

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՄԱՐԻՆԵ ՍԱՄՎԵԼԻ ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ
ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՀԱՐԱԿԻՑ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ

Ա.02.04-«Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՄԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2015

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

ГРИГОРЯН МАРИНЕ САМВЕЛОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА СМЕЖНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИЙ УПРУГОСТИ И ФИЛЬТРАЦИИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.02.04-“Механика
деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН 2015

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ.

Ս.Մ. Մխիթարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆ.մ.գ.դ. Կ.Լ. Աղայան

ֆ.մ.գ.թ. Գ.Զ. Գևորգյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2015թ. մարտի 6-ին, ժամը 14⁰⁰-ին ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող Մեխանիկայի – 047 մասնագիտական խորհրդում, հետևյալ հասցեով՝ 0019, ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24/2:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի գրադարանում:

Սեղմագիրն առարված է 2015թ. փետրվարի 4-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական

քարտուղար, ֆ.մ.գ.դ.



Ս.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель:

член-корр. НАН РА, д.ф.м.н., проф.

С.М. Мхитарян

Официальные оппоненты:

д.ф.м.н. К.Л. Агаян

к.ф.м.н. Г.З. Геворгян

Ведущая организация: Национальный политехнический университет Армении

Защита состоится 6-го марта 2015г. в 14⁰⁰ ч. на заседании специализированного совета Механика – 047 в Институте механики НАН РА, по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24/2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 4-го февраля 2015г.

Ученый секретарь

специализированного совета, д.ф.м.н.



А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Контактные и смешанные задачи теории упругости составляют одну из обширных областей механики деформируемого твердого тела. В последние десятилетия эта область все время обогащается новыми фундаментальными результатами и ее интенсивное развитие обусловлено, с одной стороны, внутренней логикой развития теории контактных и смешанных задач, а с другой стороны, ее развитие стимулируется растущими запросами прикладной механики и инженерной практики. Контактные и смешанные задачи в идейном и методологическом аспектах тесно примыкают к задачам механики разрушения и ко многим смежным областям механики сплошных сред, например, к граничным и смешанным граничным задачам гидродинамики и аэродинамики, граничным задачам теории фильтрации грунтовых вод в пористых средах, теории теплопроводности и к задачам других отраслей. Благодаря глубокому взаимопроникновению основополагающих идей, применяемых общих принципов и математических методов исследования, указанные проблемы, переплетаясь между собой, составляют единое целое.

Несмотря на обширные исследования по контактным и смешанным задачам, остаются еще невыясненные вопросы, нерассмотренные задачи, нуждающиеся в исследовании. С этой точки зрения мало изучены смешанные задачи теории упругости для некоторых неклассических областей типа клина и полосы при антиплоской деформации, а также задачи контактного взаимодействия системы коллинеарных стрингеров с массивными деформируемыми телами в условиях антиплоской деформации. В плане общности применяемых принципов и методов исследования их взаимоприменимости остаются также не полностью изученными вопросы взаимосвязей контактных и смешанных задач со смежными отраслями механики сплошных сред, например, с гидродинамикой, теорией фильтрации. Необходимо подчеркнуть, что смешанные граничные задачи теории упругости при антиплоской деформации и упомянутые плоские задачи теории стационарной фильтрации по физическому содержанию и по математическим методам исследования адекватны между собой и во многих случаях простой заменой постоянных или характерных параметров из решения задачи первого класса получается решение соответствующей задачи из второго класса.

Объединение материала по общим закономерностям и соответствующим методам исследования, изучение с единой точки зрения при помощи одного и того же математического аппарата различных явлений в механике привело к большим успехам. Законность и целесообразность объединения различных физических явлений по общим закономерностям и плодотворность изучения этих явлений при помощи единого математического аппарата, адекватного рассматриваемому кругу задач, в настоящее время не вызывает сомнений.

Вместе с тем, с точки зрения сказанного выше, представляет интерес распространить принципы и методы исследования контактных и смешанных задач теории упругости при антиплоской деформации на смежные области механики сплошных сред, в данном случае, на граничные задачи теории установившейся фильтрации жидкости в пористых недеформируемых грунтах различных геометрических форм. Их объединяют одни и те же конституционные уравнения физического состояния, адекватные физические модели и математические методы исследования. Следует отметить, что во многочисленных исследованиях по вопросам фильтрации учитывается упругая, упруго-пластическая или же другие типы деформаций пористых грунтов, особенно в нефтеносных пластах, обсуждаются также вопросы разрушения скальных грунтов. Эти исследования находятся на стыке механики деформируемого твердого тела и гидромеханики. С этой точки зрения недеформируемые грунты можно считать первым начальным приближением деформируемых сред.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию единым методом интегральных преобразований и интегральных уравнений одного класса смежных

граничных задач теории упругости и теории установившейся фильтрации жидкости в пористых недеформируемых грунтовых массивах различных геометрических форм.

Указанный круг вопросов в определенной степени освещается в настоящей диссертационной работе, чем и обусловлена актуальность диссертационной темы.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является исследование единым методом интегральных преобразований и интегральных уравнений одного довольно обширного класса смежных граничных задач теории упругости при антиплоской деформации и теории установившейся фильтрации жидкости в пористых недеформируемых грунтовых основаниях различных геометрических форм. При этом рассматриваются основания вида слоя, полупространства, полосы, клина, полуплоскости.

В соответствии с поставленной целью в работе ставятся следующие задачи:

- вывод основных уравнений и соотношений обсуждаемых граничных задач;
- исследование этих уравнений и построение их эффективных решений;
- явные представления основных механических характеристик граничных задач, каковыми являются контактные напряжения, коэффициенты их концентрации, законы распределения давлений и скоростей в пористой среде, расходы жидкости по определенным сечениям, проведение их численного анализа и выявление закономерностей их изменения.

Методы исследования. Рассматриваемый в работе класс смежных граничных задач теорий упругости и установившейся фильтрации, в том числе, смешанных граничных задач, исследуется единым методом интегральных преобразований Фурье, Меллина, Ханкеля и интегральных уравнений Фредгольма первого рода, сингулярных интегральных уравнений (СИУ). Кроме того, используются методы краевых задач теории аналитических функций и численно-аналитический метод решения СИУ, основанный на квадратурных формулах Гаусса для обычных несобственных интегралов и сингулярных интегралов с ядром Коши.

Научная новизна. Научная новизна полученных в диссертации результатов заключается в следующем:

- получено замкнутое решение смешанной граничной задачи теории упругости для клина с произвольным углом раствора при антиплоской деформации;
- показано, что таким же замкнутым решением обладает соответствующая задача плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористом клиновидном грунтовом основании;
- при антиплоской деформации поставлена и решена задача о контактном взаимодействии системы из произвольного конечного числа разнородных стрингеров, обладающих различными жесткостями на сдвиг, с упругим слоем конечной или бесконечной мощности, выяснены закономерности изменения касательных контактных напряжений, их коэффициентов концентрации;
- численным анализом показано, что решение задачи о слое стремится к решению задачи для упругого полупространства, если относительная высота слоя стремится к бесконечности;
- решение смешанной граничной задачи об установившейся фильтрации жидкости под гидротехническим сооружением типа плотины с учетом анизотропии жидкости в случае флютбета с плоским основанием сведено к интегральному уравнению М.Г. Крейна, допускающему замкнутое решение, и, тем самым, найдено новое приложение этого уравнения;
- показано, что расход жидкости через вертикальные сечения грунтового основания выражается через известную функцию М.Г. Крейна $M(a)$ и, следовательно, эта функция приобретает новое физическое истолкование;
- методом СИУ построены эффективные решения смешанных граничных задач плоской теории установившейся фильтрации жидкости под плотинной, когда коэффициент фильтрации по глубине изменяется по экспоненциальному закону или представляет

собой двухступенчатую функцию (кусочно–однородное двухслойное грунтовое основание);

- построение решений задач типа Ламба о впрыскивании жидкости в фильтрующее грунтовое основание;
- применение методов теории интегральных преобразований и теории интегральных уравнений в плоских задачах теории стационарной фильтрации жидкости.

Достоверность полученных результатов. Достоверность полученных результатов обеспечена строгими постановками задач механики сплошных сред, применением методов теории интегральных преобразований и теории интегральных уравнений, использованием математического аппарата многочленов Чебышева, совпадением в частных случаях с известными результатами.

Основные положения, выносимые на защиту.

- построение замкнутого решения смежных плоских смешанных задач теорий упругости и установившейся фильтрации для клиновидного основания;
- решение класса контактных задач о взаимодействии стрингеров с массивными упругими телами в виде слоя конечной или бесконечной мощности при антиплоской деформации;
- исследование класса граничных задач теории установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтовых основаниях различных геометрических форм.

Практическая ценность работы. Результаты по исследованию задач контактного взаимодействия стрингеров с массивными упругими телами могут быть использованы в тензометрии, в расчетах на прочность различных машиностроительных конструкций, усиленных или армированных тонкостенными элементами. Результаты по задачам фильтрации могут быть использованы в расчетах фильтрационных характеристик гидротехнических сооружений типа плотин, в практике орошения почв методом впрыскивания жидкости или жидкого удобрения в почву.

Апробация работы. Результаты диссертации регулярно докладывались на семинарах имени академика Н.Х. Арутюняна отдела механики упругих и вязкоупругих тел Института механики НАН Армении, на второй международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды” (4–8 октября, 2010г., Дилижан, Армения), на международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвященной 100–летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна (8–12 октября, 2012г., Цахкадзор, Армения), на международной школе–конференции молодых ученых “МЕХАНИКА 2013”, посвященной 70–летию НАН Армении, на юбилейной научной конференции, посвященной 95–летию основания Ереванского госуниверситета (28–30 апреля, 2014г.). Диссертация целиком докладывалась на расширенном заседании отдела механики упругих и вязкоупругих тел Института механики НАН Армении и на общем семинаре Института механики.

Публикация. Основные результаты и положения диссертации опубликованы в 6 статьях, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, кратких выводов, списка цитированной литературы, включающего 145 наименований. Работа изложена на 134 страницах компьютерного набора, содержит 6 таблиц и 27 рисунков.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится краткий проблемно ориентированный обзор основных работ и результатов классических контактных задач теории упругости, механики разрушения и теории фильтрации жидкости в пористых средах, тесно связанных с исследуемой тематикой, сформулированы основные цели и задачи работы, обоснована актуальность диссертационной темы и кратко изложено содержание диссертации.

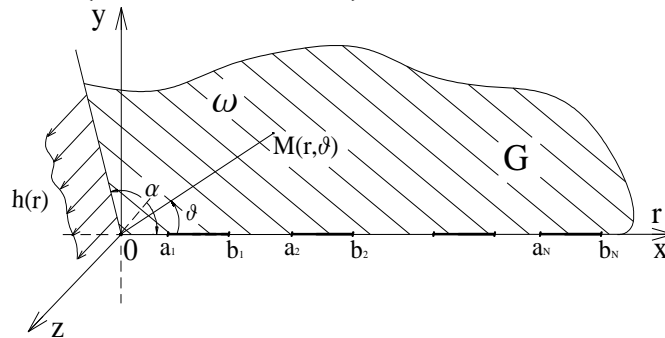
Первая глава посвящена смешанным граничным задачам теории упругости для тел различных форм при антиплоской деформации.

В §1.1 этой главы из общих уравнений линейной теории упругости выведены основные уравнения при антиплоской деформации упругих тел, неоднократно используемые в дальнейшем изложении.

В §1.2 при помощи интегрального преобразования Фурье построены функции влияния для упругого полупространства и слоя, находящихся в условиях антиплоской деформации. В результате определены перемещения или их производные граничных точек упругого полупространства и слоя от единичной сосредоточенной касательной силы. Показано, что функция влияния для упругого слоя, когда его высота стремится к бесконечности, переходит в функцию влияния для упругого полупространства. Эти результаты используются в последующих параграфах при выводе определяющих СИУ поставленных задач.

В §1.3 рассматривается смешанная граничная задача теории упругости при антиплоской деформации для клиновидной области с произвольным углом раствора.

Пусть бесконечное упругое клиновидное тело с произвольным углом раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$), отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ и находящееся в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy , в цилиндрической системе координат r, ϑ, z занимает область $\Omega = \{0 \leq r < \infty; 0 \leq \vartheta \leq \alpha; -\infty < z < \infty\}$ и обладает модулем сдвига G . В базовой плоскости Oxy введена полярная система координат (r, ϑ) с полюсом в начале координат O и с полярной осью Or , совпадающей с положительной полуосью Ox . Пусть далее $u_z = w(r, \vartheta)$ – единственная отличная от нуля компонента смещений точек клиновидного тела Ω в направлении оси Oz , а $\omega = \{0 \leq r < \infty; 0 \leq \vartheta \leq \alpha\}$ – сечение Ω с плоскостью $z = 0$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Для плоского клина ω рассмотрена следующая смешанная граничная задача. Пусть на совокупности интервалов

$$L = \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k) \quad (a_k < b_k, k = \overline{1, N}, b_k < a_{k+1}, k = \overline{1, N-1})$$

границы $\vartheta = 0$ клина ω задана компонента смещений $u_z = w(r, \vartheta)$ в виде функции $f(r)$, на остальной части $L' = [0, \infty) \setminus L$ этой же грани задана компонента касательных напряжений $\tau_{\vartheta z}$ в виде функции $g(r)$, а на грани $\vartheta = \alpha$ клина ω опять задана компонента касательных напряжений $\tau_{\vartheta z}$, но в виде функции $h(r)$. При этом считается, что на каждом интервале (a_k, b_k) системы L задана величина равнодействующей касательных напряжений P_k , т.е.

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau_{\vartheta z} \Big|_{\vartheta=0} dr = P_k \quad (k = \overline{1, N}) \quad (1)$$

Так как функция смещений $w(r, \vartheta)$ в области ω является гармонической функцией, а на бесконечности клина напряжения отсутствуют, то при помощи закона Гука описанная смешанная граничная задача математически формулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (0 < r < \infty, 0 < \vartheta < \alpha) \\ w(r, \vartheta)|_{\vartheta=+0} = f(r) \quad (r \in L); \\ \tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=+0} = \frac{G}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=+0} = g(r) \quad (r \in L', L' = [0, \infty) \setminus L); \\ \tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\alpha-0} = \frac{G}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha-0} = h(r) \quad (0 < r < \infty); \\ \tau_{\vartheta z}, \tau_{rz} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty; 0 < \vartheta < \alpha) \end{array} \right. \quad (2 \text{ a,f})$$

Здесь предполагается, что функции $f'(r)$, $g(r)$ и $h(r)$ одновременно принадлежат классу $L(0, \infty)$ и классу гельдеровских функций на интервале $(0, \infty)$. Предполагается также, что под действием указанных сил тело Ω находится в условиях антиплоской деформации.

Решение смешанной граничной задачи (2 a,f) сведено к решению СИУ. Полагая

$$\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=+0} = X(r) = \begin{cases} \tau(r) & (r \in L); \\ g(r) & (r \in L', L' = [0, \infty) \setminus L), \end{cases} \quad (3 \text{ a,b})$$

в области ω рассматривается следующая вспомогательная первая граничная задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (0 < r < \infty, 0 < \vartheta < \alpha) \\ \tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=+0} = \frac{G}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=+0} = X(r); \quad \tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\alpha-0} = \frac{G}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha-0} = h(r), \quad (0 < r < \infty); \\ \tau_{\vartheta z}, \tau_{rz} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty; 0 < \vartheta < \alpha) \end{array} \right. \quad (4 \text{ a,e})$$

Решение граничной задачи (4 a,e) построено при помощи интегрального преобразования Меллина, вводя в рассмотрение трансформанты Меллина:

$$\bar{w}(p, \vartheta) = \int_0^{\infty} \omega(r, \vartheta) r^{p-1} dr; \quad \bar{X}(p) = \int_0^{\infty} X(r) r^p dr; \quad \bar{h}(p) = \int_0^{\infty} h(r) r^p dr \quad (0 < \vartheta < \alpha) \quad (5 \text{ a,c})$$

Если предположить, как обычно, для напряжений порядок $1/r$ на бесконечности и порядок $r^{-\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$) в окрестности вершины клина ($r \rightarrow 0$), интегралы (5 b,c) будут сходящимися в полосе $\Pi = \{\lambda - 1 < \text{Re } p < 0\}$, а интеграл (5 a) – в некоторой подполосе полосы Π . При этом интегралы (5 a,c) можно рассматривать в рамках теории обобщенных функций.

После применения к (4 a,e) преобразования Меллина с полосой регулярности Π , получается следующая граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \bar{w}}{d\vartheta^2} + p^2 \bar{w} = 0 \quad (0 < \vartheta < \alpha) \\ G \frac{d\bar{w}}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=+0} = \bar{X}(p); \quad G \frac{d\bar{w}}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha-0} = \bar{h}(p) \end{array} \right. \quad (6 \text{ a,c})$$

Решение граничной задачи (6 a,c) представляется формулой

$$\bar{w}(p, \vartheta) = \frac{1}{pG} \left[(\sin(p\vartheta) + \text{ctg}(p\alpha) \cos(p\vartheta)) \bar{X}(p) - \frac{\cos(p\vartheta)}{\sin(p\alpha)} \bar{h}(p) \right] \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha) \quad (7)$$

По формуле обращения преобразования Меллина из (7) для величины $dw(r, 0)/dr$ получается выражение:

$$\frac{dw(r, 0)}{dr} = \frac{1}{2\pi i G} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\frac{\bar{h}(p)}{\sin(p\alpha)} - \text{ctg}(p\alpha) \bar{X}(p) \right] r^{-p-1} dp \quad (\lambda - 1 < c < 0)$$

После подстановки сюда $\bar{X}(p)$ и $\bar{h}(p)$ из (5 б,с) и реализации граничного условия (2 б), относительно неизвестных касательных напряжений $\tau(r)$ на системе интервалов L получено следующее определяющее СИУ поставленной задачи:

$$\frac{r^{\pi/\alpha-1}}{\alpha G} \int_L \frac{\tau(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} = -f'(r) - \frac{r^{\pi/\alpha-1}}{\alpha G} \left[\int_{L'} \frac{g(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} + \int_0^\infty \frac{h(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} + r^{\pi/\alpha}} \right] \quad (r \in L), \quad (8)$$

где первый и второй интегралы при $r = r_0$ понимаются в смысле главного значения по Коши. При этом решение СИУ (8) по (1) и (3 а) должно удовлетворять условиям

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau(r_0) dr_0 = P_k \quad (k = \overline{1, N}) \quad (9)$$

В безразмерных величинах СИУ (8) и условия (9) переписутся, соответственно, в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\tau_0(s) ds}{s-x} = f_0(x); \quad f_0(x) = -x^{\alpha/\pi-1} f'(ax^{\alpha/\pi}) - \frac{1}{\pi} \left[\int_{L_0'} \frac{g_0(s) ds}{s-x} + \int_0^\infty \frac{h_0(s) ds}{s+x} \right] \quad (x \in L_0) \quad (10 \text{ а,б})$$

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau_0(s) ds = P_k^{(0)} \quad \left(P_k^{(0)} = \frac{\pi P_k}{\alpha a G}, \quad k = \overline{1, N} \right) \quad (11)$$

Здесь a – какой-либо характерный линейный параметр задачи, например, отличная от нуля координата какого-либо конца какого-либо интервала системы L . СИУ (10 а,б)–(11) совпадает с СИУ классической плоской контактной задачи о вдавливании системы штампов в упругую полуплоскость. Методом сведения СИУ (10 а,б)–(11) к краевой задаче Римана теории аналитических функций получено его замкнутое решение ($x \in (\alpha_l, \beta_l); (l = \overline{1, N})$):

$$\tau_0(x) = \frac{(-1)^{N-l+1}}{\pi \sqrt{\prod_{m=1}^N (x-\alpha_m)(x-\beta_m)}} \sum_{m=1}^N (-1)^{N-m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{\sqrt{\prod_{m=1}^N (s-\alpha_m)(s-\beta_m)}}{s-x} f_0(s) ds +$$

$$+ \frac{(-1)^{N-l} P_{N-1}(x)}{\sqrt{\prod_{m=1}^N (x-\alpha_m)(x-\beta_m)}}; \quad P_{N-1}(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_{N-2} x^{N-2} + \frac{P}{\pi} x^{N-1}$$

Коэффициенты C_k ($k = \overline{0, N-2}$) определяются из условий (11).

Кроме замкнутого решения (12) известным численно-аналитическим методом сведения решения СИУ (10 а,б) при условиях (11) к решению системы систем линейных алгебраических уравнений построено также приближенное решение этого СИУ. Проведен сравнительный анализ точного и приближенного решений.

Рассмотрен частный случай рассматриваемой задачи, когда $N=1, h(r) = g(r) \equiv 0$. В этом случае СИУ (10 а,б) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\tau_0(s) ds}{s-x} = f_0(x) \quad (x \in (\alpha_1, \beta_1)) \quad (13)$$

$$f_0(x) = -x^{\alpha/\pi-1} f'(ax^{\alpha/\pi})$$

а условие (11)– вид

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \tau_0(s) ds = P_1^{(0)} \quad \left(P_1^{(0)} = \frac{\pi P_1}{\alpha a G} \right) \quad (14)$$

Далее интервал (α_1, β_1) преобразуется в интервал $(-1, 1)$. В результате, СИУ (13) преобразуется в СИУ $(-1 < t < 1)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(u) du}{u-t} = -F_1(t); \quad \varphi_1(t) = \tau_0 \left(\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} t + \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2} \right); \quad F_1(t) = -f_0 \left(\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} t + \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2} \right) \quad (15 \text{ а,с})$$

а условие (14) – в условие

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(t) dt = Q_1^{(0)} \quad \left(Q_1^{(0)} = \frac{2P_1^{(0)}}{\beta_1 - \alpha_1} \right) \quad (16)$$

Решение СИУ (15 а,с)–(16) согласно (12) представляется формулой

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2} F_1(u) du}{u-t} + Q_1^{(0)} \right] \quad (-1 < t < 1) \quad (17)$$

Если в (17) положить

$$F_1(t) = U_{k-1}(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $U_{k-1}(t)$ – многочлены Чебышева второго рода, причем $U_{-1}(t) \equiv 0$, то из (17)

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} \left[Q_1^{(0)} - \pi \tilde{T}_k(t) \right]; \quad \tilde{T}_k(t) = \begin{cases} 0 & (k=0); \\ T_k(t) & (k=1, 2, \dots), \end{cases} \quad (-1 < t < 1; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

где $T_k(t)$ – многочлены Чебышева первого рода.

С другой стороны, в данном частном случае упомянутая выше система линейных алгебраических уравнений, к которой сводится СИУ (15 а,с)–(16), имеет вид

$$\sum_{m=1}^M K_{rm} X_m = a_r \quad (r = \overline{1, M})$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{M} \frac{1}{u_m - t_r} & (m = \overline{1, M}; r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\pi}{M} & (m = \overline{1, M}; r = M) \end{cases}; \quad a_r = \begin{cases} -F_1(t_r) & (r = \overline{1, M-1}) \\ Q_1^{(0)} & (r = M) \end{cases} \quad (19)$$

Здесь

$$\varphi_1(t) = \frac{X_1(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (-1 < t < 1); \quad X_m = X_1(u_m) \quad (m = \overline{1, M})$$

$$u_m = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M} \quad (m = \overline{1, M}); \quad t_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = \overline{1, M-1}),$$

где u_m, t_r – известные чебышевские узлы. В данном случае,

$$X_1(t) = \frac{1}{\pi} \left[Q_1^{(0)} - \pi \tilde{T}_k(t) \right] \quad (-1 < t < 1) \quad (20)$$

и точное значение X_m определяется формулой

$$X_m = \frac{1}{\pi} \left[Q_1^{(0)} - \pi \tilde{T}_k(u_m) \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots; m = \overline{1, M}) \quad (21)$$

Чтобы сравнить точные значения X_m из (21) со значениями $X_m = X_1(u_m)$ ($m = \overline{1, M}$), полученными в результате решения системы уравнений (19), взято, для примера, $Q_1^{(0)} = 0,01$, $k = 3$, и в этом случае по (21) вычислены X_m , а соответствующая система уравнений (19) решена при $M = 30$. Эти результаты полностью совпадают, так как в данном частном случае $X_1(t)$ из (20) представляет многочлен, степень которого не превосходит числа M .

В том случае, когда правая часть определяющего СИУ (15 а,с) не является многочленом, для примера взято $F_1(t) = |t|$ или $F_1(t) = e^t$. Полагая по (17)

$$X_1(t) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2} F_1(u) du}{u-t} + Q_1^{(0)} \right] \quad (-1 < t < 1) \quad (22)$$

и опять считая $Q_1^{(0)} = 0,01$, интеграл из (22) вычислен по квадратурной формуле Гаусса по чебышевским узлам, являющимся корнями многочленов Чебышева второго рода, а внешние узлы взяты по корням многочленов Чебышева первого рода. При указанных функциях $F_1(t)$ решена система уравнений (19). Результаты вычислений по обоим способам с большой точностью совпадают.

В §1.4 рассматривается контактная задача о передаче касательных сил от коллинеарной системы из произвольного конечного числа разнородных стрингеров, обладающих различными жесткостями на растяжение или сжатие, к упругому полупространству при антиплоской деформации. Для стрингеров принимается известная модель Мелана–Буфлера.

Пусть отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ полупространство $z < 0$ обладает модулем сдвига G и на своей граничной плоскости $z = 0$ усилено системой Ω из произвольного конечного числа n упругих полос ω_k ($k = \overline{1, n}$) с модулями сдвига G_k и высотами h_k , бесконечных в обе стороны по направлению оси Oz (фиг. 7), т.е.

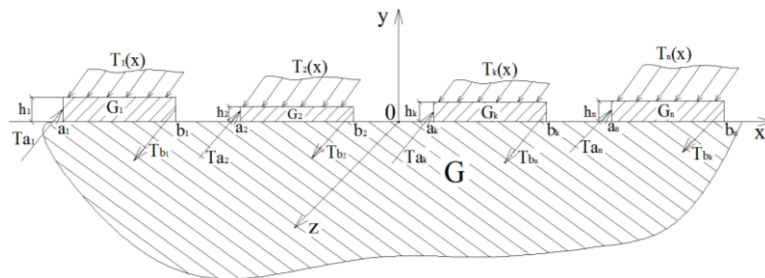
$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \omega_k \quad \omega_k = \{a_k \leq x \leq b_k; 0 \leq y \leq h_k; -\infty < z < \infty\} \quad (a_k < b_k < a_{k+1}; \quad k = \overline{1, n-1}, \quad a_n < b_n)$$

Предполагается, что на верхней грани $y = h_k$ каждой полосы ω_k в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по оси Oz касательные силы интенсивности $T_k(x)$, т.е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_k} = T_k(x) \quad (a_k < x < b_k; \quad k = \overline{1, n}),$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Кроме того, считается, что на граничных поверхностях $x = a_k$ и $x = b_k$ полосы ω_k в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по этой оси касательные сосредоточенные силы T_{a_k} и T_{b_k} соответственно.

Под действием совокупности указанных касательных сил полупространство вместе с системой упругих полос Ω находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy .



Фиг. 2

Тогда описанная задача сводится к задаче для нижней упругой полуплоскости $y < 0$, когда ее граница $y = 0$ усилена системой упругих накладок L , причем,

$$L = \bigcup_{k=1}^n L_k; \quad L_k = \{y = 0, \quad a_k < x < b_k\} \quad (k = \overline{1, n})$$

и верхняя грань $y = h_k$ k -ой накладки нагружена касательными силами интенсивности $T_k(x)$.

Далее для накладок в соответствии с моделью Мелана–Буфлера принимается, что $G_k \gg G$ ($k = \overline{1, n}$) и $h_k \ll \min_{1 \leq k \leq n} (b_k - a_k)$ и считается, что тогда для стрингеров справедлива модель одномерного упругого континуума. При сделанных предположениях требуется определить касательные контактные напряжения $\tau(x)$ под системой стрингеров L , т.е. функцию

$$\tau_{yz}|_{y=0} = \tau(x) \quad \left(x \in L = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \right)$$

и коэффициенты концентрации этих напряжений в концевых точках каждого стрингера.

При помощи функции влияния для упругой полуплоскости при антиплоской деформации

$$u_z(x, 0) = w(x, 0) = \frac{1}{\pi G} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \ln \frac{1}{|x-s|} \tau(s) ds + const, \quad (23)$$

где $u_z(x, 0)$ – перемещения граничных точек полуплоскости. А дифференциальное уравнение деформирования k -ого стрингера по модели Мелана–Буфлера при антиплоской деформации имеет вид

$$h_k G_k \frac{d^2 w_k}{dx^2} = \tau(x) - T_k(x) \quad (a_k < x < b_k; k = \overline{1, n}), \quad (24)$$

где $w_k = w_k(x)$ – компонента смещений точек k -ого стрингера в направлении оси Oz , причем, условие равновесия этого стрингера записывается в форме

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau(x) dx = T_{b_k} - T_{a_k} + \int_{a_k}^{b_k} T_k(x) dx \quad (k = \overline{1, n}) \quad (25)$$

Интегрирование (24) приводит к соотношению

$$h_k G_k \frac{dw_k}{dx} = \frac{1}{2} (T_{a_k} + T_{b_k}) + \frac{1}{2} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(x-s) [\tau(s) - T_k(s)] ds \quad (a_k \leq x \leq b_k; k = \overline{1, n}), \quad (26)$$

которое вместе с законом Гука и условиями контакта упругой полуплоскости и системы стрингеров

$$w(x, 0) = w_k(x) \quad \text{или} \quad \frac{dw(x, 0)}{dx} = \frac{dw_k(x)}{dx} \quad (a_k \leq x \leq b_k; k = \overline{1, n})$$

решение поставленной контактной задачи сводят к следующему определяющему СИУ ($a_k < x < b_k, k = \overline{1, n}$):

$$\frac{1}{\pi G} \sum_{p=1}^n \int_{a_p}^{b_p} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \frac{1}{2h_k G_k} \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) \tau(s) ds = \frac{1}{2h_k G_k} \left[T_{a_k} + T_{b_k} + \int_{a_k}^{b_k} \text{sign}(s-x) T_k(s) ds \right], \quad (27)$$

где первый интеграл при $s = x$ понимается в смысле главного значения по Коши. Решение СИУ (27) должно удовлетворять условиям (25).

После введения в (27) и (25) безразмерных координат и величин

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a, \quad \alpha_k = a_k/a, \quad \beta_k = b_k/a, \quad h_k^0 = h_k/a \quad (k = \overline{1, n});$$

$$\lambda_k = (\pi G) / (2h_k^0 G_k), \quad T_{\alpha_k}^0 = T_{a_k} / (aG), \quad T_{\beta_k}^0 = T_{b_k} / (aG); \quad \tau_0(\xi) = \tau(a\xi) / G; \quad T_k^0(\xi) = T_k(a\xi) / G$$

где a – координата одной из концевых точек отрезков $[a_k, b_k]$, отличная от нуля, СИУ (27) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left[\frac{1}{\eta - \xi} + \lambda_k \text{sign}(\eta - \xi) \right] \tau_0(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^n \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{\tau_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} =$$

$$= \frac{\lambda_k}{\pi} \left[T_{\alpha_k}^0 + T_{\beta_k}^0 + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \text{sign}(\eta - \xi) T_k^0(\eta) d\eta \right] \quad (\alpha_k < \xi < \beta_k; k = \overline{1, n}) \quad (28)$$

а условия (25) – к виду

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \tau_0(\xi) d\xi = T_{\beta_k}^0 - T_{\alpha_k}^0 + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} T_k^0(\xi) d\xi \quad (k = \overline{1, n}) \quad (29)$$

СИУ (28)–(29), в свою очередь, опять сводится к системе систем линейных алгебраических уравнений.

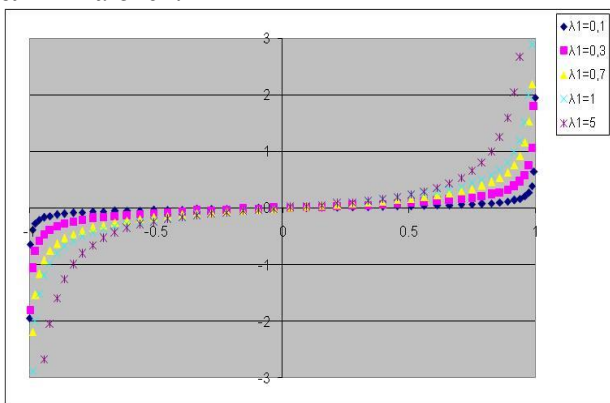
Рассмотрены несколько частных случаев поставленной задачи. В первом частном случае считается, что все стрингеры абсолютно жесткие, т.е. $G_k = \infty$ ($k = \overline{1, n}$). Тогда получается однородное СИУ

$$\int_L \frac{\tau(s) ds}{s-x} = 0 \quad (x \in L),$$

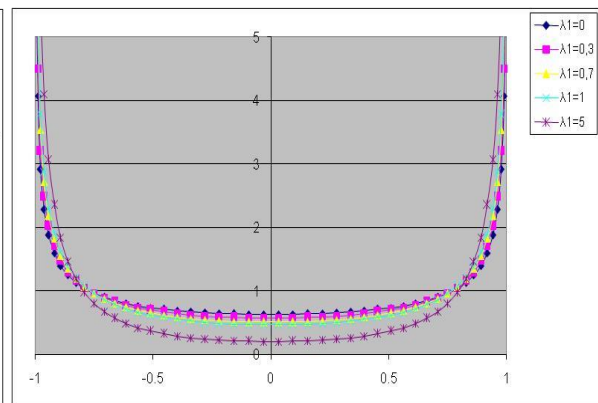
которое совпадает с СИУ классической плоской контактной задачи теории упругости, когда в нижнюю упругую полуплоскость вдавливаются система штампов с плоскими основаниями. Замкнутое решение этого СИУ при условиях типа (25), как частный случай, можно получить из формулы (12), полагая в ней $f_0(x) \equiv 0$ и считая $\tau_0(x) \equiv \tau(x)$.

Во втором частном случае $n=1$ и $a_1 = -a$, $b_1 = a$, $T_1(x) \equiv 0$. В этом случае численная реализация задачи осуществляется в двух подслучаях: а) когда верхняя грань стрингера свободна от касательных сил, а в его концевых сечениях действуют равные по величине, но противоположные по направлению сосредоточенные касательные силы единичной величины; б) когда в концевых сечениях действуют равные по величине и одинаково направленные касательные сосредоточенные силы единичной величины. В этих подслучаях при различных значениях параметра λ_1 , характеризующего относительную жесткость системы стрингер–основание, в подслучае а) (фиг. 3) и в подслучае б) (фиг. 4) построены графики изменения безразмерных касательных контактных напряжений.

Анализ этих графиков показывает, что при малых λ_1 , т.е. когда стрингер жестче основания, эти напряжения увеличиваются, причем, в концевых точках стрингера они резко увеличиваются.



Фиг. 3



Фиг. 4

В указанных подслучаях вычислены также значения безразмерного коэффициента концентрации на правом конце стрингера.

В §1.5 в постановке, изложенной в предыдущем параграфе, рассмотрена эта же контактная задача о передаче касательных сил от коллинеарной системы разнородных стрингеров, обладающих различными жесткостями на растяжение или сжатие, к упругому слою при антиплоской деформации, когда нижняя грань слоя жестко закреплена. Здесь получены аналогичные результаты и в частных случаях численным анализом показано, что в

предельном случае, когда полоса переходит в полуплоскость, значения контактных напряжений приближаются к соответствующим значениям в случае полуплоскости, т.е. напряжения в случае упругого основания в виде полосы приближаются к соответствующим значениям в случае упругого основания в виде полуплоскости.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию плоских и пространственных граничных задач теории установившейся фильтрации в пористых грунтовых массивах различных геометрических форм. Эти задачи вместе с задачами предыдущей главы с точки зрения основных идей и методов механики сплошных сред составляют единое целое, математически родственны, описываются единым математическим аппаратом и тесно связаны между собой.

В §2.1 второй главы приведены основные уравнения и соотношения теории установившейся фильтрации жидкости в пористых грунтовых основаниях, неоднократно используемые в дальнейшем изложении.

В §2.2 рассматривается смешанная граничная задача теории установившейся фильтрации жидкости под гидротехническим сооружением типа плотины с учетом свойства анизотропии грунтового основания.

Хорошо известно, что во многих грунтах, например, в лесовых грунтах, водопроницаемость в вертикальном направлении больше, чем в горизонтальном, а в ряде других грунтов имеем обратную картину, когда проницаемость в горизонтальном направлении больше, чем в вертикальном. Такие грунты называются анизотропными грунтами. Вообще, анизотропным грунтом называется такой грунт, у которого величина коэффициента фильтрации в данной точке области движения грунтовых вод зависит от направления. Здесь рассматривается случай однородной анизотропии, при котором коэффициент фильтрации вдоль каждой прямой постоянен. В этом случае однородно-анизотропного грунта можно выбрать за оси координат x, y главные оси анизотропии грунта, которые взаимно перпендикулярны и вдоль них коэффициенты фильтрации k_1, k_2 имеют постоянные значения.

Тогда закон Дарси имеет вид

$$v_x = -k_1 \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k_2 \frac{\partial h}{\partial y}, \quad h = \frac{p}{\gamma} - y \quad ((x, y) \in S) \quad (30)$$

где $p = p(x, y)$ – давление, γ – удельный вес жидкости, y – высота точки над плоскостью сравнения, $h = h(x, y)$ – пьезометрический напор, а S – область фильтрации. После подстановки выражений компонент скоростей из (30) в уравнение неразрывности, относительно функции $h(x, y)$ получается обобщенное уравнение Лапласа

$$k^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad ((x, y) \in S; \quad k = \sqrt{k_1/k_2}),$$

которое после перехода к новым переменным

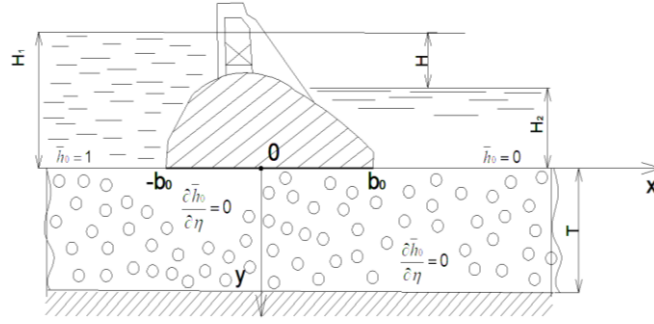
$$\xi = x/k; \quad y = \eta \quad (31)$$

преобразуется в обычное уравнение Лапласа

$$\Delta h_0 = \frac{\partial^2 h_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial \eta^2} = 0; \quad h = h_0(\xi, \eta) = h(k\xi, \eta) \quad (32)$$

При указанном типе анизотропии исследуется модельная смешанная граничная задача плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористый анизотропный грунтовый массив в форме полосы $\Omega = \{-\infty < x < \infty; 0 < y < T\}$ мощности T , связанная с расчетом гидротехнических сооружений типа плотины (фиг. 5).

Пусть на верхнем бьефе жидкость имеет высоту H_1 , а на нижнем бьефе – высоту H_2 ($H_2 < H_1$), причем флютбет (подземное основание плотины), вместе с водоупором $y = T$ водонепроницаемы.



Фиг. 5

С помощью (32) описанная задача в случае флютбета с плоским основанием $\omega = \{y = 0; -b < x < b\}$ математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи для гармонической функции \bar{h}_0 в полосе Ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{h}_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_0}{\partial \eta^2} = 0 & (-\infty < \xi < \infty; 0 < \eta < T) \\ \bar{h}_0|_{\eta=0} = 1 & (-\infty < \xi < -b_0); \quad \bar{h}_0|_{\eta=0} = 0 & (b_0 < \xi < \infty); \\ \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \eta}|_{\eta=0} = 0 & (-b_0 < \xi < b_0); \quad \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \eta}|_{\eta=T} = 0 & (-\infty < \xi < \infty) \end{cases} \quad (33)$$

Здесь, в соответствии с (31) введен безразмерный пьезометрический напор

$$\bar{h}_0 = \bar{h}_0(\xi, \eta) = (h_0(\xi, \eta) - H_2) / H, \quad H = H_1 - H_2, \quad b_0 = b/k, \quad (34)$$

Требуется определить основные фильтрационные характеристики поставленной задачи: компоненты скоростей в полосе, закон распределения пьезометрического напора h вдоль подземного контура флютбета, компоненту выходной скорости $v_{\eta} = v_y$ по линии нижнего бьефа и полный фильтрационный расход.

С целью построения решения граничной задачи (33) при помощи интегрального преобразования Фурье удобно эту задачу переформулировать для сопряженной с $\bar{h}_0(\xi, \eta)$ функции $\psi_0(\xi, \eta)$ – аналога функции тока, удовлетворяющей условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \quad (35)$$

В результате задача (33) преобразуется в следующую граничную задачу для функции:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} = 0 & (-\infty < \xi < \infty; 0 < \eta < T) \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}|_{\eta=0} = 0 & (b_0 < |\xi| < \infty); \quad \psi_0|_{\eta=0} = c & (-b_0 < \xi < b_0); \quad \psi_0|_{\eta=T} = 0 & (-\infty < \xi < \infty) \end{cases} \quad (36)$$

Здесь c – постоянная. Для решения граничной задачи (36) введено обозначение

$$g(\xi) = \begin{cases} 0 & (b_0 < |\xi| < \infty); \\ \chi(\xi) & (|\xi| < b_0) \end{cases} \quad (38)$$

и рассмотрена следующая вспомогательная смешанная граничная задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} = 0 & (-\infty < \xi < \infty; 0 < \eta < T) \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}|_{\eta=0} = g(\xi) & (-\infty < \xi < \infty); \quad \psi_0|_{\eta=T} = 0 & (-\infty < \xi < \infty) \end{cases} \quad (39)$$

Решение задачи (39) построено при помощи интегрального преобразования Фурье и, в результате, $(-\infty < \xi < \infty; 0 \leq \eta \leq T)$

$$\psi_0(\xi, \eta) = \int_{-b_0}^{b_0} L(|\xi - \tau|) \chi(\tau) d\tau, \quad L(\tau, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{sh[\lambda(\eta - T)]}{\lambda ch(\lambda T)} \cos(\lambda \tau) d\lambda \quad (40)$$

Отсюда

$$\psi_0(\xi, 0) = - \int_{-b_0}^{b_0} K(|\tau - \xi|) \chi(\tau) d\tau = - \frac{1}{\pi} \int_{-b_0}^{b_0} \lncth \left[\frac{\pi |\tau - \xi|}{4T} \right] \chi(\tau) d\tau \quad (-\infty < \xi < \infty), \quad (41)$$

и после реализации граничного условия из (36) получается интегральное уравнение М.Г. Крейна при частной правой части:

$$\int_{-a}^a \lncth(|t - s|/4) \chi_0(s) ds = -\pi^2 c/T, \quad (42)$$

где введены обозначения

$$t = \pi \xi / T, \quad s = \pi \tau / T; \quad a = \pi b_0 / T; \quad \chi_0(s) = \chi(Ts/\pi)$$

Решение интегрального уравнения (42) представляется формулой

$$\chi_0(t) = -\pi c \left[T Q_{-1/2}(cha) \sqrt{2(cha - cht)} \right]^{-1} \quad (-a < t < a)$$

где $Q_{-1/2}(x)$ – функция Лежандра второго рода, которое после возвращения к прежним величинам примет вид

$$\chi(\xi) = -\pi c \left\{ T Q_{-1/2} [ch(\pi b_0/T)] \sqrt{2[ch(\pi b_0/T) - ch(\pi \xi/T)]} \right\}^{-1} \quad (-b_0 < \xi < b_0) \quad (43)$$

Безразмерное пьезометрическое давление $\bar{h}_0(\xi, \eta)$ определяется из условий Коши-Римана (35) при помощи (41) и представляется формулой $(-\infty < \xi < \infty; 0 \leq \eta \leq T)$:

$$\bar{h}_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{-b_0}^{b_0} \left\{ \int_0^\infty \frac{ch[\lambda(\eta - T)]}{\lambda ch(\lambda T)} \sin[\lambda(\tau - \xi)] d\lambda \right\} \chi(\tau) d\tau \quad (44)$$

Определяется также константа c , с учетом которого функция $\chi(\xi)$ из (43) примет вид

$$\chi(\xi) = - \frac{1}{T P_{-1/2} [ch(\pi b_0/T)] \sqrt{2[ch(\pi b_0/T) - ch(\pi \xi/T)]}} \quad (-b_0 < \xi < b_0) \quad (45)$$

Указанные выше основные фильтрационные характеристики легко выражаются через расчетную функцию $\chi(\xi)$ из (45) компоненты скоростей v_x, v_y выражаются формулами

$$\begin{aligned} v_x &= -\sqrt{k_1 k_2} H \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \xi} = -\sqrt{k_1 k_2} H \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} = \\ &= -\frac{\sqrt{k_1 k_2} H}{T} \sin(\pi \eta / 2T) \int_{-b_0}^{b_0} \frac{ch[\pi(\tau - \xi) / 2T] \chi(\tau) d\tau}{ch[\pi(\tau - \xi) / T] - \cos[\pi \eta / T]}; \\ v_y &= v_\eta = -k_2 H \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \eta} = k_2 H \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = \\ &= -\frac{k_2 H}{T} \cos(\pi \eta / 2T) \int_{-b_0}^{b_0} \frac{sh[\pi(\tau - \xi) / 2T] \chi(\tau) d\tau}{ch[\pi(\tau - \xi) / T] - \cos[\pi \eta / T]} \quad (-\infty < \xi < \infty; 0 \leq \eta \leq T), \end{aligned} \quad (46)$$

а приведенное давление под флютбетом при помощи (44) представляется формулой

$$\bar{h}_0(\xi, 0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{T P_{-1/2} [ch(\pi b_0/T)]} \int_{-b_0}^{b_0} \frac{\text{sign}(\xi - \tau) \chi(\tau) d\tau}{\sqrt{2ch(\pi b_0/T) - ch(\pi \tau/T)}} \right\} \quad (-b_0 < \xi < b_0)$$

Расход жидкости в грунте через его вертикальные сечения ($0 < \eta < T$) под флютбетом

$$Q = \int_0^T v_x d\eta = -\sqrt{k_1 k_2} H \int_0^T \frac{\partial h_0}{\partial \xi} d\eta = -\sqrt{k_1 k_2} H \int_0^T \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} d\eta \quad (-b_0 < \xi < b_0)$$

при помощи (45), (42), (44) записывается в виде

$$Q = Q(\xi) = \frac{\sqrt{k_1 k_2} H}{\pi} \frac{Q_{-1/2}[ch(\pi b_0/T)]}{P_{-1/2}[ch(\pi b_0/T)]} = \frac{\sqrt{k_1 k_2} H}{\pi} \frac{Q_{-1/2}(cha)}{P_{-1/2}(cha)} = \frac{\sqrt{k_1 k_2} H}{\pi M(a)}; \quad M(a) = \frac{P_{-1/2}(cha)}{Q_{-1/2}(cha)}$$

где $M(a)$ – известная функция М.Г. Крейна. Если ввести безразмерный расход жидкости $\bar{Q}(\xi)$ через вертикальные сечения грунта под флютбетом, то

$$\bar{Q}(\xi) = \frac{\pi Q}{\sqrt{k_1 k_2} H} = \frac{1}{M(a)} \quad (-b_0 < \xi < b_0), \quad (47)$$

и функция $M(a)$ в данной задаче приобретает новый физический смысл.

Наконец, для выходной скорости на нижнем бьефе при помощи (46) получается

$$v_y|_{y=0} = v_\eta|_{\eta=0} = -k_2 H \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \xi} \Big|_{\eta=0} = -\frac{k_2 H}{2T} \int_{-b_0}^{b_0} \frac{\chi(\tau) d\tau}{sh[\pi(\tau - \xi)/2T]} \quad (\xi > b_0)$$

а после учета (45)–

$$\bar{v} = \frac{T}{k_2 H} v_\eta|_{\eta=0} = -\frac{1}{P_{-1/2}[ch(\pi b_0/T)] \sqrt{2[ch(\pi \xi/T) - ch(\pi b_0/T)]}} \quad (\xi > b_0), \quad (48)$$

где введена безразмерная скорость \bar{v} .

В §2.3 вновь рассматривается задача предыдущего параграфа об установившейся фильтрации жидкости под гидротехническим сооружением типа плотин, но в пористый неоднородный по глубине грунтовой слой конечной мощности. При этом считается, как в механике грунтов для основных физикомеханических характеристик, что коэффициент фильтрации по глубине слоя изменяется по экспоненциальному закону:

$$k = k(y) = k_0 e^{\alpha y} \quad (0 \leq y \leq T, \alpha = const), \quad (49)$$

где коэффициент k_0 и показатель неоднородности α для данного грунта определяются экспериментально. В этом случае в законе Дарси (30) следует положить $k_1 = k_2 = k = k_0 e^{\alpha y} \quad (0 \leq y \leq T, \alpha = const)$.

В рамках теории напорной фильтрации при плоском установившемся потоке жидкости в пористую среду решение поставленной задачи сводится к решению следующей смешанной граничной задачи теории обобщенных гармонических функций:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial h}{\partial y} = 0 & (-\infty < x < \infty; 0 < y < T) \\ h(x, y)|_{y=0} = H_1 \quad (-\infty < x < -b); \quad h(x, y)|_{y=0} = H_2 \quad (b < x < \infty); \\ \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (-b < x < b); \quad \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=T} = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \end{cases} \quad (50)$$

Далее, как в предыдущем параграфе, после перехода по обобщенным условиям Коши–Римана от пьезометрического давления $h(x, y)$ к сопряженной функции $\psi(x, y)$ – аналогу функции тока и при помощи интегрального преобразования Фурье решение смешанной граничной задачи сведено к решению СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-t} + \frac{\alpha_0 \pi}{4} \text{sign}(s-t) + \frac{1}{2} M_0(s-t) \right] \chi_0(s) ds = 0 \quad (-1 < t < 1) \quad (51)$$

$$M_0(t) = \int_0^{\infty} \frac{(4\sigma^2 + 2\alpha_0\sigma + \alpha_0^2) \text{th}(\mu_*\tau_0) - 2\mu_*(\alpha_0 + 2\sigma)}{\sigma [2\mu_* - \alpha_0 \text{th}(\mu_*\tau_0)]} \sin(\sigma t) d\sigma,$$

где введены безразмерные величины

$$t = x/b, \quad s = \tau/b; \quad \sigma = b\lambda, \quad \tau_0 = T/b; \quad \alpha_0 = b\alpha; \quad \mu_* = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_0^2 + 4\sigma^2}; \quad \chi_0(s) = \chi(bs)$$

Здесь λ – спектральный параметр Фурье, а $\chi(x)$ – первоначально введенная расчетная функция. СИУ (51) должно рассматриваться при условии

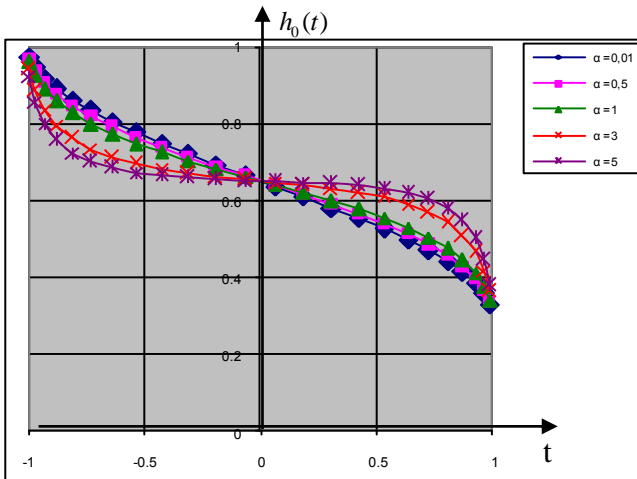
$$\int_{-1}^1 \chi_0(s) ds = -H_0 \quad (H_0 = H_1^0 - H_2^0, \quad H_j^0 = H_j/b; \quad j=1,2) \quad (52)$$

Безразмерное пьезометрическое давление под флютбетом ($-1 \leq t \leq 1$) через решение СИУ (51)–(52) теперь будет выражаться формулой

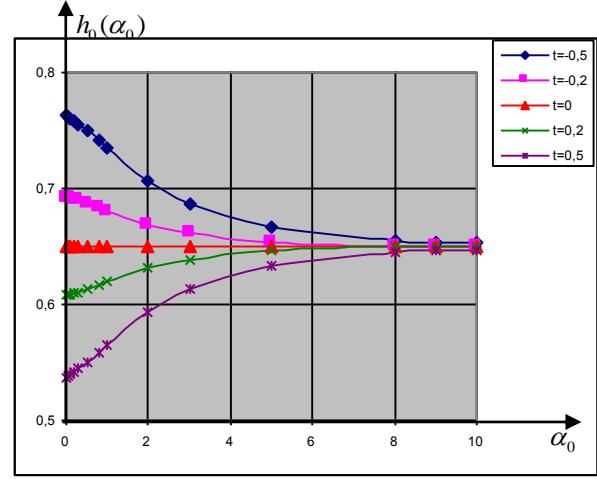
$$h_0(t) = \frac{1}{2} \left[H_1^0 + H_2^0 + \int_{-1}^1 \text{sign}(t-s) \chi_0(s) ds \right]; \quad h_0(t) = h(x,0)/b = h(bt,0)/b \quad (53)$$

Остальные фильтрационные характеристики обсуждаемой задачи – компоненты скоростей в полосе, выходные скорости и расходы жидкости через вертикальные сечения полосы также выражаются через функцию $\chi_0(t)$ – решение СИУ (51)–(52). Решение этого СИУ, как в §1.3–§1.5 первой главы, сведено к системе линейных алгебраических уравнений.

Проведен численный анализ разбираемой задачи. На основании вычисленных по формуле (53) значений безразмерного давления под флютбетом $h_0(t)$ для различных значений параметра α_0 (здесь принято $\alpha = \alpha_0$) и при фиксированных значениях $\tau_0 = 5$, $H_0 = 0.7$, $H_1^0 = 1$, $H_2^0 = 0.3$ построены графики на фиг. 6. Здесь по мере возрастания α_0 графики $h_0(t)$ на отрезке $[-1,0]$ плавно спускаются вниз, а на отрезке $[0,1]$ поднимаются вверх. На фиг. 7 при тех же значениях параметров приведены графики безразмерного давления под флютбетом $h_0(\alpha_0)$ для различных значений координаты t .



Фиг. 6



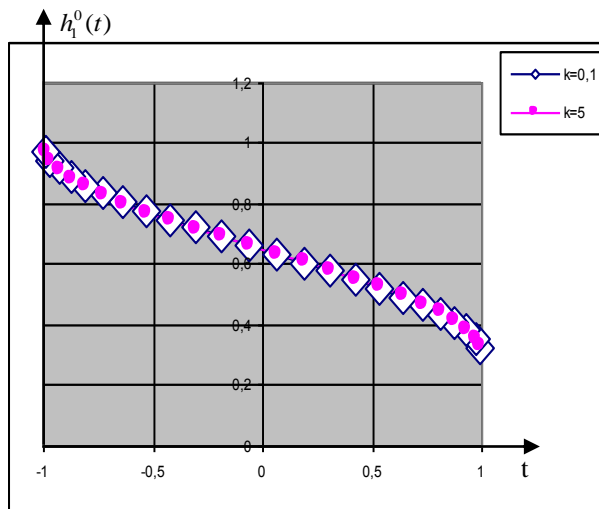
Фиг. 7

В §2.4 опять исследуется рассмотренная в предыдущих двух параграфах задача, как модельная задача теории напорной фильтрации, но для кусочно–однородного двухслойного грунтового основания. В этом случае пористое грунтовое основание состоит из слоя $\omega_1 = \{-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq T_1\}$ с коэффициентом фильтрации k_1 и мощности T_1 и слоя $\omega_2 = \{-\infty < x < \infty; T_1 \leq y \leq T_1 + T_2\}$ с коэффициентом фильтрации k_2 и мощности T_2 . В этих

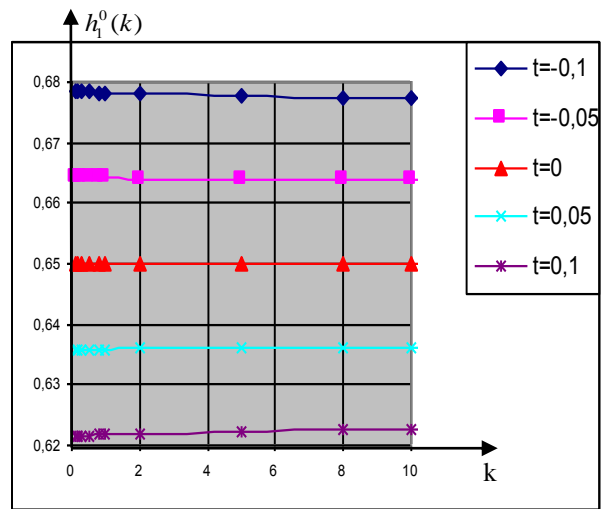
слоях пьезометрический напоры и потенциалы скоростей обозначаются, соответственно, через $h_j(x, y)$ и $\varphi_j(x, y)$, причем $\varphi_j(x, y) = -k_j h_j(x, y)$ ($j=1, 2$). В такой постановке решение задачи для каждой полосы ω_j ($j=1, 2$) опять сводится к смешанной граничной задаче типа (33) или (36), но вдобавок на поверхности стыка разнородных слоев $y = T_1$ должны выполняться известные условия непрерывности давления и нормальных компонент скоростей:

$$h_1(x, y)|_{y=T_1} = h_2(x, y)|_{y=T_1}; \quad k_1 \frac{\partial h_1}{\partial y} \Big|_{y=T_1} = k_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} \Big|_{y=T_1}, \quad (54)$$

По вычислениям на фиг. 8 построен график безразмерного давления $h_1^0(t)$ для различных значений k ($k = k_2/k_1$) при значениях $\tau = 5$ ($\tau = T/b$, $T = T_1 = T_2$), $H_0 = 0.7$, $H_1^0 = 1$, $H_2^0 = 0.3$, а на фиг. 9 при тех же значениях параметров приведены графики давления $h_1^0(k)$ для различных значений t ($t = x/b$). Из графиков на фиг. 8 видно, что давление под флютбетом



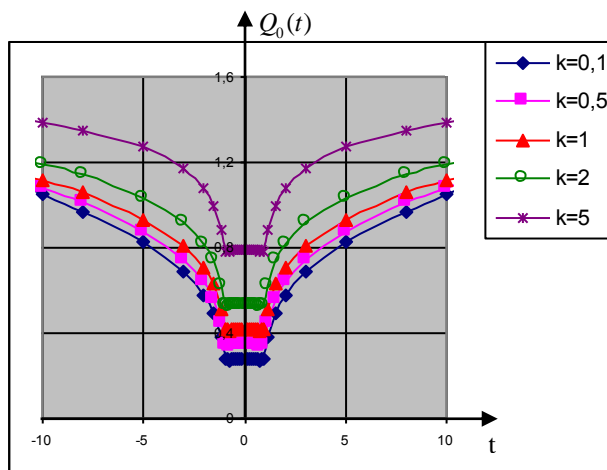
Фиг. 8



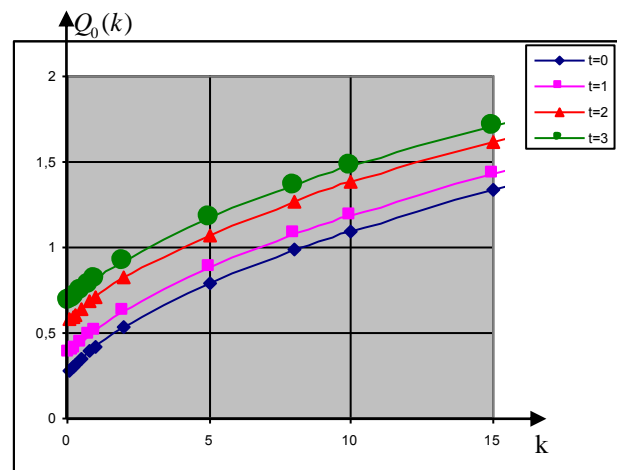
Фиг. 9

почти не зависит от параметра k . Построены также графики выходных скоростей $v_0(t)$.

На фиг. 10 показан график $Q_0(t)$ для различных значений параметра k при фиксированных значениях $\tau = 5$, $H_0 = 0.7$, $H_1^0 = 1$, $H_2^0 = 0.3$, а на фиг. 11 показаны графики $Q_0(k)$ для различных значений параметра t при тех же значениях указанных параметров. Из фиг. 10 видно, что чем больше значение параметра k , тем больше расход жидкости.



Фиг. 10



Фиг. 11

В §2.5 решаются две граничные задачи об установившейся фильтрации жидкости в пористом клиновидном грунте. Грунтовые основания под гидротехническими сооружениями моделируются в виде различных геометрических форм, влияющих на величины фильтрационных характеристик. Поэтому представляет интерес помимо оснований в форме полосы рассматривать основания других форм. В связи с этим, в настоящем параграфе рассматривается граничная задача плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористом клиновидном грунтовом массиве, когда одна грань клина водонепроницаема, а через систему интервалов другой грани жидкость впрыскивается в клиновидное основание. Эта задача является аналогом известной задачи Ламба, когда через отверстие жесткого экрана жидкость с определенной скоростью втекает в жидкостный массив. Ставится задача об определении компоненты нормальной скорости фильтрации на этих интервалах, при которой давление на них имеет наперед заданную величину.

Пусть пористый грунтовый массив отнесен к полярной системе координат (r, ϑ) и имеет форму клиновидной области с углом раствора α ($0 < \alpha < \pi$). Полус этой системы помещен в вершине клина, а полярная ось направлена по положительной полуоси Ox правой прямоугольной системы координат Oxy . Считается, что грань клина $\vartheta = 0$, совпадающая с положительной полуосью Ox , водонепроницаема. В первой граничной задаче предполагается, что через систему отрезков $L = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]$ жидкость с заданной скоростью $v_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = -v(r)$ ($r \in L$) впрыскивается в грунтовый массив. Требуется определить потенциал скоростей $\varphi(r, \vartheta)$, связанный с давлением $p(r, \vartheta)$, зависимостью $\varphi(r, \vartheta) = -kp(r, \vartheta)$, где k – коэффициент фильтрации грунта, а закон Дарси имеет вид

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -k \frac{\partial h}{\partial r}, \quad v_{\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -\frac{k}{r} \frac{\partial h}{\partial \vartheta}$$

Описанная задача плоской теории стационарной фильтрации в клиновидном грунтовом массиве математически формулируется в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0 & ((r, \vartheta) \in \Omega) \\ v_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = 0; \quad v_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = -v(r) \quad (0 < r < \infty) \\ grad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (55)$$

Сначала считается, что вертикальная компонента скорости v_{ϑ} на грани клина $\vartheta = \alpha$ задана на полубесконечном интервале $0 < r < \infty$, а затем принято $v(r) \equiv 0$ при $r \in (0, \infty) \setminus L$.

Решение граничной задачи (55) построено при помощи интегрального преобразования Меллина. Из этого решения, в частности, получено

$$\frac{d\varphi(r, \alpha)}{dr} = -\frac{r^{(\pi/\alpha)-1}}{\alpha} \int_L \frac{v(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} \quad (0 < r < \infty) \quad (56)$$

Далее ставится вторая граничная задача: какова должна быть вертикальная компонента $v(r)$ впрыскиваемой в клиновидное грунтовое основание жидкости, чтобы на системе отрезков L давление $p(r, \alpha)$ равнялось наперед заданной функции $f(r)$, т.е. $p(r, \alpha) = f(r)$ ($r \in L$). В производных это условие запишется в виде

$$\frac{d\varphi(r, \alpha)}{dr} = -k \frac{dp(r, \alpha)}{dr} = -k f'(r) \quad (r \in L)$$

Подстановкой выражения (56) в это условие получено СИУ поставленной задачи

$$\frac{r^{(\pi/\alpha)-1}}{\alpha} \int_L \frac{v(r_0) dr_0}{r_0^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} = k f'(r) \quad (r \in L), \quad (57)$$

где интеграл при $r = r_0$ понимается в смысле главного значения по Коши.

В этой задаче еще задаются расходы Q_j жидкости через каждый отрезок системы L :

$$\int_{a_j}^{b_j} v(r) dr = Q_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (58)$$

В безразмерных координатах и величинах СИУ (57) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{X(s) ds}{s-x} = g(x) \quad (x \in L_0), \quad (59)$$

а условия (58) – к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{b_j} X(x) dx = Q_j^{(0)} \quad \left(j = \overline{1, n}; \quad Q_j^{(0)} = \frac{Q_j}{ak\alpha} \right) \quad (60)$$

СИУ (59) при условиях (60) совпадает с определяющим СИУ смешанной граничной задачи теории упругости для клиновидной области при антиплоской деформации, рассмотренной в §1.3, где и построено решение этого СИУ.

Вычислен расход жидкости через круговую дугу M_0M_1 радиуса r :

$$Q(r) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \text{sign}(\ln r - \ln r_0) v(r_0) dr_0$$

Рассмотрен частный случай, когда $n=1$, $L=[a_1, b_1]$ и

$$v(r) = \begin{cases} v_0, & r \in [a_1, b_1] \\ 0, & r \in (0, \infty) \setminus [a_1, b_1] \end{cases}$$

Тогда

$$Q(r) = \frac{v_0}{2} \int_{a_1}^{b_1} \text{sign}(\ln r - \ln r_0) dr_0 = \begin{cases} -v_0 \frac{b_1 - a_1}{2} & (0 < r < a_1) \\ v_0 \left(r - \frac{a_1 + b_1}{2} \right) & (a_1 < r < b_1) \\ v_0 \frac{b_1 - a_1}{2} & (r > b_1) \end{cases}$$

В §2.6 рассматриваются две смежные пространственные граничные задачи теории установившейся фильтрации жидкости в пористом грунтовом слое конечной или бесконечной мощности (высоты), когда на одной грани слоя задана вертикальная компонента скорости или задано давление, а другая грань водонепроницаема. Эти задачи, с одной стороны, тесно примыкают к известным задачам гидродинамики о втекании жидкости через определенные участки–отверстия границы жидких массивов различных геометрических форм вовнутрь массивов или вытекании оттуда жидкости, а также к задаче Ламба об истечении идеальной жидкости через круглое отверстие в плоском жестком экране, а с другой стороны, связаны с важными практическими вопросами о впрыскивании жидкости, в частности, жидких удобрений, в грунтовое основание или в почву.

Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxuz$ пористый грунтовой слой занимает область $\Omega = \{-\infty < x, y < \infty; -H < z < 0\}$ и имеет мощность (высоту) H . Если при фильтрации идеальной несжимаемой жидкости в грунтовом слое пренебречь конвективными составляющими ускорения, т.е. считать силы инерции пренебрежимо малыми по сравнению с силами сопротивления, что соответствует малым рейнольдским чис-

лам, и, кроме того, фильтрационное течение считать установившимся, то основные уравнения теории фильтрации при отсутствии объемных сил состоят из закона Дарси

$$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v_z = -k \frac{\partial h}{\partial z}; \quad h = h(x, y, z) = \frac{1}{\gamma} p(x, y, z) + z, \quad ((x, y, z) \in \Omega) \quad (61)$$

и из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (62)$$

где v_x, v_y, v_z – компоненты вектора скорости \bar{v} по координатным осям, Ω – трехмерная область фильтрации, а остальные обозначения пояснены выше. Потенциал скоростей φ опять вводится по соотношению

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = -kh = -kh(x, y, z), \quad (63)$$

а закон Дарси через потенциал скоростей примет вид

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (64)$$

причем, функции $\varphi(x, y, z)$ и $h(x, y, z)$ в области фильтрации Ω на основании (61)–(64) удовлетворяют трехмерному уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad ((x, y, z) \in \Omega)$$

В первой граничной задаче для слоя Ω , где характерные величины отмечаются индексом 1, считается, что на его верхней грани задана вертикальная компонента скорости а нижняя грань слоя водонепроницаема, т.е.:

$$v_z^{(1)} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = v(x, y); \quad v_z^{(1)} \Big|_{z=-H} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \quad (-\infty < x, y < \infty),$$

Эта граничная задача математически сформулируется в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 & (x, y, z \in \Omega); \\ v_z^{(1)} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -v(x, y) & (-\infty < x, y < \infty); \quad v_z^{(1)} \Big|_{z=-H} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 & (-\infty < x, y < \infty) \end{cases} \quad (65)$$

Решение граничной задачи (65) построено при помощи двухмерного интегрального преобразования Фурье в сочетании с интегральным преобразованием Ханкеля. Из этого решения предельным переходом $H \rightarrow \infty$ получено решение этой же граничной задачи для слоя бесконечной мощности, т.е. для полупространства.

Рассмотрен частный случай обсуждаемой задачи для полупространства, когда через прямоугольное отверстие $D = \{z = 0; -a < x < a; -b < y < b\}$ его плоской жесткой границы вовнутрь полупространства в отрицательном направлении оси Oz с постоянной скоростью $v = \text{const}$ втекает жидкость, т.е. когда

$$-v_z^{(1)} \Big|_{z=0} = v(x, y) = \begin{cases} v = \text{const} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in \eta \setminus D, \end{cases}$$

где $\Pi = \{z = 0; -\infty < x, y < \infty\}$ – граничная плоскость полупространства $z \leq 0$. Эта задача близко примыкает к известной задаче Ламба. В данном частном случае

$$\varphi_1(x, y, z) = -\frac{v}{2\pi} \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b \frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}},$$

и входящие в эту формулу повторные интегралы вычисляются в замкнутом виде, т.е. точно, и выражаются через элементарные функции.

Во второй граничной задаче, где характерные величины отмечаются индексом 2, предполагается, что через отверстие в форме области ω , расположенной на верхней грани $z=0$ пористого грунтового слоя Ω , под заданным давлением $p(x, y)$ ($x, y \in \omega$) жидкость впрыскивается в основание. Область ω , в частности, может иметь форму прямоугольника $D = \{z=0; -a < x < a; -b < y < b\}$. Обобщая задачу, рассматривается граничная задача для слоя Ω , когда на его верхней грани задано давление в виде функции $p(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0 & (x, y, z \in \Omega); \\ \varphi_2(x, y, z)|_{z=0} = -\frac{k}{\gamma} p(x, y) & (-\infty < x, y < \infty); \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \end{cases} \quad (66)$$

Решение граничной задачи (66) опять построено при помощи двухмерного интегрального преобразования Фурье, и из этого решения опять предельным переходом $H \rightarrow \infty$ получено решение этой же граничной задачи для слоя бесконечной мощности, т.е. для полупространства. Здесь опять рассмотрен частный случай, когда через прямоугольное отверстие $D = \{z=0; -a < x < a; -b < y < b\}$ под постоянным давлением $p = const$ жидкость утекает в пористое полупространство:

$$p(x, y) = \begin{cases} p = const & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \in \Pi \setminus D; \end{cases} \quad \Pi = \{z=0; -\infty < x, y < \infty\}$$

В данном частном случае

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{kpz}{2\pi\gamma} \iint_D \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} = \frac{kpz}{2\pi\gamma} \int_{-a}^a d\xi \int_{-b}^b \frac{d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}},$$

и входящие в эту формулу повторные интегралы вычисляются точно и, в конечном итоге, выражаются через элементарные функции.

Из полученных результатов вытекает, что потенциалы скоростей $\varphi_1(x, y, z)$ и $\varphi_2(x, y, z)$ в первой и второй задачах в случае полупространства связаны между собой соотношением

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{k}{\gamma} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}$$

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

- Построено замкнутое решение смешанной граничной задачи теории упругости для клиновидной области с произвольным углом раствора при антиплоской деформации, когда на совокупности отрезков одной грани клина заданы смещения, а на остальной части этой грани и на другой грани заданы касательные напряжения;
- одновременно известным численно-аналитическим методом решения СИУ, основанным на квадратурных формулах Гаусса, построено приближенное решение определяющего СИУ этой задачи и в результате сравнительного анализа показано совпадение приближенного и точного решений с высокой степенью точности;
- показано, что таким же замкнутым решением обладает соответствующая граничная задача плоской теории установившейся фильтрации жидкости в пористом клиновидном грунтовом массиве;
- в довольно общей постановке при антиплоской деформации исследована задача о контактном взаимодействии системы из произвольного конечного числа коллинеарных разнородных стрингеров, обладающих различными жесткостями на продольный сдвиг, с упругим слоем конечной или бесконечной мощности, и при этом

- показано, что решение задачи для слоя при стремлении его относительной высоты к бесконечности стремится к решению соответствующей задачи для упругого полупространства;
- решение модельной смешанной граничной задачи об установившейся фильтрации жидкости под плотиной с плоским флютбетом с учетом свойства анизотропии фильтрации жидкости сведено к интегральному уравнению М.Г. Крейна и основные фильтрационные характеристики задачи выражены через это решение;
 - при этом показано, что расход жидкости через вертикальные сечения пористого грунта в виде полосы просто выражается через известную функцию М.Г. Крейна $M(a)$, и тем самым, дано гидродинамическое истолкование этой функции;
 - методом СИУ построены эффективные решения упомянутой смешанной граничной задачи о плотине, когда коэффициент фильтрации по глубине грунта изменяется по экспоненциальному закону или по закону двухступенчатой функции (кусочно–однородное двухслойное грунтовое основание) и в широком диапазоне параметров выяснены закономерности изменения фильтрационных характеристик задачи;
 - построены аналитические решения пространственных задач типа Ламба о впрыскивании жидкости в фильтрующее грунтовое основание в виде слоя или полупространства;
 - в работе методы теории интегральных преобразований и теории интегральных уравнений применительно к рассматриваемому в работе кругу задач механики сплошных сред получили дальнейшее развитие.

Список научных работ по теме диссертации

1. Григорян М.С. Об одной смешанной граничной задаче для упругого клина при антиплоской деформации. Актуальные проблемы механики сплошной среды, Труды II Международной конференции, 4–8 октября, Дилижан, Армения, т. 1, 2010, стр. 209–213.
2. Mkhitaryan S.M., Tokmajyan H.V., Grigoryan M.S. On two Plane Problems Steady–State Fluid Filtration in Porous Heterogeneous Soil Laer. International Conference on Contemporary Problems in Architecture and Construction. November 20–24, Beijing, China. Edited by Guohua SONG, Linan LIU, Tao CHEN and Fei LI, 2011, pp 2-14–2-19.
3. Мхитарян С.М., Григорян М.С. Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошной среды. Избранные труды международной научной конференции “Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство” 26–30 сентября, Ереван, 2012, стр. 134–144.
4. Григорян М.С. О контактном взаимодействии упругого полупространства или слоя с системой стрингеров при антиплоской деформации. В трудах межд. конф.–ии “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвящённой 100–летию акад. НАН Армении Н.Х. Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения, т. 1, Ереван, 2012, стр. 174–181.
5. Мхитарян С.М., Токмаджян О.В., Шемян Л.А., Григорян М.С. О двух пространственных задачах теории установившейся фильтрации жидкости в пористом грунтовом слое конечной или бесконечной мощности. Известия ЕГУАС, 2013, №2, стр. 46–57.
6. Григорян М.С. О передаче нагрузок от системы разнородных стрингеров к упругому полупространству или слою при антиплоской деформации. Известия НАН Армении, Механика, т. 67, №3, 2014, стр. 3–16.

ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ ՄԱՐԻՆԵ ՍԱՄՎԵԼԻ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՐԱԿԻՑ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփում

Սույն ատենախոսությունը նվիրված է առաձգականության և ծակոտկեն գետնահողերում հեղուկի կայունացած ֆիլտրացիայի տեսությունների հարակից եզրային խնդիրների մի դասի հետազոտությանը: Առաձգականության տեսության դրվածքով հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ ուսումնասիրվում են կոնտակտային և խառը եզրային խնդիրներ: Կոնտակտային և խառը եզրային խնդիրները կազմում են դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկայի լայնածավալ և հարաճուն բնագավառներից մեկը: Այդ բնագավառում ստացված արդյունքները ունեն տեսական և գործնական նշանակություն:

Տեսական նշանակությունը պայմանավորված է դեֆորմացվող մարմինների ամրության պաշարների լիարժեք բացահայտման և այդ արդյունքների՝ հոծ միջավայրի մեխանիկայի հարակից բնագավառներում կիրառելու հնարավորություններով: Հիմնագաղափարների և հետազոտության մաթեմատիկական մեթոդների ընդհանրության շնորհիվ կոնտակտային և խառը եզրային խնդիրների բնագավառում ստացված արդյունքները կարող են կիրառվել քայքայման մեխանիկայի, հիդրոդինամիկայի, ծակոտկեն միջավայրերում հեղուկի ֆիլտրացիայի տեսության, ջերմահաղորդականության տեսության և հոծ միջավայրի մեխանիկայի այլ բնագավառներում:

Գործնական նշանակությունը պայմանավորված է կոնտակտային և խառը եզրային խնդիրների տեսության արդյունքների լայն կիրառմամբ մեքենաշինության, այդ թվում ավիացիայի, շինարարության, տրանսպորտի և ճարտարագիտական պրակտիկայի բազմաթիվ այլ բնագավառներում՝ կապված մեքենաների ու դրանց մասերի, շենքերի ու շինությունների ամրության և երկարակեցության բնութագրիչների հաշվարկների հետ:

Նշված հանգամանքներով էլ հենց պայմանավորված է ատենախոսության թեմայի արդիականությունն ու հրատապությունը:

Աշխատանքում առաձգականության մաթեմատիկական տեսության և ծակոտկեն միջավայրերում հեղուկի կայունացած ֆիլտրացիայի տեսության խիստ դրվածքով ինտեգրալ հավասարումների ու ինտեգրալ ձևափոխությունների միասնական մեթոդներով հետազոտված է առաձգականության և կայունացած ֆիլտրացիայի տեսության հարակից եզրային և խառը եզրային խնդիրների բավականաչափ լայն դաս: Ստացվել են մի շարք գիտական նոր արդյունքներ ու եզրակացություններ, որոնք համառոտ բերվում են ստորև.

- հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական անկյունային բացվածքով սեպի համար կառուցված է առաձգականության տեսության խառը եզրային խնդրի փակ լուծումը, երբ սեպի մի եզրագծի հատվածների համախմբի վրա տրված է տեղավորությունը, իսկ այդ նույն եզրագծի մնացած մասի և մյուս եզրագծի վրա տրված են շոշափող լարումներ,

- միաժամանակ ՄԻՀ լուծման հայտնի թվային վերլուծական մեթոդով՝ հիմնված Գաուսի քառակուսացման բանաձևերի վրա, կառուցված է այդ խնդրի որոշիչ ՄԻՀ մոտավոր լուծումը, կատարված է դրա և ճշգրիտ լուծման համեմատական վերլուծություն, որի արդյունքում ցույց է տրված մոտավոր և ճշգրիտ լուծումների բարձր ճշտությամբ համընկնումը,

- ցույց է տրված, որ նույն տիպի փակ լուծում ունի ծակոտկեն սեպածն գետնահողում հեղուկի ստացիոնար ֆիլտրացիայի տեսության համապատասխան հարթ խնդիրը,

- հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ ընդհանուր դրվածքով ուսումնասիրվել է կամայական վերջավոր թվով համագիծ տարասեռ ստրիկգերների համակարգի, որոնք ունեն տարբեր կոշտություններ, և վերջավոր կամ անվերջ հզորության առաձգական շերտի կոնտակտային փոխազդեցության խնդիրը, որի արդյունքում թվային վերլուծությամբ ցույց է տրված, որ շերտի խնդրի լուծումը, երբ նրա հարաբերական բարձրությունը ձգտում է անվերջության, ձգտում է առաձգական կիսատարածության համապատասխան խնդրի լուծմանը,

- հարթ ֆլյուտբետով ամբարտակի տակ հեղուկի ստացիոնար ֆիլտրացիայի մոդելային խառը եզրային խնդրի լուծումը հեղուկի ֆիլտրացիոն անիզոտրոպության հաշվմամբ բերված է Մ.Գ. Կրեյնի ինտեգրալ հավասարման լուծման և խնդրի հիմնական ֆիլտրացիոն բնութագրիչները արտահայտված են այդ լուծումով,

- ցույց է տրված, որ հեղուկի ծախսը շերտի տեսքով ծակոտկեն գետնահողի ուղղահայաց կտրվածքներում արտահայտվում է Մ.Գ. Կրեյնի հայտնի ֆունկցիայով, և դրանով այդ ֆունկցիային տրվում է նոր՝ հիդրոմեխանիկական մեկնաբանություն,

- ՄԻՀ մեթոդով կառուցված է ամբարտակի տակ հեղուկի ստացիոնար ֆիլտրացիայի տեսության նշված խառը եզրային խնդրի արդյունավետ լուծումը, երբ ֆիլտրացիայի գործակիցը ըստ խորության փոխվում է էքսպոնենցիալ օրենքով կամ ներկայացնում է երկաստիճանաձև ֆունկցիայով (կտոր առ կտոր համասեռ երկշերտ գետնահող) և պարամետրերի փոփոխման լայն միջակայքերում պարզաբանված է խնդրի ֆիլտրացիոն բնութագրիչների փոփոխման օրինաչափությունները,

- կառուցված է Լամբի տիպի տարածական խնդրների անայիտիկ լուծումը, երբ հեղուկը կոշտ էկրանի հատվածներով ներարկվում է տարածական շերտի կամ կիսատարածության տեսքով ծակոտկեն գետնահողին,

- աշխատանքում ինտեգրալ ձևափոխությունների և ինտեգրալ հավասարումների տեսության մեթոդները՝ կիրառված աշխատանքում դիտարկված հոծ միջավայրի մեխանիկայի խնդիրների շրջանակին, ստացել է հետագա զարգացում:

GRIGORYAN MARINE SAMVEL

**INVESTIGATION OF A CLASS OF CONTIGUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEMS
OF THE THEORY OF ELASTICITY AND FILTRATION BY THE INTEGRAL
EQUATIONS METHOD**

SUMMARY

The present dissertation investigates a class of contiguous boundary value problems of elasticity theory and theory of established filtration of fluid contained in porous topsoil. Based on the statement of the theory of elasticity, contact and mixed boundary value problems are studied for the case of antiplane deformation. Contact and mixed boundary problems compose one of the wide and rapidly developing fields of the deformable rigid body mechanics. The results obtained in this field are of theoretical and practical interest.

The theoretical interest is conditioned by possibility of deformable bodies' safety margins full identification and application of these results in adjacent spheres of mechanics of continua. In virtue of generalization of basic ideas and research mathematical methods, the results obtained in the field of contact and mixed boundary value problems can be applied in fracture mechanics, hydrodynamics, fluid filtration in porous media, heat transfer, mechanics of continua and in many other spheres.

The practical importance is conditioned by wide application of the results of contact and mixed boundary value problems theory in mechanical engineering including aviation, construction, transport and many other fields of engineering practice related to computation of machines and machine parts, buildings and structures strength and durability characteristics.

The above mentioned ideas determine the up-to-dateness and topicality of the dissertation theme.

In the work, by the rigorous statement of the mathematical theory of elasticity and the theory of established filtration of fluid in porous media, a rather wide class of contiguous boundary and mixed boundary value problems of elasticity and established filtration theory have been studied on the basis of unified methods of integral equations and integral transformations. A number of new scientific results and conclusions is obtained and is briefly given below.

- in the process of antiplane deformation for a wedge of arbitrary wedge-type a closed solution of the mixed boundary value problem of the theory of elasticity was built, when on one set of a wedge contour segments displacements are given and on the remained part of the same contour and on the other contour tangential stresses are given,

▪ simultaneously using the well-known numerical-analytic method for solving singular integral equations (SIE) based on the Gauss quadrature formula, the approximate solution to constitutive SIE of this problem was built, a comparative analysis of this solution and the exact solution was carried out resulting in an exact coincidence,

▪ it is shown that the corresponding plane problem of the theory of fluid steady-state filtration in a porous wedge-shaped ground mass has the same type closed solution,

▪ by a rather general statement in case of an antiplane deformation a study was carried out on the problem of contact interaction between the system of an arbitrary finite number of collinear heterogeneous stringers of different stiffness and an elastic layer of the finite or infinite thickness; as a result, using the numerical analysis it was shown that solution of the problem for a layer when its relative height tends to infinity, tends to the solution to corresponding problem for elastic semispace,

▪ solution to a model mixed boundary value problem on steady-state filtration of fluid under the dam of a flat spillway apron, taking into account anisotropic property of fluid filtration, was reduced to the solution for the Krain integral equation and basic filtration characteristics of the problem were expressed by this solution,

▪ it was shown that fluid discharge through vertical sections of the porous soil in the form of a strip is expressed through the well-known Krain function $M(a)$, and thus a new hydrodynamic interpretation of that function was made,

▪ by the SIE method effective solutions of the mentioned mixed boundary value problem of the theory of fluid steady-state filtration under the dam have been built, when coefficient of filtration across the depth of the soil varies according to exponential law or two-stage function (piecewise homogeneous two-layered ground foundation) and regularities of change of filtration characteristics of the problem have been explained in a wide range of parameters,

▪ analytic solutions of the Lamb's problem type spatial problems have been built when fluid is injected through the segments of the hard screen into filtering ground foundation in the form of a layer or semispace,

▪ in the dissertation, methods of the theory of integral transformations and theory of integral equations as applied to the circle of problems of continuum mechanics have found future progress.



