

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՌԵԶԱ ՇԱՐԻՖԻԱՆ

**ՄԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ. ԱՆԻՉՈՏՐՈՊԻԱ,
ՏԵՂԱՅՆԱՑՎԱԾ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ, ՈՉ ԿՈՆՍԵՐՎԱՏԻՎ
ՈՒԺԵՐ**

Ա.02.04.-<<Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա>> մասնագիտությամբ
տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման
ատենախոսության

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2013

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

РЕЗА ШАРИФИАН

**ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН – АНИЗОТРОПИЯ,
ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, НЕКОНСЕРВАТИВНАЯ
НАГРУЗКА.**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук по
специальности 01.02.04– “Механика деформируемого твердого тела”

Ереван - 2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի Պետական Համալսարանում

Գիտական ղեկավար ֆ.ս.գ.թ. Վ.Մ.Բելուրբեկյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ տեխն.գ.դ. Լ.Ա. Մովսիսյան

ֆ.ս.գ.թ. Ս.Ռ. Մարտիրոսյան

Առաջատար կազմակերպություն Հայաստանի պետական
ճարտարագիտական համալսարան (Պոլիտեխնիկ)

Պաշտպանությունը կայանալու է ապրիլի 5-ին 2013թ. ժ. 14.00-ին Մեխանիկայի
ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի-047 մասնագիտական խորհրդում

(Հասցեն՝ 375019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2, avsah@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում

Սեղմագիրն առաքված է 02 մարտի 2013թ.

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար, ֆ.ս.գ.դ.

Ա.Վ. Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском Государственном Университете

Научный руководитель: к.ф.м.н. В.М. Белубекян

Официальные оппоненты д.т.н. Л.А.Мовсисян

к.ф.м.н. С.Р.Мартirosян

Ведущая организация Государственный инженерный
университет Армении (Политехник)

Защита состоится 5-го апреля 2013г. в 14.00 на заседании специализированного
совета Механики-047 в Институте механики

(Адрес: 375019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2, avsah@mechins.sci.am)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА

Автореферат разослан: 2-ого марта 2013г.

Ученый секретарь
Специализированного совета, д.ф.-м.н.

А.В. Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы: В последнее время прямоугольные пластинки являются одним из наиболее распространенных элементов конструкций в промышленном мире. Часто они подвергаются нормальным и сдвиговым нагрузкам, а также нагрузкам, действующим вдоль срединной поверхности. Задачи выпучивания прямоугольных пластин являлись объектом многочисленных исследований в 20 веке. Несмотря на это, новые интересные результаты продолжают обнаруживаться в этой области, некоторые из этих результатов достигнуты в последние несколько лет. В частности один из наиболее интересных результатов заключается в том, что различные условия закрепления краев пластинки могут оказывать влияние на общую устойчивость конструкции, даже в случае когда закрепленные края значительно удалены друг от друга. Впервые этот результат был обнаружен и обоснован Ишлинским, А.Ю, в 1954 году, позднее Баничук и Ишлинский в 1986, 1994 гг. обнаружили дальнейшие парадигмы данного явления и предложили теоретическое объяснение механизму его возникновения. Дальнейшие исследования показали, что особый тип потери устойчивости имеет место в подобных задачах: локализованная вблизи кромок пластинки неустойчивость. Данные результаты были получены для целого ряда задач, как в статической, так и в динамической постановке, в рамках классической теории пластин Кирхгоффа, а также в рамках уточненных теорий, в частности теории С.А. Амбарцумяна и теории Э. Рейсснера. Значительный вклад в изучение явлений, происходящих вблизи кромки упругой пластинки внесли Коненков Ю.К, Баничук Н.В., Норрис А.Н, Крылов В.В, Абрахамс И.Д., Белубекян М.В.

В настоящей работе рассмотрены задачи устойчивости прямоугольных пластин в случае различных граничных условий, в том числе и следящей нагрузки, а также при наличии анизотропии материала пластинки. Для определения значений критических сил выпучивания применен аналитический метод, основанный на решении Леви(1899). Результаты, полученные в данной работе, подтверждаются тем, что в простых частных и предельных случаях совпадают с результатами, известными из литературы. Задача выпучивания пластин впервые была рассмотрена Брайаном (G.H. Bryan) в 1891г. Была рассмотрена задача устойчивости длинной тонкой пластины, длинные края которой шарнирно-оперты и находятся под воздействием

равномерной сжимающей нагрузки. Используя энергетический метод, Брайан установил критические значения сжимающей нагрузки. Эта работа имела целью приложение к вычислению устойчивости корабельных бортов, и была опубликована в *Proceeding of the London Mathematical Society*. Современная теория устойчивости конструкций, и в частности, теория устойчивости пластин под воздействием неконсервативных нагрузок была развита и обогащена многими авторами, среди которых результаты Болотина В.В., Ишлинского А.Ю., Мовсисяна Л.А., Навье К.Л., Сейраняна А.П., Тимошенко С.П. и Вольмира А.С имеют непосредственное отношение и к настоящей диссертации.

В 1967г. Вольмир А.С описал задачи потери устойчивости пластин для различных, более сложных случаев граничных условий. Явление потери устойчивости пластин и математические задачи, его описывающие, во многом схожи с математическими задачами колебаний пластин. Часто результаты, полученные в задачах колебаний пластин, могут быть непосредственно применены или же с легкостью перенесены на задачи устойчивости пластин. Среди современных фундаментальных результатов, полученных в теории колебаний пластин, можно отметить работы Ритца В., Новацкого В., Амбарцумяна С.А., Агаловяна Л.А, Багдасаряна Г.Е. и Гнуни В. Ц.

Цель диссертации: Целью настоящего исследования является выяснение влияния различных условий закрепления или нагружения краев упругих тонких пластин на потерю устойчивости пластинки в целом, а также на возникновение явления локализованной неустойчивости пластин.

Предмет исследования: Предметом настоящего исследования являются устойчивость пластин, локализованная неустойчивость, анизотропия и неконсервативные нагрузки.

Методы исследования: Задачи устойчивости пластин исследованы в рамках классических теорий: изгиба тонких пластин Кирхгоффа и изгиба анизотропных пластин. Используются аналитические методы решения. Для некоторых конкретных задач, описываемых трансцендентными алгебраическими уравнениями применены также численные методы.

Научная новизна

- Установлены критические нагрузки потери устойчивости пластин

с упруго-закрепленными относительно поворота краями, исследовано влияние коэффициентов упругого закрепления на критические нагрузки и форму выпучивания.

- Исследована задача устойчивости пластинки, когда на ее двух противоположных краях заданы условия скользящего контакта. Установлено, что минимальная критическая нагрузка всегда соответствует симметричной форме выпучивания.
- Получены критические нагрузки в задаче устойчивости пластин, когда два противоположных края пластины упруго-оперты. Установлено, что упругое закрепление краев имеет стабилизирующее воздействие на пластину в целом, а также существенно меняет форму выпучивания: вместо симметричной формы может возникнуть анти-симметричная (центрально-симметричная) форма потери устойчивости.
- В задаче устойчивости пластины, сжатой по двум противоположным свободным краям равномерной консервативной нагрузкой, получен еще один контрпример к принципу Сен-Венана, в частности, установлено, что устойчивость пластинки в целом существенно зависит от типа самоуравновешенных граничных условий на двух боковых краях пластинки, даже в том случае, когда боковые края значительно удалены друг от друга. Отдельно исследован случай, когда на краях приложена следящая сжимающая нагрузка. Установлено, что в статической постановке, в отличие от задачи о сжатии стержня следящей нагрузкой, данная задача имеет решение. Критические силы потери устойчивости при этом в случае следящей нагрузки всегда больше, чем в случае консервативной нагрузки.
- В задаче о локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы установлены классы граничных условий, при которых локализованная неустойчивость имеет место.
- В задаче о локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки-полосы, конечный край которой упруго закреплен, получено, что явление локализованной неустойчивости имеет место, однако, выше некоторого определенного значения жесткости опоры, исчезает.

Практическая ценность Способность прямоугольных пластин нести конструктивные нагрузки в определенной степени схожа с аналогичной

способностью структур, состоящих из стержней и тросов, и следовательно может быть аппроксимирована сеткой из бесконечного числа стержней и тросов. Таким образом, двумерность конструкции пластинки по сравнению с одномерными стержнями и тросами обеспечивает меньший собственный вес конструкции, и следовательно, многочисленные экономические преимущества пластин по сравнению с конструкциями из стержней и тросов. Прямоугольная пластинка, несмотря на то, что обычно рассматривается при помощи двумерной модели, тем не менее оказывает сопротивление нагрузкам по всем трем пространственным направлениям, в частности в ней возникают поперечные силы, изгибные и крутящие моменты, которые оказывают сопротивление поперечным нагрузкам. Поскольку усилия сопротивления в пластинке обычно распределяются по двум направлениям в плоскости пластинки, и усилия кручения в изотропных прямоугольных пластинках весьма значительны, прямоугольная пластинка существенно жестче чем балка сравнимая с ней по пролету и толщине. Благодаря указанным преимуществам, прямоугольные пластинки широко применяются в многочисленных областях техники, включая архитектурные конструкции, мосты, гидравлические сооружения, эстакады, контейнеры, самолеты, ракеты, суда, детали машин и пр.

Апробация работы Результаты диссертации докладывались на следующих международных научных конференциях:

- Международная конференция молодых ученых, Механика, Агавнадзор, Армения (Сентябрь-Октябрь) 2009
- The 18th international conference on mechanical engineering, Sharif University, Tehran, Iran (May 11-13), 2010.
- Вторая Международная конференция Современные проблемы механики сплошной среды, Дилижан, Армения, (Октябрь 4-8), 2010
- VII. International university conference, WASET, Paris, France (August 24-26), 2011.

Диссертация в целом была представлена на семинаре кафедры механики факультета механики и математики в Ереванском государственном университете, и на общем семинаре в Институте Механики Национальной Академии наук Армении.

Публикации автора: Материалы диссертации опубликованы в девяти

научных статьях.

Структура и объем работы: Диссертация состоит из четырех глав, заключения и списка цитированной литературы. Диссертация содержит 109 страниц, 34 рисунка и 2 таблицы.

Краткое содержание работы

Глава 1 носит вводный характер. В ней обсуждаются актуальность и значимость поставленных задач, приводится обзор результатов, достигнутых ранее в данной области другими авторами, а также методов исследования задач устойчивости пластин.

Глава 2 содержит основные уравнения и соотношения теории изгиба и устойчивости пластин.

В первом параграфе первой главы, с целью расчета критических нагрузок в пластинах, в первую очередь рассматриваются уравнения изгиба пластин и приводится краткий вывод уравнения изгиба изотропной пластинки.

Во втором параграфе первой главы приводится обзор уравнений изгиба анизотропных пластин.

В третьем параграфе обсуждаются уравнения теории изгиба ортотропных пластин.

В четвертом параграфе рассматриваются различные граничные условия.

В пятом параграфе описываются решения типа Леви для задач изгиба прямоугольных пластин.

Глава 3 содержит вывод аналитических решений и их анализ; глава содержит следующие четыре параграфа:

Первый параграф третьей главы содержит решение задачи устойчивости прямоугольной пластинки, два противоположных края которой свободно-оперты, а два других края подвержены упругому закреплению в отношении поворота. Рассматривается прямоугольная изотропная пластинка. Ее края по координатным линиям $x=0$ и $x=a$ свободно-оперты и находятся под воздействием равномерно-распределенной сжимающей нагрузки. Два других противоположных края пластинки упруго-закреплены в отношении поворота.

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

Граничные условия на свободно-опертых краях $x=0$, $x=a$ следующие:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a \quad (2)$$

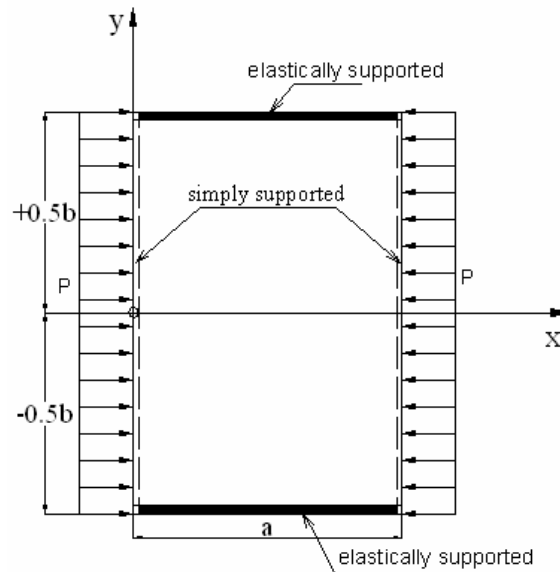


Рисунок 1 Равномерно сжатая прямоугольная пластинка свободно опертая по краям $x=0$ и $x=a$, и упруго закрепленная по двум другим краям.

Граничные условия упругого закрепления следующие:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{R}{b} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5b, \quad \text{где} \quad R = \frac{K_R b}{D} \quad (3)$$

и K_R есть изгибающий момент, действующий на кромку пластины со стороны упругой опоры, на единицу длины кромки. R есть безразмерный коэффициент упругости поворотной опоры (в литературе иногда обозначаемый также через \mathcal{E})

Решение уравнения (1) представлено в виде ряда Фурье, удовлетворяющего граничным условиям (2):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin(\mu_m x), \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a} \quad (4)$$

Функция $f_m(y)$ есть неизвестная форма потери устойчивости по оси y , а m есть число полуволн по оси x . Задача устойчивости сводится к отысканию собственных значений и собственных функций $f_m(y)$ краевой задачи для некоего обыкновенного дифференциального уравнения. Для собственных значений P получено следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda_1^2 \cos(\lambda_2 b/2) \cosh(\lambda_1 b/2) + (R/b)\lambda_1 \cos(\lambda_2 b/2) \sinh(\lambda_1 b/2) + \lambda_2^2 \cosh(\lambda_1 b/2) \cos(\lambda_2 b/2) + (R/b)\lambda_2 \cosh(\lambda_1 b/2) \sin(\lambda_2 b/2) = 0 \quad (5)$$

$$\text{где } (\lambda_1)^2 = \sqrt{\mu_m^2 \frac{P}{D} + \mu_m^2}, \quad (\lambda_2)^2 = \sqrt{\mu_m^2 \frac{P}{D} - \mu_m^2} \quad (6)$$

Поскольку λ_1 и λ_2 зависят от P , уравнение (5) для всякой заданной геометрии и физических параметров пластинки, может быть решено методом последовательных приближений относительно наименьшего P , обозначаемого в дальнейшем P_{cr} .

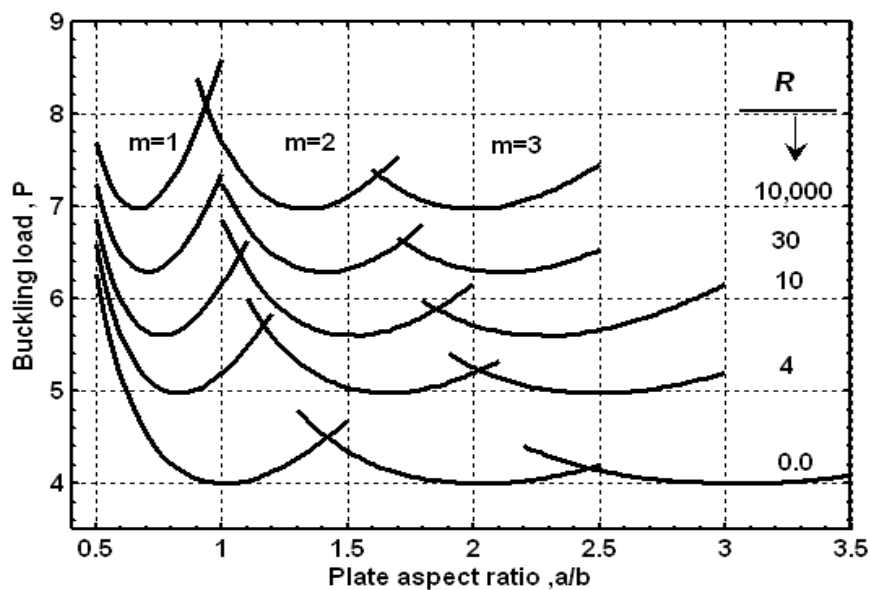


Рисунок 2 Безразмерная критическая нагрузка $\bar{P} = Pb^2 / \pi^2 D$ в зависимости от соотношения длин сторон a/b

Значение критической нагрузки может быть записано в виде:

$$P_{cr} = K\pi^2 D / b^2 \quad (7)$$

где K - численный множитель (коэффициент выпучивания), который зависит от соотношения длин сторон пластинки и от упругих постоянных. Для численного изучения поведения решения в зависимости от соотношения сторон и от упругих постоянных, была составлена программа на языке 'Matlab'. Зависимость решений была исследована в отношении упругих свойств материала, коэффициента упругой опоры, а также числа полуволн возможной формы выпучивания.

Второй параграф главы 3 описывает решение задачи выпучивания прямоугольной изотропной пластинки, на двух противоположных краях которой заданы условия скользящего контакта, а два других противоположных края свободно оперты. Для определения

критической нагрузки выпучивания использован аналитический метод на основе решения Леви. Критические нагрузки определены в зависимости от геометрии пластинки. Проведено сравнение с задачей устойчивости пластинки с упруго закрепленными краями.

Третий параграф главы 3 содержит решение задачи устойчивости изотропной прямоугольной пластинки, два противоположных края которой упруго закреплены, а два других края свободно оперты. Эта задача является обобщением известной задачи о выпучивании пластинки с попарно защемленными и свободно-опертыми противоположными краями.

Установлено, что задачи потери устойчивости по симметричной и по анти-симметричной (центрально-симметричной) форме разделяются. Данные задачи исследуются при помощи аналитического метода Леви. Проводится сравнение со случаями шарнирного опирания и скользящего контакта на краях пластинки. Полученные результаты в частных и предельных случаях совпадают с результатами для этих случаев, известными из литературы. Приведены графики и таблицы зависимости критических нагрузок и форм выпучивания от коэффициента упругого закрепления и от соотношения длин сторон пластинки.

Четвертый параграф главы 3 описывает устойчивость прямоугольной пластинки продольно сжатой по двум противоположным свободным сторонам, как в известной задаче Ишлинского А.Ю. (1954). Отличие от задачи Ишлинского состоит в граничных условиях на двух других краях пластинки, а также в рассмотрении и сравнительном анализе случая следящей сжимающей нагрузки.

Сначала решена консервативная задача, когда направление сжимающей силы постоянно. Затем решена задача со следящей сжимающей силой. В этом случае направление сжимающей силы изменяется таким образом, что сжимающая сила всегда остается направленной по касательной к изогнутой срединной поверхности пластинки. В результате сжимающая сила в этом случае не имеет потенциала, и следовательно, задача неконсервативна. Установлено, что условия устойчивости пластинки для этой задачи, как и следовало ожидать, существенно отличаются от условий устойчивости консервативной задачи.

Определим область, занимаемую пластинкой в декартовой системе

координат, следующим образом: $-\frac{1}{2}a \leq x \leq \frac{1}{2}a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$.

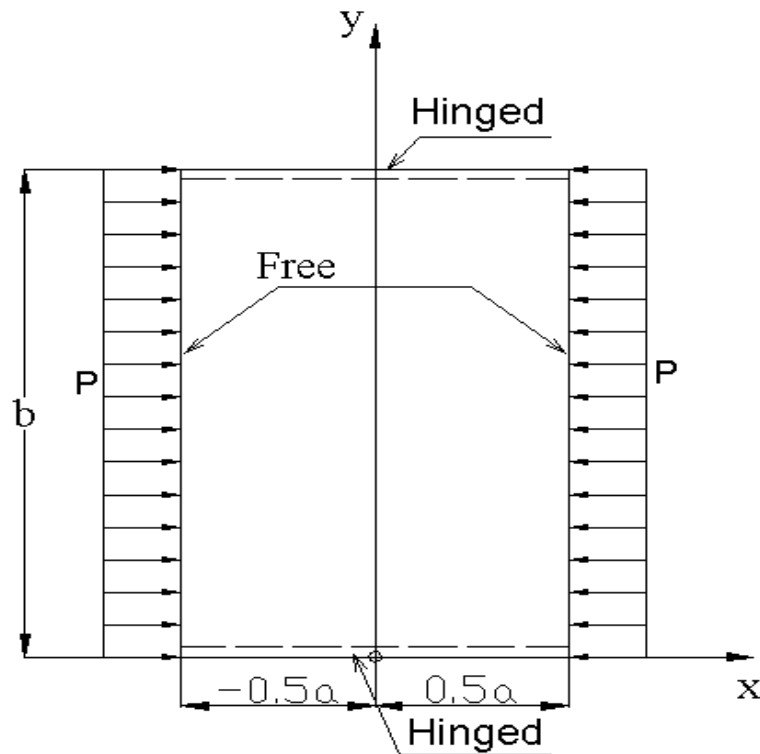


Рисунок 3 Равномерно сжатая прямоугольная пластинка, свободная по сторонам $x=-0.5a$ и $x=0.5a$, и шарнирно закрепленная по двум другим сторонам.

Уравнение устойчивости изотропной пластинки сжатой по сторонам $x = \pm a$ нагрузкой P записывается в следующем виде:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

где w , D , E и ν определяют прогиб, изгибную жесткость, модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Предполагается, что два ненагруженных края пластинки шарнирно закреплены. Следовательно следующие граничные условия имеют место:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y=0, b \quad (9)$$

В дополнение к условиям (9), два других края пластинки подвержены равномерному сжатию в плоскости пластинки, причем изгибающие моменты и перерезывающие силы на этих краях равны нулю. В случае консервативной нагрузки эти граничные условия записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \frac{P}{D} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5a \quad (10)$$

В случае же следящей нагрузки, граничные условия следующие:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \text{при } x = \pm 0.5a \quad (11)$$

Условия (10) и (11) обеспечивают равенство нулю изгибающих моментов и поперечных сил на кромке пластинки. Решение уравнения (8), удовлетворяющее граничному условию (9), записывается в виде ряда Фурье:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \text{где } \lambda_n = n\pi / b \quad (12)$$

Подстановка (12) в (8) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $f_n(x)$:

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2(1 - 0.5\gamma_n^2)f_n'' + \lambda_n^4 f_n = 0, \quad \gamma_n^2 = (D\lambda_n^2)^{-1}P \quad (13)$$

Общее решение системы (13) имеет вид:

$$f_n(x) = A_1 e^{\lambda_n p_1 x} + A_2 e^{-\lambda_n p_1 x} + A_3 e^{\lambda_n p_2 x} + A_4 e^{-\lambda_n p_2 x} \quad (14)$$

где $p_{1,2}$ есть корни характеристического уравнения (13), определяемые следующим образом:

$$p_{1,2} = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma_n^2 \pm i\gamma_n \sqrt{1 - \frac{1}{4}\gamma_n^2} \right)^{1/2} \quad (15)$$

Установлено, что задачи потери устойчивости по симметричной и антисимметричной формам выпучивания разделяются, и приводят к двум трансцендентным характеристическим уравнениям. В случае симметричной формы, характеристическое уравнение имеет вид:

$$0.5\gamma_n \left((3 + \nu)(1 - \nu) - \gamma_n^2 \right) \sinh(2s_n \zeta_n) - s_n \left((1 - \nu)^2 - \gamma_n^2 \right) \sin(\gamma_n \zeta_n) = 0 \quad (16)$$

где $\zeta_n = \lambda_n a / 2 = n\pi a / 2b$

Характеристические уравнения исследованы численно. Для симметричной формы зависимость безразмерного параметра γ_n , характеризующего критическую нагрузку, от параметра ζ_n приведена в таблице 1. Рисунок 4 и Таблица 1 показывают, что параметр критической нагрузки γ_n изменяется незначительно, в зависимости от параметра соотношения сторон ζ_n .

ζ_n	γ_n
2	1.5625
2.5	1.5358
3	1.5402
3.5	1.5524
4	1.5609

Таблица 1. Зависимость параметра γ_n характеризующего критическую нагрузку от соотношения длин сторон пластинки ζ_1 при $\nu = 1/4$

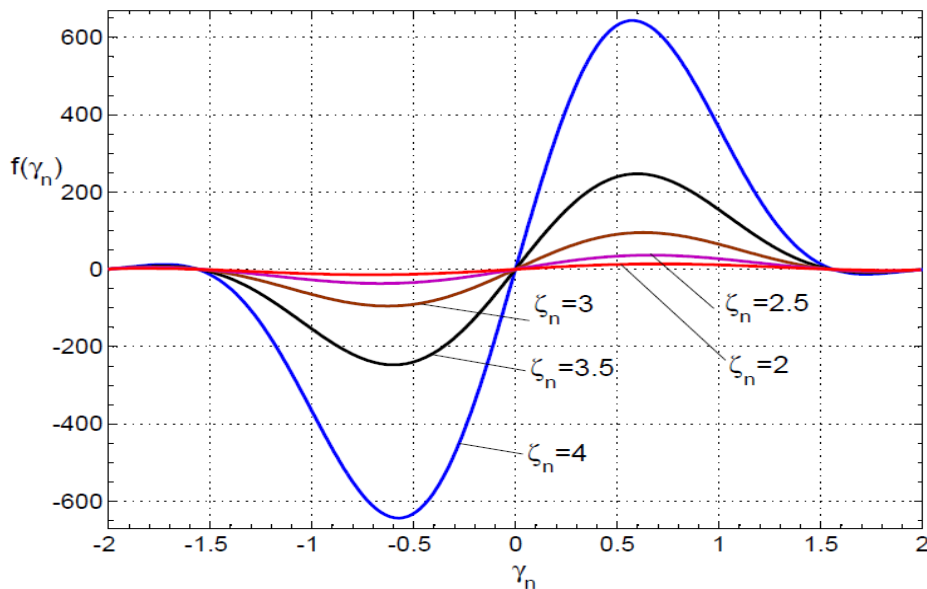


Рис. 4. Анти-симметричная форма потери устойчивости для различных значений ζ_n

Рассмотрим теперь случай нагружения пластинки следящей нагрузкой. В случае симметричной формы выпучивание характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{2}\gamma_n \left((3+\nu)(1-\nu) + \nu\gamma_n^2 \right) \sinh(2s_n\zeta_n) - s_n \left((1-\nu)^2 - \nu\gamma_n^2 \right) \sin(\gamma_n\zeta_n) = 0 \quad (17)$$

Уравнение (17) является аналогом уравнения (16) для следящей нагрузки. Для сравнительного анализа решений этих двух уравнений рассмотрим частный случай очень широкой пластинки: $b \gg a$. В этом случае естественно предположить, что наименьшая критическая нагрузка будет достигнута при числе полуолн $n=1$. В этом случае имеем:

$$\zeta_n \ll 1 \text{ и } \pi a \ll 2b \quad (18)$$

и уравнение (16) упрощается

$$\gamma_1 s_1 \zeta_1 \left((3 + \nu)(1 - \nu) - \gamma_1^2 \right) - \gamma_1 s_1 \zeta_1 \left((1 - \nu)^2 - \gamma_1^2 \right) = 0 \quad (19)$$

Что позволяет получить его корни в виде аналитического выражения:

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \nu^2} \quad (20)$$

Аналогично корни уравнения (17) записываются в виде:

$$\gamma_1 = \nu^{-1/2} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (21)$$

Из решений (20), (21) следует, что критическая нагрузка в случае консервативного нагружения значительно меньше, чем в случае нагружения следящей силой. Для полноты исследования рассматривается также анти-симметричная форма потери устойчивости. Естественно предположить, что минимальная критическая нагрузка потери устойчивости соответствует симметричной форме выпучивания, и что нагрузка потери устойчивости по анти-симметричной форме никогда не превышает значение критической нагрузки выпучивания по симметричной форме. Это предположение подтверждается последующими выкладками. Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид:

$$\frac{1}{2} \gamma_n \left((3 + \nu)(1 - \nu) - \gamma_n^2 \right) \sinh(2s_n \zeta_n) + s_n \left((1 - \nu)^2 - \gamma_n^2 \right) \sin(\gamma_n \zeta_n) = 0 \quad (22)$$

Поскольку уравнение (22) отличается от уравнения (16) только знаком второго слагаемого, то можно заключить, что наименьший корень уравнения (22) всегда меньше наименьшего корня уравнения (16). Отсюда следует, что выпучивание пластины по симметричной форме происходит при меньших критических нагрузках, чем выпучивание по анти-симметричной форме.

Глава 4 посвящена исследованию локализованной неустойчивости полубесконечной пластинки.

Первый параграф четвертой главы рассматривает локализованную неустойчивость полубесконечной упругой ортотропной пластинки. Два полубесконечных края пластинки предполагаются шарнирно-закрепленными, а на конечном краю рассматриваются несколько случаев граничных условий: закрепление, шарнир, скользящий контакт и свободный край.

Рассматривается полубесконечная пластинка-полоса с двумя шарнирно-закрепленными полубесконечными краями, как схематически

представлено на рисунке 5. Ширина пластинки-полосы обозначена через b , а толщина пластинки – через $2h$. Декартова координатная система (x, y, z) выбрана таким образом, что плоскость (xoy) совпадает с серединной плоскостью пластинки, ось z направлена по толщине пластинки, а оси x и y проходят по краям пластинки. Таким образом область, занимаемая пластинкой определяется неравенствами:

$$0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$$

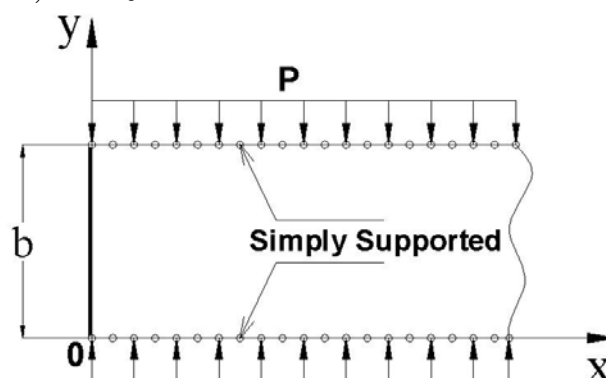


Рисунок 5 Равномерно-сжатая полубесконечная пластинка-полоса шарнирно-опертая по краям $y=0$ и $y=b$.

Пластинка равномерно сжата по сторонам $y=0$ и $y=b$ постоянной нагрузкой P . Уравнение устойчивости ортотропной пластинки может быть записано в виде:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (23)$$

где D_{11} , D_{22} представляют собой изгибные жесткости в направлениях x , y соответственно;

$$D_{11} = \frac{h^3}{12} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad D_{22} = \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} D_{11}, \quad D_{12} = \nu_{12} D_{11}, \quad D_{66} = \frac{h^3}{12} G_{12}$$

и имеет место известное соотношение: $\nu_{21} E_1 = \nu_{12} E_2$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют направлениям по x и y , таким образом E_1 обозначает модуль Юнга в направлении x , а G_{12} - модуль сдвига в плоскости $x-y$, ν_{12} коэффициент Пуассона, или соотношение деформации в направлении y к нормальным напряжениям по оси x . Граничные условия свободного опирания на краях $y=0$, $y=b$ имеют вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b \quad (24)$$

В дальнейшем рассмотрим несколько вариантов граничных условий на краю $x=0$. Везде однако потребуется одно дополнительное условие -

условие затухания деформации с удалением от конечного края пластинки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (25)$$

Общее решение уравнения (23) может быть представлено в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \text{ where } \lambda_n = n\pi / b \quad (26)$$

Уравнения (26) и (23) приводят к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $f_n(x)$:

$$f_n^{IV} - 2\alpha_1 \lambda_n^2 f_n'' + \alpha_4 \lambda_n^4 (1 - \eta_n^2) f_n = 0 \quad (27)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{11}}, \quad \alpha_2 = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad \eta_n^2 = \frac{P}{D_{22} \lambda_n^2} \quad (28)$$

Условие затухания (25) требует чтобы $f_n(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно решение уравнения (27) при условии (25) сводится к виду:

$$f_n = A_n e^{-p_1 \lambda_n x} + B_n e^{-p_2 \lambda_n x} \quad (29)$$

где p_1 и p_2 определяются выражением:

$$p_{1,2} = \sqrt{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2(1 - \eta_n^2)}} \quad (30)$$

$$\text{Из (28) следует что } \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0 \quad (31)$$

$$\text{и } \alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2(1 - \eta_n^2)} > 0 \text{ если } 0 \leq \eta_n^2 \leq 1 \quad (32)$$

Рассмотрим следующие граничные условия при $x = 0$:

Свободный край. Условия свободного края:

$$M_1 = -(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0$$

$$\tilde{N}_1 = N_1 + 2 \frac{\partial H}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (33)$$

где M_1 есть изгибающий момент создаваемый нормальными напряжениями σ_x , действующими в плоскости пластинки. H есть крутящий момент, N_1 , есть поперечные силы, а \tilde{N}_1 есть реакция опоры вдоль края $x = 0$. Введем следующие обозначения:

$$\alpha_3 = D_{12} / D_{11}, \quad \alpha_4 = 2D_{66} / D_{11} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_4 \quad (34)$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ представляют собой три независимые постоянные,

$$(p_2 - p_1)M(\eta) = 0 \quad (35)$$

$$\text{где } M(\eta) = p_1^2 p_2^2 + 2\alpha_4 p_1 p_2 - \alpha_3 (p_1^2 + p_2^2) + \alpha_3 (\alpha_3 + 2\alpha_4) \quad (36)$$

Используя следующие тождества,

$$p_1^2 + p_2^2 = 2\alpha_1, \quad \alpha_1 = \alpha_3 + \alpha_4 \quad (37)$$

уравнение (36) может быть переписано в виде:

$$M(\eta) = p_1^2 p_2^2 + 2\alpha_4 p_1 p_2 - \alpha_3^2 \quad (38)$$

Случай 1. $p_2 - p_1 = 0$

Учитывая выражение (30) для этого случая получаем:

$$\eta_n^2 = 1 + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2} > 1 \quad (39)$$

Таким образом и в этом случае локализованное решение не существует, т.к. (39) не может удовлетворить условию (32).

Случай 2.

$$M(\eta) = 0 \quad (40)$$

В первом предельном случае $\eta_n \rightarrow 1 \Rightarrow p_1 = \sqrt{2\alpha_1}, p_2 = 0$

Из уравнения (38) получается

$$M(1) = -\alpha_3^2 < 0 \quad (41)$$

Во втором предельном случае $\eta_n \rightarrow 0 \Rightarrow p_1 p_2 = \sqrt{\alpha_2}$

Из уравнения (38) получается

$$M(0) = \alpha_2 + 2\alpha_4 \sqrt{\alpha_2} - \alpha_3^2 \quad (42)$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_4 \sqrt{\alpha_2} - \alpha_3^2 > 0 \quad (43)$$

Условие (43) является достаточным условием для существования действительного корня уравнения (40) в следующем интервале:

$$0 < \eta_n < 1$$

Для изотропного случая вместо (43) имеем

$$M(0) = (3 + \nu)(1 - \nu) > 0 \quad (44)$$

Из (38) и (42) получается следующее уравнение

$$p_1 p_2 = -\alpha_4 \pm \sqrt{\alpha_4^2 + \alpha_3^2} \quad (45)$$

А из (30) получается

$$p_1 p_2 = \sqrt{\alpha_2 (1 - \eta_n^2)} \quad (46)$$

Уравнения (45), (46) в свою очередь приводят к следующему уравнению:

$$\eta_n^2 = 1 - \alpha_2^{-1} (2\alpha_4^2 - \alpha_3^2 \pm 2\alpha_4 \sqrt{\alpha_4^2 + \alpha_3^2}) \quad (47)$$

Таким образом получаем, что когда выполнено условие (43), харак-

теристическое уравнение или не имеет корня, или имеет два корня.

Второй параграф четвертой главы рассматривает устойчивость полубесконечной пластинки-полосы, когда два полубесконечные противоположные края пластинки шарнирно-оперты, а конечный край упруго-оперт, как схематически представлено на рисунке 6. Ширина пластинки-полосы обозначена через b , а толщина – через $2h$. Декартова координатная система (x, y, z) выбрана таким образом, что плоскость (xoy) совпадает с серединной плоскостью пластинки, ось z направлена по толщине пластинки, а оси x и y проходят по краям пластинки. Таким образом область занимаемая пластинкой определяется неравенствами: $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$.

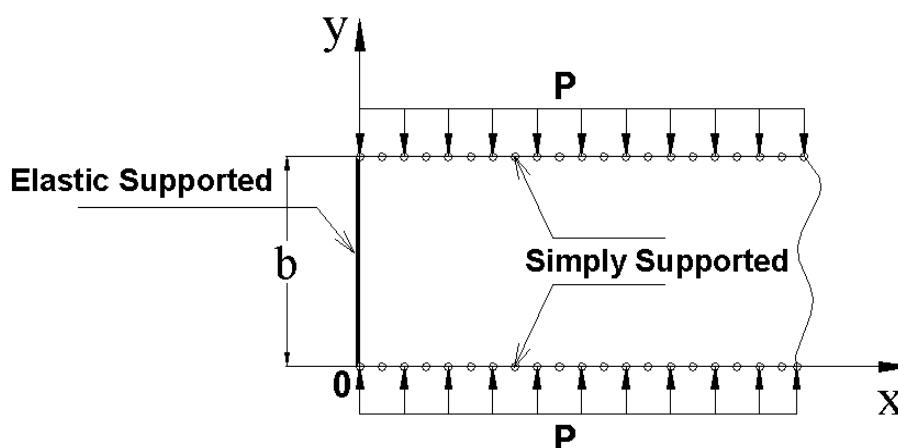


Рисунок 6 Равномерно сжатая полубесконечная пластинка-полоса шарнирно опертая по краям $y=0$ и $y=b$, и упруго опертая по краю $x=0$

Уравнение равновесия записывается в виде:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (48)$$

Граничные условия следующие:

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0 \quad b \quad (49)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \pm \gamma w = 0 \end{cases} \quad x = 0 \quad (50)$$

$$\text{где} \quad \gamma = C_1 D^{-1} \quad (51)$$

и C_1 есть коэффициент упругости опоры.

Для решения задачи, кроме граничных условий заданных на трех

кромках пластинки, требуется еще одно условие. Это условие вытекает из требования затухания прогиба с удалением от конечного края пластинки:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (52)$$

Если описанная выше граничная задача имеет ненулевое решение, то тогда существует явление локализованной неустойчивости пластинки в окрестности кромки $x=0$. Решение уравнения (48), удовлетворяющее условиям (49), может быть представлено в виде ряда Фурье, откуда получается характеристическое уравнение для критической нагрузки:

$$K_1(\eta_n) \equiv p_1^2 p_2^2 + 2(1-\nu)p_1 p_2 - \nu^2 - \gamma \lambda_n^{-3} (p_1 + p_2) \quad (53)$$

$$\text{где } p_1 = \sqrt{1+\eta_n}, p_2 = \sqrt{1-\eta_n}, \eta_n^2 = P/(D\lambda_n^2) \quad (54)$$

Таблица 2 Изменение параметра критической нагрузки η_1 в зависимости от $\gamma \lambda_1^{-3}$ при $\nu = 0.3$

$\gamma \lambda_1^{-3}$	η_1 Знак минус при γ	η_1 Знак плюс при γ
0.00	0.9981	0.9981
0.025	0.9963	0.9993
0.05	0.9940	0.9999
0.10	0.9878	1.0045
0.15	0.9795	1.0139
0.20	0.9691	1.0242
0.22	0.9644	1.0284
0.225	0.9632	1.0295
0.230	0.9620	1.0305
0.231	0.9617	1.0307

Уравнение (53) исследовано численно как для случая, когда множитель γ взят со знаком плюс, так и со знаком минус. Знак плюс соответствует упругому опиранию, в то время как знак минус соответствует приложенной на краю внешней активной нагрузке. В случае упругого закрепления, из Таблицы 2 видно, что корень η_1 возрастает при возрастании приведенной жесткости опоры $\gamma \lambda_1^{-3}$. Следовательно пластинка с более жесткой опорой является более устойчивой.

Заключение

1. Рассмотрена задача устойчивости изотропной прямоугольной пластинки, свободно опертой и продольно нагруженной по двум проти-

воположным краям, и упруго закрепленной в отношении угла поворота по двум другим противоположным краям. Получено характеристическое уравнение задачи, которое исследовано численно. В частности получено, что для предельного случая жесткой заделки, численно представленного значением $R=10,000$, минимальное значение критической нагрузки $\bar{P} = 6.976$ имеет место при $a/b = 0.665$. Установлено, что при значении соотношения длин сторон приблизительно $a/b = 0.936$ имеет место смена формы выпучивания: форма выпучивания по одной полуволне сменяется формой выпучивания по двум полуволнам. Для указанного соотношения сторон, критическая нагрузка выпучивания по одной полуволне оказывается большей, чем критическая нагрузка выпучивания по двум полуволнам. Для другого предельного случая $R=0$, соответствующего свободному опиранию получено значение критической нагрузки $\bar{P} = 4.008$ при $a/b = 1$. Для промежуточных случаев $0 < R < 10,000$ построены кривые зависимости критической нагрузки от соотношения сторон пластинки. Эти кривые располагаются на плоскости чертежа между кривыми, соответствующими двум описанным выше предельным случаям.

2. Рассмотрена задача устойчивости прямоугольной изотропной пластинки, на двух противоположных нагруженных краях которой заданы условия скользящего контакта, а два других края шарнирно закреплены. Установлено, что для данной задачи, решения по симметричной и анти-симметричной формам потери устойчивости могут быть исследованы отдельно, что приводит к следующим выводам:

- Для симметричной формы существенны три взаимо-исключающих случая. Первый случай соответствует значению безразмерной нагрузки $\gamma_m^2 = 4$, тогда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни, следовательно потеря устойчивости происходит по цилиндрической поверхности. Во втором случае $\gamma_m^2 < 4$, характеристическое уравнение не имеет корней, следовательно минимальная критическая нагрузка соответствует первому случаю. И наконец для третьего случая, $\gamma_m^2 > 4$, форма потери устойчивости отличается от цилиндрической, однако минимальная нагрузка выпучивания все же соответствует первому случаю.

- Для анти-симметричной формы также имеют место те же три взаимо-исключающих случая. Первый случай соответствует значению

безразмерной нагрузки $\gamma_m^2 = 4$, тогда потеря устойчивости происходит по цилиндрической поверхности. Для второго случая $\gamma_m^2 < 4$, и для третьего случая $\gamma_m^2 > 4$ получены те же выводы, что и при симметричной форме потери устойчивости.

3. Исследована задача устойчивости прямоугольной пластинки, когда два ее противоположных края шарнирно закреплены, а два других упруго-оперты. Установлено, что добавление упругой опоры к свободному краю приводит к значительному увеличению критических нагрузок, а также приводит к существенному изменению формы выпучивания: симметричная форма выпучивания сменяется анти-симметричной формой.

4. Для задачи устойчивости прямоугольной пластинки, когда пластинка сжата по двум противоположным свободным сторонам исследованы случаи нагружения как консервативной, так и следящей силой.

- Установлено, что в случае консервативной нагрузки и удлиненной пластинки, граничные условия на удаленном крае пластинки существенно влияют на устойчивость пластинки в целом. Таким образом имеем еще один контрпример к принципу Сен-Венана, аналогичный примеру, впервые описанному Ишлинским (1954г.).

- Для широкой пластинки, нагруженной следящей силой, критическая нагрузка значительно превышает критическую нагрузку консервативного нагружения. Этот результат отличен от известного результата задачи об устойчивости стержня, где неустойчивость не может быть обнаружена при помощи статического Эйлера метода. Для пластинки метод Эйлера указывает на возникновение неустойчивости, однако критическая нагрузка стремится к бесконечности, когда коэффициент Пуассона стремится к нулю, и при коэффициенте Пуассона равном нулю неустойчивость исчезает.

5. Для задачи локализованной неустойчивости полубесконечной ортотропной пластинки-полосы получены следующие результаты:

- В случае жестко закрепленного или же шарнирно-закрепленного конечного края локализованная неустойчивость не возникает.

- В случае условий скользящего контакта на конечном краю, решение имеет различное поведение для двух взаимоисключающих случаев, в зависимости от параметров задачи: в одном случае локализованная неустойчивость не существует, а в другом имеет место неустойчивость по цилиндрической поверхности.

- В случае свободного конечного края найдены условия возникновения локализованной неустойчивости в зависимости от параметров задачи.

6. В задаче локализованной неустойчивости полубесконечной изотропной пластинки-полосы с упруго-закрепленным конечным краем получены следующие результаты:

- Полубесконечная пластинка со свободным конечным краем подвержена локализованной неустойчивости. Та же пластинка даже с незначительным упругим опиранием становится намного устойчивее.

- Локализованная неустойчивость исчезает, если жесткость упругой опоры превосходит некоторое переходное значение, что является предсказуемым результатом. Интересен однако тот факт, что величина этого переходного значения жесткости, весьма мала, по сравнению с другими безразмерными параметрами задачи, в частности по сравнению с приведенной жесткостью пластинки.

Публикации

1. Sharifian R., Buckling of Isotropic Plates with Two Opposite Free Edges and the Other Two Edges Rotationally Restrained Unloaded. Proceeding of the Yerevan State Univ. Phys. and Mathem. Sci., No. 1, pp. 32–36, 2010.
2. Belubekyan, V, Sharifian, R, Buckling of isotropic plates with two opposite sliding contact edges and the other two edges simply supported unloaded. Proceeding of international school conference of young scientists, Armenia, pp.353-356, 2009
3. Sharifian, R., Belubekyan, V, Buckling of isotropic plates with two opposite elastically supported edges and other two edges simply supported unloaded. Proceeding of 18th International Conference on Mechanical Engineering, Sharif University, Tehran, Iran, pp.246-252, 2010.
4. Belubekyan, V, Sharifian, R, Stability of Simply Supported Rectangular Isotropic Plates by Analytical Method, Proceeding of 19th International Conference on Mechanical Engineering, Birjand University, Birjand, Iran, pp.223-225, 2011.
5. Belubekyan, V, Sharifian, R, Comparative Study of Non-Conservative and Conservative Problems of Stability of a Rectangular Plate, Proceeding of International Conference of Topical Problems of Continuum Mechanics, Dilijan, Armenia, pp.339-342, 2010.
6. Sharifian, R., Belubekyan, V, Localized Non-Stability of the Semi-Infinite Elastic Orthotropic Plate, Proceeding of World Academy of Science, Engineering and Technology, France, Paris. v. 80, pp. 507-511, 2011.
7. Sharifian, R., Belubekyan, Effect of Boundary Conditions on Localized Instability of the Semi-Infinite Orthotropic Plate, Vol.1, No. 1, Journal of Computational and Applied Research in Mechanical Engineering, pp.59-68, 2011.
8. Sharifian, R., Belubekyan, Stability of a rectangular plate axially compressed on its two opposite free edges, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, ZAMM journal, vol.92, No. 7, pp.558-564, 2012.
9. Sharifian, R., “Localized Buckling of the Semi-Infinite Isotropic Plate Near Elastically Fastened Edge”. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, Mechanics, 65 (2). pp. 46-51, 2012.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում ուսումնասիրված են ուղղանկյուն առաձգական սալերի կայունության խնդիրներ, սալերի եզրերում տարբեր եզրային պայմանների, անիզոտրոպիայի և հետևող ուժերի ազդեցության դեպքում:

Ուսումնասիրված է իզոտրոպ սալի կայունությունը, երբ որ սալի սեղմված եզրերը ազատ հենված են, իսկ երկու մյուս եզրերը առաձգականորեն ամրակցված են պտույտի նկատմամբ: Ուսումնասիրված է նաև իզոտրոպ սալի կայունությունը, երբ որ սալի երկու բեռնված եզրերում տրված են սահող կոնտակտի պայմաններ, իսկ մյուս երկու եզրերը ազատ հենված են: Նշված երկու խնդիրներում թվայնորեն ուսումնասիրված են կրիտիկական ուժերը և նրանց կախվածությունը խնդրի պարամետրերից, ինչպես նաև կայունության կորստի տարբեր ձևերի առաջացման պայմանները:

Դիտարկված է իզոտրոպ ուղղանկյուն սալ, որի երկու հանդիպակած եզրերում տրված են սահող կոնտակտի պայմաններ, իսկ մյուս երկու եզրերը հողակապորեն ամրակցված են: Ցույց է տրված, որ խնդիրը տրոհվում է սիմետրիկ և շեղ-սիմետրիկ խնդիրների: Ստացված է, որ շեղ սիմետրիկ ձևով կայունության կորստի կրիտիկական բեռը միշտ մեծ է սիմետրիկ ձևով կայունության կորստի կրիտիկական բեռից: Ուսումնասիրված են կայունության կորստի առանձնահատկությունները, կախում խնդրում մասնակցող պարամետրերից:

Ուսումնասիրված է իզոտրոպ սալի կայունությունը, երբ սալի երկու հանդիպակած եզրերը ազատ հենված են, իսկ մյուս երկու եզրերը հենված են առաձգական զսպանակների միջոցով, որոնք սահմանափակում են եզրի տեղափոխությունը սալին ուղղահայաց ուղղությամբ: Ստացված է, որ առաձգական հենարանը սալին դարցնում է առավել կայուն, ինչը ասպասելի արդյունք է: Էական արդյունքը այս խնդրում այն է, որ սալի եզրերին առաձգական

հենարաններ ավելացնելիս, որակապես փոխվում է կայունության կորստի ձևը, այն է՝ սիմետրիկ ձևը փոխարինվում է շեղ-սիմետրիկով:

Դիտարկված է երկու հանդիպակած ազատ եզրերով առանցքայնորեն սեղմված իզոտրոպ սալի կայունության խնդիրը: Այս խնդիրը դիտարկված է ինչպես կոնսերվատիվ, այնպես էլ հետևող ուժերի դեպքում: Կոնսերվատիվ ուժերի դեպքում, երբ որ սալի երկարությունը կարգով մեծ է լայնությունից <<երկար սալ>>, ստացված է որ եզրային պայմանների ազդեցությունը հեռավոր եզրում նկատելի է սալի ընդհանուր կայունության վարքի մեջ, այսպիսով ստացված է Մեն-Վենանի սկզբունքի ևս մեկ կոնսեր-օրինակ, նման Իշլինսկու ստացած հայտնի կոնսեր-օրինակին: <<Լայն սալ>> դեպքում ստացված է, որ կոնսերվատիվ ուժերի կրիտիկական արժեքը շատ ավելի փոքր է հետևող ուժերի կրիտիկական արժեքից: Այս արդյունքը տարբեր է հետևող ուժի ազդեցության տակ ձողի կայունության հայտնի խնդրից, որտեղ խնդրի ստատիկ դրվածքը չի բացահայտում կայունության կորուստ: Հետևող ուժի ազդեցության ներքո գտնվող սալի խնդրի ստատիկ դրվածքը բացահայտում է անկայունություն, սակայն կրիտիկական ուժը ձգտում է անվերջության, երբ Պուասսոնի գործակիցը ձգտում է զրոյի, և անկայունությունը վերանում է, երբ որ Պուասսոնի գերծակիցը դառնում է զրո:

Օրթոտրոպ առաձգական կիսանվերջ սալ-շերտի կայունության խնդրում ստացված են հետևյալ արդյունքները՝. Ամրակցման կամ հողակապային ամրակցման դեպքում տեղայնացված անկայունություն տեղի չի ունենում; Սահող կոնտակտի դեպքում, կախված խնդրի պարամետրերից, հնարավոր են դեպքեր, այն է. Տեղայնացված անկայունություն կամ չի առաջանում, կամ տեղի ունի սահմանային դեպք՝ անկայունություն գլանային մակերևույթով; Ազատ եզրի դեպքում ստացված են տեղայնացված անկայունության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները խնդրի պարամետրերից կախված:

Իզոտրոպ առաձգական կիսանվերջ սալ-շերտի, վերջավոր առաձգականորեն հենված եզրի շրջակայքում տեղայնացված անկայունության խնդրում ստացված են հետևյալ արդյունքները՝. Ազատ վերջավոր եզրով կիսանվերջ սալը ենթակա է տեղայնացված անկայունությանը: Նույն սալը չնչին առաձգական հենարան

ավելացնելիս դառնում է շատ ավելի կայուն: Տեղայնացված անկայունությունը անհայտանում է, երբ որ առաձգական հենարանի կոշտությունը գերազանցում է որոշակի սահմանային արժեք: Հետաքրքիր արդյունքն այն է, որ այս սահմանային արժեքը փոքր է խնդրում մասնակցող այլ չափազուրկ պարամետրերի համեմատ:

SUMMARY

Problems of Stability of Plates – Anisotropy, Localized Buckling, Non-conservative Load

Stability problems of elastic rectangular plates under various boundary conditions, anisotropy and follower loads has been considered in this work.

Buckling of an isotropic plate, simply supported on its loaded edges, and rotationally restrained on its unloaded edges, is investigated. Also Buckling of isotropic plates with two opposite sliding contact edges and the other two edges simply supported unloaded is investigated. In these two problems the critical loads and their dependencies on the the present parameters are investigated numerically, and also conditions and presence of different buckling shapes are derived.

Buckling of isotropic rectangular plates having two opposite edges simply supported while the other two edges have elastic springs restraining sliding of the plate in the normal direction has been considered in. In general, provided results show that adding an elastic support leads to growth of critical load, which is an expected result, as the entire system is made more rigid. However, adding elastic support to the side edges of the plate may dramatically change the shape of buckling of the least critical load: instead of symmetric shape of buckling, an anti-symmetric shape will occur.

In stability problem of a rectangular plate axially compressed on its two opposite free edges two cases have been investigated: first when the compressive force is a conservative; and second, when the compressive load is a follower force. In the case of conservative load and elongated plate, the influence of major boundary conditions at the far edges affects the global state of buckling of the plate. Thus, this case provides one more counter-example for Saint-Venant principle, similar to the counter-example described in Ishlinskii. The buckling load is significantly lower for the wide plate subjected to a conservative load compared to the case when the forces

are follower in nature. This is different from the problem of buckling of a rod with a follower force, for which the static statement of the problem shows no buckling. For a plate under follower force (static problem statement) buckling is possible. However, the critical load tends to infinity as ν approaches 0, and for $\nu = 0$, no buckling occurs.

For the problem of localized non-stability of the semi-infinite elastic orthotropic plate, it is established that: In clamped or hinged edge conditions localized solution doesn't exist; In sliding contact conditions there are two cases, in one case localized solution doesn't exist and in the other case we obtain the equation of stability loss by cylindrical surface; In free edge there are two cases, one case localized solution doesn't exist and in the other case we obtain real roots.

In the problem of localized buckling of the semi-infinite isotropic plate near elastically fastened edge following results are obtained: For smaller values of buckling load the deflection is relatively larger. This is a natural result, because the smaller values of buckling load correspond to less stable structure. The semi-infinite plate with free edge exhibits behavior of localized buckling. The same plate, added weak elastic support at the edge, becomes much more stable. Localized buckling disappears when elastic support exceeds some specific value. The interesting result here is that, this special value is small compared to other dimensionless parameters of the problem.