

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՄՏԵՓԱՆՅԱՆ ՄԵՅՐԱՆ ՊԱՎԵԼԻ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ՏԱՐՐԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ  
ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ ԴՐՎԱԾՔԻ  
ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա.02.04- «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ  
տեխնիկական գիտությունների դոկտորի  
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2018

---

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

СТЕПАНЯН СЕЙРАН ПАВЛОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ  
ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ  
ЗАДАЧ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой  
степени доктора технических наук  
по специальности 01.02.04 - "Механика деформируемого твердого тела"

ЕРЕВАН - 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական խորհրդատու՝

տեխ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ՀՀ ԳԱԱ Ակադեմիկոս, ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր,  
պրոֆեսոր Գ.Ե. Բաղդասարյան  
տեխ.գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Մ.Ջ. Պողոսյան  
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Ս.Վ. Սարգսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

Հայաստանի ազգային  
պոլիտեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. մարտի 16 –ին, ժ. 14<sup>00</sup>–ին

Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի-047 մասնագիտական խորհրդում

(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղդասարյան պող. 24բ, avсах@mechins.sci.am)

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2018 թ. փետրվարի 14 -ին

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,  
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր



Ս.Վ. Սահակյան

---

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный консультант

доктор технических. наук, профессор  
Р.М.Киракосян

Официальные оппоненты

Академик НАН Армении, доктор физ.-мат. наук,  
профессор Г.Е. Багдасарян  
доктор тех.наук, профессор  
М.З. Погосян  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
С.В. Саркисян

Ведущая организация:

Национальный политехнический  
университет Армении

Защита состоится 16 марта 2018г., в 14<sup>00</sup> часов на заседании специализированного совета  
Механика-047 в Институте механики НАН РА.

Адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б, avсах@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 14 февраля 2018г.

Ученый секретарь специализированного совета,  
доктор физ.-мат. наук



А.В.Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** На современном этапе развития строительства, судостроения, самолетостроения, ракетостроения, а также ядерно энергетических сооружений и др. применяемые конструктивные элементы имеют форму балок, пластин или оболочек. В зависимости от природных или ряда других условий, в которых находится рассматриваемый элемент конструкции, важное значение имеет его структура создания и полная информация о несущих способностях. Имея в виду настоящий этап развития материаловедения, можно сказать, что, в основном, эти элементы анизотропны. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС), деформации, прочности а также устойчивости таких конструктивных элементов, применяют разные методы исследования.

Отметим, что уравнения теории упругости позволяют исследовать НДС балок, пластин и оболочек, однако в рамках трехмерной теории упругости решение этих задач именно для конструктивных элементов из анизотропных материалов наталкивается на большие трудности. Такие исследования в пространственной постановке являются одной из сложных задач математической физики. Это означает, что построение эффективной для приложений общей теории анизотропных пластин и оболочек в рамках трехмерной теории упругости весьма сложно. Поэтому, в зависимости от физико-механических, геометрических параметров или от условий загрузки и других факторов, в основном принимают различные упрощающие предположения, с помощью которых поставленная трехмерная задача приводится к более простой задаче.

Приведение задач теории упругости к двумерным задачам для тонкостенных элементов типа балок, пластин и оболочек осуществляется разными путями. В обзорной работе И.И. Воровича освещены основные результаты по этой теме. Для исследования НДС тонкостенных тел, в основном, используются следующие методы: метод гипотез, метод разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций, вариационный и асимптотические методы.

При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной для пластин и оболочек по методу разложение решений уравнений теории упругости обычно используются полиномы Лежандра, поскольку они образуют полную систему в пространстве  $L_2[-1,1]$ . Однако, применение метода разложений по некоторой полной системе функций позволяет построить теорию пластин и оболочек в различных приближениях. В связи с этим возникает вопрос дополнительного предположения, о том, сколько членов в разложениях нужно удерживать.

Для построения теории пластин и оболочек Н.А. Кильчевский применял метод разложения основных величин по поперечной координате, а И.Н. Векуа, при разложении использовал полиномы Лежандра по поперечной координате. Можно заметить, что предложенные методы, для построения теории пластин и оболочек, по своей сути являются асимптотическими. Для решения трехмерных уравнений теории упругости пластин и оболочек, асимптотический метод применяли А.Л. Гольденвейзер, А.Е. Грин, И.И. Ворович, К.О. Фридрихс и др.

Сущность асимптотического метода подробно представлена в монографиях А.Л. Гольденвейзера и Л.А. Агаловяна.

В области трудов применения вариационных методов в линейной теории пластин и оболочек можно отметить монографию Л.С. Лейбензона. Обобщению вариационного принципа Кастильяно на нелинейную теорию равновесия пластин и оболочек посвящены работы Алумэя Н.А. и Галимова К.З.. В теории изотропных оболочек известные вариационные формулы обобщены Н.К. Галимовым на нелинейную теорию трехслойных оболочек.

Подход, в основе которого лежит применение разных гипотез, своего широкого применения нашел в теориях изгиба балок, пластин и оболочек.

Классическая теория пластин и оболочек была построена на основе известной гипотезы о недеформируемых нормалях Кирхгофа-Лява.

Созданию классической линейной теории и ее применению для изотропных пластин и оболочек посвящены многочисленные работы. Из них следует отметить монографии В.З. Власова, А.Л. Гольденвейзера, В.В. Новожилова, С.П. Тимошенко, А.П. Филина, В.Флюгге, К.Ф. Черных и др.

Нелинейная теория пластин и оболочек была построена Э.И. Григолоком, Х.М. Муштари и К.З. Галимовым, М.С. Корнишиным и др.

Книга С.Г. Лехницкого, опубликованная в 1957 г., посвящена классической теории анизотропных пластин. В ней в систематическом виде представлена теория упругости анизотропного тела. Работы Э.Г. Григолока, В.В. Болотина, Я.М. Григоренко и др. посвящены построению теории слоистых пластин и оболочек. Работа Василенко А.Т., Голуба Г.П., Григоренко Я. М. посвящена определению НДС многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке. В монографии Григоренко Я.М., Василенко А.Т. рассматриваются теория и методы решения задач статики оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами при силовых и температурных воздействиях. Излагаются основные положения и уравнения теории изотропных и слоистых анизотропных оболочек переменной жесткости.

Классическая теория анизотропных слоистых оболочек построена С.А. Амбарцумяном. Многочисленные результаты, полученные в области изучения анизотропных тел, обобщены и систематизированы со стороны ведущих армянских ученых - Багдасаряна Г.Е., Агаловяна Л.А., Гнуни В.Ц., Саркисяна В.С., Мовсисяна Л.А., Дургарьяна С.М., Саркисяна С.О., Белубекяна М.В., Киракосяна Р.М. и других.

Большой интерес исследователей к построению новых уточненных теорий пластин и оболочек вызван тем, что результаты, полученные по известным теориям, не всегда приемлемы при рассмотрении важных прикладных задач, связанных со специфическими особенностями механических свойств новых анизотропных материалов.

Большое распространение получила теория изгиба Рейснера Е, в которой уточнение производится путем введения функции поперечного сдвига.

Широкое распространение получила уточненная теория анизотропных пластин С.А Амбарцумяна, построенная на основе гипотез.

В научной литературе можно найти многочисленные работы, посвященные изгибу, колебаниям и устойчивости балок, пластин, стержней и оболочек.

Основной вклад в развитие теории пластин и оболочек внесли известные ученые Тимошенко С.П., В.З. Власов, А.Л. Гольденвейзер, А.И. Лурье, В.В. Новожилов, А.С. Вольмир, С.А. Амбарцумян, а также Г.Е. Багдасарян, Л.А. Агаловян, В. Флюгге, В.С. Саркисян, С.О. Саркисян и другие.

Асимптотическая теория изотропных пластин и оболочек построена А.Л. Гольденвейзером, а для анизотропных пластин и оболочек - Л.А. Агаловяном. Им и его учениками Р.С. Геворкяном, А.М. Хачатряном, Гулгазарян Л.Г. решено огромное количество прикладных задач по статике и вынужденным колебаниям пластин и оболочек. Полученные результаты по статике пластин и оболочек обобщены в монографиях Л.А. Агаловяна, Л.А. Агаловяна и Р.С. Геворкяна.

Многочисленные работы посвящены исследованию динамических процессов в средах взаимодействующих с различными физическими полями. В этом направлении большой вклад внесли ученые Армении, в частности, Г.Е. Багдасарян, В.Ц. Гнуни, М.В. Белубекян, А.С. Аветисян, З.Н. Даноян, К.Б. Казарян, С.В. Саркисян, Д.Д. Асаян, С.А. Джилаван и др.

Метод физических и геометрических малых параметров, приводящих к регулярно возмущенным уравнениям развит, В.С. Саркисяном.

В работах С.О. Саркисяна, на основе несимметричной теории упругости, разработана асимптотическая теория пластин и оболочек. Им же асимптотическим методом построена двумерная теория магнитоупругости электропроводящих тонких тел.

В работе Киракосяна Р.М. построена уточненная теория ортотропных пластин переменной толщины, в которой поперечные касательные напряжения представляются в виде квадратного многочлена по поперечной координате. На основе этой теории решены многочисленные прикладные задачи для ортотропных пластин по изгибу, колебаниям и устойчивости.

Настоящий этап развития теории пластин и оболочек, а также внедрение новых материалов явились основой для создания различных методов решения проблем оптимального проектирования.

Обеспечение равновесия устойчивости, и несущей способности тонкостенных элементов является одной из важнейших задач, решаемых при проектировании летательных аппаратов, конструкций различных машин и несущих инженерных сооружений. При расчёте таких систем возникают вопросы об их прочности и устойчивости. Большой интерес представляет исследование зависимости критических нагрузок и форм потери устойчивости от различных параметров, характеризующих геометрию пластины, либо оболочки и свойства материала тонкостенной конструкции. Такие задачи исследования устойчивости упругих тел сводятся к решению краевых задач на собственные значения. Следовательно, разработка приближенных методов решения краевых задач теории пластин и оболочек, которые при реализации довольно просты и универсальны, важна и актуальна.

Прогресс техники привел к широкому применению разнообразных тонкостенных конструкций, находящихся не только под воздействием механических нагрузок, но и под воздействием температурного поля.

Число работ, в которых выполнены расчеты на прочность и устойчивость гладких тонкостенных конструкций и конструкций переменной толщины, находящихся в температурном поле и с учетом поперечных сдвигов сравнительно мало.

В настоящее время широкое применение получили методы Ритца, Бубнова-Галеркина, конечных разностей, конечных и граничных элементов и другие. Однако помимо этих методов свое применение получил метод коллокаций. Академик Л.В. Канторович в 1934 году впервые изложил сущность и методику применения

коллокационного метода для решения краевых задач математической физики. В дальнейшем М.С. Корнишин, В.В. Рогалевич, Г. Гомез и Л. Лоренцис и другие в своих работах показали, что при решении различных задач теории пластин и оболочек весьма эффективно применять метод коллокации. Детальный обзор развития этого метода, а также анализ математического и прикладного характера можно найти в монографии Рогалевича В.В., опубликованного в 2001г.

Во время сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям, при построении исходных геометрических соотношений теории пластин и оболочек, целесообразно учесть деформации поперечного сдвига по толщине пластинок и оболочек, что позволяет построить некий вариант уточненной технической теории.

При исследовании НДС стержневых систем, очень важно точное математическое моделирование краевых условий рассматриваемых задач. Обширное применение упруго-зашемлённых опор в строительных сооружениях привело к практической необходимости их исследования.

Вопросам упруго-зашемлённых опор тонкостенных элементов конструкций и их применениям посвящены работы Биргера И.А. и Пановко Я.Г., Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Гнуни В.Ц., Геворгяна Г.З. а также работы Киракосяна Р.М., в которых чётко указывается конструкция опор, с помощью которой и определяются их условия.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению изгиба и устойчивости ортотропных тонкостенных элементов (балок, стержней, пластин и оболочек) при неклассической постановке. На основе полученных уравнений неклассической постановки исследован ряд практически и теоретически важных задач. Решены оптимизационные задачи для балок и круглых пластин переменной толщины как при учете так и при пренебрежении поперечного сдвига и собственного веса.

***Целью диссертационной работы является:***

- получение выражений поправочных коэффициентов, учитывающих влияние поперечных касательных напряжений цилиндрически ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок, и составление разрешающих уравнений и краевых условия задачи изгиба.

- исследование осесимметричной задачи изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок с применением сдвиговой теории первого порядка.

- исследование НДС круглой ортотропной пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных слоев, при учете поперечного сдвига.

- исследование оптимизации равнопрочных балок и круглых пластин переменной толщины с минимальным объемом при учете касательного напряжения.

- исследование устойчивости ортотропных оболочек и колонн переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса.

- исследование изгиба и устойчивости стержней переменной толщины и изгиба частично нагруженной круглой ортотропной пластинки.

- разработка метода исследования НДС для пластинки-полосы при наличии упруго зашемленной опоры.

-исследование НДС ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины находящийся в температурном поле и с учетом поперечного сдвига.

**Научная новизна.** На основе уравнений равновесия дифференциального элемента сплошной среды получены основные уравнения и сформулированы краевые условия задачи изгиба цилиндрически ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. Получены выражения поправочных коэффициентов, учитывающих влияние поперечных сдвигов.

- Получены аналитически замкнутые выражения прогиба и изгибающих моментов пластинки, когда на лицевые поверхности пластинки действуют только радиально направленные касательные силы постоянной интенсивности.
- Исследована задача изгиба двухслойной ортотропной круглой пластинки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки с учетом поперечного сдвига.
- Решена задача определения толщины равнопрочной ортотропной балки минимального объема при учете касательного напряжения. Показано, что существует однопараметрическое бесконечное семейство равнопрочных балок, которые отличаются друг от друга лишь в участке доминирующего изгиба. В участке же доминирующего среза они совпадают и имеют постоянную толщину. В качестве оптимальной выбрана та равнопрочная балка, объем которой минимален.
- Решена задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объема. Задача исследована как при учете так и при пренебрежении собственного веса и влияния поперечного сдвига. В качестве критерия оптимальности принято условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки.
- Исследована устойчивость ортотропной оболочки и колонны переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса.
- Решена неклассическая задача изгиба ортотропной балки прямоугольного поперечного сечения переменной толщины при действии равномерно распределенной нагрузки, когда ее один конец упруго-зашемлен.
- Решена неклассическая задача упруго-зашемленной ортотропной балки переменной толщины при совместном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки, когда учитывается уменьшение сжимающей силы опорой вследствие трения.
- Исследована задача изгиба упруго-зашемленной по краю частично нагруженной ортотропной круглой пластинки при учете поперечного сдвига и обжатия.
- Решен ряд задач статической устойчивости сжатого стержня при наличии упруго-зашемленной опоры.
- Исследована задача изгиба упруго-зашемленной пластинки полосы переменной толщины.
- Решена осесимметричная задача изгиба упруго-зашемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание.
- Решена осесимметричная задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины, когда внутренний край пластинки упруго зашемлен.
- Решены плоская задача и задача изгиба термоупругости ортотропной пластинки полосы переменной толщины при учете поперечного сдвига.

**Практическая ценность работы.** Результаты исследований приведенных в

диссертации, могут применяться в разных областях строительства, для оценки прочности и жёсткости тонкостенных элементов конструкций.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на

- XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин (Нижний Новгород.1999г.)

- VI международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» Горис – Степанакерт, Армения. 2008г.

- международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан. Армения. 2010г.

- VII международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» Горис - Степанакерт, Армения.2011г.

- международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященной 100- летию Н.Х. Арутюняна (08-12 октября Цахкадзор, Армения. 2012г.)

- международной конференции «Актуальные проблемы математике информатики и механики», Воронеж 26-28 ноября, 2012г.

- международной конференции «Актуальные проблемы математики информатики и механики», Воронеж 12-14 декабря, 2013г.

- VIII международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» Горис-Степанакерт, Армения. 2014г.

- XVII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» Ростов на Дону, Россия. 2014г.

- семинарах «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН Армении (Ереван 1999-2014)

Диссертационная работа в целом обсуждена на семинаре «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН Армении и на общем семинаре Института механики НАН Армении (2017г.)

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 29 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка цитируемой литературы (233 наименований). Общий объем работы составляет 247 страниц печатного текста, включая 84 рисунка и 44 таблиц.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дан краткий обзор работ отечественных и зарубежных авторов, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы, и в сжатом виде излагается содержание всех глав.

**В главе 1** исследуются осесимметричные задачи изгиба круглых ортотропных пластин.

**В § 1.1** рассмотрена круглая ортотропная пластинка, которая изгибается под действием произвольных поверхностных нагрузок. В рамках сдвиговой теории первого порядка составлена система разрешающих уравнений задачи изгиба. В

предположении, что поперечные касательные напряжения изменяются по толщине по закону квадратной параболы и используя принцип виртуальных работ, получены выражения для поправочных коэффициентов.

Примем  $u_r = u + z \cdot \varphi$ ,  $u_\theta = v + z \cdot \psi$ ,  $u_z = w$ , получим

$$\iiint_V \left\{ \frac{3N_r^{(1)}}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \left[ \frac{3N_r}{2B_{55}h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) - \frac{R_1}{2B_{55}} \left( 1 - \frac{12z^2}{h^2} \right) + \frac{z}{B_{55}h} R_2 \right] + \frac{3N_\theta^{(1)}}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \left[ \frac{3N_\theta}{2B_{44}h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) - \frac{\theta_1}{2B_{44}} \left( 1 - \frac{12z^2}{h^2} \right) + \frac{z}{B_{44}h} \theta_2 \right] \right\} dv \quad (1.1)$$

где  $V$  – объем пластины. Интегрируя по толщине пластины, выражение (1.1) можно привести к виду

$$\iint_S \left( \frac{N_r^{(1)} N_r}{G_{55} h} K_r + \frac{N_\theta^{(1)} N_\theta}{G_{44} h} K_\theta \right) ds, \quad K_r = \frac{6}{5} - \frac{R_1 h}{5 N_r}, \quad K_\theta = \frac{6}{5} - \frac{\theta_1 h}{5 N_\theta} \quad (1.2)$$

**В § 1.2** Рассматривается осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок. Рассмотрим случай, когда на лицевых поверхностях пластинки действуют только радиально направленные касательные силы постоянной интенсивности  $\tau$ :

Для решения задачи получим:

$$r^2 \frac{d^3 w}{dr^3} + r \frac{d^2 w}{dr^2} - k^2 \frac{dw}{dr} = \frac{\tau h r^2}{D_{11}} + \frac{k^2 \tau}{5 B_{55}}, \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \quad (1.3)$$

Рассматриваются случаи шарнирного опирания и защемления контура пластинки. Получаются аналитически замкнутые выражения прогиба и изгибающих моментов пластинки.

$$w = \frac{\tau h}{3 D_{11} (1+k)(4-k^2)(k D_{11} + D_{12})} \left\{ (1+k)(k D_{11} + D_{12}) r^3 + \left[ (6-k-k^2) D_{11} + (2-k) D_{12} \right] a^3 - 3 r^{1+k} a^{2-k} (2 D_{11} + D_{12}) \right\} + \frac{\tau (a-r)^3}{5 B_{55}} \quad (1.4)$$

$$M_r = \frac{\tau h (2 D_{11} + D_{12}) r}{D_{11} (4-k^2)} (a^{2-k} r^{k-2} - 1) \quad (1.5)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{D_{11}} \cdot \frac{a^{2-k} r^{k-2} (k D_{12} + D_{22}) (2 D_{11} + D_{12}) - (2 D_{12} + D_{22}) (k D_{11} + D_{12})}{(4-k^2)(k D_{11} + D_{12})} \quad (1.6)$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow 2$  из (1.4) – (1.6), получим при  $k = 2$

$$w = \tau h \left\{ \frac{(5 D_{11} + D_{12}) (a^3 - r^3) - 3 r^3 (2 D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r}}{36 D_{11} (2 D_{11} + D_{12})} \right\} + \frac{\tau (a-r)}{5 B_{55}} \quad (1.7)$$

$$M_r = \frac{\tau h r (2D_{11} + D_{12})}{4D_{11}} \ln \frac{a}{r}, M_\theta = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \cdot \frac{(2D_{12} + D_{22})(2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r} + D_{11} D_{22} - D_{12}^2}{2D_{11} + D_{12}} \quad (1.8)$$

Наибольший прогиб получается в центре пластинки  $r = 0$ . Из (1.7) находим:

$$w|_{r=0} = \frac{\tau h a^3 (5D_{11} + D_{12})}{36D_{11} (2D_{11} + D_{12})} \left[ 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11} + D_{12}) B_{11} h^2}{(5D_{11} + D_{12}) B_{55} a^2} \right], w^{\text{кл}}|_{r=0} = \frac{\tau h a^3 (5D_{11} + D_{12})}{36D_{11} (2D_{11} + D_{12})} \quad (1.9)$$

$$\text{Поправка составляет } \Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11} + D_{12}) B_{11} h^2}{(5D_{11} + D_{12}) B_{55} a^2} \quad (1.10)$$

При  $D_{12} = 0.2D_{11}$ ,  $B_{11} = 10B_{55}$ ,  $h = 0.2a$ , она равна 0.102 или 10%.

$$\text{При случае заземления контура } w|_{r=0} = \frac{\tau h a^3}{36D_{11}} \left[ 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11} h^2}{B_{55} a^2} \right], \Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11} h^2}{B_{55} a^2}$$

Поправка при  $B_{11} = 10B_{55}$ ,  $h = 0.2a$  равна 0.24, или 24%.

**В § 1.3** Решаются плоская задача и задача изгиба пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных слоев. На верхней лицевой поверхности пластинки действует только равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности  $q$ , а ее нижняя лицевая поверхность свободна от нагрузок. Краевые условия произвольны. Мысленно разделим слои пластинки друг от друга, заменив их взаимодействием действием контактных напряжений  $p$  и  $\tau$  (рис.1.1).

Задача решается по уточненной теории, которая учитывает влияние поперечных сдвигов при наличии касательных поверхностных нагрузок. При этом гипотеза о линейном распределении радиальных перемещений по толщине принимается не для всей пластинки в целом, а для ее отдельных слоев. Рассматривается также гипотеза об одном линейном распределении радиальных перемещений для пакета в целом. Задача изгиба решается еще и по теории Рейсснера-Миндлина, при которой поперечные сдвиги учитываются с помощью только перерезывающих сил. Приведено сравнение результатов обеих теорий и сделаны количественные и качественные заключения.

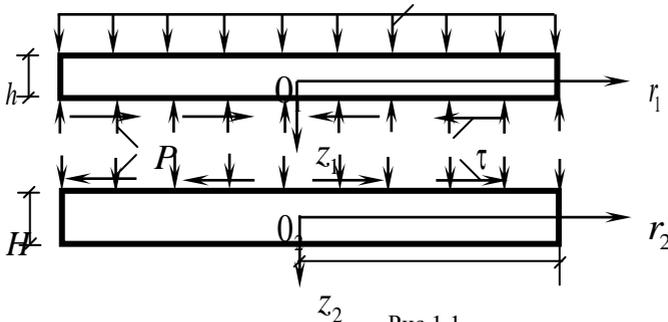


Рис.1.1

Контактные напряжения представим в виде степенных многочленов  $n$ -ого порядка

$$\bar{p} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i, \quad \bar{\tau} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.11)$$

После решения полученного дифференциального уравнения и удовлетворяя кривым условиям, для двух слоев получим

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 = & 3\bar{q}l^2 \left[ \frac{2(3+\alpha_{12})l^2}{(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} (1-\rho^{1+k}) - \frac{l^2(1-\rho^4)}{2(9-k^2)} + \frac{\chi(1-\rho^2)}{10} \right] + \frac{6l^2}{5} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \times \\ & \times \left\{ \frac{10l^2(1-\rho^{i+4})}{(i+4)[(i+3)^2-k^2]} - \frac{\chi}{i+2} (1-\rho^{i+2}) - \frac{10l^2(i+3+\alpha_{12})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+3)^2-k^2]} (1-\rho^{1+k}) \right\} + \\ & + \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2(1-\rho^{i+3})}{(i+3)[(i+2)^2-k^2]} - \frac{60l^2(i+2+\alpha_{12})(1-\rho^{i+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+2)^2-k^2]} - \frac{\chi(1-\rho^{i+1})}{i+1} \right\} \quad (1.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 = & -\frac{6l^2}{5m} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{10l^2(1-\rho^{i+4})}{\beta m(i+4)[(i+3)^2-\gamma^2]} - \frac{\chi(1-\rho^{i+2})}{\beta_{55}(i+2)} - \right. \\ & \left. \frac{10l^2(i\beta_{11}+3\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})}{\beta m(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma+\alpha_{12}\beta_{12})[(i+3)^2-\gamma^2]} (1-\rho^{1+\gamma}) \right\} + \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2(1-\rho^{i+3})}{\beta m(i+3)[(i+2)^2-\gamma^2]} \right. \\ & \left. - \frac{\chi(1-\rho^{i+1})}{\beta_{55}(i+1)} - \frac{60l^2(i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})}{\beta m(1+\gamma)(\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})[(i+2)^2-\gamma^2]} (1-\rho^{1+\gamma}) \right\} \quad (1.13) \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  определяются из условий полного контакта слоев пластинки. Следовательно, определяются все расчетные величины при  $H = mh$ ,  $m\beta_{11} = \beta$ ,  $B_{12} = \alpha_{12}B_{11}$ ,  $B_{ij}^H = \beta_{ij}B_{ij}$ ,  $B_{22} = k^2B_{11}$ ,  $B_{11} = B_{55}\chi \frac{\beta_{22}k^2}{\beta_{11}} = \gamma^2$ ,  $\bar{q} = 1$ ;  $\beta_{11} = 2$ ;  $\beta_{12} = 0,8$ ;  $\alpha_{12} = 0,2$ ;  $k = 0,5$ ;  $\gamma = 0,5$ ;  $\beta_{55} = 1$  ( $\beta_{22} = 2$ );  $m = 2$ ;  $\beta = 4$ ;  $l = 8$ .

**В главе 2** рассматриваются оптимизационные задачи балок и круглых пластин переменной толщины.

**В § 2.1** решена задача оптимального проектирования равнопрочной ортотропной балки переменной толщины при учете касательного напряжения. Показано, что существует однопараметрическое бесконечное семейство равнопрочных балок, которые отличаются друг от друга лишь в участке доминирующего изгиба. В качестве оптимальной выбрана та равнопрочная балка, объем которой минимален. Вычислены прогибы этой балки при учете поперечного сдвига. Показано, что прогибы могут быть

меньше соответствующих классических значений. Дано физическое объяснение этого факта. Рассмотрим консольную балку длины  $l$ , изготовленную из линейно-упругого ортотропного материала, которая в своем концевом сечении нагружена сосредоточенной силой  $P$  (рис. 2.1)

Определим такую толщину  $h$ , которая обеспечивает равнопрочность балки при учете касательного напряжения  $\tau_{xz}$ . Для рассматриваемого случая имеем

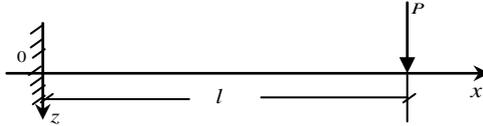


рис. 2.1

$$\sigma_x = -\frac{12P(l-x)}{bh^3}z, \quad \tau_{xz} = \frac{3P}{2bh^4} \left[ h(h^2 - 4z^2) + (h^2 - 12z^2)(l-x) \frac{dh}{dx} \right] \quad (2.1)$$

Условие прочности материала примем в виде

$$\max_{(x,z)} \Phi(\sigma_x, \tau_{xz}) = \max_{(x,z)} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_s^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_s^2} \right) = 1 \quad (2.2)$$

где  $\sigma_s$  и  $\tau_s = n\sigma_s$  - пределы прочности материала при одноосном растяжении (сжатии) и поперечном сдвиге. Переходя к безразмерным величинам, для функционала прочности получим

$$\Phi = \Phi_1 + h^2 \bar{z}^2 \Phi_2 + h^4 \bar{z}^4 \Phi_3, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left\{ \frac{3\bar{P}}{2n\bar{h}^2} \left[ \bar{h} + (1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \right\}^2, & \Phi_3 &= \left\{ \frac{6\bar{P}}{n\bar{h}^4 b^2} \left[ \bar{h} + 3(1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \right\}^2 \\ \Phi_2 &= \frac{18\bar{P}^2}{n^2 \bar{h}^6 b^2} \left\{ 8n^2 m^2 (1-\bar{x})^2 - \left[ \bar{h} + (1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \left[ \bar{h} + 3(1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В результате исследования определена область доминирующего среза и доминирующего изгиба. В табл. (2.1) приведены значения безразмерного объема равнопрочной балки при некоторых значениях параметра  $\Delta \bar{h}$ . Объем равнопрочной балки при  $\Delta \bar{h} = 0.01$  имеет минимум со значением  $\bar{V}_{\min} = 19.28$ , что на 18% больше классического значения.

Табл. (2.1)

$\Delta \bar{h}$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
$\bar{V}$	19.315	19.28	19.284	19.29	19.30	19.32	19.33	19.35	19.4
$\Delta \bar{h}$	0.09	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2	5
$\bar{V}$	19.381	19.399	19.601	20.07	20.57	21.095	21.62	24.17	30.3

В таблице (2.2) приведены значения толщины и прогиба для некоторых сечений равнопрочной балки в классической постановке и равнопрочной балки минимального объема при учете касательного напряжения.

Табл. (2. 2)

$\bar{x}$	0	0.104	0.208	0.312	0.417	0.521	0.625	0.625	0.75	0.875	1.000
$\bar{h}_{кл}$	2.449	2.318	2.179	2.031	1.871	1.696	1.50	1.50	1.225	0.866	0
$s\bar{w}_{кл}$	0	0.451	1.839	4.22	7.68	12.30	18.20	18.20	27.22	38.83	54.43
$\bar{h}$	2.460	2.43	2.34	2.22	2.08	1.93	1.76	1.5	1.5	1.5	1.5
$s\bar{w}$	0	0.18	0.87	2.56	5.05	8.37	12.52	12.52	18.54	26.65	36.84

**В § 2.2** приведены уравнения цилиндрически-ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов:

- а) уравнения для задачи обобщенного плоского напряженного состояния (ОПНС),
- б) уравнения для задачи изгиба.

**В § 2.3** решается задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объема. Сплошная пластинка получается как частный случай кольцевой пластинки, когда радиус её внутреннего контура стремится к нулю. В качестве критерия оптимальности принимается условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки. Рассматривается случай действия равномерно распределенной нормальной нагрузки  $q^*$  как при учете, так и пренебрежении собственным весом  $q_0^*$  и влиянием поперечного сдвига  $\chi$ . Для конкретности считается, что внутренний контур пластинки свободен от нагрузок, а её внешний контур шарнирно оперт или жестко зашлемлен.

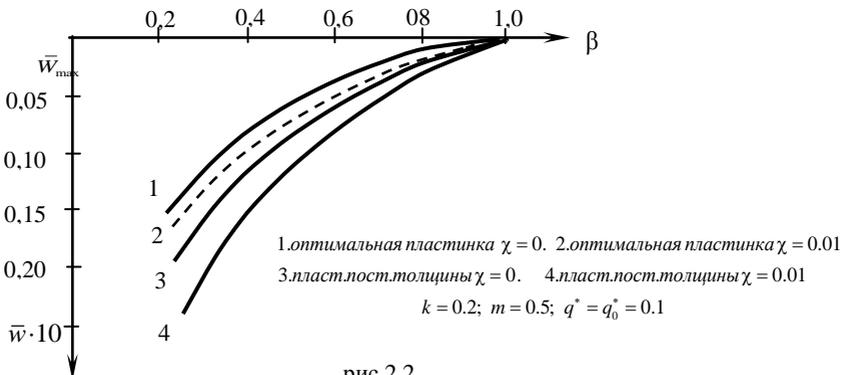


рис.2.2

На рис.(2.2) для отмеченных пластинок представлены графики изменения безразмерных прогибов по радиальной координате  $\rho$ . Получается, что оптимальная форма пластинок зависит от анизотропии материала (значения  $m$ ), характера нагрузок (значений  $q^*$  и  $q_0^*$ ) и от относительного радиуса внутреннего контура пластинки (значения „ $k$ ”). Наибольший прогиб оптимальной пластинки примерно в 1,5 раза меньше, чем у соответствующей пластинки постоянной толщины.

Однако, поправки к значению наибольшего прогиба от учета поперечного сдвига как для пластинки постоянной толщины, так и оптимальной толщины практически равны и составляют примерно 18%. При  $B_r > B_0$  с приближением к внешнему контуру толщина оптимальной пластинки в основном возрастает. В случае же  $B_r < B_0$  имеет место обратная картина, т.е. с приближением к внешнему контуру толщина оптимальной пластинки убывает.

**В главе 3** рассматривается задача устойчивости ортотропных оболочек и колонн переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса. Решены разные задачи по этой теории.

**В § 3.1** в рамках уточнённой теории решается осесимметричная задача статической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины, которая при различных торцевых условиях сжимается вдоль образующих равномерно распределёнными силами. Определение безразмерных критических значений сжимающих сил сводится к нахождению собственных чисел системы двух однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Таблица (3.1)

$S = 0,1$			$q = 0,5$		$q = 1$		$q = 2$	
			$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$
$\chi=0$	$\beta$	0,2	11,37	23,11	16,68	37,42	25,47	57,98
		0,4	19,67	36,95	27,56	57,99	40,59	85,89
		0,6	28,66	51,61	39,17	80,54	56,82	115,2
		0,8	37,18	64,93	49,65	103,7	71,96	146,5
		1	42,25	72,36	55,33	112,9	80,75	157,8
$\chi=5$	$\beta$	0,2	9,94	18,83	14,16	28,19	20,47	41,09
		0,4	17,31	30,84	23,79	44,70	33,41	63,46
		0,6	25,10	43,68	34,02	61,64	47,29	85,65
		0,8	32,19	56,36	43,48	77,12	61,24	104,5
		1	36,35	64,68	49,08	87,30	68,75	110,9

Рассматривается вопрос об определении оптимальной линейно-переменной толщины оболочки по критерию устойчивости. Показывается, что при шарнирном

опирании или заделаны обоих торцов из множества оболочек линейно-переменной толщины одинакового объема наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины. Это заключение верно как при классической, так и уточнённой постановках задачи. В таблице (3.1) представлены безразмерные значения критической силы  $\bar{P}$  для некоторых ортотропных оболочек линейно-переменных толщин одинакового объёма  $\bar{V} = 2S = 0,2$ .

**В § 3.2** методом коллокаций решается задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига. Применяется уточненная теория анизотропных пластин С.А. Амбарцумяна. Рассматриваются два варианта краевых условий. Приводятся безразмерные критические значения нагрузок. Проведен анализ полученных результатов и сделаны соответствующие выводы. Пластинку-полосу постоянной толщины  $h$  и ширины  $l$  вдоль одного края пластинки-полосы приложены равномерно распределенные силы  $P$ , а вдоль оси  $Ox$  действует собственный вес постоянной интенсивности  $q$ . Для решения задачи получена следующая система уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{12q}{h^3}(kl+x)\frac{d^2w}{dx^2} = 0, & \varphi - \frac{\chi h^2}{10}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B_{11}\frac{d^3w}{dx^3} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

которое представляется в виде

$$\left[1 - \alpha\bar{q}(k + \bar{x})\right] \frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4} - 2\alpha\bar{q} \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + \bar{q}(k + \bar{x}) \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (3.2)$$

Рассмотрены следующие краевые условия:

край пластинки-полосы  $\bar{x} = 0$  защемлен, а край  $\bar{x} = 1$  шарнирно оперт.

При  $\bar{x} = 0$  защемлен, а край  $\bar{x} = 1$  свободен, получается

$$\left[1 - \alpha\bar{q}(k + \bar{x})\right] \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} - \alpha\bar{q} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} + \bar{q} \left[ (k + \bar{x}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{w} \right] = 0 \quad (3.3)$$

В таблицах (3.2) и (3.3) представлены критические значения интенсивности собственного веса  $\bar{q}$  при некоторых значениях  $k$ ,  $\chi$  и  $n$ .

Показано, что с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала (с возрастанием параметра  $\chi$ ) критические значения  $\bar{q}$  в обоих случаях краевых условий и любого отношения внешней силы  $P$  и собственного веса  $ql$  (значения параметра  $k$ ) уменьшаются.

С возрастанием доли собственного веса (с уменьшением параметра  $k$ ) влияние поперечного сдвига для двух случаев краевых условий увеличивается. Например, значения относительной поправки  $\Delta = \frac{\bar{q}_{кл} - \bar{q}}{\bar{q}_{кл}} 100\%$  при  $k = 0$  для всех рассмотренных значений  $\chi$  примерно в полтора раза больше, чем при  $k = 100$  (табл.3.2). Зависимость между критическими значениями сосредоточенной силы  $\bar{P}$  и интенсивности собственного веса  $\bar{q}$  является линейной.

Задача решена также при следующих условиях.

При  $\bar{x} = 0$  шарнир, край  $\bar{x} = 1$  шарнир, т.е шарнир-шарнир.

При  $\bar{x} = 0$  защемление, край  $\bar{x} = 1$  защемление, т.е защемление- защемление.

Показано, что при пренебрежении собственным весом и влиянием поперечного сдвига имеем  $\chi = 0, k \rightarrow \infty, \bar{q} \rightarrow 0$  и  $\bar{P} = k\bar{q}$  стремится к точному значению – в случае шарнирного опирания к  $\pi^2$ , а в случае защемления – к  $4\pi^2$ .

Таблица (3.2)

-----		----	Защемл-шарнир			
		$\chi$ n	0	2	3	5
k	0	11	56,95	43,45	38,73	31,65
	0.5	11	23,75	19,78	18,16	15,64
	1	11	14,97	12,63	11,71	10,10
	3	11	6,032	5,157	4,807	4,233
	5	11	3,776	3,237	3,022	2,666
	10	11	1,951	1,676	1,566	1,384
	100	11	0,201	0,173	0,162	0,143

Таблица (3.3)

-----		----	Защемл-свобод			
		$\chi$ n	0	2	3	5
k	0	9	7,838	7,611	7,501	7,289
	0.5	9	3,069	3,005	2,974	2,914
	1	9	1,896	1,858	1,840	1,804
	3	9	0,748	0,733	0,726	0,713
	5	9	0,466	0,457	0,456	0,444
	10	9	0,240	0,235	0,233	0,228
	100	9	0,025	0,024	0,024	0,024

**В § 3.3** строится прикладная уточненная модель ортотропных оболочек переменной толщины. В качестве основной гипотезы принимаются

$$\tau_{\alpha\gamma} = \varphi_1 + \gamma\varphi_2 + \gamma^2\varphi_3, \quad \tau_{\beta\gamma} = \psi_1 + \gamma\psi_2 + \gamma^2\psi_3 \quad (3.4)$$

Условия на лицевых поверхностях оболочки имеют вид

$$\sigma_{\alpha}^{\pm}l^{\pm} + \tau_{\alpha\beta}^{\pm}m^{\pm} + \tau_{\alpha\gamma}^{\pm}n^{\pm} = X^{\pm}, \tau_{\alpha\beta}^{\pm}l^{\pm} + \sigma_{\beta}^{\pm}m^{\pm} + \tau_{\beta\gamma}^{\pm}n^{\pm} = Y^{\pm}, \tau_{\alpha\gamma}^{\pm}l^{\pm} + \tau_{\beta\gamma}^{\pm}m^{\pm} + \sigma_{\gamma}^{\pm}n^{\pm} = Z^{\pm} \quad (3.5)$$

Рассмотрим оболочку с круговой цилиндрической срединной поверхностью длины  $l$  и радиуса  $R$ . Толщина оболочки изменяется осесимметрично по линейному закону  $h = h_0 + h_1\alpha$ . Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\alpha = l\bar{\alpha}, \quad \gamma = h_0\bar{\gamma}, \quad u = h_0\bar{u}, \quad w = h_0\bar{w}, \quad S = \frac{h_0}{l}, \quad l = nR, \quad P = B_{11}\bar{P}, \quad h = h_0H, \quad t = \frac{h_1}{s},$$

$$H = 1 + t\bar{\alpha}, \quad T_1 = B_{11}h_0\bar{T}_1, \quad T_2 = B_{11}h_0\bar{T}_2, \quad N_1 = B_{11}h_0\bar{N}_1, \quad M_1 = B_{11}h_0^2\bar{M}_1, \quad (3.6)$$

$$M_2 = B_{11}h_0^2\bar{M}_2, \quad B_{22} = qB_{11}, \quad B_{12} = mB_{11}, \quad a_{55}B_{11} = \chi, \quad \varphi_1 = B_{11}\bar{\varphi}_1$$

и уравнения равновесия дифференциального элемента срединной поверхности оболочки в рамках технической теории принимают вид:

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\alpha}} = \frac{C_1}{H} - mn\bar{w} - \frac{\bar{P}t}{2s} \frac{\bar{\alpha}}{H}$$

$$\left\{ \begin{aligned} t \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{2t^2}{H} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{12n^2(q-m^2)}{s^2H} \bar{w} - \frac{\chi t}{s} \frac{d^2\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}^2} - \frac{2(4+\chi t^2 s^2)}{s^3H} \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} - \\ - \frac{8t}{s^3H^2} \bar{\varphi}_1 + \frac{12mn}{s^2H^2} \cdot C_1 = \frac{12\bar{P}}{sH^2} + \frac{6mnt\bar{P}}{s^3H^2} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{P}t^2}{s^2H^2} \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

$$\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{2t}{H} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \frac{\chi}{s} \frac{d^2\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}^2} - \frac{2\chi t}{sH} \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^3H^2} = \frac{\bar{P}t}{s^2H^2}$$

1. Приводится конкретный пример приложения со сравнением значений расчетных величин цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины, полученных по предложенной теории и по общей уточненной теории. В случае постоянной толщины ( $t=0, H=1$ ) результаты, полученные по технической уточненной теории С.А. Амбарцумяна и по предложенной теории, практически совпадают. Показано, что учет поперечного сдвига приводит к увеличению осевого и кольцевого усилий оболочки  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ . Это объясняется тем, что в выражениях соответствующих деформаций в качестве слагаемого участвует прогиб оболочки, который при учете поперечного сдвига увеличивается. Этот эффект для пластин отсутствует, поскольку их плоская задача отделяется от задачи изгиба, в силу чего в выражениях тангенциальных деформаций прогиб пластины не участвует.

**В § 3.4** рассматривается устойчивость ортотропной колонны переменного прямоугольного поперечного сечения с учетом влияния собственного веса и деформации поперечного сдвига. Рассматривается ортотропная колонна с прямоугольным переменным сечением  $b \times h$  длиной  $l$ . Колонна находится под действием вертикально приложенной сосредоточенной осевой силы  $P$  и

собственного веса. Принимая обезразмеривающие обозначения, для решения задачи получена следующая система уравнения

$$\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + \frac{3}{H} \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{\chi}{s} \frac{d^2\varphi}{d\bar{x}^2} - \frac{3\chi}{sH} \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{8\varphi}{s^3H^2} = 0$$

$$\left[ s^3H^3 \frac{d^2H}{d\bar{x}^2} + 12 \left( \frac{s\bar{P}}{\alpha} + \bar{\gamma} \int_0^{\bar{x}} H^2 d\bar{x} \right) \right] \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - H^2 \left( 8 + \chi s^2 H \frac{d^2H}{d\bar{x}^2} \right) \frac{d\varphi}{d\bar{x}} - 24H \frac{dH}{d\bar{x}} \varphi = 0 \quad (3.8)$$

**В § 4.1** обобщаются условия упруго-зашемленной опоры поперечно изгибаемой балки для задачи устойчивости сжатого стержня. С использованием этих условий решаются три задачи статической устойчивости сжатого стержня. Анализируя полученные результаты, делаются качественные заключения.

Получены основные соотношения, описывающие условия упруго-зашемленной опоры для задачи устойчивости сжатого стержня. Они имеют вид:

$$\frac{dw}{dx} = D \left( aN_x + Pa \frac{dw}{dx} - M_x \right), \quad w = a \frac{dw}{dx} + B \left( N_x - P \frac{dw}{dx} \right), \quad \text{где } \frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow \bar{D} = \frac{3\bar{B}}{n^2} \quad (4.1)$$

**Первая задач: I:** левый край стержня  $x=0$  имеет упруго-зашемленную опору. правый же край  $x=l$  шарнирно оперт.

Задача приводится к определению наименьшего нетривиального решения уравнения

$$\bar{k} \left[ 1 - \bar{B}\bar{k}^2 - \bar{D}\bar{k}n \left( 2\bar{k} - 2\bar{B}\bar{k}^3 + \bar{k}n \right) \right] \cos \bar{k} - \left[ 1 + \bar{D}\bar{k}^2 \left( 1 - \bar{B}\bar{k}^2 \right) \right] \sin \bar{k} = 0 \quad (4.2)$$

В случае  $\bar{B} = \bar{D} = 0$  т.е левый край будет жестко зашемлен, тогда будет  $t\bar{g}\bar{k} - \bar{k} = 0$  следовательно  $\bar{k} = 4.4934 \approx \sqrt{2.0458}\pi \approx \sqrt{2}\pi$ , а  $P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}$  которое известно.

**Вторая задача: II:** левый край стержня  $x=0$  имеет упруго зашемленную опору. правый же край  $x=l$  свободен.

$$\bar{D}\bar{k} \sin \bar{k} + \left( 2n\bar{D}\bar{k}^2 - 1 \right) \cos \bar{k} = 0 \quad (4.3)$$

При  $\bar{B} = \bar{D} = 0$  получим  $\cos \bar{k} = 0$ , тогда  $\bar{k} = \pi/2 \Rightarrow P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$

**Третья задача III:** левый край стержня  $x=0$  имеет упруго-зашемленную опору. правый же край  $x=l$  жестко зашемлен.

$$2 - \bar{D}\bar{k}^2 n - \left[ 2 + \bar{D}\bar{k}^2 \left( 1 - \bar{B}\bar{k}^2 - 2n + \cos \bar{k} \right) \right] \cos \bar{k} -$$

$$-\bar{k} \left[ 1 - \bar{D} - \bar{B}\bar{k}^2 - \bar{D}\bar{k}n \left( 2\bar{k} - 2\bar{B}\bar{k}^3 + \bar{k}n - \sin \bar{k} \right) \right] \sin \bar{k} = 0 \quad (4.4)$$

При  $\bar{B} = \bar{D} = 0$  получим  $2 - 2\cos \bar{k} - \bar{k} \sin \bar{k} = 0$ , тогда  $\bar{k} = 2\pi$ , следовательно, как известно,  $P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$ . В табл.(4.1) приведены значения  $\bar{K}$  и безразмерной

критической силы  $\bar{P}_{кр} = \frac{P_{кр} l^2}{EJ} = \bar{k}^2$  при  $n = 0.05$ , когда значение  $\bar{B}$  изменяется от нуля до бесконечности.

Табл. 4.1

$\bar{B}$	$\bar{k}$			$\bar{P}_{кр}$		
	Случаи			случаи		
	I	II	III	I	II	III
0	4.493	1.571	6.283	20.191	2.467	39.478
0.001	3.097	0.780	4.254	9.591	0.609	18.101
0.01	2.883	0.272	3.963	8.312	0.074	15.708
0.1	2.836	0.087	2.956	8.044	0.007	8.739
1	1.001	0.027	1.675	1.002	0.001	2.806
10	0.317	0.009	1.456	0.100	0	2.119
100	0.100	0.003	1.432	0.010	0	2.049
1000	0.032	0.001	1.429	0.001	0	2.042
10000	0.010	0	1.429	0.000	0	2.042
20000	0.007	0	1.429	0	0	2.042
$\infty$	0	0	1.429	0	0	2.042

В табл.(4.2) приведены значения этих же величин III-его случая для некоторых  $n$  при  $\bar{B} = \infty$ .

Табл. 4.2

$n$	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$\bar{k}$	1.429	1.404	1.380	1.357	1.335	1.314
$\bar{P}_{кр}$	2.042	1.971	1.904	1.841	1.782	1.728

Анализ показывает, что при  $\bar{B} = 0$ , т.е. когда опора является жестко защемленной, значение  $\bar{k}$ , а следовательно, и значения критической силы стержня, совпадают с соответствующими известными значениями. Когда значение параметра  $\bar{B}$  стремится к бесконечности, упруго-защемленная опора исчезает и левый край стержня становится свободным концом. Тогда длина стержня становится равной не  $l$ , а  $(1 + 2n)l$ .

В третьем случае при  $\bar{B} \rightarrow \infty$  левый край стержня становится свободным, а правый край остается жестко защемленным. Однако, значение  $\bar{k}$  стремится не к  $\frac{\pi}{2}$ , а к  $\frac{\pi}{2(1+2n)}$ . Это является следствием того, что длина стержня уже равна не  $l$ , а  $(1+2n)l$ . В силу этого  $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4[(1+2n)l]^2}$

**В § 4.2** обобщаются условия упруго защемленной опоры, когда учитывается уменьшение сжимающей внешней силы вследствие трения краевой части стержня, вставленной в упругий массив рис.(4.1). Предлагается способ учета силы трения, с применением которого решается задача изотропного стержня постоянного поперечного сечения, когда его один край упруго защемлен, а другой край защемлен абсолютно жестко. Рассматривается численный пример. На основе полученных безразмерных результатов делаются заключения о зависимости действительной критической силы от жесткости упруго защемленной опоры.

Можно считать, что сила трения прямо пропорциональна внешней силе  $P$ . Следовательно, на стержень будет действовать сила  $T = P - mP$ .

В правой системе декартовых координат  $x, y, z$  рассмотрим изотропный стержень длины  $l$  и постоянного поперечного сечения произвольной симметричной формы (рис. 4.2). Левый край стержня малой длиной  $2a$  вставлен в упругий массив.

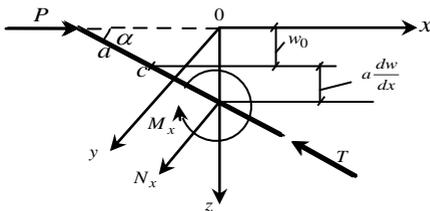


рис.4.1

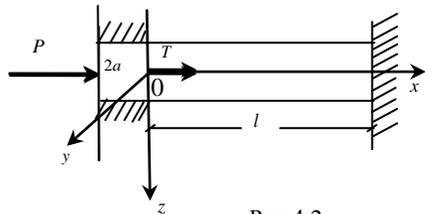


Рис.4.2

В нижеприведенной таблице (4.3) представлены результаты решения задачи для достаточно большого промежутка изменения параметра упруго защемленной опоры ( $0.01 \leq \bar{B} \leq 10000$ ), т. е. практически от абсолютно жесткого защемления ( $\bar{B} = 0.01$ ) до свободного конца стержня ( $\bar{B} = 10000$ ). При  $\bar{B} = 10000$  упруго защемленная опора практически исчезает, превращаясь в свободный конец и длина стержня становится равной  $l + 2a = 1.2l$ . Пользуясь формулой Эйлера и коэффициентом приведения длины, получим:

$$P = \frac{\pi^2 E J}{4(1.2l)^2} \Rightarrow \bar{P} = 1.713 \quad (4.5)$$

Это значение меньше соответствующего табличного значения-1.726 на 0.76 %.

Таблица. 4.3

	$\bar{B}$						
	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
$m$	0.9900	0.9091	0.5	0.0909	0.0099	0.0010	0.0001
$\alpha$	101	11	2	1.1	1.01	1.001	1.0001
$\bar{k}$	0.557	0.801	1.052	1.266	1.309	1.313	1.314
$\bar{T}$	0.310	0.641	1.107	1.603	1.712	1.725	1.726
$\bar{P}$	31.333	7.049	2.215	1.763	1.730	1.726	1.726

**В § 4.3** исследовано неклассическая задача упруго-зашемленной ортотропной балки переменной толщины при совместном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки

**В главе 5** исследуются неклассические задачи изгиба стержней переменной толщины.

**В § 5.1** решается задача изгиба ортотропной балки прямоугольного поперечного сечения линейно переменной толщины. Один конец балки упруго зашемлен, а другой лежит на классической шарнирной. Рассматриваются еще и другие граничные условия. Задача решается при действии равномерно распределенной нагрузки.

Дифференциальные уравнения задачи поперечного изгиба рассматриваемой балки в рамках уточненной теории, учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, с учетом обезразмеривающего обозначения

$$x = l\bar{x}, \quad l = nh_0, \quad h = h_0 H, \quad H = 1 + \gamma\bar{x}, \quad \gamma = nh_1, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad q = E\bar{q}, \quad a_{55} E = \chi, \quad (5.1)$$

$$\varphi = E\bar{\varphi}, \quad b = kh_0, \quad a = ml, \quad N_x = Eh_0^2 \bar{N}, \quad M_x = Eh_0^3 \bar{M}, \quad B = \frac{\bar{B}}{Eh_0}, \quad D = \frac{\bar{D}}{Eh_0^3}$$

приводится к виду:

$$2H \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 4\gamma\bar{\varphi} = -3n\bar{q} \quad (5.2)$$

$$H^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2\gamma H \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi n H^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi \gamma n H \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 8n^3 \bar{\varphi} = 0$$

$$\text{при } \bar{x} = 0, \quad \bar{w} = m \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \bar{B}\bar{N}_x, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = n\bar{D}(mn\bar{N} - \bar{M}) \quad (5.3)$$

$$\text{при } \bar{x} = 1, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{M} = 0 \quad (5.4)$$

Задача решается методом коллокаций, представив решение в виде степенных многочленов  $\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^j a_i \bar{x}^i$ ,  $\bar{\varphi} = b_0 + \sum_{i=1}^j b_i \bar{x}^i$

Получены безразмерные значения прогиба, поперечной силы и изгибающего момента, анализ которых привел к качественным заключениям.

В таблице (5.1) приведены значения  $\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$  при

$$n = 8, \quad m = 1/16, \quad k = 0.5, \quad \gamma = 1, \quad \bar{B} = 0.5; 1; 2; \quad (\bar{D} = 12\bar{B}); \quad \chi = 0; 8$$

Таблица 5.1

$\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$		$\bar{B}=0$		$\bar{B}=1$		$\bar{B}=2$		$\bar{B}=5$	
		$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\bar{x}$	0	0	0	19.86	27.13	32.07	43.03	52.52	68.15
	0.1	15.81	18.0	56.99	75.01	81.44	107.4	119.3	155.4
	0.2	45.75	52.8	97.53	124.3	128.0	164.8	174.4	223.8
	0.3	73.79	86.1	128.8	161.9	162.2	204.7	209.9	266.7
	0.4	92.63	109.	145.9	182.5	177.2	223.7	224.1	283.1
	0.5	99.70	119.	147.8	185.0	175.9	221.9	218.2	275.2
	0.6	95.15	115.	135.7	170.8	159.5	201.7	194.9	246.3
	0.7	80.50	99.6	11.9	142.1	130.4	166.0	157.9	200.4
	0.8	58.03	73.2	79.46	102.0	91.99	118.2	110.7	141.5
	0.9	30.31	39.1	41.15	53.63	47.48	61.75	56.93	73.44
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Показывается, что когда один конец балки зашкремлкен упруго, а другой конец абсолютно жестко, то при увеличении параметров упруго зашкремлкенной опоры балка постепенно стремится к консольной балке.

**В § 5.2** решается задача изгиба упруго-зашкремлкенной по контуру ортотропной круглой пластинки постоянной толщины при учёте влияний поперечного сдвига и обжатия, когда на центральной части пластинки действует равномерно распределённая поперечная нагрузка. Для нагружённой части пластинки берётся известное решение С.А. Амбарцумяна, которое после учёта отсутствия угловой точки центра содержит две неизвестные постоянные интегрирования. Удовлетворив условиям упругого зашкремлкення контура, гладкости деформированной пластинки и

неразрывности изгибающего момента  $M_r$  на границе раздела нагруженной и ненагруженной частей, получается система алгебраических уравнений относительно остальных пяти неизвестных постоянных интегрирования:

$$(1+n)[1+(n+\nu_\theta)\alpha m]\bar{c}_2 + (1-n)[1+(\nu_\theta-n)\alpha m]\bar{c}_3 =$$

$$1) = \frac{3\bar{P}}{5\pi m(1-n^2)} \left\{ \chi m^2(1-n^2) - 10 - 10\alpha m \left[ sm(1-n^2) + (1+\nu_\theta) \right] \right\}, \quad (5.5)$$

$$m\bar{c}_1 + [1+ms(1+n)]\bar{c}_2 + [1+ms(1-n)]\bar{c}_3 =$$

$$2) = \frac{\bar{P}}{5\pi m(1-n^2)} \left\{ 10(1-n^2)\alpha s^2 m^3 - 15 - 3ms \left[ 10 - \chi m^2(1-n^2) \right] \right\}, \quad (5.6)$$

$$3) m\bar{c}_1 + k^{1+n} \cdot \bar{c}_2 + k^{1-n} \cdot \bar{c}_3 - m\bar{c}_4 - k^{1+n} \cdot \bar{c}_5 = \frac{\bar{b}_1 k^2}{m} + \frac{\bar{b}_2 k^4}{m^3} - \frac{3k^2 \bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{3\chi m \bar{P}}{5\pi} \ln k, \quad (5.7)$$

$$4) (1+n)k^n \cdot \bar{c}_2 + (1-n)k^{-n} \cdot \bar{c}_3 - (1+n)k^n \cdot \bar{c}_5 = \frac{2\bar{b}_1 k}{m} + \frac{4\bar{b}_2 k^3}{m^3} - \frac{6k\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{3\chi m \bar{P}}{5\pi}, \quad (5.8)$$

$$(1+n)(n+\nu_\theta)k^{n-1} \cdot \bar{c}_2 + (1-n)(\nu_\theta-n)k^{-n-1} \cdot \bar{c}_3 - (1+n)(n+\nu_\theta)k^{n-1} \cdot \bar{c}_5 =$$

$$5) = \frac{6(1+\nu_\theta)\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{2(1+\nu_\theta)\bar{b}_1}{m} + \frac{4(3+\nu_\theta)k^2 \bar{b}_2}{m^3} + \frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2} \left[ \chi(1+\nu_\theta) + 2A_1 \right] \quad (5.9)$$

Решая эту систему, определяются все расчетные величины.

Рассмотрены следующие частные случаи:

1.  $\chi = A_1 = A_2 = 0$  (пренебрегаются влияния поперечного сдвига и обжатия)
2.  $\chi = 10$ ,  $A_1 = -0.513$ ,  $A_2 = -0.754$  (учитываются эти влияния одновременно)
3.  $\chi = 10$ ,  $A_1 = A_2 = 0$  (учитывается только влияние поперечного сдвига)
4.  $\chi = 0$ ,  $A_1 = -0.513$ ,  $A_2 = -0.754$  (учитывается только влияние обжатия).

**В § 5.3** приводится получение разрешающих дифференциальных уравнений задачи изгиба ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете влияния деформации поперечного сдвига. Приводится пример приложения. Рассмотрена ортотропная пластинка-полоса линейно переменной толщины. Задача решена по методу коллокации.

**В § 5.4** рассматривается осесимметричная задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругой основании. Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера в рамках уточненной теории С.А. Амбарцумяна, получаются разрешающие дифференциальные уравнения задачи при учете влияний

поперечного сдвига и обжатия. Задача решена по методу коллокации. Рассмотрены следующие случаи:

1.  $\chi = 4, A_1 = -0.5131, A_2 = -0.7539$  (учитываются влияния поперечного сдвига и обжатия)
2.  $\chi = 0, A_1 = 0, A_2 = 0$  (отмеченные влияния не учитываются, т. е. классический случай)
3.  $\chi = 4, A_1 = 0, A_2 = 0$  (учитывается только влияние поперечного сдвига)
4.  $\chi = 0, A_1 = -0.5131, A_2 = -0.7539$  (учитывается только влияние обжатия)

Анализ полученных результатов решения приводит к следующим заключениям.

1. С возрастанием параметра  $k$  реакция упругого основания возрастает и при одинаковых значениях остальных параметров задачи прогиба пластинки уменьшаются.

2. Если при отсутствии упругого основания (при  $k = 0$ ) наименьшие значения прогиба пластинки получаются при учете только обжатия, то при наличии достаточно жесткого упругого основания (например, при  $k = 0.05$ ), эта закономерность нарушается.

3. При возрастании параметра  $\beta$  жесткость упруго защемленной опоры уменьшается, что приводит к увеличению прогибов пластинки

4. Начиная с некоторых больших значений  $k$  и  $\beta$ , изгибающие моменты на краю пластинки (при  $\rho = 1$ ) становятся положительными.

5. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига (при  $\chi > 0$ ) приводит к заметному увеличению прогибов пластинки, когда упругое основание отсутствует.

Эта закономерность нарушается при наличии достаточно жесткого упругого основания.

**В § 5.5** методом коллокаций решена неклассическая задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки линейно переменной толщины, когда ее внутренний край упруго защемлен, а внешний край шарнирно оперт. Пластика несет равномерно распределенную поперечную нагрузку. Показано, что ослабление упруго защемленной опоры существенно не влияет на качественный характер изменения расчетных величин пластинки по радиальной координате. При существенном ослаблении упруго защемленной опоры поперечная сила  $N_r$  и изгибающий момент  $M_r$  уменьшаются а прогиб защемленного края пластинки существенно увеличивается.

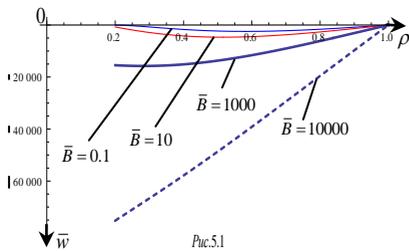


Рис.5.1

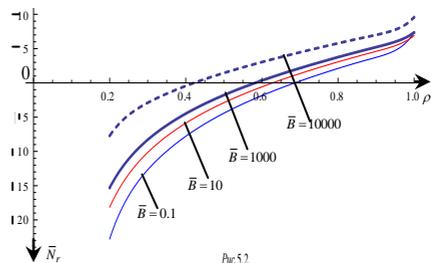


Рис.5.2

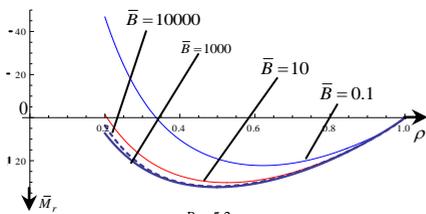


Рис.5.3

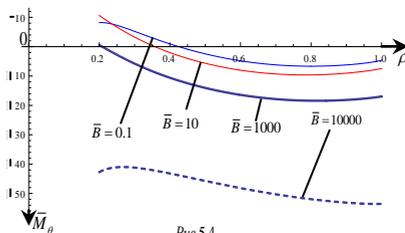


Рис.5.4

Для наглядности на фигурах 5.1-5.4 приведены графики изменения безразмерных расчетных величин при некоторых значениях параметров задачи.

**В главе 6** решаются задачи термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины.

**В § 6.1** на основе теории Р.М. Киракосяна решаются плоская задача и задача изгиба термоупругости защемленной по краям ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины при учете поперечного сдвига. Приводятся графики перемещений, усилий и изгибающего момента пластинки-полосы.

На основе выполненных расчетов исследовано и показана зависимость основных величин (перемещение, усилие, изгибающие моменты) от параметра ( $\gamma$ ), характеризующего переменность пластинки по толщине и от параметра ( $\chi$ ), характеризующего поперечный сдвиг. Приведены соответствующие графики.

Показано, что учет сдвигов приводит к увеличению значения прогиба  $\bar{w}$  и уменьшению поперечного усилия  $\bar{N}_x$ , с увеличением коэффициента ( $\chi$ ) точка максимума прогиба приближается к краю пластинки, где толщина наиболее тонкая.

Установлено, что для пластинки с постоянной толщиной ( $\gamma = 0$ ) горизонтальное перемещение точек срединной поверхности равно нулю. С увеличением параметра ( $\gamma$ ) горизонтальные перемещения отличны от нуля и максимальное значение увеличивается. Показано также, что имеет место увеличение тангенциального усилия с увеличением параметра ( $\gamma$ ). Установлено слабое изменение изгибающего момента  $\bar{M}_x$  в зависимости от параметра ( $\gamma$ ).

**В § 6.2** решается задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго-защемленной опоры. Приведен численный пример. Анализ полученных результатов показывает, что:

- 1) С ростом параметра  $\chi$ , характеризующего влияние поперечного сдвига, прогибы, поперечная сила и изгибающий момент по величине возрастают.
- 2) С ростом параметра  $\alpha$ , т.е. с уменьшением жесткости упруго защемленной опоры, прогибы пластинки увеличиваются, а поперечная сила и изгибающий момент по величине уменьшаются. Максимум прогибов перемещается к упруго защемленной опоре.

3) Во всех случаях поперечная сила по координате  $\bar{x}$ , т. е. по ширине пластинки-полосы, не меняется, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

**В заключении** представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В диссертационной работе исследован достаточно обширный класс задач на изгиб и устойчивость тонкостенных элементов (балок, стержней, пластин и оболочек) при неклассической постановке в рамках прикладной теории ортотропных пластин переменной толщины, учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов. Для задач на изгиб и задач устойчивости сформулирован новый вид граничных условий (упруго-защемленная опора) и получены соотношения, описывающие эти условия. Развита соответствующие методы численного анализа, приспособленные для решения поставленных задач.

Решены оптимизационные задачи для балок и круглых пластин переменной толщины как при учете, так и при пренебрежении поперечным сдвигом и собственным весом.

Исследовано НДС двухслойной круглой ортотропной пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных круглых слоев при учете поперечного сдвига.

Исследована устойчивость ортотропных оболочек и колонн переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса.

Исследованы устойчивость стержней переменной толщины и изгиб частично нагруженной круглой ортотропной пластинки постоянной толщины при неклассической постановке.

Исследовано НДС ортотропной пластинки-полосы линейно переменной толщины, находящейся в температурном поле и при учете поперечного сдвига.

В диссертационной работе, в частности получены следующие новые результаты.

- Решена задача изгиба ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига. Показано, что,

принимая параметр  $k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} = 1$ , где  $E_\theta$  и  $E_r$  - модули Юнга материала, из

полученных решений получается решение для изотропной пластинки. Если  $k < 1$  при действии нормальных поверхностных нагрузок, изгибающие моменты в центре пластинки имеют особенность, а при  $k > 1$  они равны нулю. При действии только касательных поверхностных нагрузок, в центре пластинки моменты равны нулю независимо от значения параметра  $k$ .

- В задаче круглой слоистой пластинки показано, что вблизи края нормальное напряжение становится отрицательным и увеличивается по модулю. Отрицательность означает, что вблизи контура слои пластинки стремятся отрываться друг от друга. Увеличение же модуля означает, что на контуре имеется концентрация напряжения. Эта аномалия является следствием того, что классическая теория пластин не учитывает эффекты ни плоского, ни антиплоского погранслоев, а при учете деформации поперечного сдвига эта аномалия исчезает. Это объясняется тем, что с учетом поперечного сдвига фактически учитывается эффект антиплоского погранслоя.

- Решена задача проектирования равнопрочной ортотропной балки переменной толщины при учете поперечного касательного напряжения. Показано, что существует однопараметрическое бесконечное семейство равнопрочных балок, которые отличаются друг от друга лишь в участке доминирующего изгиба. В участке же доминирующего среза они совпадают и имеют постоянную толщину. Показано, что прогибы могут быть меньше соответствующих классических значений. В качестве оптимальной выбрана та равнопрочная балка, объём которой минимален.

- Решена задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объёма. Сплошная пластинка получается как частный случай кольцевой пластинки, когда радиус внутреннего контура стремится к нулю. В качестве критерия оптимальности принимается условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки. Показано, что оптимальная форма пластинок зависит от анизотропии материала, характера нагрузок и от относительного радиуса внутреннего контура пластинки. Показано также, что наибольший прогиб оптимальной пластинки примерно в 1,5 раза меньше, чем у соответствующей пластинки постоянной толщины. Поправки к значению наибольшего прогиба при учете поперечного сдвига как для пластинки постоянной толщины, так и для оптимальной пластинки практически равны и составляют примерно 18%.

- В рамках уточнённой теории решена задача статической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины. Рассмотрение вопросов оптимальности показало, что среди всех оболочек линейно-переменной толщины одинакового объёма при шарнирном опирании обоих торцов наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины. Учет поперечного сдвига приводит к уменьшению критической силы.

- По уточненной теории решена задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига. Рассмотрены варианты граничных условий: «зашемление-свободный» и «зашемление-шарнир». Проведенный численный анализ показал, что с уменьшением модуля поперечного сдвига материала, критические значения в обоих случаях краевых условий и любого отношения внешней силы и собственного веса уменьшаются. С возрастанием доли собственного веса влияние поперечного сдвига для двух случаев краевых условий увеличивается

- Построена прикладная уточненная модель ортотропных оболочек переменной толщины, способная учитывать влияние деформаций поперечных сдвигов. По предложенной модели решена задача для оболочки с круговой цилиндрической срединной поверхностью, толщина которой изменяется осесимметрично по линейному закону. Численный анализ показал, что в случае постоянной толщины результаты практически совпадают с соответствующими результатами теории С.А. Амбарцумяна. Учет поперечного сдвига приводит к увеличению осевого и кольцевого усилий. Это объясняется тем, что в выражениях соответствующих деформаций в качестве слагаемого участвует прогиб оболочки, который при учете поперечного сдвига увеличивается. Этот эффект для пластин отсутствует, поскольку их плоская задача отделяется от задачи изгиба, в силу чего в выражениях тангенциальных деформаций прогиб пластинки не участвует

- Исследована устойчивость колонны при учете влияний поперечного сдвига и собственного веса. Выведены основные разрешающие уравнения, позволяющие решить как обычную задачу устойчивости колонны заданного переменного сечения, так и оптимизационную задачу, определить то переменное сечение, которому соответствует наибольшая критическая сила.

- Сформулированы условия упруго-зашемленной опоры для задачи устойчивости стержня и решен ряд задач статической устойчивости сжатого стержня при этих условиях. Показано, что когда упруго-зашемленная опора стремится к жесткому заземлению, то полученные значения критической силы совпадают с соответствующими известными значениями. Показано также, что если упруго-зашемленная опора ослабевает, то критические силы во всех случаях существенно уменьшаются.

- Обобщены и обоснованы условия упруго-зашемленной опоры поперечно изгибаемой балки для задачи устойчивости сжатого стержня, когда учитывается уменьшение сжимающей внешней силы из-за трения краевой части стержня, вставленной в упругий массив. Предложен способ учета силы трения, с применением которого решена задача устойчивости изотропного стержня постоянного поперечного сечения, когда его один край упруго зашемлен, а другой зашемлен абсолютно жестко. Показано, что из-за трения вставленной части стержня с упругим массивом значение внешней (действительной) критической силы больше значения силы, действующей на стержень. С ослаблением упруго-зашемленной опоры эти значения уменьшаются, а когда упруго-зашемленная опора практически исчезает, превращаясь в свободный конец, они принимают одинаковое значение.

- Решена задача изгиба балки линейно-переменной толщины при действии равномерно распределенной нагрузки. Один конец балки упруго зашемлен, а другой шарнирно оперт. Показано, что при ослаблении упругого массива, изгибающий момент на упруго-зашемленной опоре, оставаясь отрицательным, по модулю уменьшается, а прогиб увеличивается. Это естественно, так как в результате ослабления опоры уменьшается ее жесткость. Показано также, что учет поперечного сдвига мало влияет на форму графика поперечной силы, и он практически остается прямой линией, а прогибы увеличиваются. Получены уравнения задачи изгиба балки при одновременном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки. Считается, что края балки имеют упруго-зашемленную опору и учитывается уменьшение сжимающей силы опорой вследствие трения. Переходя к безразмерным величинам решена конкретная задача. Обсужден вопрос устойчивости балки.

- Проведен численный анализ решений задачи изгиба упруго-зашемленной по контуру ортотропной круглой пластинки при учете влияний поперечного сдвига и обжатия, когда на центральную часть пластинки действует равномерно распределённая поперечная нагрузка. Показано, что при учёте обжатия изгибающие моменты  $M_r$  и  $M_\theta$  в центре пластинки равны и отличны от нуля, а если учитывается только влияние поперечного сдвига эти моменты равны нулю. При учёте обжатия изгибающий момент  $M_\theta$  на границе раздела нагруженной и ненагруженной частей пластинки имеет разрыв первого рода. Из найденного решения получаются известные решения для случаев, когда в центре пластинки действует сосредоточенная сила и когда на всю пластинку действует равномерно распределённая нагрузка.

- Проведен численный и графический анализы для осесимметричной задачи изгиба упруго-зашемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание. Показано, что с возрастанием реакции упругого основания прогибы пластинки уменьшаются. При отсутствии упругого основания наименьшие значения прогиба пластинки получаются при учете только обжатия.
- Получены условия упругого защемления внутреннего контура кольцевой пластинки и решена задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины. Показано, что ослабление упруго-зашемленной опоры существенно не влияет на форму графиков расчетных величин. При существенном ослаблении упруго защемленной опоры прогиб защемленного края существенно увеличивается, а поперечная сила и изгибающий момент уменьшаются.
- Получены и решены дифференциальные уравнения, описывающие плоскую задачу и задачу изгиба ортотропной пластинки-полосы линейно переменной толщины, находящийся в температурном поле, при учете влияния поперечного сдвига. Показано, что учет поперечного сдвига приводит к увеличению прогиба и уменьшению поперечной силы. С увеличением коэффициента, характеризующего поперечный сдвиг, точка максимума прогиба приближается к тонкому краю пластинки. Указанное изменение напряженно-деформированного состояния является результатом только лишь влияния теплового поля. Если температура повышается, то указанное воздействие увеличивается в прямо пропорциональном порядке.

При решении всех задач применялся метод коллокации и численные расчеты были сделаны относительно безразмерных величин, благодаря чему в каждом случае фактически был решён целый класс задач.

### **Список научных работ по теме диссертации**

1. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Проектирование равнопрочной балки с учетом касательного напряжения. //В. сб.: Механика оболочек и пластин . Труды 19-й Международной конференции, Нижний Новгород, 1999 г. с.94-98.
2. Киракосян Р.М., Степанян С.П. К проектированию равнопрочной ортотропной балки минимального объема при учете касательного напряжения.// Изв. АН Арм. ССР, Механика, 2000г., том 53, №3, с. 36-44.
3. Степанян С.П. Проектирование равнопрочных кольцевых пластин из цилиндрически ортотропного упругого материала при учете касател. напряж. //8-ой всероссийский съезд по теоретической и прикладной мехамике, Перм, 2001, стр.543.
4. Киракосян Р.М., Степанян С.П. К уточненной теории ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок.//Труды VI международной конференции, сентябрь, 21-26, Горис-Степанакерт, 2008, с.258-262.
- 5.Степанян С.П. Задача ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига //Изв.НАН РА, Механика, 2009, 62, №2, с.3-9.
6. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига.// Докл. НАН РА. 2010. Т. 110. N 4. с. 359-366.
7. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Об устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига, Сб. научн. трудов межд. конф.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван, 2010, том 1, стр. 292-296.

8. Степанян С.П. К задаче двухслойной круглой ортотропной пластинки при учете поперечного сдвига// Сб. научн. трудов межд. конф.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван. 2010г., том 2, стр 175-179.
9. Степанян С.П., Аревшатян Н.Г. О влиянии характера изменения касательных напряжений по толщине пластинок//Изв. Союза Строителей Армении, 2011г., №10-11, с.55-66.
10. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Об ортотропной кольцевой пластинке оптимальной линейно-переменной толщины.//Труды VII международной конференции, сентябрь, 19-23, Горис-Степанакерт, 2011г., стр. 215-222.
11. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Уточненная техническая теория ортотропных оболочек переменной толщины. В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела" посв. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. стр. 184-192.
12. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно переменной толщины при учете поперечного сдвига.//Труды III международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды". 2012г. Цахкадзор. Армения. 2012г., том 1, С. 299-303.
13. Степанян С.П. Линейная задача статической устойчивости ортотропной оболочки переменной толщины при учете поперечного сдвига //Актуальные проблемы прикладной математики информатики и механики. Сб. трудов межд. конф., Воронеж 26-28 ноября, 2012г. часть 1, стр. 351-355.
14. Степанян С.П. Об одной задаче термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины с учетом поперечного сдвига // Актуальные проблемы прикладной математики информатики и механики, Воронеж 12-14 декабря, 2013г., стр.284-289.
15. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете поперечного сдвига// Математические методы и физико механические поля, 2013г, том 56, № 4, стр. 125-131.
16. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Напряженно деформированное состояние двухслойной круглой ортотропной пластинки с малой сдвиговой жесткостью // Прикладная механика. 2014, т.50, №5, с.132-144.
17. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Прикладная теория устойчивости ортотропной колонны переменного сечения при учете поперечного сдвига и собственного веса//Труды XVII международной конференции современные проблемы механики сплошной среды, Ростов на Дону, октябрь 14-17, 2014г., том 2, с. 35-39.
18. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго защемленной опорой //ДНАН Арм. 2014,т.114, №3, стр.205-212.
19. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Устойчивости сжатых стержней при наличии упруго защемленной опоры //ДНАН Арм.2014,т.114, №4, стр.309-315.
20. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Stress-Strain State of a Two-Layer Circular Orthotropic Plate with Low Shear Stiffness//International Applied Mechanics, 2014, volum 50, Issue 5, pp. 593-604, Springer.
21. Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба балки линейно переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры. //Труды VIII международной конференции Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред Горис-Степанакерт, сентябрь 22-26, 2014г., стр. 408-412.

22. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. On a Model of Elastic Clamped Support of Plate-Strip //International scientific Journal Modeling of Artificial Intelligence, ISSN: 2312-0355, 2015. vol. 6, Is 2, pp. 67-74.
23. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Problem of Thermoelasticity for an orthotropic plate-strip of variable thickness with regard for transverse shear //JOURNAL OF MATHEMATICAL SCIENCES, 2015.Vol. 208, No. 4, pp. 417-424, July, Springer.
24. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание //ДНАН Арм., 2016, т.116, №2, стр.120-127.
25. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая краевая задача упруго защемленной по краю частично нагруженной круглой ортотропной пластинки// Изв.НАН РА, Механика, 2016, №3, с.59-70.
26. Степанян С.П. Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры //ДНАН Арм.2016,т.116, №1, стр.26-33.
27. Stepanyan S.P. The Bending Problem of Hinged Circular Plate on an Elastic Foundation.// Russian Journal of Mathematical Research. Series A, 2016, Vol. (4), Is. 2, pp. 64-70.
28. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Non-classical problem of bend of an orthotropic annular plate of variable thickness with an elastically clamped support// Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, 2017, 51, №2, pp.168-176.
29. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Устойчивость стержня при учете уменьшения сжимающей силы упруго-защемленной опорой // Изв.НАН РА, Механика, 2017, №3, с.57-66.

## ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունում ուսումնասիրվել են ոչ դասական դրվածքի դեպքում օրթոտրոպ բարակապատ տարրերի (հեծան, ձող, սալ և թաղանթ) ծոման և կայունության խնդիրների լայն դաս ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի կիրառական տեսության շրջանակներում: Ծոման և կայունության խնդիրների համար ձևակերպվել է նոր տիպի եզրային պայման(առաձգական-ամրակցում) և ստացվել են այդ պայմանը նկարագրող առնչությունները: Դրված խնդիրների լուծման համար զարգացվել է համապատասխան մեթոդ թվային վերլուծության համար:

Փոփոխական հաստության հեծանի և կլոր սալի համար լուծվել են օպտիմիզացիայի խնդիրներ ինչպես ընդլայնական սահքի և սեփական քաշի հաշվառմամբ, այնպես էլ առանց դրանց:

Ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ ուսումնասիրվել է տարբեր գլանաձև օրթոտրոպ կլոր շերտերից կազմված երկշերտ սալի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը:

Ընդլայնական սահքի և սեփական քաշի հաշվառմամբ ուսումնասիրվել է փոփոխական հաստության թաղանթի և սյան կայունությունը:

Նետագոտվել է փոփոխական հաստության ձողերի կայունությունը և ոչ դասական դրվածքով մասնակի բեռնավորված օրթոտրոպ կլոր սալի ծոմուրը:

Հետագոտվել է ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ ջերմային դաշտում գտնվող փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալ-շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը:

Ատենախտությունում մասնավորապես ստացվել են հետևյալ նոր արդյունքները:

- Մակերևութային շոշափող բեռի ազդեցությամբ ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ լուծվել է օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման խնդիրը: Ցույց է տրվել, որ ստացված լուծումից ստացվում է իզոտրոպ սալի խնդրի լուծումը՝ ընդունելով

$$k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} = 1, \text{ որտեղ } E_\theta \text{ և } E_r \text{ նյութի Ցունգի մոդուլներն են: Եթե } k < 1, \text{ նորմալ}$$

մակերևութային բեռի ազդեցության դեպքում, ծոռղ մոմենտները սալի կենտրոնում ունեն եզակիություն, իսկ  $k > 1$  դեպքում նրանք հավասար են 0-ի: Միայն մակերևութային շոշափող բեռների ազդեցության դեպքում ծոռղ մոմենտները անկախ  $k$  -ի արժեքից հավասար են 0-ի:

- Շերտավոր, շրջանաձև սալի խնդրի համար ցույց է տրվել, որ եզրի մոտ նորմալ լարումները դառնում են բացասական և մոդուլով աճում են: Բացասական դառնալը նշանակում է եզրի մոտ շերտերը ձգտում են անջատվել միմյանցից, իսկ նրանց մոդուլով մեծանալը նշանակում է, որ եզրի մոտ կա լարումների կոնցենտրացիա: Այդ անոմալիան հետևանք է այն բանի, որ սալերի դասական տեսությունը հաշվի չի առնում ոչ հարթ, և ոչ էլ հակահարթ եզրային շերտը, իսկ ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ այդ անոմալիան վերանում է: Դա նշանակում է, որ ընդլայնական սահքի հաշվառման դեպքում հաշվի է առնվում հակահարթ եզրային շերտի էֆեկտը:

- Լուծվել է փոփոխական հաստության հավասարամուր օրթոտրոպ հեծանի նախագծման խնդիրը ընդլայնական շոշափող լարումների հաշվառմամբ: Ցույց է տրվում, որ գոյություն ունեն մեկ պարամետրանի հավասարամուր հեծանների ընտանիք, որում հեծանները միմիանցից տարբերվում են միայն ծոման գերակշռման տեղամասերով: Կտրման գերակշռման տեղամասերով նրանք համակնում են և ունեն հաստատուն հաստություն: Ցույց է տրվել նաև, որ ճկվածքները ավելի փոքր են, քան համապատասխան դասական դեպքի ճկվածքները: Որպես օպտիմալ վերցված է այն հավասարամուր հեծանը, որի ծավալը ամենափոքրն է:

- Լուծվել է տված ծավալով գծային փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ օղակաձև օպտիմալ սալի որոնման խնդիրը: Հոծ սալը ստացվում է օղակաձևից որպես մասնավոր դեպք, երբ ներքին եզրի շառավիղը ձգտում է 0-ի: Որպես օպտիմալության պայման ընդունվում է ճկվածքի ամենամեծ արժեքի մինիմալացումը: Ցույց է տրվում, որ սալի օպտիմալությունը կախված է նյութի անիզոտրոպիայից, բեռի բնույթից և ներքին եզրի հարաբերական շառավղից: Ցույց է տրվում նաև, որ օպտիմալ սալի ճկվածքի ամենամեծ արժեքը մոտավորապես 1,5 անգամ փոքր է, քան համապատասխան հաստատուն

հաստության սալի ամենամեծ ճկվածքը: Ընդլայնական սահքի հաշվառումը բերում է մոտավորապես 18% ճշգրտման՝ թե՛ օպտիմալ և թե՛ հաստատուն հաստության սալերի դեպքում:

- Ճշգրտված տեսության շրջանակներում լուծվել է գծային փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ գլանաձև թաղանթի կայունության խնդիրը: Ցույց տրվել, որ նույն ծավալով գծային փոփոխական հաստությամբ թաղանթների մեջ, որոնց երկու ճակատները կոշտ ամրակցված են կամ հողակապորեն հենված, ամենամեծ կրիտիկական սեղմող ուժ ունի հաստատուն հաստության թաղանթը: Ընդլայնական սահքի հաշվառումը բերում է կրիտիկական ուժի փոքրացման:

- Ճշգրտված տեսությամբ, սեփական քաշի և ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ լուծվել է օրթոտրոպ սալ-շերտի կայունության խնդիրը: Դիտարկվել են տարբեր եզրային պայմաններ. «ամրակցում-ազատ» և «ամրակցում-հողակապ»: Կատարված թվային վերլուծությունը ցույց է տվել, որ նշված եզրային պայմանների դեպքում նյութի ընդլայնական սահքի մոդուլի փոքրացմանը զուգընթաց կրիտիկական արժեքը փոքրանում է և՛ արտաքին ուժի, և՛ սեփական քաշի կամայական հարաբերության դեպքում: Սեփական քաշի ավելացմամբ ընդլայնական սահքի ազդեցությունը եզրային երկու պայմանների դեպքում էլ մեծանում է:

- Փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ թաղանթի համար կառուցվել է կիրառական ճշգրտված մոդել, որը հաշվի է առնում ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների ազդեցությունը: Առաջարկված մոդելով լուծվել է խնդիր գլանային միջին մակերևույթով և առանցքասիմետրիկ, գծային օրենքով փոփոխվող փոփոխական հաստությամբ թաղանթի համար: Թվային վերլուծությունը ցույց է տվել, որ հաստատուն հաստության դեպքում ստացված արդյունքները պրակտիկորեն համնկնում են Ս.Ա. Համբարձումյանի տեսությամբ ստացված արդյունքների հետ: Ընդլայնական սահքի հաշվառումը բերում է ներքին ուժերի մեծացման: Դա բացատրվում է նրանով, որ համապատասխան դեֆորմացիաների արտահայտությունների մեջ որպես գումարելի մասնակցում է թաղանթի ճկվածքը, որը սահքի հաշվառումով մեծանում է: Այդ էֆեկտը սալի համար բացակայում է, քանի որ հարթ խնդիրը անջատվում է ծռման խնդրից:

- Ընդլայնական սահքի և սեփական քաշի հաշվառմամբ հետազոտվել է սյան կայունության խնդիրը: Ստացվել են այն հավասարումները, որոնցով կարելի է լուծել ինչպես սյան սովորական կայունության խնդիր, այնպես էլ օպտիմիզացիայի խնդիր, գտնելով սյան այնպիսի փոփոխական կտրվածքը, որին կհամապատասխանի ամենամեծ կրիտիկական ուժ:

- Չողի կայունության խնդրի համար ձևակերպվել է առաձգական ամրակցման հենարանի պայմանը և այդ պայմանով լուծվել են սեղմվող ձողի ստատիկ կայունության տարբեր խնդիրներ: Ցույց է տրվել, որ երբ առաձգական ամրակցումը ձգտում է կոշտ ամրակցման, ապա կրիտիկական ուժի ստացված արժեքները համնկնում են հայտնի արժեքների հետ: Ցույց է տրվել նաև, որ

առաձգական ամրակցման թուլացումը բոլոր դեպքերում բերում է կրիտիկական ուժի էական փոքրացման

- Ընդհանրացվել և հիմնավորվել է ծովող հեծանի համար առաձգական ամրակցման պայմանը սեղմվող ձողի կայունության խնդրի դեպքում, երբ հաշվի է առնվում առաձգական մասսայի շփման հետևանքով սեղմող ուժի փոքրացումը: Առաջարկվել է շփման ուժի հաշվի առնելու մեթոդ, որի կիրառմամբ լուծվել է իզոտրոպ ձողի կայունության խնդիրը, երբ ձողի մի ծայրը առաձգական ամրակցված է, իսկ մյուսը՝ կոշտ ամրակցված: Ցույց է տրվել, որ առաձգական մասսայի հետ ձողի ներդրված մասի շփման հետևանքով արտաքին կրիտիկական ուժի արժեքը անմիջապես ձողին ազդող ուժի արժեքից մեծ է: Առաձգական ամրակցման հենարանի թուլացմամբ, երբ այն դառնում է լրիվ ազատ, այդ ուժերի արժեքները համակնում են:

- Հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցությամբ լուծվել է գծային օրենքով փոփոխվող փոփոխական հաստության հեծանի ծոման խնդիրը, երբ հեծանի մի ծայրը առաձգական ամրակցված է, իսկ մյուսը՝ հողակապորեն հենված: Ցույց է տված, որ երբ առաձգական մասսան թուլանում է, ապա ծող մոմենտը այդ եզրում մնալով բացասական, մոդուլով փոքրանում է, իսկ ճկվածքը՝ մեծանում: Ցույց է տված նաև, որ ընդլայնական սահքի հաշվառումը քիչ է ազդում ընդլայնական ուժի գրաֆիկի տեսքի վրա թողնելով այն ուղիղ գիծ, իսկ ճկվածքները մեծանում են, որը բնական է քանի որ հենարանի թուլացումով փոքրքնում է կոշտությունը: Սեղմող ուժերի և բաշխված բեռի միաժամանակյա ազդեցության դեպքում ստացվել են հեծանի ծոման հավասարումները: Ենթադրվում է, որ առկա է առաձգական ամրակցում և հաշվի է առնվում շփման հաշվին սեղմող ուժի փոքրացումը: Անցնելով անչափ մեծությունների լուծվել է կոնկրետ խնդիր և ուսումնասիրվել է հեծանի կայունությունը:

- Կատարվել է թվային վերլուծություն եզրով առաձգական ամրակցված և կենտրոնական մասում հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցությամբ օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման խնդրի լուծման ժամանակ, երբ հաշվի է առնվում ընդլայնական սահքի ազդեցությունը և սեղմումը: Ցույց է տված, որ երբ հաշվի է առնվում սեղմումը, ապա  $M_r$  և  $M_\theta$  ծող մոմենտները սալի կենտրոնում հավասար են իրար և զրո չեն, իսկ երբ հաշվի է առնվում միայն ընդլայնական սահքը, դրանք դառնում են զրո: Երբ հաշվի է առնվում սեղմումը ապա  $M_\theta$  ծող մոմենտը բեռնավորված և չբեռնավորված մասերի ընդհանուր եզրի վրա ունի առաջին սեռի խզում: Ցույց է տրվում նաև, որ ստացված լուծումից ստացվում են այն դեպքերի հայտնի լուծումները, երբ սալի կենտրոնում ազդում է կենտրոնացված ուժ կամ էլ ամբողջ մասի վրա հավասարաչափ բաշխված բեռ:

- Առաձգական ամրակցված փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ սալ-շերտի ծոման խնդրի լուծման դեպքում, երբ հաշվի է առնվում ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների ազդեցությունը կատարվել է գրաֆիկական անալիզ: Ցույց է տրվել, որ առաձգական ամրակցման հենարանի կոշտության

փոփոխությունը պրակտիկորեն չի ազդում ճկվածքի, ծռող մոմենտների և ընդլայնական ուժի գրաֆիկների տեսքի վրա:

- Եզրով առաձգական ամրակցված և առաձգական հիմքով օրթոտրոպ կլոր սալի առանցքասիմետրիկ ծոման խնդրի համար կատարվել է թվային և գրաֆիկական վերլուծություն: Ցույց է տրվել, որ առաձգական հիմքի հակազդեցության մեծացումը բերում է ճկվածքների փոքրացման: Երբ բացակայում է առաձգական հիմքը, ապա ամենափոքր ճկվածքներ կստացվեն, երբ հաշվի է առնվում միայն սեղմումը:

- Օղակաձև կլոր սալի ներքին եզրի համար ստացվել են առաձգական ամրակցման պայմանները և փոփոխական հաստությամբ օրթոտրոպ օղակաձև սալի համար լուծվել է ծոման խնդիր: Ցույց է տրված, որ առաձգական հենարանի թուլացումը էապես չի ազդում հաշվարկային մեծությունների գրաֆիկների տեսքի վրա: Առաձգական հենարանի բավականաչափ թուլացմամբ այդ եզրում ճկվածքները մեծանում են, իսկ ընդլայնական ուժը և ծռող մոմենտը փոքրանում:

- Ընդլայնական սահքի ազդեցության հաշվառմամբ ջերմային դաշտում գտնվող, գծային օրենքով փոփոխվող, փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալ-շերտի հարթ և ծոման խնդիրների լուծման համար ստացվել և լուծվել են դիֆերենցիալ հավասարումները: Ցույց է տրվել, որ ընդլայնական սահքի հաշվառումը բերում է ճկվածքի մեծացմանը և ընդլայնական ուժի փոքրացմանը: Ընդլայնական սահքը նկարագրող պարամետրի մեծացմամբ ճկվածքի մեծագույն արժեքի ընդունման կետը տեղաշարժվում է դեպի սալ-շերտի բարակ կողմը: Լարվածադեֆորմացիոն վիճակի նշված փոփոխությունը արդյունք է միայն ջերմային դաշտ ազդեցությանը: Երբ ջերմաստիճանը մեծանում է, ապա նշված ազդեցությունն աճում է ուղիղ համեմատական կարգով:

- Բոլոր խնդիրների լուծման ժամանակ կիրառվել է կոլոկացիաների մեթոդը և թվային հաշվարկները կատարվել են անչափ մեծությունների նկատմամբ, որի շնորհիվ յուրաքանչյուր դեպքում փաստացի լուծվել է խնդիրների մի ամբողջ դաս:

## SUMMARY

In the present scientific thesis, a rather extensive class of problems on the bending and stability of thin-walled elements (beams, rods, plates and shells) has been studied in the framework of the applied theory of orthotropic plates of variable thickness in the non-classical formulation, taking into account the influence of deformations of transverse shear. For bending problems and stability problems, a new kind of boundary conditions has been formulated (an elastically-clamped support) and the relations describing these conditions have been obtained. An appropriate method of numerical analysis has been developed to solve the posed problems. Optimization problems for beams and round plates of variable thickness have been solved both with and without ignoring the transverse shear and its own weight.

The stress-strain state of two-layered circular orthotropic plate consisting of two different cylindrically orthotropic circular layers has been investigated taking into account the transverse shear.

The stability of orthotropic shells and columns of variable thickness is studied, taking into account the transverse shear and its own weight.

The stability of rods of variable thickness and the bending of a partially loaded circular orthotropic plate of constant thickness under nonclassical formulation have been investigated.

The stress-strain state of an orthotropic plate-strip of linearly variable thickness, located in a temperature field is studied particularly for the transverse shear.

In the thesis, in particular, the following new results have been obtained.

- The problem of the bending of an orthotropic circular plate is solved under the action of surface tangential loads with allowance for the transverse shear. It is shown that, taking the

parameter  $k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} = 1$ , where  $E_\theta$  and  $E_r$  are the Young's modulus of the material, the

solution obtained for the isotropic plate is obtained from the solutions already obtained. If  $k < 1$  under the action of normal surface loads, the bending moments at the center of the plate have a singularity, while  $k > 1$ , they are zero. The moments in the center of the plate are zero only under the action of tangential surface loads regardless of the value of the parameter  $k$ .

- In the problem of a circular laminated plate, it is shown that at the boundary the normal stresses become negative and increase in the module. Becoming negative means that at the boundary the layers of the plate tend to break away from each other, and the increasing of the same module means that there is a voltage concentration at the boundary. This anomaly is a consequence of the fact that the classical theory of the plates does not take into account the effects of either flat or antiplate boundary layer, and this anomaly disappears when the deformation of the transverse shear is taken into account. This is explained by the fact that the effect of the antiplane boundary layer is actually taken into account when the transverse shift is taking into consideration.

- The problem of the design of an equally strong orthotropic beam of variable thickness has been solved, taking into account the transverse tangential stress. It is shown that there exists a one-parameter infinite family of equiprobable beams which differ from each other only in the region of dominant bending. In the section of the dominant cut they coincide and have a constant thickness. It is shown that deflections can be less than the corresponding classical values. As an optimal one, this is an equally strong beam, the volume of which is minimal.

- The problem of determining the optimal linearly variable thickness of an orthotropic annular plate of a given volume has been solved. A continuum plate is obtained from an annular plate as a particular case, when the radius of the inner boundary tends to zero. The criterion of optimality assumes the condition of the smallest value of the greatest deflection of the plate. It is shown that the optimum shape of the plates depends on the anisotropy of the material, the nature of the loads, and on the relative radius of the inner boundary of the plate. It is also shown that the maximum deflection of the optimum plate is approximately 1.5 times smaller than that of the corresponding plate of constant thickness. Corrections to the value of the maximum deflection when taking into account the transverse shift both for a plate of constant thickness and for an optimum plate are practically equal and amount to approximately 18%.

- Within the framework of the refined theory, the problem of the static stability of an orthotropic cylindrical shell of linearly variable thickness has been solved. The analysis of

the problems of optimality showed that among all shells of linearly variable thickness of the same volume with the hinged support of both ends, the shell with a constant thickness has the greatest critical value of the compressive forces. The allowance for transverse shear leads to a decrease in the critical force.

- The problem of stability of an orthotropic plate-strip is solved by the refined theory, taking into account its own weight and transverse shift. The variants of the boundary conditions "pinch-free" and "pinch-hinge" have been considered. The numerical analysis has shown that with a decrease in the modulus of the transverse shear of the material, the critical value decreases both at any ratio of the external force and the intrinsic weight. With an increase in the proportion of intrinsic weight, the effect of transverse shear for both cases of boundary conditions increases.

- An applied refined model of orthotropic shells of variable thickness has been constructed, taking into account the influence of deformations of transverse shear. The proposed model solves the problem for a shell with a circular cylindrical middle surface, the thickness of which changes axisymmetrically and linearly. The numerical analysis has shown that in the case of a constant thickness, the results practically coincide with the corresponding results of S.A. Ambartsumian's theory. The allowance for transverse shear leads to an increase in axial and annular forces. This is explained by the fact that in the expressions for the corresponding deformations, the bending of the shell participates as a summand, which, when the transverse shift is taken into account, increases. This effect is absent for the plates, since their planar problem is separated from the bending problem, hence, the deflection of the plate does not participate in tangential deformations.

- The stability of the column has been studied taking into account both the effects of transverse shear and its own weight. The basic resolving equations that allow solving both the usual stability problem of a column of a given variable cross-section and the optimization problem have been determined, after which the variable cross section to which the greatest critical force corresponds, has been determined.

- The conditions of an elastically-clamped support for the stability of a rod are formulated and a number of problems of the static stability of a compressed rod are solved under these conditions. It is shown that when the elastic-clamped support tends to rigid jamming, the obtained values of the critical force coincide with the corresponding known values. It is also shown that if the elastically clamped support weakens, the critical forces substantially decrease in all cases.

- The conditions of the elastically-clamped support of a transversely bent beam for the stability problem of a compressed rod have been generalized and justified, when the decrease in the compressive external force due to friction of the edge part of the rod inserted into the elastic array is taken into account. A method is proposed for taking frictional force into account, with the use of which the stability problem of an isotropic rod of constant cross-section is solved, when one of its edge is elastically clamped and the other is clamped rigidly. It is shown that, because of the friction of the inserted part of the rod with an elastic mass, the value of the external (real) critical force is greater than the value of the force acting on the rod. With the weakening of the elastic-clamped support, these values decrease, and when the elastically-clamped support practically disappears turning into a free end, they take the same value.

- The problem of the bending of a beam of linearly variable thickness has been solved under the action of a uniformly distributed load when one end of the beam is resiliently pinched, while the other is articulated. It is shown that when the elastic mass is weakened, the

bending moment on the elastically clamped support decreases in modulus remaining negative, the deflection increases. This is natural as the weakening of the support reduces the rigidity. It is also shown that the transverse shift has little effect on the shape of the transverse force graph, which practically remains a straight line, and the deflections increase. The equations of the beam bending problem have been obtained with the simultaneous action of compressive forces and transverse loading. It is believed that the edges of the beam have an elastically-clamped support and allowance for the reduction of the compressive force by the support due to friction. Passing to dimensionless quantities, a specific problem has been solved. The stability of the beam has been discussed.

- The numerical analysis of the solutions of the bending problem of an elastically-clamped orthotropic circular plate along the contour has been carried out, taking into consideration the effects of the transverse shear and compression, when the uniformly distributed lateral load acts on the central part of the plate. It is shown that in the case of compression, the bending moments at the center of the plate are equal and different from zero, and these moments are zero only if the effect of the transverse shear is taken into account. When calculating the compression, the bending moment at the interface between the loaded and unloaded parts of the plate has a discontinuity of the first kind. From the solution found, known solutions have been obtained for cases in which the concentrated force acts in the center of the plate and when a uniformly distributed load acts on the entire plate.

- Numerical and graphical analyses have been carried out for the axisymmetric bending problem of an elastically-clamped orthotropic circular plate resting on an elastic base. It is shown that, as the reaction of the elastic base increases, the deflections of the plate decrease. In the absence of an elastic base, the lowest values of deflection of the plate are obtained only by taking into account the reduction.

- Conditions for elastic pinching of the inner boundary of the annular plate have been obtained and the bending problem of an orthotropic annular plate of variable thickness has been solved. It is shown that the weakening of the elastically clamped support does not significantly affect the shape of the graphs of the calculated values. With a substantial weakening of the elastically clamped support, the deflection of the clamped edge substantially increases, while the shear force and the bending moment decrease.

- Differential equations have been obtained and solved for describing the plane problem and the bending problem of an orthotropic plate-strip of linearly variable thickness in a temperature field, taking into account the effect of transverse shear. It is shown that taking into account the transverse shear leads to an increase in deflection and a decrease in the transverse force. As the coefficient characterizing the transverse shift increases, the maximum point of the deflection approaches the thin edge of the plate. This change in the stress-strain state is the result of only the influence of the thermal field. If the temperature rises, this effect increases in the directly proportional order.

In solving all problems, the collocation method was applied and numerical calculations were made with respect to dimensionless quantities, so that in each case a whole class of problems has actually been solved.

A handwritten signature in black ink, consisting of stylized, cursive letters that appear to be 'M. Y.' followed by a flourish.