

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԱՍԼԱՆՅԱՆ ՆԱԻՐԱ ՍԱՄՎԵԼԻ

ՄԻԿՐՈՊՈԼՅԱՐ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԵՎ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ
ՋԵՐՄԱԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ
ՍԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՍՈՂԵԼՆԵՐ

Ա 02.04 «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2018

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

АСЛАНЯН НАИРА САМВЕЛОВНА

ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ
ПЛАСТИН И БАЛОК

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.02.04 - “Механика деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ թղթ.-անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ս.Հ.Սարգսյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, ֆ.մ.գ.դ.,
պրոֆեսոր Գ.Ե. Բաղդասարյան
ֆ.մ.գ.դ. Լ. Գ. Ղուլդազարյան


Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. *հունիսի 13-ին*, ժամը 14⁰⁰-ին
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի- 047
մասնագիտական խորհրդի նիստում
(հասցեն՝ 0019 ք. Երևան, Մարշալ Բաղդասարյան պող., 24/2) avsah@mechins.sci.am

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ *հունիսի 9-ին* 2018թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.

 Ա.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА
Научный руководитель: член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., профессор С.О.Саркисян

Официальные оппоненты: акад. НАН РА, д.ф.м.н., профессор Г.Е.Багдасарян
д.ф.м.н. Л.Г. Гулгазарян

Ведущая организация: Ереванский государственный университет

Защита диссертации состоится *13-ого июля* 2018г. в 14⁰⁰ часов
на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА
(адрес: 0019 г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2) avsah@mechins.sci.am

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан *9-ого июня* 2018г.

Ученый секретарь
специализированного совета, д.ф.м.н.



А.В. Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В классической теории упругости связь между нагрузками на обеих сторонах поверхностного элемента описывается исключительно главным вектором (принцип напряжений Коши). В действительности передача внутренних нагрузок через поверхностный элемент осуществляется не только главным вектором, но и главным моментом. Простейшим механически корректным обобщением модели Коши является, введенная братьями Е. и Ф. Коссера, модель моментного континуума. Под таким континуумом понимается упругая среда, деформация которой определяется полями перемещений и поворотов, напряженное состояние – полями силовых и моментных напряжений. Практический смысл моментный континуум приобретает при моделировании сред с внутренней структурой.

По моментной теории упругости в настоящее время существенно развиты две основные математические модели: моментная теория упругости с независимыми полями перемещений и вращений; моментная теория упругости со стесненным вращением.

Моментная теория упругости получила существенное развитие в работах A.C.Eringen, W.T.Koiter, R.Lakes, R.D.Mindlin, W.Nowacki, R. A. Toupin, C.A.Truesdell, Э.Л.Аэро, Г.Е.Багдасаряна, П.А.Белова, В.В.Болотина, Г.Л.Бровко, Е.Ф.Грековой, В.И.Ерофеева, П.А.Жилина, Л.М.Зубова, Е.А.Ивановой, А.А.Ильюшина, В.В.Корепанова, А.М.Кривцова, М.А.Кулеша, В.А.Ломакина, С.А.Лурье, Л.И.Маневича, В.П.Матвеевко, Н.Ф.Морозова, И.С.Павлова, В.А.Пальмова, В.Е.Панина, Б.Е.Победри, А.И.Потапова, Г.Н.Савина, В.М.Садовского, И.Ю.Смолина, И.Н.Шардакова и др.

Различным задачам распространения волн в среде, учитывающей только динамику внутреннего вращения, или в так называемой редуцированной среде Коссера посвящены работы А.Г.Угодчикова, М.В.Белубекяна и В.Ф.Манукяна, М.А.Кулеша, Е.Ф.Грековой и И.Н.Шардакова, С.А.Амбарцумяна, М.В.Белубекяна и А.С.Аветисяна, L.M.Schwartz and D.L.Jonson и др. Трехмерная теория моментной термоупругости изложена в работах W.Nowacki.

Одним из основных направлений развития моментной теории упругости является построение прикладных математических моделей микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и стержней. Методы сведения трехмерных уравнений классической или моментной теории упругости к двумерным (или одномерным) уравнениям теории тонких пластин и оболочек (или стержней) разделяются на три группы: а) метод гипотез, б) метод разложений по толщине, в) асимптотический метод.

Общеизвестны гипотезы Бернулли и Тимошенко (для построения прикладной теории упругих тонких стержней), Кирхгофа - Лява, С.П.Тимошенко, E.Reissner, С.А.Амбарцумяна для построения прикладных теорий упругих тонких пластин и оболочек.

Метод разложения по толщине берет свое начало от работ A.L.Cauchy и S.D.Poisson и развивается в работах Н.А.Кильчевского, И.Т.Селезова, Н.И.Векуа, R.Kienzler и др.

Асимптотический метод построения теории упругих тонких пластин и оболочек существенно развит в работах К.О.Friedrichs, А.Е.Green, А.Л.Гольденвейзера, И.И.Воровича, Л.А.Агаловаяна, В.Л.Бердичевского, Ю.Д.Каплунова, Н.Н.Рогачевой, Ю.А.Устинова, С.О.Саркисяна и др.

Построению моделей теории тонких балок, пластин и оболочек на основе трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений-

вращений и со стесненным вращением с применением метода гипотез посвящены работы Л.П.Винокурова и Н.И.Деревянко, Г.А.Геворкяна, Л.В.Бабича, Н.С.Ганиева, О.Нoffman, С.А.Амбарцумяна, С.А.Амбарцумяна и М.В.Белубекяна, Л.А.Мовсисяна и др.

Асимптотический метод впервые применен в работе В.А.Дудникова и С.А.Назарова для вывода уравнений в перемещениях и поворотах микрополярных упругих тонких пластин. Построению асимптотического решения микрополярной теории упругости в тонких областях с двумя малыми параметрами посвящены работы М.У.Никабадзе, М.М.Кантора, А.Р.Улуханяна и др.

Одним из наиболее применяемых подходов к построению моделей теории тонких балок, пластин и оболочек является так называемый подход концепции линий или поверхностей Коссера. В этом направлении известны работы J.L.Ericksen and C.A.Truesdel, A.E.Green and P.M.Naghdi, В.В.Елисеева, В.А.Еремеева и Л.М.Зубова, П.А.Жилина, Л.И.Шкутина, Н.Altенbach and V.A.Eremeyev, M.Birsan, R.A.Neff, M.V.Rubin и др.

Можно сказать, что метод линий или поверхностей Коссера игнорирует пространственную структуру балки, пластинки или оболочки, а это означает, что остается в стороне вопрос о распределении силовых и моментных напряжений по толщине указанных тонких тел, которые необходимы при расчетах на прочность.

На наш взгляд, наиболее рационален подход С.О.Саркисяна, при котором, используя качественные стороны асимптотического решения граничной задачи микрополярной теории упругости (как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением) в тонких областях, формулируются адекватные гипотезы, на основе которых построены прикладные теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

Развивая этот подход, в работах А.Ж.Фарманян, А.А.Атояна, В.А.Варданян, Г.С.Никогосяна, М.Н.Мутафян, А.А.Саркисян, Л.С.Саркисян, Л.М.Маргарян, Ш.И.Алваджян, Г.С.Айрапетян, К.А.Жамакочян, М.В.Хачатрян изучены различные прикладные задачи микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В работах С.О.Саркисяна построены прикладные теории термоупругости и магнитоупругости микрополярных изотропных тонких оболочек с изучением энергетических вопросов и вариационных принципов.

Понятно, что сведение этих теоретических достижений в практическое русло и построение частных (прикладных) моделей, например, модели термоупругости микрополярных тонких пластин и балок, и изучение на их основе различных конкретных граничных задач в настоящее время является актуальным.

Настоящая диссертационная работа посвящена построению прикладных моделей термоупругости микрополярных ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин и балок как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением и, на основе этих моделей, изучению конкретных граничных задач термоупругого изгиба балок, прямоугольных и круглых пластин.

Целью диссертационной работы является:

- построение прикладных моделей микрополярной термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений-вращений и со стесненным вращением;

- построение прикладных моделей микрополярной термоупругости изгибной деформации ортотропных тонких балок с независимыми полями перемещений-вращений и со стесненным вращением;

- на основе построенных прикладных моделей решение различных прикладных задач термоупругого изгиба микрополярных тонких пластин и балок с независимыми полями перемещений-вращений и со стесненным вращением.

Научная новизна:

- на основе подходов W.Nowacki и С.О.Саркисяна построение, соответственно, моделей микрополярной термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением, с изучением энергетики явления и вариационных принципов;

- решение прикладных задач термоупругого изгиба микрополярных прямоугольных и круглых пластин с независимыми полями перемещений-вращений и со стесненным вращением;

- построение прикладных моделей термоупругого изгиба тонких балок с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением, с изучением энергетики явления и вариационных принципов;

- решение прикладных задач термоупругого изгиба микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений-вращений и со стесненным вращением.

Практическая ценность работы. Результаты исследований, приведенных в диссертации, могут применяться в механике обобщенных континуумов и механике композитных материалов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

- XVIII зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, Россия, 18-22 февраля, 2013);

- 10th International Congress on Thermal Stresses (Nanjing, China, May 31-June 4, 2013);

- XLI International Summer School-Conference. (APM 2013). (St.-Peterburg, Russia, July 1-6, 2013);

- 54-й международной конференции «Актуальные проблемы прочности». (Екатеринбург, Россия, 11-15 ноября 2013);

- European Mechanics of Materials Conference. EMMC14. (Gothenburg, August 27-29, 2014);

- Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Цахкадзор, Армения 21-26 сентября, 2015);

- 11th International Congress on Thermal Stresses (Salerno, Italy, June 5–9, 2016),

- International Conference Design Modelling and Experiments of Advanced Structures and Systems (DeMEASS) VIII. (Moscow, Russia, 21-24 May, 2017);

- International Summer School Conference «Advanced Problems in Mechanics». APM 2017. (St. Petersburg, Russia, 22-27 June, 2017);

- XXIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова (Москва, Россия, 19-23 марта, 2018);

- 60 Международной научной конференции «Актуальные проблемы прочности». (Витебск, Беларусь, 14-18 мая, 2018);

- Семинаре отдела «Механика тонкостенных систем» Института механики НАН Армении (30 мая, 2018);
- Общем семинаре Института механики НАН Армении (31 мая, 2018).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (179 наименований). Общий объем работы составляет 129 страниц печатного текста, включая 4 рисунка и 12 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность и новизна темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, дан краткий обзор работ, связанных с рассмотренными в диссертации вопросами. Изложена теоретическая и практическая ценность работы и в сжатом виде излагается содержание всех трех глав диссертации.

В главе 1, которая имеет вводный характер, используя известные литературные источники, излагаются общие трехмерные теории микрополярной статической термоупругости с независимыми полями перемещений - вращений и со стесненным вращением.

В §1.1 излагаются основные дифференциальные уравнения и граничные условия трехмерной микрополярной статической термоупругости для ортотропного (в частности, изотропного) тела с независимыми полями перемещений и вращений. Рассматриваемое тело имеет форму пластинки толщиной $2h$. Приведем эти уравнения и граничные условия в прямоугольной декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} & \text{Уравнения равновесия} \\ & \sigma_{ji,j} = 0, \quad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{ji} – компоненты несимметричного тензора силовых напряжений, μ_{ji} – компоненты несимметричного тензора моментных напряжений, ϵ_{ijk} – тензор Леви-Чивиты (здесь используем соглашение о суммировании, а запятая перед индексом означает дифференцирование по соответствующей координате);

$$\begin{aligned} & \text{Геометрические соотношения} \\ & \gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \omega_k, \quad \chi_{ij} = \omega_{i,j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где γ_{ji} – компоненты несимметричного тензора деформации, χ_{ij} – компоненты несимметричного тензора изгиба–кручений, u_i – компоненты вектора перемещения, а ω_i – компоненты вектора независимого поворота точек тела;

Физические соотношения термоупругости микрополярного ортотропного тела (главные направления упругости совпадают с направлениями координатных линий):

$$\gamma_{mn} = a_{ijmn} \sigma_{ij} + \alpha_{mt} T \delta_{mn}, \quad \chi_{mn} = b_{ijmn} \mu_{ij}. \quad (3)$$

Здесь \hat{a}, \hat{b} – матрицы упругих постоянных микрополярного ортотропного (в частности, изотропного) материала пластинки, α_{kt} ($k = 1, 2, 3$) – линейные коэффициенты температурного расширения, T – приращение температуры, δ_{mn} – символ Кронекера.

К основным уравнениям микрополярной теории термоупругости (1)-(3) присоединяются граничные условия. На лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ задаются соответствующие компоненты тензоров силовых и моментных напряжений:

$$\sigma_{3k} = p_k^\pm, \quad \mu_{3k} = m_k^\pm, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

а на поверхности края пластинки Σ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, граничные условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Температурное поле определяется уравнением стационарной теплопроводности

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0, \quad (5)$$

где λ_k ($k = 1, 2, 3$) - коэффициенты теплопроводности материала пластинки.

В микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (см. W. Nowacki, 1986) имеют место все энергетические теоремы (теорема единственности, взаимности и др.) и вариационные принципы.

В §1.2 приведены основные уравнения и граничные условия трехмерной микрополярной термоупругости для ортотропного (в частности, изотропного) тела со стесненным вращением.

Для этой модели трехмерной микрополярной термоупругости характерно то, что вектор поворота точек тела во время деформации определяется как в классической теории упругости, а именно $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$, которое в компонентной записи имеет вид:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (6)$$

Основные уравнения трехмерной теории микрополярной термоупругости со стесненным вращением будут представлять собой уравнения равновесия (1), следующие геометрические соотношения:

$$\gamma_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \tilde{\gamma}_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \tilde{\gamma}_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad (7)$$

$$\chi_{ii} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}, \quad \chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}, \quad \chi_{i3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i}, \quad \chi_{3i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_3}, \quad \chi_{ij} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2),$$

к которым следует присоединить уравнения (6) и физические соотношения термоупругости вида (3) с учетом особенностей теории со стесненным вращением. К системе уравнений (1), (7), (6), (3) следует присоединить соответствующие граничные условия. В общей трехмерной теории микрополярной упругости и термоупругости доказываются все энергетические теоремы и вариационные принципы (W.T.Koiter, 1965).

В §1.3 кратким образом излагается основной подход к сведению трехмерной задачи микрополярной теории термоупругости как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением к соответствующей двумерной задаче.

Во второй главе построены прикладные модели микрополярной термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин как с независимыми полями перемещений-вращений, так и со стесненным вращением.

В §2.1, принимая за основу подход W. Nowacki (1986), построена модель термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений - вращений:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}^*}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^*}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{13}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}^*}{\partial x_2} + \sigma_{12}^* - \sigma_{21}^* = 0, \quad (8)$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{11}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22}^* = \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}, \quad \gamma_{12}^* = \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} - \omega_3^*, \quad \gamma_{21}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2} + \omega_3^*, \quad \chi_{13}^* = \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_1}, \quad \chi_{23}^* = \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_2}. \quad (9)$$

Физические соотношения термоупругости

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= a_{11}\sigma_{11}^* + a_{12}\sigma_{22}^* + \alpha_{1t}T_0, & \gamma_{12}^* &= a_{77}\sigma_{12}^* + a_{78}\sigma_{21}^*, & \chi_{13}^* &= b_{66}\mu_{13}^*, \\ \gamma_{22}^* &= a_{12}\sigma_{11}^* + a_{22}\sigma_{22}^* + \alpha_{2t}T_0, & \gamma_{21}^* &= a_{78}\sigma_{12}^* + a_{88}\sigma_{21}^*, & \chi_{23}^* &= b_{44}\mu_{23}^*, \end{aligned} \quad (10)$$

к которым следует присоединить соответствующие граничные условия на контуре срединной плоскости пластинки.

Для этой модели устанавливаются закон сохранения механической энергии, энергетические теоремы и вариационные принципы.

В §2.2 формулированы гипотезы, на основе которых построена прикладная модель изгибной деформации микрополярной термоупругости тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Принятые гипотезы, это гипотезы, которые сформулированы С.О.Саркисяном (2013, 2014) и представляют собой основные качественные свойства асимптотического решения соответствующей трехмерной задачи в тонкой области пластинки (или оболочки), суть которых состоит в следующем.

1) В качестве кинематической вводится предположение о линейном изменении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате x_3 следующего характера:

$$u_1 = x_3 \psi_1(x_1, x_2), \quad u_2 = x_3 \psi_2(x_1, x_2), \quad u_3 = w(x_1, x_2), \quad (11)$$

$$\omega_1 = \Omega_1(x_1, x_2), \quad \omega_2 = \Omega_2(x_1, x_2), \quad \omega_3 = x_3 t(x_1, x_2), \quad (12)$$

где w - прогиб пластинки; ψ_1, ψ_2 - полные углы поворота нормального к срединной плоскости элемента вокруг осей x_1, x_2 ; Ω_1, Ω_2 свободные повороты нормального к

срединной плоскости элемента вокруг осей x_1, x_2 ; t - интенсивность поворота точек трехмерной пластинки вокруг оси x_3 . Кинематическая гипотеза для перемещений, выражаемая формулой (11), это известная кинематическая гипотеза Тимошенко в классическом случае. Кинематическую гипотезу (11)-(12) в целом, по предложению С.О.Саркисяна, назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в теории изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

К статическим относятся следующие гипотезы 2) и 3):

2) Силовое нормальное напряжение σ_{33} в обобщенном законе Гука (3) в формулах для γ_{11}, γ_{22} , можно пренебречь относительно силовых нормальных напряжений σ_{11}, σ_{22} ; в обобщенном законе Гука (3) в формулах для χ_{13}, χ_{23}

моментными напряжениями μ_{31}, μ_{32} можно пренебречь относительно моментных напряжений μ_{13}, μ_{23} ;

3) Для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} ($i=1,2$) и моментного напряжения μ_{33} сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(x_1, x_2) \quad (i=1,2), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(x_1, x_2) \quad (13)$$

После определения указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} определим, соответственно, как сумму значений (13) и результата интегрирования первых двух и шестого из уравнений равновесия (1), для которых потребуем условие, чтобы усредненные по толщине пластинки величины были равны нулю;

4) Предположение о тонкостенности пластинки;

5) Для температурной функции T примем известный закон о линейном изменении ее по толщине пластинки:

$$T = \frac{x_3}{2h} \Delta T = x_3 \chi_i, \quad \Delta T = T^+ - T^-, \quad \chi_i = \frac{T^+ - T^-}{2h}, \quad T^+ = T \Big|_{x_3=h}, \quad T^- = T \Big|_{x_3=-h}. \quad (14)$$

Прикладная модель микрополярной термоупругости изгибной деформации тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений определяется следующей системой уравнений и граничных условий:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -p_3, \quad \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = -m_i, \quad (15)$$

$$N_{3i} - \left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} \right) = h \tilde{p}_i, \quad L_{33} - \left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + (M_{12} - M_{21}) \right] = h \tilde{m}_3, \quad i, j = 1; 2,$$

Геометрические соотношения

$$K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota, \quad K_{21} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \quad (16)$$

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \quad k_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad k_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad k_{33} = \iota, \quad l_{i3} = \frac{\partial \iota}{\partial x_i},$$

Физические соотношения термоупругости

$$N_{13} = \tilde{C}_{55} \Gamma_{13} + C_{56} \Gamma_{31}, \quad N_{31} = C_{66} \Gamma_{31} + C_{56} \Gamma_{13}, \quad N_{23} = C_{55} \Gamma_{23} + C_{45} \Gamma_{32}, \quad N_{32} = C_{44} \Gamma_{32} + C_{45} \Gamma_{23},$$

$$M_{11} = D_{11} K_{11} + D_{12} K_{22} + D_{11} \chi_i, \quad M_{21} = D_{77} K_{21} + D_{78} K_{12}, \quad L_{12} = d_{88} k_{12} + d_{78} k_{21}, \quad \Lambda_{13} = \lambda_{66} l_{13}, \quad (17)$$

$$M_{22} = D_{22} K_{22} + D_{12} K_{11} + D_{21} \chi_i, \quad M_{12} = D_{88} K_{12} + D_{78} K_{21}, \quad L_{21} = d_{77} k_{21} + d_{78} k_{12}, \quad \Lambda_{23} = \lambda_{44} l_{23},$$

$$L_{11} = d_{11} k_{11} + d_{12} k_{22} + d_{13} k_{33}, \quad L_{22} = d_{22} k_{22} + d_{21} k_{11} + d_{23} k_{33}, \quad L_{33} = d_{33} k_{33} + d_{31} k_{11} + d_{32} k_{22}$$

для ортотропного тела (в частности, для изотропного тела);

Граничные условия

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*; \quad M_{12} = M_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*; \quad N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*; \quad (18)$$

$$L_{11} = L_{11}^* \quad \text{или} \quad k_{11} = k_{11}^*; \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad k_{12} = k_{12}^*; \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*.$$

Здесь $N_{13}, N_{23}, N_{31}, N_{32}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}, L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{12}, L_{21}, \Lambda_{13}, \Lambda_{23}$ – усредненные по толщине пластинки усилия, моменты и гипермоменты; $\Gamma_{13}, \Gamma_{31}, \Gamma_{23}, \Gamma_{32}, K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}, k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{21}, l_{13}, l_{23}$ – сдвиговые деформации, изгиб – кручения и гиперизгибания срединной поверхности.

После решения граничной задачи (15)-(18) по соответствующим формулам определяются распределения деформации, изгиб-кручений, силовых и моментных напряжений по толщине пластинки.

Для построенной модели микрополярной термоупругости ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин устанавливаются закон сохранения энергии, теоремы взаимности и общий вариационный принцип.

В §2.3 рассматривается конкретная прикладная задача о термоупругом изгибе изотропной прямоугольной пластинки. Разрешающая система уравнений получается относительно функций $w, \psi_1, \psi_2, \Omega_1, \Omega_2, t$.

Рассматривается случай, когда края прямоугольной пластинки шарнирно – оперты:

$$\begin{aligned} w = 0, \psi_2 = 0, M_{11} = 0, L_{12} = 0, \Omega_1 = 0, \Lambda_{13} = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_1 = a, \\ w = 0, \psi_1 = 0, M_{22} = 0, L_{21} = 0, \Omega_2 = 0, \Lambda_{23} = 0 \text{ при } x_2 = 0, x_2 = b. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение этой граничной задачи удастся в конечном счете привести к решению следующего уравнения относительно w :

$$\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)\nabla^2\nabla^2 w - 4\mu\alpha\left[(\gamma + \varepsilon) + \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\right]\nabla^2 w - 4\mu\alpha\frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_i\chi_i = 0, \quad (20)$$

Далее рассмотрим случай, когда температурная функция χ_i – постоянная. Решение граничной задачи (20), (19) (в двух последовательных этапах с помощью обозначения

$$\nabla^2 w = u, \nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}) \text{ будем искать в виде разложения в двойной тригоно-$$

метрический ряд, наперед безразмерную величину $\alpha_i T_0$ – как постоянную функцию, представляя в виде двойного тригонометрический ряд. Приведем результаты численных вычислений. Данные задачи следующие.

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \nu = 0.33, \bar{\gamma} = \bar{\varepsilon} = 22 \cdot 10^{-4}, \bar{\beta} = 11 \cdot 10^{-2}, \tilde{T}_0 = 60^\circ \text{ C}, \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ } \frac{1}{\text{гр}}, \quad (21)$$

где $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{a^2\mu}$, $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a^2\mu}$, $\bar{\beta} = \frac{\beta}{a^2\mu}$ безразмерные величины.

В таблице 1 приведены значения максимального прогиба микрополярной пластинки в зависимости от значения безразмерного физического параметра $\frac{\alpha}{\mu}$

(остальные безразмерные физические параметры считались постоянными). В этой же таблице для сравнения приведено также значение максимального прогиба по классической модели пластинки. Отметим, что, как показывают расчеты, значения безразмерных физических параметров $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ и $\bar{\beta}$ мало влияют на значение прогиба

микрополярной пластинки, главную роль играет параметр $\frac{\alpha}{\mu}$.

Таблица 1. Максимальные прогибы микрополярной прямоугольной пластинки с независимыми полями перемещений и вращений в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и, классической пластинки, под действием температуры.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{мик.}}{w_{\max}^{кл.}}$
10^{-6}	1.638	1.638	1
10^{-4}	1.555	1.638	0.95
10^{-3}	1.006	1.638	0.61

Численные расчеты, приведенные в таблице 1 устанавливают, что при увеличении микрополярной безразмерной постоянной $\frac{\alpha}{\mu}$, сильно повышается жесткость пластинки по сравнению с классическим случаем. Аналогичный результат получается, если в рассматриваемой модели будем пренебрегать поперечными сдвигами.

В §2.4 рассматривается термоупругий изгиб круглой пластинки по модели микрополярных упругих пластин с независимыми полями перемещений и вращений. В срединной плоскости пластинки принимается полярная система координат. Для осесимметричной задачи разрешающая система уравнений получается относительно функций $w(r), \psi_1(r), \Omega_2(r)$.

К этой системе уравнений необходимо присоединить граничные условия (принимается, что пластинка сплошная, а контур $r = a$ шарнирно – оперт):

$$w|_{r=a} = 0, \quad M_{11}|_{r=a} = 0, \quad L_{12}|_{r=a} = 0 \quad (22)$$

Указанную систему уравнений, при помощи замены $\psi_1 = \tilde{\psi}_1 + \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2\delta} \bar{r}$, можно привести к решению следующего уравнения:

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_1 - k^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_1 = - \frac{6 \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 (1-\nu) \alpha_r \tilde{T}_0}{\delta^3 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)} \bar{r}, \quad (23)$$

$$\tilde{\nabla}^2(\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d(\cdot)}{d\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2}(\cdot), \quad k^2 = \left(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon} + \frac{2\delta^2}{3(1-\nu)} \right) \frac{6\alpha(1-\nu)}{\delta^2 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)}$$

Общее решение этого уравнения для сплошной пластинки имеет вид:

$$\tilde{\psi}_1 = -\frac{C_1}{k^2} \bar{r} + C_2 I_1(k\bar{r}) + \frac{3 \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 (1-\nu) \alpha_r \tilde{T}_0}{4k^2 \delta^3 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)} \bar{r}^3 \quad (24)$$

где $I_1(kr)$ – функция Бесселя чисто мнимого аргумента первого порядка, C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

А для \bar{w} и Ω_2 будем иметь:

$$\bar{w} = \frac{C_1}{2k^2} \bar{r}^2 + C_2 I_0(k\bar{r}) \left[\frac{\delta^2 k}{3(1-\nu)} - \frac{1}{k} \right] - \frac{3 \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 (1-\nu) \alpha_r \tilde{T}_0}{16k^2 \delta^3 (\bar{\nu} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)} \bar{r}^4 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 \alpha_r \tilde{T}_0}{k^2 \delta (\bar{\nu} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)} \bar{r}^2 - \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{4\delta} \bar{r}^2 + C^*, \quad (25)$$

$$\Omega_2 = C_2 I_1(k\bar{r}) \left[1 - \frac{\delta^2 k^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)}{6 \frac{\alpha}{\mu} (1-\nu)} \right] + \frac{3 \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 (1-\nu) \alpha_r \tilde{T}_0}{4k^2 \delta^3 (\bar{\nu} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right)} \bar{r}^3 - \left[\frac{C_1}{k^2} + \frac{\frac{\alpha}{\mu} \alpha_r \tilde{T}_0}{k^2 \delta (\bar{\nu} + \bar{\varepsilon})} - \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2\delta} \right] \bar{r} \quad (26)$$

где C^* – постоянная интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются при помощи поставленных граничных условий. Численные результаты (таблица 2) получены при тех же данных, которые были приняты в задаче об изгибе прямоугольной пластинки.

Таблица 2. Максимальные прогибы микрополярной круглой пластинки в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и классической пластинки.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{W_{\max}^{\text{мик.}}}{W_{\max}^{\text{кл.}}}$
1.2×10^{-3}	7.184	7.5	0.96
1.8×10^{-3}	5.299	7.5	0.71
2×10^{-3}	4.825	7.5	0.64

Для круглой пластинки тоже результаты расчетов устанавливают аналогичный эффект, что при увеличении микрополярной безразмерной постоянной $\frac{\alpha}{\mu}$, сильно

увеличивается жесткость пластинки по сравнению с классическим случаем. Аналогичный результат получается, если в рассматриваемой модели будем пренебрегать поперечными сдвигами.

В §2.5 аналогичным подходом (как в §2.1) построена модель микрополярной термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния тонких пластин со стесненным вращением. Основные уравнения этой модели представляют собой уравнения равновесия (8), физические соотношения термоупругости:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= a_{11} \sigma_{11}^* + a_{12} \sigma_{22}^* + \alpha_{1r} T_0, & \tilde{\gamma}_{12}^* &= 2a_{77} (\sigma_{12}^* + \sigma_{21}^*) \\ \gamma_{22}^* &= a_{12} \sigma_{11}^* + a_{22} \sigma_{22}^* + \alpha_{2r} T_0, & \chi_{13}^* &= b_{66} \mu_{13}^*, & \chi_{23}^* &= b_{44} \mu_{23}^* \end{aligned} \quad (27)$$

для ортотропного тела (в частности, для изотропного тела), а также геометрические соотношения

$$\gamma_{11}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22}^* = \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}, \quad \tilde{\gamma}_{12}^* = \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2}, \quad \chi_{13}^* = \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_1}, \quad \chi_{23}^* = \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_2}, \quad (28)$$

$$\omega_3^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2} \right). \quad (29)$$

К системе уравнений (8), (27)-(29) необходимо присоединить граничные условия на контуре (Γ) срединной плоскости пластинки.

В §2.6 построена прикладная модель микрополярной термоупругости изгибной деформации тонких пластин со стесненным вращением. Для этой цели в основу принимаются все гипотезы §2.2 с учетом особенностей теории со стесненным вращением. Тогда для перемещений получаются те же формулы (11), а компоненты вектора вращения будут выражаться так:

$$\Omega_i = \frac{1}{2}(-1)^j \left(\psi_j - \frac{\partial w}{\partial x_j} \right), \quad \Omega_3 = x_3 t, \quad t = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right), \quad i, j = 1; 2 \quad (30)$$

Основные уравнения модели микрополярной термоупругости изгибной деформации тонких пластин со стесненным вращением представляют уравнения равновесия (15),

Физические соотношения термоупругости

$$M_{ii} = D_{ii} K_{ii} + D_{ij} K_{jj} + M_{ii}, \quad M_{ii} = D_{ii} \chi_i, \quad M_{ij} + M_{ji} = \frac{h^3}{3a_{77}} \tilde{K}_{ij}, \quad N_{i3} + N_{3i} = \frac{h}{a_{66}} \tilde{\Gamma}_{i3}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2}{3} \frac{h^3}{b_{44}} l_{23},$$

$$L_{ii} = 2h \frac{\tilde{b}_{ij} k_{ii} - \tilde{b}_{ij} k_{jj}}{\tilde{b}_{ii} \tilde{b}_{jj} - \tilde{b}_{ij} \tilde{b}_{ji}}, \quad L_{12} = 2h \frac{b_{88} k_{12} - b_{78} k_{21}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2}, \quad L_{21} = 2h \frac{b_{77} k_{21} - b_{78} k_{12}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2}, \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3b_{66}} l_{13}, \quad (31)$$

для ортотропного тела (в частности, для изотропного тела) и

Геометрические соотношения

$$\tilde{\Gamma}_{i3} = \frac{\partial w}{\partial x_i} + \psi_i, \quad K_{ii} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad \tilde{K}_{12} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}, \quad k_{ii} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad k_{ij} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, \quad l_{i3} = \frac{\partial t}{\partial x_i}, \quad (32)$$

где Ω_1, Ω_2 , и t – определяются по формулам (30).

К системе уравнений (15),(31),(32) присоединяются соответствующие граничные условия.

Для построенной модели термоупругого изгиба микрополярных тонких пластин со стесненным вращением устанавливается закон сохранения механической энергии.

В §2.7 на основе построенной модели (§2.6) микрополярной термоупругости изгибной деформации тонких пластин со стесненным вращением изучается прикладная задача о термоупругом изгибе прямоугольной пластинки.

К этим уравнениям необходимо присоединить формулы (30).

Рассматриваются граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad M_{11} + L_{12} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a,$$

$$w = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad M_{22} + L_{21} = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Lambda_{23} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b. \quad (33)$$

Изучаемая задача, в итоге приводится (при $\chi_i = const$) к решению следующей системы уравнений:

$$-(\gamma + \varepsilon) \nabla^2 w + (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) + \frac{4\mu h^2}{1-\nu} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_i \chi_i = 0,$$

$$2\mu \nabla^2 w + 2\mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = 0.$$

Отметим, что в изучаемой модели термоупругого изгиба микрополярных пластин учитываются поперечные сдвиговые деформации. Если пренебрегать поперечными сдвигами, тогда задача термоупругого изгиба микрополярной пластинки со стесненным вращением приводится к решению следующего дифференциального уравнения (типа Софи – Жермен–Лагранжа):

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \nabla^2 \chi_t = 0, \quad (35)$$

где $D^* = D + 2h(\gamma + \varepsilon)$, $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$. (36)

Если иметь в виду условия шарнирного опирания, можно показать (как и в классическом случае), что вместо уравнения (35) необходимо решать следующее уравнение:

$$D^* \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t = 0, \quad (37)$$

со следующими граничными условиями

$$w(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = w_1(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} = 0. \quad (38)$$

Приведем результаты численных вычислений (таблицы 5, 6). Данные задачи

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \quad \nu = 0.33, \quad \tilde{T}_0 = 60^\circ C, \quad \alpha_t = 125 \times 10^{-7} \text{ 1/}^\circ\text{гр}. \quad (39)$$

Таблица 3. Прогибы микрополярной прямоугольной пластинки со стесненным вращением в зависимости от $\bar{\gamma}$ или $\bar{\varepsilon}$ (принято $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$) и классической пластинки под действием температуры.

$\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	1.633	1.638	0.99
10^{-4}	1.404	1.638	0.86
10^{-3}	0.611	1.638	0.37

Численные расчеты, приведенные в таблице 3, устанавливают (аналогично и для модели (37), (38)), что увеличение микрополярной безразмерной постоянной $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ сильно повышает жесткость пластинки по сравнению с классическим случаем.

В §2.8 рассматривается задача термоупругого изгиба микрополярных круглых пластин со стесненным вращением. В осесимметричном случае эта задача относительно функций $w(r)$ и $\psi_1(r)$, в окончательном итоге, когда $\chi_t = const$, приводится к решению следующего уравнения относительно функции \bar{w} :

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} - k^2 \nabla^2 \nabla^2 \bar{w} = 0, \quad \nabla^2(\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(\cdot)}{dr}, \quad k^2 = A - \frac{4(1+B)^2}{(B-1)(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})}. \quad (40)$$

Общее решение уравнения (40) в случае сплошной пластинки будет иметь вид:

$$\bar{w} = C_1 r^2 + C_2 + C_3 I_0(k\bar{r}) \quad (41)$$

где C_1, C_2 и C_3 произвольные постоянные, $I_0(k\bar{r})$ - функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

При помощи удовлетворения граничных условий, определяя постоянные интегрирования, подставляя их в соответствующие формулы, получим решение поставленной задачи, т.е. функции $\bar{w}(\bar{r}), \psi(\bar{r}), \Omega_2(\bar{r})$.

Численные результаты при тех же данных задачи (для которых соответствует таблица 3), приведем в таблице 4.

Таблица 4. Прогибы микрополярной круглой пластинки со стесненным вращением в зависимости от отношения $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ и классической пластинки под действием температуры.

$\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	7.482	7.5	1
5.5×10^{-4}	3.216	7.5	0.43
10^{-3}	2.195	7.5	0.30

Легко убедиться, что с увеличением микрополярной постоянной $\bar{\gamma}$ или $\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$), жесткость пластинки сильно увеличивается по сравнению с классическим случаем.

Рассматриваемая задача при пренебрежении поперечных сдвигов приводятся к решению уравнения (35) (в осесимметричном случае, в полярной системе координат).

К уравнению (35) присоединим условия шарнирного опирания по краю круглой сплошной пластинки:

$$w = 0, \quad M_{11} + L_{12} = 0 \quad \text{при } r = a, \quad (42)$$

Для случая $\chi_l = \text{const}$, решение граничной задачи (35), (42) имеет вид (в безразмерном виде):

$$\bar{w} = \frac{\delta(1+\nu)}{12\varepsilon(1-\nu) + 4\delta^2(1+\nu)} (1 - \bar{r}^2) \quad (43)$$

Численные результаты при тех же данных задачи (для которых соответствует таблица 4) приведем в таблице 5.

Таблица 5. Прогибы микрополярной круглой пластинки со стесненным вращением в зависимости от отношения $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ и классической пластинки под действием температуры. Без учета поперечных сдвигов.

$\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	7.482	7.5	1
10^{-4}	6.040	7.5	0.81
10^{-3}	2.194	7.5	0.29

Легко убедиться, что по модели микрополярной круглой пластинки со стесненным вращением без учета поперечных сдвигов, максимальный прогиб

уменьшается (жесткость пластинки увеличивается), когда микрополярный упругий коэффициент увеличивается.

В третьей главе построены прикладные модели термоупругого плоского изгиба микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением. В рамках построенных моделей изучаются конкретные прикладные задачи термоупругого изгиба микрополярных тонких балок с различными граничными условиями.

В §3.1 рассмотрена балка с постоянным поперечным сечением $2h^* \times 2h$ и длиной a . При плоском изгибе балки задача приводится к решению обобщенной плоской задачи микрополярной термоупругости в срединной плоскости балки x_1, x_2 , т.е. в прямоугольнике: $0 \leq x_1 \leq a$, $-h \leq x_2 \leq h$ (см. глава 2, §2.1).

В основу предлагаемой здесь прикладной модели термоупругой изгибной деформации микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений принимаются гипотезы С.О.Саркисяна (см. глава 2, §2.2) кинематического и статического характера, такого же содержания, как в случае пластинки, но для плоского изгибного случая.

На основе этих гипотез определяются деформации, изгиб – кручения, силовые и моментные напряжения. В итоге, приходим к прикладной модели термоупругого изгиба балки с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -q, \quad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = hq_1, \quad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -m, \quad (44)$$

Соотношения термоупругости

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{1}{a_{11}} (K_{11} - a_{1r} \chi_r), \quad N_{12} = 2h \frac{1}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} (a_{77}\Gamma_{12} - a_{78}\Gamma_{21}), \quad (45)$$

$$N_{21} = 2h \frac{1}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} (a_{88}\Gamma_{21} - a_{78}\Gamma_{12}), \quad L_{13} = 2h \frac{1}{b_{66}} k_{13}$$

для ортотропного тела или

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} (K_{11} - a_r \chi_r), \quad N_{12} = 2h [(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}], \quad (46)$$

$$N_{21} = 2h [(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + (\mu - \alpha)\Gamma_{12}], \quad L_{13} = 2h B k_{13}$$

для изотропного тела,

Геометрические соотношения

$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (47)$$

К системе уравнений (44)-(47) необходимо присоединить граничные условия.

В §3.2 рассматривается изгиб балки из микрополярного изотропного материала под действием только температуры: $T = T_0 \left(\frac{x_1}{a} + \frac{1}{2} \right) \frac{x_2}{2h}$.

Будем рассматривать две задачи:

а) когда оба конца балки жестко защемлены, т. е. имеют место следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = a; \quad (48)$$

б) когда оба конца шарнирно оперты, т.е.

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = a. \quad (49)$$

Вводим безразмерные величины с помощью следующих обозначений

$$\bar{N}_{12} = \frac{N_{12}}{a\mu}, \quad \bar{N}_{21} = \frac{N_{21}}{a\mu}, \quad \bar{M}_{11} = \frac{M_{11}}{a^2\mu}, \quad \bar{L}_{13} = \frac{L_{13}}{a^2\mu}, \quad B^* = \frac{B}{a^2\mu}, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a}, \quad \delta = \frac{h}{a}. \quad (50)$$

Изучая выше приведенную основную систему уравнений термоупругого изгиба микрополярной балки с независимыми полями перемещений и вращений, показывается, что это задача приводится к решению обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$A \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}_1^3} + D \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} = K_1 \bar{x}_1^2 + K_2 \bar{x}_1 + K_3 \quad (51)$$

Здесь A, D, K_1, K_2, K_3 – как для задачи а), так и для задачи б) зависят от

$\frac{\alpha}{\mu}, B^*, \delta, \alpha_i \cdot T_0$, а также содержат постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 .

Общее решение дифференциального уравнения (51) для задач а) и б) имеет вид:

$$\bar{w} = C_4 + C_5 \operatorname{sh} \lambda \bar{x}_1 + C_6 \operatorname{ch} \lambda \bar{x}_1 + \frac{K_1}{3D} \bar{x}_1^3 + \frac{K_2}{2D} \bar{x}_1^2 + \left(\frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} \right) \bar{x}_1, \quad (52)$$

Для определения постоянных интегрирования будем удовлетворять соответствующие граничные условия. Приводим результаты численных вычислений (таблица 6, в случае задачи а), таблица 7, в случае задачи б)). Расчеты выполнены при следующих значениях параметров задачи:

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \quad \nu = 0.33, \quad B^* = 1.5, \quad T_0 = 60^\circ \text{C}, \quad \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ } 1/\text{гр}. \quad (53)$$

Таблица 6. Прогибы микрополярной балки по модели со свободным вращением в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и классической балки под действием температуры.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-5}	7.941	7.946	0.99
10^{-2}	5.227	7.946	0.66
2×10^{-2}	4.155	7.946	0.52

Таблица 7. Прогобы микрополярной балки по модели со свободным вращением в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и классической балки под действием температуры.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{W_{\max}^{\text{мик}}}{W_{\max}^{\text{кл}}}$
10^{-5}	1.874	1.888	0.99
10^{-3}	1.077	1.888	0.57
10^{-2}	0.222	1.888	0.12

Легко убедиться, что при увеличении постоянной упругости α жесткость балки сильно увеличивается.

В §3.3 на основе тех же гипотез §3.1 (с учетом особенностей теории со стесненным вращением), построена модель термоупругого изгиба микрополярных тонких балок со стесненным вращением. Уравнения равновесия в этой модели имеют вид (44).

Соотношения упругости для ортотропного случая выражаются так:

$$N_{12} + N_{21} = h \frac{1}{a_{77}} \tilde{\Gamma}_{12}, \quad M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{1}{a_{11}} (K_{11} - \alpha_t \chi_t), \quad L_{13} = 2h \frac{1}{b_{66}} k_{13} \quad (54)$$

$$N_{12} + N_{21} = 4\mu h \tilde{\Gamma}_{12}, \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} (K_{11} - \alpha_t \chi_t), \quad L_{13} = 2h B k_{13} \quad (55)$$

для изотропного случая.

Геометрические соотношения имеют вид

$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \quad (56)$$

К уравнениям (54)-(56) следует присоединить граничные условия.

В §3.4 изучаются конкретные прикладные задачи (это те же задачи, которые поставлены в §3.2) термоупругого изгиба микрополярных балок по модели со стесненным вращением.

Показывается, что и по модели термоупругого изгиба со стесненным вращением рассматриваемые задачи можно привести к решению того же дифференциального уравнения (51), где A, D, K_1, K_2, K_3 – выражаются через $B^*, \delta, \alpha_t \cdot T_0$ по другим формулам, а также содержат некоторые постоянные интегрирования.

Приведем результаты численных вычислений (таблица 8 – задача а), таблица 9 – задача б)). Расчеты выполнены при значениях (53):

Таблица 8. Прогобы микрополярной балки по модели со стесненным вращением в зависимости от отношения B^* и классической балки под действием температуры.

B^*	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	$\frac{W_{\max}^{\text{мик}}}{W_{\max}^{\text{кл}}}$
1.5×10^{-6}	7.891	7.946	0.99
1.5×10^{-4}	6.745	7.946	0.85
1.5×10^{-3}	4.564	7.946	0.57

Таблица 9. Прогибы микрополярной балки по модели со стесненным вращением в зависимости от отношения B^* и классической балки под действием температуры.

B^*	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{\bar{w}_{\max}^{мик}}{\bar{w}_{\max}^{кл}}$
1.5×10^{-6}	1.885	1.888	0.99
1.5×10^{-4}	1.485	1.888	0.79
1.5×10^{-3}	0.509	1.888	0.27

Легко заметить, что при увеличении микрополярной постоянной B^* жесткость балки увеличивается.

В заключении представлены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В диссертационной работе принимая в основу подходы W. Nowacki и гипотезы, разработанные С.О.Саркисяном, построены, соответственно, математические модели обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации микрополярной термоупругости ортотропных тонких пластин и изгибной деформации тонких балок как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением. В частности, получены следующие новые результаты:

- построены прикладные модели термоупругости в виде краевых задач систем дифференциальных уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации микрополярных ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением;

- построены прикладные модели термоупругости в виде вариационных принципов обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации микрополярных ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением, выведены уравнения, выражающие законы сохранения механической энергии, даются обоснования применимости теорем единственности, взаимности и других энергетических теорем;

- в рамках прикладной модели термоупругого изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением изучены конкретные задачи прикладного характера, а именно, решены и получены окончательные численные результаты для изгибной деформации прямоугольных и круглых пластин;

- построена прикладная модель в дифференциальной и вариационной формах термоупругости плоской изгибной деформации микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением;

- в рамках прикладной модели термоупругости плоской изгибной деформации микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением изучены конкретные граничные задачи и получены численные результаты;

- на основе численного анализа полученных результатов, которые относятся к температурному изгибу микрополярных тонких пластин и балок как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением, устанавливается одно важное явление физического значения, что учет микрополярных свойств

материала повышает жесткость тонкостенных элементов конструкций. С этой точки зрения поднимается вопрос перед материаловедением о получении таких твердых материалов, которые обладали бы высокими микрополярными свойствами.

Список научных работ по теме диссертации

1. Асланян Н.С. Основные уравнения термоупругости микрополярных изотропных тонких пластин// Ученые записки. Гюмрийский государственный педагогический институт. 2013. Серия А. Т.1. №1. С.103-115.
2. Асланян Н.С. Основные уравнения термоупругости микрополярных тонких пластин при плоском напряженном состоянии// Сб. науч. трудов межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Цахкадзор, Армения, 2015, С.66-70.
3. Асланян Н.С. Термоупругость обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных тонких пластин// Ученые записки Ширакского гос. ун.-та. 2017. №1. Вып. А. С.33-46.
4. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №1. С.34-47.
5. Aslanyan N.S., Sargsyan S.H. General Applied Theory of Thermoelasticity of Micropolar Elastic Orthotropic Thin Plates// Proceedings of the 10th International Congress on Thermal Stresses 2013. May 31-June 4. Nanjing, China. P.4.
6. Aslanyan N.S., Sargsyan S.H. Variation principles of thermoelasticity of applied theory of micropolar orthotropic thin plates// Proceedings of the 11th International Congress on Thermal Stresses 2016 June 5–9. Salerno, Italy. P.11-14.
7. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости микрополярных тонких балок со стесненным вращением// Ученые записки Ширакского гос. ун.-та. 2016. №1. Вып. А. С.27-38.
8. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости изгибающей деформации микрополярных тонких балок// Известия НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. №4. С.55-71.
9. Aslanyan N.S. Sargsyan S.H. Thermoelasticity of micropolar thin plates// Proc. of XLV Int. Summer -School Conference APM 2017. June 22–27, St. Petersburg. 2017. P. 44-57.
10. Aslanyan N.S., Sargsyan S. H. Thermoelasticity of micropolar thin beams // Journal of Thermal Stresses. 2018. Vol. 41. Issue 6. P. 687-705.
11. Асланян Н. С., Саркисян С.О. Термоупругость микрополярных балок и пластин со стесненным вращением // Актуальные проблемы прочности. Монография. В 2-х томах. Том 1. Витебск, Беларусь: НАН Беларуси, Витебский гос. технологический ун-т. Глава 12. С. 210-234.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսական այս աշխատանքում հիմք ընդունելով W. Nowacki մոտեցումը և Ս.Հ.Սարգսյանի մշակած վարկածները (որոնք ադեկվատ են բարակ տիրույթներում համապատասխան եռաչափ եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկ լուծումների հատկություններին) համապատասխանաբար կառուցվել են տեղափոխությունների ու պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար օրթոտրոպ բարակ սալերի հարթ լարվածային վիճակի ու

ծուման դեֆորմացիայի և հեծանների ծուման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության կիրառական մաթեմատիկական մոդելները: Արդիական նշանակության ուսումնասիրությունների այս շրջանակում մասնավորապես ստացվել են հետևյալ նոր արդյունքները.

- կառուցվել են տեղափոխությունների ու պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար օրթոտրոպ (մասնավոր դեպքում, իզոտրոպ) բարակ սալերի ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի և ծուման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության ընդհանուր կիրառական մոդելները՝ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի եզրային խնդիրների տեսքով,

- կառուցվել է տեղափոխությունների ու պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար օրթոտրոպ բարակ սալերի ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի և ծուման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության ընդհանուր կիրառական մոդելները վարիացիոն հավասարումների տեսքով, արտածվել են հավասարումներ, որոնք արտահայտում են էներգիայի պահպանման օրենքը, հիմնավորում են տրվում եզրային խնդիրների լուծման միակության, փոխադարձելիության և էներգետիկ այլ թեորեմների վերաբերյալ,

- տեղափոխությունների ու պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար իզոտրոպ բարակ սալերի ծուման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության ընդհանուր կիրառական մոդելների շրջանակում ուսումնասիրվել են կոնկրետ խնդիրներ. լուծվել են և վերջնական թվային արդյունքներ են ստացվել ուղղանկյուն և կլոր սալերի ջերմաառաձգական ծուման խնդիրների համար,

- կառուցվել է տեղափոխությունների ու պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար բարակ հեծանների հարթ ծուման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության ընդհանուր կիրառական մոդելները դիֆերենցիալ և վարիացիոն դրվածքներով,

- տեղափոխությունների ու պտույտների անկախ դաշտերով և կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար բարակ հեծանների հարթ ծուման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգականության ընդհանուր կիրառական մոդելների շրջանակում ուսումնասիրվել և իրենց լուծումներն են ստացել մի քանի եզրային խնդիրներ. ստացվել են վերջնական թվային արդյունքներ,

- ինչպես տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով, այնպես էլ կաշկանդված պտույտներով՝ ծուման դեֆորմացիայի ջերմաառաձգական մոդելների շրջանակներում՝ միկրոպոլյար ուղղանկյուն ու կլոր սալերի և միկրոպոլյար հեծանների կիրառական նշանակության կոնկրետ խնդիրների լուծումների համար ստացված թվային արդյունքների անալիզի հիման վրա հաստատվում է ֆիզիկական նշանակության կարևորագույն մի երևույթ, ըստ որի նյութի միկրոպոլյար հատկությունների հաշվառումը էապես բարձրացնում է կոնստրուկցիաների բարակապատ տարրերի կոշտությունը: Այս իմաստով նյութագիտության առջև բարձրացվում է հարցադրում՝ ստանալու նոր տիպի պինդ նյութեր, որոնք օժտված լինեն միկրոպոլյարության բարձր հատկանիշներով:

CONCLUSION

In the conclusion main results are introduced obtained in the dissertation work.

In the dissertation work on the basis of W. Nowacki's approaches and hypotheses, developed by S. H. Sargsyan (which are adequate to the properties of the asymptotic solution in the thin regions of the corresponding three-dimensional boundary problems), applied mathematical models of the generalized stress strain state and bending deformation of micropolar thermoelasticity of orthotropic (isotropic) thin plates and bending deformation of thin beams are constructed both with independent fields of displacements and rotations and with constrained rotation. In the frame of these actual meaning studies following new results are obtained:

- applied models of thermoelasticity in the form of boundary value problems of systems of differential equations of the generalized plane stress state and bending deformation of micropolar orthotropic (isotropic) thin plates with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation are constructed,
- applied models of thermoelasticity in the form of variation equations of the generalized plane stress state and bending deformation of micropolar orthotropic (isotropic) thin plates with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation are constructed, the equations, expressing the law of conservation of mechanical energy, are deduced, justifications are introduced for applicability of uniqueness theorems, reciprocity and other energy theorems,
- in the frame of the applied model of thermoelastic bending of micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation concrete problems of applied nature are studied, particularly, final numerical results for bending deformation of rectangular and circular plates are obtained,
- applied model in the differential and variation forms of thermoelasticity of plane bending deformation of micropolar thin beams with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation is constructed,
- concrete boundary-value problems are studied and final numerical results are obtained in the frame of the applied model of thermoelasticity of plane bending deformation of micropolar thin beams with independent fields of displacements-rotations and constrained rotation,
- on the basis of numerical analysis of the obtained results of the considered thermo-bending problems of micropolar thin plates and beams both with independent fields of displacements-rotations and with constrained rotation, one important fact of physical significance is established, accounting of the micropolar properties of the material increases the rigidity of thin-walled structural elements. From this point of view a question is raised for material science on obtaining thin solid materials with high micropolar properties.