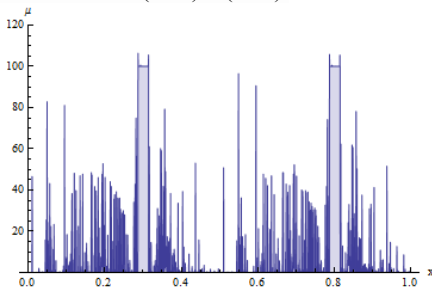
$$f_+(\mu_+; h_+(x)) \triangleq \left[ \frac{1}{sh(\mu_+ [h_+(x) - h_0 + \gamma_+])} \times \frac{1}{\mu_+ \cdot cth(\mu_+ [h_+(x) - h_0 + \gamma_+]) \cdot [1 - \{h'_+(x)\}^2] + h'_+(x)} \cdot \mu_+ h'_+(x) \right], \quad (2.22)$$

$$f_-(\mu_-; h_-(x)) \triangleq \left[ \frac{1}{sh(\mu_- [h_-(x) + h_0 - \gamma_-])} \times \frac{1}{\mu_- \cdot cth(\mu_- [h_-(x) + h_0 - \gamma_-]) \cdot [1 - \{h'_-(x)\}^2] + h'_-(x)} \cdot \mu_- h'_-(x) \right] \quad (2.23)$$

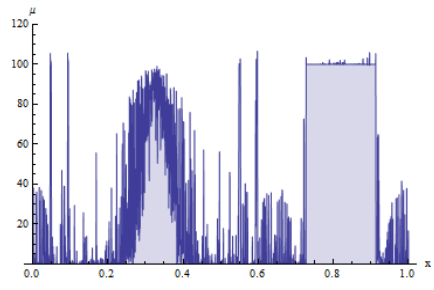
характеризуют влияния шероховатых поверхностей на коэффициент формообразования.

Численный анализ полученных результатов показывает, что решением задачи методом введения гипотез MELLS, по толщине волновода получаем выражение упругого сдвига в базовом слое  $\Omega_0$  в виде  $w_0(x, y, t) = [A \cos(\mu_* y) + B \sin(\mu_* y)] \cdot \exp[i(k_* x - \omega_0 t)]$ ,

которое аналитический продолжается в обе приповерхностные зоны  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$  соответственно (2.19) и (2.20).



**Рис. 2.4 а)** Изображения коэффициента формообразования при “синхронных” поверхностных неоднородностях волновода



**Рис. 2.4 б)** Изображения коэффициента формообразования при “симметричных” поверхностных неоднородностях волновода

Изображение по всей толщине волновода строится после нахождения коэффициента формообразования  $\mu_*$  из дисперсионного уравнения (2.21). Из соотношений (2.19)-(2.20) очевидно, что решения в приповерхностных зонах  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$  получаются характерно одинаковыми, но численно разными при разных поверхностных неоднородностях  $y = h_-(x)$  и  $y = h_+(x)$ .

**В третьем параграфе** приведен сравнительный анализ влияния слабой неоднородности поверхности упругого слоя-волновода на распространяющихся высокочастотных (*SH*) сдвиговых волновых сигналов в нем. Как и в предыдущем параграфе, для выявления воздействий неоднородности поверхности полупространства на амплитудно-частотную характеристику распространяющегося плоского волнового сигнала, а также для оценки погрешности применения метода виртуальных сечений и гипотез MELLS, решение сформулированной краевой задачи проводится двумя способами. Исходя из того, что физическая неоднородность среды, и/или геометрическая неоднородность поверхности волновода, приводят к нелинейному амплитудно-фазовому взаимодействию, распространяющаяся волна представляется в обобщенном виде

$$w(x, y, t) = W_0 A(y) \times \exp\{i(k_0 x - \omega_0 t)\}. \quad (2.24)$$

Получается, что при распространении в упругом полупространстве с не гладкой поверхностью, плоского сдвигового волнового сигнала, вследствие взаимодействия волнового сигнала с поверхностной неоднородностью, образуется не затухающее, как вглубь упругого полупространства, так и по направлению распространения волновое поле

$$w_{\pm}(x, y, t) = W_0 e^{\left\{ \mp i k_0 h'(x) [1 + [h'(x)]^2]^{-1/2} \cdot y \right\}} \times e^{\left\{ i \left[ \pm k_0 [1 + [h'(x)]^2]^{-1/2} \cdot x - \omega_0 t \right] \right\}}. \quad (2.25)$$

Таким образом, в отличие от полупространства с идеально плоской границей, при распространении плоского сдвигового волнового сигнала, поверхностная неоднородность полупространства на плоских фронтах отраженной и распространяющегося волн приводит к искажению постоянной амплитуды.

$$w(x, y, t) = W_0 \times \left\{ e^{\left\{ i k_0 [x - h'(x) \cdot y] [1 + [h'(x)]^2]^{-1/2} \right\}} + e^{\left\{ -i k_0 [x + h'(x) \cdot y] [1 + [h'(x)]^2]^{-1/2} \right\}} \right\} \exp\{-i \omega_0 t\}. \quad (2.26)$$

Применяя метод виртуальных сечений и ввод гипотез MELS, получается дисперсионное уравнение в следующем виде

$$\alpha k = -ikh'(x) \frac{1 + sh[\alpha k(h(x) + R)]}{ch[\alpha k(h(x) + R)]}. \quad (2.27)$$

При ультразвуковых длин волнового сигнала, когда  $\lambda_0 \ll 2\pi R_{\max} \alpha(1 + h(x)/R_{\max})$  в уравнении (2.27) имеем малые значения аргумента волнового взаимодействия  $\alpha k(h(x) + R) \rightarrow 0$ . При довольно “длинной” по сравнению с высотой максимального выступа  $R_{\max}$  неровности волнового сигнала  $\lambda_0 \gg 2\pi R_{\max} \alpha(1 + h(x)/R_{\max})$  в уравнении (2.27) уже имеем большие значения аргумента волнового взаимодействия  $\alpha k(h(x) + R) \gg 1$ .

Из полученных соотношений видно, что использованием метода виртуальных сечений и ввода гипотез **MELS** выявили новые, соизмеримые с линейными размерами неоднородностей поверхности  $\lambda \sim |\alpha k(h(x) + R)|$  по длине колебания. Причем естественным образом рождаются все возможные моды длиной  $\lambda_{n^*}(x)$

$$\lambda_{n^*}(x) = [2(h(x) + R)/n] \cdot [h'(x)]^2, \quad \omega_{n^*}(x) = \pm n\pi c_l \cdot [(h(x) + R)]^{-1} \cdot [h'(x)]^{-2}. \quad (2.28)$$

Примечательно, что при слабо неоднородной поверхности полупространства, когда переменная толщина приповерхностного слоя намного меньше длины волнового сигнала, а также при строго неоднородной поверхности полупространства, когда переменная толщина приповерхностного слоя намного больше длины волнового сигнала, получаются одинаковые волновые поля.

**В четвертом параграфе** решается задача о распространении плоского электроупругого волнового сигнала в пьезоэлектрическом волноводе с приграничными геометрическими и физическими неоднородностями. В отличие от выше сформулированных математических краевых задач, здесь учитывается неоднородность материала в приповерхностной зоне

$$\gamma_n(x, y) \triangleq \begin{cases} \gamma_1(y) = \gamma_0 [1 + \delta_0 \sin(\alpha_m^+(x)y - \beta_m^+(x))], & y \in [h_0 - R; h(x)] \\ \gamma_0, & y \in [-h_0 + R; h_0 - R] \\ \gamma_2(y) = \gamma_0 [1 + \delta_0 \sin(\alpha_m^-(x)y - \beta_m^-(x))], & y \in [-h(x); -h_0 + R] \end{cases} \quad (2.29)$$

где  $\alpha_m^\pm(x)y - \beta_m^\pm(x) = \pi(4m + 1)(y \mp (h_0 - R))/2[\pm h(x) \mp (h_0 - R)]$ .

Зная характер неоднородности в приповерхностных зонах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , вводим гипотезы MELS о распределении упругого сдвига и электрического потенциала по толщине в этих слоях, соответственно:

$$w_1(x, y, t) = [1 + \delta_0 \sin(\alpha_m^+(x)y - \beta_m^+(x))] \cdot w_0(x, h_0 - R, t), \quad (2.30)$$

$$\varphi_1(x, y, t) = \sin(\alpha_m^+(x)y - \beta_m^+(x)) \cdot [\varphi_{0+}(x, h(x), t) - \varphi_0(x, h_0 - R, t)] + \varphi_0(x, h_0 - R, t),$$

$$w_2(x, y, t) = [1 + \delta_0 \sin(\alpha_m^-(x)y - \beta_m^-(x))] \cdot w_0(x, -h_0 + R, t),$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \sin(\alpha_m^-(x)y - \beta_m^-(x)) \cdot [\varphi_{0-}(x, -h(x), t) - \varphi_0(x, -h_0 + R, t)] + \varphi_0(x, -h_0 + R, t). \quad (2.31)$$

Здесь фигурируют поверхностные значения первичного электро-упругого сигнала в однородном слое  $\Omega_0$

$$w_0(x, y, t) = [A_{01} \sin(\alpha_0 ky) + A_{02} \cos(\alpha_0 ky)] \cdot e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\varphi_0(x, y, t) = \left\{ B_{01} \sin(ky) + B_{02} \cos(ky) + \frac{e_0}{\varepsilon_0} [A_{01} \sin(\alpha_0 ky) + A_{02} \cos(\alpha_0 ky)] \right\} \cdot e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.32)$$

**В третьей главе** рассматривается влияние поверхностных слабо неоднородностей на распространение высокочастотного электро-упругого (*SH*) волнового сигнала в пьезоэлектрическом волноводе при разных сочетаниях электромеханических граничных условий. Заливка поверхностных неровностей материалами с разными физико-механическими свойствами позволяет формулировать три математические краевые задачи, наиболее общей постановке в третьем параграфе.

**В третьем параграфе** рассматривается распространение высокочастотного электро-упругого (*SH*) волнового сигнала в однородном пьезоэлектрическом слое-волноводе

$\Omega \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty\}$  с залитыми идеальным проводником (или диэлектриком) слабо неоднородными поверхностями  $y = h_{\pm}(x) \in \mathbb{L}_2$  (Рис. 3.1).

Проведением виртуальных сечений  $y = h_0(1 - \gamma_+)$  и  $y = -h_0(1 - \gamma_-)$  получается композитный слой-волновод постоянной толщины, состоящий из пяти слоев, четыре из которых переменной толщин:

- электропроводящего:  $\Omega_-^c \triangleq \{|x| < \infty; -h_0(1 - \gamma_-) \leq y \leq h_-(x); |z| < \infty\}$ , с переменной толщиной  $\xi_c^-(x) \triangleq |h_0(1 + \gamma_-) + h_-(x)|$ ,

- пьезоэлектрического:  $\Omega_-^p \triangleq \{|x| < \infty; h_-(x) \leq y \leq -h_0(1 - \gamma_-); |z| < \infty\}$ , с переменной толщиной  $\xi_p^-(x) \triangleq |h_-(x) - h_0(1 - \gamma_-)|$ ,

- пьезоэлектрического:  $\Omega_0 \triangleq \{|x| < \infty; -h_0(1 - \gamma_-) \leq y \leq h_0(1 - \gamma_+); |z| < \infty\}$ , с постоянной толщиной  $\xi_p^0(x) \triangleq |h_0(1 - \gamma_-) - h_0(1 - \gamma_+)|$ ,

- пьезоэлектрического:  $\Omega_+^p \triangleq \{|x| < \infty; h_0(1 - \gamma_+) \leq y \leq h_+(x); |z| < \infty\}$ , с переменной толщиной  $\xi_p^+(x) \triangleq |h_+(x) - h_0(1 - \gamma_+)|$ ,

- диэлектрического:  $\Omega_+^d \triangleq \{|x| < \infty; h_+(x) \leq y \leq h_0(1 + \gamma_+); |z| < \infty\}$ , с переменной толщиной  $\xi_d^+(x) \triangleq |h_0(1 + \gamma_+) - h_+(x)|$ .

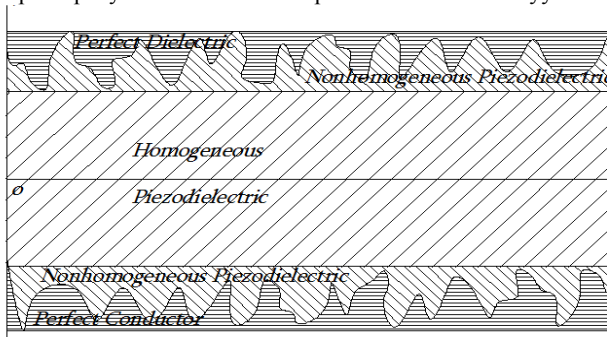
Задача решается вводом гипотез MELS во всех тонких слоях переменной толщины, в каждом слое построив функцию формообразования с учетом допустимой динамики данного слоя, например

$f_d(kh_0; h_+(x)/h_0) \triangleq sh[\alpha_d k(y - h_+(x))]/sh[\alpha_d k(h_0(1 + \gamma_+) - h_+(x))]$ . Это позволяет построить решения в каждом слое сэндвича и найти дисперсию решая дисперсионное уравнение

$$g_{35}(\alpha_d; \varepsilon^{(e)}/\varepsilon^d; h_+(x); kh_0) \times \det \|g_{ij}(G_k; \rho_k; e_k; \varepsilon_k; h_{\pm}(x); \omega_0; k(x, \omega_0))\|_{4 \times 4} = 0, \quad (3.1)$$



где переменные коэффициенты  $\left\{g_{ij} \left(G_k; \rho_k; e_k; \varepsilon_k; h_{\pm}(x); \omega_0; k(x, \omega_0)\right)\right\}_{4 \times 4}$  тензора дисперсионного уравнения имеют громоздкий вид, а коэффициенты пятого столбца тензора  $g_{15} = g_{25} = g_{45} = g_{55} = 0$ ,  $g_{35} \left(\alpha_d; \varepsilon^{(e)} / \varepsilon^d; h_+(x); kh_0\right) \geq 0$  положительно определённый и характеризует колебания электрического поля в вакууме.

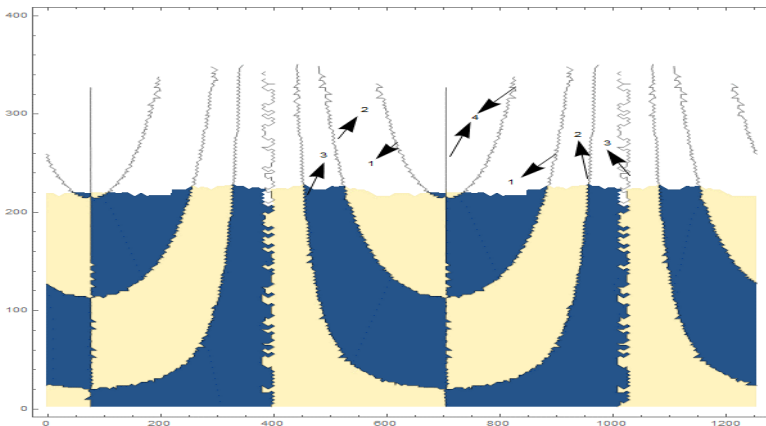


**Рис. 3.1** Пятислойный композитный волновод с базовым однородным пьезоэлектрическим слоем с залитыми слабо неоднородными поверхностями

Дисперсионное уравнение (3.1) безусловно не имеет наглядного аналитического решения. Но очевидными предельными случаями будут коротковолновое  $kh_0 \gg 1$  и длинноволновое  $kh_0 \ll 1$  приближений. Как показывают расчеты, при распространении электро-упругого волнового сигнала низких частот (длинные волны), волна не познает наличие и поверхностных слабых неровностей, и очень тонких материальных прослоек на поверхностях волновода. Дисперсионные зависимости волнового числа для волн с негармоническим распределением  $sh[\alpha_0 k(y - h_{\pm}(x))]$  приведены на рис. 3.2.

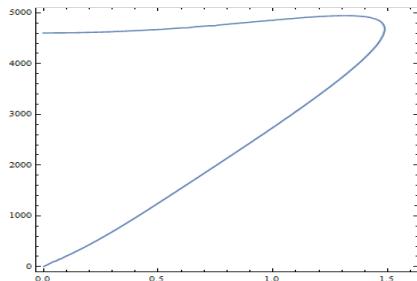
Довольно интересное превращение происходит с низкочастотной формой с соответствующим волновым числом  $k_{01}$ . Уже при сравнительно коротких волновых сигналах  $k_{01} \sim 25$  (то есть при  $\lambda_{01} \sim 0.25$  мм), волновое число  $k_{11}(x)$  сильно меняет направление, открывая место для появления новой волновой моды. Волновое число  $k_{21}(x)$  вновь появившейся моды сначала убывает, делает скачок на вертикале  $x_{01} = const$ , а потом возрастает до предела существования высокочастотных колебаний.

Разные ориентаций сближающихся кривых описывающие волновые числа означают, что это является вследствие учета поверхностных не гладкостей волновода новая мода (Рис. 3.2) расщепляется под воздействием первой основной моды волны на вновь образованные волновые моды  $k_{21}(x)$ ,  $k_{31}(x)$  и  $k_{41}(x)$  (Рис. 3.2). Такое разветвление естественно следствие диссипации волнового сигнала на поверхностных неровностях и рассеяния волновой энергии по выделенным слоям волновода. Из рис. 3.2 также следует, что разветвление на разные волновые числа, означает разветвление на разные меняющиеся длины волн  $\lambda_{n1}(x) = 2\pi/k_{n1}(x)$ . Это означает появление новых мод с разными дисперсиями, которое может привести к внутреннему резонансу.

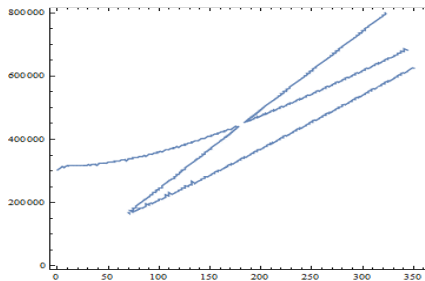


**Рис. 3.2** Зависимость волнового числа  $k(x)$  от дистанции пробега волнового сигнала, при фиксированной частоте источника  $\omega_0 = 100$  Герц

Для быстрых волн, когда фазовая скорость больше значений сдвиговых объёмных волн в сопредельных материалах  $V_\phi(k; \omega) \geq c_{nt}$ , дисперсия длинных волн при  $k \in [0; 1.6]$  происходит в интервале  $\omega(k) \in [0; 5000]$  и около значения  $\omega_{01}(k) \approx 316000$  Герц (Рис.3.3).



**Рис. 3.3 а)** Зависимость частоты  $\omega(k)$  быстрых длинных волн от волнового числа  $k \in [0; 1.6]$

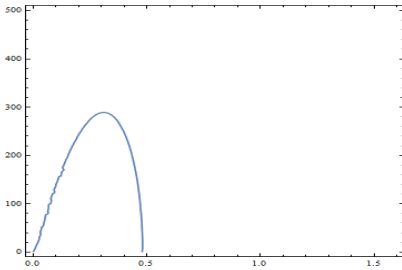


**Рис. 3.3 б)** Зависимость частоты  $\omega(k)$  быстрых коротких волн от волнового числа  $k \in [1.6; 350]$

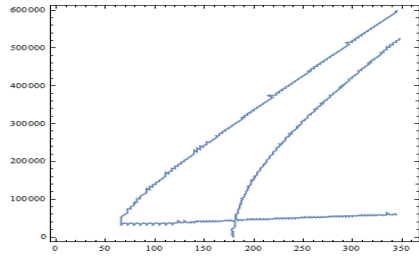
Из Рис. 3.3 а) видно, что при некотором значении длины волны индуцируется вторая частота. Причем для быстрых коротких волн частоты довольно великие  $\omega(k) \in [17 \times 10^4; 8 \times 10^5]$ . Стоит уделять внимание на то что, начиная с некоторого значения длины волны, волна с конкретной длиной может распространяться тремя разными частотами.

В случае медленных волновых сигналов, когда фазовая скорость меньше значений сдвиговых объёмных волн в сопредельных материалах  $V_\phi(k; \omega) \geq c_{nt}$  получается также интересная фазовая картина (Рис. 3.4). Из Рис 3.4 а) видно, что в отличие от случая быстрых длинных волн (Рис.3.3 а), где каждой длине волны соответствовало два значения частоты, здесь наоборот – каждому значению частоты соответствуют две волновые моды с 18

разными длинами волн. В этом случае интервал определения длинных волн на  $\lambda \in [2\pi/1.6; 2\pi/0.5]$  шире чем в случае быстрых длинных волн. Для медленных коротких волн  $\lambda \in (\pi/175; \pi/90]$  каждой длины волны соответствует две частоты, а в интервале  $\lambda \in (\pi/90; \pi/30]$  уже три частоты колебаний. В случае медленных волн примечательно, что возникает зона частотного умолчания. Для волн длины  $\lambda \in [\pi/30; 2\pi/0.5]$  частоты не существует,  $\omega(k) \in \emptyset$ .



**Рис. 3.4 а)** Зависимость частоты  $\omega(k)$  медленных длинных волн от волнового числа  $k \in [0; 0.5]$



**Рис. 3.4 б)** Зависимость частоты  $\omega(k)$  медленных коротких волн от волнового числа  $k \in [60; 350]$

В принципе, при не учете механических свойств заполнителей  $\{G_d/G_p; G_c/G_p; \rho_d/\rho_p; \rho_c/\rho_p\} \ll 1$ , получается задача волновода с механически свободными и электрически прозрачными (или экранированными) слабо неоднородными поверхностями, приведенная в **первом параграфе данной главы**:

-Распространение высокочастотного электро-упругого (*SH*) волнового сигнала в однородном пьезоэлектрическом слое-волноводе с механически свободными и электрически прозрачными (или экранированными) слабо неоднородными поверхностями. При очень больших значений механических свойств заполнителей  $\{G_d/G_p; G_c/G_p; \rho_d/\rho_p; \rho_c/\rho_p\} \gg 1$ , получается задача волновода с механически жестко заземленными и электрически прозрачными (или экранированными) слабо неоднородными поверхностями, приведенная в **втором параграфе данной главы**:

-Распространение высокочастотного электро-упругого (*SH*) волнового сигнала в однородном пьезоэлектрическом слое-волноводе с механически жестко заземленными и электрически прозрачными (или экранированными) слабо неоднородными поверхностями.

## Заключение

- На примере простой модельной задачи рассматривается эффективность применения метода виртуальных сечений и гипотез (MELS-Magneto Elastic Layered Systems) о распределении волнового поля в тонких приповерхностных слоях волновода, при распространении плоского волнового сигнала в нем.
- Показывается, что при заземленных гладких поверхностях изотропного упругого слоя, около срединной плоскости слоя возникает асимметричная локализация волновой энергии, а при механически свободных гладких поверхностях, там же возникает симметричная локализация.
- В виртуально выделенных тонких прослойках переменной толщины приповерхностных зонах волновода, слабая неоднородность механически свободных поверхностей приводит к искажению и частичной локализации распространяющейся нормальной волны. Появляются приведенные коэффициенты формообразования, приведенные частоты, частотные зоны пропускания и зоны запрещенных частот формированной волны.
- Показано, что слабые поверхностные неоднородности приводят к неустойчивости распространяющегося нормальной волны в волноводе.
- Происходит локализация горизонтально поляризованных сдвиговых (SH) коротковолновых (высокочастотных) сигналов в приповерхностной зоне переменной толщины. Наличие поверхностной слабой неоднородности может привести к запрету волн определенных длин в зависимости от линейных характеристик неоднородности.
- Использование метода виртуального сечения и ввода гипотез MELS, в отличие от прямого решения, разрешает выявить приповерхностные волновые эффекты: динамическая эффективная нагрузка, внутренний резонанс, зоны частотного запрета.
- Поверхностные неоднородности однородного упругого волновода превращают плоский волновой сигнал на незатухающее колебательное движение вглубь волновода и искажают плоский фронт сигнала.
- При соизмеримых длинах волнового сигнала с характерными размерами не гладкостей поверхности волновода, из-за наличия поверхностных неоднородностей, в приповерхностном слое возникают колебания, которые при определенных длинах волнового сигнала могут привести к внутреннему резонансу.
- Показано что, заливка поверхностных не гладкостей разными материалами, приводит к появлению до четырех таких волновых мод, в зависимости от длины волнового сигнала. Если же поверхностные шероховатости не залиты в волноводе возникает только одна коротковолновая мода.
- Взаимодействия волнового сигнала с поверхностными не гладкостями, амплитудные распределения и медленных, и быстрых коротких волн (при высокочастотных колебаниях) имеют максимальные значения в образованных приповерхностных неоднородных тонких прослойках. Это соответствует случаю, когда длина распространяющегося волнового сигнала сопоставима с линейными характеристиками поверхностных не гладкостей.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Belubekyan M.V., Sahakyan S.L., Hunanyan A.A., Shear waves in longitudinal periodical weak-inhomogeneous layer, Proc. of YSU (Physical and Mathematical Sciences), 2015, No 1, pp. 36-40
2. Аветисян А.С., Камальян А.А., Унанян А.А., Распространение плоского волнового сигнала в пьезо-диэлектрическом волноводе с приграничными геометрическими и физическими неоднородностями, IV International Conference, «Topical Problems of Continuum Mechanics», 21–26 September, 2015 Tsaghkadzor, Armenia, pp. 5-9
3. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A., The efficiency of application of virtual cross-sections method and hypotheses MELS in problems of wave signal propagation in elastic waveguides with rough surfaces, Journal of Advances in Physics, 2016, vol. 11, №6, pp. 3564-3574
4. Камальян А.А., Унанян А.А., Новый тип локализации волновой энергии вблизи негладких поверхностей пьезодиэлектрического волновода, «Международная школа-конференция молодых ученых», 3-7 Октября, 2016, Цахкадзор, Армения, сс. 75-79
5. Унанян А.А., Локализация высокочастотной нормальной сдвиговой волны в упругом однородном волноводе с слабо неоднородными поверхностями, «Международная школа-конференция молодых ученых», 3-7 Октября, 2016, Цахкадзор, Армения, сс. 140-144
6. Hunanyan A.A., The instability of shear normal wave in elastic waveguide of weakly inhomogeneous material, Proc. of NAS RA, Mechanics, 2016, vol. 69, №3, pp 16-27
7. Avetisyan A.S., Kamalyan A.A., Hunanyan A.A., Features of localization of wave energy at rough surfaces of piezodielectric waveguide, Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2017, vol. 70, №1, pp 40-63
8. Avetisyan A.S., Hunanyan A.A., Amplitude-phase distortion of the normal high-frequency shear waves in homogeneous elastic waveguide with weakly rough surfaces, Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2017, vol. 70, №2, pp 28-42

# **AMPLITUDE-FREQUENCY INTERACTION AND LOCALIZATION OF ELECTROELASTIC SHEAR WAVE IN PIEZOELECTRIC WAVEGUIDE WITH NEAR-SURFACE WEAK INHOMOGENEITIES**

## **SUMMARY**

- The efficiency of virtual cross sections method and MELS (Magneto Elastic Layered Systems) hypotheses application is demonstrated on model problem about distribution of wave field in thin surface layers of waveguide, when plane wave signal is propagating in it.
- It is shown, that asymmetric localization of wave energy for clamped smooth surfaces of isotropic elastic layer occurs near the mid-surface layer, as well as symmetric localization occurs near the middle plane of the layer in the case of mechanically free smooth surfaces.
- The weak inhomogeneity of mechanically free surfaces leads to distortion of propagating normal wave in virtually cut thin layers of variable thickness of the near-surface zones of the waveguide. Given formation coefficients, given frequencies, frequency zones of transmission and zones of prohibited frequencies of formed wave appear.
- It is shown, that weak surface inhomogeneities lead to instability of propagating normal wave signal in waveguide.
- Localization of horizontally polarized shear (SH) shortwave (high frequency) signals occurs in the near-surface zone of variable thickness. The presence of surface weak inhomogeneity can lead to the prohibition of wave of certain lengths depending on the linear characteristics of the inhomogeneity parameters.
- The use of virtual sections and the introduction of hypotheses MELS, unlike the direct solution, allow identifying near-surface wave effects: effective dynamic load, internal resonance, frequency prohibition, etc.
- Surface heterogeneities of homogeneous elastic waveguide convert plane wave signal into non-attenuated oscillatory motion and distort the plane front of the signal.
- At the wave signal lengths comparable with the characteristic dimensions of the non-smooth surface of the waveguide, due to the presence of surface heterogeneities oscillations occur in the near-surface layer, which in the cases of certain wave signal lengths can cause internal resonance.
- It is shown, that the filling of the surface roughness with different materials, leads to the appearance of up to four wave modes, depending on the length of the wave signal. It turns out, that if the surface roughness of the piezoelectric layer is not filled only one shortwave mode occurs.
- Due to interaction of the wave signal with surface roughness, the amplitude distribution for both slow and fast short waves (at high-frequency oscillations) has maximum values in formed near-surface inhomogeneous thin layers. This corresponds to the case, when the length of propagating wave signal is comparable with the linear characteristics of surface roughness.

**ՍԱՀՔԻ ԷԼԵԿՏՐԱՆՈՎԱԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԼԱՅՆՈՒՅԹԱ-ՓՈՒԼԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԵՎ ՏԵՂԱՅՆԱՑՈՒՄԸ ՄԵՐՁՄԱԿԵՐԵՒՈՒԹԱՅԻՆ ԹՈՒՅԼ ԱՆՀԱՄԱՍԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ  
ՊՅԵԶՈՒԼԵԿԵՏՐԱԿԱՆ ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ**

**ԱՄՓՈՓՈՒՄ**

- Հարթ ալիքային ազդանշանի տարածման դեպքում ալիքատարի մերձմակերևութային բարակ շերտերում ալիքային դաշտի բաշխման ուսումնասիրման պարզ մոդելային խնդրի օրինակի վրա ուսումնասիրվում է վիրտուալ հատումների մեթոդի և *MELS* վարկածների (*MELS-Magneto Elastic Layered Systems*) կիրառման արդյունավետությունը:
- Ցույց է տրվում, որ անրակցված հարթ մակերևութներով իզոտրոպ առաձգական շերտում առաջանում է ալիքային էներգիայի անհամաչափ տեղայնացում ալիքատարի միջնամասում, իսկ մեխանիկորեն ազատ հարթ մակերևութների դեպքում միևնույն տեղում առաջանում է արդեն համաչափ տեղայնացում:
- Վիրտուալ առանձնացված, փոփոխական հաստությամբ մերձմակերևութային բարակ շերտերում մեխանիկորեն ազատ մակերևութների թույլ անհամասեռությունը բերում է տարածվող նորմալ ալիքի և՛ աղավաղման, և՛ մասնակի տեղայնացման: Հայտնվում են ձևափոխման բերված գործակիցներ, բերված հաճախություններ, ձևավորվող ալիքի հաճախականության թողունակության և արգելման գոտիներ:
- Ցույց է տրվում, որ մակերևութային թույլ անհամասեռությունները ալիքատարում բերում են տարածվող նորմալ ալիքի անկայունության:
- Փոփոխական հաստությամբ մերձմակերևութային շերտում առաջանում է սահքի հորիզոնական (*SH*) կարճալիքային (բարձր հաճախականային) ազդանշանների տեղայնացում: Մակերևութային թույլ անհամասեռության առկայությունը կարող է տանել որոշակի երկարությամբ՝ կախված անհամասեռության գծային բնութագրերից, ալիքների ալգեյքի:
- Վիրտուալ հատումների և *MELS* վարկածների օգտագործումը՝ ի տարբերություն ուղիղ լուծման, հնարավորություն է տալիս ի հայտ բերել մերձմակերևութային ալիքային էֆեկտները: դիսամփվ բռնավորում, ներքին ռեզոնանս, հաճախականության արգելման գոտիներ և այլն:
- Համասեռ առաձգական ալիքատարի մակերևութային անհամասեռությունները հարթ ալիքային ազդանշանը վերածում են ալիքատարի խորությամբ չմարող տատանողական շարժման և աղավաղում են ազդանշանի հարթ ճակատը:
- Ալիքային ազդանշանի՝ ալիքատարի մակերևութների անհարթության չափերի հետ համեմատելի երկարության դեպքում, մակերևութային անհարթությունների առկայությունը բերում է մերձմակերևութային շերտում նոր տատանման, որը որոշակի երկարությամբ ալիքների դեպքում կարող է հանգեցնել ներքին ռեզոնանսի:
- Ցույց է տրվում, որ մակերևութային թույլ անհամասեռությունների տարբեր նյութերով լցնելը բերում է մինչև չորս ալիքային ձևերի հայտնվելուն: Եթե մակերևութային անհարթությունները լցված չեն, ալիքատարում առաջանում է միայն մեկ կարճալիքային ձև:
- Ձևավորվող մերձմակերևութային անհամասեռ բարակ շերտերում մակերևութային անհարթությունների հետ ալիքային ազդանշանի փոխազդեցության հետևանքով և՛ դանդաղ, և՛ արագ կարճ (բարձր հաճախականության տատանումներ) ալիքների ամպլիտուդային բաշխումները ունեն առավելագույն արժեքները: Սա համապատասխանում է մակերևութային անհարթության գծային բնութագրերի հետ համեմատելի երկարությամբ ալիքային ազդանշանի տարածման դեպքին:

