

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

**ՄԱՀԱԿՅԱՆ ԱՎԵՏԻՔ ՎԱՐԱԶԴՎԱՏԻ**

**ԱՌԱԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԵՎ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ  
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԴԻՄԿՐԵՏ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹՎԱՅԻՆ  
ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ՄԵԹՈՂԸ**

Ա.02.04 “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա” մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի  
հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2011

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

**СААКЯН АВЕТИК ВАРАЗДАТОВИЧ**

**МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ  
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ  
КОНТАКТНЫХ И СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук по специальности  
01.02.04 – “механика деформируемого твёрдого тела”

ЕРЕВАН – 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ. Գ.Ե.Բաղդասարյան  
ՀՀ ԳԱԱ արտասահմանյան անդամ, ֆ.մ.գ.դ. Մ.Ա.Սումբատյան  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Է.Խ.Գրիգորյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՌԴ ԳԱ Ա.Իշլինսկու անվան  
Մեխանիկայի պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2011թ. մայիսի 13 – ին, ժամը 14.00-ին  
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում  
(հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24բ, avсах@mechins.sci.am):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի  
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ 8 ապրիլի 2011թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,  
տեխն.գիտ. դոկտոր  Ռ.Մ.Շիրակոսյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Официальные оппоненты: академик НАН РА, д.ф.м.н. Г.Е.Багдасарян  
иностр. член НАН РА, д.ф.м.н. М.А.Сумбатян  
д.ф.м.н., проф. Э.Х.Григорян

Ведущая организация: Институт проблем механики РАН  
им. А.Ю.Ишлинского

Защита диссертации состоится 13 мая 2011г. в 14<sup>00</sup> часов

на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА  
по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>, avсах@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН  
РА.

Автореферат разослан 8 апреля 2011г.

Ученый секретарь специализированного совета,  
доктор техн.наук

 Р.М.Киракосян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Смешанные задачи теории упругости представляют собой область исследований, которая неизменно находится в поле зрения ученых-механиков. Это обусловлено тем, что эти задачи теснейшим образом связаны с вопросами исследования напряженно-деформированного состояния массивных тел, главным образом, в окрестности концентраторов напряжений различных типов. В качестве концентраторов напряжений могут выступать штампы с различным профилем основания, трещины с различными условиями на берегах, инородные включения, в том числе и абсолютно жесткие, вершины линий соединения различных материалов и другие. В инженерной практике какой-либо из указанных, либо подобный им, концентратор напряжений имеется практически в любой конструкции, независимо от ее размеров и назначения. Зачастую встречаются и случаи, когда присутствуют два или более концентраторов напряжений либо одного, либо различного типа. Такие задачи, в основном сводятся к решению сингулярного интегрального уравнения, в частности, с ядром Коши на конечном интервале, либо системы таких уравнений.

Весомый вклад в отмеченную область механики внесли представители армянской школы механики.

Теория сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, к которым, в основном, сводятся контактные и смешанные задачи теории упругости, и в настоящее время продолжает развиваться и расширять рамки приложения как в строго математических, так и прикладных исследованиях.

Известно огромное количество работ, посвященных приближенному вычислению сингулярных интегралов и решению интегральных уравнений, содержащих такие интегралы. Однако, следует отметить, что подавляющее большинство работ относится к наиболее распространенному частному случаю, когда поведение плотности сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования описывается корневой функцией. Существенно меньше число работ, посвященных приближенному вычислению сингулярных интегралов, плотности которых содержат весовую функцию многочленов Якоби с произвольными допустимыми вещественными показателями. Работ, где эти показатели принимались бы комплексными, в литературе найти не удалось.

Несмотря на такое большое количество работ по приближенным методам решения сингулярных интегральных уравнений, интерес к этой проблеме не убывает и продолжает оставаться на повестке дня. Об этом свидетельствует немалое количество публикаций именно в последние годы.

**Целью диссертационной работы** является

– разработка единого подхода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений независимо от того каким оно будет – уравнением первого рода, уравнением второго рода с вещественными коэффициентами,

уравнением второго рода с комплексными коэффициентами, уравнением с обобщенным ядром Коши или интегро-дифференциальным уравнением.

- исследование контактных и смешанных задач теории упругости, сводящихся к решению сингулярных интегральных уравнений разного типа.

**Научная новизна работы** состоит в следующем:

- получены квадратурные формулы для вычисления интеграла типа Коши на отрезке, определенного интеграла с переменным верхним пределом и гиперсингулярного интеграла, содержащих весовую функцию ортогональных многочленов Якоби в общем случае.
- разработан единый подход, названный методом дискретных особенностей, к решению сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода, сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши, а также сингулярных интегро-дифференциальных уравнений;
- методом дискретных особенностей решен класс новых контактных и смешанных задач теории упругости, главным образом относящихся к исследованию взаимовлияния двух типов концентраторов напряжений: трещины и тонкого жесткого включения, находящихся как внутри массивного тела, так и выходящих на его край;
- подробный численный анализ определяющих уравнений позволил выявить интересные особенности в механическом поведении рассматриваемых систем в зависимости от разных параметров задачи.

**Обоснованность и достоверность** полученных результатов обеспечены применением строгих математических методов теории сингулярных интегральных уравнений, теории ортогональных многочленов, корректной постановкой задач в рамках классической теории упругости, постоянным контролем за сходимостью результатов путем регулярно проводимого численного эксперимента.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела “Механика упругих и вязкоупругих тел” Института механики НАН РА,
- семинаре «Волновые процессы» Института механики НАН РА,
- Всесоюзной конференции по теории упругости (Ереван, 1979),
- Всесоюзном симпозиуме «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики» (Харьков, 1985),
- конференции “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем” (Ереван, 1997),
- конференции “Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем” (Ереван, 2002),
- 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics (Blacksburg, USA, 2003),

- International Conference “Topics in Analysis and its Applications” (Yerevan, 2004)
- V-ой международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис, 2005),
- международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Цахкадзор, 2007),
- VI -ой международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис, 2008),
- 8th International Congress on Thermal Stresses (University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 2009),
- XIV Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды" (Ростов-на-Дону - Азов, 2010),
- II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Дилижан, 2010).

Диссертационная работа в целом обсуждена на заседании отдела “Механика упругих и вязкоупругих тел” Института механики НАН РА и на общем семинаре Института механики НАН РА.

**Публикации.** Основные результаты диссертационной работы опубликованы в двадцати статьях, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 241 страницу печатного текста и содержит 75 фигур и 17 таблиц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, дан краткий обзор работ, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами, но, при этом, основное внимание уделено приближенным методам решения сингулярных интегральных уравнений. Подчеркнуты новые результаты, дано краткое описание работы.

**Первая глава** посвящена описанию численно-аналитического метода, названного методом дискретных особенностей (ДО), решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с вещественными или комплексными коэффициентами.

**В §1.1** получена квадратурная формула наивысшей алгебраической точности для вычисления интеграла типа Коши на отрезке  $[-1, 1]$ , плотность которого можно представить в виде произведения регулярной функции, т.е. функции, удовлетворяющей условию Гельдера на замкнутом интервале  $[-1, 1]$ , и весовой функции ортогональных многочленов Якоби  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  с произвольными допустимыми показателями  $\alpha$  и  $\beta$ . Таковой является

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{x-z} dx = \sum_{j=1}^n \frac{w_j \varphi(\xi_j)}{\xi_j - z} \left[ 1 - \frac{q(z)}{q(\xi_j)} \right] \quad (1)$$

где  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > -1$ ,  $z \in C$ ,  $z \neq \pm 1$ ,

$$w_j = \frac{2}{n + \alpha + \beta + 1} \frac{q(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_j)}, \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j) = 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (2)$$

$$q(\zeta) = - \left( \frac{2}{\zeta - 1} \right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n + \alpha + 1, n + \beta + 1) \times \\ \times F \left[ n + 1, n + \alpha + 1; 2n + \alpha + \beta + 2; \frac{2}{1 - \zeta} \right]. \quad (3)$$

Отметим, что при комплексных  $\alpha$  и  $\beta$  узлы  $\xi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) лежат вне отрезка интегрирования, вследствие чего возникает вопрос, что следует понимать под  $\varphi(\xi_j)$ . В случае, когда функция  $\varphi(x)$  аналитически продолжима в комплексную плоскость,  $\varphi(\xi_j)$  можно понимать в буквальном смысле, но тогда точность формулы (1) будет достаточно сильно зависеть от величины мнимой части показателей  $\alpha$  и  $\beta$ , поскольку именно ею определяется удаленность узлов от отрезка интегрирования. Во избежание такой зависимости, а также требования аналитической продолжимости функции  $\varphi(x)$ , рекомендуется в формуле (1) под  $\varphi(\xi_j)$  понимать значения интерполяционного многочлена Лагранжа, построенного по корням многочлена Чебышева  $T_n(x)$  и аппроксимирующего функцию  $\varphi(x)$  на отрезке ее определения, в узлах  $\xi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Для полноты изложения, из работы Андреева А.В. выписаны рекуррентные формулы для достаточно точного вычисления корней многочленов Якоби высокого порядка с произвольными вещественными показателями  $\alpha, \beta > -1$ , которые, в определенной степени, оказались пригодными и для комплексных  $\alpha$  и  $\beta$  с  $\operatorname{Re}[\alpha, \beta] > -1$  и небольшой по модулю, порядка 5, мнимой частью. На примере произвольно выбранной регулярной функции, путем численного эксперимента, показано, что точность квадратурной формулы зависит исключительно от порядка аппроксимации регулярной функции и не зависит ни от показателей  $\alpha$  и  $\beta$ , ни от расположения точки  $z$ .

Приведены квадратурные формулы для часто встречающихся частных случаев.

В §1.2 представлен алгоритм решения сингулярного интегрального уравнения (с.и.у.) второго рода с вещественными коэффициентами при свободном члене, в общем случае имеющего вид:

$$\pi\lambda\varphi(y) + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{x-y} dx + \int_{-1}^1 K(x,y)\varphi(x) dx = f(y) \quad (-1 < y < 1) \quad (4)$$

где  $K(x,y)$  и  $f(y)$  - функции, удовлетворяющие условию Гельдера на замкнутом интервале  $[-1,1]$  по каждой из своих аргументов.

Решение уравнения (4) ищется в классе функций, представимых в виде

$$\varphi(x) = \varphi^*(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \quad (\alpha, \beta > -1) \quad (5)$$

где функция  $\varphi^*(x)$  принадлежит классу  $H$ , а показатели  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из уравнений

$$\operatorname{ctg} \pi\alpha + \lambda = 0, \quad \operatorname{ctg} \pi\beta - \lambda = 0, \quad (6)$$

в соответствии со значением индекса задачи  $\kappa = \alpha + \beta = \{-1, 0, 1\}$ .

Заменяя регулярную функцию  $\varphi^*(x)$  интерполяционным многочленом Лагранжа по корням  $\xi_i (i=1, n)$  многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , решение уравнения (4) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) относительно  $\varphi^*(\xi_i) (i=1, n)$ , которая в зависимости от индекса  $\kappa$  имеет разную структуру.

В случае  $\kappa = -1$  имеем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{w_i \varphi^*(\xi_i)}{\xi_i - \zeta_k} = f(\zeta_k) & (k=1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_{i=1}^n w_i \varphi^*(\xi_i) = C \end{cases} \quad (7)$$

Последнее уравнение системы является дискретизацией дополнительного условия, необходимого для выделения единственного решения и, в данном случае, принятого в виде

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = C, \quad C - \text{заданное число.} \quad (8)$$

В случае  $\kappa = 0$  имеем

$$\sum_{i=1}^n \frac{w_i \varphi^*(\xi_i)}{\xi_i - \zeta_k} = f(\zeta_k) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

В случае  $\kappa = 1$  имеем

$$\gamma_{0n} + \sum_{i=1}^n \frac{w_i \varphi^*(\xi_i)}{\xi_i - \zeta_k} = f(\zeta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n+1) \quad (10)$$

где  $\gamma_{0n}$  - дополнительная неизвестная, введенная И.К.Лифановым в своих ранних работах как регуляризирующий параметр, поскольку  $\gamma_{0n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 K(x, y) \varphi(x) dx - f(y) \right] \frac{dy}{(1-y)^\alpha (1+y)^\beta} = 0, \quad (11)$$

которое является необходимым для существования решения в данном классе решений.

В системах (7), (9) и (10) точки коллокации  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n+k$ ) являются корнями многочлена Якоби  $P_{n+k}^{(-\alpha, -\beta)}(y)$ .

**В §1.3** представлен алгоритм решения с.и.у. второго рода (4), когда коэффициент  $\lambda$  - комплексное число, отличное от  $\pm i$ . Решение ищется в виде (5), при этом показано, что и здесь индекс задачи  $k = \alpha + \beta$  должен быть равен  $\{-1, 0, 1\}$ , откуда следует, что параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , в общем случае, будут иметь вид

$$\alpha = \alpha_0 + i\mu, \quad \beta = \beta_0 - i\mu \quad (12)$$

где  $\alpha_0, \beta_0, \mu$  - действительные числа, причем  $\alpha_0, \beta_0 > -1$  и  $\alpha_0 + \beta_0 = k$ .

Численным анализом выявлены закономерности расположения в комплексной плоскости узлов интерполяции, т.е. корней многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , и точек коллокации, т.е. корней многочлена Якоби  $P_{n+k}^{(\alpha, \beta)}(x)$ , в зависимости от  $\alpha_0, \beta_0, \mu$ .

Показано, что и в этом случае, с учетом данной выше рекомендации относительно  $\varphi(\xi_i)$ , решение с.и.у. сводится к решению с.л.а.у., подобных системам (7), (9) и (10).

**В §1.4** получены квадратурные формулы, которые позволяют сингулярный интеграл с ядром Коши на отрезке от производной функции, представимой в виде (5), и определенный интеграл с переменным верхним пределом от такой же функции аппроксимировать конечной суммой, в которую входят значения регулярной части функции в корнях соответствующих ортогональных многочленов, в общем случае - многочленов Якоби. Поскольку именно указанные значения являются основными неизвестными с.л.а.у., к которым сводятся с.и.у., то полученные квадратурные формулы позволяют свести к подобным с.л.а.у. и сингулярные интегро-дифференциальные уравнения.

**Во второй главе** приведены решения двух контактных задач, определяющими уравнения которых являются сингулярные интегральные уравнения второго рода с действительным коэффициентом при свободном члене.

В §2.1 решена контактная задача о вдавливании равномерно движущегося жесткого штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения от сил трения, возникающих под штампом и подчиняющихся закону Кулона сухого трения.

При предположении, что выделяемое в зоне контакта тепло пропорционально контактному давлению и разделяется на два потока, направленных во внутрь полуплоскости и штампа, который, будучи абсолютно жестким, принимает тепло, задача сводится к решению системы с.и.у. относительно контактного давления и линейной комбинации контактного давления и потока тепла, выделяемого в зоне контакта и направленного внутрь полуплоскости. Одно из уравнений системы является уравнением второго рода, а другое – первого рода. Полученная система уравнений решена методом ДО, который дает такую возможность вследствие единства в подходе к решению с.и.у. разных родов.

Проведен подробный численный анализ, в результате которого построены графики изменения регулярной части контактного давления в зависимости от скорости как с учетом фрикционного тепловыделения, так и без его учета, а также графики распределения теплового потока, направленного внутрь полуплоскости при различных скоростях движения штампа. Для выявления влияния тепловыделения на распределение контактного давления введено в рассмотрение среднеквадратичное отклонение  $\Delta(V_0)$  регулярных частей контактного давления при одной и той же скорости движения штампа для двух указанных случаев.

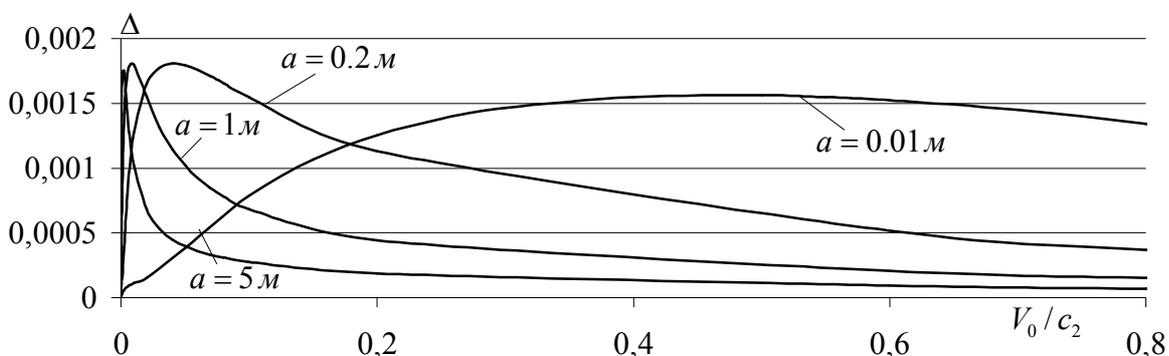


Рис.1 Графики изменения функции  $\Delta(V_0)$  при различных абсолютных значениях полудлины зоны контакта  $a$ .

В результате численного анализа выяснено, что

- в контактной зоне выделяется достаточно большое количество теплоты, возрастающее пропорционально скорости движения штампа,
- учет тепловыделения приводит к повышению напряжений в передней, по отношению к направлению движения, части зоны контакта и понижению их в задней части,
- максимальная мера повышения (понижения) напряжений имеет место вблизи концов зоны контакта и не превосходит 3%,

- качественно влияние тепловыделения на перераспределение контактных напряжений сильно зависит от абсолютной величины зоны контакта в том плане, что проявляется не при всех скоростях движения штампа,
- в случае широких штампов это влияние проявляется лишь для очень узкого спектра скоростей, расположенного вблизи нулевой точки, с уменьшением полудлины зоны контакта этот спектр расширяется и удаляется от нулевой точки.

В §2.2 приведено решение контактной задачи о вдавливании равномерно движущихся, симметрично расположенных, жестких круглых дисков в упругую полосу при предположении, что в зоне контакта имеет место сухое трение с коэффициентом трения  $\beta$ , т.е. тангенциальные напряжения пропорциональны нормальным, вследствие чего  $Q = \beta P$  (рис.2).

Определяющим уравнением рассматриваемой задачи является с.и.у. второго рода с индексом  $\kappa = 1$ , которое должно выполняться совместно с двумя условиями равновесия круглого диска. Согласно методу ДО решение задачи сведется к решению с.л.а.у. из  $n + 3$  уравнений, которая не является переопределенной, потому что к искомым  $n$  значениям регулярной части решения добавляются неизвестные координаты зоны контакта  $a$  и  $b$ , а также значение угла  $\gamma$ , обеспечивающее скольжение диска без проворота.

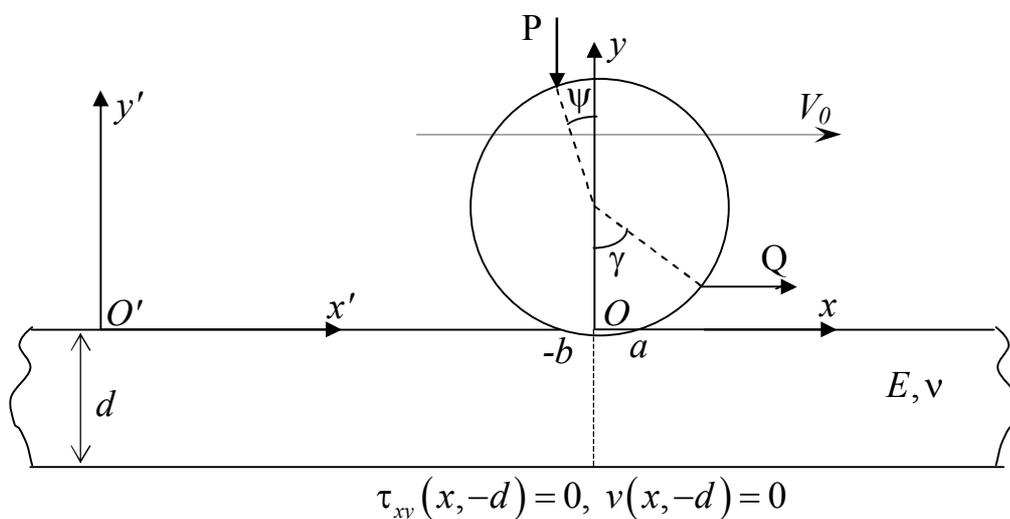


Рис. 2

В результате обстоятельного численного анализа выяснено, что

- распределение контактных напряжений при определенной скорости движения дисков практически не зависит от толщины полосы,
- с увеличением скорости  $V_0$  длина зоны контакта возрастает независимо от полутолщины полосы  $d$ , в то время как при определенной скорости движения длина зоны контакта не зависит от толщины полосы,
- расположение зоны контакта относительно выбранного начала координат существенно зависит от полутолщины полосы  $d$ . При этом, если в случае

полосы бесконечной толщины зона контакта смещена вправо, т.е. в сторону направления движения, то с уменьшением толщины она непрерывно смещается влево. Значение  $d = 41$  можно считать соответствующим случаю, когда зона контакта практически при всех скоростях остается симметричной относительно начала координат.

- с увеличением скорости  $V_0$  зона контакта продолжает смещаться в изначально смещенную сторону.

**В третьей главе** приведены решения четырех смешанных задач, определяющими уравнениями которых являются сингулярные интегральные уравнения второго рода с комплексным коэффициентом при свободном члене.

**В §3.1** решена задача для однородного упругого клина, на биссектрисе которого находится тонкое жесткое включение конечной длины, которое только по одной стороне скреплена с материалом клина, тем самым образуя трещину вдоль другой стороны. Предполагается, что грани клина свободны от напряжений, а внешняя нагрузка приложена к свободным сторонам включения и трещины так, чтобы имело место раскрытие трещины.

Определяющую систему уравнений составляют два с.и.у. второго рода относительно двух комплексных линейных комбинаций скачков контактных напряжений и производной перемещений берегов трещины, условия равенства нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на включение, и условие непрерывности перемещений в концах трещины.

Вследствие взаимовлияния трещины и включения особенность напряжений в вершине трещины-включения отличается от традиционной корневой и имеет показатели вида

$$\alpha = -\frac{3}{4} + i \frac{\ln(3-4\nu)}{4\pi}, \quad \beta = -\frac{1}{4} - i \frac{\ln(3-4\nu)}{4\pi}, \quad (13)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона материала клина.

Методом ДО проведен численный анализ для случая, когда на берег трещины действует равномерно распределенная нормальная нагрузка, а на включение действует нормальная сосредоточенная сила, результирующие которых составляют уравновешенную систему.

Исследованы закономерности изменения угла поворота жесткого включения и коэффициентов концентрации напряжений  $K_a$  и  $K_b$ , под которыми подразумеваются модули комплексной комбинации коэффициентов концентрации нормальных и тангенциальных напряжений, соответственно у ближнего, к вершине клина, и дальнего концов включения-трещины в зависимости от угла раствора клина и расстояния включения определенной длины от вершины клина.

Выявлено, что

- при острых полууглах раствора клина влияние его величины на угол поворота  $\gamma$  и коэффициенты концентрации напряжений  $K_a$  и  $K_b$  намного существеннее, чем при тупых,
- угол поворота  $\gamma$  с удалением от вершины, как и следовало ожидать, монотонно стремится к нулю при любом угле раствора клина,
- коэффициент концентрации напряжений  $K_a$  с удалением от вершины при любом угле раствора клина монотонно убывая стремится к определенному пределу  $K_\infty$ ,
- если при тупых полууглах раствора клина коэффициент  $K_b$  монотонно возрастая стремится к тому же пределу  $K_\infty$ , то при острых полууглах коэффициент  $K_b$  сначала возрастает, оставаясь при этом меньше  $K_a$ , затем убывая стремится к предельному значению.

**В §3.2** исследовано напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие включения-трещины, аналогичные рассмотренному в предыдущем параграфе.

Ввиду симметрии в постановке задачи, она сводится к решению задачи для упругого клина с полууглом раствора  $\pi/4$ , на гранях которого, в отличие от предыдущего случая, заданы условия симметрии. Очевидно, что система определяющих уравнений, как и поведение искомых функций в концевых точках, подобна предыдущей, поэтому представляет интерес сравнение с решением задачи предыдущего параграфа при  $\alpha = \pi/4$  и выявление влияния граничных условий, заданных на гранях клина, на искомые величины задачи.

В результате проведенного при одной и той же нагрузке численного анализа показано, что

- распределение нормальных контактных напряжений на линии соединения включения с плоскостью для различных значений параметра  $\lambda > 1$ , указывающего на удаленность включения от центра симметрии, практически одинаковое, в то время как в случае свободных граней эта зависимость очень существенна,
- тангенциальные контактные напряжения в обоих случаях сильно зависят от параметра  $\lambda$ , но при этом существенно отличаются друг от друга как количественно, так и качественно - имеют противоположное направление,
- условия симметрии сильно сковывают возможность поворота включения, на порядок уменьшая значения угла  $\gamma$ .
- при свободных граничных условиях разница между коэффициентами  $K_a$  и  $K_b$  при малых  $\lambda$  достаточно большая и условие  $K_a > K_b$  сохраняется при всех значениях  $\lambda$ , в то время как при условиях симметрии  $K_a > K_b$ , причем не намного, только при достаточно малых  $\lambda$ , а уже при  $\lambda \geq 5$  имеем

$K_b > K_a$ . Несмотря на это, как и следовало ожидать в обоих случаях, при  $\lambda \rightarrow \infty$  коэффициенты  $K_a$  и  $K_b$  стремятся к одному и тому же значению  $K_\infty$ .

**В §3.3** решена задача для составной упругой плоскости, состоящей из двух разнородных полуплоскостей, которая на двух непересекающихся отрезках линии стыка полуплоскостей, имеет трещину и тонкое абсолютно жесткое включение. Предполагается, что плоскость находится в заданном стационарном температурном поле  $T(x, y)$  и деформируется под действием нормальных напряжений  $p(x)$ , симметрично приложенных к берегам трещины.

Задача сводится к решению системы с.и.у. второго рода с чисто мнимым коэффициентом у свободного члена при условиях непрерывности перемещений в вершинах трещины и условиях равенства нулю главного вектора и главного момента, действующих на включение, контактных напряжений. Искомые функции в этом случае имеют хорошо известную в литературе корневую особенность с осцилляцией.

Численный анализ проведен для частного случая нагружения, когда на берега трещины действует одинаковая равномерно распределенная нормальная нагрузка и составной плоскости придано приращение температуры  $T$ . Кроме того, для простоты, коэффициенты Пуассона материалов полуплоскостей и длины трещины и включения приняты равными, для отношения модулей сдвига принято  $\mu = 4$ , оставив в качестве изменяемых параметров отношение коэффициентов линейного расширения  $\alpha$ , и относительное расстояние между трещиной и включением  $\lambda > 0$ .

В результате сделаны следующие выводы:

- даже однородное температурное поле существенно влияет на напряженно-деформированное состояние составной плоскости из разнородных полуплоскостей с концентраторами напряжений на линии их стыка,
- при малых значениях параметра  $\alpha$  коэффициенты концентрации контактных напряжений как в конце трещины, так и в конце включения с удалением их друг от друга по абсолютному значению уменьшаются, в то время как при больших значениях этого параметра имеет место противоположная картина,
- при увеличении параметра  $\alpha$  коэффициент концентрации контактных напряжений в конце трещины меняет знак и по абсолютной величине возрастает, стремясь к определенному пределу.
- изменение знака коэффициента концентрации напряжений в конце трещины означает, что даже при существенно отличающихся друг от друга по упругим свойствам материалах полуплоскостей определенное значение отношения тепловых коэффициентов может привести к закрытию трещины в ближнем к включению конце,
- поскольку возможный поворот жесткого включения полностью обусловлен наличием трещины, приводящей к нарушению симметрии относительно срединного перпендикуляра к включению, то, независимо от значения

параметра  $\alpha$ , при достаточном расстоянии между трещиной и включением угол поворота обращается в ноль,

- увеличением параметра  $\alpha$  можно достичь обратного поворота. Следовательно, для каждого значения параметра  $\mu$  существует определенное значение  $\alpha^*$ , при котором угол поворота включения равен нулю, при этом большему значению  $\mu$  соответствует меньшее значение  $\alpha^*$ ,
- при  $\lambda = 5$  все величины практически стабилизируются, то есть взаимовлиянием трещины и включения можно пренебречь. При этом влияние трещины на включение прекращается намного раньше, чем влияние включения на трещину.

**В §3.4** решена задача для составной упругой плоскости, состоящей из двух разнородных полуплоскостей, которая на линии стыка полуплоскостей имеет полубесконечную трещину и вне ее тонкое абсолютно жесткое включение конечной длины. Предполагается, что плоскость деформируется под действием распределенных по конечному отрезку нормальных напряжений  $p(x)$ , симметрично приложенных к берегам трещины.

Задача сводится к решению с.и.у. второго рода с чисто мнимым коэффициентом при свободном члене при условиях равенства нулю главного вектора и главного момента, действующих на включение, контактных напряжений. Искомая функция, являющаяся комплексной комбинацией скачков нормальных и тангенциальных напряжений на включении, и в этом случае имеет корневую особенность с осцилляцией.

Численный анализ проведен при предположении, что длина включения, как и длина зоны приложения внешней нагрузки, равны 2 и остаются неизменными. Введены параметры  $\mu > 1$  и  $\lambda > 1$ , характеризующие расстояния их центров от вершины трещины. Эти параметры позволяют более наглядно проследить за изменением распределений нормальных и тангенциальных контактных напряжений на берегах включения, и угла поворота включения при различных значениях отношения модулей упругости составляющих полуплоскостей  $E$ . Ввиду симметричности задачи относительно расположения составляющих полуплоскостей, большим принят модуль упругости верхней полуплоскости, т.е.  $E \geq 1$ . Коэффициент Пуассона для материалов полуплоскостей принят одинаковым и равным  $\nu = 0.28$ .

Представлены графики распределения контактных нормальных и тангенциальных напряжений на верхнем и нижнем сторонах включения, а также приведены табличные данные для коэффициентов концентрации контактных напряжений в вершинах включения сверху и снизу, коэффициента концентрации напряжений в вершине трещины и угла поворота включения при различных значениях отношения модулей упругости составляющих полуплоскостей  $E$  и параметра  $\mu$ , характеризующего удаленность включения от вершины трещины.

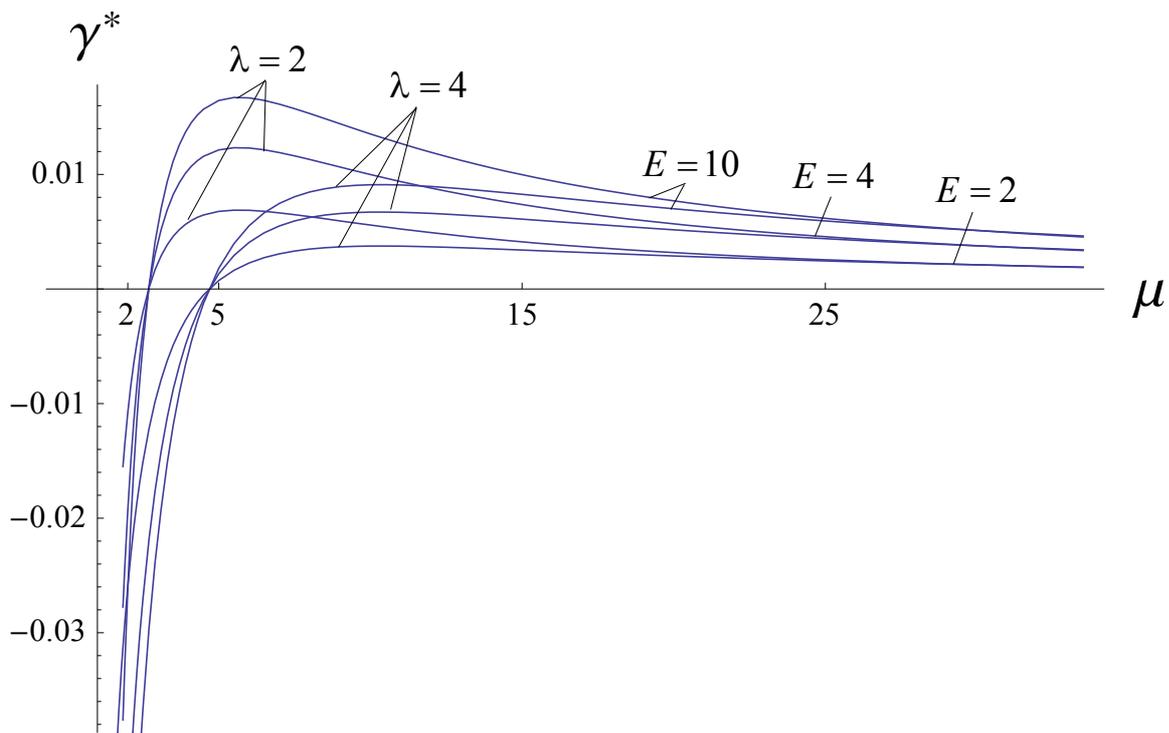


Рис. 3. Изменение приведенного угла поворота  $\gamma^*$  в зависимости от параметра  $\mu$  при различных значениях отношения  $E = 2, 4, 10$  и параметра  $\lambda = 2, 4$ .

На основании представленных результатов можно заключить, что

- в случае однородной плоскости нормальные контактные напряжения на обоих берегах равны друг другу и в вершинах включения принимают конечные значения, в то время как тангенциальные контактные напряжения на обоих концах стремятся к бесконечности,
- в случае неоднородной плоскости в вершинах включения имеют особенность как тангенциальные, так и нормальные контактные напряжения, при этом у самых концов включения проявляется тенденция к отрыву от верхней, с большим модулем упругости, полуплоскости,
- при удалении включения от вершины трещины вместе с очевидным уменьшением абсолютного значения наблюдается выравнивание нормальных контактных напряжений почти по всей зоне контакта, причем в большей степени на верхнем берегу. Распределение тангенциальных контактных напряжений на верхнем берегу стремится к кососимметричному относительно средней точки включения, в то время как на нижнем берегу такого не замечается,
- с возрастанием отношения  $E$  приведенный угол  $\gamma^*$ , коэффициенты концентрации напряжений у ближнего к трещине конца включения и в вершине трещины возрастают, стремясь к определенным конечным пределам, в то время как коэффициенты концентрации напряжений у дальнего от трещины конца стремятся к нулю,
- при близком расположении включения к вершине трещины коэффициенты концентрации напряжений у обоих концов включения сверху и снизу

отличаются друг от друга более чем в два раза, в то время как при удалении они уравниваются,

- наличие включения сказывается на величине коэффициента концентрации напряжений в вершине трещины лишь при достаточной их близости,
- для каждого значения параметра  $\lambda$  существует определенное значение параметра  $\mu$ , при котором независимо от отношения  $E$  модулей упругости полуплоскостей и от величины коэффициента Пуассона, одинакового для составной плоскости, угол поворота включения равен нулю,
- между указанными значениями параметров  $\lambda$  и  $\mu$  имеет место практически линейная связь.

**В четвертой главе** приведены решения четырех смешанных задач, определяющими уравнениями которых являются сингулярные интегральные уравнения с обобщенным ядром Коши. Первые две задачи, приближенные решения которых известны в литературе, решены заново с целью проиллюстрировать эффективность метода дискретных особенностей, две другие задачи являются новыми.

**В §4.1** заново решена задача для составной плоскости с трещиной, находящейся в одной из полуплоскостей и ортогонально выходящей на линию раздела, когда внешняя нагрузка симметрично приложена к берегам трещины. Эта задача была поставлена и получила приближенное решение в работе Erdogan F., Gupta G.D. and Cook T.S. Numerical solution of singular integral equations. Mechanics of Fracture. G.C.Sih ed. V.1, Noordoff, Leyden, 1973, p. 368-425.

Определяющим уравнением поставленной задачи является с.и.у. с обобщенным ядром Коши относительно скачка производной нормальной компоненты перемещения берегов трещины и имеет следующий вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{t-\xi} dt + \int_{-1}^1 K(\xi, t) \Phi(t) dt = \pi f(\xi) \quad (-1 < \xi < 1) \quad (14)$$

где

$$K(\xi, t) = \frac{c_0}{t + \xi + 2} + \sum_{m=1}^2 c_m (1 + \xi)^m \frac{d^m}{d\xi^m} (t + \xi + 2)^{-1}, \quad (15)$$

$c_0, c_1, c_2$  - константы, зависящие от коэффициентов Пуассона материалов полуплоскостей и отношения их модулей сдвига.

Искомая функция  $\Phi(t)$  представляется в виде

$$\Phi(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta g(t) \quad (16)$$

где  $\alpha = -0.5$ ,  $\beta$  определяется из трансцендентного уравнения, коэффициенты которого зависят от упругих констант составных полуплоскостей, а  $g(t)$  непрерывная на отрезке  $[-1, 1]$  функция.

При решении уравнения (14) методом ДО для обоих интегралов используется квадратурная формула (1), которая, как указано выше, верна как для точек  $\xi$  интервала интегрирования, так и для точек  $(-\xi - 2)$ , расположенных вне его.

Здесь, в отличие от уравнений предыдущих глав, индекс задачи  $\kappa = \alpha + \beta$  не является целым числом и функция  $q(\xi)$  в формуле (1) не обращается в полином соответствующего порядка, указывая тем самым на необходимое число точек коллокации. Численный анализ при некоторых значениях  $n$  показал, что для данных  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $q(\xi)$ , не будучи многочленом, имеет ровно  $n - 1$  корней и все они находятся на интервале  $(-1, 1)$ . В качестве точек коллокации можно взять как сами корни функции  $q(\xi)$ , так и корни, например, многочлена Чебышева первого рода  $T_{n-1}(x)$ .

Для замыкания с.л.а.у. добавляется дискретизированное условие непрерывности перемещений в вершинах трещины.

Проведен достаточно обстоятельный сравнительный анализ результатов, имеющих в указанной работе, а также результатов, которые можно получить по описанной там схеме, с результатами, полученными методом ДО.

Например, при одинаковых внешних параметрах функция  $g(\xi)$  в представлении (16) рассчитана методом ДО при  $n = 8$  и  $n = 20$ , а также найдены значения  $g(t_i)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) при  $N = 40$  и при  $N = 250$  по схеме, предложенной в указанной работе. Результаты представлены на рис. 4, где функция  $g(\xi)$  представлена в виде графиков, слившихся в одну сплошную линию, а значения  $g(t_i)$  показаны кружочками и звездочками.

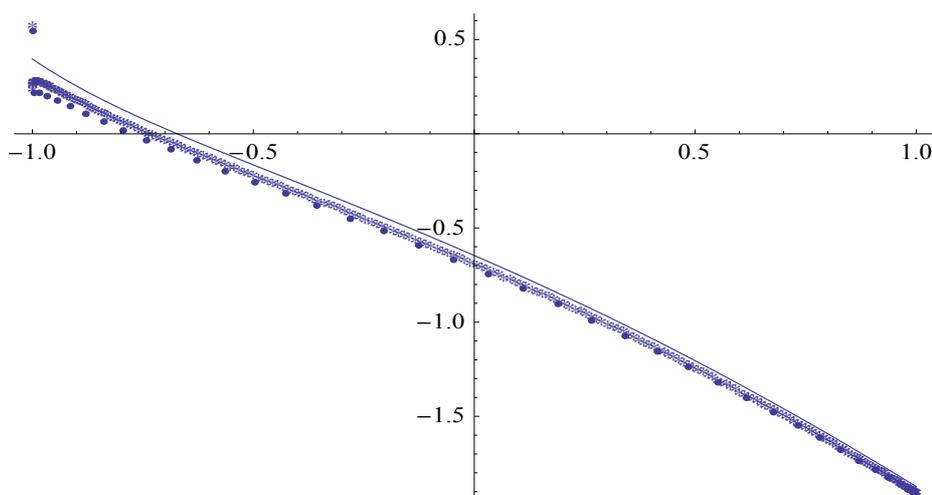


Рис.4

Сравнение результатов явно указывает на эффективность и высокую точность метода ДО. Особо следует подчеркнуть, что метод ДО, в отличие от сравниваемой работы, исключает какие-либо формальные подходы и дополнительные предположения для коррекции сходимости, обеспечивая тем самым хорошую сходимость вычислительного процесса и стабильность результатов.

По квадратурной формуле, полученной в §1.4 первой главы, найдено также раскрытие трещины для различных пар материалов составной плоскости и выяснено, что чем ниже модуль сдвига материала противостоящей трещине полуплоскости, тем больше мера раскрытия трещины, причем в большей мере вблизи линии раздела.

**В §4.2** также заново решена хорошо известная в литературе задача для упругой полуплоскости с трещиной конечной длины, которая перпендикулярно выходит на границу полуплоскости. Внешняя нагрузка приложена к берегам трещины.

Для сравнения выбрано приближенное решение поставленной задачи, приведенное в книге Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Наукова Думка, Киев, 1976, 443 с.

Определяющим уравнением задачи является уравнение, подобное (14), с той лишь разницей, что в (15) следует подставить  $c_0 = -1$ ,  $c_1 = -6$ ,  $c_2 = -2$ . Вследствие этого показатель  $\beta$  обращается в ноль и искомая функция представляется в виде

$$\varphi(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{1-t}} \quad (|t| < 1) \quad (17)$$

Решая определяющее уравнение методом ДО выяснено, что при  $\alpha = -0.5$  и  $\beta = 0$  функция  $q(\xi)$  в формуле (1) имеет ровно  $n$  корней и все они находятся на интервале  $(-1, 1)$ . Следовательно, выбирая в качестве точек коллокации корни, например, многочлена Чебышева первого рода  $T_n(x)$ , получим замкнутую систему л.а.у. относительно значений  $g(t_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

В сравниваемой работе принято

$$\varphi(t) = \frac{\rho(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (|t| < 1) \quad (18)$$

и, для обеспечения ограниченности решения в конце  $t = -1$ , поставлено дополнительное условие

$$\rho(-1) = 0. \quad (19)$$

Далее, решение строится известным для решений класса (18) методом механических квадратур.

Для двух случаев распределения приложенной к берегам трещины нормальной нагрузки: равномерное и линейное, проведены расчеты по двум схемам,

соответствующим представлениям (17) и (18). Результаты представлены на рис.5, где сплошные линии, в обоих случаях, являются слиянием кривых, представляющих функцию  $g(\tau)$ , рассчитанную при  $n=12$  и  $n=22$ , а метками указаны значения  $\rho(\tau_m)/\sqrt{1+\tau_m}$ . При этом треугольные метки соответствуют линейному нагружению и рассчитаны при  $n=20$ , а кружочки и звездочки соответствуют равномерному нагружению и рассчитаны при  $n=20$  и  $n=40$ . Из рисунка, как и расчетов при  $n=120$  и  $n=250$ , можно заметить, что увеличение порядка аппроксимации приводит лишь к уменьшению зоны заметного расхождения решений, но никак не к сближению значений в точке  $\tau = -1$ .

Однако, следует отметить, что при вычислении раскрытия трещины наблюдаемое расхождение в решениях практически не играет никакой роли.

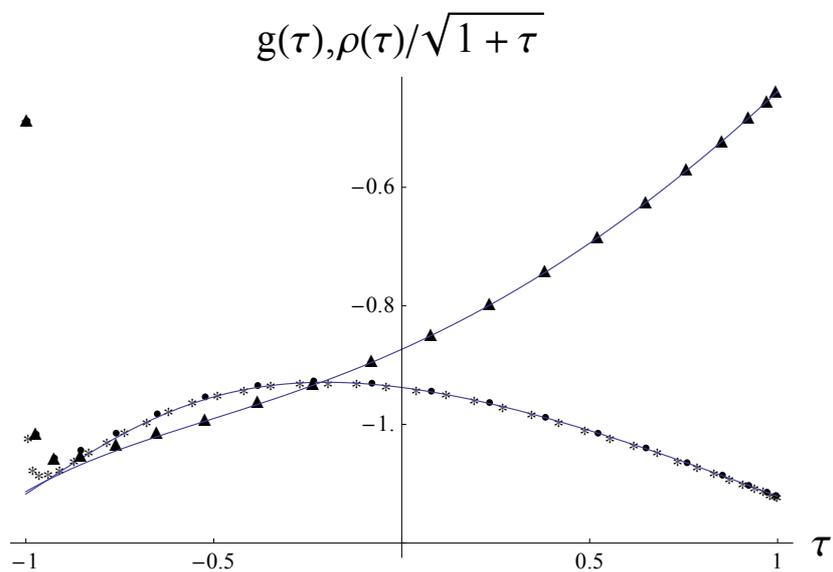


Рис.5

Пользуясь тем, что в литературе имеется точное значение коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины при равномерной нагрузке, составлена таблица 1, при помощи которой можно будет судить о скорости сходимости численных расчетов, выполненных двумя способами.

Таблица 1.

Метод дискретных особенностей		Приближенное решение	
4	<b>1.12181883</b>	10	<b>1.11944373</b>
9	<b>1.12151355</b>	60	<b>1.12145413</b>
12	<b>1.12152149</b>	120	<b>1.12150495</b>
20	<b>1.12152230</b>	320	<b>1.12151980</b>
Точное значение <b>1.12152225</b>			

**В §4.3** решена смешанная задача для упругой однородной полуплоскости, содержащей выходящее на границу тонкое жесткое включение конечной длины, одна сторона которого оторвана от матрицы, образуя тем самым трещину той же длины. Внешней нагрузкой является вытягивающая сила, приложенная к свободному торцу включения.

Задача сводится к решению системы из двух с.и.у. с обобщенными ядрами Коши, содержащих также искомые функции во внеинтегральном слагаемом. Искомыми функциями являются комплексные комбинации скачка напряжений на сторонах включения и скачка производной перемещений берегов трещины. Должны быть выполнены также два условия равновесия включения.

Исследуя поведения искомых функций в концевых точках, найдено, что они имеют одинаковое поведение типа (16), при этом показатель  $\alpha$  определяется формулой

$$\alpha = -0.75 - i \frac{\ln \chi}{4\pi}, \quad \chi = 3 - 4\nu \quad (20)$$

а  $\beta$  является вещественным корнем трансцендентного уравнения.

Как было показано выше, число точек коллокации определяется числом корней функции  $q(\zeta)$  в формуле (1), которая одинакова для обоих с.и.у. Расчеты показали, что при указанных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , эта функция корней не имеет, что является свидетельством неопределенности в этом вопросе.

Действительно, в данном случае, в отличие от предыдущих, имеем  $2n$  неизвестных  $\varphi_1^*(\xi_i), \varphi_2^*(\xi_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и неизвестный угол поворота  $\gamma^*$ , для определения которых имеются два с.и.у. и два условия равновесия, то есть при наличии четного числа уравнений имеем нечетное число неизвестных. Очевидно, что в такой ситуации число точек коллокации для каждого из уравнений не может быть одинаковым и, поэтому, одна и та же для обоих с.и.у. функция  $q(\zeta)$  не могла иметь какое-либо определенное число корней.

При расчетах в качестве точек коллокации были выбраны корни многочленов Чебышева  $T_n(x)$  и  $T_{n-1}(x)$  и, тем самым, установлено соответствие между числом неизвестных и числом уравнений. Независимо от того какому из уравнений придано большее число точек коллокации процесс сходится к одному и тому же результату, но с чуть отличающимися скоростями.

Для различных значений коэффициента Пуассона построены графики распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений, возникающих под включением, а также в табличной форме приведены значения угла поворота включения, максимального раскрытия трещины, коэффициентов концентрации контактных напряжений в концевых точках под включением и коэффициентов концентрации разрушающих напряжений в вершине трещины.

На рис.6 представлены формы трещины после деформирования.

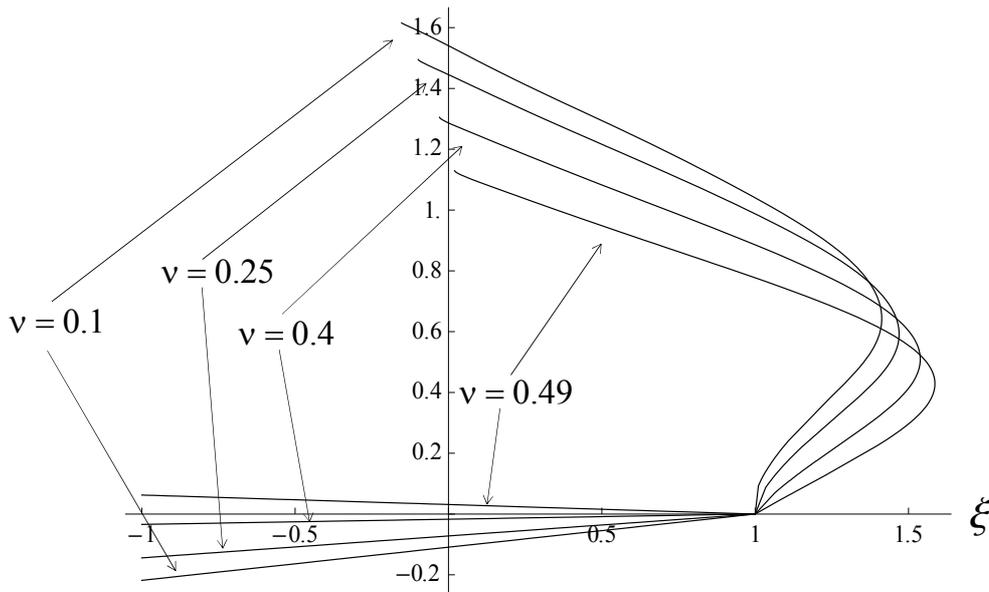


Рис.6

Замечая, что приведенный угол поворота  $\gamma^*$  меняет знак, находим такое значение  $\nu = 0.435569$ , при котором  $\gamma^* = -2.3 \times 10^{-8}$  и жесткое включение испытывает только поступательное перемещение.

Однако изменение направления поворота включения не вносит качественного изменения ни в распределение контактных напряжений под включением, ни на форму раскрытия трещины.

**В §4.4** решена смешанная для упругой однородной плоскости, содержащей вертикальную полубесконечную трещину, вершина которой упирается в середину абсолютно жесткого включения конечной длины, расположенного перпендикулярно к линии трещины. Плоскость деформируется под действием двух одинаковых по величине, но противоположно направленных, горизонтальных сосредоточенных сил, приложенных к берегам трещины на некотором расстоянии от включения.

Ввиду симметрии относительно линии трещины рассматривается лишь правая половина упругой плоскости, на свободной грани которой ниже включения поставлены условия симметрии.

Задача сводится к решению системы из двух с.и.у. с обобщенными ядрами Коши. Искомыми функциями являются скачки нормальных и тангенциальных контактных напряжений на сторонах включения.

Как и в предыдущем случае, найдено, что искомые функции имеют одинаковое поведение типа (16), при этом имеем  $\alpha = -0.5$ , а  $\beta$  является вещественным корнем того же трансцендентного уравнения.

При таких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $q(\zeta)$  в формуле (1) имеет  $n$  корней. Следовательно, после дискретизации системы с.и.у. получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений.

В отличие от предыдущих параграфов настоящей главы, где в качестве точек коллокации выбирались корни многочлена Чебышева первого рода соответствующего порядка, здесь выбраны сами корни функции  $q(x)$ .

Для иллюстрации зависимости решения от порядка интерполяции искомые функции были найдены при значениях  $n = 6, 10, 14$ . Оказалось, что регулярные части нормальных контактных напряжений, рассчитанные при всех указанных значениях порядка аппроксимации, графически практически сливаются, в то время как для регулярной части тангенциальных контактных напряжений такое совпадение наблюдается лишь для графиков, рассчитанных при  $n = 10$  и  $n = 14$ . Численный анализ был проведен при  $n = 10$ .

Исследованы распределения нормальных и тангенциальных напряжений на верхнем и нижнем берегах рассматриваемой части включения при различных значениях коэффициента Пуассона и расстояния точки приложения внешней силы от включения.

Выяснено, что

- величина коэффициента Пуассона практически не влияет на распределение тангенциальных напряжений под включением, в то время как распределение нормальных напряжений на нижнем берегу и оба напряжения на верхнем берегу достаточно сильно реагирует на ее изменение,
- при больших значениях коэффициента Пуассона тангенциальные напряжения над включением меняют знак в средней части зоны контакта,
- расстояние точки приложения внешней силы от включения практически не влияет на распределение нормальных напряжений под включением,
- при уменьшении расстояния между внешней силой и включением тангенциальные напряжения на верхнем берегу включения в средней его части опять-таки меняют знак на противоположный.

Анализ полученных результатов, а также обеспечение выполнимости двух очевидных условий: равенство нулю вертикальной компоненты главного вектора действующих на включение напряжений и обращение в ноль тангенциальных напряжений под включением на линии симметрии, которые диктуются исключительно симметричностью постановки задачи, позволяют утверждать, что метод дискретных особенностей является вполне обоснованным и объективно определенным способом решения сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши.

**В заключении** представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе. Таковыми являются:

- Построены квадратурные формулы для вычисления сингулярных интегралов с ядром Коши на отрезке, когда плотность интеграла можно представить в виде произведения гельдеровской, вплоть до концов отрезка интегрирования, функции и весовой функции ортогональных многочленов Якоби  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  при любых допустимых значениях показателей  $\alpha$  и  $\beta$ .

Построены также квадратурные формулы для вычисления определенного интеграла с переменным верхним пределом и гиперсингулярного интеграла от функций указанного типа.

- На основе полученных квадратурных формул разработан единый подход к решению сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода как с действительным, так и комплексным коэффициентом при свободном члене, названный методом дискретных особенностей.

- Метод дискретных особенностей распространен на сингулярные интегральные уравнения с обобщенным ядром Коши, называемые также уравнениями с неподвижной особенностью. Указан путь его использования и для решения сингулярных интегро-дифференциальных и гиперсингулярных уравнений.

- Указан объективно определенный, единый для всех случаев, подход к вопросу выбора точек коллокации. Оптимальная система точек коллокации, а тем самым и их число, однозначно определяется показателями весовой функции и порядком аппроксимации.

- Эффективность предложенного метода для наиболее сложных из отмеченных выше типов сингулярных уравнений показана как на примере решения двух хорошо известных задач о краевых трещинах и сравнения полученных результатов с известными в литературе, так и решения новых задач.

- Решены задачи о вдавливании равномерно движущихся жесткого штампа с произвольным гладким основанием в упругую полуплоскость и двух жестких круглых дисков в упругую полуплоскость. В первой задаче путем решения системы сингулярных интегральных уравнений первого и второго рода выявлено влияние тепловыделения от трения в контактной зоне на распределение контактных напряжений. Численный анализ показал, что несмотря на малость указанного влияния оно существенно зависит от абсолютного значения длины зоны контакта и скорости движения штампа. Во второй задаче, определяющим уравнением которой является сингулярное интегральное уравнение второго рода с действительным коэффициентом при свободном члене, исследовано изменение длины зоны контакта и ее положение относительно вертикального диаметра круглых дисков в зависимости от скорости движения дисков и толщины упругой полосы.

- Исследован класс плоских задач теории упругости о взаимовлиянии трещины и тонкого жесткого включения как при раздельном их расположении, так и при наложении друг на друга. Определяющими уравнениями рассмотренных задач являются сингулярные интегральные уравнения второго рода с комплексным коэффициентом при свободном члене либо системы таких уравнений. Для каждой задачи проведен детальный численный анализ поведения основных механических характеристик (контактных и разрушающих напряжений, коэффициентов их концентрации в концевых точках трещин и включений, угла поворота абсолютно жестких включений) в зависимости от механических и геометрических параметров поставленной задачи. В частности, в задаче для неоднородной плоскости, составленной из двух полуплоскостей с

одинаковым коэффициентом Пуассона, но разными модулями упругости, соединенных по лучу и содержащих на линии контакта тонкое жесткое включение конечной длины, найдена зависимость между расстояниями включения и отрезка распределения, симметрично приложенной к свободным берегам полуплоскостей, сжимающей нагрузки от вершины трещины, когда независимо от отношения модулей упругости составляющих полуплоскостей жесткое включение не испытывает поворота.

• Решены достаточно сложные задачи о взаимовлиянии трещины и тонкого жесткого включения в случае их выхода на границу. В одном случае имеем упругую полуплоскость, содержащую краевое, перпендикулярно выходящее на границу, тонкое жесткое включение конечной длины, одна сторона которого не связана с полуплоскостью, а к свободному торцу приложена вытягивающая сила. В другом случае рассмотрена упругая плоскость с тонким жестким включением конечной длины, разрезанная по лучу, исходящему из середины включения перпендикулярно к нему. Внешняя нагрузка задана в виде двух нормальных сосредоточенных сил, симметрично приложенных к берегам полубесконечной трещины. Определяющими уравнениями этих задач являются системы сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Численный анализ показал хорошую стабильность результатов счета при увеличении порядка аппроксимации и позволил в виде графиков и таблиц получить достаточно полную картину зависимости основных искомых величин от внешних параметров задачи.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЕ

1. Саакян А.В. Построение функций влияния для упругой полосы от движущихся по ее краям с постоянной скоростью сосредоточенных сил и тепловых источников. ДАН Арм.ССР, 1978, т.67, No2., сс. 78-85
2. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавлении движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения. ПММ, 1982, т.46, вып. 3, сс. 494-501.
3. Саакян А.В., Вдавление равномерно движущегося упругого круглого диска в упругую полуплоскость. В кн. "Механика деформируемых тел и конструкций", Ереван, Изд-во АН Арм.ССР, 1985, сс. 386-391
4. Саакян А.В. О вдавлении пары равномерно движущихся штампов в упругую полосу. §3 Главы 14 книги: С.М.Белоцерковский, И.К.Лифанов «Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях», М.,Наука, 1985.
5. Акопян В.Н., Саакян А.В., Численный анализ смешанной задачи для составной плоскости с тонким жестким включением методом дискретных особенностей. В сб: "Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем", Ереван, Изд-во ЕрГУ, 1997, с. 192-197.
6. Саакян А.В., Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом. Доклады НАН Армении, 1997, т. 97, №4, сс. 32-36.

7. Саакян А.В., Квадратурные формулы типа Гаусса для вычисления определенных интегралов с весовой функцией. Сб. науч. трудов “Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела”, Ереван, 1999, с. 117-119.
8. Акопян В.Н., Саакян А.В. Об одной смешанной задаче для упругого клина, ослабленного трещиной. Известия РАН, Механика твердого тела, 1999, № 6, сс. 66-78.
9. Акопян В.Н., Саакян А.В. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин. Известия РАН, Механика твердого тела, 1999, №3, сс. 106-113.
10. Саакян А.В., Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Известия НАН Армении, Механика, 2000, т.53, №3, сс.12-19.
11. Саакян А.В., Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов. Сб. науч. трудов “Проблемы механики тонких деформируемых тел”, посвященный 80-летию акад. С.А.Амбарцумяна. Ереван, 2002, с. 259-265.
12. Sahakyan A.V., Dashtoyan L.L., On One Problem for Compound Plane with Crack and Inclusion with the Existence of Temperature Field. Proceedings of the 5th International Congress on Thermal Stresses and Related Topics, TS2003, 8-11 June 2003, Blacksburg, VA, pp. TM-4-1-1 - TM-4-1-4
13. Sahakyan A.V., The method of discrete singularities of solutions of singular integral equations with unmoved singularity. Topics in Analysis and its Applications. NATO Science Series, II. Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 147, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2004, 327-332.
14. Акопян В.Н., Саакян А.В., Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение. Известия РАН, Механика твердого тела, 2002, №6, сс. 76-82.
15. Sahakyan A.V., The Mixed Boundary Value Problem For Elastic Wedge With Thin Rigid Inclusion One Side Of Which Is Separated From The Matrix. Collection of papers, dedicated to the memory of Professor P.S.Theocaris, Yerevan, „Gitutyun”“, NAS RA, 2005, pp.231-239.
16. Саакян А.В., Акопян В.Н., О напряженном состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на жесткое включение конечной длины. Сборник научных трудов «Проблемы механики деформируемого твердого тела», посвященный 85-летию академика НАН РА С.А.Амбарцумяна, Ереван, 2007, сс.16-25
17. Саакян А.В., Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Труды VI-ой международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», Горис, 21-26 сентября 2008, с. 383-387.
18. Sahakyan A.V., The influence of friction heat generation on the contact stress distribution between uniformly moving punch and elastic half-plane. Proceedings of the 8th International Congress on Thermal Stresses, TS2009 1–4 June, University of Illinois at Urbana-Champaign, pp. 117-120

19. Саакян А.В., Метод дискретных особенностей в применении к решению задач для областей с краевыми трещинами. Материалы XIV Международной конференции "Современные проблемы механики сплошной среды", посвященной 90-летию со дня рождения академика РАН И.И.Воровича. Ростов-на-Дону - Азов, 19-24 июня 2010 г., сс. 290-294.
20. Саакян А.В., Квадратурные формулы для вычисления интеграла с переменным верхним пределом. Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, сс. 107-111.

## ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունը նվիրված է Յակոբիի բազմանդամների ընդհանուր տեսքի կշռային ֆունկցիայի և Հյուդերի դասի ֆունկցիայի արտադրյալի տեսքով խտություն ունեցող Կոշու տիպի ինտեգրալների հաշվման համար քառակուսացման բանաձևերի ստացմանը, դրանց հիման վրա առաջին և երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման միասնական թվային վերլուծական եղանակի մշակմանն ու զարգացմանը և դրա օգնությամբ առաձգական մարմիններում լարումների երկու տիպի կենտրոնացուցիչների փոխազդեցության հարցերի ուսումնասիրությանը:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից:

**Ներածության** մեջ հիմնավորված է ատենախոսության թեմայի արդիականությունը:

Բերված է համառոտ ակնարկ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մոտավոր լուծման եղանակների և հոծ միջավայրի մեխանիկայի խնդիրներում նրանց կիրառությունների վերաբերյալ: Կարճ շարադրված է ատենախոսության բովանդակությունը, նշված է աշխատանքում ստացված արդյունքների գիտական նորույթը:

**Առաջին գլխում** կառուցվել են քառակուսացման բանաձևեր Յակոբիի բազմանդամների ընդհանուր տեսքի կշռային ֆունկցիա պարունակող խտությամբ Կոշու տիպի ինտեգրալների, ինչպես նաև հիպերսինգուլյար և փոփոխական վերին սահմանով որոշյալ ինտեգրալի հաշվման համար: Մշակվել է իրական և կոմպլեքս գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման միասնական եղանակ: Շարադրվել է նույն եղանակով սինգուլյար ինտեգրողիֆֆերենցիալ հավասարումների լուծման ալգորիթմը:

**Երկրորդ գլխում** ուսումնասիրված են առաձգական կիսահարթության և շերտի եզրերով հավասարաչափ շարժվող դրոշմերի վերաբերյալ երկու կոնտակտային խնդիրներ, որոնց որոշիչ հավասարումները իրական գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներ են:

Առաջին խնդրում հաշվի է առնվում կոնտակտի տեղամասում շփումից առաջացած ջերմության ազդեցությունը կոնտակտային լարումների բաշխման վրա, ինչի պատճառով խնդիրը բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որոնցից մեկը երկրորդ սեռի է, իսկ մյուսը՝ առաջին սեռի: Դիսկրետ եզակիությունների մեթոդով կատարվել է մանրամասն թվային վերլուծություն և պարզվել է, որ ջերմության ազդեցությունը կոնտակտային լարումների բաշխման վրա էապես կախված

է ինչպէս դրոշմի շարժման արագությունից, այնպէս էլ կոնտակտի տեղամասի երկարությունից:

Երկրորդ խնդիրը առաձգական շերտի եզրերով հավասարաչափ շարժվող բացարձակ կոշտ կլոր սկավառակների վերաբերյալ է և բերվում է նշված տիպի մէկ հավասարման լուծմանը: Հետագոտված է կոնտակտային լարումների բաշխման, կոնտակտի տեղամասի չափերի և շարժական կոորդինատային համակարգի կենտրոնի նկատմամբ նրա դիրքի փոփոխությունը՝ կախված շերտի հաստությունից ու շարժման արագությունից:

**Երրորդ գլխում** ուսումնասիրվում են առաձգականության տեսության չորս խառը եզրային խնդիրներ, որոնք բերվում են կոմպլեքս գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների կամ նրանց համակարգերի լուծմանը: Առաջին երկու խնդիրներում լուծումների եզակիությունների ցուցիչների կոմպլեքս լինելը պայմանավորված է նրանով, որ ճաքը և ներդրակը զբաղեցնում են նույն վերջավոր հատվածը մարմնի, տվյալ դեպքում առաձգական սեպի, ներսում, մյուս երկու խնդիրներում նրանով, որ ճաքը և ներդրակը չհատվելով գտնվում են տարասեռ կիսահարթությունների միացման գծի վրա:

Դիսկրետ եզակիությունների մեթոդով կատարվել է բոլոր խնդիրների որոշիչ հավասարումների թվային վերլուծություն, որի հիման վրա գրաֆիկների ու աղյուսակների տեսքով բերված են կոնտակտային լարումների բաշխման, լարումների կենտրոնացման գործակիցների և կոշտ ներդրակի հնարավոր պտույտի անկյան փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված առաձգական սեպի բացվածքից, սեպի զագաթի և ճաք-ներդրակի միջև եղած հեռավորությունից, բաղկացուցիչ կիսահարթությունների առաձգական մոդուլների և գծային ընդարձակման ջերմային գործակիցների հարաբերություններից, ճաքի և ներդրակի միջև եղած հեռավորությունից, իսկ վերջին խնդրում նաև կիսաանվերջ ճաքի ափերին արտաքին բեռի ազդման հատվածի դիրքից ճաքի զագաթի նկատմամբ:

**Չորրորդ գլխում** համախմբված են առաձգականության տեսության նույնպէս չորս խառը եզրային խնդիրներ, որոնք բերվում են Կոշու ընդհանրացված կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների կամ դրանց համակարգերի լուծմանը: Առաջին երկու պարագրաֆներում կատարվել են ստացված արդյունքների համեմատական վերլուծություն: Այն է՝ այստեղ առաջարկվող եղանակով լուծվել են երկու հայտնի խնդիրներ և արդյունքները համեմատվել են գրականությունից հայտնի մոտավոր լուծումներից երկուսի հետ: Թվային վերլուծության միջոցով ցույց է տրված դիսկրետ եզակիությունների մեթոդի արդյունավետությունը և ի

հայտ են բերված համեմատության համար ընտրված հայտնի մոտավոր լուծումների թերությունները:

Երրորդ պարագրաֆում լուծված է նոր խնդիր առաձգական կիսահարթության համար, որը պարունակում է եզրին ուղղահայաց և եզր դուրս եկող վերջավոր երկարության կոշտ ներդրակ, որը միայն մեկ կողմով է կպած կիսահարթությանը: Հետագոտված է կոնտակտային նորմալ և շոշափող լարումների բաշխման, կոնտակտային լարումների ու ներդրակի ներքին ծայրի մոտակայքում քայքայող լարումների կենտրոնացման գործակիցների, կոշտ ներդրակի պտտման անկյան և ներդրակի ազատ կողմի ու կիսահարթության միջև առաջացած ճաքի բացվացքի կախվածությունը կիսահարթության նյութի Պուասոնի գործակցից:

Չորրորդ պարագրաֆում լուծված է նույնպես նոր խնդիր առաձգական հարթության համար, որը պարունակում է կիսաանվերջ ճաք, ընդ որում ճաքը դուրս է գալիս իր նկատմամբ ուղղահայաց դասավորված վերջավոր երկարության կոշտ ներդրակի կենտրոնի վրա: Ենթադրվում է, որ ճաքի ափերին ներդրակից որոշակի հեռավորության վրա ազդում են համաչափ դասավորված կենտրոնացած ուժեր: Խնդրի համաչափությունից ելնելով գրաֆիկորեն բերված են ներդրակի մի կեսի վերին և ներքին ափերին ազդող կոնտակտային նորմալ և շոշափող լարումների բաշխումները հարթության նյութի Պուասոնի գործակցի և արտաքին կենտրոնացած ուժի կիրառման կետի հեռավորության տարբեր արժեքների դեպքում, որոշված են ներդրակի մեջտեղում առաջացող ձգող ճիգը և ծող մոմենտը:

Ատենախոսությունում ստացված հիմնական արդյունքներն են՝

- Կառուցված են քառակուսացման բանաձևեր Յակոբիի բազմանդամների  $(1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta}$  կշռային ֆունկցիայի և Հյուդերի դասի ֆունկցիայի արտադրյալի տեսքով խտություն ունեցող Կոշու տիպի ինտեգրալների հաշվման համար: Կառուցված են նաև քառակուսացման բանաձևեր նշված տիպի խտությամբ փոփոխական վերին սահմանով որոշյալ ինտեգրալի և հիպերսինգուլյար ինտեգրալի հաշվման համար:

- Ստացված բանաձևերի հիման վրա մշակված է միասնական թվային վերլուծական եղանակ առաջին և ինչպես իրական, այնպես էլ կոմպլեքս գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար: Եղանակը անվանվել է դիսկրետ եզակիությունների մեթոդ:

- Դիսկրետ եզակիությունների մեթոդը կիրառվել է Կոշու ընդահնրացված կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների լուծման համար: Ցույց է տրվել սինգուլյար ինտեգրողիֆերենցիալ և

հիպերսինգուլյար հավասարումների լուծման համար մեթոդի կիրառման ուղին:

- Ձևակերպված է օբյեկտիվորեն որոշված և բոլոր դեպքերի համար միատեսակ մոտեցում մոտարկման (ինտերպոլյացիոն) հանգույցների և համընկման (կոլլոկացիայի) կետերի ընտրության հարցում: Նշված կետերի օպտիմալ համակարգերը միարժեքորեն որոշվում են կշռային ֆունկցիայի ցուցիչներով և մոտարկման կարգով:

- Լուծված են կոնտակտային խնդիրներ առաձգական կիսահարթության և շերտի եզրերով հավասարաչափ շարժվող դրոշմի և կոշտ կլոր սկավառակների վերաբերյալ: Առաջին խնդրում առաջին և երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներից կազմված համակարգի լուծման արդյունքում ուսումնասիրված է կոնտակտային գոտում շփումից առաջացած ջերմության ազդեցությունը կոնտակտային լարումների բաշխման վրա: Մանրամասն թվային վերլուծությունը ցույց տվեց, որ նշված ազդեցությունը՝ լինելով ոչ մեծ, ի հայտ է գալիս որոշակի արագությունների դեպքում՝ կախված կոնտակտային գոտու երկարությունից: Երկրորդ խնդրում հետազոտվել է կոնտակտային գոտու չափերի և կլոր սկավառակի ուղղահայած տրամագծի նկատմամբ նրա դիրքի կախվածությունը շարժման արագությունից և շերտի հաստությունից:

- Հետազոտված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրների դաս ճաքի և բարակ կոշտ ներդրակի փոխազդեցության վերաբերյալ, երբ նրանք կամ վերադրվում են ու զբաղեցնում նույն հատվածը, կամ տարանջատված են և գտնվում բաղադրյալ հարթության մեջ՝ նյութերի բաժանման գծի վրա: Դիտարկված խնդիրների որոշիչ հավասարումները հանդիսանում են կոմպլեքս գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումներ կամ նրանցից կազմված համակարգեր: Բոլոր խնդիրների համար կատարված է մանրակրկիտ թվային վերլուծություն լարումների կենտրոնացուցիչների շրջակայքում հիմնական մեխանիկական բնութագրիչների վարքի կախվածությունը դրված խնդրի մեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից պարզելու նպատակով: Մասնավորապես, Պուասոնի նույն գործակիցը, բայց տարբեր սահքի մոդուլներ ունեցող կիսահարթություններից կազմված և նրանց միացման գծի վրա կիսանվերջ ճաք ու վերջավոր երկարության բարակ կոշտ ներդրակ պարունակող բաղադրյալ հարթության համար խնդրի լուծումից պարզվել է, որ գոյություն ունի ճաքի եզրերին վերջավոր հատվածով հավասարաչափ բաշխված բեռի կիրառման այնպիսի դիրք, երբ կոշտ ներդրակը պտույտ չի ունենում անկախ նյութերի Պուասոնի գործակցի արժեքից և սահքի մոդուլների հարաբերությունից:

- Լուծված են նոր, բավականին բարդ խնդիրներ ճաքի և բարակ կոշտ ներդրակի փոխազդեցության վերաբերյալ այն դեպքում, երբ նրանք դուրս են գալիս եզր: Մի դեպքում դիտարկված է առաձգական կիսահարթություն, որը պարունակում է եզրին ուղղահայաց և եզր դուրս եկող վերջավոր երկարության բարակ կոշտ ներդրակ, որի մի կողմը կապված չէ կիսահարթության հետ, իսկ ազատ ծայրին ազդում է առանցքային քաշող ուժը: Մյուս դեպքում դիտարկված է վերջավոր երկարության բարակ կոշտ ներդրակ պարունակող առաձգական հարթություն, որը կտրված է ներդրակի մեջտեղից սկիզբ առնող և նրան ուղղահայաց ճառագայթով ու բեռնավորված է առաջացած կիսաանվերջ ճաքի ափերին համաչափ կիրառված կենտրոնացած նորմալ ուժերով: Դիտարկված խնդիրները բերվում են անշարժ եզակիությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Թվային վերլուծության արդյունքում կառուցված են կորեր և բերված են աղյուսակներ, որոնք թույլ են տալիս բավականին լավ պատկերացում կազմել հիմնական փնտրվող մեծությունների վրա դրված խնդիրների մուտքային պարամետրերի ազդեցության մասին:

## ABSTRACT

The dissertation is devoted to the development of a uniform approach to solving a singular integral equations of the various kind, i.e. first kind, second kind with real or complex coefficients, as well equations with generalized Cauchy kernel. This approach is based on application of quadrature formulas obtained for the Cauchy type integral with density function in the form of product of Hölder function and Jacobi weight function with arbitrary parameters  $\text{Re}[\alpha, \beta] > -1$ . On the base of developed approach named “method of discrete singularities” the interaction of two type of stress concentrators in solids is investigated.

Dissertation consists of introduction, four chapters, conclusion and references.

In **introduction** the topicality of dissertation theme is substantiated.

A brief survey of publications on methods of approximate solution of singular integral equation and their applications in solid mechanics is presented. The content of dissertation is briefly stated, the scientific novelty of obtained results is stressed.

In the **Chapter I** the quadrature formulas for Cauchy type integrals with density containing Jacobi weight are constructed. The algorithms of solution of second kind singular integral equations with real, as well complex coefficients are developed. Some quadrature formulas needed for solution a singular integro-differential equations are also constructed.

In the **Chapter II** two problems which are reduced to solution of the second kind singular integral equations with real coefficients are solved.

The first one is a contact problem on indentation of uniformly moving punch in an elastic half-plane. It is assumed that between a sliding punch and elastic half-plane the friction takes place. As a result, the friction heat is generated, which is spread both into the elastic half-plane and the rigid punch. The problem under consideration leads to the solution of the set of singular integral equations, one of which is an equation of the first kind and the other one is an equation of the second kind. Using the method of discrete singularities the detailed numerical analysis of the governing equations is carried out. The influence of the friction heat generation on the distribution of contact stresses between a punch and half-plane is revealed.

The second problem is also a contact problem, but here an indentation of uniformly moving pair of rigid round discs in an elastic strip is considered. The governing equation of this problem is the equation of the type mentioned above. The influence of the strip thickness and moving velocity on the distribution of contact stresses, the length of contact zone and this location relative to the vertical diameter of the disc is investigated.

In the **Chapter III** the four problems which are reduced to solving of the second kind singular integral equations with complex coefficients are solved.

In two first problems considered for elastic wedge the occurrence of a complex coefficients in governing equations is caused by a imposing of a crack and thin rigid inclusion in the same interval of a bisector of wedge angle. In two last ones this fact is caused by separately location of a crack and thin rigid inclusion on the interface in two bounded half-planes. The detailed numerical analysis of the governing equations of all problems is lead by the method of discrete singularities. The curves of contact

stresses distribution, as well the stress intensity factors and angle of possible rotation of rigid inclusion in dependence of entering parameters of problems are shown in the graphs and tables.

In the **Chapter IV** also four problems are solved, but these are already reduced to solution of the singular integral equation with generalized Cauchy kernel or system of such equations.

The first two problems have a comparative character. These ones are well-known problems solved early by other authors on the base of approximate methods. Here these problems are resolved by the method of discrete singularities and the obtained results have been compared with existing ones. The method of discrete singularities already at small numbers of approximation yields stable results while the known approached solutions cannot provide the convergence in the vicinity of the end-point with fixed singularity.

The third problem is a new one for an elastic half-plane with rigid thin inclusion of the finite length. The inclusion perpendicularly terminates at boundary of half-plane and couples with half-plane by one side only. Therefore a crack on other side of inclusion is arisen. To the outer end of inclusion the axial stretching force is applied. The distribution of contact stresses, as well the values of coefficients of stress concentration, angle of possible rotation of rigid inclusion and crack opening subject to Poisson's ratio of half-plane material are investigated and presented in the graphs and tables.

The fourth problem is also new one. The stress strain state of elastic plane with semi-infinite crack which terminates at the middle of rigid thin inclusion located perpendicularly to the crack. It is assumed that on the crack faces the two symmetric located point forces are acted. The normal and tangential contact stresses on the both sides of inclusion subject to both Poisson's ratio of plane material and point force distance from inclusion are presented in the graphs.

The major results obtained in dissertation are:

- the quadrature formulas for Cauchy type integrals which density is a product of Hölder function and Jacobi weight  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ , as well for the integral with variable upper limit of integration and hypersingular integral are constructed.
- On the base of obtained formulas the uniform approach to solving a singular integral equations of the various kind, i.e. first kind, second kind with real or complex coefficients. The approach is called "method of discrete singularities".
- The method of discrete singularities is applied to equations with generalized Cauchy kernel. The way to use the same method for solution of singular integro-differential equations, as well hypersingular equations is shown.
- For all types of equations the objectively defined approach to a question of choice of a nodes and collocation points is pointed. The systems of mentioned points are uniquely defined by Jacobi weight function and approximation order.
- The contact problems for an elastic half-plane and elastic strip over boundaries of which a rigid punch and a round discs correspondingly are moved with constant velocity are considered. From the solution of governing equations of the first

problem, which are a singular integral equations of the first and the second kind, the influence of the friction heat in contact zone on the contact stresses is discussed. The results of the detailed numerical analysis show that the influence becomes apparent at definite spectrum of velocities in dependence of the length of contact zone. In the second problem the dependence of the contact zone length and its location relative to vertical diameter of disc from motion velocity and thickness of elastic strip is studied.

- The class of plane problems of elasticity theory about interaction of two types of stress concentrators, i.e. a crack and a rigid thin inclusion, is solved. The governing equations of these problems are singular integral equations of the second kind with complex coefficients. The detailed numerical analysis of the governing equations of all problems is lead by the method of discrete singularities. Particularly, in the problem for two bounded half-plane with a semi-infinite crack and a thin rigid inclusion of finite length on the interface it is shown that at the definite distance between a inclusion and a segment of crack side where the external load is acting the angle of inclusion rotation equal zero independently of Poisson's ratio and ratio of shear modules of materials.
- The new problems relative to an interaction of two types of stress concentrators, i.e. a crack and a rigid thin inclusion, which terminates at boundary is solved. The governing equations of these problems are already singular integral equations with generalized Cauchy kernel. The detailed numerical analysis of the governing equations of all problems is lead by the method of discrete singularities. As a result the dependence of required values from external parameters is presented in a form of the graphs and tables.