

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Յափուջյան Վարուժան Տիգրանի

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԵՐԻ և ՍԱԼԵՐԻ ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ ՍՏՍՏԻԿԱԿԱՆ ՈՒ  
ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ա.02.04 – «Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա» մասնագիտությամբ  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի զիտական աստիճանի  
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2023

---

---

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

Япуджян Варужан Тигранович

РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛОС И ПЛАСТИН

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.02.04 – “Механика  
деформируемого твердого тела”

ЕРЕВАН 2023

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում  
Գիտական ղեկավար՝ ֆմգդ, ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս

Լ.Ա. Աղալովյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ֆմգդ, պրոֆ. Կ.Լ. Աղայան

ֆմգդ, պրոֆ. Լ.Գ. Ղուրազարյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

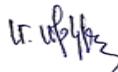
Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2024 թ. Հունվարի 29-ին, ժամը 14:00 -ին  
Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում  
(հասցեն՝ 375019, ք. Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24բ):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի  
գրադարանում:

Մեղմագիրն առաքված է 2023 թ. դեկտեմբերի 29-ին:

047 մասնագիտական խորհրդի գիտական  
քարտուղար, ֆմգթ



Մարինե Միկիլյան

---

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА

Научный руководитель:

дфмн, академик НАН РА Л.А. Агаловян

Официальные оппоненты:

дфмн, проф. К.Л. Агаян

дфмн, проф. Л.Г. Гулгазарян

Ведущая организация:

Ереванский государственный университет

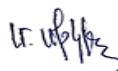
Защита состоится 29-го января 2024 г. в 14:00 ч. на заседании специализированного  
совета 047 в Институте механики  
(адрес: 375019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН РА.

Автореферат разослан 29-го декабря 2023г.

Ученый секретарь специализированного совета 047,

кфмн



Марине Микилян

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Балки, пластины и оболочки являются составными элементами почти всех современных конструкций. Они широко используются при проектировании изделий многих отраслей машиностроения, военного производства, строительства, приборостроения и др. Для обеспечения сравнительной легкости, прочности и устойчивости, долговечности этих конструкций широко применяются композиционные материалы, которые в большинстве своем являются анизотропными. Поэтому, постоянно совершенствуются методы их расчета и решения новых классов задач. Для этого существуют три основные группы аналитических методов и численные методы.

В аналитическую группу входят методы гипотез, разложений искомых величин по поперечной координате и асимптотический.

В методе гипотез принимаются некоторые предположения относительно напряженно – деформированного состояния тонкого тела. Известна гипотеза о недеформируемых нормалях Кирхгофа - Лява, на основе которой была построена классическая теория для изотропных пластин и оболочек в монографиях С.П. Тимошенко, А.Л. Гольденвейзера, В.В. Новожилова, В.З. Власова и др. Теория слоистых пластин построена в работах С.Г. Лехницкого, В.В. Болотина, а для оболочек в работах Э.И. Григолюка и др. Классическая теория анизотропных слоистых оболочек построена С.А. Амбарцумяном.

Существуют уточненные теории пластин и оболочек, в которых принимаются некоторые другие (смягченные) гипотезы. Более известными являются теория Э. Рейсснера, С.А. Амбарцумяна, типа Тимошенко (Б.Л. Пелех).

Второй метод аналитической группы основывается на разложении всех перемещений и напряжений пластины в ряды по параметру толщины. Искомые величины представляются в виде произведения двух функций – первая зависит от координат срединной поверхности, а вторая от поперечной координаты (выбирают степенную функцию: Коши, Н.А. Кильчевский или полиномы Лежандра: И.Н. Векуа, В.В. Понятовский).

Геометрия рассматриваемых тонких тел характеризуется тем, что одно из измерений резко отличается от двух других. Это явление дает основание для применения асимптотического метода, так как в преобразованных уравнениях присутствует малый параметр.

Асимптотическая теория изотропных пластин и оболочек построена А.Л. Гольденвейзером, а для анизотропных пластин и оболочек Л.А. Агаловяном. Агаловяном установлена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая решить новые классы статических и динамических задач для тонких тел, в частности, когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы отличные от классических (заданы соответствующие компоненты тензора напряжений) краевые условия: перемещения, смешанные условия. Этим методом решен широкий спектр задач.

С.О. Саркисяном асимптотическим методом построена общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек, общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. По этим теориям Саркисяном и его учениками решено множество важных прикладных задач.

Асимптотический метод был использован Ю.Д. Каплуновом и Д.А. Приказчиковом для исследования высокочастотных и краевых колебаний пластин и оболочек.

Численные методы развиты в работах Я.М. Григоренко, А.Я. Григоренко, М.С. Корнишина и др.

В данной диссертационной работе рассматриваются неклассические динамические задачи для полос и трехмерные статические задачи для пластин. Асимптотическим методом определены компоненты вектора перемещения и тензора напряжений. Приведены случаи, когда асимптотические решения становятся математически точными. Приведены иллюстрационные примеры.

### **Целью диссертационной работы является:**

- Изучение вынужденных колебаний анизотропных полос, находящихся в условиях плоской деформации, когда на лицевых поверхностях заданы смешанные условия теории упругости. В частности, когда:
  - на верхнюю кромку ортотропной полосы действует нормальная нагрузка, гармонически изменяющаяся во времени, а нижняя кромка свободно лежит на жесткой подстилке,
  - полоса обладает общей анизотропией в своей плоскости,
  - учитывается кулоново трение между полосой и жестким основанием, а верхней кромке анизотропной полосы сообщено нормальное перемещение, которое во времени изменяется гармонически.
- Изучение вынужденных колебаний ортотропной полосы, при наличии внутреннего трения, когда:
  - полоса свободно лежит на абсолютно жесткой подстилке, а на лицевую поверхность действуют нормальное и тангенциальное силы, изменяющиеся во времени гармонически,
  - между полосой и жестким основанием существуют кулоново трение, а верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени.
- Изучение напряженно – деформированного состояния ортотропной прямоугольной пластинки в статической задаче, когда:
  - верхней кромке пластинки сообщено нормальное перемещение, соответствующие тангенциальные компоненты напряжений равны нулю, а нижняя лицевая поверхность пластинки жестко закреплена.

- Изучение пограничного слоя в смешанной 3D задаче ортотропной пластинки.

### **Научная новизна.** В диссертационной работе

- показано, что гипотезы классической теории балок и пластин для решения сформулированных смешанных задач плоской деформации анизотропных полос не применимы,
- установлена асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, позволившая найти асимптотическое решение внешней задачи сформулированных задач,
- в случае смешанной динамической задачи плоской деформации ортотропной полосы показано, что в полосе возникают продольные и сдвиговые колебания, которые в исходном приближении независимы. При переменных по координатам нагрузках один тип колебаний порождает колебания противоположного типа. Установлены условия возникновения резонанса,
- показано, что в случае полосы с общей анизотропией в своей плоскости, колебания не распадаются на чисто продольные и чисто сдвиговые колебания
- доказано, что если внешнее вынуждающее воздействие описывается алгебраическим многочленом, итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена, в результате получается математически точное решение во внешней задаче. Приведены иллюстрационные примеры,
- найдены решения смешанных динамических задач плоской деформации анизотропных полос, при наличии в полосе внутреннего трения; когда между полосой и жестким основанием существует кулоново трение,
- найдено решение пространственной задачи теории упругости для ортотропной прямоугольной пластинки. Считается, что лицевой поверхности пластинки сообщено нормальное перемещение, а нижняя лицевая поверхность жестко закреплена. Указаны случаи, когда решение становится математически точным. Приведен иллюстрационный пример, в частности - решение соответствующее влиянию веса пластинки,
- изучен пограничный слой, возникающий вблизи боковой поверхности. Показано, что величины пограничного слоя убывают при удалении от торца во внутрь пластинки по экспоненциальному закону,
- показано, что возникают два типа пограничных слоёв – плоский и антиплоский,

- выведены характеристические уравнения для определения компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Найдены решения этих уравнений,
- выведены характеристические трансцендентные уравнения для определения показателей экспоненциального убывания величин погранслоя,
- изложена процедура сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя.

**Практическая ценность работы.** Учитывая, что балки и пластины, в том числе композитные (анизотропные), являются составными элементами современных конструкции и приборов, полученные в работе результаты могут быть использованы в расчетах соответствующих конструкций.

**Апробация работы.** Диссертационная работа в целом обсуждена на семинаре <<Механика тонкостенных систем>> Института механики НАН Армении, и на общем семинаре Института механики НАН Армении (2023г.).

**Публикации.** Основные результаты исследований опубликованы в семи научных статьях, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 78 наименований. Общий объем диссертации составляет 102 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, кратко изложены существующие основные теории и методы решения задач для тонкостенных тел. Дано краткое описание работы по главам.

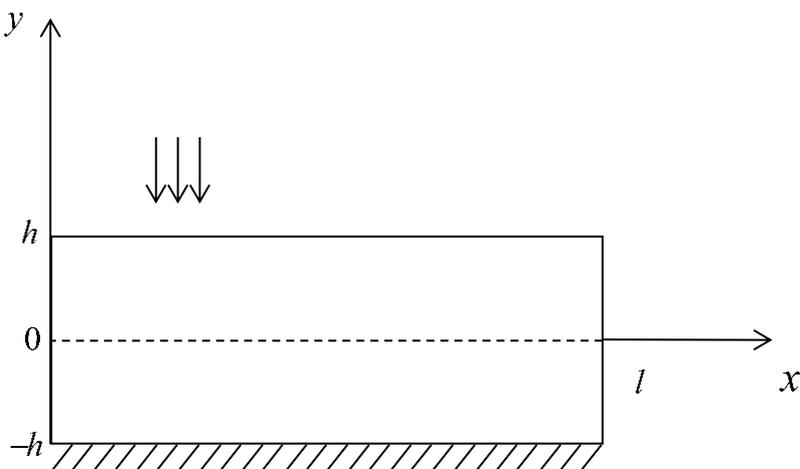
**В первой главе** рассматриваются смешанные динамические задачи плоской деформации анизотропного тела [1, 2, 3].

Рассматриваются вынужденные анизотропной колебания полосы

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, h \ll l\},$$

находящейся в условиях плоской деформации (Фиг. 1.1).

Считается, что полоса свободно лежит на жесткой подстилке, на верхнюю кромку полосы действует вынуждающее воздействие, которое гармонически изменяется во времени.



Фиг. 1.1

Во всех задачах первой главы требуется найти решение уравнений движения плоской деформации анизотропного тела

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1.1.1)$$

при различных вариантах анизотропии (соотношениях упругости) и граничных условий.

В §1 рассмотрено ортотропное тело, которое находится в условиях плоской деформации, т.е. имеются следующие соотношения упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \beta_{11} \sigma_{xx} + \beta_{12} \sigma_{yy}; & \varepsilon_{yy} &= \beta_{12} \sigma_{xx} + \beta_{22} \sigma_{yy}; & \varepsilon_{xy} &= \beta_{66} \sigma_{xy}; \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

где  $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3} a_{j3} / a_{33}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$ ,  $a_{ij}$  – постоянные упругости,

и при граничных условиях

$$\begin{aligned} y = h: & \quad \sigma_{yy}(x, y, t) = -\sigma_{yy}^+(x) \exp(i\Omega t); \quad \sigma_{xy}(x, y, t) = 0, \\ y = -h: & \quad v(x, y, t) = 0; \quad \sigma_{xy}(x, y, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

где  $\Omega$  – частота вынуждающего воздействия.

Решение задачи ищется в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\psi}(x, y, t) &= \sigma_{j,k}(x, y) \exp(i\Omega t); \quad \alpha, \psi = x, y, \quad j, k = 1, 2; \\ u(x, y, t) &= u_x(x, y) \exp(i\Omega t); \quad v(x, y, t) = u_y(x, y) \exp(i\Omega t).\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

В уравнениях движения и соотношениях упругости перейдя к безразмерным координатам и перемещениям  $x = h\xi$ ,  $y = h\zeta$ ,  $U = u_x/l$ ,  $V = u_y/l$  получена сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  система дифференциальных уравнений. Решение этой системы складывается из решений внешней задачи ( $I^{out}$ ) и пограничного слоя ( $I^b$ ) (в русскоязычных публикациях вместо  $I^{out}$  принимается  $I^{int}$  - т.е. подчеркивается что решение справедливо во внутренней области полосы):

$$I = I^{out} + I^b,\tag{1.1.5}$$

Решение внешней задачи, которое удовлетворяет граничным условиям на лицевых поверхностях  $y = \pm h$  (внешние условия), ищется в виде

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N},\tag{1.1.6}$$

где  $q_i = -1$  для  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ ,  $q_i = 0$  для  $U, V$ , а обозначение  $s = \overline{0, N}$  означает, что по нему (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование по целочисленным значениям  $s$  от нуля до числа приближений  $N$ . Подставив (1.1.6) в вышеуказанные уравнения и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при  $\varepsilon$ , получим систему, откуда напряжения можно выразить через перемещения  $U^{(s)}$  и  $V^{(s)}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(s)} &= -\frac{1}{\beta} \left( \beta_{12} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \beta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2; \\ \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{\beta_{66}} \left( \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right); \quad \sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\beta} \left( \beta_{11} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right),\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

а для определения  $U^{(s)}, V^{(s)}$  получены уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \beta_{66} \Omega_*^2 U^{(s)} &= F_U^{(s-1)}; \quad \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\beta}{\beta_{11}} \Omega_*^2 V^{(s)} = F_V^{(s-1)}, \\ \Omega_*^2 &= \rho h^2 \Omega^2; \quad F_U^{(s-1)} = -\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \beta_{66} \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi}; \quad F_V^{(s-1)} = \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\beta}{\beta_{11}} \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi}.\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

Решениями уравнений (1.1.8) являются

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= B_1^{(s)} \cos \Omega_* \sqrt{\beta_{66}} \zeta + B_2^{(s)} \sin \Omega_* \sqrt{\beta_{66}} \zeta + U_q^{(s-1)}; \\
V^{(s)} &= B_3^{(s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} \zeta + B_4^{(s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} \zeta + V_q^{(s-1)},
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

где  $B_j^{(s)}(\xi)$  - пока неизвестные функции,  $U_q^{(s-1)}, V_q^{(s-1)}$  - частные решения уравнений (1.1.8).

Удовлетворением граничных условий (1.1.3) определены функции  $B_j^{(s)}$ . В результате имеем

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{P_2^{(s)} + P_4^{(s)}}{2 \sin \Omega_* \sqrt{\beta_{66}}} \cos \Omega_* \sqrt{\beta_{66}} \zeta - \frac{P_2^{(s)} - P_4^{(s)}}{2 \cos \Omega_* \sqrt{\beta_{66}}} \sin \Omega_* \sqrt{\beta_{66}} \zeta + U_q^{(s-1)}; \\
V^{(s)} &= -\frac{1}{\cos 2\Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}}} \left( \left( P_1^{(s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} - P_3^{(s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} \right) \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} \zeta + \right. \\
&\quad \left. + \left( P_1^{(s)} \cos \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} - P_3^{(s)} \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} \right) \sin \Omega_* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_{11}}} \zeta \right) + V_q^{(s-1)},
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

где  $P_j^{(s)}(\xi)$  известные функции (приведены в диссертационной работе).

Напряжения определены по формулам (1.1.7).

При  $s=0$   $F_U^{(-1)} = F_V^{(-1)} = 0$ ,  $U_q^{(-1)} = V_q^{(-1)} = 0$  и уравнения для  $U^{(0)}$  и для  $V^{(0)}$  становятся независимыми и им соответствуют соответственно сдвиговые и продольные колебания. При  $s > 0$  один тип колебаний порождает колебания другого типа, но с амплитудой на порядок меньше чем амплитуда колебаний исходного приближения.

Найденные решения будут конечными, если  $\sin 2\Omega_* \sqrt{\beta_{66}} \neq 0$ ,  $\cos 2\Omega_* \sqrt{\beta/\beta_{11}} \neq 0$ . В противном случае возникнет резонанс. Резонансными частотами будут

$$\Omega = \frac{1}{2h\sqrt{\rho\beta_{66}}} \pi n, \quad \Omega = \frac{1}{4h\sqrt{\rho\beta}} \pi(2n+1), \quad n \in Z. \tag{1.1.11}$$

Если функция  $\sigma_{yy}^+(x)$  является алгебраическим многочленом, итерационный процесс обрывается на определенном приближении, зависящем от степени многочлена, в результате получается математически точное решение во внешней задаче. В работе, в качестве иллюстрации сказанного, приведено решение соответствующее  $\sigma_{yy}^+ = a_0 + a_1 \xi$ .

В §2 рассмотрена полоса (Фиг. 1.1), которая обладает общей анизотропией в своей плоскости, т.е. имеются следующие соотношения упругости

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{12}\sigma_{yy} + \beta_{16}\sigma_{xy}; & \varepsilon_{yy} &= \beta_{12}\sigma_{xx} + \beta_{22}\sigma_{yy} + \beta_{26}\sigma_{xy}; \\
\varepsilon_{xy} &= \beta_{16}\sigma_{xx} + \beta_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\sigma_{xy}; \\
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

при граничных условиях (1.1.3).

Задача решена тем же способом, для определения значений компонент перемещений  $U^{(s)}, V^{(s)}$  получены уравнения

$$\alpha_5 \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 U^{(s)} = \gamma_{11}^{(s-1)}; \quad \alpha_3 \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \alpha_4 \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 V^{(s)} = \gamma_{22}^{(s-1)}, \tag{1.2.2}$$

где коэффициенты  $\alpha_j, \Delta$  известны, они выражены через постоянные упругости,

$$\gamma_{11}^{(s-1)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \gamma_3^{(s-1)}}{\partial \zeta}; \quad \gamma_{22}^{(s-1)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \gamma_2^{(s-1)}}{\partial \zeta}.$$

Сравнивая системы (1.1.8) и (1.2.2) можно заключить, что в этом случае система не разделяется на уравнения для  $U^{(s)}$  или для  $V^{(s)}$ , что означает что колебания не являются чисто сдвиговыми или чисто продольными. В работе методом исключения получено уравнение для  $U^{(s)}$

$$\frac{\partial^4 U^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{ac}{b} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{a^2}{b} U^{(s)} = \gamma^{(s-1)}, \tag{1.2.3}$$

где  $a = \Omega_*^2 \Delta$ ;  $b = (\alpha_4 \alpha_5 - \alpha_3^2)$ ;  $c = (\alpha_4 + \alpha_5)$ .

Остальные неизвестные выражены через  $U^{(s)}$ . В работе найдено решение внешней задачи, соответствующее граничным условиям (1.1.3).

В §3 решена та же задача при граничных условиях

$$\begin{aligned}
y = h: & \quad v(x, y, t) = -V^+(x) \exp(i\Omega t); \quad \sigma_{xy}(x, y, t) = 0, \\
y = -h: & \quad v(x, y, t) = 0; \quad \sigma_{xy}(x, y, t) = f \sigma_{yy}(x, y, t),
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

где учитывается кулоново трение между полосой и абсолютно жестким основанием.

В этих задачах тоже, когда  $\sigma_{yy}^+(x), V^+(x)$  являются алгебраическими многочленами, итерация обрывается, в результате имеем математически точное решение. Приведены иллюстрационные примеры.

**Во второй главе** рассматриваются плоские задачи о вынужденных колебаниях ортотропного тела при наличии внутреннего трения [4, 5].

Имеется ортотропное тело, которое находится в условиях плоской деформации и занимает область  $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, h \ll l\}$  (Фиг. 1.1).

Считается что внутреннее трение пропорционально скорости точек. Требуется найти в области  $D$  решение уравнений движения с учетом внутреннего трения:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - K \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - K \frac{\partial v}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.1.1)$$

при соотношениях упругости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta_{11} \sigma_{xx} + \beta_{12} \sigma_{yy}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_{12} \sigma_{xx} + \beta_{22} \sigma_{yy}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \beta_{66} \sigma_{xy}, \quad (2.1.2)$$

и при различных вариантах граничных условий.

В §1 заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} y = h: \quad \sigma_{xy}(x, y, t) &= \sigma_{xy}^+(\xi) \cos \Omega t, \quad \xi = \frac{x}{l}; \\ \sigma_{yy}(x, y, t) &= -\sigma_{yy}^+(\xi) \cos \Omega t, \\ y = -h: \quad v(x, y, t) &= 0; \quad \sigma_{xy}(x, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Для решения сформулированной задачи в уравнениях движения (2.1.1) и соотношениях упругости (2.1.2) перейдя к безразмерным координатам и перемещениям  $x = l\xi$ ,  $y = h\zeta$ ,  $U = u_x/l$ ,  $V = u_y/l$  получена система, решение которой ищется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\psi}(x, y, t) &= \sigma_{jkl}(\xi, \zeta) \sin \Omega t + \sigma_{jkl}(\xi, \zeta) \cos \Omega t, \quad \alpha, \psi = x, y, \quad j, k = 1, 2; \\ U(x, y, t) &= U_I(\xi, \zeta) \sin \Omega t + U_{II}(\xi, \zeta) \cos \Omega t, \quad (U, V). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Подставлением (2.1.4) в вышеуказанную систему и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при  $\sin \Omega t$ ,  $\cos \Omega t$ , получена сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  система дифференциальных уравнений, решение которой складывается из решений внешней задачи ( $I^{out}$ ) и пограничного слоя ( $I^b$ ) (по формуле (1.1.5)).

Решение внешней задачи ищется в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij\gamma}^{out} &= \varepsilon^{-1+s} \overline{\sigma_{ij\gamma}^{(s)}}(\xi, \zeta), \quad s = \overline{0, N}, \quad i, j = 1, 2, \quad \gamma = I, II; \\ U_\gamma^{out} &= \varepsilon^s \overline{U_\gamma^{(s)}}(\xi, \zeta), \quad (U, V), \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

где  $q_i = -1$  для  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ ,  $q_i = 0$  для  $U, V$ .

Подставив (2.1.5) в вышеуказанную возмущенную систему и приравняв в каждом уравнении соответствующие коэффициенты при  $\varepsilon$ , получим систему, откуда напряжения выражаются через перемещения  $U_\gamma^{(s)}$  и  $V_\gamma^{(s)}$ , а для определения  $U_I^{(s)}, V_I^{(s)}$  получены уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2\rho_1^2 \Omega^2 \beta_{66} \frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \beta_{66}^2 \Omega^2 (\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2) U_I^{(s)} &= \beta_{66}^2 \Psi_{IU}^{(s-1)}; \\ \frac{\partial^4 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{2\Delta \rho_1^2 \Omega^2}{\beta_{11}} \frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^2 \Omega^2 (\rho_1^4 \Omega^2 + 4H^2)}{\beta_{11}^2} V_I^{(s)} &= \frac{\Delta^2}{\beta_{11}^2} \Psi_{IV}^{(s-1)}, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

где  $2H = Kh^2$ ;  $\rho_1^2 = \rho h^2$ ;  $\Delta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2$ ;  $\Psi_{IU}^{(s-1)}, \Psi_{IV}^{(s-1)}$  - известные функции,

а  $U_{II}^{(s)}, V_{II}^{(s)}$  выражены через  $U_I^{(s)}, V_I^{(s)}$  соответственно.

Решениями уравнений (2.1.6) являются

$$\begin{aligned} U_I^{(s)} &= A_1^{(s)} \varphi_1 + A_2^{(s)} \varphi_2 + A_3^{(s)} \varphi_3 + A_4^{(s)} \varphi_4 + U_{Iu}^{(s-1)}; \\ V_I^{(s)} &= B_1^{(s)} \psi_1 + B_2^{(s)} \psi_2 + B_3^{(s)} \psi_3 + B_4^{(s)} \psi_4 + V_{Iv}^{(s-1)}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

где  $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$  известные функции, а  $A_j^{(s)}(\xi), B_j^{(s)}(\xi)$  - пока неизвестные функции.

Удовлетворением граничных условий (2.1.3) определены функции  $A_j^{(s)}, B_j^{(s)}$ , следовательно и решение сформулированной задачи.

Приведен иллюстрационный пример нахождения математически точного решения, соответствующего случаю  $\sigma_{xy}^+ = \gamma_1 + \gamma_2 \xi$ ,  $\sigma_{yy}^+ = \gamma_3 + \gamma_4 \xi$ .

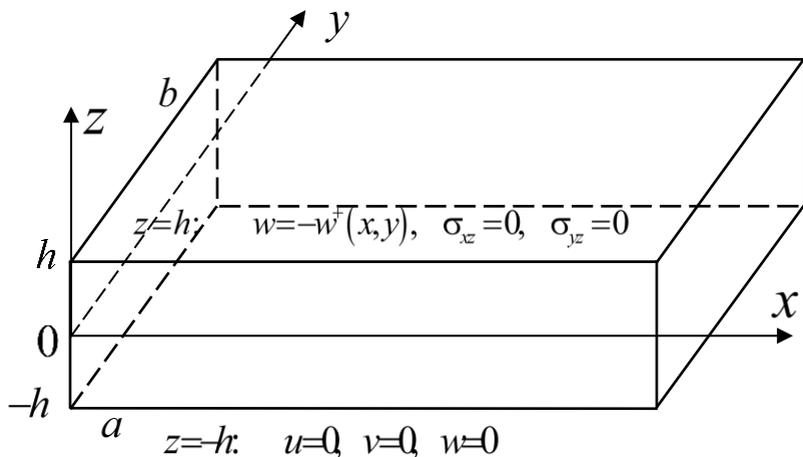
В §2 решена та же задача при граничных условиях:

$$\begin{aligned} y = h: \quad v(x, y, t) &= -V^+(\xi) \cos \Omega t; \quad \sigma_{xy}(x, y, t) = 0, \quad \xi = \frac{x}{l}, \\ y = -h: \quad v(x, y, t) &= 0; \quad \sigma_{xy}(x, y, t) = f \sigma_{yy}(x, y, t), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где учтено кулоново трение между полосой и абсолютно жестким основанием.

**В третьей главе** рассматривается трехмерная статическая смешанная задача ортотропной пластинки [6, 7].

Имеется прямоугольная пластинка размерами  $a, b, 2h$ , которая занимает область  $D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll l, l = \min(a, b)\}$  (Фиг. 3.1)



Фиг. 3.1

Требуется найти решение уравнений равновесия ортотропной прямоугольной пластинки

$$\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial z} + F_j(x, y, z) = 0, \quad j = x, y, z, \quad (3.1.1)$$

при соотношениях упругости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}; & \varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz}; \\ \varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}; & \varepsilon_{xy} &= a_{66}\sigma_{xy}; & \varepsilon_{xz} &= a_{55}\sigma_{xz}; & \varepsilon_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz}; \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

и при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} z = h: & \quad w = -w^+(x, y); \quad \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{yz} = 0, \\ z = -h: & \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

В (3.1.1) и (3.1.2) перейдя к безразмерным координатам и перемещениям

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{h}; \quad U = \frac{u}{l}; \quad V = \frac{v}{l}; \quad W = \frac{w}{l}, \quad (3.1.4)$$

получена сингулярно возмущенная система

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{jx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{jy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{jz}}{\partial \zeta} + lF_j &= 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}; \\
\frac{\partial V}{\partial \eta} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz}; \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}; \\
\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = a_{66}\sigma_{xy}; \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} &= a_{55}\sigma_{xz}; \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{44}\sigma_{yz}.
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Решение этой системы складывается из решений внешней задачи ( $I^{out}$ ) и пограничного слоя ( $I^b$ ) (по формуле (1.1.5)).

В §1 построено решение внешней задачи [6].

Решение внешней задачи ищется в виде

$$I^{out} = \varepsilon^{q_i+s} I^{(s)}, \quad s = \overline{0, N}, \tag{3.1.6}$$

где  $q_i = -1$  для  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ ,  $q_i = 0$  для  $U, V$ .

По схожей с описанной в первой главе процедуре получены значения перемещений

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_U^{(s)} d\zeta + \zeta A_1^{(s)} + A_2^{(s)}; \quad V^{(s)} = \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_V^{(s)} d\zeta + \zeta B_1^{(s)} + B_2^{(s)}; \\
W^{(s)} &= \int_0^\zeta d\zeta \int_0^\zeta R_w^{(s)} d\zeta + \zeta C_1^{(s)} + C_2^{(s)},
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

и выведены формулы выражающие компоненты тензора напряжений через компоненты вектора перемещения. В (3.1.7)  $R_U^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), R_V^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), R_w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$  известные функции, а функции  $A_j^{(s)}(\xi, \eta), B_j^{(s)}(\xi, \eta), C_j^{(s)}(\xi, \eta)$  определены из граничных условий (3.1.3).

Здесь тоже, если функция  $w^+$  является алгебраическим многочленом, решение становится математически точным. В качестве иллюстрации приведено решение, соответствующее  $w^+ = l(a_0 + a_1\xi + a_2\eta)$ ,  $F_x = 0; F_y = 0; F_z = -\rho g$ .

Найденное решение внешней задачи, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковых поверхностях пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя ( $I_b$ ). Это решение можно построить автономно и сращивать его с решением внешней задачи.

В §2 рассмотрен пограничный слой, который возникает у боковой поверхности  $\xi = 0 (x = 0)$ . Аналогичным образом можно построить решение пограничного слоя, возникающего при остальных боковых поверхностях.

Для построения решения пограничного слоя в (3.1.5) вводится новая замена переменной  $\gamma = \xi/\varepsilon$ .

Поскольку неоднородные граничные условия (3.1.3) уже удовлетворены, напряжения и перемещения пограничного слоя (им приписан индекс <<b>> (boundary)) должны удовлетворять соответствующим однородным (нулевым) граничным условиям:

$$\begin{aligned} \zeta = 1: \quad W_b = 0; \quad \sigma_{xzb} = 0; \quad \sigma_{yzb} = 0, \\ \zeta = -1: \quad U_b = 0; \quad V_b = 0; \quad W_b = 0. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Величины пограничного слоя, при удалении от поверхности  $\xi = 0$  в глубь пластинки должны стремительно убывать. Учитывая это, решение для пограничного слоя ищется в виде:

$$I_b = \varepsilon^{q_i+s} I_b^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda\gamma), \quad s = \overline{0, N}, \quad (3.2.2)$$

где  $q_i = -1$  для  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ ,  $q_i = 0$  для  $U, V, W$ , а  $\text{Re} \lambda > 0$ , т.е. нас будут интересовать корни с положительной реальной частью, ибо лишь тогда будем иметь быстро затухающее решение при удалении от торца  $\xi = 0$  во внутрь пластинки.

Подставив (3.2.2) в вышеуказанную преобразованную систему, для определения неизвестных коэффициентов  $I_b^{(s)}$  разложения (3.2.2), получим систему, из которой напряжения выражаются через перемещения. Для определения  $U_b^{(s)}, W_b^{(s)}$  получена система уравнений, из которой:

$$U_b^{(s)} = A_{1U}^{(s)} ch k_1 \zeta + A_{2U}^{(s)} sh k_1 \zeta + A_{3U}^{(s)} ch k_3 \zeta + A_{4U}^{(s)} sh k_3 \zeta + U_{b4}^{(s-1)}, \quad (3.2.3)$$

где  $k_1, k_3$  корни характеристического уравнения, а  $W_b^{(s)}$  выражен через  $U_b^{(s)}$ .

Для  $V_b^{(s)}$  выведено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решением которой является

$$V_b^{(s)} = A_{1V}^{(s)} \cos \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta + A_{2V}^{(s)} \sin \lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} \zeta + V_{b4}^{(s-1)}. \quad (3.2.4)$$

Функции  $A_{jU}^{(s)}(\eta)$  и  $A_{jV}^{(s)}(\eta)$  определяются из граничных условий (3.2.1).

При  $s = 0$  удовлетворением граничных условий (3.2.2) относительно  $U_b, W_b, \sigma_{xzb}$ , получена однородная алгебраическая система относительно  $A_{jU}^{(0)}$ , которая имеет

ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. В результате получено трансцендентное уравнение:

$$k_1^2 k_3 (g_1 - g_2) \left( g_1 \left( sh(2k_1 + k_3) + sh(2k_1 - k_3) \right) - g_2 \left( sh(2k_3 + k_1) + sh(2k_3 - k_1) \right) \right) = 0, \quad (3.2.5)$$

где  $g_1, g_2$  - обозначения.

Из трансцендентного уравнения определяется  $\lambda$ . Это трансцендентное уравнение имеет счетное множество комплексных корней:

$$\lambda_n = \lambda_{1n} + \lambda_{2n} i. \quad (3.2.6)$$

Если  $\lambda_n$  является корнем уравнения (3.2.3) то  $\overline{\lambda_n}$  тоже является корнем. Это позволяет окончательное решение представить в виде, куда входят лишь вещественные величины.

Из вышеуказанной однородной системы все функции  $A_{jU}^{(0)}$  можно выразить через одну, например через  $A_{4U}^{(0)}$ . Тогда

$$U_b^{(0)} = \overline{U_b}^{(0)}(\xi) A_{4U}^{(0)}, \quad (3.2.7)$$

$$\overline{U_b}^{(0)} = \frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 sh k_1} ch k_1 \xi - \frac{k_3 g_2 ch k_3}{k_1 g_1 ch k_1} sh k_1 \xi + cth k_3 ch k_3 \xi + sh k_3 \xi.$$

Обозначив

$$A_{4U}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( A_{4U1}^{(0)} - i A_{4U2}^{(0)} \right), \quad (3.2.8)$$

формула (3.2.8) представится в виде:

$$U_b^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \text{Re} \overline{U_b}^{(0)} + i \text{Im} \overline{U_b}^{(0)} \right) \left( A_{4U1}^{(0)} - i A_{4U2}^{(0)} \right). \quad (3.2.9)$$

Поскольку каждому решению (3.2.9) соответствует сопряженное решение, окончательно имеем решение:

$$U_{bn}^{(0)} = \text{Re} \overline{U_{bn}}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \text{Im} \overline{U_{bn}}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)}, \quad (3.2.10)$$

где считается, что по повторяющемуся индексу  $n$  происходит суммирование по всем значениям, соответствующим значениям  $\lambda_n$  корней уравнения (3.2.5).

Аналогично определены  $W_{bn}^{(0)}, \sigma_{xbn}^{(0)}, \sigma_{ybn}^{(0)}, \sigma_{zbn}^{(0)}$ , которые описывают плоский пограничный слой. Величины плоского пограничного слоя, при удалении от торца  $\gamma = 0 (\xi = 0)$  убывают как  $\exp(-\text{Re} \lambda_n x/h)$ .

При  $s = 0$  удовлетворением граничных условий (3.2.2) относительно  $\sigma_{yz}, V_b$ , получена однородная алгебраическая система относительно  $A_{1V}^{(0)}, A_{2V}^{(0)}$ , откуда следует

$$\cos 2\lambda \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}}} = 0, \quad \lambda_n = \frac{(1+2n)\pi}{4} \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}, \quad (3.2.11)$$

$$V_{bn}^{(0)} = \left( (-1)^n \cos \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta + \sin \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta \right) A_{2Vn}^{(0)}. \quad (3.2.12)$$

(3.2.11), (3.2.12) соответствуют антиплоскому пограничному слою, величины которого убывают как  $\exp\left(-\frac{(1+2n)\pi}{4} \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} \frac{x}{h}\right)$ .

В исходном приближении плоский и антиплоский пограничные слои оказались независимыми и с различными скоростями убывания. При  $s > 0$  эти системы должны быть рассмотрены, когда  $\lambda = \lambda_n^p$  и  $\lambda = \lambda_n^a$ , тогда один тип погранслоя будет порождать погранслоем противоположного типа (сопутствующие пограничные слои). Величины этих погранслоев будут на порядок меньше величин основных погранслоев.

Общее решение задачи будет иметь вид

$$I^{(s)} = I^{out(s)} + I_b^{p(s)} + I_b^{a(s)}. \quad (3.2.13)$$

Для сопряжения решений внешней задачи и пограничного слоя следует удовлетворить граничным условиям пространственной задачи на боковой поверхности пластинки.

Рассмотрен случай, когда

$$\xi = 0: \quad U = 0; \quad V = 0; \quad W = 0. \quad (3.2.14)$$

Удовлетворив граничным условиям (3.2.14) относительно  $U, W$  при  $s = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{U}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)} &= 0; \\ -\frac{w^+}{2l} (\zeta + 1) + \operatorname{Re} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U1n}^{(0)} + \operatorname{Im} \bar{W}_{bn}^{(0)} A_{4U2n}^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

где по повторяющемуся (немому) индексу  $n$  происходит суммирование по всем (или выбранным количеству) значениям  $\lambda_n$ .

Для антиплоского погранслоя имеем:

$$\left( (-1)^n \cos \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta + \sin \frac{(1+2n)\pi}{4} \zeta \right) A_{2\nu n}^{(0)} = 0. \quad (3.2.16)$$

Значения постоянных  $A_{4U1n}^{(0)}, A_{4U2n}^{(0)}$  и  $A_{2\nu n}^{(0)}$  можно определить лишь приближенно. Обычно используется метод коллокаций (совпадений).

В реальных расчетах обычно бывает достаточно ограничиваться исходным приближением.

**Заключение.** В диссертационной работе рассмотрены динамические задачи плоской деформации анизотропного тела при наличии различных вариантов граничных условий. Рассмотрены вынужденные колебания анизотропных полос - балок, с учетом кулоново трения и внутреннего трения, когда на их лицевых поверхностях заданы смешанные граничные условия теории упругости. Решена трехмерная статическая смешанная краевая задача для ортотропных пластинок.

Для решения рассмотренных в диссертационной работе задач классическая и существующие уточненные теории балок, пластин и оболочек не применимы. Для решения этих задач эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Решения задач складываются из решений внешней задачи и пограничного слоя. Эти решения можно построить автономно.

В работе получены следующие новые результаты:

- Найдено асимптотическое решение динамической смешанной внешней задачи плоской деформации для ортотропной полосы. На верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, гармонично изменяющаяся во времени. Нижняя кромка свободно лежит на жесткой подстилке – нормальное перемещение и касательное напряжение равны нулю [1]. Найдены амплитуды вынужденных колебаний, установлены условия возникновения резонанса. Показано, что один тип колебаний (например, продольные) порождает колебания другого типа (например, сдвиговые), если внешние воздействия переменны по тангенциальной координате. Указаны случаи, когда асимптотическое решение становится математически точным. Приведен иллюстрационный пример.
- Решена смешанная динамическая плоская внешняя задача для анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии. Считается, что полоса конечных размеров свободно опирается на абсолютно жесткое основание, а на верхнюю кромку полосы действует нормальная нагрузка, которая во времени изменяется гармонически [2]. Показано, что в отличие от той же задачи для ортотропного тела, вынужденные колебания не распадаются на продольные и поперечные колебания.
- Решена та же задача, когда верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, которое изменяется во времени гармонически. Учитывается кулоново трение между полосой и абсолютно жестким основанием [3].

- Найдено решение внешней задачи плоской деформации ортотропной полосы при наличии в ней внутреннего трения. Полоса лежит на жесткой подстилке, на верхнюю кромку полосы действуют нормальные и тангенциальные нагрузки, гармонически изменяющиеся во времени [4].
- Решена та же задача, когда верхней кромке полосы сообщено нормальное перемещение, гармонически изменяющееся во времени. Учитывается кулоново трение между полосой и абсолютно жестким основанием [5].
- Асимптотическим методом решена смешанная краевая 3D статическая задача для ортотропных прямоугольных пластин. На верхней лицевой поверхности пластинки заданы смешанные условия, а нижняя лицевая поверхность жестко закреплена [6, 7]. Определены решения внешней задачи и пограничного слоя. Показано, что величины пограничного слоя убывают при удалении от боковой поверхности во внутрь пластинки экспоненциально. Показано, что пограничный слой распадается на плоский и антиплоский пограничные слои, которые для исходного приближения ( $s = 0$ ) независимы. Показано, что в последующих приближениях пограничные слои становятся зависимыми и один тип пограничного слоя порождает пограничный слой другого типа (сопровождающие пограничные слои). Выведены характеристические трансцендентные уравнения для определения значений показателя экспоненциального убывания величин плоской и антиплоской пограничных слоев. Величины пограничного слоя убывают как  $\exp(-\operatorname{Re}\lambda_n x/h)$ ,  $\lambda_n$  - корень трансцендентного уравнения. Изложена процедура сопряжения внешнего решения с решением для пограничного слоя, когда боковой торец ( $x = 0$ ) пластинки жестко закреплён.

### Список научных работ по теме диссертации

1. Япуджян В.Т. Об одной динамической задаче плоской деформации ортотропного тела. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т. 121. №3. 2021. С. 192-200.
2. Агаловян Л.А., Япуджян В.Т. О смешанной динамической задаче плоской деформации анизотропного тела, имеющего плоскость упругой симметрии. // Известия НАН РА. Механика. Т. 74. №4. 2021. С. 3-17.
3. Япуджян В.Т. О вынужденных колебаниях анизотропной полосы с учетом кулонова трения. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т. 122. №2. 2022. С. 153-160.
4. Агаловян Л.А., Япуджян В.Т. Вынужденные колебания при плоской деформации полосы с учетом внутреннего трения. // Известия НАН РА. Механика. Т. 75. №4. 2022. С. 6-16.
5. Япуджян В.Т. О вынужденных колебаниях ортотропной полосы при наличии внутреннего трения и кулонова трения между полосой и жестким основанием. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т. 123. №1. 2023. С. 30-39.

6. Япуджян В.Т. Об одной смешанной 3D задаче теории упругости для ортотропной пластинки. // Доклады. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Т. 123. №2. 2023. С. 31-37.

7. Агаловян Л.А., Япуджян В.Т. О пограничном слое в смешанной 3D краевой задаче ортотропной пластинки. // Известия НАН РА. Механика. Т. 76. №3. 2023. С. 64-75.

## **Ամփոփում**

### **Անիզոտրոպ շերտերի և սալերի ոչ դասական ստատիկական ու դինամիկական խնդիրների լուծումներ**

Ատենախոսական աշխատանքում դիտարկված են անիզոտրոպ մարմնի հարթ դեֆորմացիայի դինամիկական խնդիրներ տարատեսակ եզրային պայմանների առկայության դեպքում: Գիտարկված են անիզոտրոպ շերտ – հեծանների ստիպողական տատանումները, հաշվի է առնվում կուլոնյան շփումը և ներքին շփումը, իսկ դրանց դիմային մակերևույթներում տրված են առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններ: Օրթոտրոպ սալերի համար լուծված է եռաչափ ստատիկական խառը եզրային խնդիր:

Աշխատանքում դիտարկված խնդիրների լուծման համար հեծանների, սալերի և բաղանջների դասական և գոյություն ունեցող ճշգրտված տեսությունները կիրառելի չեն: Այդ խնդիրների լուծման համար էֆեկտիվ հանդիսացավ սինգուլյար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ասիմպտոտիկ մեթոդը: Խնդիրների լուծումները բաղկացած են արտաքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումներից:

Այդ լուծումները կարելի է կառուցել իրարից անկախ:

Աշխատանքում ստացված են հետևյալ նոր արդյունքները.

Օրթոտրոպ շերտի համար լուծված է հարթ դեֆորմացիայի դինամիկական խառը արտաքին խնդիր, երբ շերտը ազատ հենված է կոշտ հենարանին: Շերտի վերին նիստի վրա ազդում է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ բեռ: Ստորին նիստում նորմալ տեղափոխությունը և շոշափող լարումը հավասար են զրոյի: Որոշված են ստիպողական տատանումների ամպլիտուդները և ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Ցույց է տրված, որ ըստ կոորդինատի փոփոխական արտաքին ազդեցությունների դեպքում մի տիպի տատանումները (օրինակ երկայնական) առաջացնում է հակառակ տիպի տատանումներ (օրինակ սահքային): Նշված են դեպքեր, երբ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ, բերված է իլյուստրացիոն օրինակ:

Առաձգականության սիմետրիայի հարթություն ունեցող անիզոտրոպ մարմնի համար լուծված է հարթ դեֆորմացիայի դինամիկական խառը արտաքին խնդիր: Շերտն ազատ հենված է կոշտ հենարանին, վերին նիստի վրա ազդում է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ բեռ: Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն օրթոտրոպ մարմնի դեպքի, տատանումները չեն տրոհվում զուտ սահքային և զուտ երկայնական տատանումների:

Լուծված է նույն խնդիրը, երբ շերտի վերին նիստին հաղորդված է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ տեղափոխություն: Հաշվի է առնվում կուլոնյան շփումը շերտի և կոշտ հենարանի միջև:

Որոշված է օրթոտրոպ շերտի հարթ դեֆորմացիայի արտաքին խնդրի լուծումը, երբ առկա է ներքին շփում: Շերտը ազատ հենված է կոշտ հենարանին: Շերտի վերին նիստին ազդում են ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ և տանգենցիալ բեռեր:

Լուծված է նույն խնդիրը, երբ շերտի վերին նիստին հաղորդված է ըստ ժամանակի հարմոնիկ փոփոխվող նորմալ տեղափոխություն: Հաշվի է առնվում կուլոնյան շփումը շերտի և կոշտ հենարանի միջև:

Օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալի համար ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է ստատիկական խառը եզրային 3D խնդիր: Սալի վերին նիստում տրված են խառը պայմաններ, իսկ ստորին նիստը կոշտ ամրակցված է: Որոշված են արտաքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումները: Ցույց է տրված, որ սահմանային շերտի մեծությունները սալի կողմնային մակերևույթից դեպի խորքը հեռանալիս նվազում են էքսպոնենցիալ ձևով: Ցույց է տրված, որ սահմանային շերտը տրոհվում է հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերի, որոնք ելակետային մոտավորությունում անկախ են: Ցույց է տրված, որ հաջորդ մոտավորություններում սահմանային շերտերը դառնում են կախված և մի տիպի սահմանային շերտը առաջացնում է մյուս տիպի սահմանային շերտ: Հարթ և հակահարթ սահմանային շերտերի մեծությունների էքսպոնենցիալ նվազման ցուցիչ արժեքների որոշման համար ստացված են բնութագրիչ տրանսցենդենտ հավասարումներ: Սահմանային շերտի մեծությունները նվազում են ինչպես  $\exp(-\operatorname{Re}\lambda_n x/h)$ ,  $\lambda_n$ -ը տրանսցենդենտ հավասարման արմատն է: Շարադրված է արտաքին խնդրի և սահմանային շերտի համար լուծումների լծորդման ընթացակարգը, երբ սալի կողմնային նիստը ( $x = 0$ ) կոշտ ամրակցված է:

## Abstract

### **Solving nonclassical dynamical and statical problems of anisotropic strips and plates**

The dissertation work considers dynamic problems of plane deformation of an anisotropic body in the presence of a variety of boundary conditions. Forced vibrations of anisotropic strip – beams are considered, taking into account Coulomb friction and internal friction, while in their front surfaces there are given mixed boundary conditions of elasticity theory. Three-dimensional statical boundary problem is solved for an orthotropic plate.

Classical and existing refined theories of beams, plates and shells are not applicable for solving problems observed in the work. The asymptotic method of solving singularly perturbed differential equations is proved to be effective for solving these problems. Solutions of problems consist of solutions to an outer problem and a boundary layer. Those solutions can be built independently of each other.

The following new results were obtained in the work:

A dynamical mixed outer problem of the plane deformation for an orthotropic body is solved. The upper edge of the strip is subjected to a normal load that changes harmonically over time. The lower edge rests freely on the rigid base - the normal movement and tangent stress are zero. The amplitudes of the forced vibrations have been defined, and the

conditions for the occurrence of resonance have been established. It is shown that one type of vibration (e.g., longitudinal) generates vibrations of another type (e.g., shear) when the external influences are variable along the tangential coordinate. Cases are indicated when the asymptotical solution becomes mathematically exact. An illustrative example is given.

A dynamical mixed outer problem of the plane deformation for an anisotropic body having a plane of elastic symmetry is solved. The strip rests freely on a rigid base, the upper edge is subjected to a normal load, which changes harmonically over time. It is shown that, unlike the same problem for the case of an orthotropic body, the forced vibrations do not split into only longitudinal and only shear vibrations.

The same problem is solved when the upper edge of the strip is subjected to a normal displacement that changes harmonically over time. The Coulomb friction between the strip and the absolutely rigid base is taken into account.

The solution to the outer problem of the plane deformation of an orthotropic strip in the presence of internal friction in it has been defined. The strip lies on a rigid base, the upper edge of the strip is subject to normal and tangential loads that changes harmonically over time.

The same problem is solved when the upper edge of the strip is subjected to a normal displacement that changes harmonically over time. The Coulomb friction between the strip and the absolutely rigid base is taken into account.

The asymptotic method has been used to solve a mixed boundary 3D statical problem for orthotropic rectangular plates. Mixed conditions are set in the upper edge of the plate, and the lower edge is rigidly fixed. Solutions to the outer problem and the boundary layer are determined. It is shown that the quantities of the boundary layer decrease exponentially depending on the distance from the lateral surface to the interior of the plate. It is shown that the boundary layer splits into plane and antiplane boundary layers, which are independent for the initial approximation. It is shown that in subsequent approximations, boundary layers become dependent, and one type of boundary layer generates a boundary layer of another type (accompanying boundary layers). Characteristic transcendental equations for determining the values of the exponential decreasing index of the quantities of the plane and antiplane boundary layers are derived. The values of the boundary layer decrease like  $\exp(-\operatorname{Re} \lambda_n x/h)$ ,  $\lambda_n$  is the root of the transcendental equation. The procedure for coupling the external solution with the solution to the boundary layer when the side edge ( $x=0$ ) of the plate is rigidly fixed is described.

