

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ ԱՎԵՏԻՔ ՎԱՐԴԱՆԻ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏՈՒՄ ԵՎ ԱՄՐԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ՍԱԼՈՒՄ
ՆՈՐՄԱԼ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ա.02.04.- « Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա » մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2011

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

МЕЛКОНЯН АВЕТИК ВАРДАНОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ
СЛОЕ И В АРМИРОВАННОЙ ПЛАСТИНКЕ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.02.04- «Механика
деформируемого твердого тела»

ЕРЕВАН-2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի Պետական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ս.Վ. Սարգսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ.մ.գ.դ. Կ.Բ. Ղազարյան
ֆ.մ.գ.դ. Մ.Լ. Աղալովյան


Առաջատար կազմակերպություն Երևանի Ճարտարապետության և Շինարարության Պետական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է հունիսի 10-ին 2011թ. ժ. 15.30-ին
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդում

(Հասցեն՝ 375019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24բ, avsah@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է մայիսի 5-ին 2011 թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար, տ.գ.դ. պրոֆ  Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете

Научный руководитель д.ф.м.н., профессор С.В. Саркисян

Официальные оппоненты д.ф.м.н., К.Б. Казарян
д.ф.м.н., М.Л. Агаловян

Ведущая организация: Ереванский Государственный Университет
Архитектуры и Строительства

Защита состоится 10-го июня 2011г., в 15.30 на заседании специализированного совета 047 в Институте механики.

Адрес: 375019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, avsah@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 5-го мая 2011г.

Ученый секретарь
специализированного совета
д.т.н. профессор.



Р.М.Киракосян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование процессов колебаний и распространение волн представляет значительный, как теоретический, так и прикладной интерес. В упругих телах возмущения, вызванные различными воздействиями, распространяются в виде продольных и поперечных волн. Важным свойством каждого из этих типов волн является то, что при отражении их от границы тела происходит трансформация одного типа волнового движения в другой. Этим свойством объясняется связанность продольных и сдвиговых возмущений в конечных упругих телах и, в конечном итоге, довольно сложная структура волновых полей. В ряде случаев именно эффект трансформации типов движения позволяет достаточно полно физически интерпретировать локализацию волновых движений в различного типа упругих волноводах и конечных упругих телах.

Исследование гармонических волн в пластинках берет свое начало с работ Рэлея и Лэмба, рассмотревших задачу о распространении плоской гармонической волны в однородном изотропном слое. В упругих возмущениях распространяющихся в пластинке (слое) со свободными границами, имеются смещения как в направлении распространения волны, так и перпендикулярно плоскости пластинки. Волны Лэмба представляют собой один из типов нормальных волн в упругом волноводе, в данном случае – пластинка со свободными границами. Подобные задачи для трехслойной пластинки с изотропными слоями изучали Ю.Ю. А.Арменакас, Г.Кек и Дж.Джонс. В.А. Мольков и А.В. Рябцев для пластины с симметричной структурой исследовали задачу определения свойств армирующего среднего слоя, при котором возможно распространения плоской гармонической волны с фазовой скоростью, равной фазовой скорости для соответствующего слоя без армировки.

Большой вклад по вопросам распространения электромагнитоупругих волн в деформируемых средах внесли представители Армянской школы механиков. Этим вопросам посвящены монографии и работы Абрамяна Б.Л., Аветисяна А.С., Агаловяна Л.А., Амбарцумяна С.А., Багдасаряна Г.Е., Белубекяна М.В., Багдоева А.Г., Геворкяна Р.С., Григоряна Э.Х., Геворкяна А.В., Данояна З.Н., Казаряна К.Б., Минасяна М.М., Мовсисяна Л.А., Саркисяна В.С., Саркисяна С.В., Саркисяна С.О..

Отдельный научный интерес представляют собой исследования по распространению поверхностных волн. При изучении поверхностных волн, в основном, рассматривались плоские и антиплоские деформации. Решение трехмерной задачи, обобщающая задачу Рэлея, получена Дж.Ноулсом. М.В.Белубекяном и В.М. Белубекяном исследованы трехмерные задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве.

К исследованию распространения магнитоупругих волн в проводящем упругом волноводе можно отнести работы С. Калицкого, Г.Е. Багдасаряна и М.В. Белубекяна.

Для решения неклассических краевых статических и динамических задач теории упругости для балок – полос, анизотропных пластин и оболочек, в том числе слоистых Л.А.Агаловяном построена асимптотическая теория. Асимптотический метод применен Л.А.Агаловяном, М.Л.Агаловяном, Р.С. Геворкяном при исследовании ряда задач собственных и вынужденных колебаниях анизотропных прямоугольных пластин. Были рассмотрены различные граничные условия на лицевых плоскостях пластинки, установлена асимптотика, определены частоты и формы собственных колебаний.

Задачам локализованных колебаний посвящены работы Амбарцумяна С.А., Белубекяна М.В., Багдасаряна Р.А., Казаряна К.Б., Гулгазаряна Г.Р..

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию задач распространения нормальных волн в упругом изотропном слое и в армированной пластинке в трехмерной постановке.

Целью диссертационной работы является:

- Исследование пространственной задачи распространения упругих волн в пластинке, со свободными лицевыми поверхностями;
- Решение трехмерной задачи распространения волн в упругом слое, когда на плоскостях, ограничивающих слой, заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений (стесненный свободный край);
- Решение трехмерной задачи распространения упругих волн в идеально-проводящем слое при наличии внешнего постоянного продольного магнитного поля, со стесненными свободными краями;
- Исследование трехмерной задачи распространения гармонической волны в трехслойной пластинке с симметричной структурой.

Научная новизна.

В диссертационной работе

- Получены характеристические уравнения относительно фазовой скорости колебаний (симметричный и антисимметричный виды колебаний) для трехмерной задачи распространения упругих волн в пластинке, со свободными лицевыми поверхностями;
- Решена пространственная задача распространения упругих волн в пластинке на основе гипотезы недеформируемых нормалей и уточненной теории высокого порядка - теории С. А. Амбарцумяна;
- Получены дисперсионные уравнения для нахождения фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний слоя, когда на лицевых поверхностях заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений (стесненный свободный край). Найдены значения фазовых скоростей упругих дисперсионных волн первой формы симметричных и антисимметричных колебаний. Выявлено влияние дисперсии на фазовую скорость колебаний;
- Получены значения фазовой скорости упругих дисперсионных волн первой формы симметричных колебаний идеально - проводящего слоя, при наличии внешнего постоянного продольного магнитного поля, со стесненными свободными краями. Показано влияние внешнего магнитного поля на фазовую скорость колебаний;
- Исследована задача об определении свойств среднего армирующего слоя пластинки так, чтобы в трехслойной пластинке с симметричной структурой распространялась гармоническая волна с фазовой скоростью, равной фазовой скорости для соответствующей пластинки без армировки. Получены дисперсионные соотношения, являющиеся условиями налагаемые на средний слой пластинки.

Практическая ценность работы. Полученные в работе результаты могут найти применение в ультразвуковой дефектоскопии для определения упругих характеристик

пластинчатых образцов, при исследовании других задач на распространения упругих волн в пластинках.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- Юбилейной научной сессии посвященной 90-летию ЕГУ (Ереван 2009г.)
- Международной Школы-Конференции молодых ученых «Механика 2009», (Агавнадзор, Армения, 2009г.)
- II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, Армения, 2010г.)
- На семинарах кафедры механики ЕГУ (2008-2011г.г.)
- На семинаре «Волновые процессы» Института Механики НАН РА (2011г.).

Диссертационная работа в целом обсуждена на семинаре кафедры механики ЕГУ (2011г.) и на общем семинаре Института механики НАН Армении (2011г.)

Публикации. По теме диссертации опубликованы 4 научные работы, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 125 наименований. Общий объем работы составляет 104 страниц печатного текста, включая шесть таблиц и шесть рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами, анализ состояния проблемы и кратко изложены основные результаты работы.

Первая глава носит вспомогательный характер, в ней приводятся основные положения и соотношения динамических задач теории упругости. В **первом параграфе** приведены основные уравнения динамических задач теории упругости. Введением динамических потенциалов динамические уравнения теории упругости сведены к волновым уравнениям. Во **втором параграфе** даны начальные и граничные условия. Граничные условия приведены при помощи динамических потенциалов. Плоская задача о распространении периодических волн в упругом слое приводится в **третьем параграфе**.

В **параграфе 1 главы 2** с помощью динамических потенциалов решена задача распространения волны в упругой пластинке в трехмерной постановке.

Динамические уравнения теории упругости для пластинки в перемещениях приняты в виде

$$c_2^2 \Delta \vec{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

Вектор перемещения представлен посредством динамических потенциалов

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi} \quad (\text{div } \vec{\psi} = 0) \quad (2)$$

Лицевые поверхности пластинки свободны от напряжений

$$\sigma_{13}(x, y, \pm h, t) = 0; \sigma_{23}(x, y, \pm h, t) = 0; \sigma_{33}(x, y, \pm h, t) = 0 \quad (3)$$

Решение уравнений (1) ищется в виде гармоничной во времени волны.

После удовлетворения граничных условий (3) получены дисперсионные уравнения

$$\frac{\text{th}(v_1 h)}{\text{th}(v_2 h)} = \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_1\beta_2}, \quad (4)$$

$$\frac{\text{th}(v_1 h)}{\text{th}(v_2 h)} = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_2^2)^2}, \quad (5)$$

$$v_1^2 = k^2(1 - \eta\theta), v_2^2 = k^2(1 - \eta), \eta = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \beta_1 = \frac{v_1}{k}, \beta_2 = \frac{v_2}{k}, k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

совпадающие с дисперсионными уравнениями плоской задачи $(k \square \sqrt{k_1^2 + k_2^2})$.

В предельном случае, когда длина волны очень велика по сравнению с толщиной пластинки, из уравнений (4) и (5) получены

$$c^2 = \frac{4c_2^2}{c_1^2}(c_1^2 - c_2^2) = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)} \quad (6)$$

$$c^2 = \frac{4}{3}c_2^2(kh)^2 \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) = \frac{Ek^2h^2}{3\rho(1 - \nu^2)} \quad (7)$$

Характеристические уравнения (4) и (5) в предельном случае, когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной пластинки переходят в характеристическое уравнение для поверхностных волн Рэлея:

$$R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)} = 0 \quad (8)$$

Данная задача на основе гипотезы недеформируемых нормалей и уточненной теории высокого порядка – теории С.А. Амбарцумяна рассмотрена во **втором и в третьем параграфах**. Значения фазовых скоростей планарных и изгибных колебаний пластинки совпадают соответствующими значениями (6) и (7), полученными на основе решения трехмерных динамических уравнений теории упругости.

Четвертый параграф посвящен исследованию трехмерной задачи распространения волн в упругом слое, когда на лицевых плоскостях слоя заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений (стесненный свободный край)

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \quad (9)$$

Для определения фазовой скорости симметричного вида колебания слоя получено дисперсионное уравнение

$$\frac{\text{th}(v_1 h)}{\text{th}(v_2 h)} = \frac{(2-\eta)^2 - \xi^2 \eta(1-\eta)}{4\sqrt{(1-\eta\theta)(1-\eta)}} \quad (10)$$

где $\xi = \frac{k_2}{k_1}$.

В предельном случае, длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя, из уравнения (10) получено

$$c_\xi = \frac{2c_2}{c_1} \sqrt{\frac{4(c_1^2 - c_2^2) + \xi^2 c_1^2}{4(1 + \xi^2)}} \quad (11)$$

В частном случае $\xi = 0$ ($k_2 = 0$, плоская деформация) из (11) имеем

$$c = c_N = \frac{2c_2}{c_1} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \quad (12)$$

Из (11) видно, что в отличие от плоской деформации волна обладает свойством дисперсии т.е. зависит от ξ .

Если же длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя уравнение (10) переходит в дисперсионное уравнение для определения трехмерной поверхностной волны Рэлея

$$(2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta\theta)(1-\eta)} - \xi^2 \eta(1-\eta) = 0 \quad (13)$$

Уравнения (13) подробно исследовано в работе М.В. Белубеяна и В.М. Белубеяна. Для определения фазовой скорости антисимметричного вида колебания слоя получено дисперсионное уравнение

$$\frac{\text{th}(v_1 h)}{\text{th}(v_2 h)} = \frac{4\sqrt{(1-\eta\theta)(1-\eta)}}{(2-\eta)^2 - \xi^2\eta(1-\eta)} \quad (14)$$

В случае, когда длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя из (14) имеем

$$\eta - \frac{4}{3}(k_1 h)^2(1+\xi^2)(1-\theta) - \xi^2(1-\eta) \left(1 - \frac{(k_1 h)^2}{3}(1+\xi^2)(1-\eta\theta) \right) = 0 \quad (15)$$

Из уравнения (15) определяется фазовая скорость волн изгиба. При $\xi = 0$ из (15) получаем $c^2 = \frac{4}{3}c_2^2(k_1 h)^2(1-\theta)$ - значение фазовой скорости волн изгиба в случае плоской деформации.

В таблице 1 приведены безразмерные значения фазовой скорости волн изгиба. При фиксированных $k_1 h$ с возрастанием ξ безразмерное значение фазовой скорости волн изгиба увеличивается. При $\xi \rightarrow \infty$ фазовая скорость в слое стремится к c_2 .

Таблица 1

$\theta = \frac{1}{3} (\nu = 0,25)$						
$\xi = 0$		$\xi = 0,4$	$\xi = 0,8$	$\xi = 1$	$\xi = 4$	$\xi = 10$
$k_1 h$	η_1	η_1	η_1	η_1	η_1	η_1
0	0	0,137931	0,390244	0,5	0,941176	0,990099
0,001	0,000001	0,137932	0,390245	0,500001	0,941177	0,9901
0,003	0,000008	0,137939	0,390251	0,500007	0,941183	0,990105
0,005	0,000022	0,137952	0,390263	0,500019	0,941193	0,990116
0,01	0,000089	0,138016	0,390321	0,500075	0,941244	0,990166
0,03	0,0008	0,138692	0,390942	0,500675	0,941785	0,990712
0,05	0,002222	0,140044	0,392184	0,501877	0,942876	0,991868
0,1	0,008889	0,146387	0,398019	0,507525	0,948175	0,998698

В пятом параграфе рассматривается трехмерная задача распространения волн в упругом идеально-проводящем слое при наличии внешнего постоянного продольного магнитного поля.

Уравнение движения в перемещениях для идеально – проводящего слоя при наличии внешнего постоянного магнитного поля имеет вид

$$c_2^2 \Delta \bar{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \bar{u} + \bar{R} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (16)$$

где $\bar{R} = \frac{\mu_0}{4\pi\rho} \left(\text{rot rot}(\bar{u} \times \bar{H}_0) \right) \times \bar{H}_0$ - пондермоторная объемная сила Лоренца электромагнитного происхождения.

Для уравнения движения (16) вводится следующее преобразование

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ u_3 &= \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (17)$$

где $f_1(x, y, z, t)$ и $f_2(x, y, z, t)$ неизвестные функции.

Преобразование (17) такое же, что и для задачи плоской деформации. На плоскостях, ограничивающих слой, заданы следующие восемь граничных условий

$$\begin{aligned} \sigma_{13} + T_{13} &= T_{13}^+ & \sigma_{13} + T_{13} &= T_{13}^- \\ \sigma_{33} + T_{33} &= T_{33}^+ \text{ (при } z = h) & \sigma_{33} + T_{33} &= T_{33}^- \text{ (при } z = -h) \\ u_2 &= 0 & u_2 &= 0 \\ e_1 &= e_1^+ & e_1 &= e_1^- \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь T_{13} и T_{33} - компоненты тензора Максвелла, имеющие следующее представление

$T_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} (H_i h_j + H_j h_i) - \delta_{ij} \frac{\mu_0}{4\pi} \bar{H}_0 \cdot \bar{h}$, e_i, h_i - компоненты индуцированного электромагнитного поля.

Из уравнения движения (16), на основе (17), для определения $f_1(x, y, z, t)$ и $f_2(x, y, z, t)$ получены

$$\begin{aligned} \Delta \Delta f_1 + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 f_1}{\partial t^4} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{\gamma}{c_1^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta f_1) + \\ + \gamma \left(\theta \Delta_{xz} \Delta f_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\Delta f_1) \right) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta f_2 + \gamma \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

где $\Delta_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\gamma = \frac{a^2}{c^2}$, $a = \sqrt{\frac{\mu_0 H^2}{4\pi\rho}}$ - скорость Альфвена.

Вместе с уравнениями (19) и (20) рассмотрены линейные уравнения электродинамики окружающей среды (вакуум), решение которых имеют вид

$$\begin{aligned}
 h_2^{(e)} &= C_1 \exp(-v_0 z + i(k_1 x + k_2 y - ckt)) & (z \geq h) \\
 e_1^{(e)} &= C_2 \exp(-v_0 z + i(k_1 x + k_2 y - ckt)) \\
 h_2^{(e)} &= C_3 \exp(v_0 z + i(k_1 x + k_2 y - ckt)) & (z \leq -h) \\
 e_1^{(e)} &= C_4 \exp(v_0 z + i(k_1 x + k_2 y - ckt))
 \end{aligned} \tag{21}$$

Поскольку граничные условия (18) симметричные, то задача разделена на симметричные и антисимметричные колебания. После удовлетворения граничных условий получены дисперсионные уравнения

$$\Gamma_1 \operatorname{th}(\xi_1 h) - \Gamma_2 \operatorname{th}(\xi_2 h) + \Gamma_3 \operatorname{th}(\xi_3 h) = 0 \tag{22}$$

и

$$\Gamma_1 \operatorname{cth}(\xi_1 h) - \Gamma_2 \operatorname{cth}(\xi_2 h) + \Gamma_3 \operatorname{cth}(\xi_3 h) = 0 \tag{23}$$

В предельном случае, длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя, из (22) получено уравнение для определения значения фазовой скорости

$$4k_1^2 p + (k_1^2 + \zeta_3^2)(q(1 + \gamma\theta) - pg) = 0 \tag{24}$$

где $p = k_1^2 (\theta(1 + \xi^2)(\eta - \gamma) - 1 - \theta\xi^2)$, $q = k_1^2 \left(\frac{(1 + \xi^2)(1 - 2\theta)(1 - \eta + \gamma)}{1 - \theta} - \gamma \right)$, $g = \frac{1 + \gamma(2 - 3\theta)}{1 - \theta}$,

$$\zeta_3^2 = k_1^2 ((1 + \xi^2)(1 - \eta) + \gamma\xi^2).$$

В таблице 2 приведены числовые расчеты безразмерной фазовой скорости симметричных колебаний в зависимости от величины ξ при различных значениях внешнего постоянного магнитного поля.

Таблица 2

$\theta = \frac{1}{3} (\nu = 0,25)$						
$\xi = 0$		$\xi = 0,1$	$\xi = 0,3$	$\xi = 0,5$	$\xi = 1$	$\xi = 5$
γ	η	η	η	η	η	η
0	2,6666	2.6600	2.6091	2.5174	2.2207	1.3310
10^{-4}	2.6667	2.6601	2.6092	2.5175	2.2208	1.3311
10^{-3}	2.6671	2.6605	2.6095	2.5179	2.2213	1.3323
0.01	2.6714	2.6647	2.6143	2.5223	2.2263	1.3397
0.1	2.7129	2.7062	2.6563	2.5651	2.2762	1.4213
0.2	2.7576	2.7513	2.7011	2.6121	2.3313	1.5091

В параграфе один третьей главы приводится решение задачи определения свойств армирующего среднего слоя пластины с симметричной структурой, при котором возможно распространение плоской гармонической волны с фазовой скоростью, равной фазовой скорости для соответствующего слоя без армировки (плоская задача). Внешние лицевые плоскости пластинки свободны от напряжений. Получены два дисперсионных соотношения: из первого соотношения определяется скорость распространения волны C , а второе соотношение определяет условия на материал включения, при выполнении, которых возможно распространение волны в пластинке со скоростью C .

Во втором и в третьем параграфах решается аналогичная, но уже трехмерная задача, когда на внешних лицевых плоскостях $z = \pm H$ трехслойной пластинки, с симметричной структурой, заданы условия стесненного свободного края.

Поставлена следующая задача. Определить свойства среднего армирующего слоя пластинки так, чтобы в трехслойной пластинке распространялась гармоническая волна с фазовой скоростью, равной фазовой скорости для соответствующей пластинки без армировки.

Математически данная задача сводится к исследованию динамического уравнения теории упругости (1) для пластинки в предположении, что

$$Q(x, y, z, t) = Q^*(z) \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt)$$

Здесь c - неизвестная скорость распространения гармонической волны, а под $Q(x, y, z, t)$ подразумеваются динамические потенциалы для слоев пластинки.

Волновые уравнения примут следующий вид

$$\Delta\varphi_\alpha - \frac{1}{c_{\alpha 1}^2} \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\psi_{\alpha i} - \frac{1}{c_{\alpha 2}^2} \frac{\partial^2 \psi_{\alpha i}}{\partial t^2} = 0, \quad (i=1,2,3; \alpha=1,2) \quad (25)$$

Слой (α - номер слоя) пластинки с номером 1 граничит с включением – со слоем с номером 2, по поверхности $z = h$.

Общее решение (25) представляется в виде

$$\varphi(x, y, z, t) = \left(A_\alpha \operatorname{sh}(v_{\alpha 1} z) + B_\alpha \operatorname{ch}(v_{\alpha 1} z) \right) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt)$$

$$\psi_{\alpha i}(x, y, z, t) = \left(C_{\alpha i} \operatorname{sh}(v_{\alpha 2} z) + D_{\alpha i} \operatorname{ch}(v_{\alpha 2} z) \right) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \quad (26)$$

где

$$v_{\alpha 1}^2 = k^2 (1 - \eta_\alpha \theta_\alpha), \quad v_{\alpha 2}^2 = k^2 (1 - \eta_\alpha), \quad \eta_\alpha = \frac{c^2}{c_{\alpha 2}^2},$$

$$\theta_\alpha = \frac{c_{\alpha 2}^2}{c_{\alpha 1}^2}, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \gamma_1 = \frac{c_{22}^2}{c_{12}^2}$$

$A_\alpha, B_\alpha, C_{\alpha i}, D_{\alpha i}$ неизвестные постоянные интегрирования.

На плоскостях $z = \pm H$, ограничивающие пластинку, заданы граничные условия (9).

Условия сопряжения при $z = \pm h$ приняты в виде

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} \quad (27)$$

Рассмотрены два варианта, которые тесно связаны с решением задачи о распространении периодических волн в упругом слое.

Рассмотрены частные решения для первого слоя ($\alpha = 1$):

$$\varphi_1 = A_1 \operatorname{sh}(v_{11} z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt)$$

$$\psi_{11} = D_{11} \operatorname{ch}(v_{12} z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt)$$

$$\psi_{12} = D_{12} \operatorname{ch}(v_{12} z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt)$$

$$\psi_{13} = C_{13} \operatorname{sh}(v_{12} z) \cdot \exp i(k_1 x + k_2 y - ckt) \quad (28)$$

и для второго слоя ($\alpha = 2$):

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= B_2 \operatorname{ch}(v_{21}z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt) \\
\psi_{21} &= C_{21} \operatorname{sh}(v_{22}z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt) \\
\psi_{22} &= C_{22} \operatorname{sh}(v_{22}z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt) \\
\psi_{23} &= D_{23} \operatorname{ch}(v_{22}z) \cdot \exp i(k_1x + k_2y - ckt)
\end{aligned} \tag{29}$$

Решение (28) для первого слоя соответствует антисимметричному виду колебаний, а (29) соответствует симметричному виду колебаний.

Удовлетворяя решение (28) и (29) граничным условиям (9), условия сопряжения (27) и имея в виду, что $\operatorname{div} \vec{\psi}_\alpha = 0$, получено дисперсионное уравнение

$$\frac{\operatorname{th}(v_{11}H)}{\operatorname{th}(v_{12}H)} = \frac{4\sqrt{(1-\eta_1\theta_1)(1-\eta_1)}}{(2-\eta_1)^2 - \xi^2\eta_1(1-\eta_1)} \tag{30}$$

и два дисперсионных соотношения

$$\operatorname{th}(v_{12}h) \cdot \operatorname{th}(v_{22}h) = \frac{v_{12}}{v_{22}\chi} \tag{31}$$

или

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\gamma_1\eta_2}\sqrt{1-\theta_2\eta_2}\gamma_1\eta_2^2\chi a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} - \\
&-\sqrt{1-\theta_2\eta_2}\sqrt{1-\eta_2}(2-2\chi-\gamma_1\eta_2)^2 a_{11}a_{21} + \\
&+((2-\eta_2)\chi + \gamma_1\eta_2 - 2)^2 a_{11}a_{22} + \\
&+4\sqrt{1-\gamma_1\theta_1\eta_2}\sqrt{1-\theta_2\eta_2}\sqrt{1-\gamma_1\eta_2}\sqrt{1-\eta_2}(-1+\chi)^2 a_{12}a_{21} - \\
&-\sqrt{1-\gamma_1\theta_1\eta_2}\sqrt{1-\eta_2}\gamma_1\eta_2^2\chi - \\
&-\sqrt{1-\gamma_1\theta_1\eta_2}\sqrt{1-\gamma_1\eta_2}(\chi(2-\eta_2)-2)^2 a_{12}a_{22} = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

где $\xi = k_2/k_1$, $\chi = \mu_2/\mu_1$, $a_{ij} = \operatorname{th}v_{ij}h$, $i, j = 1, 2$.

Из уравнения (30) можно определить скорость распространения волны c в зависимости от волновых чисел k_1, k_2 , толщины пластинки $2H$ и безразмерного

параметра $\theta_1 = \frac{c_{12}^2}{c_{11}^2}$. Дисперсионные соотношения (31) и (32) определяют условия

налагаемые на средний слой пластинки, при выполнении которых, возможно распространение гармонической волны с фазовой скоростью C , которая определяется

из уравнения (30). Если известны отношение θ_1, θ_2 и γ_1 , а также значение фазовой скорости $c(\eta_1)$ из уравнения (30), то из соотношений (31) и (32) можно найти χ в зависимости от kH . Отметим, что соотношение (32) представляет собой квадратное уравнение относительно χ .

На рис.1 изображена зависимость χ от kH .

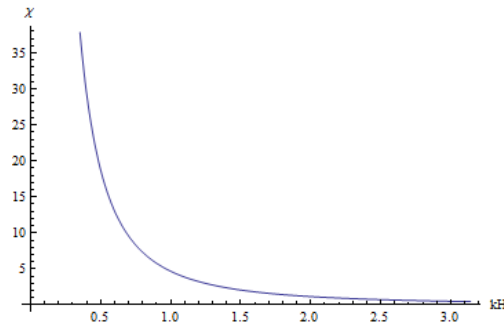


Рис. 1

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{3}, \gamma_1 = 4, \eta_1 = \gamma_1 \eta_2, \xi = 0.4$$

Из рис.1 видно, что например при $kH = 1.5$ (длина волны очень велика по сравнению с толщиной трехслойной пластинки) и $\frac{H}{h} = 2$ модуль упругости среднего слоя примерно в три раза должно быть больше модуля упругости наружных слоев для того чтобы поставленная выше задача имела решение.

Для следующего частного решения получено

$$\frac{\text{th}(v_{11}H)}{\text{th}(v_{12}H)} = \frac{(2-\eta_1)^2 - \xi^2 \eta_1 (1-\eta_1)}{4\sqrt{(1-\eta_1\theta_1)(1-\eta_1)}} \quad (33)$$

$$\text{th}(v_{12}h) \cdot \text{th}(v_{22}h) = \frac{v_{22}\chi}{v_{12}} \quad (34)$$

или

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1-\gamma_1\theta_1\eta_2}\sqrt{1-\eta_2\gamma_1\eta_2^2}\chi a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} - \\
& -\sqrt{1-\gamma_1\theta_1\eta_2}\sqrt{1-\gamma_1\eta_2}\left((2-\eta_2)\chi-2\right)^2 a_{11}a_{21} + \\
& +\left((2-\eta_2)\chi-\gamma_1\eta_2+2\right)^2 a_{12}a_{21} + \\
& +4\sqrt{1-\gamma_1\theta_1\eta_2}\sqrt{1-\theta_2\eta_2}\sqrt{1-\gamma_1\eta_2}\sqrt{1-\eta_2}(-1+\chi)^2 a_{11}a_{22} + \\
& +\sqrt{1-\gamma_1\eta_2}\sqrt{1-\theta_2\eta_2}\gamma_1\eta_2^2\chi - \\
& -\sqrt{1-\theta_2\eta_2}\sqrt{1-\eta_2}\left(2(1-\chi)-\gamma_1\eta_2\right)^2 a_{12}a_{22} = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

Отметим, что дисперсионные уравнения (30) и (33), как и следовало ожидать, совпадают с дисперсионными уравнениями (10) и (14).

Аналогичная трехмерная задача со свободными внешними лицевыми плоскостями трехслойной пластинки исследована в **четвертом параграфе** этой главы. Приведены численные расчеты зависимости относительного модуля упругости среднего слоя трехслойной пластинки от относительной толщины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для пространственной задачи распространения упругих волн в пластинке, со свободными лицевыми поверхностями:

- получены характеристические уравнения для нахождения фазовой скорости распространения волны (симметричный и антисимметричный виды колебаний),
- установлено, что в предельном случае, когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной пластинки эти уравнения переходят в характеристическое уравнение для поверхностных волн Рэлея,
- в случае когда длина волны очень велика по сравнению с толщиной пластинки найдены значения фазовых скоростей упругих волн первой формы симметричных и антисимметричных колебаний,
- данная задача исследована на основе гипотезы недеформируемых нормалей и уточненной теории высокого порядка - теории С. А. Амбарцумяна и установлено, что фазовая скорость продольных и изгибных колебаний пластинки совпадают со значениями фазовых скоростей упругих волн первой формы симметричных и антисимметричных колебаний пластинки.

Для трехмерной задачи распространения волн в упругом слое, когда на плоскостях, ограничивающих слой, заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений (стесненный свободный край):

- получены новые дисперсионные уравнения для нахождения фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаниях слоя,
- в предельном случае когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя установлено, что эти уравнения переходят в обобщенное

уравнение Рэлея для трехмерной задачи, а в случае плоской деформации совпадают с классическим уравнением Рэлея,

- получены значения фазовых скоростей упругих дисперсионных волн первой формы симметричных и антисимметричных колебаний слоя,
- установлено, что значение фазовой скорости первой формы симметричных колебаний, в случае когда длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя, с возрастанием безразмерного параметра, характеризующего отношение волновых чисел - ξ , уменьшается. При уменьшении коэффициента Пуассона слоя безразмерный параметр фазовой скорости увеличивается при фиксированных значениях ξ . Также установлено, что при фиксированных значениях относительной толщины слоя с возрастанием безразмерного значения параметра ξ фазовая скорость волн изгиба увеличивается. При $\xi \rightarrow \infty$ значение скорости в слое стремится к значению скорости распространения поперечных волн в упругом изотропном пространстве.

Для трехмерной задачи распространения упругих волн в идеально-проводящем слое при наличии внешнего постоянного продольного магнитного поля, со стесненными свободными краями:

- получены дисперсионные уравнения для нахождения фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний слоя,
- получены значения фазовой скорости упругих дисперсионных волн первой формы симметричных колебаний идеально - проводящего слоя,
- установлено, что при отсутствии магнитного поля и, в случае плоской деформации, дисперсионные уравнения переходят в классические уравнения Рэлея - Лэмба,
- установлено, что в предельном случае когда длина волны очень мала по сравнению с толщиной слоя, получаем дисперсионное уравнение магнитоупругих поверхностных волн Рэлея,
- показано, что магнитное поле слабо влияет на безразмерное значение фазовой скорости первой формы симметричных колебаний слоя. С возрастанием параметра ξ значение фазовой скорости колебаний уменьшается.

Рассмотрена трехмерная задача распространения гармонической волны в трехслойной пластинке с симметричной структурой. Исследованы два случая: 1) внешние лицевые плоскости пластинки свободны от нагрузок, 2) на внешних лицевых плоскостях пластинки заданы условия стесненного свободного края.

- Для двух вариантов, связанных с решением задачи о распространении периодических волн в упругом слое, исследованным Рэлеем и Лэмбом, получены дисперсионные уравнения,
- из первого дисперсионного уравнения определена скорость распространения волны для пластинки без армировки (средний слой),
- установлено, что два остальных дисперсионных соотношения являются условиями налагаемыми на средний слой пластинки, при выполнении которых возможно распространение гармонической волны в трехслойной пластинке с фазовой скоростью, равной фазовой скорости для соответствующей пластинки без среднего слоя,

- показано, что при различных значениях относительной толщины трехслойной пластинки (длина волны очень велика по сравнению с толщиной трехслойной пластинки) модуль упругости среднего слоя в несколько раз может превышать значение модуля упругости наружных слоев, либо трехслойная пластинка превратится в однослойную пластинку с модулем упругости равным модулю упругости наружного слоя.

Список научных работ по теме диссертации

1. Мелконян А.В., Саркисян С. В. К пространственной задаче распространения упругих волн в пластинке, Сб. трудов международной конференции молодых ученых “Механика” 28 сентябрь - 1 октябрь 2009г. Агавнадзор, Армения, с. 262-265.
2. Melkonyan A.V., Sarkisyan S. V., To a space problem of propagation of waves in a layer in presence of magnetic field, Сб. научных трудов 2-ой международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” том 2, 4-8 октября 2010, Дилижан, Армения, Ереван, стр. 316- 318.
3. Мелконян А. В. Трехмерная задача распространения волн в упругом слое. //Изв. НАН РА, Механика, 2011, №1. т.64, с.11-16.
4. Melkonyan A.V., Sarkisyan S. V., Propagation of a Harmonic Wave in a Plate With Symmetric Structure. Proceedings of Yerevan State University, 2011, №2, p.45-49.

Ամփոփում

Ատենախոսությունը նվիրված է առաձգական իզոտրոպ շերտում և ամրանավորված սալում նորմալ ալիքների տարածման խնդիրների հետազոտմանը:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից:

Դիտարկված է առաձգական ալիքների տարածումը սալում եռաչափ դրվածքով, երբ սալի դիմային մակերևույթներն ազատ են մեխանիկական լարումներից: Խնդիրը լուծված է դինամիկ պոտենցիալների միջոցով, ճշգրիտ դրվածքով, ստացված են փուլային արագությունը որոշող համաչափ և շեղ համաչափ տիպի տատանումների համար դիսպերսիոն հավասարումները:

Նույն խնդիրը լուծված է նաև չդեֆորմացվող նորմալների հիպոթեզների հիման վրա, ինչպես նաև բարձր մոտավորությամբ ճշգրտված տեսությամբ՝ Համբարձումյանի տեսություն: Երկու դեպքում ստացված են պլանար և ծովան տատանումների հավասարումները, որոնցից էլ որոշվում են փուլային արագությունները: Կատարված է համեմատություն փուլային արագությունների համար ստացված հավասարումների և ճշգրիտ տեսությամբ ստացված փուլային արագության հավասարումների միջև [1]:

Լուծված է առաձգական ալիքների տարածման խնդիրը շերտում եռաչափ դրվածքով, երբ շերտի դիմային մակերևույթների վրա զրո են նորմալ լարումը, շոշափող լարումներից մեկը և շոշափող տեղափոխություններից մեկը (կաշկանդված ազատ եզր): Խնդիրը լուծված է դինամիկ պոտենցիալների միջոցով: Ստացված են համաչափ տիպի տատանման համար փուլային արագությունը որոշող դիսպերսիոն հավասարումը և շեղ համաչափ տիպի տատանման համար՝ դիսպերսիոն հավասարումը: Դիտարկված է սահմանային դեպքեր. ալիքի երկարությունը շատ մեծ է և շատ փոքր է շերտի հաստության հետ համեմատած: Կատարված են թվային հաշվարկներ, երբ գործակիցը, որը բնութագրում է դիսպերսիան, մեծանում է արագության անչափ մեծության արժեքը փոքրանում է ֆիքսված Պուասսոնի գործակցի դեպքում: Ցույց է տրված, որ երբ դիսպերսիան բնութագրող գործակիցը հավասարվում է զրոյին, ապա ստացվում է Ռեյլեյի մակերևութային ալիքները բնութագրող հավասարումը [2]:

Մագնիսաառաձգական տեսության շրջանակներում իդեալական հաղորդիչ շերտի համար լուծված է եռաչափ դրվածքով խնդիր, երբ շերտը գտնվում է հաստատուն արտաքին երկայնական մագնիսական դաշտում և նրա դիմային մակերևույթների վրա դրված են կաշկանդված ազատ եզրի պայմանները: Համաչափ և շեղ համաչափ տիպի տատանումների համար ստացված են փուլային արագությունները որոշող դիսպերսիոն հավասարումները: Համաչափ տիպի տատանումների համար կատարված են թվային հաշվարկներ, որոնք բերված են աղյուսակի տեսքով: Աղյուսակում ցույց է տրված Պուասսոնի գործակցի միջանկյալ ֆիքսված արժեքի դեպքում անչափ փուլային արագության կախվածությունը դիսպերսիան բնութագրող գործակցից և մագնիսական դաշտը բնութագրող պարամետրից: Ցույց է տրված, որ մագնիսական դաշտը թույլ է

ագդում փուլային արագության վրա ֆիքսված դիսպերսիան բնութագրող գործակցի դեպքում [3]:

Հետազոտված է հարմոնիկ ալիքների տարածման խնդիրը համաչափ կառուցվածքով եռաչերտ սալում եռաչափ դրվածքով: Ուսումնասիրությունները կատարված են երկու տիպի եզրային պայմանների դեպքում. սալի դիմային մակերևույթներն ազատ են մեխանիկական լարումներից և դիմային մակերևույթների վրա դրված են կաշկանդված ազատ եզրի պայմանները: Ստացված են եռաչերտ սալում ալիքի փուլային արագությունը որոշող դիսպերսիոն հավասարում և դիսպերսիոն առնչություններ: Դիսպերսիոն հավասարումից որոշված է ալիքի տարածման արագությունը սալում, առանց միջին շերտի: Ցույց է տրված, որ դիսպերսիոն առնչությունները հանդիսանում են պայման՝ դրված սալի միջին շերտի առաձգական հաստատունների վրա: Այդ պայմանների կատարման դեպքում հնարավոր է եռաչերտ սալում հարմոնիկ ալիքի տարածում այնպիսի փուլային արագությամբ, որը կլինի հավասար առանց միջին շերտի սալում հարմոնիկ ալիքի տարածման փուլային արագությանը: Կատարված են թվային հաշվարկներ եռաչերտ սալի հարաբերական հաստության տարբեր թվային արժեքների դեպքում և որոշված են միջին շերտի առաձգականության հաստատունները կախված արտաքին շերտերի հատկություններից: Ցույց է տրված, որ միջին շերտի առաձգականության գործակիցը մի քանի անգամ կարող է գերազանցել արտաքին շերտերի առաձգականության գործակցին, կամ էլ եռաչերտ սալը կարող է դառնալ միաչերտ՝ արտաքին շերտի առաձգականության գործակցով, եռաչերտ սալի հարաբերական հաստությունից կախված: Կառուցված են գրաֆիկական պատկերներ միջին շերտի առաձգականության հատկությունը որոշող գործակցի կախվածությունը շերտի հաստությունից [4]:

ABSTRACT

Dissertation is devoted to the investigation of normal waves propagation in elastic isotropic layer and in reinforced plate.

Dissertation consists of introduction, three chapters, conclusion and the list of references.

The propagation of elastic waves in plate by three-dimensional settings, when the faced surfaces of plate are free from mechanical stresses is observed. Problem is solved by means of dynamic potentials, with exact settings, the dispersion equations which determine the phase speed for symmetric and non symmetric vibrations are received.

The same problem is also solved based on hypothesis of undeformable normals, as well as with high approximative corrected theory: Theory of Hambartsumyan. In both cases the equations for planar and bend vibrations are received from which the phase speed are determined. The comparison between the equations for phase speeds and the exact theory for phase speed is done [1].

The problem of propagation of elastic waves is solved in plate by three-dimensional settings, when the normal stress, one of the tangential stresses and one of the tangential displacements (constrained free edge) equal to 0 on faced surfaces.

The problem is solved by dynamic potentials. Both the dispersion equation determining the phase speed for symmetric vibration and for non symmetric vibration are received. Limiting cases are observed: wave length is very large and very small compared with thickness of layer. Numerical calculations are done when the coefficient, which describes the dispersion, increases, the value of phase speed decreases in case of fixed Poisson's coefficient. It is shown that when the coefficient describing the dispersion equals to zero, the equation which describes the surface waves of Rayleigh is received [2].

Within the framework of magnetic elastic theory a problem is solved by three-dimensional settings for a perfect - conductive layer when the layer is in a fixed external longitudinal magnetic field and the conditions of constrained free edge are on its faced surfaces. The dispersion equations determining phase speeds for symmetric and non symmetric vibrations are received.

Numerical calculations for symmetric vibration which are provided in table form are done.

In case of intermediate fixed value of Poisson's coefficient it is shown in the table phase speed dependency from the coefficient describing the dispersion and from the parameter describing the magnetic field. It is shown that the influence of magnetic field is weak on phase speed in case of fixed coefficient describing dispersion [3].

The problem of harmonic waves propagation with symmetric structure in three-layered plate by three - dimensional settings is solved. Researches for two type of limiting conditions are done: faced surfaces of plate are free from mechanical stresses and the conditions of constrained free edge are given on faced surfaces. The dispersion equation and dispersion relations are received which determines phase speed of wave in three -

layered plate. Wave propagation speed is determined from the dispersion equation without middle layer in plate. It is shown the dispersion concerns are condition which are on elastic constants of intermediate layer of the plate. If that conditions are performed it is possible the propagation of harmonic waves in three-layered plate with such a phase speed which is equal to the phase speed of harmonic waves propagation without average layer. Numerical calculations are done in case of different numerical values of relative thickness of Three-layered plate. the constants of elastic average layer are determined based on the property of external layers. It is shown that the elastic coefficient of average layer may exceed several times to the elastic coefficient of external layers or three-layered plate may be an one-layered based on the relative thickness of three-layered plate with the elastic coefficient of external layer. Graphical images are built determining the dependence of the coefficient of elastic property of average layer from the thickness of layer [4].