

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ՄԵԼԻՆԵ ՎԱՐԴԱՆԻ

ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԿՈՐՈՒԹՅԱՄԲ
ԱՌԱՆՑՔՈՎ ՋՈՂԵՐԻ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ
ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐԵՐԻ ՄԵԹՈՂԸ

Ա 02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի զիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2021

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ХАЧАТРЯН МЕЛИНЕ ВАРДАНОВНА

ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ
СТЕРЖНЕЙ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ИХ РАСЧЕТА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.02.04 - “Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН 2021

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս. Հ. Սարգսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ.,
պրոֆ. Գ. Ե. Բաղդասարյան
ֆ.մ.գ.թ., պրոֆ. Մ. Վ. Բելուբեկյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2021թ. հուլիսի 9-ին, ժամը 14⁰⁰-ին
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի- 047 մասնագիտական
խորհրդի նիստում
(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2, alexkhach49@yandex.ru)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ *մայիսի 26-ին* 2021թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր



Ա.Ս.Իսախանյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель: член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., профессор С.О.Саркисян

Официальные оппоненты: акад. НАН РА, д.ф.м.н., профессор Г. Е. Багдасарян
к.ф.м.н., профессор М. В. Белубекаян

Ведущая организация: Ереванский государственный университет

Защита диссертации состоится *09-ого июля* 2021г. в 14⁰⁰ часов
на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА
(адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, alexkhach49@yandex.ru)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан *26-ого мая* 2021г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
д.ф.м.н., профессор



А.М. Хачатрян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Классическая теория упругости объясняет поведение твердого деформированного тела под нагрузкой с помощью интегральных характеристик. В рамках этой теории не учитывается внутренняя структура материала. Но как показывают опыты, внутренняя структура материала имеет определенное влияние на его деформационные и прочностные характеристики.

Одной из состоящей и развитой теорией учета внутренней структуры тела является микрополярная (моментная, несимметричная) теория упругости, которая основывалась выходом в 1909 году в Париже монографии братьев Э. и Ф. Коссера (Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris: Hermann edis. 1909. 226p.), в которой бесконечно малый объем материала представляет собой не как материальную точку, а как твердое тело, обладающего не только трансляционными, но и ротационными степенями свободы. При этом, в теле возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие несимметричные тензоры.

В микрополярной теории упругости отличаются два направления: 1) теория с независимыми полями перемещений и вращений, 2) теория со стесненным вращением, когда повороты бесконечно малого объема определяются как в классической теории упругости, но моментные напряжения присутствуют.

Теории и решению статических и динамических задач микрополярной (моментной) упругости, а также, изучению кристаллических тел, посвящены работы Аэро Э.Л., Пальмова В.А., Савина Г.Н., Болотина В.В., Ильюшина А.А., Панина В.Е., Матвеевко В.П., Морозова Н.Ф., Жилина П.А., Багдасаряна Г.Е., Белубежяна М.В., Кривцова А.М., Бровко Г.Л., Еремеева В.А. и Зубова Л.М., Ерофеева В.И., Потапова А.И. и Павлова И.С., Садовского В.М., Eringen A.C., Koiter W.T., Lakes R.S., Mindlin R.D., Nowacki W., Toupin R.A. и др.

Так как тонкостенные элементы конструкций широко применяются в различных областях современной техники, поэтому теория и анализ работ тонкостенных элементов занимает в механике твердого деформируемого тела особое место. Сложность решения задач в пространственной постановке, возникающие при расчете упругих тонких пластин и оболочек, вынуждает обращению к способам приведения их двумерным задачам.

Один из возможных подходов заключается в представлении искомых функций в виде степенных рядов по координате, отсчитываемой по нормали к исходной поверхности (Коши, Пуассон, Кильчевский Н.А., Векуа И.Н., Селезов И.Т. и др.). В микрополярной теории упругости для построения прикладных моделей прямолинейных стержней и пластин этот подход развит в работах Жамакочян К.А..

Для приведения трехмерных задач к двумерным, в классической теории упругости используется также асимптотический метод. Этот подход построения упругих тонких стержней, пластин и оболочек развит в работах Грин А.Е., Гольденвейзера А.Л., Воровича И.И., Агаловяна Л.А., Каплунова Ю.Д., Устинова Ю.А., Рогачевой Н.Н., Саркисяна С.О. и др. Асимптотический метод в классической теории упругости для краевых задач тонких тел при неклассических граничных условиях развивался в работах Агаловяна Л.А. и его учеников Геворгияна Р.С., Хачатряна А.М., Агаловяна М.Л., Гулгазарян Л.Г. и др. Ближе к асимптотическому методу, метод малого параметра, в классической теории упругости, развивался в работе Саркисяна В.С. Асимптотический метод, при изучении напряженно-деформированного состояния в тонких телах

на основе микрополярной теории упругости, применялся в работах Дудникова В.А. и Назарова С.А.; Кантора М.М, Никабадзе М.У. и Улуханяна А.Р. и др.

Большую известность завоевал метод гипотез построения прикладных теорий упругих тонких стержней, пластин и оболочек в рамках классической теории упругости. Известными методами гипотез Бернулли-Эйлера, Кирхгофа и Кирхгофа-Лява, построены, соответственно, прикладные теории упругих тонких прямолинейных стержней, пластин и оболочек. Теория типа Тимошенко С.П., теория Амбарцумяна С.А. и др. известны как уточненные теории упругих тонких пластин и оболочек.

В микрополярной теории упругости метод гипотез для построения прикладных теорий тонких пластин и оболочек применены в работах Амбарцумяна С.А.; Амбарцумяна С.А. и Белубекяна М.В.; Амбарцумяна С.А. и Белубекяна М.В. под редакцией А.С. Аветисяна; Пальмова В.А., Жилина П.А., Еремеева В.А. и Зубова Л.М., Геворгяна Г.А., Бровко Г.Л. и Ивановой О.А., Крыско В.А. и Крыловой Е.Ю., Altenbach H. and Eremeyev V.A., Green A.E. and Naghdi P.M., Rubin M.V. и др.

Отметим, что с целью построения прикладных теорий микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек, асимптотический метод существенно развит в работах Саркисяна С.О.. Оригинальным является подход Саркисяна С.О., когда качественные стороны асимптотического метода интегрирования трехмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в тонких областях, формулированы как адекватные гипотезы и, на их основе, построены прикладные теории статики, термо- и магнитоупругости, динамики микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек, с обоснованием энергетических теорем и вариационных принципов. Аналогичным подходом построена также теория моментно-мембранных упругих тонких оболочек и пластин, которая представляет собой континуальную модель изучения деформаций наноматериалов.

К развитию указанного подхода построения прикладных моделей микрополярных упругих тонких прямолинейных стержней, пластин и оболочек и к решению различных линейных и нелинейных задач статики, термоупругости, динамики и устойчивости тонких тел, посвящены работы учеников Саркисяна С.О.: Фарманян А.Ж., Мутафян М.Н., Атояна А.А., Варданян С.А., Никогосяна Г.С., Саркисян А.А., Алваджян Ш.И., Маргарян Л.М., Айрапетян Г.С., Асланян Н.С., Жамакочян К.А..

В решении задач механики деформируемого твердого тела и строительной механики большое значение приобрели численные методы, основанные на вариационных постановках. Среди них особое место занимает метод конечных элементов (МКЭ), благодаря его универсальности и программной реализации. МКЭ для приложений в микрополярной теории упругости получил развитие в работах Корепанова В.В., Матвеевко В.П. и Шардакова И.Н.; Lakes R.S. и др. В работах Саркисяна С.О. и Жамакочян К.А. МКЭ развит при изучении граничных задач статики и динамики микрополярных упругих тонких прямолинейных стержней и пластин.

В современных силовых конструкциях находят широкое применение кривые стержни. Теория малых пространственных деформаций упругих кривых стержней была построена в трудах Кирхгофа и Клебша, Лурье А.И., Пратусевича Я.А. и др. Отметим, что в приложениях, в основном, распространены кривые стержни с круговой осью, в условиях плоской задачи классической теории упругости. Теория расчета упругого стержня с круговой осью, в классической постановке, построена на основе гипотеза плоского сечения. Построена также теория изгиба упругого стержня с круговой осью в уточненной постановке с применением МКЭ. В работе Lakes R.S. изучена

задача изгиба упругого стержня с круговой осью в постановке моментной теории упругости со стесненным вращением на основе гипотеза плоского сечения.

На основе вышеприведенного анализа литературы можем сделать следующее заключение, что в настоящее время в постановке микрополярной теории упругости и термоупругости, как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением, актуальна проблема построения прикладных моделей статики, термоупругости и динамики плоского изгиба упругих тонких стержней с круговой осью (с учетом поперечных сдвиговых деформаций и деформаций растяжения-сжатия оси стержня). Для построенных моделей микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью актуально, утверждение основных энергетических теорем и вариационных принципов, а также, построения аналитических решений и разработка вариантов МКЭ для решения прикладных задач статики, термоупругости и динамики.

Цель работы заключается в исследовании следующих актуальных вопросов:

- На основе гипотез Саркисяна С.О., построение моделей статики, термоупругости и динамики упругого тонкого стержня с круговой осью на основе микрополярной теории упругости, как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением, с учетом деформаций сдвига и деформации растяжения-сжатия оси стержня;
- Для построенных прикладных моделей микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью, утверждение основных энергетических теорем и вариационных принципов; разработке вариантов применения МКЭ для решения краевых задач на основе указанных моделей;
- На основе указанных моделей микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью построение аналитических и численных решений (при помощи разработанных вариантов МКЭ), прикладных задач статики, термостатики и свободных колебаний микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью, выполнение параметрического анализа задач на основе полученных численных результатов и установления основных эффективных свойств микрополярных материалов по сравнению с классическим случаем.

Научная новизна. Построены прикладные модели статики, термоупругости и динамики плоской изгибной деформации микрополярного (как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением) упругого тонкого стержня с круговой осью с установлением общих энергетических теорем и вариационных принципов. Разработаны варианты применения метода конечных элементов (МКЭ) для решения граничных задач статики, термоупругости и свободных колебаний на основе соответствующих моделей микрополярного (как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением) упругого тонкого стержня с круговой осью. Построены аналитические решения и численные решения при помощи МКЭ для различных прикладных задач статики, термостатики и свободных колебаний на основе соответствующих моделей микрополярного (как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением) упругого тонкого стержня с круговой осью. Выполнены параметрический анализ задач на основе численных результатов и установлены две важнейшие свойства учета микрополярности материала по сравнению с классическим случаем: 1) повышение жесткости стержня, 2) повышение частот собственных колебаний.

Практическая значимость. Результаты исследований, приведенных в диссертации, могут применяться в механике обобщенных континуумов, механике композитных материалов и при исследовании кристаллов и наноматериалов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- XXII Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова (Москва, Вятчи, 15-19 февраля, 2016);
- XLIV International Summer School-Conference. “Advanced Problems in Mechanics” (APM 2016). (St.-Petersburg, Russia, June 27-July 2, 2016);
- международной школе-конференции молодых учёных (Цахкадзор, Армения, 3-7 октября, 2016);
- V международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (Цахкадзор, Армения, 02-07 октября, 2017);
- 60 международной научной конференции “Актуальные проблемы прочности” (Витебск, Беларусь, 14-18 мая, 2018);
- Seminar at the School of Computing and Mathematics of Keele University (UK, July 5, 2018)
- X международной конференции “Проблемы взаимодействия деформируемых сред” (Горис, Армения, 1-6 октября, 2018);
- VI международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (Дилижан, Армения, 1-6 октября, 2019);
- Республиканской конференции посвященный 85-летию со дня основания Ширакского гос. университета (ШГУ) (Гюмри, Армения, 8-9 ноября, 2019);
- XXVI Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова (Москва, Вятчи, 16-20 марта, 2020);
- Семинаре отдела «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН Армении (11 мая, 2021);
- Общем семинаре Института механики НАН Армении (13 мая, 2021).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка цитируемой литературы (196 наименований). Общий объем работы составляет 113 страниц печатного текста, включая 13 рисунка и 13 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность и новизна темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дан краткий обзор работ, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы и в сжатом виде излагается содержание всех трех глав диссертации.

В главе 1 построены математические модели статички, термостатички и динамики изгибной деформации тонкого стержня с круговой осью на основе микрополярной теории упругости и термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений.

В §1.1 на основе литературных источников приведены уравнения и соотношения статической и динамической теории обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости для кругового сектора (рис. 1), с поперечными размерами $2h \times 2h^*$ (уравнения имеют место в срединной плоскости рассматриваемого

тела, которая разделяет ширину тела $2h^*$ -на две равные части; для дальнейшего примем, что $2h^* = 1$). Изложены также энергетические соотношения и теоремы, вариационные принципы типа Ху-Вашицу, Лагранжа и Гамильтона.

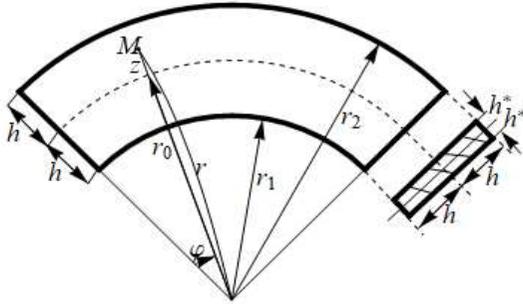


Рис. 1

В §1.2 на основе метода гипотез построена прикладная (одномерная) модель плоской изгибной деформации микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений.

Будем считать, что рассматриваемая двумерная область тонкая, т.е. $2h \ll r_0$, $2h \ll a$, где $2h$ - толщина кривого стержня; r_0 - радиус оси стержня:

$$r = r_0 + z, \quad -h \leq z \leq h, \quad 1 + \frac{h}{r_0} \approx 1. \quad (1)$$

Принимаемые ниже гипотезы по содержанию можно рассматривать как кинематические и статические:

1. Будем считать, что в процессе деформации прямолинейные и нормальные к оси стержня волокна поворачиваются как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярными к деформированной оси. Кроме того будем считать также, что свободный поворот ω_3 точек каждого такого волокна не меняется вдоль волокна, т.е. по координате z .

Принятые гипотезы математически можем записать так:

$$V_1 = u(\varphi, t) + z\psi(\varphi, t), \quad V_2 = w(\varphi, t), \quad \omega_3 = \Omega_3(\varphi, t), \quad (2)$$

где $u(\varphi, t)$ и $w(\varphi, t)$ – перемещения точек средней линии в направлениях по ее касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi, t)$ – это прогиб стержня); $\psi(\varphi, t)$ - угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi, t)$ - свободный поворот этого элемента. Подчеркнутые внизу выражения, следует учесть в случае динамической задачи.

Принятые кинематические гипотезы назовем обобщенными кинематическими гипотезами Тимошенко в прикладной микрополярной теории упругости со свободным вращением, при построении модели плоской изгибной деформации тонкого стержня с круговой осью.

2. Предположения о малости нормального напряжения σ_{22} , относительно нормального напряжения σ_{11} .

3. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi, t). \quad (3)$$

После определения указанных выше величин, формулу для σ_{21} будем уточнять следующим образом. Из соответствующего уравнения равновесия или движения интегрированием по z определим σ_{21} и обращаем его интеграл от $-h$ до h к нулю, полученное будем прибавить к формуле (3).

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и поворота (2), для деформаций и изгибов-кручений находим:

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + zK_{11}, \gamma_{22} = 0, \gamma_{12} = \Gamma_{12}, \gamma_{21} = \Gamma_{21}, \chi_{13} = k_{13}, \chi_{23} = 0, \quad (4)$$

где приняты следующие обозначения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r_0} w, \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \varphi}. \quad (5)$$

На основе принятых гипотез и формул для деформаций и изгибов-кручений (5) получим соответствующие формулы для напряжений и моментных напряжений.

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, вместо компонент силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия: N, Q_1, Q_2 и моменты: M_{11}, L_{13} , которые выражаются следующими формулами:

$$N = \int_{-h}^h \sigma_{11} dz, Q_1 = \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, Q_2 = \int_{-h}^h \sigma_{21} dz, M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz, L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dz. \quad (6)$$

Здесь, N - нормальное усилие, Q_1, Q_2 - перерезывающие усилия, M_{11} - изгибающий момент от силовых напряжений, L_{13} - изгибающий момент от моментных напряжений. В итоге приходим к модели микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью со свободным вращением:

Уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} N - \frac{1}{r_0} \frac{\partial Q_1}{\partial \varphi} &= (q_2^+ - q_2^-) - \frac{2\rho h}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{r_0} Q_1 + \frac{1}{r_0} \frac{\partial N}{\partial \varphi} = -(q_1^+ - q_1^-) + \frac{2\rho h}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ Q_2 - \frac{1}{r_0} \frac{\partial M_{11}}{\partial \varphi} &= h(q_1^+ + q_1^-) - \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0} \frac{\partial L_{13}}{\partial \varphi} = (m^+ - m^-) - \frac{2Jh}{3} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

Физические соотношения упругости

$$N = 2Eh\Gamma_{11}, Q_1 = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{21}, Q_2 = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12},$$

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, L_{13} = 2Bhk_{13}; \quad (8)$$

Геометрические соотношения: выражаются уравнениями (5).

К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия:

- 1) Условия свободного края: $N|_{\varphi=0} = 0, Q_1|_{\varphi=0} = 0, M_{11}|_{\varphi=0} = 0, L_{13}|_{\varphi=0} = 0.$
- 2) Условия полной заделки края: $u|_{\varphi=0} = 0, w|_{\varphi=0} = 0, \psi|_{\varphi=0} = 0, \Omega_3|_{\varphi=0} = 0.$ (9)

3) Условия типа шарнирного опирания: $N|_{\varphi=0} = 0$, $w|_{\varphi=0} = 0$, $M_{11}|_{\varphi=0} = 0$, $L_{13}|_{\varphi=0} = 0$.

Линейная плотность потенциальной энергии деформации прикладной модели изгибной деформации микрополярных упругих стержней с круговой осью с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться формулой:

$$W_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + \frac{Eh^3}{3}K_{11}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{21}^2 + 2(\mu - \alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + (\gamma + \varepsilon)hk_{13}^2. \quad (10)$$

Для построенной прикладной модели микрополярных (со свободным вращением) упругих тонких стержней с круговой осью имеет место основное энергетическое равенство (как в случае статики, так и в случае динамики), например, для статической задачи имеем:

$$U_0 = \int_0^{\varphi_0} W_0 r_0 d\varphi = \frac{1}{2} A_0, \quad (11)$$

где U_0 - полная потенциальная энергия стержня; $\frac{1}{2} A_0$ - работа внешних сил и моментов:

$$A_0 = \int_0^{\varphi_0} \left[(q_1^+ - q_1^-)u + (q_1^+ + q_1^-)h\psi + (q_2^+ - q_2^-)w + (m^+ - m^-)\Omega_3 \right] r_0 d\varphi - uN'|_{\varphi=0} - \psi M'_{11}|_{\varphi=0} - wQ'|_{\varphi=0} - \Omega_3 L'_{13}|_{\varphi=0} + uN''|_{\varphi=\varphi_1} + \psi M''_{11}|_{\varphi=\varphi_1} + wQ''|_{\varphi=\varphi_1} + \Omega_3 L''_{13}|_{\varphi=\varphi_1}. \quad (12)$$

Для построенной прикладной модели микрополярных (со свободным вращением) упругих тонких стержней с круговой осью доказаны энергетические теоремы (типа Грина и Кастилиано, теоремы единственности и теореме взаимности Бетти); установлены вариационные принципы (типа Ху-Вашицу, Лагранжа и Кастилиано для статических задач), приведем здесь вариационный принцип типа Лагранжа:

$$\delta \mathcal{E}_0 = 0, \quad \mathcal{E}_0 = U_0 - A_0, \quad (13)$$

где \mathcal{E}_0 - потенциальная энергия всей системы.

Для прикладной модели динамической изгибной деформации микрополярного (со свободным вращением) упругого тонкого стержня с круговой осью установлен принцип Гамильтона:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{E}_0 - K_0) dt = 0, \quad (14)$$

где t_1 и t_2 , начало и конец движения, а $K_0 = \int_0^{\varphi_1} T_0 r_0 d\varphi$ - кинетическая энергии движе-

ния стержня, $T_0 = \rho h \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho h^3}{3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + Jh \left(\frac{\partial \Omega_3}{\partial t} \right)^2$ - линейная плотность кинетической энергии.

Если рассматривать собственные колебания изгибной деформации микрополярного (со свободным вращением) упругого тонкого стержня с круговой осью, минимальный принцип получим для следующего функционала:

$$\tilde{U}_0 = \int_0^{\varphi_0} \left(W_0 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \psi + Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \Omega_3 \right) r_0 d\varphi. \quad (15)$$

В §1.3 на основе метода гипотез построена прикладная модель термостатического изгиба микрополярного с независимыми полями перемещений и вращений упругого тонкого стержня с круговой осью. В первой части этого параграфа используя соответствующие литературные источники излагаются основные уравнения и соотношения обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории квазистатической термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Для построения прикладной модели термостатического изгиба микрополярного со свободным вращением упругого тонкого стержня с круговой осью, в основу принимаются гипотезы, которые формулированы в §1.2.

Основные уравнения прикладной модели термоупругого статического изгиба микрополярных (со свободным вращением) тонких стержней с круговой осью будут представлять уравнения равновесия (7), геометрические соотношения (5) и следующие

Физические соотношения термоупругости

$$\begin{aligned} N &= E(2h\Gamma_{11} - \alpha_i T^*), \quad Q_1 = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{21}, \\ Q_2 &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}, \quad M_{11} = E\left(\frac{2h^3}{3}K_{11} - \alpha_i T^{**}\right), \quad L_{13} = 2Bhk_{13}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } T^* = \int_{-h}^h T dz; \quad T^{**} = \int_{-h}^h T z dz. \quad (17)$$

К указанной системе уравнений следует присоединить граничные условия (9).

Здесь $T(r, \varphi)$ - функция температуры, которая удовлетворяет уравнению стационарной теплопроводности в области кругового сектора ($r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq \varphi_1$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (18)$$

к которому необходимо присоединить соответствующие граничные условия.

Плотность потенциальной энергии деформации для прикладной модели термоупругого изгиба микрополярного (со свободным вращением) упругого тонкого стержня с круговой осью выражается так:

$$\begin{aligned} \hat{W}_0 &= Eh\Gamma_{11}^2 + \frac{Eh^3}{3}K_{11}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{21}^2 + 2(\mu - \alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + \\ &+ (\gamma + \varepsilon)hk_{13}^2 - E\Gamma_{11}\alpha_i T^* - EK_{11}\alpha_i T^{**}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для прикладной модели термоупругого статического изгиба микрополярных (со свободным вращением) тонких стержней с круговой осью устанавливаются соответствующие энергетические соотношения и теоремы, а также вариационные принципы Ху-Вашица и Лагранжа.

В §1.4, принимая $\alpha = 0$, построены прикладные уточненные модели упругого тонкого стержня с круговой осью на основе классической теории упругости.

В §1.5 для решения прикладных задач на основе построенных в предыдущих параграфах моделей статики, термостатики и динамики изгибной деформации микрополярного (со свободным вращением) упругого тонкого стержня с круговой осью, разработаны соответствующие варианты применения метода конечных элементов (МКЭ). В этом параграфе сформулированы основные понятия и этапы МКЭ: дискретизация стержня с круговой осью, выбор основных узловых неизвестных, аппроксимация ис-

когого решения и построение основных разрешающих алгебраических уравнений МКЭ.

Узловые перемещения в произвольном элементе обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} w(0) = \delta_1, \quad w'(0) = \delta_2, \quad u(0) = \delta_3, \quad u'(0) = \delta_4, \quad \psi(0) = \delta_5, \quad \psi'(0) = \delta_6, \\ \Omega_3(0) = \delta_7, \quad \Omega_3'(0) = \delta_8, \quad w(a) = \delta_9, \quad w'(a) = \delta_{10}, \quad u(a) = \delta_{11}, \quad u'(a) = \delta_{12}, \\ \psi(a) = \delta_{13}, \quad \psi'(a) = \delta_{14}, \quad \Omega_3(a) = \delta_{15}, \quad \Omega_3'(a) = \delta_{16}, \end{aligned} \quad (20)$$

где a - длина дуги i -ого конечного элемента. Основные кинематические параметры задачи: $\bar{u}, \bar{w}, \psi, \Omega_3$, будем аппроксимировать полиномами третьей степени. Конечный элемент имеет шестнадцать степеней свободы.

В итоге, для кинематических параметров приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned} w(s) = \sum_{i=1,2,9,10} \delta_i N_i(s), \quad u(s) = \sum_{i=3,4,11,12} \delta_i N_i(s), \\ \psi(s) = \sum_{i=5,6,13,14} \delta_i N_i(s), \quad \Omega_3(s) = \sum_{i=7,8,15,16} \delta_i N_i(s), \end{aligned} \quad (21)$$

где $N_i(s)$ - функции формы i -ого элемента.

Учет в функционале \mathcal{O}_0 (13), в статической задаче (либо в соответствующем функционале, в случае термостатического изгиба) аппроксимаций (21), в итоге получим функцию шестнадцати неизвестных переменных: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{16}$. Минимизация функционала (13) приводит к нахождению минимума функции шестнадцати неизвестных переменных. Вычислив соответствующие частные производные, обратив их в нуль, придем к следующему матричному уравнению: $\mathbf{K}_e \delta_e = \mathbf{F}_e$, где \mathbf{K}_e - матрица жесткости элемента с числом узлов 16×16 ; $\delta_e = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{16}\}^T$ - вектор узловых перемещений и поворотов, \mathbf{F}_e - вектор усилий в узлах.

В случае динамической задачи, когда приходится определить собственные частоты колебаний, необходимо рассматривать функционал (15) и, далее, поступать так же, как это делалось для статической задачи. В результате получим следующее матричное уравнение: $(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) \cdot \delta_e = 0$, где \mathbf{M}_e - матрица масс элемента с числом узлов 16×16 .

Во второй главе построены математические модели статики, термостатики и динамики изгибной деформации тонкого стержня с круговой осью на основе микрополярной теории упругости и термоупругости со стесненным вращением.

В §2.1 используя литературные источники излагаются основные уравнения, энергетические соотношения и вариационные принципы обобщенного плоского состояния микрополярной теории упругости со стесненным вращением для плоской области кругового кольца (рис.1).

В §2.2, при построении прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью со стесненным вращением будем использовать те же гипотезы, которые были формулированы в §1.2. гл.1 при построении прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня со свободным вращением. .

Для перемещений V_1, V_2 и поворота ω_3 будем иметь те же формулы (2), где необходимо учесть, что

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \psi \right), \quad (22)$$

т.е. примем, что имеет место соответствующее выражение как в классической теории упругости.

Для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений получим:

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + zK_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \tilde{\Gamma}_{12}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0, \quad (23)$$

$$\text{где } \Gamma_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u + \psi, \quad K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}. \quad (24)$$

Соотношения упругости для изгибной деформации микрополярного стержня с круговой осью в рамках теории со стесненным вращением примут вид:

$$N = 2Eh\Gamma_{11}, \quad Q_1 + Q_2 = 4h\mu\tilde{\Gamma}_{12}, \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}. \quad (25)$$

К этой системе уравнений следует присоединить граничные условия (9).

Отметим, что для модели микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью со стесненным вращением имеют место те же энергетические теоремы и вариационные принципы, которые были установлены §1.2 главы 1 для модели микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью со свободным вращением, следует только в соответствующих функционалах модели со свободным вращением, заменить W_0 на

$$W_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + E\frac{h^3}{3} K_{11}^2 + h\mu\tilde{\Gamma}_{12}^2 + Bhk_{13}^2. \quad (26)$$

В §2.3 на основе уравнений и соотношений плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости со стесненным вращением и применением гипотез §1.3, построена прикладная модель изгибной деформации микрополярной квазистатической термоупругости тонких стержней с круговой осью.

Основные уравнения прикладной модели изгибной деформации тонкого стержня с круговой осью на основе теории микрополярной термоупругости со стесненным вращением будут: уравнения равновесия (7), геометрические соотношения (24) и следующие физические соотношения микрополярной термоупругости:

$$N = E(2h\Gamma_{11} - \alpha_r T^*), \quad Q_1 + Q_2 = 4h\mu\tilde{\Gamma}_{12}, \quad M_{11} = E\left(\frac{2h^3}{3} K_{11} - \alpha_r T^{**}\right), \quad L_{13} = 2Bhk_{13}. \quad (27)$$

К этой системе уравнений следует присоединить соответствующие граничные условия (9).

Плотность потенциальной энергии деформации прикладной модели изгибной термоупругой деформации микрополярного тонкого стержня с круговой осью со стесненным вращением выражается так:

$$W_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + E\frac{h^3}{3} K_{11}^2 + h\mu\tilde{\Gamma}_{12}^2 + Bhk_{13}^2 - E\Gamma_{11}\alpha_r T^* - EK_{11}\alpha_r T^{**}. \quad (28)$$

Следует отметить, что для модели термоизгибной деформации микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью со стесненным вращением, имеют место те же энергетические соотношения и вариационные принципы, как в модели со свободным вращением.

В §2.4 аналогичным образом как в §1.5, разрабатываются варианты МКЭ для решения граничных задач статической, термостатической и динамической изгибной

деформации тонкого стержня с круговой осью, построенные на основе теории микрополярной упругости и микрополярной термоупругости со стесненным вращением.

В третьей главе изучаются конкретные граничные задачи статики, термостатики и свободных колебаний микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью, как по модели со свободным вращением, так и по модели со стесненным вращением.

В §3.1 рассматриваются решение конкретных краевых задач статического изгиба микрополярных стержней с круговой осью на основе модели со свободным вращением: а) рис.2, б) рис.3, в) рис.4, г) рис.5. Это означает, что будем рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8), (5), с соответствующими граничными условиями (9).

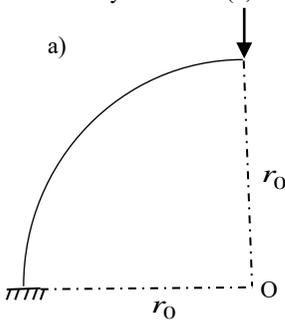


Рис.2

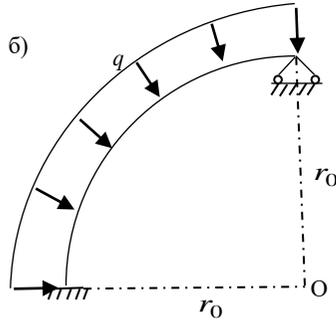


Рис.3

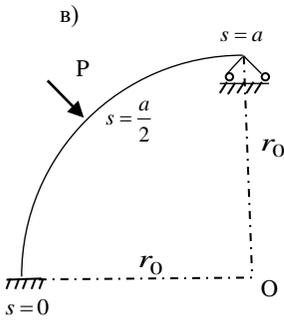


Рис.4

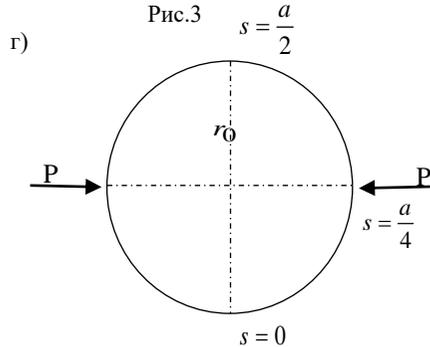


Рис.5

Эту система уравнений можно привести к системе уравнений относительно $\bar{u}, \bar{w}, \psi, \Omega_3$, которая имеет восьмой порядок. Эту система в свою очередь можно привести к системе из двух отдельных уравнений: шестого порядка-относительно функции $\psi(\bar{s})$ и второго порядка-относительно функции $\bar{w}(\bar{s})$ (отметим, что

$$\bar{w} = \frac{w}{a}, \bar{u} = \frac{u}{a}, \bar{s} = \frac{s}{a}, \bar{r}_0 = \frac{r_0}{a}.$$

Для каждой задачи построено точное аналитическое решение исходной системы уравнений и численное решение на основе МКЭ.

Для задачи а) граничные условия имеют вид:

при $\bar{s} = 0$, $\bar{w} = 0$, $\bar{u} = 0$, $\psi = 0$, $\Omega_3 = 0$;

при $\bar{s} = 1 = \pi \bar{r}_0 / 2$, $\bar{Q}_1 = \bar{P}$, $\bar{N} = 0$, $\bar{M}_{11} = 0$, $\bar{L}_{13} = 0$. (29)

Численные результаты получены для следующих значений безразмерных параметров задачи: $\delta = 1/40$, $\nu = 0.28$, $\bar{\alpha} = 10^{-3}$, $B^* = 1.9 \times 10^{-3}$, $\bar{r}_0 = 0.64$, $\bar{P} = 9.5 \times 10^{-7}$.

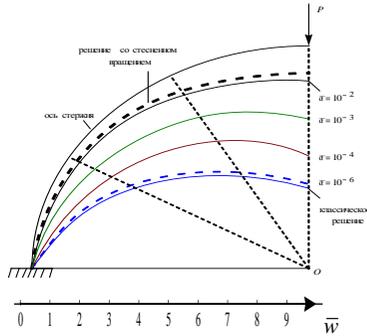


Рис.6. Графики безразмерного прогиба микрополярного стержня с круговой осью при различных значениях $\bar{\alpha} = \alpha/\mu$

Таблица 1. Значения максимального безразмерного прогиба микрополярного стержня с круговой осью в зависимости от $\bar{\alpha} = \alpha/\mu$

$\bar{\alpha} = \alpha/\mu$	Микрополярная модель ($\bar{w}_{\max} \times 10^3$)			Классическая модель ($\bar{w}_{\max} \times 10^3$)			Случай, когда $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$, модель со стесненным вращением
	Количество конечных элементов		Точное решение	Количество конечных элементов		Точное решение	
	2	4		2	4		
10^{-6}	7.05	7.23	7.23	7.07	7.25	7.25	-
10^{-3}	2.73	2.75	2.75	-	-	-	-
10^{-1}	1.60	1.61	1.61	-	-	-	-
$\bar{\alpha} \rightarrow \infty$	1.59	1.59	1.59	-	-	-	1.59

На рис. 6 и в табл. 1 для задачи а) представлены численные результаты в случае, когда выясняется вопрос о влиянии на жесткость стержня изменения значения основной безразмерной упругой постоянной $\bar{\alpha}$. Полученные результаты свидетельствуют о том, что при возрастании безразмерной упругой постоянной $\bar{\alpha}$, при постоянстве остальных безразмерных параметров, жесткость стержня постепенно увеличивается. При $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ фактически приходим к результату, когда модель стержня соответствует микрополярной модели со стесненным вращением.

Отметим, что выполненные численные эксперименты показывают, что когда упругая постоянная $\bar{\alpha}$ не меняется, а меняется безразмерная величина B^* , при остальных равных значениях, жесткость стержня мало изменяется.

Для задачи б), показанной на рис.3, граничные условия имеют вид:

при $\bar{s} = 0$, $\bar{w} = 0$, $\bar{u} = 0$, $\psi = 0$, $\Omega_3 = 0$

при $\bar{s} = 1 = \pi \bar{r}_0 / 2$, $\bar{w} = 0$, $\bar{N} = 0$, $\bar{M}_{11} = 0$, $\bar{L}_{13} = 0$; (30)

в) Рассмотрим задачу о деформации стержня с круговой осью под воздействием

сосредоточенной силы, показанной на рис. 4. Особенность этой задачи (рис.4) заключается в том, что необходимо отдельно рассматривать две части стержня. Аналитическое решение для каждой части будет содержать восемь постоянных интегрирования, всего 16 постоянных интегрирования, для определения которых имеем восемь граничных условий и восемь условий сопряжения:

$$\begin{aligned} \text{при } \bar{s} = 0, \quad \bar{w}^{(1)} = 0, \bar{u}^{(1)} = 0, \psi^{(1)} = 0, \Omega_3^{(1)} = 0, \\ \text{при } \bar{s} = 1, \quad \bar{w}^{(2)} = 0, \bar{N}^{(2)} = 0, \bar{M}_{11}^{(2)} = 0, \bar{L}_{13}^{(2)} = 0, \\ \text{при } \bar{s} = 1/2, \bar{w}^{(1)} = \bar{w}^{(2)}, \bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)}, \psi^{(1)} = \psi^{(2)}, \Omega_3^{(1)} = \Omega_3^{(2)}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\bar{N}^{(1)} = \bar{N}^{(2)}, \bar{M}_{11}^{(1)} = \bar{M}_{11}^{(2)}, \bar{L}_{13}^{(1)} = \bar{L}_{13}^{(2)}, \bar{Q}_1^{(1)} - \bar{Q}_1^{(2)} = \bar{P};$$

Рассматривая задачу г) (рис.5) деформаций замкнутого стержня (кольца), который сжимается двумя горизонтально расположенными сосредоточенными усилиями P , отметим, что стержень можно разбивать на две части (левую и правую), поскольку задача симметричная, рассмотрим одну сторону стержня, тогда будем иметь следующие граничные условия и условия сопряжения:

$$\begin{aligned} \text{при } \bar{s} = 0, \quad \bar{N}^{(1)} = \bar{P}/2, \bar{u}^{(1)} = 0, \psi^{(1)} = 0, \Omega_3^{(1)} = 0, \\ \text{при } \bar{s} = 1/2, \bar{N}^{(2)} = \bar{P}/2, \bar{u}^{(2)} = 0, \psi^{(2)} = 0, \Omega_3^{(2)} = 0, \\ \text{при } \bar{s} = 1/4, \bar{w}^{(1)} = \bar{w}^{(2)}, \bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)}, \psi^{(1)} = \psi^{(2)}, \Omega_3^{(1)} = \Omega_3^{(2)}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{N}^{(1)} = \bar{N}^{(2)}, \bar{M}_{11}^{(1)} = \bar{M}_{11}^{(2)}, \bar{L}_{13}^{(1)} = \bar{L}_{13}^{(2)}, \bar{Q}_1^{(1)} - \bar{Q}_1^{(2)} = \bar{P}.$$

Для всех этих трех задач получены как аналитические решения так и численные решения на основе МКЭ.

Результаты вычисления показывают те же эффекты которые имеют место для задачи а).

В §3.2 на основе построенной §1.2 прикладной модели динамического изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью со свободным вращением, изучаются задачи о свободных колебаниях.

В качестве первого примера рассмотрим задачу свободных колебаний стержня с круговой осью, когда концы ее шарнирно-оперты, $\bar{s} = 1 = \pi\bar{r}_0/2$.

Граничные условия для этой задачи имеют вид:

$$\text{при } \bar{s} = 0; 1, \quad \bar{w} = 0, \bar{N} = 0, \bar{M}_{11} = 0, \bar{L}_{13} = 0. \quad (33)$$

Для этой задачи построено точное аналитическое решение, а также численное решение на основе разработанного варианта МКЭ в §1.5.

Результат вычислений приведём для случая, когда безразмерные данные имеют те же значения, что для задачи а) §3.1 и, ещё примем $\bar{J} = 2.11 \times 10^{-5}$.

Таблица 2. Наименьшая частота свободных колебаний $\bar{\omega}$ микрополярной и классической стержней с круговой осью со свободным вращением в зависимости от $\bar{\alpha}$.

$\bar{\alpha}$	Микрополярная модель $\bar{\omega} \times 10^3$			Классическая модель $\bar{\omega} \times 10^3$		
	Точное значение	4 конечных элемента	8 конечных элемента	Точное значение	4 конечных элемента	8 конечных элемента
10^{-6}	24.41	24.44	24.41	24.41	24.43	24.40
10^{-3}	31.08	31.10	31.08	-	-	-
10^{-1}	50.97	50.98	50.97	-	-	-

В табл. 2 приведены значения наименьшей частоты микрополярного (со свободным вращением) стержня с круговой осью в зависимости от значения безразмерного физического параметра $\bar{\alpha}$. Из приведенных данных заключаем, что при повышении $\bar{\alpha}$, частота колебаний возрастает по сравнению с классическим случаем. Аналогичный вывод имеем и в случае следующей задачи: задача о свободных колебаниях стержня с круговой осью, когда один конец жестко защемлен, а другой-свободный (рис.2), граничные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } \bar{s} = 0, \bar{w} = 0, \bar{u} = 0, \psi = 0, \Omega_3 = 0; \text{при } \bar{s} = 1 = \frac{\pi \bar{r}_0}{2}, \bar{Q}_1 = 0, \bar{N} = 0, \bar{M}_{11} = 0, \bar{L}_{13} = 0, \quad (34)$$

В §3.3 рассматривается определенная краевая задача о термоупругом изгибе микрополярного тонкого стержня с круговой осью со свободным вращением (соответствующая прикладная модель построена в §1.3 главы 1).

Рассмотрим задачу о термоупругом изгибе стержня с круговой осью (рис.2). Граничные условия для этой задачи имеют вид (34).

С помощью метода разделения переменных (в плоском круговом секторе, рис.1) построено аналитическое решение уравнения стационарной теплопроводности (18) со следующим граничными условиями:

$$T(\bar{s}, \bar{z})\Big|_{z=h} = 4T_0^+ \left(\frac{1}{4} - \bar{s}^2 \right), \quad T(\bar{s}, \bar{z})\Big|_{z=-h} = 4T_0^- \left(\frac{1}{4} - \bar{s}^2 \right), \\ T(\bar{s}, \bar{z})\Big|_{\bar{s}=0} = 0, \quad T(\bar{s}, \bar{z})\Big|_{\bar{s}=1} = 0, \quad \text{где } T_0^+ \text{ и } T_0^- \text{ - постоянные.} \quad (35)$$

Система уравнений термоупругого изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью со свободным вращением (как в случае силовой задачи (§3.1)) можно привести к системе из двух отдельных уравнений, относительно ψ - шестого порядка и относительно \bar{w} - второго порядка.

Для поставленной задачи о термоупругом изгибе микрополярного стержня с круговой осью со свободным вращением, построено точное аналитическое решение, а также, численное решение при помощи разработанного варианта МКЭ в §1.5 главы 1. Численные результаты получены для следующих значениях параметров задачи:

$$\delta = 1/40, \quad \nu = 0.28, \quad B^* = 1.9 \times 10^{-3}, \quad \bar{r}_0 = 0.64,$$

$$(T_0^+ + T_0^-) \cdot \alpha_i = 1.87 \times 10^{-3}, \quad (T_0^+ - T_0^-) \cdot \alpha_i = 0.37 \times 10^{-3}.$$

Таблица 3. Прогибы микрополярного (со свободным вращением) термоупругого и классического стержня с круговой осью в зависимости от $\bar{\alpha}$

$\bar{\alpha}$	Микрополярная модель $\bar{w} \times 10^4$			Классическая модель $\bar{w} \times 10^4$		
	Точное значение	2 конечных элемента	4 конечных элемента	Точное значение	2 конечных элемента	4 конечных элемента
10^{-7}	3.93	3.87	3.93	3.93	3.87	3.93
10^{-4}	2.86	2.84	2.86	-	-	-
0.5×10^{-3}	1.41	1.40	1.41	-	-	-

Данные, приведенные в табл. 3, свидетельствуют, что при возрастании безразмерной упругой постоянной $\bar{\alpha}$, при условии постоянства остальных безразмерных параметров, жесткость микрополярного термоупругого стержня с круговой осью увеличи-

вается, по сравнению с классическим случаем.

В §3.4 рассматриваются конкретные задачи: а) рис.7, б) рис.8, в) рис.9 статического изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью на основе прикладной модели со стесненным вращением (§2.2 глава 2).

а)

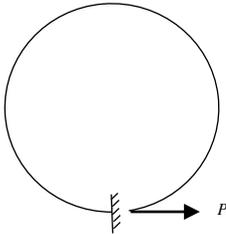


Рис. 7

б)

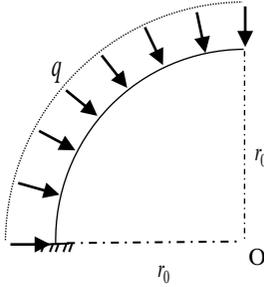


Рис.8

в)

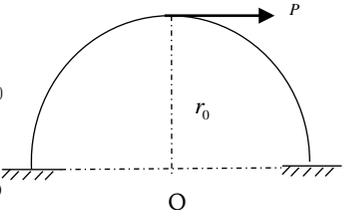


Рис.9

Исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений получается относительно функций \bar{u}, \bar{w}, ψ , которую в свою очередь можно привести к системе двух отдельных уравнений, первое относительно ψ - шестого порядка и второе, относительно \bar{w} - второго порядка. Далее, построено точное аналитическое решение для каждой из рассмотренных задач. Для определения постоянных интегрирования имеем граничные условия:

а) при $\bar{s} = 0$, $\bar{w} = 0$, $\bar{u} = 0$, $\psi = 0$, $\Omega_3 = 0$;

$$\text{при } \bar{s} = 1 = \pi\bar{r}_0/2, \quad \bar{Q}_1 = 0, \quad \bar{N} = -\bar{P}, \quad \bar{M}_{11} = 0, \quad \bar{L}_{13} = 0; \quad (36)$$

б) граничные условия для этой задачи имеют вид (34);

в) при $\bar{s} = 0$, $\bar{w}^{(1)} = 0$, $\bar{u}^{(1)} = 0$, $\psi^{(1)} = 0$, $\Omega_3^{(1)} = 0$,

$$\text{при } \bar{s} = 1, \quad \bar{w}^{(2)} = 0, \quad \bar{u}^{(2)} = 0, \quad \psi^{(2)} = 0, \quad \Omega_3^{(2)} = 0,$$

$$\text{условия сопряжения при } \bar{s} = 1/2, \quad \bar{w}^{(1)} = \bar{w}^{(2)}, \quad \bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)}, \quad \psi^{(1)} = \psi^{(2)}, \quad \Omega_3^{(1)} = \Omega_3^{(2)}, \quad (37)$$

$$\bar{M}_{11}^{(1)} = \bar{M}_{11}^{(2)}, \quad L_{13}^{(1)} = L_{13}^{(2)}, \quad \bar{Q}_1^{(1)} = \bar{Q}_1^{(2)}, \quad \bar{N}^{(1)} - \bar{N}^{(2)} = \bar{P}.$$

Для каждой из этих задач построено также численное решение при помощи разработанного варианта МКЭ в §2.4, глава 2.

Приведем результаты численного анализа задач.

а) Исходные данные задачи: $\delta = 1/160$, $\nu = 0.28$, $\bar{r}_0 = 6.25$, $\bar{P} = -2.38 \times 10^{-7}$

В табл. 4 приведены значения максимального прогиба микрополярного стержня со стесненным вращением в зависимости от значения безразмерного физического параметра B^* . В этой же таблице для сравнения приведено значение максимального прогиба по классической модели. Отметим, что к аналогичному выводу приходим и для задачи б) и для задачи в).

Таблица 4. Максимальный прогиб микрополярного со стеснённым вращением и классического упругого стержня с круговой осью в зависимости от параметра B^*

B^*	Микрополярная модель $\bar{u}_{\max} \times 10^3$			Классическая модель $\bar{u}_{\max} \times 10^3$		
	Точное значение	4 конечных элемента	8 конечных элемента	Точное значение	4 конечных элемента	8 конечных элемента
$1.19 \cdot 10^{-8}$	21.96	19.04	21.73	21.97	19.05	21.74
$1.19 \cdot 10^{-5}$	16.21	14.31	16.08	-	-	-
$1.19 \cdot 0.2 \cdot 10^{-4}$	12.84	11.48	12.76	-	-	-

Анализ указанных данных приводит к утверждению, что учет микрополярности материала (физический параметр B^*) приводит к повышению жесткости стержня.

В §3.5 изучается задача о собственных колебаниях микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью на основе прикладной модели со стесненным вращением (§2.2, глава 2).

Рассмотрим стержень с круговой осью, когда оба конца шарнирно-оперты $\bar{s} = 1 = \pi \bar{r}_0 / 2$. Граничные условия имеют вид (33). Для этой задачи построено аналитическое решение и численное решение на основе разработанного в §2.4 варианта МКЭ. Результат вычислений приведем для случая, когда безразмерные данные имеют те же значения, что в задаче а) (§3.1) и, ещё примем $\bar{J} = 2.11 \times 10^{-5}$.

Таблица 5. Наименьшая частота свободных колебаний $\bar{\omega}$ микрополярной со стесненным вращением и классической стержней с круговой осью в зависимости от B^* .

B^*	Микрополярная модель $\bar{\omega} \times 10^3$			Классическая модель $\bar{\omega} \times 10^3$		
	Точное значение	4 конечных элемента	8 конечных элемента	Точное значение	4 конечных элемента	8 конечных элемента
$1.91 \cdot 10^{-7}$	24.41	24.43	24.41	24.41	24.43	24.40
$1.91 \cdot 10^{-4}$	28.41	28.43	28.41	-	-	-
$1.91 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}$	31.90	31.92	31.90	-	-	-

В табл. 5 приведены значения наименьшей частоты микрополярного стержня с круговой осью со стесненным вращением в зависимости от значения безразмерного физического параметра B^* .

В качестве второго примера рассмотрим задачу о свободных колебаниях стержня с круговой осью со стесненным вращением, когда один конец жестко защемлен, а другой шарнирно оперт (рис.3), граничные условия имеют вид (30).

Анализ полученных численных результатов и для этой задачи приведет к утверждению, что учет микрополярных свойств материала, приведет к повышению частот собственных колебаний по сравнению с классическим случаем.

В §3.6 в качестве приложений для построенной модели (глава 2, §2.3) микрополярных термоупругих стержней с круговой осью со стесненным вращением ((7), (24), (25)), рассмотрена задача об изгибе стержня с круговой осью, когда нижний конец

стержня жестко зашпелен, а верхний шарнирно оперт (рис.3) под действием температуры вид которого совпадает со случаем, рассмотренного в задаче §3.3.

Численные результаты получены для тех же значениях параметров задачи, которые имеют место в аналогичной задаче §3.3 (B^* - в этом случае свободный параметр).

Таблица 6. Прогибы микрополярного со стесненным вращением и классического стержня с круговой осью в зависимости от B^* под действием температуры

B^*	Микрополярная модель			Классическая модель		
	Точное значение	$\bar{w} \times 10^5$	$\bar{w} \times 10^5$	Точное значение	$\bar{w} \times 10^5$	$\bar{w} \times 10^5$
		2 конечных элемента	4 конечных элемента		2 конечных элемента	4 конечных элемента
$1.91 \cdot 10^{-7}$	8.55	7.53	8.52	8.55	7.54	8.52
$1.91 \cdot 10^{-4}$	6.66	6.00	6.64	-	-	-
$1.91 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}$	3.94	3.69	3.94	-	-	-

Численные данные свидетельствуют (табл.6), что при возрастании безразмерной упругой постоянной B^* при условии постоянства остальных безразмерных параметров, жесткость микрополярного стержня по сравнению с классическим случаем увеличивается.

В заключении, отмечая, что в моделях деформаций современных композиционных материалов и наноматериалов, для частиц тела принимаются, что они обладают вращательным взаимодействием и, что существуют моментные напряжения. В континуальном подходе это означает, что при изучении деформаций указанных материалов, необходимо применение микрополярной (моментной) теории упругости, либо с независимыми полями перемещений и вращений, либо со стесненным вращением. Для приложений, особенно актуальным является проблема построения на основе указанных вариантов микрополярной теории упругости модели для тонкостенных элементов макро- и микроконструкций, типа прямолинейных и криволинейных стержней, пластин и оболочек.

В данной диссертационной работе развивается идея и подход С.О. Саркисяна построения прикладных моделей тонких стержней, пластин и оболочек, на основе уравнений и соотношений микрополярной теории упругости плоского напряженного состояния для кругового сектора, построены прикладные модели статики, термостатики и динамики микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью. В частности получены следующие результаты:

- Построена прикладная модель статики, термостатики и динамики микрополярного с независимыми полями перемещений и вращений упругого тонкого стержня с круговой осью, доказаны энергетические теоремы и установлены вариационные принципы;
- Построена прикладная модель статики, термостатики и динамики микрополярного со стесненным вращением упругого тонкого стержня с круговой осью, доказаны энергетические теоремы и установлены вариационные принципы;
- Для решения краевых задач на основе прикладных моделей статики, термостатики и динамики микрополярных с независимыми полями перемещений и вращений, а также, со стесненным вращением упругих стержней с круговой осью, разрабатываются варианты применения метода конечных элементов.

На основе построенных прикладных моделей микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью изучены различные прикладные задачи про их статике, термостатике и свободных колебаний. Для рассмотренных задач построены точные аналитические и численные решения на основе разработанных вариантов метода конечных элементов. Полученные решения иллюстрируют особенности учета у материалов, вращательные взаимодействия частиц и учета моментных напряжений. В частности устанавливаются, что по сравнению с классическим случаем, прикладной теории упругости, по микрополярным моделям у стержней с круговой осью, повышается их жесткость, а также, частоты собственных колебаний.

Список научных работ по теме диссертации

1. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. Mathematical model of static deformation of micropolar elastic circular thin bar// Proceedings of the XLIV Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics". St. Petersburg.2016. P. 367-374.
2. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Вариационный принцип и энергетика деформаций прикладной модели микрополярного упругого кругового тонкого стержня // Известия НАН Армении. Механика. 2016.Т.69. № 2. С.55-66.
3. Хачатрян М.В. Принцип Гамильтона для динамической задачи микрополярных упругих круговых стержней// Ученые записки ШГУ. 2016. Выпуск А. № 1. С.51-63.
4. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Классическая модель статике упругих тонких стержней с круговой осью с учетом поперечных сдвигов и метод конечных элементов // Ученые записки ШГУ.2017. Выпуск А. № 1. С.64-80.
5. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов //Актуальные проблемы прочности. Монография. Витебск: НАН Белоруси. Т. 1. Глава 14.2018. С. 258-271.
6. Хачатрян М.В. Развитие метода конечных элементов для краевых задач микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью// Сборник научных трудов международной конференции. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Горис, Армения. 2018. Изд-во НАН РА. С. 301-305.
7. Хачатрян М.В. Некоторые граничные задачи микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью и метод конечных элементов// Ученые записки ШГУ.2018. Выпуск А. № 1. С.62-72.
8. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью по теории со стесненным вращением и метод конечных элементов// Известия НАН Армении. Механика. 2019. Т. 72. N3. С.39-55
9. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Модель динамики тонких стержней с круговой осью по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций и развитие метода конечных элементов// Ученые записки ШГУ.2019. Выпуск А. № 1. С.10-22.
10. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Модель динамики микрополярного упругого стержня с круговой осью и развитие метода конечных элементов// Сборник научных трудов международной конференции. Дилиджан. Армения. 2019. 1-6 октября. Изд-во НАН РА. С. 295-299.

11. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Построение математической модели динамики микрополярного упругого стержня с круговой осью по теории со стесненным вращением и развитие метод конечных элементов// Ученые записки ШГУ.2019. Выпуск А. № 2. С.27-40.
12. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Модель термоупругости микрополярных (с независимыми полями перемещений и вращений) тонких стержней с круговой осью // Ученые записки ШГУ.2020. Выпуск А. № 1. С.10-24.
13. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Построение модели изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой и ее реализация методом конечных элементов// Вычислительная механика сплошных сред.2020. Т. 13, N 3. С. 256-268.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ժամանակակից կոմպոզիցիոն նյութերի և նանոնյութերի մոդելներում ենթադրվում է, որ մարմնի մասնիկները օժտված են պտտական փոխազդեցությամբ և որ գոյություն ունի մոմենտային լարումներ: Կոնսինուալ (հոծ միջավայրի) մոտեցմամբ դա նշանակում է, որ նշված տիպի մարմինների դեֆորմացիաների ուսումնասիրման դեպքում անհրաժեշտ է անկախ պտույտներով կամ կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար (մոմենտային) առաձգականության տեսության կիրառումը: Կիրառությունների տեսանկյունից արդիական է համարվում միկրո- և նանոկոնստրուկցիաների բարակապատ տարրերի՝ ուղիղ ու կոր ձողերի, սպերի և թաղանթների մաթեմատիկական մոդելների կառուցումը՝ ըստ նշված տարբերակներով միկրոպոլյար առաձգականության տեսությունների հիման վրա:

Այս առենախառակաճ աշխատանքում, զարգացնելով Ս.<. Մարգարյանի բարակ ձողերի, սպերի և թաղանթների մոդելների կառուցման մոտեցումները, շրջանային սեկտորի բարակ տիրույթում առաձգականության մոմենտային տեսության հավասարումների և առընչությունների հիման վրա կառուցվում են շրջանային կորությամբ առանցքով միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողի ստատիկայի, ջերմաստատիկայի և դինամիկայի կիրառական մոդելները: Մասնավորապես ստացված են հետևյալ արդյունքները՝

- Կառուցվել են տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգական շրջանային կորությամբ առանցքով բարակ ձողի ստատիկայի, ջերմաստատիկայի և դինամիկայի կիրառական մոդելները, ապացուցվել են էներգետիկ թեորեմները և հաստատվել վարիացիոն սկզբունքները,
- Կառուցվել են կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական շրջանային կորությամբ առանցքով բարակ ձողի ստատիկայի, ջերմաստատիկայի և դինամիկայի կիրառական մոդելները, ապացուցվել են էներգետիկ թեորեմները և հաստատվել վարիացիոն սկզբունքները,
- Տեղափոխությունների ու պտույտների անկախ դաշտերով, ինչպես նաև կաշկանդված պտույտներով, շրջանային կորությամբ առանցքով բարակ ձողի ստատիկայի, ջերմաստատիկայի և դինամիկայի կիրառական մոդելների եզրային խնդիրների լուծման համար մշակվել են վերջավոր տարրերի մեթոդի կիրառման տարբերակներ:

Միկրոպոլյար առաձգական շրջանային կորությամբ առանցքով բարակ ձողերի կառուցված կիրառական մոդելների հիման վրա ուսումնասիրվել են տարբեր կիրառական խնդիրներ մվիրված ստատիկային, ջերմաստատիկային և սեփական տատանումներին: Որոշակի դասերին պատկանող դիտարկվող խնդիրների համար

կառուցվել են ճշգրիտ անալիտիկ և թվային լուծումները վերջավոր տարրերի մեթոդի մշակված տարբերակների հիման վրա: Ստացված լուծումները ցուցադրում են նյութերի մասնիկների միջև պոտսական փոխազդեցությունների և մոմենտային լարումների հաշվառման յուրահատկությունները: Մասնավորապես հաստատվում է, որ շրջանային կորությամբ առանցքով բարակ ձողերի՝ դասական առաձգականության դեպքի համեմատ, այդ մարմինների միկրոպոլյար մոդելների դեպքում, մեծանում է ձողերի կոշտությունը, ինչպես նաև սեփական տատանումների հաճախականությունները:

CONCLUSION

In deformation models of modern composite materials and nanomaterials, it is assumed for body particles that they have a rotational interaction and that there are moment stresses. In the continuum approach this means that when studying the deformations of these materials, it is necessary to use the micropolar (moment) theory of elasticity, either with independent fields of displacement and rotation, or with constrained rotation. For applications the problem of construction a model for thin-walled elements of macro- and microstructures, such as rectilinear and curved beams, plates and shells, on the basis of the indicated variants of the micropolar theory of elasticity, is actual.

In this dissertation work S.H. Sargsyan's approach is developed for construction applied models of thin beams, plates and shells: based on the equations and relations of the micropolar theory of elasticity of a plane stress state for a circular sector, applied models of statics, thermostatics and dynamics of micropolar elastic thin beams with a circular axis are constructed. Particularly, the following results are obtained:

- An applied model of statics, thermostatics and dynamics with independent fields of displacement and rotation of a micropolar elastic beam with a circular axis is built, energy theorems are proved and variation principles are established.
- An applied model of statics, thermostatics and dynamics with constrained rotation of a micropolar elastic thin beam with a circular axis is built, energy theorems are proved, and variation principles are established.
- To solve boundary-value problems on the basis of the applied models of statics, thermostatics and dynamics with independent fields of displacements and rotations, as well as, with constrained rotation of micropolar elastic beams with a circular axis, variants of using the finite element method are developed.

On the basis of the constructed applied models of micropolar elastic thin beams with a circular axis, various applied problems of the statics, thermostatics and free vibrations are studied. For certain classes of the considered problems exact analytical numerical solutions are constructed based on the developed variants of the finite element method. The obtained solutions illustrate the features of taking into account rotational interactions of particles and moment stresses in the material. Particularly, it is established that, in comparison with the classical case, the applied theory of elasticity, according to micropolar models for beams with a circular axis, their rigidity increases, as well as the frequency of natural vibrations.