

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՇԵԿՅԱՆ ԼԱՎՐԵՆՏԻ ԱՐԱՄԻ

**ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ  
ՓՈՒԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏՐԻԲՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ԵՎ ՋԵՐՄԱՅԻՆ  
ԳՈՐԾՈՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ**

Ա.02.04 “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա” մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի զիտական  
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

**ШЕКЯН ЛАВРЕНТИЙ АРАМОВИЧ**

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ  
С УЧЕТОМ ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ФАКТОРОВ**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук по специальности  
01.02.04 – “механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН – 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի  
ինստիտուտում:

Գիտական խորհրդատու՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ, ֆ.մ.գ.դ.,  
պրոֆ. Ս.Ս.Մխիթարյան  
ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ,  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս.Հ.Սարգսյան  
ֆ.մ.գ.դ. Կ.Լ.Աղայան  
ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ռ.Ս.Գևորգյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Առաջատար կազմակերպություն՝

ՌԴ ԳԱ Ա.Իշլինսկու անվան  
Մեխանիկայի պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2013թ. հունվարի 18 – ին, ժամը 14.00-ին  
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի-047 մասնագի-  
տական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2,  
avsah@mechins.sci.am):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի  
ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ 14 դեկտեմբերի 2012թ.

Մասնագիտական խորհրդի  
գիտական քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ա. Վ. Սահակյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Научный консультант: член корр. НАН РА, д.ф.м.н., проф. С.М.Мхитарян

Официальные оппоненты: член корр. НАН РА, д.ф.м.н., проф. С.О.Саркисян  
д.ф.м.н. К.Л.Агаян  
д.ф.м.н., проф. Р.С.Геворкян

Ведущая организация: Институт проблем механики РАН  
им. А.Ю.Ишлинского

Защита диссертации состоится 18 января 2013г. в 14<sup>00</sup> часов на заседании  
специализированного совета Механики - 047 в Институте механики НАН РА по  
адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 14 декабря 2012г.

Ученый секретарь  
специализированного совета, д.ф.м.н.



А. В. Саакян

**Актуальность темы.** Теория контактных и смешанных задач, несмотря на огромное разнообразие их постановок и методов исследования, под влиянием растущих потребностей техники и инженерной практики все время на передний план выдвигает необходимость постановки и эффективного решения новых классов сложных задач, являющихся естественным обобщением и развитием соответствующих задач классической теории упругости. Весьма важное в теоретическом и прикладном аспектах значение имеет развитие направления по систематическому исследованию вопросов контактного взаимодействия деформируемых тел с возможно полным учетом их геометрических и физико-механических характеристик. Разработка эффективных методов количественного и качественного изучения полей напряженно-деформированного состояния контактирующих тел и основанных на них способов увеличения контактной прочности и долговечности инженерных конструкций, представляет актуальную научно-техническую проблематику.

Теория контактных задач механики деформируемого твердого тела по своей внутренней логике развития с одной стороны, и под влиянием растущих запросов машиностроения, авиации, транспорта, строительства и других областей инженерной практики с другой стороны, всегда привелся к необходимости создания новых научных направлений и развития прежних. В этом русле в семидесятых годах прошлого столетия основополагающими работами Л.А.Галина, Л.А.Галина и И.Г.Горячевой, И.Г.Горячевой и В.М.Александрова было положено начало нового научного направления негерцевских неклассических контактных задач с учетом поверхностной структуры контактирующих между собой деформируемых тел в виде факторов шероховатости, трения, износа тепловыделения и других трибологических факторов. Параллельно с интенсивным развитием и обобщением новыми идеями, методами и результатами упомянутых авторов и их учеников, а также других авторов, это направление все время на передний план выдвигает новые задачи и новые постановки. Поэтому в научной литературе чаще появляются исследования по неклассическим контактным задачам, когда при определении напряженно-деформированного состояния контактирующих между собой деформируемых твердых тел учитываются трибологические факторы, существующих в действительности при контактировании деталей в инженерных конструкциях и вносящих существенные поправки в механические характеристики их контактного взаимодействия. К указанному научному направлению относится и настоящая диссертационная работа, которая посвящена систематическому исследованию плоского, осесимметричного и пространственного напряженно-деформированного состояния контактирующих между собой деформируемых твердых тел, когда учитываются факторы их поверхностных шероховатостей, трения, износа, смазки и тепловыделения от трения.

**Целью диссертационной работы является:**

- исследование и построение эффективных решений определяющих нелинейных интегральных уравнений трибологических контактных задач механики деформируемого твердого тела;

- качественное и количественное исследование влияния факторов шероховатости поверхностей, износа, смазки и температуры на напряженно-деформированное состояние контактирующих между собой деформируемых твердых тел;
- исследование напряженно-деформированного состояния контактирующих между собой деформируемых твердых тел (вал, подшипник скольжения, подпятник, тормозные колодки) в узлах трения инженерных конструкций и улучшение их прочностных и энергетических характеристик;
- исследование тепловых и напряженно-деформационных полей в разнородных твердых телах, контактирующих между собой и с тонкостенным элементом.

**Методы исследований.** В работе использованы:

- метод интегральных уравнений;
- метод математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева, Гегенбауэра и Якоби;
- метод нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Вольтерра;
- метод последовательных приближений в разных метрических пространствах;
- метод интегрального преобразования Ханкеля.

**Научная новизна работы** состоит в следующем:

- развитие научного направления теории негерцевых контактных задач по учету факторов шероховатости, износа, сил трения и тепловыделения;
- разработка единого подхода к решению нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Вольтерра, встречающихся в контактных задачах механики деформируемого твердого тела, учитывающих трибологические факторы;
- замкнутые системы нелинейных уравнений и их эффективные решения достаточно широкого класса плоских, осесимметричных и пространственных неклассических задач контактного взаимодействия деформируемых твердых тел с учетом факторов шероховатости, трения, износа, смазки и температурных воздействий;
- закономерности изменения основных механических величин, как при статическом контактировании, так и при соударении деформируемых твердых тел в довольно широком диапазоне изменения характерных геометрических, физических и трибологических параметров;
- определение тепловых и напряженно-деформируемых полей в разнородной термочувствительном пространстве с тонким дискообразным включением. При этом, в окрестности граничных точек включения тепловые потоки в общем случае имеют обычную квадратичную особенность, которая в некоторых частных случаях устраняемая, а при линейном по радиальному координату законе (т.е. при коническом законе) распределения температуры включения, тепловые потоки имеют также логарифмическую особенность в окрестности центра включения.

**На защиту выносятся следующие положения:**

- исследование достаточно широкого класса плоских, осесимметричных и пространственных задач контактного взаимодействия линейно или нелинейно деформируемых твердых тел с учетом факторов шероховатости поверхностей, износа, смазки и тепловыделения от трения;
- определение основных механических величин трибологических контактных задач механики деформируемого твердого тела, каковыми являются контактные напряжения, величина взаимного сближения контактирующих тел, размеры области контакта, толщина смазочного слоя, потеря мощности в узле трения. В частности выяснено, что при контактировании деформируемых твердых тел при наличии факторов шероховатости или износа, контактные напряжения ограниченные;
- установление закономерности изменения механических характеристик при вдавливании штампа с плоским основанием в нелинейно деформируемое шероховатое тело, согласно которым контактное давление принимает своего максимального значения на границе штампа, притом оно меньше, чем при линейной постановке задачи. Закон распределения контактных давлений при малых нагрузках близко к равномерному, и с возрастанием нагрузки наблюдается значительное повышение контактного давления на границе контактной области по сравнению с контактным давлением в центре штампа;
- определение механических характеристик теории удара Г.Герца соударения соответствующих тел и выявлены случаи, при которых соблюдается характерная закономерность теории удара Г.Герца, т.е, с уменьшением скорости удара продолжительность удара неограниченно возрастает;
- исследование осесимметричной контактной задачи о граничном трении кольцевого в плане штампа и упругого слоя, которое утверждает, что контактное давление между штампом и слоем принимает свой максимум в точках внутренней граничной окружности кольцевой контактной области, притом с уменьшением внутреннего радиуса штампа оно значительно превышает значению давления на внешней окружности контактной области.
- решение плоской задачи о жидкостном трении заземленной по своей внешней поверхностью упругой круглой трубы и вращающегося в ней вокруг своей оси жесткого цилиндра в режиме ограниченного смазывания, где выяснено, что с увеличением параметра скорости, параметр нагрузки (грузоподъемность) значительно возрастает;
- исследование плоской задачи жидкостного трения в режиме ограниченного смазывания круглого жесткого цилиндра и упругого вкладыша эллиптического поперечного сечения, где установлено наличие значений геометрических параметров такого вкладыша, при которых минимальная толщина смазочного слоя немного больше,

- точное решение осесимметричной задачи теплопроводности для кусочно-однородного пространства с источниками тепла и с тонким включением в виде круглого диска, по которым плотность тепловых потоков в общем случае неограничена, имея обычную квадратичную особенность в окрестности окружных граничных точек включения, и возможно логарифмической особенности в окрестности центра включения, а также существование значения теплофизических и геометрических параметров задачи, при которых плотность тепловых потоков становится ограниченной.

**Обоснованность и достоверность результатов.** Все результаты и выводы работы обоснованы строгими аналитическими методами математической теории упругости и математической физики. Достоверность полученных научных результатов обеспечена последовательным применением хорошо отработанных методов и их совпадением в частных случаях с известными.

**Практическая ценность.** Разработанный подход к решению нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Вольтерра может быть использован при решении многих других нелинейных задач как в области механики, так и других областях естественных наук. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и расчете прочности и долговечности узлов трения инженерных конструкций, машин и механизмов, работающих в машиностроении, транспорте и в других областях техники.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела “Механика упругих и вязкоупругих тел” Института механики НАН РА (1974-2012);
- всесоюзной научной конференции “Смешанные задачи механики деформируемого тела” (Ростов-на-Дону, 1977);
- семинаре по теории гидрвязкоупругости в Институте проблем механики АН СССР (Москва, 1980)
- 2-ой Всесоюзной конференции “Смешанные задачи механики деформируемого тела” (Днепропетровск, 1981);
- годовых научных конференциях ГИУА (1982-2011);
- всесоюзной научной конференции “Ползучесть в конструкциях” (Днепропетровск, 1982);
- 8-ой Всесоюзной конференции по прочности и пластичности (Пермь, 1983);
- 2-ой Всесоюзной конференции “Ползучесть в конструкциях” (Новосибирск, 1984);
- 2-ой Всесоюзной конференции по теории упругости (Тбилиси, 1984);
- 3-ой Всесоюзной конференции “Смешанные задачи механики деформируемого тела” (Харьков, 1985);
- выездном заседании по современным проблемам теории контактных взаимодействий (Ереван, 1988);

- ԵՊՀ տեսական մեխանիկայի ամբիոնի 65-ամյակին նվիրված գիտաժողովին (Երևան, 1995);
- Djrbashian Memorial Conference (Yerean, 1998);
- международной конференции “Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций: Ресурс-2000” ( Киев, 2000);
- международной конференции по проблемам прикладного машиностроения (Тбилиси, 2000);
- 1-ой международной научно-технической конференции “Современные проблемы оптимизации в инженерных приложениях. IWOPE–2005” (Ярославль, 2005);
- международной конференции “Механика композитов и оптимальное проектирование” (Агавнадзор, 2006);
- международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (Цахкадзор, 2007);
- 6-ой международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” (Горис, 2008);
- 8-th International Congress on Thermal Stresses (University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 2009);
- 2-ой международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” ( Дилижан, 2010);
- 7-ой международной конференции “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред” (Горис, 2011);
- международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвященной 100-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна (Цахкадзор, 2012).

Диссертационная работа в целом обсуждена на заседании отдела “Механика упругих и вязкоупругих тел” Института механики НАН РА, на общем семинаре факультета механики и машиноведения ГИУА и на общем семинаре Института механики НАН РА.

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликована 21 научная работа, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 215 страницах машинописного текста, включая 42 рисунка, 7 таблиц, а список литературы содержит 180 наименований.

#### **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформированы цель и круг обсуждаемых в ней вопросов, дан проблемно ориентировочный обзор основных результатов и работ, тесно примыкающих к исследуемой тематике, изложено краткое содержание диссертации, подчеркнута научная новизна полученных результатов по трибологическим контактным задачам механики деформируемого твердого тела. При этом указан тот весомый вклад,

который внесли, в частности, представители российской и армянской школ механиков в отмеченной области механики.

В **первой главе** приведены основные соотношения для деформируемых твердых тел и смазывающих жидкостей, в рамках которых в диссертационной работе исследованы конкретные контактные задачи. В ней приведены основные соотношения линейной теории упругости и термоупругости (§1.1), основные соотношения деформационной теории пластичности (§1.2), основные соотношения нелинейной теории ползучести с учетом факторов наследственности и старения, а также теории установившейся ползучести (§1.3), и, наконец, основные соотношения гидродинамической теории смазки (§1.4).

**Вторая глава** диссертации посвящена решению некоторых плоских и пространственных контактных задач для деформируемых твердых шероховатых тел.

§2.1 посвящен математическим методам сжимающих отображений в различных метрических пространствах и нелинейным интегральным уравнениям типа Гаммерштейна и Вольтерра, используемые при решении контактных задач с учетом шероховатости поверхностей контактирующих тел.

В §2.2 приведена модельная контактная задача для деформируемых твердых тел с учетом фактора шероховатости поверхностей контактирующих тел. Она построена на основе предположения, что в зоне контакта нормальные перемещения  $u$  граничных точек контактирующих деформируемых тел можно представить в виде суммы двух нормальных перемещений

$$u = u_{\text{деф}} + u_{\text{шер}} \quad (1)$$

где  $u_{\text{деф}}$  – перемещения граничных точек контактирующих тел, обусловленные деформацией тела в целом, а  $u_{\text{шер}}$  – локальное нормальное перемещение, которое получается вследствие деформации поверхностного шероховатого слоя, находящегося в области контакта граничная точка контактирующегося тела. Согласно экспериментам, в каждой точке контактной зоны перемещение  $u_{\text{шер}}$  пропорционально некоторой степени действующего в данной точке контактного давления  $p$

$$u_{\text{шер}} = A \cdot p^n, \quad (2)$$

где положительные коэффициент  $A$  и показатель  $n$  зависят от материалов контактирующих твердых тел и от степени обработки их поверхностей, причем  $0.3 < n \leq 1$ . При этом, с повышением степени обработки поверхностей, численные значения  $A$  и  $n$  уменьшаются, а для поверхностей без механической обработки  $n=1$ .

В §2.3 рассмотрена плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из упрочняющихся материалов, когда между интенсивностями напряжений  $\sigma_0$  и деформаций  $\varepsilon_0$  существует степенная зависимость  $\sigma_0 = K_i \cdot \varepsilon_0^{\mu}$  ( $i=1,2$ ), где  $K_1$  и  $K_2$  – физические константы материалов первого и

второго тел соответственно, а  $\mu$  – степень упрочнения, подчиненная условию  $0.5 < \mu \leq 1$ . Материалы контактирующих тел считаются несжимаемыми.

Используя формулы (1) и (2), на основании обобщенного принципа суперпозиции перемещений, сформулированного Н.Х.Арутюняном, решение указанной плоской задачи сводится относительно контактного давления  $p(x)$  к следующему нелинейному интегральному уравнению

$$(a_1 + a_2)p^{\frac{1}{\beta}}(x) + (A_1 + A_2) \left[ \int_{-a}^a \frac{1}{|x-s|^{1-\mu}} p(s) ds \right]^m = \delta - f_1(x) - f_2(x), (-a \leq x \leq a). \quad (3)$$

Здесь  $a_1, a_2$  и  $\beta$  ( $1 \leq \beta \leq 3$ ) – коэффициенты, учитывающие поверхностную структуру шероховатых контактирующих тел,  $2a$  – ширина участка контакта,  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  – достаточно гладкие функции, характеризующие поверхности контактирующих тел, которые будем считать четными,  $\delta$  – мера взаимного сближения тел,  $A_i$  ( $i=1,2$ ) – коэффициенты, зависящие от  $K_i$  и  $\mu$ ,  $m = 1/\mu$ .

Для определения неизвестной функции  $p(x)$  и числа  $\delta$ , помимо уравнения (3), имеем также условия равновесия каждого из сжимаемых тел (а также условия непрерывности контактных напряжений (когда  $2a$  также неизвестна).

Считая, что ширина участка контакта задана, уравнение (3) представим относительно новой безразмерной функций  $q(\xi)$  в виде нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна

$$q(\xi) = \theta \gamma^{\beta-\mu} \int_0^1 K(\xi, \eta) [1 - \gamma^{-1} f(\eta) - w^{\frac{m}{2}}(\eta) q^m(\eta)]^{\beta} w^{\frac{1}{2}}(\eta) d\eta, (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4)$$

а из условий равновесия получим

$$\gamma^{-\beta} = P_0^{-1} \int_0^1 [1 - \gamma^{-1} f(\xi) - w^{\frac{1}{2}}(\eta) q^m(\xi)]^{\beta} d\xi, \quad (5)$$

где  $P_0$  – безразмерная внешняя сжимающая сила, действующая на единицу длины контакта,  $K(\xi, \eta) = |\xi - \eta|^{\mu-1} \sqrt{w(\xi)w(\eta)}$ ,  $w(\xi) = (\xi - \xi^2)^{-\mu/2}$ ,  $\gamma = \delta/a$ .

Уравнения (4) и (5) образуют систему двух нелинейных уравнений относительно  $q(\xi)$  и  $\gamma$ .

Учитывая, что собственные функции ядра  $K(\xi, \eta)$  известные и являются многочленами Гегенбауэра, решение уравнения (4), на основании известной теоремы Гильберта-Шмидта, представлено в виде ряда по ортонормированным собственным функциям  $\{\psi_k(\xi)\}_{k=1}^{\infty}$  этого ядра

$$q(\xi) = c \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda_k^{-1} \psi_k(\xi) \quad (6)$$

с неизвестными коэффициентами  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Здесь  $C$  – постоянное, а  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  – собственные значения ядра  $K(\xi, \eta)$ . Далее, введя обозначение  $x_0 = h\gamma^{-\beta}$ , решение системы уравнений (4)-(5) сводится к бесконечной системе нелинейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

Исследование полученной бесконечной системы проводится на основе принципа неподвижной точки Банаха. С этой целью, сначала рассматривается соответственная урезанная система нелинейных алгебраических уравнений,  $x = A_N(x)$  ( $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ ) в замкнутом шаре  $\bar{S}(b, R)$   $(N+1)$ -мерного евклидова вещественного пространства  $E_{N+1}$  с центром  $b = (hP_0^{-1}, 0, \dots, 0)$  и с радиусом  $R$ .

Доказывается, что

$$\frac{RP_0}{h\sqrt{2}} + (1 - R^m)^\beta \geq 1, \quad \theta \leq \left( \frac{h - RP_0}{hP_0} \right)^{1-\alpha\mu} \frac{Rc\sqrt{\Gamma(2+\mu)}}{\Gamma(1+\mu/2)\sqrt{2}}, \quad (7)$$

тогда оператор  $A_N(x)$  отображает замкнутый шар  $\bar{S}(b, R)$  в себя. Также доказывается, что при выполнении условий

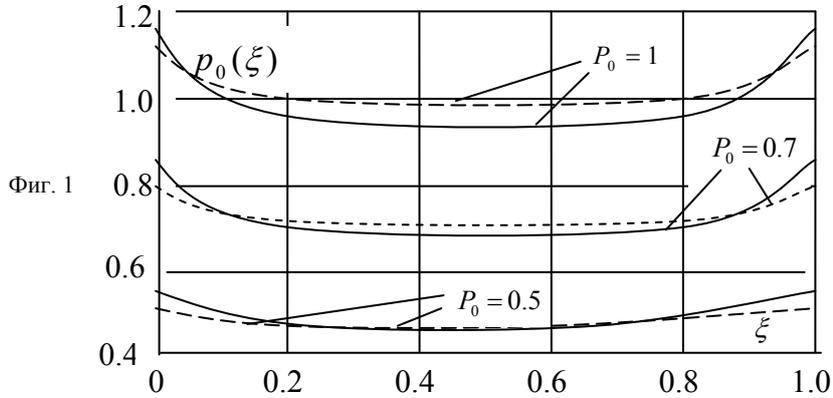
$$2(P_0^{-2}h^2\beta_1^2 + \beta_3^2) < 1, \quad 2(P_0^{-2}h^2\beta_2^2 + \beta_4^2) < 1, \quad (8)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\beta_4$  пропорциональны параметру  $\theta$ , оператор  $A_N(x)$  в  $\bar{S}(b, R)$  –сжимающий. Тогда урезанная система уравнений  $x = A_N(x)$  имеет единственное решение  $x^*$ , являющееся пределом последовательности  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ , где  $x^{(i+1)} = A_N(x^{(i)})$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ ,  $x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}) \in \bar{S}(b, R)$ .

Далее выяснено, что при выполнении этих же условий бесконечная система  $x = A(x)$  также имеет единственное решение. Затем, при помощи теоремы А.Лебега о предельном переходе под знаком интеграла доказывается, что решение урезанной системы  $x = A_N(x)$  при  $N \rightarrow \infty$  совпадает с решением бесконечной системы  $x = A(x)$ .

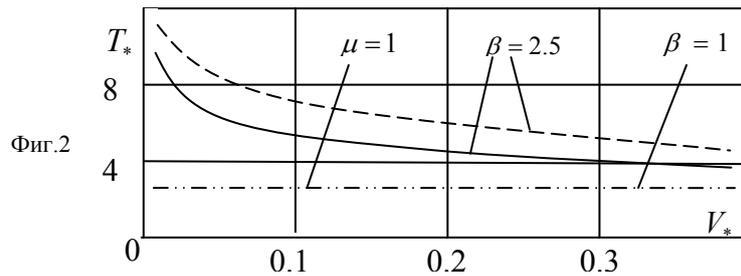
В качестве примера рассмотрена задача о давлении штампа с плоским основанием на чугунную степенно упрочняющуюся полуплоскость с шлифованной определенным образом поверхностью. В этом случае  $a_1 = A_1 = 0$ , а  $f(\xi) = 0$ . Согласно экспериментальным данным, для некоторых чугунных образцов  $a_2 = 1.289 \cdot 10^{-3.2}$  м  $(\text{кг}/\text{см})^{-0.4}$ ,  $\beta = 2.5$ . Для получения числовых результатов положим  $a = 0.1$  м,  $\mu = 0.7$  и  $\mu = 0.9$ .

На фиг.1 построены графики безразмерного давления  $p_0(\xi)$  при значениях 0.5; 0.7; и 1.0 безразмерной сжимающей силы  $P_0$ . На этих графиках сплошные линии соответствуют случаю  $\mu=0.9$ , а пунктирные – случаю  $\mu=0.7$ . Как видно из графиков фиг.1, с увеличением значения  $P_0$  давление заметно увеличивается особенно на концах контактного участка, вследствие чего эти линии все сильнее изгибаются. Последнее обстоятельство имеет место так же при возрастании  $\mu$ , когда  $P_0$  фиксировано.



Используя полученное решение, определены также основные механические характеристики теории удара Г.Герца при центральном ударе штампа прямолинейного основания о шероховатую степенно упрочняющуюся полуплоскость. При этом доказывается, что при малых скоростях штампа  $V_0$ , соответствующий нелинейный оператор  $A(x)$  сжимающий.

На графиках фиг.2 иллюстрируется ход изменения продолжительности удара  $T_*$  в зависимости от безразмерной скорости удара  $V_*$ .



Как видно из этих графиков фиг.2, при  $\beta=2.5$  соблюдается характерная закономерность теории удара Г. Герца, которая заключается в том, что с уменьшением скорости удара продолжительность удара неограниченно возрастает. Следует отметить, что такая закономерность здесь соблюдается благодаря учету шероховатостей поверхностей контактирующих тел, так как в плоской контактной

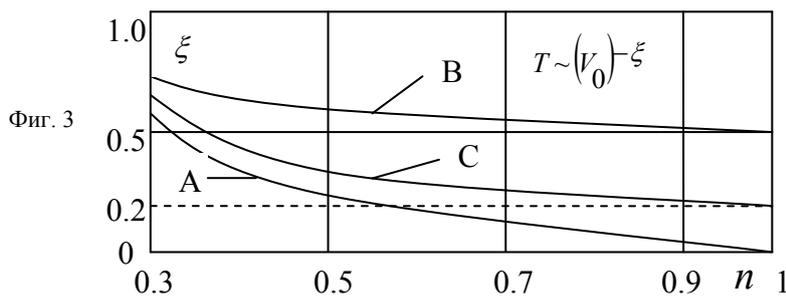
задаче об ударе нелинейно деформируемых тел с гладкими поверхностями указанная закономерность не соблюдается. На фиг.2 изображен также график продолжительности удара, когда  $\mu=\beta=1$ .

В § 2.4, в рамках теории удара Г.Герца, рассмотрена плоская контактная задача для упругих шероховатых цилиндра и слоя, когда цилиндр, движется поступательно, вдоль своих образующих ударяет по свободной поверхности неподвижного слоя. Сначала, методом, изложенным в параграфе 2.3, получено решение соответствующей статической плоской контактной задачи. Затем используя это решение, определены основные механические характеристики задачи об ударе этих тел.

Выяснено, что с уменьшением  $V_0$ , продолжительность удара неограниченно возрастает, т.е. выполняется характерная закономерность теории удара Г.Герца.

В § 2.5 рассмотрена осесимметричная контактная задача о центральном ударе штампа по упругому шероховатому полупространству, когда основание штампа имеет либо плоскую круговую форму (случай А), либо ограничен конической (случай В) или шаровой (случай С) поверхностью.

Исследование этой задачи также проведено методом, приведенным в параграфе 2.4 и проведен числовой анализ полученных результатов. Выяснено, что при малых значениях  $V_0$  продолжительность удара  $T$  пропорциональна некоторой степени ( $-\xi$ ) скорости удара  $V_0$ . На фиг.3 изображен ход изменения параметра  $\xi$  в зависимости от показателя шероховатости  $n$ , входящего в формулу (2). Как видно из этих графиков, во всех случаях (за исключением случая А при  $n=1$ ) показатель  $\xi$  положительный, вследствие чего с уменьшением скорости удара  $V_0$ , продолжительность удара  $T$  неограниченно возрастает. В случае А при  $n=1$  показатель  $\xi=0$ , т.е. продолжительность удара не зависит от  $V_0$ . Отметим, что в случае удара штампа с плоским основанием по абсолютно гладкому линейно упругому полупространству продолжительность удара тоже не зависит от скорости удара. На фиг.3 изображен также (пунктирная линия) график изменения показателя  $\xi$  для случая С, когда полупространство абсолютно гладкое.



В § 2.6 рассмотрена осесимметричная контактная задача нелинейной теории неустановившейся ползучести для шероховатых твердых тел, когда ползучесть материалов контактирующих тел описывается реологическим уравнением

$$A_k T^{\mu-1}(t) \varepsilon_{ij}(t) = (I - L) \sigma'_{ij}(t), \quad (k = 1, 2). \quad (9)$$

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  – физические константы материалов контактирующих тел,  $\mu$  – показатель ползучести ( $\frac{2}{3} < \mu \leq 1$ ),  $T(t)$  – интенсивность деформации сдвига,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты деформации,  $\sigma'_{ij}$  – девиатор напряжений,  $I$  – единичный оператор,  $L$  – интегральный оператор Вольтерра

$$Ly(t) = \int_{\tau_0}^t y(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad C(t, \tau) = \left( C_0 + \frac{C_1}{\tau} \right) \cdot [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (10)$$

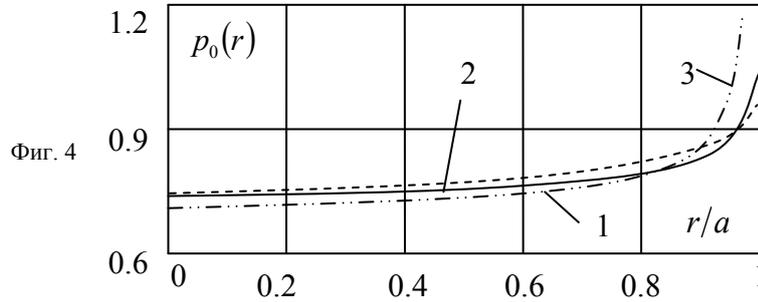
$C_0, C_1, \tau_0, \gamma$  – заданные постоянные,  $t$  – время. Тогда, аналогично (4), получается нелинейное интегральное уравнение

$$q(\xi, t) = a_0^\mu (I - L) \int_0^1 K(\xi, \eta) [\delta_0(t) - f_0(\eta) - q^m(\eta, t)]^\beta \eta d\eta, \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (11)$$

где

$$K(\xi, \eta) = \frac{\pi \Gamma(\omega)}{2^{-\mu} \Gamma(1 - \omega)} \int_0^\infty x^{1-\mu} J_0(\xi x) J_0(\eta x) dx, \quad \omega = \frac{\mu}{2}, \beta = \frac{1}{n}, \quad (12)$$

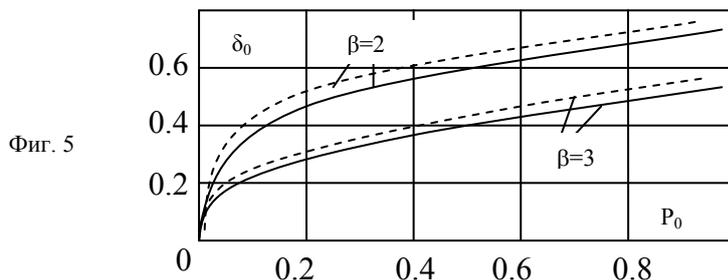
$\Gamma(z)$  – гамма-функция Эйлера и  $J_0(z)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Исследование уравнения (11) также проведено изложенном в параграфе 2.3 методом. Вычислены значения безразмерного контактного давления  $p_0(r)$  в круговой области контакта ( $0 \leq r \leq a$ ) и безразмерного сближения контактирующих тел  $\delta_0$ , на основе которых построены их графики. На фиг.4 изображены графики функции  $p_0(r)$  в момент времени  $t = \tau_0$ , когда штамп с круглым в плане основанием вдавливается в степенно упрочняющееся чугунное шероховатое полупространство ( $f_0(\xi)=0, A_1=\infty, A_2=106 \text{ кГ/см}^2, \mu=0.9$ ). На этой фигуре линии 1 и 2 соответствуют случаям, когда поверхность полупространства определенным образом фрезерованная ( $\beta=2, K=100 \text{ мк}$ ) или полированная ( $\beta=3, K=46.4 \text{ мк}$ ), а линия 3 – случаю, когда поверхность полупространства абсолютно гладкая ( $K=0$ ).



Фиг. 4

Как видно из этих графиков, с увеличением чистоты обработки поверхностей контактирующих тел, что соответствует возрастанию параметра  $\beta$ , давление в концах контактной области возрастает и в предельном случае абсолютно гладких тел приобретает традиционную особенность.

На фиг.5 изображены графики безразмерного сближения тел  $\delta_0$  в зависимости от приложенной на штамп безразмерной равнодействующей силы  $P_0$ , притом сплошные линии соответствуют случаю  $\mu=0.9$ , а пунктирные – случаю  $\mu=0.7$ .



Третья глава работы посвящена контактным взаимодействиям деформируемых твердых тел с учетом фактора износа. Необходимость учета износа деталей машин, механизмов и механических приборов в трибологических контактных задачах механики деформируемых твердых тел обусловлена тем, что именно износ нередко лимитирует работу многочисленных устройств, эксплуатирующихся в машиностроении, в транспорте, в строительстве и других отраслях инженерной практики.

В § 3.1 приведена модельная контактная задача для деформируемых твердых тел с учетом фактора износа, в основу которой входит предположение, что вследствие износа каждая граничная точка контактной зоны в направлении внутренней нормали тела получает перемещение  $u_w$ , скорость которого, согласно экспериментам, выражается формулой

$$\frac{du_w}{dt} = kp^m V^n, \quad (13)$$

где  $t$  – время,  $k$  – коэффициент пропорциональности,  $p$  – контактное давление,  $V$  – относительная скорость соприкасающихся поверхностей в данной точке контактной зоны,  $m$  и  $n$  – показатели, для которых  $1 \leq m \leq 3$ ,  $n \approx 1$ .

Значения  $k$  и  $m$  приведены в справочниках по трению, износу и смазке, причем для поверхностей без обработки и при абразивном износе  $m \approx 1$ , притом с увеличением чистоты обработки поверхностей контактирующих тел, значение  $m$  увеличивается, а значение  $k$  уменьшается.

В § 3.2 приведено исследование плоской контактной задачи теории упругости для шероховатых длинного цилиндра и слоя с учетом фактора износа, когда цилиндр под действием силы тяжести вдавливают вдоль своих образующих в неподвижный слой, и под действием внешних горизонтальных сил движется со

скоростью  $V_0$  в направлении своей оси (перпендикулярно к плоскости фигуры), вследствие чего в зоне трения происходит изнашивание.

Условием контакта задачи является соотношение

$$u_1 + u_2 + u_3 = \delta - R(1 - \cos \vartheta), (-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha), \quad (14)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  – вертикальные перемещения, которые получают соответственно граничные точки цилиндра и слой, обусловленные глобальными деформациями этих тел, а  $u_3$  – вертикальное перемещение, обусловленное смятием шероховатостей и износа поверхностей цилиндра и слоя в зоне трения, притом согласно (2) и (13), перемещение  $u_3$  выражается формулой

$$u_3 = K_1 p^n + K_2 V_0 \int_0^t p^m dt, (0.3 \leq n \leq 1, 1 \leq m \leq 3) \quad (15)$$

Здесь  $p$  – неизвестное контактное давление,  $\delta$  – мера погружения цилиндра в слой,  $\alpha$  – неизвестный центральный угол в цилиндре, определяющий границы зоны трения.

На основании (14) и (15) задача сводится к решению некоторого нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, исследование которого также проводится предложенным в параграфе 2.3 методом. В первом приближении контактное давление  $p(\vartheta, t)$  и угол  $\alpha$  определяются формулами

$$p_1(\vartheta, t) = \left( \frac{R}{k_1} \right)^m (\cos \vartheta - \cos \alpha)^m, \alpha_1 = \left( \frac{\pi \rho g k_1^m}{R^{m-1}} \right)^{1/(1+2m)} \left[ 2 \int_0^1 (1 - \xi^2)^m d\xi \right]^{-1/(1+2m)}. \quad (16)$$

Как видно из (16), при  $m=1$  величина угла  $\alpha$  в первом приближении не зависит от радиуса цилиндра  $R$ , а при  $1 < m \leq 3$  угол  $\alpha$  пропорционален радиусу  $R$  с отрицательной степенью  $(1-m)/(1+2m)$ . Вместе с этим, полуширина участка контакта  $a$  ( $a = \alpha R$ ) пропорциональна радиусу  $R$  с положительной степенью  $(2+m)/(1+2m)$ .

В § 3.3 рассмотрена плоская контактная задача для упругого цилиндра и втулки в режиме граничного трения (фиг.6), учитывая факторы износа и тепловыделения от трения.

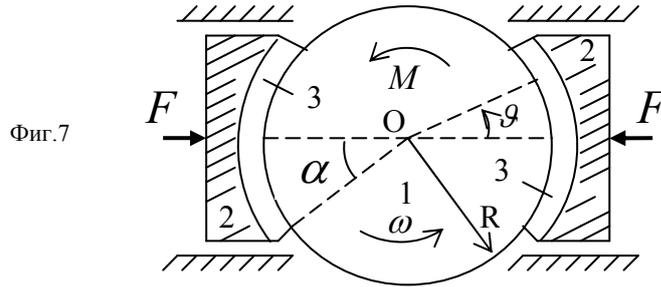
Условием контакта задачи является соотношение

$$U_w + U_T + U_p + U_\tau = \delta - a + \sqrt{R^2 + 2R(a - R)\cos\varphi + (a - R)^2}, \varphi \in [-\alpha, \beta], \quad (17)$$

где  $\delta$  – мера погружения цилиндра во втулку,  $\alpha$  и  $\beta$  – координаты соответствующие началу и концу области трения,  $U_w$ ,  $U_T$ ,  $U_p$  и  $U_\tau$  – радиальные перемещения, обусловленные соответственно износом, температурной деформацией, а также упругими деформациями, возникающими от действия силы  $F$ , момента  $M$ , а также контактного давления  $p(\varphi)$  и контактного касательного напряжения  $\tau(\varphi)$ . Учитывая закон трения Кулона и условия непрерывности контактных напряжений на границах зоны трения, решение задачи сводится к нелинейному интегральному



В § 3.4, в рамках линейной теории упругости рассматривается плоская контактная задача о прижатии равномерно вращающегося вокруг своей оси упругого цилиндра (вала) 1 двумя одинаковыми и симметрично расположенными штампами 2 с цилиндрическим основанием, к которым прикреплены тонкие упругие фрикционные слои 3 (фиг.7). Учитываются упругие перемещения граничных точек цилиндра и слоев, а также износ поверхностей слоев.



Принимая кулоновский закон трения, задача сведена относительно действующих в области трения нормальных контактных напряжений  $p_0(\vartheta)$  ( $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$ ) к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна  $p_0(\vartheta) = A_1[p_0(\vartheta), \delta_0, \vartheta]$ , где  $\delta_0$  – жесткое перемещение штампов (колодок). Исследование этого уравнения проведено на основании принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных на отрезке  $[-\alpha, \alpha]$  функций  $\{x(\vartheta)\}$  с чебышевской метрикой

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha} |x_1(\vartheta) - x_2(\vartheta)|. \quad (19)$$

Выяснено, что существует область изменения характерных параметров задачи, где решение уравнения  $p_0(\vartheta) = A_1[p_0(\vartheta), \delta_0, \vartheta]$  можно найти методом последовательных приближений. При этом, в первом приближении

$$p_0^{(1)}(\vartheta) = \delta_0 \cdot \cos \vartheta, \quad (-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha). \quad (20)$$

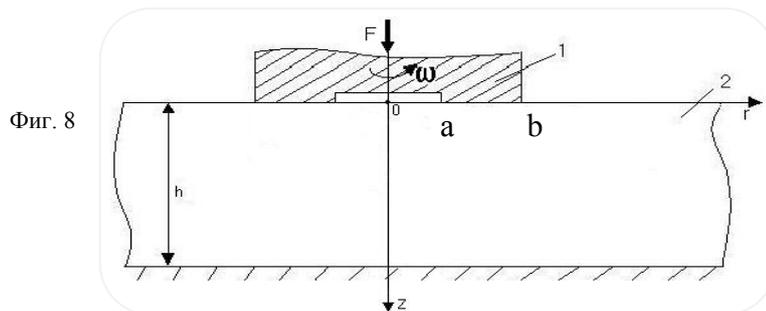
В § 3.5 проводится теоретическое исследование осесимметричной контактной задачи теории упругости для находящихся в режиме граничного трения вращающегося вокруг своей оси кольцевого в плане штампа 1 и упругого слоя 2, нижний край которого зашпелен (фиг.8).

Учитывая факторы износа и тепловыделения от трения, условие равенства нормальных перемещений граничных точек слоя и штампа в зоне трения ( $a \leq r \leq b, z = 0$ ) принимает вид

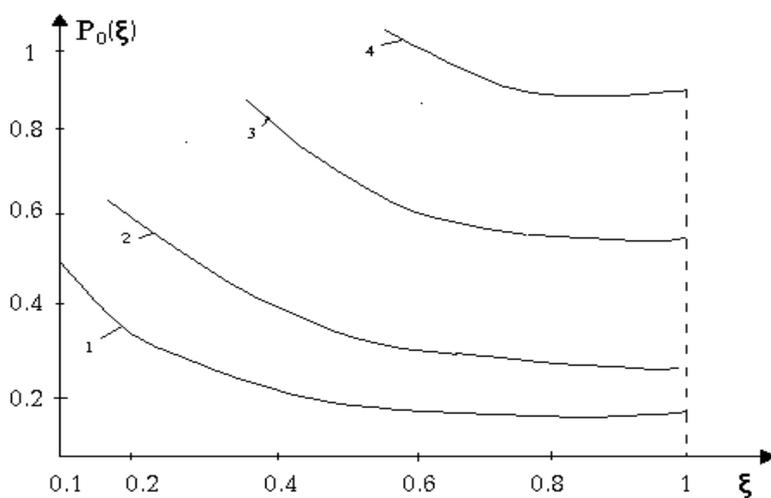
$$U_w + U_T + U_E = \delta, \quad (21)$$

где  $U_w$ ,  $U_T$  и  $U_E$  – вертикальные перемещения, обусловленные, соответственно, износом, температурной деформацией и упругой деформацией слоя,  $\delta$  – мера погружения штампа в слое. Выражая эти перемещения через контактные напряжения и принимая кулоновское трение, задача сведена к решению одного

нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна при дополнительных условиях, исследование которых также проведено изложенным в параграфе 2.3 способом.



На фиг.9 изображены законы распределения безразмерных контактных давлений  $p_0(\xi)$  в области их определения  $\xi = r/b \in [\varepsilon; 1]$ , когда безразмерный параметр  $\varepsilon = a/b$  принимает значения 0.1; 0.2; 0.4 и 0.6 (соответственно линии 1, 2, 3 и 4), а остальные характерные параметры задачи неизменны. Как видно из графиков фиг.9, при малых значениях  $\varepsilon$ , безразмерное контактное давление в точках внутренней границы окружности  $r = a$  (т.е.  $p_0(\varepsilon)$ ) значительно больше, чем безразмерное контактное давление в точках внешней граничной окружности  $r=b$  (т.е.  $p_0(1)$ ). Кроме того, контактное давление принимает свое минимальное значение вблизи точки  $\xi=1$ .

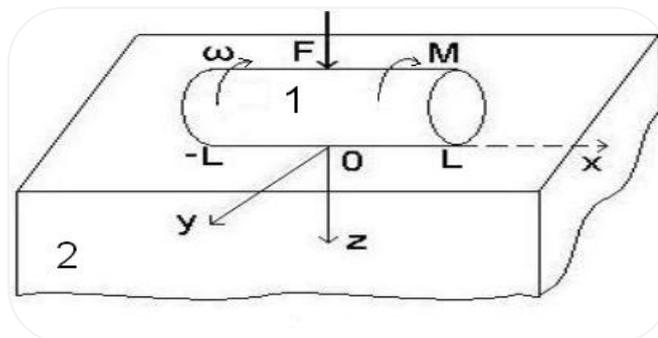


Фиг. 9

В § 3.6 проводится теоретическое исследование контактного взаимодействия жесткого цилиндра конечной длины 1 и упругого полупространства 2 (фиг.10) с

учетом фактора износа. Цилиндр под действием центральной сжимающей силы  $F(t)$  и вращающего момента  $M(t)$  вдавливается в полупространство и равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Вследствие упругих деформаций полупространства и износа его поверхности, область соприкосновения тел 1 и 2, от отрезки  $[-L;L]$  их первоначального соприкосновения, превращается в зависящую от времени некоторую узкую двумерную область  $\Omega(t)$ , ограниченную прямыми линиями  $x=\pm L$  и кривыми  $y=-f(x,t)$ ,  $y=g(x,t)$  плоскости  $z=0$ .

Фиг. 10



Используя условие контакта, уравнения равновесия цилиндра, условия непрерывности контактных напряжений на цилиндрической поверхности штампа, а также кулоновское трение, задача сведена к замкнутой системе уравнений относительно функций  $f(x,t)$  и  $g(x,t)$ , закона распределения нормальных  $p(x,y,t)$  и касательных  $\tau(x,y,t)$  – контактных напряжений, величины погружения цилиндра в полупространство  $\delta(t)$ , а также мощности энергии  $N(t) = \omega \cdot M(t)$ , израсходованной для вращения цилиндра.

Полученная система также исследована проведенным в параграфе 2.3 методом в некотором метрическом пространстве  $X$ , каждый элемент которого  $x$  является совокупностью трех непрерывных безразмерных функций  $q(\xi,\eta,t)$ ,  $\varphi(\xi,t)$ ,  $\psi(\xi,t)$ , характеризующих контактное давление и область  $\Omega(t)$ . При этом в качестве метрики в пространстве  $X$  принята чебышевская метрика.

Используя итерационные формулы, решение системы уравнений в первом приближении для функций  $q(\xi,\eta,t)$ ,  $\varphi(\xi,t)$ ,  $\psi(\xi,t)$ , получены формулы

$$q_1(\xi,\eta,t) = \Delta(t) - \frac{1}{2}\eta^2, \varphi_1(\xi,t) = \psi_1(\xi,t) = \sqrt{2\Delta(t)}, \Delta(t) = \lambda[F_0(t)]^{\frac{2n}{n+2}}, \quad (22)$$

где  $\Delta(t)$  и  $F_0(t)$  – соответственно безразмерные погружение цилиндра в полупространство и приложенная на цилиндр сжимающая сила.

Формулы (22) показывают, что в первом приближении контактная область имеет форму прямоугольника, а контактные давления вдоль образующих цилиндра не меняются. С другой стороны, из (22) также следует, что при  $n = 1$  безразмерная мера погружения цилиндра в полупространство  $\Delta(t)$  в первом приближении пропорциональна сжимающей силе  $F_0(t)$  в степени  $2/3$ , что совпадает с известной закономерностью теории контактных задач Г.Герца.

**Четвертая глава** работы посвящена жидкостному трению деформируемых твердых тел в режиме ограниченного смазывания, а также продлению срока эксплуатации подшипника скольжения и вала.

В § 4.1 приведены основные соотношения режима ограниченного смазывания упруго-гидродинамической теории смазки. При этом указано, что основными соотношениями этой теории являются условие равенства нормальных перемещений (взамен условия контакта), условия равновесия (движения) задачи, уравнение Рейнольдса

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{h^3(\varphi)}{\exp[k \cdot p(\varphi)]} \cdot \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right\} = 6R^2 \omega \eta^0 \cdot \frac{dh(\varphi)}{d\varphi}, \quad \varphi \in (-\alpha, \beta), \quad (23)$$

граничные условия Прандтля-Хопкинса при входе в область трения

$$p(-\alpha) = 0, \quad \left. \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=-\alpha} = 2R^2 \omega \eta^0 \cdot [h(-\alpha)]^{-2}, \quad (24)$$

а также граничные условия Александра на выходе из области трения

$$p(\beta) = 0, \quad \left. \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\beta} = -9(R^2 \omega \eta^0)^{\frac{2}{3}} \cdot (2T)^{\frac{1}{3}} [h(\beta)]^{-2}, \quad (25)$$

где  $p(\varphi)$  – давление в смазке,  $h(\varphi)$  – толщина смазочного слоя,  $\eta^0$  – вязкость смазки при отсутствии в нем давления,  $V = R\omega$  – относительная скорость граничных точек твердых тел в зоне трения,  $T$  – поверхностное натяжение в смазке.

В § 4.2 проводится теоретическое исследование плоской задачи о жидкостном трении равномерно вращающегося вокруг своей оси недеформируемого цилиндра (вала) 1 и заземленной по внешней поверхности упругой цилиндрической трубы (втулки) 2 (фиг.6).

В рассмотренной задаче равенство нормальных перемещений дает соотношение

$$h(\varphi) = u(\varphi) + a - \sqrt{R^2 + 2R \cdot e \cdot \cos \varphi + e^2}, \quad \varphi \in [-\alpha, \beta], \quad (26)$$

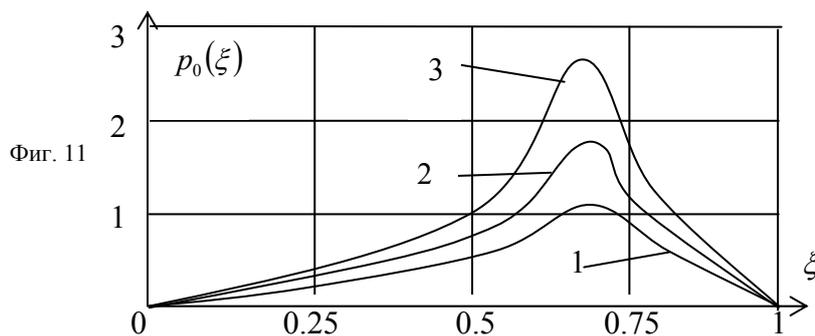
где  $e = OO_1$  – расстояние между осями отверстия и цилиндра (фиг.6),  $u(\varphi)$  – упругие перемещения, которые получают внутренние граничные точки втулки в зоне трения  $\varphi \in [-\alpha, \beta]$  в направлении ее внутренней нормали, находящейся под действием неизвестных давлений смазки  $p(\varphi)$  и касательных напряжений  $\tau(\varphi)$ . Составлена полная система уравнений задачи и проведено ее исследование изложенный в параграфе 3.3 способом.

В табл.2 приведены значения неизвестных углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и безразмерных сжимающей силы  $F_0$  и мощности вращающего момента  $N_0$  для некоторых значений безразмерной угловой скорости  $\omega_0$ . Как видно из этой таблицы, с увеличением значений параметра скорости  $\omega_0$ , величины угловых параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  незначительно уменьшаются, при этом силовые характеристики узла трения  $F_0$  (грузоподъемность) и  $N_0$  (потери мощности) значительно возрастают. По результатам вычислений на фиг.11 и 12 построены графики соответственно

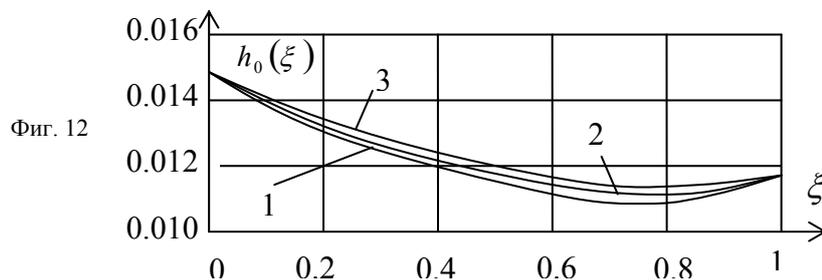
безразмерных функций давления  $p_0(\xi)$  и толщины смазочного слоя  $h_0(\varphi)$  при  $\omega_0 = 0.01; 0.03; 0.05$  (соответственно линии 1, 2, 3). Из графиков фиг.11 видно, что безразмерная функция давления  $p_0(\varphi)$  принимает свое максимальное значение в срединной части участка трения  $\xi \in [0,1]$  с небольшим отклонением в сторону выхода из зоны трения (т.е. в сторону точки  $\xi = 1$ ).

Табл. 2

| $\omega_0$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $F_0$ | $N_0$  |
|------------|----------|---------|----------|-------|--------|
| 0.01       | 0.59361  | 0.07277 | 0.261    | 0.071 | 0.0084 |
| 0.03       | 0.59360  | 0.07272 | 0.260    | 0.256 | 0.0264 |
| 0.05       | 0.59358  | 0.07268 | 0.259    | 0.577 | 0.0464 |
| 0.055      | 0.59357  | 0.07267 | 0.258    | 0.731 | 0.0517 |

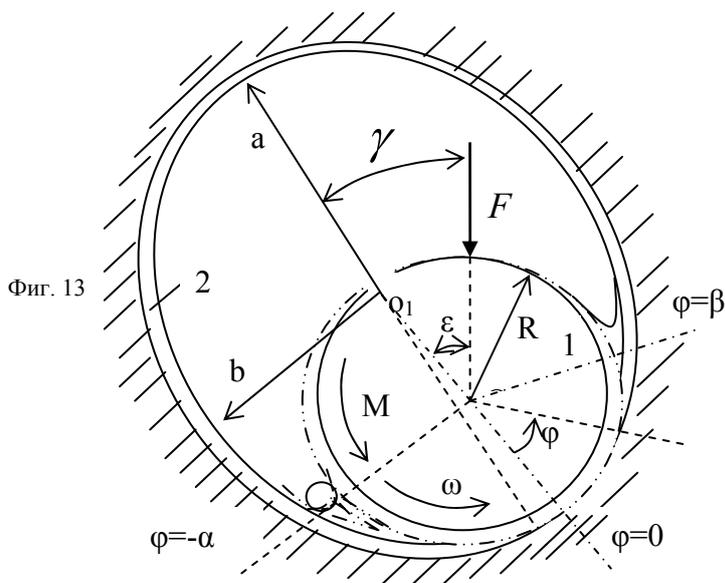


Графики фиг.12 показывают, что безразмерная толщина смазочного слоя при входе в зону трения ( $\xi = 0$ ), значительно больше толщины смазочного слоя на выходе из зоны трения ( $\xi = 1$ ).



Из графиков фиг.12 также видно, что увеличение параметра  $\omega_0$  приводит к незначительному увеличению толщины смазочного слоя.

В § 4.3 рассматривается плоская контактная задача о жидкостном трении вращающегося вокруг своей оси недеформируемого цилиндра радиуса  $R$  с неподвижной упругой цилиндрической втулкой, поперечное сечение которой, в отличие от обычной круговой формы, имеет форму эллиптического кольца с внутренними полуосями  $a$  и  $b$  ( $a \geq b > R$ ) (фиг.13).



В области трения  $\varphi \in [-\alpha, \beta]$  условие равенства нормальных перемещений принимает вид

$$u(\varphi) - h(\varphi) = R + l \cos(\varphi + \varepsilon) - ab \left[ a^2 \cos^2(\varphi + \gamma) + b^2 \sin^2(\varphi + \gamma) \right]^{0.5}, \quad (27)$$

где  $l = OO_1$  – расстояние между центрами  $O$  и  $O_1$ ,  $\varepsilon$  и  $\gamma$  – углы, которые образуют линию действия силы  $F$  с линиями, проходящими через большую ось эллипса и через центры  $O$  и  $O_1$  соответственно. Остальные обозначения и метод исследования совпадают с приведенными в параграфе 4.2.

Как показывает исследование, при некоторых значениях безразмерных геометрических параметров задачи, минимальная безразмерная толщина смазочного слоя для подшипника с эллиптической втулкой ( $a_0 > b_0$ ), по сравнению с соответствующей круглой втулкой ( $a_0 = b_0$ ), немного больше. Это обстоятельство приводит к улучшению механических характеристик (грузоподъемность, износостойкость, долговечность и др.) подшипника скольжения путем замены круглой втулки на эллиптическую.

**Пятая глава** работы посвящена контактным взаимодействиям деформируемых твердых тел и тонкостенных элементов.

В § 5.1 рассмотрена плоская контактная задача о вдавливании степенно упрочняющегося шероховатого тела по свободно-опертой упругой горизонтальной

балке. Нормальные перемещения граничных точек такого тела определены на основе результатов работ Н.Х.Арутюняна, а из дифференциального уравнения С.П.Тимошенко определены вертикальные перемещения центральной оси балки, учитывающие поперечные сдвиги и надавливания между ее волокнами. В итоге задача сводится относительно безразмерного контактного давления  $p_0(\xi)$  к нелинейному интегральному уравнению

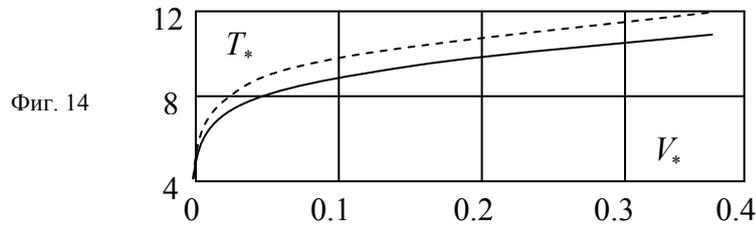
$$\left[ \int_{-1}^1 \frac{p_0(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} \right]^m = \delta_0 - f_0 a_0^2 \xi^2 - \theta_1 p_0^{1/\beta}(\xi) + \theta_2 a_0 \int_{-1}^1 \left( \alpha^2 \frac{|\xi - \eta|}{2} - a_0^2 \frac{|\xi - \eta|^3}{12} \right) p_0(\eta) d\eta, \quad (28)$$

решение которого должно удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Исследование этого уравнения проведено изложенным в параграфе 2.3 методом, применяя математический аппарат ортогональных многочленов Гегенбауэра и принцип сжимающих отображений. В частности, получена асимптотическая формула для безразмерных жесткого опускания тела  $\delta_0$  и полудлины участка контакта  $a_0$  при малых значениях безразмерной безразмерной сжимающей силы  $P_0$  и при отсутствии шероховатостей

$$\delta_0 = P_0 \left[ k_0 + k_1 P_0^\chi + o(P_0^{2\chi}) \right], \quad a_0 = P_0^\varepsilon \left[ c_0 + o(P_0^{\mu\varepsilon}) \right] \quad (29)$$

где  $\chi = (1 - \mu)/(1 + \mu)$ ,  $\varepsilon = 1/(1 + \mu)$ .

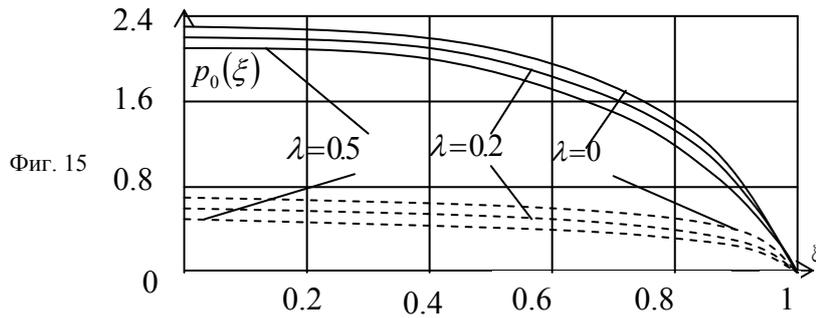
Далее, используя (29), определены и на фиг.14 изображены зависимости безразмерной продолжительности удара  $T_*$  от безразмерной скорости удара  $V_*$  при центральном ударе такого тела по свободно опертой упругой балке, где сплошная линия соответствует случаю  $\mu=0.9$ , а пунктирная линия – случаю  $\mu=0.7$ .



Как видно из графиков фиг.14, с уменьшением скорости удара, продолжительность удара уменьшается до некоторого значения. Из этих графиков также видно, что с уменьшением степени упрочнения  $\mu$ , продолжительность удара увеличивается.

В § 5.2 в рамках нелинейной теории установившейся ползучести при степенной зависимости  $\varepsilon_0 = A_i \cdot \sigma_0^m$  ( $i = 1, 2$ ) между интенсивностями напряжений  $\sigma_0$  и скоростей деформации  $\varepsilon_0$  рассматривается плоская контактная задача о вдавливании нелинейно вязкоупругого цилиндрического тела в тонкую нелинейно-ползучую полосу (балку), лежащую на линейно деформируемом основании типа Фусса-Винклера. Решение рассмотренной контактной задачи получено изложенном в параграфе 5.1 способом.

На фиг.15 построены графики правой части ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) четной безразмерной функции контактного давления  $p_0(\xi)$ , когда  $\mu=(1/m)=0.9$  (сплошные линии) или  $\mu=0.7$  (пунктирные линии), а  $\lambda = 0; 0.2; 0.5$  (значение  $\lambda = 0$  соответствует случаю, когда балка абсолютно жесткая).



Фиг. 15

Как видно из фиг.15, с уменьшением показателя ползучести  $\mu$ , функция  $p_0(\xi)$  значительно уменьшается. Из этих графиков также видно, что с увеличением  $\lambda$  (остальные характерные параметры задачи фиксированы) функция  $p_0(\xi)$  незначительно уменьшается.

В § 5.3, в постановке классической теплопроводности при установившемся тепловом потоке рассмотрена задача об определении температурного поля кусочно-однородного пространства с тонким включением в виде круглого диска радиуса  $R$ , расположенного в плоскости соединения верхнего (+) и нижнего (-) полупространств с коэффициентами теплопроводности  $k_+$  и  $k_-$  соответственно (фиг.16). Предположено, что в таком составном пространстве находятся равномерно распределенные по окружностям  $r = a_+, z = b_+$  и  $r = a_-, z = b_-$  тепловые источники с мощностями, соответственно,  $Q_+$  и  $Q_-$ , на бесконечности это пространство подвержено воздействию равномерно распределенных постоянных тепловых потоков в осевом направлении, с соответственными плотностями  $\hat{p}_+$  и  $\hat{p}_-$ , а на берегах диска  $z = \pm 0$ ;  $0 \leq r \leq R$  задана температура

$$T_+(r, +0) = T_-(r, -0) = h(r), \quad (0 \leq r \leq R). \quad (30)$$

Применяя метод интегрального преобразования Ханкеля, решение задачи сведено к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно скачка плотностей тепловых потоков  $\varphi_0(r) = f_+^0(r) - f_-^0(r)$  на берегах включения

$$\int_0^R W_{00}(r, \rho) \varphi_0(\rho) \rho d\rho = (k_+ + k_-)h(r) - \frac{A(r)}{2\pi}, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (31)$$

где  $A(r)$  – известная функция,  $W_{mn}(r, \rho)$  – интегральное ядро Вебера-Сонины,

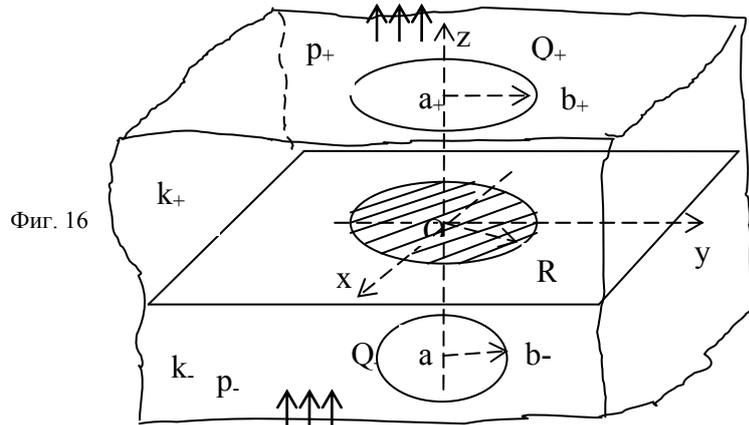
$$W_{mn}(r, \rho) = \int_0^{\infty} J_m(\xi r) J_n(\xi \rho) d\xi, \quad (0 \leq r, \rho < \infty). \quad (32)$$

Затем, основываясь на замкнутом решении интегрального уравнения (31), получен скачек плотностей тепловых потоков  $\varphi_0(r)$  на берегах включения

$$\varphi_0(r) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{F(R)}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \int_r^R \frac{F'(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \right], \quad (33)$$

где

$$F(\rho) = \frac{d}{d\rho} \int_0^{\rho} \left[ (k_+ + k_-) h(r) - \frac{A(r)}{2\pi} \right] \frac{r dr}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}. \quad (34)$$



Фиг. 16

Анализ результатов показывает, что плотность тепловых потоков в окрестности включения в общем случае неограничена, имея в окрестности окружных граничных точек включения обычную квадратичную особенность, которая в ряде частных случаях устраняемая. В случае, когда температура включения распределена линейным законом по радиальному координату  $r$ , плотность тепловых потоков имеет логарифмическую особенность в окрестности центра включения.

В § 5.4 приведено исследование осесимметричной стационарной задачи термоупругости для кусочно-однородного пространства с круглым дискообразным включением (фиг.20), подвергающегося силовым воздействиям, а также тепловым воздействиям, указанным в параграфе 5.3. В случае, когда заданы радиальные и осевые перемещения точек включения

$$u_+(r, +0) = u_-(r, -0) = f_1(r), \quad w_+(r, +0) = w_-(r, -0) = f_2(r), \quad (0 \leq r \leq R) \quad (35)$$

задача сведена относительно скачков напряжений на берегах включения  $\varphi(r) = p_+(r) - p_-(r)$ ,  $\psi(r) = \tau_+(r) - \tau_-(r)$  к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода ( $0 \leq r \leq R$ )

$$\begin{cases} E \int_0^R W_{10}(r, \rho) \varphi(\rho) \rho d\rho + F \int_0^R W_{11}(r, \rho) \psi(\rho) \rho d\rho = f_1(r) - g_1(r), \\ F \int_0^R W_{00}(r, \rho) \varphi(\rho) \rho d\rho + E \int_0^R W_{01}(r, \rho) \psi(\rho) \rho d\rho = f_2(r) - g_2(r). \end{cases} \quad (36)$$

Далее, используя зависимость между интегралом Абеля и интегралом типа Коши, эта система приводится к единому сингулярному интегральному уравнению относительно комплексной функции  $N(t)$

$$F \cdot N(t) - i \frac{E}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{N(y) dy}{y-t} = H(t), \quad (-1 < t < 1). \quad (37)$$

Получено решение сингулярного интегрального уравнения (37)

$$N(t) = \frac{1 - e^{2\pi\beta}}{2\pi i(F+E)} \left( \frac{1+t}{1-t} \right)^{i\beta} \int_{-1}^1 \frac{(1-y)^{i\beta} (1+y)^{-i\beta} H(y) dy}{y-t} + \frac{1 + e^{-2\pi\beta}}{2(F+E)} H(t), \quad (38)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{F-E}{F+E}, \quad (39)$$

а скачки напряжений на берегах включения определяются через действительную и мнимую части комплексной функции  $N(t)$  формулами

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^R \operatorname{Re} \left\{ N \left( \frac{\rho}{R} \right) \right\} \sigma \left( \frac{\rho}{R} \right) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}, \\ \psi(r) &= -\frac{d}{dr} \int_r^R \operatorname{Im} \left\{ N \left( \frac{\rho}{R} \right) \right\} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

В частном случае, когда в рассмотренном кусочно-однородном пространстве все тепловые факторы и растяжение на бесконечности отсутствуют, притом включение абсолютно жесткое и задано ее перемещение  $w_0$  в осевом направлении, то скачки напряжений на берегах включения выражаются формулами

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= -\frac{2w_0}{\pi\sqrt{F^2 - E^2}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^R \cos \left( \beta \ln \frac{R+\rho}{R-\rho} \right) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}, \\ \psi(r) &= -\frac{2w_0}{\pi\sqrt{F^2 - E^2}} \frac{d}{dr} \int_r^R \sin \left( \beta \ln \frac{R+\rho}{R-\rho} \right) \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}, \end{aligned} \quad (0 < r < R), \quad (41)$$

которые в окрестности точек окружности  $r = R$  в общем случае имеют квадратичную особенность с осцилляцией. При этом, действующая на включение

внешняя осевая сила  $G$  и жесткое перемещение включения  $w_0$  связаны между собой формулой

$$G = -\frac{4w_0}{\sqrt{F^2 - E^2}} \int_0^R \left[ \frac{d}{dr} \int_r^R \cos\left(\beta \ln \frac{R + \rho}{R - \rho}\right) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \right] dr. \quad (42)$$

Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что разработанный в настоящей диссертации единый подход к решению нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Вольтерра является вполне обоснованным и объективно определенным способом решения трибологических контактных задач механики деформируемого твердого тела.

В **заключении** представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе. Таковыми являются:

- разработан единый подход к решению трибологических контактных задач механики деформируемого твердого тела, основанной на математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева, Гегенбауэра и Якоби, теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Вольтерра, принципа сжимающих отображений в разных метрических пространствах, а также на теореме А.Лебега о предельном переходе под знаком интеграла;
- исследован достаточно широкий класс плоских, осесимметричных и пространственных задач контактного взаимодействия линейно или нелинейно деформируемых твердых тел с учетом факторов шероховатости поверхностей, износа, смазки и тепловыделения от трения;
- определены основные механические величины трибологических контактных задач механики деформируемого твердого тела, каковыми являются контактные напряжения, величина взаимного сближения контактирующих тел, размеры области контакта, толщина смазочного слоя, потеря мощности в узле трения. В частности выяснено, что при контактировании деформируемых твердых тел при наличии факторов шероховатости или износа, контактные напряжения ограниченные.
- установлено закономерности изменения механических характеристик при вдавлинии штампа с плоским основанием в нелинейно деформируемое шероховатое тело, согласно которым контактное давление принимает своего максимального значения на границе штампа, притом оно меньше, чем при линейной постановке задачи. Закон распределения контактных давлений при малых нагрузках близко к равномерному, и с возрастанием нагрузки наблюдается значительное повышение контактного давления на границе контактной области по сравнению с контактным давлением в центре штампа;
- определены механические характеристики теории удара Г.Герца соударения соответствующих тел и выявлены случаи, при которых соблюдается характерная закономерность теории удара Г.Герца, т.е, с уменьшением скорости удара продолжительность удара неограниченно возрастает;
- исследование осесимметричной контактной задачи о граничном трении кольцевого в плане штампа и упругого слоя показывает, что контактное давление между штампом и слоем принимает свой максимум в точках внутренней граничной окружности кольцевой контактной области, притом с

уменьшением внутреннего радиуса штампа оно значительно превышает значению давления на внешней окружности контактной области.

- рассматривая плоскую задачу о жидкостном трении в режиме ограниченного смазывания защемленной по своей внешней поверхности упругой круглой трубы и вращающегося в ней вокруг своей оси жесткого цилиндра выяснено, что с увеличением параметра скорости, параметр нагрузки (грузоподъемность) значительно возрастает.
- проведенное исследование плоской задачи жидкостного трения в режиме ограниченного смазывания круглого жесткого цилиндра и упругого вкладыша эллиптического поперечного сечения показывает, что при таком вкладыше в некоторых случаях минимальная толщина смазочного слоя немного больше, чем при обычном круглом вкладыше. Этот результат показывает, что существует небольшой ресурс для улучшения механических характеристик (грузоподъемность, износостойкость, долговечность и др.) подшипника скольжения путем замены его круглого вкладыша вкладышем эллиптической формы.
- с помощью математического аппарата интегрального преобразования Ханкеля получены точные решения осесимметричных задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородного пространства с тонким включением в виде круглого диска. При этом, температурная функция, плотность тепловых потоков и напряжения в общем случае выражаются интегралами от функций Бесселя и эллиптических функций, а в некоторых частных случаях – через элементарные функции. Плотность тепловых потоков в общем случае неограничена, имея обычную квадратичную особенность в окрестности окружных граничных точек включения, и возможно логарифмическую особенность в окрестности центра включения. В ряде частных случаев существуют значения теплофизических и геометрических параметров задачи, при которых плотность тепловых потоков становится ограниченной.

#### СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЕ

1. Шемян Л.А. О соударении двух твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Доклады АН АрмССР. 1974. Т. 59, №4, с. 234-240.
2. Мхитарян С.М., Шемян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Известия АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30, №3, с. 15-32.
3. Шемян Л.А. К контактной задаче об ударе тела по свободно опертой упругой балке. Доклады АН АрмССР. 1978. Т. 67, №2, с. 86-92.
4. Шемян Л.А. Осесимметричная контактная задача нелинейной теории неустановившейся ползучести для шероховатых твердых тел. Известия АН АрмССР, Механика. 1978. Т. 31, №6, с. 42-54.
5. Мхитарян С.М., Шемян Л.А. Вдавливание нелинейно вязкоупругого тела в тонкую полосу, лежащую на деформируемом основании. Известия АН АрмССР. Механика. 1980. Т. 33, №5, с. 3-16.
6. Гаспарян С.А., Шемян Л.А., Микаелян Т.Г. Распределение напряжений в шпоночных соединениях. Труды международной конференции по проблемам прикладного машиностроения. Тбилиси. 8-10 октября 2000, с. 110-114.
7. Гаспарян С.А., Шемян Л.А. Оценка усталостной долговечности валошпоночных соединений. Известия АН АрмССР. Механика. 2002. Т. 55, №4, с. 79-84.
8. Гаспарян С.А., Саркисян Н.Н., Шемян Л.А. О статистических моделях долговечности при случайном нагружении с пиковыми перегрузками. Известия АН АрмССР. Механика. 2004. Т. 57, №3, с. 59-65.
9. Shekyan L.A., Verlinski S.V. On the Prediction of Finite Fatigue Life under Variable-Amplitude Loading following Single Overloads. Сборник трудов первой международной научно-технической конференции “Современные проблемы оптимизации в инженерных приложениях. IWOPE-2005”. Ярославль. 17-22 декабря 2005. Т. 2, с. 83-87.
10. Shekyan L.A. On the problem of Elastohydrodynamic Lubrication. Modern Problems of Deformable Bodies Mechanics. Collection of papers, dedicated to the memory of Professor P.S. Theocaris. Vol.1. Yerevan. 2005, pp. 254-260.
11. Шемян А.Л., Шемян Л.А. Контактное взаимодействие кольцевого в плане штампа и упругого слоя в режиме граничного трения. Известия АН АрмССР. Механика. 2007. Т. 60, №3, с. 93-100.
12. Верлинский С.В., Шемян А.Л., Шемян Л.А. Пространственная контактная задача теории упругости для цилиндра конечной длины и полупространства при наличии фактора износа. Труды международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвященный 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Цахкадзор, Армения. 25-28 сентября 2007, с. 127-130.
13. Шемян А.Л., Шемян Л.А., Верлинский С.В. Плоская контактная задача теории упругости с учетом трибологических факторов. Материалы 11-ой Всероссийской научно-технической конференции “Аэрокосмическая

- техника, высокие технологии и инновации-2008". Пермь. 10-11 апреля 2008, с. 411-413.
14. Мхитарян С.М., Шемян А.Л., Шемян Л.А. Об ударе штампа по упругому шероховатому полупространству. Труды 6-ой международной конференции "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Горис-Степанакерт. 21-26 сентября 2008, с. 345-349.
  15. Мхитарян С.М., Шемян А.Л., Шемян Л.А. Вдавливание круглого штампа в упругое шероховатое полупространство. Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. №5, с. 90-98.
  16. Mkhitaryan S. M., Shekyan L.A., Aidun D., Marzocca P. Thermo-elastic modeling of joined semi-infinite homogeneous solids with circular inclusion due to a steady-heat source. The Eighth International Congress on Thermal Stresses. University of Illinois at Urbana-Champaign. Illinois. TS 2009, 1-4 June, pp. 113-117.
  17. Верлинский С.В., Шемян А.Л., Шемян Л.А. Граничное трение упругого цилиндра с цилиндрическим отверстием. Труды II международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Дилижан, Армения. 4-8 октября 2010, с. 158-162.
  18. Мхитарян С.М., Шемян А.Л., Шемян Л.А. Григорян М.С. Об ударе упругого цилиндра по защемленному упругому шероховатому слою. Труды 7-ой международной конференции "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Горис-Степанакерт. 19-23 сентября 2011, с. 301-308.
  19. Шемян Л.А. О контактном взаимодействии вал-колотка. Труды 7-ой международной конференции "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Горис-Степанакерт. 19-23 сентября 2011, с. 428 – 433.
  20. Mkhitaryan S. M., Shekyan L.A., Verlinski S.V., Aidun D., Marzocca P. Stationary theory of heat-conductivity for an axi-symmetrical piece homogeneous space with circular inclusion. J. of Thermal Stresses. 35, Issue 5, 2012, pp. 424-447.
  21. Shekyan L.A., Verlinski S.V., Shekyan A.L., Aidun D., Marzocca P. Elasto-hydro-dynamic friction of a circular cylinder and of a cylindrical bush with elliptical cross-section. "Topical Problems of Continuum Mechanics" dedicated to centenary of Academician Nagush Kh. Arutyunyan. Tsakhkadzor, Armenia. 8-12 October 2012, Vol. 2, pp. 310-314.

## ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսությունը նվիրված է դեֆորմացվող պինդ մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության ոչ դասական խնդիրների մի դասի համակարգված հետազոտությանը, երբ հաշվի են առնվում մարմինների մակերևույթների անհարթությունները, ինչպես նաև մաշման, յուղման և ջերմային գործոններ:

Կոնտակտային խնդիրները ձևակերպված են ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների տեսքով և կատարված է դրանց մաթեմատիկական խիստ հետազոտությունը, կիրառելով Չերիշևի, Գեգենբաուերի և Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդը, Համերշտեյնի և Վոլտերայի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների տեսությունը, սեղմող արտապատկերումների սկուզբունքը տարբեր մետրիկական տարածություններում, ինչպես նաև Լեբեգի թեորեմը ինտեգրալի նշանի տակ սահմանայն անցում կատարելու վերաբերյալ:

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, հինգ գլուխներից, եզրակացությունից և օգտագործված գրականության ցանկից:

**Ներածության** մեջ հիմնավորված է ատենախոսության թեմայի արդիականությունը: Բերված է համառոտ ակնարկ դեֆորմացվող պինդ մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության տրիբոլոգիական խնդիրների վերաբերյալ: Կարճ շարադրված է ատենախոսության բովանդակությունը, նշված է աշխատանքում ստացված արդյունքների գիտական նորույթը:

**Առաջին գլխում** բերված են կոնտակտային փոխազդեցության մեջ մտնող մարմինների և յուղման հեղուկի ֆիզիկական մոդելները: Այնտեղ բերված են գծային ջերմաառաձգականության տեսության, պլաստիկության տեսության, առաձգամածուցիկության տեսության, ինչպես նաև հեղուկային շփման հիմնական հավասարումները, երբ հեղուկի մածուցիկությունը կախված է ճնշումից:

**Երկրորդ գլուխը** նվիրված է կոնտակտային մի շարք հարթ, առանցքահամաչափ և տարածական խնդիրների ուսումնասիրությանը դեֆորմացվող անհարթ մարմիններին համար: Դիտարկված են դեֆորմացվող անհարթ մարմիններին ինչպես ստատիկական սեղմման, այնպես էլ նրանց հարվածի համապատասխան կոնտակտային փոխազդեցության տրիբոլոգիական խնդիրները:

**Երրորդ գլուխը** նվիրված է մի շարք հարթ, առանցքահամաչափ և տարածական կոնտակտային խնդիրների ուսումնասիրությանը՝ մաշման գործոնի առկայությամբ: Ուսումնասիրությունները կատարված են սահմանային շփման ռեժիմի դեպքում, հաշվի առնելով ինչպես մաշումը, այնպես էլ շփումից անջատված ջերմությունը:

Ատենախոսության **Չորրորդ գլուխը** նվիրված է դեֆորմացվող պինդ մարմինների փոխներգործությանը հեղուկային շփման դեպքում, երբ մարմինները գտնվում են սահմանային յուղման ռեժիմում: Ուսումնասիրված է շփման հանգույցի լավարկման հարցեր՝ հանգույցի կառուցվածքային փոփոխության միջոցով:

**Հինգերորդ գլուխը** նվիրված է դեֆորմացվող պինդ մարմինների և բարակապատ տարրերի կոնտակտային փոխազդեցության տրիբոլոգիական մի շարք հարթ և առանցքահամաչափ խնդիրների համակարգված ուսումնասիրությանը:

Ատենախոսությունում ստացված հիմնական արդյունքներն են՝

- մշակվել է դեֆորմացվող պինդ մարմինների մեխանիկայի տրիբոլոգիական կոնտակտային խնդիրների լուծման միասնական մոտեցում, կիրառելով Չեբիշևի, Գեգենբաուերի և Յակոբիի օրթոգոնոլ բազմանդամների մեթոդը, Համերշտեյնի և Վոլտերայի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների տեսությունը, սեղմող արտապատկերումների սկուզբունքը տարբեր մետրիկական տարածություններում, ինչպես նաև Լեբեգի թեորեմը ինտեգրալի նշանի տակ սահմանայն անցում կատարելու վերաբերյալ;
- ուսումնասիրվել է հարթ, առանցքահամաչափ և տարածական կոնտակտային խնդիրների բավականաչափ լայն դաս՝ հաշվի առնելով մարմինների մակերևույթների անհարթությունների, մաշման, յուղման և շփումից ջերմանջատման գործոնները;
- որոշվել են դեֆորմացվող պինդ մարմինների կոնտակտային տրիբոլոգիական խնդիրների հիմնական մեխանիկական բնութագրիչ մեծությունները՝ կոնտակտային լարումները, հավող մարմինների փոխադարձ մերձեցման չափը, հպման տեղամասի չափերը, շփման տեղամասում յուղի շերտի հաստությունը, ինչպես նաև հզորության կորուստը շփման հանգույցում: Մասնավորապես ցույց է տրված, որ մարմինների մակերևույթների անհարթությունների կամ մաշման գործոնների հաշվառումով նրանց կոնտակտային փոխազդեցության դեպքում կոնտակտային լարումները սահմանափակ են:
- հաստատված են ոչ գծային օրենքով դեֆորմացվող պինդ մարմին հարթ հինքով դրոշմի սեղման դեպքում մեխանիկական բնութագրիչների փոփոխման օրինաչափությունները, ըստ որի կոնտակտային ճնշումն իր առավելագույն արժեքն ընդունում է կոնտակտի տիրույթի եզրում, ընդ որում ոչ գծային դրվածքով խնդրում այն ավելի փոքր է, քան գծային դրվածքով խնդրում: Կոնտակտային ճնշման բաշխման օրենքը ցածր բեռնավորման դեպքում մոտ է հավասարաչափ բաշխմանը, իսկ բեռի աճման դեպքում նկատվում է կոնտակտային ճնշման առավելագույն արժեքի զգալի աճ՝ համեմատած շփման տեղամասի կենտրոնում ճնշման արժեքի հետ;

- որոշված են համապատասխան մարմինների հարվածի շերքի տեսության հիմնական մեխանիկական բնութագրերը և բացահայտված են այն դեպքերը, երբ տեղի ունի հարվածի շերքի տեսության բնորոշ հատկությունը, այսինքն հարվածի արագության փոքրացմանը զուգընթաց, հարվածի տևողությունը անսահմանափակ աճում է;
- օղակաձև հինքով դրոշմի և առաձգական շերտի սահմանային շփման առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ դրոշմի և շերտի միջև կոնտակտային ճնշումն ընդունում է իր առավելագույն արժեքը կոնտակտի օղակաձև տիրույթի ներքին եզրային շրջանագծի կետերում, ընդ որում այդ շրջանագծի շառավղի փոքրացման դեպքում այն զգալիորեն աճում է՝ համեմատած կոնտակտի տիրույթի արտաքին շրջանագծի վրա ճնշման արժեքի հետ;
- դիտարկելով հեղուկային շփման սահմանափակ յուղման ռեժիմում գտնվող արտաքին եզրով ամրացված անշարժ առաձգական կլոր խողովակի և իր առանցքի շուրջը պտտվող գլանի փոխազդեցության հարթ խնդրը պարզվում է, որ պտտման արագության աճի դեպքում, բեռնվածքի պարամետրը (բեռի կրողունակությունը) զգալիորեն մեծանում է;
- հեղուկային շփման սահմանափակ յուղման ռեժիմում գտնվող կլոր կոշտ գլանի և էլիպսաձև տարբեր լայնական կտրվածքներով առաձգական ներդրակների փոխազդեցության հարթ խնդրի հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ շփման տեղամասում յուղի շերտի նվազագույն հաստությունը էլիպսաձև լայնական կտրվածքով ներդրակի երկրաչափական պարամետրերի որոշ արժեքների դեպքում մեծ է, քան այն դեպքում, երբ ներդրակը կլոր է: Այս արդյունքը ցույց է տալիս, որ կա որոշ ռեսուրս բարելավելու սահքի առանցքակալների մեխանիկական բնութագրիչները (բեռի կրողունակությունը, ամրությունը, երկարակեցությունը, և այլն) նրա սովորական կլոր ներդրակը էլիպսաձևով փոխարինելու միջոցով;
- Հանկելի ինտեգրալային ձևափոխության մաթեմատիկական ապարատի օգնությամբ ստացվել է ջերմահաղորդականության և ջերմաառաձգականության առանցքահամաչափ խնդիրների ճշգրիտ լուծումները երկու տարատեսակ կիսատարածությունների համար, որոնք միացված են միմյանց և իրենց միջև գտնվող բարակ սկավառակաձև ներդրակին: Ընդ որում, ջերմաստիճանը, ջերմային հոսքի խտությունը և լարումները ընդհանուր առմամբ արտահայտվում են Բեսսելի և էլիպտիկ ֆունկցիաների ինտեգրալներով, իսկ որոշ դեպքերում էլ՝ տարրական ֆունկցիաներով: Ջերմային հոսքի խտությունը, ընդհանուր առմամբ, անսահմանափակ է՝ ունենալով սովորական քառակուսի արմատի եզակիություն սկավառակի եզրային շրջանագծի կետերի շրջակայքում, և հնարավոր է լոգարիթմական եզակիություն՝ սկավառակի կենտրոնում: Մի շարք մասնավոր դեպքերում կան խնդրի ջերմային և երկրաչափական պարամետրերի արժեքներ, երբ ջերմության հոսքի խտությունը դառնում է սահմանափակ:

## ABSTRACT

The thesis is devoted to a systematic study of a one class of non-classical contact problems for deformable solid bodies, when in contact zone factors are considered surface roughness of contacting bodies, friction, wear, lubrication and heat dissipation. Contact problems in this formulation are more realistic, but very difficult and often couldn't solved by mathematical investigation. In this thesis these difficulties are overcome using the theory of nonlinear integral equations of Hammerstein and Volterra, a mathematical method of orthogonal polynomials, Chebyshev, Legendre, Gegenbauer, contraction mapping principle in different metric spaces, and in a certain sense the present thesis is to some extent fills a gap in the Exploration contact problems with the tribological factors of contact of deformable bodies.

The thesis consists of an introduction, five chapters and a list of references.

In the **first chapter** are given the physical models of deformable bodies and lubricating fluids, in which in the thesis investigated the specific contact problems. It presents a model of an elastic body, the fundamental equations of the linear theory of elasticity and thermo-elasticity, plastic body model, the fundamental equations of the deformation theory of plasticity, the model elasto-creeping bodies, the basic equations of the theory of creep for factors of heredity and aging, and finally, the model of Newtonian fluid and basic relations of hydrodynamic lubrication theory.

The **second chapter** is devoted to the solution of some plane and spatial contact problems for deformable rough bodies. Tasks are discussed in the linear theory of elasticity, plasticity theory for a power hardening of the contacting bodies, as well as in non-linear theory of transient creep.

In the **third chapter** of the thesis are some studies of planar and spatial contact problems of contact interaction of deformable bodies with consideration of wear and heat from friction.

The **fourth chapter** is devoted to the dissertation contact interaction of deformable bodies with restricted lubrication, as well as issues of extending the service life bearings and shafts.

The **fifth chapter** is devoted to some flat antiplane and spatial problems of elasticity and thermoelasticity of contact interaction of deformable bodies and thin elements.

In **conclusion**, the main results obtained in the this work. They are:

- Develop a unified approach to the tribological contact problems of solid mechanics, based on a mathematical tool Chebyshev orthogonal polynomials, Gegenbauer and Jacobi theory of nonlinear integral equations of Hammerstein and Volterra, the contraction mapping principle in different metric spaces, as well as Theorem A . Lebesgue limit under the integral sign;
- studied sufficiently broad class of plane, axisymmetric and three-dimensional problems of contact interaction of linear or nonlinear deformable bodies with the surface roughness factor, wear, lubrication and heat from friction;
- Identify the main mechanical quantities tribological contact problems of solid mechanics, which are the contact pressure, the value of rapprochement between the contacting bodies, the size of the contact film thickness, loss of power to the friction. In

particular found that by contacting deformable solids in the presence of roughness factors or wear, contact stresses are limited.

- The laws of changes in the mechanical characteristics at indentation of stamp with a flat base in nonlinear deformable rough body, according to which the contact pressure takes its maximum value at the border of the stamp, though it is smaller than the linear formulation. The law of distribution of contact pressure at low loads is close to uniform, and with increasing load were significantly increased contact pressure at the contact area compared with the contact pressure in the center of the stamp;
- Determine the mechanical properties of impact theory G.Gertsas collision relevant bodies and identified cases in which the observed characteristic pattern G.Gertsas impact theory, ie, decreasing the duration of the impact velocity increases without hitting;
- study the axisymmetric contact problem of boundary friction ring in terms of the punch and the elastic layer shows that the contact pressure between the die and the layer takes its maximum at the point of the inner boundary of the circle ring contact area, besides the decrease of the inner radius of the stamp is much higher than the value of pressure on the outside of the circle contact area.
- considering the plane problem of fluid friction with restricted lubrication clamped along its outer surface of an elastic circular tube and rotating it around its axis rigid cylinder found that with the increase of speed, load parameter (capacity) increases significantly.
- The study of the plane problem of fluid friction with restricted circular rigid cylinder lubrication and elastic inserts elliptical cross-section shows that in this leaflet, in some cases, the minimum film thickness is slightly larger than the usual round liner. This result shows that there are few resources to improve the mechanical characteristics (capacity, durability, longevity, etc.) sliding bearing by replacing it with a round liner elliptical.
- With the aid of the mathematical apparatus of the integral Hankel transform exact solutions of axisymmetric problems of heat conduction and thermoelasticity for piecewise-homogeneous space with a subtle inclusion of a circular disk. In this case, the temperature function, the heat flux density and stress in general case functions expressed by integrals of Bessel and elliptic functions, and in some particular cases - in terms of elementary functions. The heat flux density is generally unlimited, with the usual quadratic singularity in a neighborhood of the boundary points of inclusion, and possibly logarithmic singularity near the center of the inclusion. In some special cases, there exist values of thermal and geometric parameters of the problem, in which the density of heat flow becomes restricted.