

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

**ԶԱՔԱՐՅԱՆ ՎԱՀԵ ԳՐԻՇԱՅԻ**

**ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿԻՍՍՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ  
ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏԱՐԲԵՐ ՏԻՊԻ ԿՈՒՏԱԿԻՉՆԵՐԻ  
ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ**

Ա.02.04 “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա” մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական  
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2016

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

**ЗАКАРЯН ВАГЕ ГРИШАЕВИЧ**

**ПРОДОЛЬНЫЙ СДВИГ СОСТАВНОГО УПРУГОГО  
ПРОСТРАНСТВА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С  
КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗЛИЧНОГО ТИПА**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-  
математических наук по специальности  
01.02.04 – “механика деформируемого твёрдого тела”

ЕРЕВАН – 2016

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝

Ֆ.մ.գ.դ. Կ.Լ.Աղայան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթ-անդամ, ֆ.մ.գ.դ. Ս.Մ.Մխիթարյան

Ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ Ս.Հ.Ջիլավյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2016թ. հունիսի 24 – ին, ժամը 14.00-ին

ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am)):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ 23 մայիսի 2016թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,

Ֆիզ.մաթ.գիտ. դոկտոր



Ս.Վ.Սահակյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Научный руководитель:

д.ф.м.н. К.Л.Агаян

Официальные оппоненты:

чл.-корр. НАН РА, д.ф.м.н. С.М.Мхитарян

к.ф.м.н., доцент С.А.Джилавян

Ведущая организация:

Национальный политехнический  
университет Армении

Защита диссертации состоится 24 июня 2016г. в 14<sup>00</sup> часов

на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, [avsah@mechins.sci.am](mailto:avsah@mechins.sci.am).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 23 мая 2016г.

Ученый секретарь специализированного совета,

доктор физ.мат.наук



А.В.Саакян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Общеизвестно теоретическое и прикладное значение теории контактных задач механики деформируемого твердого тела, обусловленное в значительной мере, исследованиями напряженно – деформированного состояния массивных тел с концентраторами напряжений различных типов. Благодаря как отечественным, так и зарубежным ученым – контактикам, теория контактных и смещанных задач достигла колоссального прогресса, обогащаясь новыми фундаментальными результатами. Это, в значительной мере, связана с непосредственным применением теоретических результатов контактных и смещанных задач в современной инженерной практике, так как почти во всех инженерных сооружениях между их деталями происходит контактирование. С другой стороны, многие инженерные сооружения и конструкции или их детали по тем или иным причинам содержат концентраторы напряжений различных типов – штампы, трещины (разрез, щель), угловых точек, инородных упругих или абсолютно жестких стрингеров (накладка, включение) и т.д. Задачи контактного взаимодействия концентраторов напряжений с массивными телами в рамках принятых гипотез, сводится к решению родственных математических задач, встречающихся при обсуждений классических контактных задач теории упругости, требующих, в свою очередь новых, эффективных решений, позволяющих более детальное исследование взаимодействия контактирующих пар.

Во время эксплуатации конструкции содержащие концентраторы напряжений вокруг последних, как правило, возникают локальные поля напряжений с быстро развивающимися градиентами, которые, в конечном итоге приводят к местному или глобальному разрушению конструкций или их деталей. Вследствие взаимовлияния, напряженное состояние вокруг разнородных концентраторов напряжений, которые могут быть и конструктивного характера, существенно зависит от их взаимного расположения. С этой точки зрения, исследование локальных полей напряжений возникающих вокруг концентраторов, и исследование напряженного состояния массивных тел в целом, является актуальной проблемой как с теоретической так и с практической точки зрения. Исследования этих вопросов было и сейчас остается одним из основных вопросов направлений в теории смешанных и контактных задач и механики разрушения. Это в значительной мере относится к задачам теории упругости, в которых исследуются вопросы, связанные с определением взаимодействия концентраторов напряжений на напряженно – деформированное состояние в составных упругих телах.

**Цель диссертационной работы.** Данная диссертационная работа посвящена качественному и количественному исследованию некоторых новых смешанных антиплоских задач для составных упругих полупространств и пространств содержащих концентраторы напряжений. Цель диссертационной работы является изучение поведения основных механических характеристик (контактные напряжения, коэффициенты концентрации напряжений (ККН) на концах стрингеров и трещин, относительные раскрытие берегов трещин) в зависимости

от упругих полей возникающих вокруг концентраторов напряжении в зависимости от параметров задачи.

**Научная новизна.** В строгой математической постановке поставлен и решен ряд новых антиплоских смешанных задач теории упругости для двух и трех – компонентных составных полупространств и пространств, содержащих один или несколько прямолинейных концентраторов напряжений типа трещин, стрингеров и штампа. Построенные разрывные решения поставленных задач позволяет непосредственно выписать разрешающие системы интегральных уравнений для иных смешанных задач соответствующим разнообразным физически корректных граничных условиях на местах расположения концентраторов напряжений для данной области.

**Практическая ценность.** Упругие тела различных форм, в виде элементов сооружений, содержащие разнообразные концентраторы напряжений встречаются во многих узлах и деталях встречающихся в строительстве, машиностроении и в других областях техники. В этом аспекте полученные в диссертации результаты и выводы, а также результаты связанные с определением показателей особенностей, решений, могут быть использованы при разработке методик расчета прочностных характеристик различных инженерных конструкций и деталей машин в виде их качественного контроля и оценок. Примененные подходы к решению поставленных задач и полученные результаты могут быть положены в основу теоретических исследований новых родственных задач.

**Обоснованность и достоверность** полученных в диссертационной работе результатов обеспечены принятием известных моделей сплошных (составных) сред для матрицы и концентраторов напряжений, а также корректной постановкой рассматриваемых задач и строгостью примененных математических методов решения определяющих уравнений. При помощи общего сочетания методов разрывных решений уравнений теории упругости, теории сингулярных интегральных уравнений, метода интегрального преобразования Фурье и метода механических квадратур было построено эффективные решения поставленных задач.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- На международной конференции «6th Contemporary Problems in Architecture and Construction» (24-27 июня, 2014, Острава, Чехия),
- на VIII – ой международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (22-25 сентября, 2014, Горис – Степанакерт, Армения),
- на международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (21-26 сентября, 2015, Цахкадзор, Армения).

Диссертационная работа в целом обсуждена на совместном заседании отделов «Динамика деформируемых систем и связанные поля» и «Теория упругости,

ползучести и пластичности» Института механики НАН Армении и на общем семинаре Института механики НАН РА.

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано 5 научных статей, список которых приводится в конце автореферата.

**Структура объема работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, кратких выводов и списка цитируемой литературы. Общий объем работы составляет 120 страниц и содержит 51 рисунок и 10 таблиц, а список литературы содержит 122 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дан краткий обзор работ, связанных с тематикой диссертации, обоснована ее актуальность и указан круг обсуждаемых вопросов. Дано краткое содержание работы, изложены основные результаты и положения, выносящиеся на защиту.

**Первая глава** посвящена исследованию антиплоских контактных задач для кусочно – однородного (составного) упругого полупространства, составленного из бесконечного упругого слоя и полупространства с разными упругими характеристиками. Предполагается, что слой и полупространство ослаблены туннельными (магистральными) трещинами, расположенными на одной линии, перпендикулярной к линии раздела материалов. Рассматриваются также случаи, когда на свободной поверхности слоя действует жесткий ленточный штамп конечной длины.

**В первом параграфе** исследуется антиплоская смешанная задача о контактном взаимодействии упругого бесконечного слоя с упругим полупространством, ослабленных туннельными трещинами.

Пусть кусочно-однородное полупространство состоит из упругого слоя толщины  $H$  с модулем сдвига  $G_1$  и упругого полупространства с модулем сдвига  $G_2$ . В правосторонней декартовой системе координат  $Oxyz$  рассматриваемое полупространство занимает область  $\Omega_1 (|x, z| < \infty; -H < y < 0) \cup \Omega_2 (|x, z| < \infty; 0 < y < \infty)$  и находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси  $Oz$  с базовой плоскостью  $Oxy$ . Полупространство и слой по отрезкам  $L_1(-d, -c)$  и  $L_2(b, a)$  оси  $Oy$  ослаблены трещинами и деформируются под влиянием внешних воздействий, заданных на берегах трещин и на свободной поверхности слоя (рис.1).

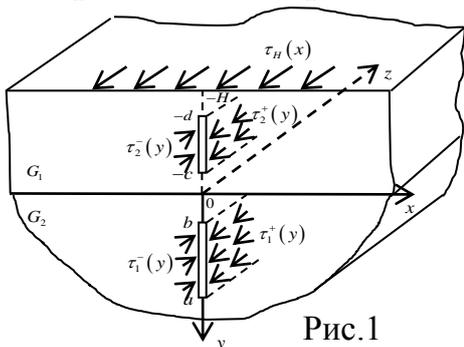


Рис.1

Учитывая, что на берегах трещин могут быть заданы условия различного типа, меняя, тем самым, сущность «трещины», ставится задача построить разрывные решения, т.е. выразить компоненты полей напряжений и перемещений упругой системы слой-полупространство через скачки напряжений и перемещений на отрезках  $L_1(-d, -c)$  и  $L_2(b, a)$

Поставленная задача математически формулиру-

ется в виде следующих граничных задач для полосы  $\omega_1 (|x| < \infty; -H < y < 0)$  и полуплоскости  $\omega_2 (|x| < \infty; 0 < y < \infty)$  относительно единственной, отличной от нуля компоненты, перемещения

$$\frac{\partial^2 w_j(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \omega_j, \quad (j=1, 2), \quad (1)$$

при условиях на свободной поверхности слоя

$$\left. \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y} \right|_{y=-H} = \frac{1}{G_1} \tau_H(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

и условиях полного контакта между ними

$$w_1(x, -0) = w_2(x, +0),$$

$$G_1 \left. \frac{\partial w_1}{\partial y} \right|_{y=-0} = G_2 \left. \frac{\partial w_2}{\partial y} \right|_{y=+0}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3)$$

Предположим, что на линии  $x = 0$  заданы скачки перемещений и напряжений

$$f_j(y) = \frac{1}{G_j} [\tau_{xz}^{(j)}(+0, y) - \tau_{xz}^{(j)}(-0, y)], \quad g_j(y) = w_j(+0, y) - w_j(-0, y) \quad (4)$$

Очевидно, что это финитные функции, обращающиеся в ноль вне отрезков, занимаемых концентраторами напряжений.

Введем обобщенное перемещение

$$U_j(x, y) = [\vartheta(x) + \vartheta(-x)] w_j(x, y), \quad j=1, 2; \quad \vartheta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

которое всюду, кроме линии  $x=0$ , совпадает с компонентой перемещения  $w_j(x, y)$ .

Подставляя (5) в (1), с учетом (4) и свойств ступенчатой функции Хевисайда, и применяя к (1) и условиям (2)-(3) обобщенное преобразование Фурье, приходим к следующим граничным задачам относительно трансформант Фурье

$$\frac{d^2 \bar{U}_j(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 \bar{U}_j(\alpha, y) = -i\alpha g_j(y) + f_j(y), \quad j=1, 2 \quad (6)$$

$$\left. \frac{d\bar{U}_1(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=-H} = \frac{1}{G_1} \bar{\tau}_H(\alpha) \quad (7)$$

$$\bar{U}_1(\alpha, -0) = \bar{U}_2(\alpha, +0) \quad (8)$$

$$G_1 \left. \frac{d\bar{U}_1(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=-0} = G_2 \left. \frac{d\bar{U}_2(\alpha, y)}{dy} \right|_{y=+0} \quad (9)$$

на интервалах  $y \in (-H, 0)$  при  $j=1$  и  $y \in (0, \infty)$  при  $j=2$ .

Считая функции  $g_j(y)$  и  $f_j(y)$  известными, находим общие решения задач (6)-(9), исчезающие при  $y \rightarrow +\infty$ .

После обратного преобразования полученных решений будем иметь

$$\begin{aligned}
w_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta-y} + \gamma \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta+y} + R_{11}^{(1)}(x, y, \eta) \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{-c} \left[ \ln \frac{1}{x^2 + (\eta-y)^2} + \right. \\
& \left. + \gamma \ln \frac{1}{x^2 + (\eta+y)^2} + R_{12}^{(1)}(x, y, \eta) \right] f_1(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_b^a \left[ R_{21}^{(1)}(x, y, \eta) g'_2(\eta) + R_{22}^{(1)}(x, y, \eta) f_2(\eta) \right] d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x, y, t) \tau_H(t) dt + \text{const} \quad (x, y) \in \omega_1 \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta-y} + \gamma \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta+y} + R_{21}^{(1)}(x, y, \eta) \right] g'_2(\eta) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[ \ln \frac{1}{x^2 + (\eta-y)^2} + \right. \\
& \left. + \gamma \ln \frac{1}{x^2 + (\eta+y)^2} + R_{22}^{(2)}(x, y, \eta) \right] f_2(\eta) d\eta - \frac{\mu}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta-y} + R_{11}^{(2)}(x, y, \eta) \right] g'_1(\eta) d\eta + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-d}^{-c} R_{12}^{(2)}(x, y, \eta) f_1(\eta) d\eta - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x, y, t) \tau_H(t) dt + \text{const} \quad (x, y) \in \omega_2 \quad (11)
\end{aligned}$$

Таким образом, имея последние представления и удовлетворяя определенным условиям на отрезках разрыва, можно сразу же выписать систему определяющих сингулярных интегральных уравнений (СИУ) для конкретной задачи. Очевидно, что после задания условий на концентраторах, часть скачков окажется известной, а другая часть будет определена из определяющей системы.

В случае, когда концентраторами являются трещины, система определяющих уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{-d}^{-c} \left[ \frac{1}{\eta-y} - \frac{\gamma}{\eta+y} + \frac{1}{2H+\eta+y} - K_{11}(\eta, y) \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{2}{1+\mu} \int_b^a \left[ \frac{1}{\eta-y} + K_{12}(\eta, y) \right] g'_2(\eta) d\eta = \\
& = \frac{\pi}{G_1} [\tau_1^+(y) + \tau_1^-(y)] + h_1(y) \quad (-d < y < -c) \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{\pi(1+\mu)} \int_{-d}^{-c} \left[ \frac{1}{\eta-y} + K_{21}(\eta, y) \right] g'_1(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_b^a \left[ \frac{1}{\eta-y} + \frac{\gamma}{\eta+y} + K_{22}(\eta, y) \right] g'_2(\eta) d\eta = \\
& = \frac{1}{2G_2} [\tau_2^+(y) + \tau_2^-(y)] + h_2(y) \quad (b < y < a) \quad (13)
\end{aligned}$$

где  $K_{ij}(\eta, y)$  - регулярные ядра,  $\tau_i^\pm(y)$  - внешняя нагрузка на берегах трещин, а  $h_i(y)$  обусловлены нагрузкой на свободной поверхности слоя.

Искомые функции  $g'_j(y)$  должны удовлетворять условиям непрерывности перемещений на концах трещин

$$\int_b^a g'_2(t) dt = 0, \quad \int_{-d}^{-c} g'_1(t) dt = 0$$

Решение системы строится методом механических квадратур с учетом наличия, в случае, когда одна из трещин выходит на линию раздела материалов, неподвижной особенности в концевой точке интегрирования.

В частности, когда трещина в слое отсутствует, а трещина внутри полупространства выходит на линию раздела материалов, а внешняя нагрузка задана на берегах трещины, определяющим уравнением задачи, в безразмерных величинах, будет следующее СИУ с обобщенным ядром Коши

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi - x} + \frac{\gamma}{\xi + x + 2} + H_{22}(\xi, x) \right] g'_2(\xi) d\xi = \frac{\pi\tau_0}{G_2} \quad (-1 < x < 1)$$

где 
$$H_{22}(\xi, x) = \frac{4\mu}{(1+\mu)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{4(n+1)H^* + \xi + x + 2}, \quad H^* = \frac{H}{a}$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$g'_2(\xi) = \frac{\Psi_2(\xi)}{(1+\xi)^\alpha (1-\xi)^{\frac{1}{2}}}; \quad \cos \pi\alpha = -\gamma; \quad \gamma = \frac{1-\mu}{1+\mu}; \quad \mu = \frac{G_1}{G_2}$$

Тангенциальные контактные напряжения, возникающие на линии раздела материалов, определяются формулой

$$\frac{1}{G_2} \tau_{yz}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{(1-\gamma)x}{x^2 + (1+\xi)^2} - \frac{4\mu}{1+\mu} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{4(n+1)H^* + \xi + 1}{x^2 + (4(n+1)H^* + \xi + 1)^2} \right] g'_2(\xi) d\xi$$

Проведен численный расчет, результаты которого приведены в виде таблиц, показывающих значения коэффициентов интенсивности приведенных контактных напряжений (КИН) в концевых точках трещины  $K_{III}(0)$  и  $K_{III}(a)$ , и графиков разности смещений берегов трещины и распределения контактных тангенциальных напряжений на линии раздела материалов, для различных значений параметра  $\mu = G_1/G_2$ , выражающего отношение модулей сдвига слоя  $G_1$  и полупространства  $G_2$ , и параметра  $H^* = H/a$ , представляющего отношение толщины слоя к длине трещины (рис 2).

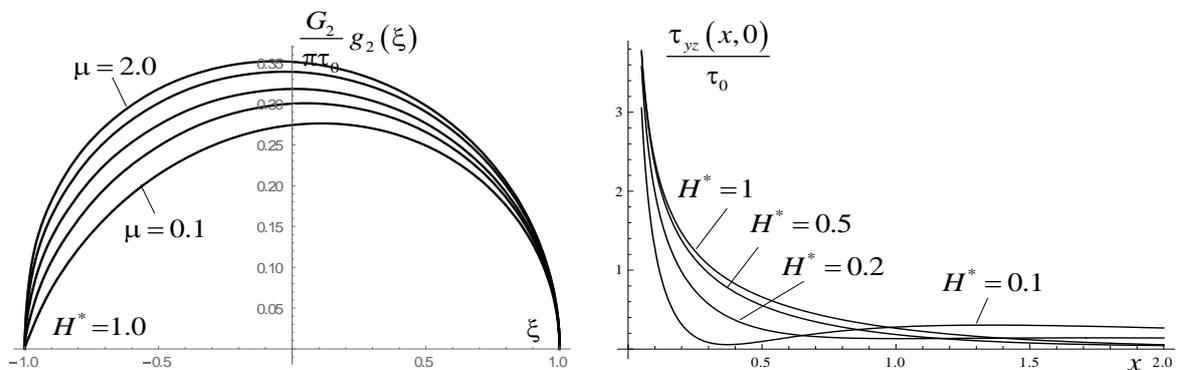


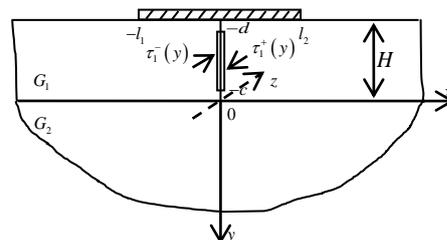
Рис. 2

Из полученных результатов, в частности, можно сделать следующие выводы:

- скорость убывания ККН, особенно у конца на границе раздела материалов, существенно зависит от значений параметра  $\mu$  и чем они выше, тем выше скорости;
- все результаты для значений  $H^* = 1, 2, 5$  отличаются друг от друга на доли процента, т.е. при  $H^* > 1$ , слой можно заменить полупространством.

**Во втором** параграфе первой главы рассматривается антиплоская контактная задача для той же области, что была рассмотрена в предыдущем параграфе, когда к границе слоя прикреплен жесткий ленточный штамп с плоским основанием конечной ширины, а слой ослаблен трещиной. Предполагается, что внешней нагрузкой являются касательные силы  $\tau_1^+(y)$  и  $\tau_1^-(y)$ , приложенные к берегам трещины.

Решение задачи сводится к системе из двух СИУ относительно контактных напряжений под штампом  $\tau(x)$  и производных от разности смещений берегов трещины  $g_1'(t)$  при условиях непрерывности скачка перемещений и равновесия штампа



$$\int_{-d}^{-c} g_1'(t) dt = 0 \quad ; \quad \int_{-l_1}^{l_2} \tau(s) ds = P$$

Проведено исследование определяющих уравнений в случае, когда трещина выходит под штамп, и представлен алгоритм их решения методом механических квадратур. Показано, что неизвестные функции в точке пересечения принимают конечные значения, а на концах имеют квадратичную особенность.

Проведен численный анализ и выявлены зависимости смещения точек берегов трещины и обезразмеренных контактных напряжений под штампом от изменения различных параметров: а) когда верхний конец трещины отстоит от штампа, а нижний конец приближается к линии раздела материалов, б) когда нижний конец достиг линии раздела, а отношение модулей сдвига материалов изменяется, в) когда нижний конец достиг линии раздела, отношение модулей сдвига материалов сохраняется, а верхний конец трещины приближается к штампу. Здесь приведем графики и соответствующие пояснения только для третьего случая.

Расстояние между вершиной трещины и основанием штампа описывается параметром  $d^* = d/l$ , принимающим значения  $d^* = 1.5; 0.5; 0.3; 0.2$ . Вычисления для меньших значений на основе имеющейся системы уравнений проводить невозможно, так как существенную роль начинают играть регулярные ядра, которые в пределе  $d^* \rightarrow 0$  порождают неподвижную особенность и меняют показатель особенности производной смещения берегов трещины.

Анализируя графики на Рис.3 нетрудно заметить, что в пределе при  $d^* \rightarrow 0$  распределение контактных напряжений в центральной части зоны контакта будет носить ступенчатый характер. Этого следовало ожидать, поскольку одинаковая равномерно распределенная нагрузка, приложенная к берегам трещины и вызыва-

ющая их взаимосмещение, при выходе трещины под штамп порождает возникновение в этой точке разнонаправленных напряжений.

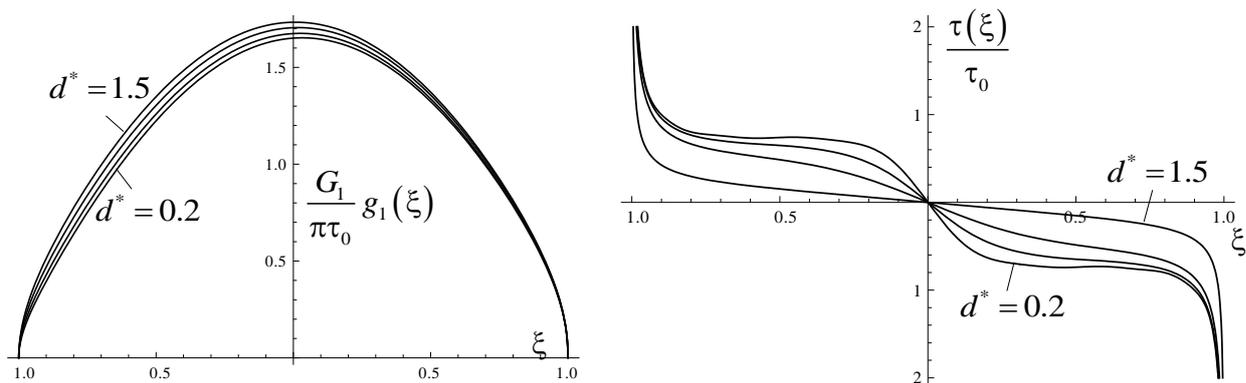


Рис. 3

В третьем параграфе опять рассматривается антиплоская задача для упругой системы слой-полупространство, рассмотренной в предыдущем параграфе, когда вместо трещины имеем тонкое жесткое включение. Здесь наиболее интересным является случай, когда включение выходит на штамп.

Решение поставленной контактной задачи сводится к решению системы из двух СИУ относительно контактных напряжений  $\tau(x)$  под штампом и скачка напряжений  $f_1(y)$  на включении. Контактные напряжения под штампом и на включении в отдельности должны удовлетворять условию равновесия

$$\int_{-l_1}^{l_2} \tau(s) ds = P_1 ; \quad \int_{-d}^{-c} f_1(\eta) d\eta = P_2$$

где  $P_1$  и  $P_2$  - равнодействующие внешних сил, действующих на штамп и включение соответственно.

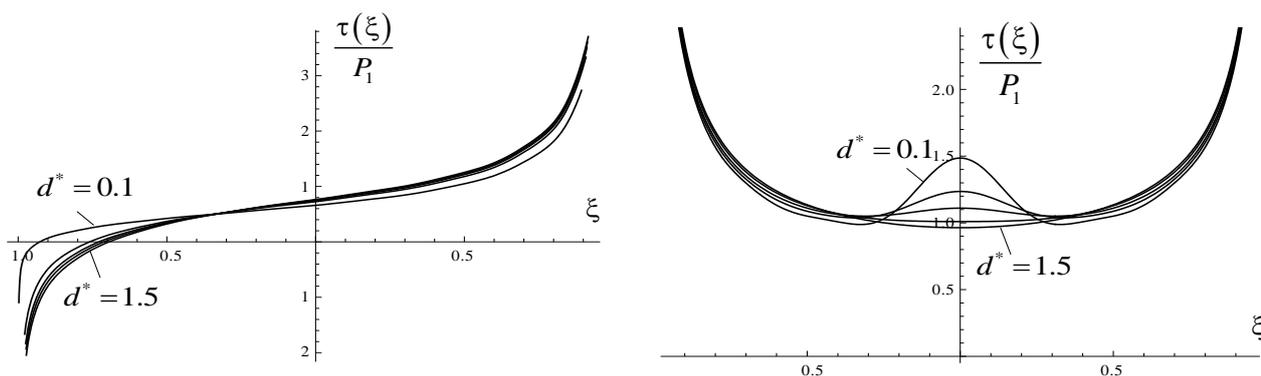


Рис. 4

Проведен численный анализ, как и в предыдущем параграфе, для случаев, когда включение полностью находится внутри слоя или один ее конец выходит на линию раздела материалов.

На Рис.4 приведены графики распределения обезразмеренных контактных тангенциальных напряжений на сторонах включения и под штампом в зависимости от параметра  $d^* = d/l$  при  $\mu = 2$ .

Наличие горба на правом рисунке указывает на то, что в пределе  $d^* \rightarrow 0$  напряжения под штампом, будучи симметричными относительно включения, либо стремятся к бесконечности, если штамп и включение работают отдельно, либо, в случае их соединенности, стремятся к одинаковому конечному значению, оставаясь неопределенными в самой точке соединения.

**Вторая глава** посвящена исследованию антиплоских смешанных задач для упругой составной полупространства, содержащей два параллельных концентратора напряжений конечной длины, перпендикулярных к линии раздела материалов, и для однородной полупространства, содержащей конечное число таких и усиленной по границе упругими накладками конечной длины.

**В первом параграфе** построены разрывные решения, т.е. получены представления, подобные (10)-(11), для задачи, схематически представленной на Рис.5.

Для двух частных случаев решение задачи доведено до конца.

**Случай 1.** Полупространство содержит только тонкое жесткое включение, одна сторона которого оторвана от матрицы. Оно расположено на оси  $Oy$  и выходит на линию раздела материалов.

Решение задачи сводится к системе из двух СИУ относительно неизвестного раскрытия

свободного края трещины  $g_2(y) = w_2(+0, y)$  и неизвестного сдвигающего контактного напряжения, возникающего под включением  $G_2\tau_2(y) = \tau_{xz}^{(2)}(-0, y)$ .

$$\frac{1}{\pi} \int_0^b \left[ \frac{1}{\eta - y} + \frac{\gamma}{\eta + y} + K_{11}(\eta, y) \right] g_2'(\eta) d\eta - \tau_2(y) = f_1(y)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^b \left[ \frac{1}{\eta - y} - \frac{\gamma}{\eta + y} - K_{11}(\eta, y) \right] \tau_2(\eta) d\eta - g_2'(y) = f_2(y)$$

$$f_1(y) = \frac{4\mu}{\pi G_1(1+\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} R_2(t, y) q_H(t) dt + \frac{\tau_0(y)}{G_2}$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^b \left[ \frac{1}{\eta - y} - \frac{\gamma}{\eta + y} - K_{11}(\eta, y) \right] \frac{\tau_0(\eta) d\eta}{G_2}, \quad K_{11}(\eta, y) = R_2(0, y + \eta)$$

при обычных дополнительных условиях.

Исследуя поведение уравнений системы у концов линии интегрирования, для искомых функций будем иметь следующие представления:

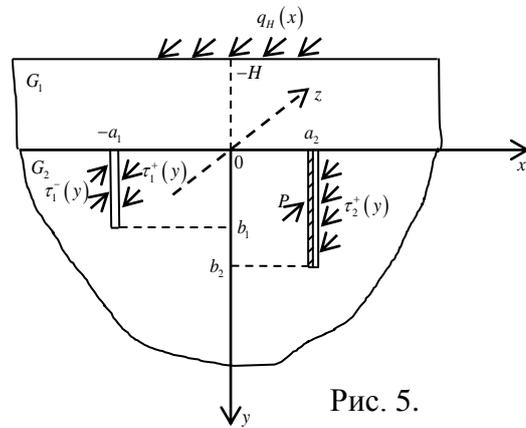


Рис. 5.

$$\tau_2(x) = \frac{\varphi_1^*(x)}{(1+x)^{\delta_1} (1-x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\varphi_2^*(x)}{(1+x)^{\delta_2} (1-x)^{\frac{3}{4}}}; \quad g_2'(x) = \frac{\varphi_1^*(x)}{(1+x)^{\delta_1} (1-x)^{\frac{1}{4}}} - \frac{\varphi_2^*(x)}{(1+x)^{\delta_2} (1-x)^{\frac{3}{4}}}$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  - корни уравнения  $\operatorname{ctg}^2 \pi \delta - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \pi \delta} = 1$ , ( $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ ).

Последние представления, насколько нам известно, получены впервые.

Для достаточно большого диапазона изменения параметров задачи были проведены численные расчеты. В частности, получены результаты для случая, когда нагрузка на берегу трещины задана квадратичной функцией  $\tau_0(y) = 0.1q_0(1-y^2)$ , а нагрузка на поверхности слоя задана в виде двух сосредоточенных сил, т.е.

$$q(t) = q_0 [\delta(t-c^*) - \delta(t+c^*)] \quad \left( c^* = \frac{c}{H} \right).$$

Как результаты, представлены графики распределения контактных напряжений под включением и смещения свободного берега трещины для различных значений расстояния точки приложения сосредоточенной силы  $q_0$  при следующих значениях других параметров:  $\mu = 1.5$ ,  $b^* = b/H = 2$  (Рис. 6).

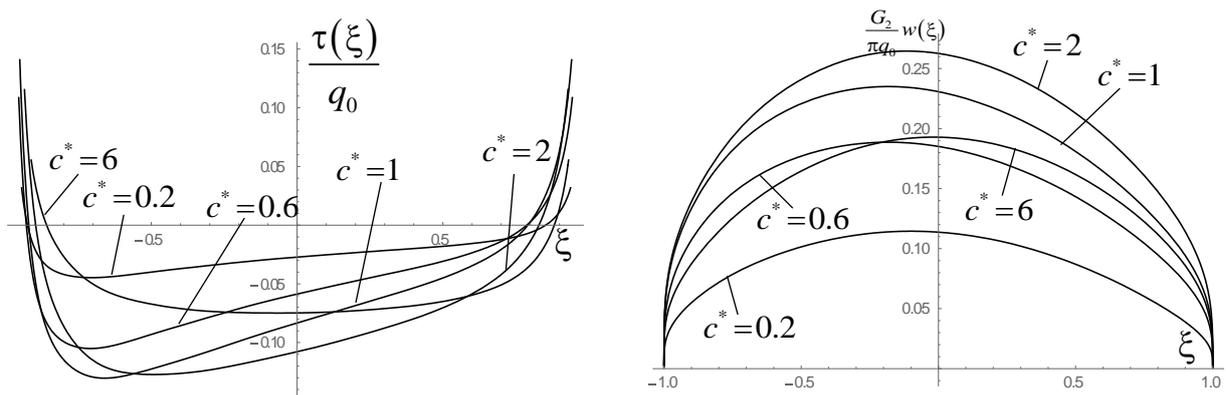


Рис. 6

В табл. 1. приведены значения КИН для различных значений  $c^* = c/H$ , которые определяются формулами:

$$K_{III}(-1) = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sin \pi \delta_1} \varphi_1^*(-1); \quad K_{III}(1) = -2^{-1-\delta_2} \varphi_2^*(1)$$

Таблица 1  $\mu = 1.5$ ,  $b^* = 2$

$c^*$	0.2	0.6	1	2	6	10	20
$K_{III}(-1)$	0.0261	0.0531	0.067	0.071	0.0445	0.0321	0.021
$K_{III}(1)$	-0.0121	-0.0249	-0.0334	-0.0406	-0.0294	-0.0213	-0.0135

Приведены также изменения тех же величин в зависимости от длины  $b^* = b/H$  включения и от отношения  $\mu = G_1/G_2$  модулей сдвига слоя и полупространства в виде графиков и двух таблиц.

Сравнивая представленные результаты, замечаем, что наиболее интересным является зависимость от параметра  $c^*$ . Из данных таблицы 1 замечаем, что при  $c^* = 2$  оба коэффициента концентрации принимают максимальное значение. Целенаправленные численные расчеты показали, что при изменении параметров  $\mu$  и  $b^*$  указанное значение  $c^*$  изменяется, причем в большей степени при изменении второго параметра, по-разному для каждого коэффициента – если для ближнего конца включения оно практически остается в окрестности интервала (1,2), то для дальнего конца оно возрастает.

**Случай 2.** Решена та же задача, что и в предыдущем случае, но при предположении, что обе грани жёсткого включения сцеплены с полуплоскостью.

**Во втором** параграфе этой главы построены решения антиплоской задачи о передаче нагрузки от произвольного числа коллинеарных разнородных упругих стрингеров к однородной полуплоскости, содержащей конечное число параллельных концентраторов напряжений, расположенных перпендикулярно к ее границе.

Рассмотрен частный случай задачи, когда полуплоскость ослаблена двумя трещинами, выходящими на границу полуплоскости и расположенными симметрично относительно стрингера (Рис.7). Предполагая  $G_s^{(1)} > G$  и  $h_s^{(1)} \ll 2c$ , для стрингера принимается известная физическая модель Мелана применительно к антиплоской деформации.

Разрешающей системой будет следующая система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

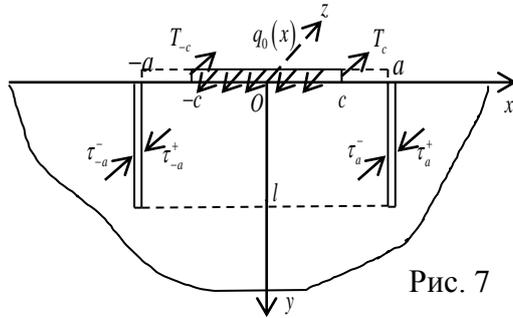


Рис. 7

$$\int_{-c}^c \frac{\tau_1(s)}{s-x} ds + \lambda \int_{-c}^x \tau_1(s) ds - \int_0^l \left[ \frac{\eta}{\eta^2 + (a+x)^2} - \frac{\eta}{\eta^2 + (a-x)^2} \right] g'(\eta) d\eta = f_1(x) \quad (-c < x < c)$$

$$\int_{-c}^c \frac{(t-a)\tau_1(t)}{(a-t)^2 + y^2} dt + \int_0^l \left[ \frac{1}{t-y} + \frac{1}{t+y} - \frac{t-y}{4a^2 + (t-y)^2} - \frac{t+y}{4a^2 + (t+y)^2} \right] g'(t) dt = f_2(y)$$

$$\lambda = \pi \frac{G}{h_s^{(1)} G_s^{(1)}}, \quad (0 < y < l),$$

Правые части полученной системы обусловлены внешними силовыми воздействиями.

Рассмотрим следующие случаи взаимного расположения стрингера и трещин: 1)  $c < a$  - стрингер и трещина не пересекаются; 2)  $c = a - 0$  - стрингер достигает края ближнего берега трещины.

Контактные напряжения на концах линии интегрирования в первом случае имеют корневую особенность, а во втором - принимают конечные значения. Функция  $g'(y)$  в обоих случаях имеет корневую особенность при  $y=l$  и принимает конечное значение при  $y=0$ . При этом во втором случае имеем связь  $\tau(c) = Gg'(0)$ .

Численная реализация задачи для двух рассмотренных выше частных случаев, когда  $c < a$  и  $c = a - 0$ , была проведена при предположении, что берега трещины и боковые грани накладки свободны от напряжений, а на верхней границе накладки приложена равномерно распределенная нагрузка.

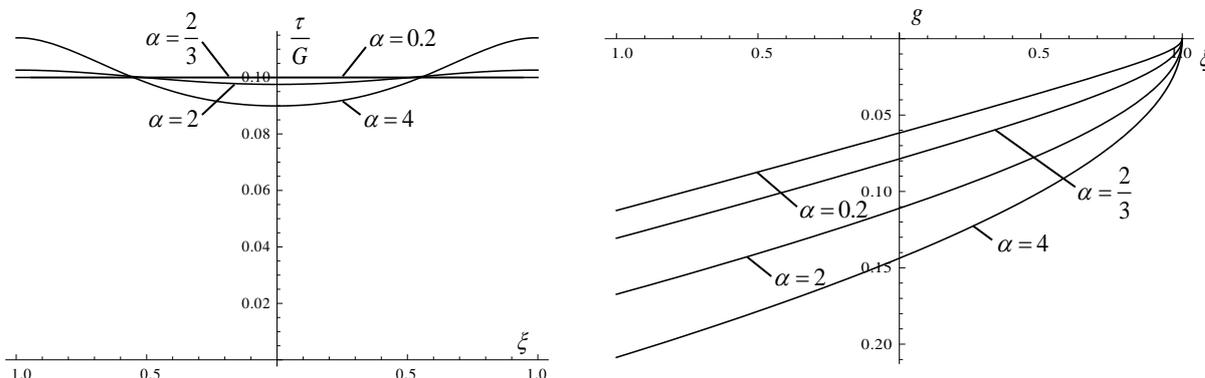


Рис. 8

Таблица 2

$\alpha$	4	2	0.67	0.2
$c < a$	-0.0974	-0.0796	-0.0504	-0.0285
$c = a$	-0.1504	-0.1241	-0.102	-0.0883

Графики показывают изменение контактных напряжений под стрингером и относительное смещение берегов трещин в зависимости от параметра  $\alpha = 2c/l$ . При неизменной длине стрингера уменьшение параметра  $\alpha = 2c/l$  указывает на возрастание длины трещины. В таблице 2 приведены значения КИН на конце трещины. Анализ численных результатов во втором случае показывает, что при увеличении длины трещин распределение контактных напряжений под стрингером стремится к равномерному.

**Третья глава** посвящена исследованию напряженно – деформированного состояния составного упругого пространства, состоящего из двух упругих полупространств или из двух разных упругих полупространств, соединенных между собой посредством упругого слоя, при наличии концентраторов напряжений, расположенных на линиях раздела материалов и внутри полупространств перпендикулярно к этим линиям.

**В первом** параграфе построено определяющее СИУ для антиплоской смешанной задачи, представленной на Рис. 9.

**Во втором** параграфе на примере трех конкретных задач, являющихся частными случаями рассмотренной в предыдущем параграфе общей задачи, приведена реализация разрывных решений и проведен численный анализ систем определяющих уравнений методом механических квадратур.

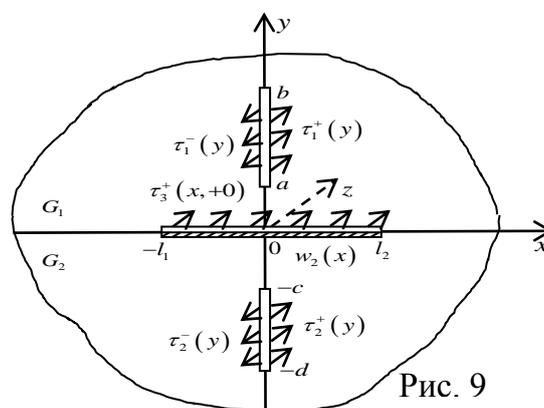


Рис. 9

**Случай 1.** Рассмотрена задача, когда трещина в нижнем полупространстве отсутствует, а верхняя трещина выходит на середину свободного берега горизонтальной трещины-включения (Рис. 10).

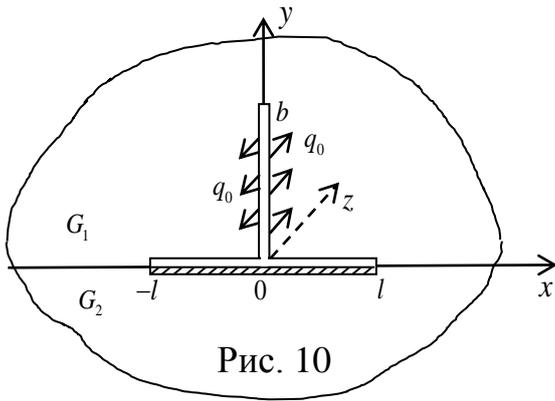


Рис. 10

Внешняя нагрузка в виде равномерно распределенной нагрузки действует только на берегах вертикальной трещины.

Решение задачи сводится к системе из трех сингулярных интегральных уравнений относительно контактных напряжений под включением  $\tau(x)$ , смещения свободного берега горизонтальной трещины относительно включения  $W(x)$  и взаимосмещения берегов вертикальной трещины  $U(x)$ .

$$\frac{\tau(x)}{G_1} - \frac{1}{\pi\mu} \int_0^l \left( \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) W'(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{2x}{x^2 + \eta^2} U'(\eta) d\eta = 0 \quad (0 < x < l)$$

$$W'(x) - \frac{\mu}{\pi G_1} \int_0^l \left( \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) \tau(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{2\eta}{x^2 + \eta^2} U'(\eta) d\eta = 0 \quad (0 < x < l)$$

$$\int_0^b \left[ \frac{1}{\eta-y} + \frac{\gamma}{\eta+y} \right] U'(\eta) d\eta + \frac{2\mu}{(1+\mu)G_1} \int_0^l \frac{t}{y^2 + t^2} \tau(t) dt + \frac{2}{1+\mu} \int_0^l \frac{y}{y^2 + t^2} W'(t) dt = \frac{\pi q_0}{G_1} \quad (0 < y < b)$$

Учитывая, что точка  $(+0, +0)$  одновременно является концом для двух неизвестных функций, необходимо, чтобы выполнялось условие  $W(0) = U(0)$ .

Проведен численный анализ и выявлены зависимости искомых функций от отношения модулей сдвига  $\mu = G_1/G_2$ . На Рис. 11 показаны графики приведенных, относительно  $G_1/\pi q_0$ , смещения свободного берега горизонтальной трещины и взаимосмещения берегов вертикальной трещины.

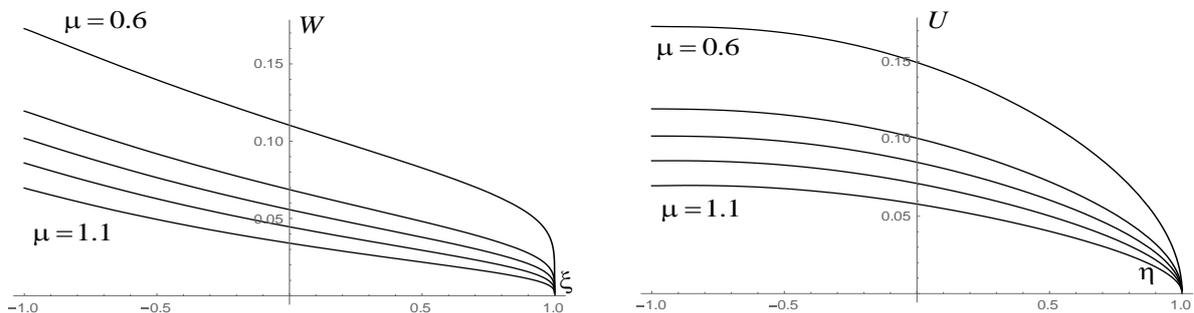


Рис. 11

**Случай 2** соответствует описанной в предыдущем параграфе задаче, когда межфазовая трещина отсутствует, а две другие трещины достигают линии раздела материалов.

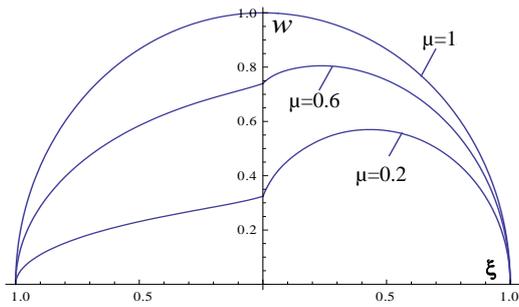


Рис. 12

Проведен численный анализ и рассчитано взаимосмещение берегов объединенной трещины для различных значений отношения модулей сдвига  $\mu$ . Результаты представлены в виде графика (Рис. 12).

**Случай 3.** Рассмотрена предыдущая задача, при предположении, что трещина в нижней полуплоскости отсутствует, а на берегах верхней трещины заданы смешанные условия. Фактически, в верхнем полупространстве имеем жесткое включение, одна сторона которого свободна от напряжений, а конец выходит на линию раздела материалов

Проведен численный анализ, представлены графики распределения контактных напряжений под включением и смещения свободного берега трещины для различных значений отношения модулей сдвига  $\mu$  (Рис. 13).

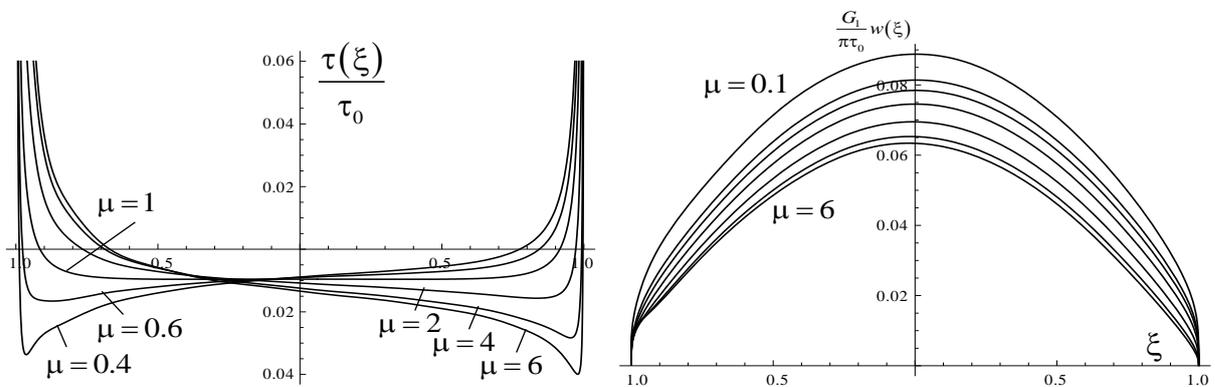


Рис. 13

**В третьем** параграфе исследуется антиплоская смешанная задача теории упругости для составного пространства, состоящего из двух разных упругих полупространств и сцепленного между ними упругого слоя, содержащего трещины и включения (Рис.14).

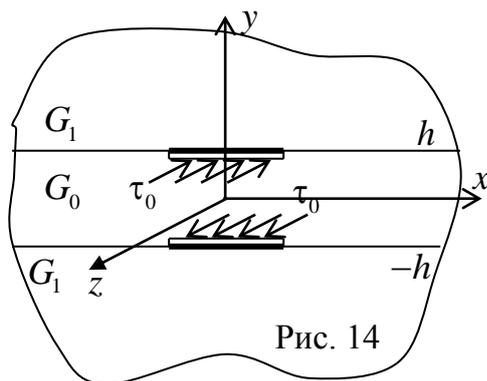


Рис. 14

Построены разрывные решения задачи и получены соответствующие сингулярные уравнения, проведено исследование системы уравнений и найдены показатели особенности искомых функций у концов отрезка интегрирования.

Проведен численный анализ задачи, результаты которого представлены в виде графиков (Рис. 15) и таблицы (Таблица 3). На рисунках приведены распределение контактных тангенсиальных напряжений под включением  $\tau(\xi)$  и раскрытие свободного берега трещины  $w(\xi)$ , а в таблице значения КИН на концах жёсткого включения, в зависимости от различных значениях  $\alpha = h/l$ , при значении отношения модулей сдвига  $G_1/G_0 = 0.8$ .

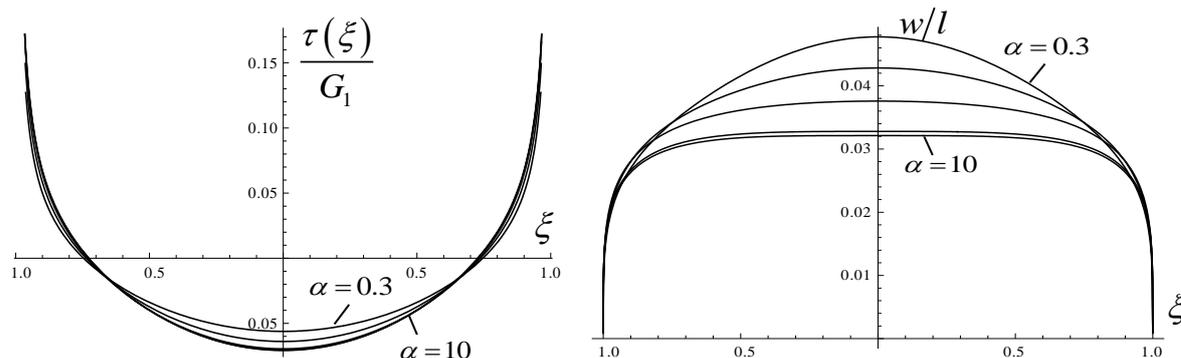


Рис. 15

Таблица 3

$\alpha$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$K_{III}$	0,0306	0,0315	0,0321	0,0324	0,0327	0,0328	0,0329

Численный анализ показывает, что удаление включений друг от друга больше сказывается на раскрытии трещины, а не на распределении контактных напряжений. Это подтверждается и данными таблицы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. В строгой математической постановке поставлен и решен ряд новых антиплоских смешанных контактных задач для кусочно – однородных полупространства и пространства с раздельными, так и примыкающими друг к другу концентраторами напряжений типа трещин, включений, штампов и упругих накладок.
2. Построены разрывные решения (функции влияния) для составного полупространства с расположенными на одной линии, перпендикулярно к линии раздела материалов, прямолинейными концентраторами напряжений и кусочно-однородного пространства, содержащего, помимо указанных, еще и жесткие включения, расположенные на линиях раздела материалов и соединенные только с одним из них.
3. Построены функции влияния для полупространства с конечным числом параллельных трещин и жестких включений и решена антиплоская контактная задача о передаче нагрузки от произвольного числа коллинеарных разнородных упругих стрингеров к однородной полуплоскости, содержащей конечное число параллельных концентраторов напряжений, расположенных перпендикулярно к ее границе.

4. Примененный подход построения решений поставленных задач допускает непосредственный, при помощи построенных функций влияния, вывод разрешающих систем СИУ для задач с определенным взаимным расположением концентраторов напряжений при всевозможных, корректно поставленных, граничных условиях.
5. Методом механических квадратур построены эффективные решения поставленных задач и выявлены зависимости искомым скачков тангенциальных напряжений и смещений, имеющих место на концентраторах, от геометрических параметров задач и отношения модулей сдвига материалов в случае составного массивного тела. В частности, для задачи §1.1 показано, что при малой толщине слоя коэффициент  $K_{III}(1)$  у внутреннего конца трещины имеет минимум, а при  $H^* > 1$  слой можно заменить полупространством, в задаче §2.2 показано, что при увеличении длины трещин распределение контактных напряжений под стрингером стремится к равномерному.
6. Исследован характер распределения контактных напряжений под штампом, когда конец трещины или жесткого включения приближается к штампу.
7. Методика исследований рассмотренных задач создает предпосылки для постановки и решения родственных задач в рамках плоской задачи теории упругости.

### **Список научных работ по теме диссертации**

1. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh., Zakaryan V.G. Longitudinal shear of a compound elastic half – space weakened by cracks. Proc. of 6<sup>th</sup> Int. Conference «Contemporary Problems in Architecture and Construction», 24-27 June, 2014, Ostrava, Czech Republic, Advanced Materials Research Vol. 1020 (2014) pp 286 – 290.
2. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Продольный сдвиг составного упругого пространства, ослабленного трещинами. // Труды 8-ой межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 22-25 сентября, 2014, Горис – Степанакерт – Е., Чартарагет – 2014, с. 23-27.
3. Закарян В.Г. Трещины и включения в составном полупространстве при продольном сдвиге. Сб. трудов межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Ереван – 2015, с. 204 – 208.
4. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Котнактная задача для упругого полупространства с трещинами и накладками при антиплоской деформации. // Известия НАН РА, Механика, т.69, № 1, 2016г, с. 6-15.
5. Агаян К.Л., Амирджян А.А., Закарян В.Г. Продольный сдвиг упругого пространства, содержащего трещины и включения. Научные труды НУАСА 2016. Т.I (60), сс. 35-44.

## ԶԱՔԱՐՅԱՆ ՎԱՀԵ ԳՐԻՇԱՅԻ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ  
ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏԱՐԲԵՐ ՏԻՊԻ ԿՈՒՏԱԿԻՉՆԵՐԻ  
ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

### ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է առաձգականության տեսության հակահարթ խնդրի դրվածքով, կտոր-առ-կտոր համասեռ առաձգական տարածության և կիսատարածության լարվածային դեֆորմացիոն վիճակների ուսումնասիրությանը, երբ վերջիններս պարունակում են ուղղագիծ դրոշմների, ճաքերի և տարասեռ ստրինգերների տեսքով մոդելավորված լարումների կուտակիչներ: Ճարտարագիտական պրակտիկայում հանդիպող բազմաթիվ կառուցվածքներում և նրանց տարրերում, տարբեր պատճառներով կարող են գոյություն ունենալ կամ առաջանալ անհամասեռություններ վերոհիշյալ լարումների կուտակիչների տեսքով: Այդպիսի տարրերի շահագործման ընթացքում անհամասեռությունների շրջակայքերում կարող են առաջանալ արագ փոփոխվող և մեծ գրադիենտներով լարվածային դաշտեր, որոնք էլ հետագայում բերում են կառուցվածքի ամբողջական կամ մասնակի քայքայմանը: Հետևաբար թե տեսական և թե կիրառական տեսակետներից չափազանց կարևոր և արդիական են լարումների կուտակիչներ պարունակող զանգվածեղ մարմինների լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակներին վերաբերվող խնդիրների ուսումնասիրությունը: Լարումների կուտակիչների շրջակայքերում նրանց փոխազդեցությունների արդյունքում, առաջացող լարվածային դաշտերի առանձնահատկությունների առավել ճշգրիտ և հանգամանալից ուսումնասիրման հարցերը միշտ եղել և այժմ էլ մնում են առաձգականության տեսության խառը և կոնտակտային խնդիրների ուսումնասիրության կիզակետում:

Ատենախոսության առաջին գլխում հետազոտվում են առաձգական անվերջ սալից և առաձգական կիսատարածությունից կազմված բաղադրյալ կիսատարածության համար կոնտակտային խնդիրներ հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում: Ենթադրվում է, որ անհամասեռության գծին ուղղահայաց և միևնույն ուղղի վրա դասավորված տեղամասերում կարող են տեղադրված լինել թունելային ճաքեր կամ կոշտ բարակապատ ներդրակներ, իսկ կիսատարածության ազատ եզրում կարող են տեղադրված լինել վերջավոր լայնությամբ շերտ-դրոշմներ: Արտաքին ազդեցությունները կարող են տրված լինել ճաքերի ափերին և սալի ազատ եզրում համապատասխան եզրային պայմանների տեսքով, ինչպես նաև դրոշմի և կոշտ ներդրակների վրա ազդող համազոր ուժի տեսքով: Խնդիրների լուծումները բերվում են Կոշու ընդհանրացված կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների

համակարգերի: Գաուսի մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի օգնությամբ կառուցվել են որոշիչ համակարգերի արդյունավետ լուծումները, որոնք բացահայտ տեսքով պարունակում են անհամասեռությունների ծայրակետերի շրջակայքում տվյալ խնդրին համապատասխան եզակիությունները: Կատարված թվային հաշվարկների օգնությամբ բացահայտվել են դրված խնդրի բնութագրիչ մեխանիկական մեծությունների փոփոխման օրինաչափությունները կախված խնդրի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

Աշխատանքի երկրորդ գլխում դիտարկվում են կոնտակտային խնդիրներ առաձգական կիսատարածության համար: §2.1-ում ուսումնասիրվում է վերջավոր երկարության, երկու զուգահեռ դասավորված ճաքեր կամ ներդրակներ պարունակող առաձգական կիսատարածության և նրան ամրացված վերջավոր հաստության առաձգական սալի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը: Երկու մասնավոր դեպքերի համար, երբ կիսատարածությունը պարունակում է մեկ կենտրոնացուցիչ կոշտ ներդրակի տեսքով ամրացված կիսատարածության մի կողմով և նմանատիպ ներդրակ երկու կողմերից ամրացված, խնդրի լուծումը բերված է թվային ուսումնասիրության: §2.2 – ում դիտարկվում է կամայական վերջավոր թվով առաձգական վերադիրների համակարգից առաձգական կիսատարածությանն ուժի փոխանցման կոնտակտային խնդիրը: Ենթադրվում է, որ առաձգական կիսատարածությունը պարունակում է անհամասեռության գծին ուղղահայաց և միմյան զուգահեռ դասավորված կամայական վերջավոր թվով լարումների կենտրոնացուցիչների համակարգ: Կառուցված է կոնտակտային խնդրին համապատասխան ազդեցության ֆունկցիան: Հակահարթ խնդրի դրվածքով վերադիրների համար Մելանի հայտնի մոդելի շրջանակներում, խնդրի լուծումը բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Երկու ճաքի և մեկ վերադիրի դեպքում կատարված է խնդրի թվային ուսումնասիրություն:

Երրորդ գլխում, հակահարթ դեֆորմացիայի դրվածքով դիտարկվել են երկու (կիսատարածություններ) և երեք (կիսատարածություններ և սալ) կոմպոնենտներից բաղկացած առաձգական տարածության համար կոնտակտային խնդիրներ, երբ վերջինս պարունակում է կիսատարածություններում և անհամասեռություն մակերևույթներում փոխուղղահայաց ուղղություններում տեղադրված լարումների կուտակիչներ (ճաք, կոշտ ներդրակ): Դիտարկված մասնավոր խնդիրների համար ստացված են որոշիչ ինտեգրալ հավասարումների համակարգերը: Ուսումնասիրվել են ստացված համակարգերը, որի հիման վրա կառուցվել են լուծումները թվային – անալիտիկ եղանակով: Կատարվել են թվային հաշվարկներ:

ANTI-PLANE STRESS STATE OF COMPOUND PLANE AND SEMI-PLANE  
CONTAINING STRESS CONCENTRATORS

SUMMARY

The dissertation is devoted to the study of anti-plane stress state of piecewise homogeneous planes and half planes, with different stress concentrators such as cracks, inclusions and stringers.

In practice, many engineering constructions contain different combinations of above-mentioned stress concentrators. During the operation of such constructions, large and fast-varying stress fields may arise in vicinity of concentrators. These stresses can cause destruction of parts or whole of the construction; therefore, the study of stress state of bodies containing stress concentrators is important for scientific and practical reasons.

In the first chapter, anti-plane problems for the compound half-plane consisting of an endless layer and a half-plane are studied. It is assumed that the compound half-plane contains finite cracks and absolutely rigid inclusions on the interface line between the layer and the half-plane and on lines perpendicular to that line. External forces are applied to the stringers, crack boundaries and to rigid stamps on the free border of the layer. Solution of stated problems is reduced to a system of singular integral equations with generalized Cauchy kernels. Solution for this system is obtained by the method of mechanical quadratures. Numerical analysis is performed, and behavior of surface stresses under the inclusions, and displacements of crack boundaries in relation to geometrical and mechanical parameters of the problem, is investigated.

In the second chapter two anti-plane contact problems are considered. In the first paragraph of this chapter, compound semi-plane with two cracks or inclusions perpendicular to the boundary line is studied. For two special cases, when there is one inclusion either fully on only one side attached to the semi-plane, numerical investigation is carried out.

In the second paragraph the contact problem of force transmission from a system of elastic stringers to an elastic half-plane is investigated. It is assumed that half-plane contains a system of linear stress concentrators parallel to each other and perpendicular to the half-plane boundary line. Influence function for the problem is obtained, and solution of the problem is reduced to the solution of a system of singular integral equations. For the special case of two cracks and one stringer numerical analysis is performed.

In the third chapter two problems for compound plane are investigated. In the first case, plane consists of two elastic half-planes, and in the second of two half-planes and an elastic layer between them. In both cases, compound plane contains stress concentrators (cracks, rigid inclusions) on the interface lines between components and on lines perpendicular to them. For certain configurations of concentrators, governing systems of Cauchy singular integral equations are obtained, which are again solved by the method of mechanical quadratures.

