ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Труды VI международной конференции
сентябрь 21-26
Горис-Степанакерт, 2008

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Proceedings of VI International Conference
September 21-26
Goris-Stepanakert , 2008

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Посвящается 75-летию члена-корреспондента НАН Армении Александра Георгиевича Багдоева

Труды VI международной конференции
сентябрь 21-26, 2008, Горис-Степанакерт

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Devoted to 75-th anniversary of corresponding member NAS RA A.G. Bagdoev

Proceedings of VI International Conference
September 21-26, 2008, Goris-Stepanakert

Институт механики НАН РА
Ереван – 2008

ÐÎ¸ 06: 531/534
¶Ø¸ 22.2
¸ 447

Организаторы конференции

Министерство образования и науки Армении,
Институт механики НАН Армении,
Институт механики МГУ РФ,
Институт проблем механики РАН,
Горисский государственный университет,
Арцахский государственный университет

Основные результаты сборника относятся к линейным и нелинейным задачам динамического взаимодействия упругопластических сред, в том числе, с учетом магнитных полей, задачам сейсмологии, пространственным и плоским граничным задачам динамики упругой среды. Рассматриваются задачи распространения поверхностных волн в ферромагнитных, анизотропных, упругих средах, резонансные взаимодействия в средах с микроструктурой, вопросы устойчивости распространения нелинейных волн. Ряд работ посвящен методам численно-аналитического интегрирования уравнений упругопластических сред.

Сборник предназначен для научных работников и аспирантов, занимающихся вопросами динамики сплошных сред.

The main results of the collection are related to the linear and non-linear problems of interaction elasto-plastic media taking into account of magnetic fields, to the problems of seismology, to the space and plane boundary problems of dynamics of elastic media. The propagation of surface waves in ferromagnetic, anisotropic, elastic media, resonance interaction in media with microstructure, problems of stability of propagation of non-linear waves are considered. Some of works concern to methods of numerical-analytical integration of equation for elasto-plastic media and to the problems of creep.

The collection will be useful for the scientific researchers and post-graduate students, occupied by the problems of dynamics of continuous media.

¸ 447 ¸»ýáñÙ³óíáÕ ÙÇç³í³Ûñ»ñÇ ÷áË³½¹»óáõÃÛ³Ý ¹ÇÝ³ÙÇÏ³ÛÇ åñáµÉ»ÙÝ»ñÁ. – ºñ.: ÐÐ ¶²² Ø»Ë³ÝÇÏ³ÛÇ ÇÝëïÇïáõï, 2008. – 456 ¿ç:

¶Ø¸ 22.2

ISBN 978-99941-2-163-2

¶Ç ï ³ ÅáÕá í Ç Ï ³ ½Ù ³ Ï»ñå ÇãÝ»ñ
ÐÐ Î ñÃáõÃÛ ³ Ý ¨ ·Ç ï áõÃÛ ³ Ý Ý ³ Ë ³ ñ ³ ñáõÃÛáõÝ,
ÐÐ ¶ ² ² Ø»Ë ³ ÝÇÏ ³ ÛÇ ÇÝë ï Ç ï áõ ï ,
è ¸ Ø äÐ-Ç Ø»Ë ³ ÝÇÏ ³ ÛÇ ÇÝë ï Ç ï áõ ï ,
è ¸ ¶ ² Ø»Ë ³ ÝÇÏ ³ ÛÇ åñáµÉ»ÙÝ»ñÇ ÇÝë ï Ç ï áõ ï ,
¶áñÇëÇ å» ï ³ Ï ³ Ý Ñ ³ Ù ³ Éë ³ ñ ³ Ý,
² ñó ³ ËÇ å» ï ³ Ï ³ Ý Ñ ³ Ù ³ Éë ³ ñ ³ Ý

¸ º üàðØ ² ò Ì àÔ
ØÆæ ² Ì ² Úð º ðÆ
öàÊ ² ¼ ¸ º òàôÂ Ú ² Ü
¸ ÆÜ ² ØÆÎ ² ÚÆ äðà´È º ØÜ º ðÀ

Ü íÇñí áõÙ ¿ ÐÐ ¶ ² ² ÃÕÃ ³ ÏÇó ³ Ý¹ ³ Ù
² Ï»ùë ³ Ý¹ñ ¶ »áñ·ÇÇ ´ ³ · ¹á¨Ç
ÍÝÝ¹Û ³ Ý 75- ³ ÙÛ ³ ÏÇÝ

VI Ùç ³ ½· ³ ÛÇÝ ·Ç ï ³ ÅáÕá í
ë»å ï »Ùµ»ñÇ 21-26, 2008Ã.
¶áñÇë-ê ï »÷ ³ Ý ³ Ï»ñ ï

ÐÐ ¶ ² ² Ø»Ë ³ ÝÇÏ ³ ÛÇ ÇÝë ï Ç ï áõ ï
º ñ¨ ³ Ý – 2008

Сопредседатели оргкомитета конференции:

академик РАН Григорян С.С.,
академик НАН Армении Агаловян Л.А.,
д.ф.м.н., профессор Кукуджанов В.Н.,
д.ф.м.н. Акопян В.Н.,
д.ф.м.н. Сафарян Ю.С.

Заместители сопредседателей:

д.ф.м.н., профессор Ванцян А.А.,
д.ф.м.н., профессор Мартиросян А.Н.,
к.ф.м.н.Товмасян А.Б.

Ученые секретари конференции:

к.ф.м.н. Гулгазарян Л.Г., к.ф.м.н. Манукян Г.А.,
Овсепян Д.Х., Карапетян Д.Р.

Ответственный редактор: д.т.н. Симонян А.М.

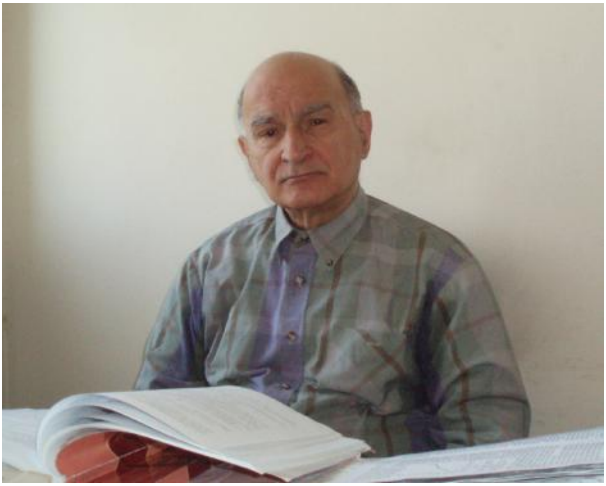
Корректор: Авдалян Ж.А.

Редколлегия: д.ф.м.н., профессор Мхитарян С.М.,
д.ф.м.н., профессор Даноян З.Н.,
д.ф.м.н., профессор Хачатрян А.М.,
к.ф.м.н., профессор Белубекян М.В.,
к.ф.м.н. Саакян А.В.

Оргкомитет конференции:

Абрамян А.Н., Аветисян А.С., Акопян М.А., Акопян Ю.Р., Арутюнян Р.А., Аэро Э.Л., Багдасарян Г.Е., Багдоев А.Г., Белубекян М.В., Восканян Н.М., Гулгазарян Г.Р., Даноян З.Н., Даштоян Л.Л., Мартиросян А.Н., Мхитарян С.М., Никитин Н.С., Саакян А.В, Саркисян В.С., Саркисян С.В., Сейранян А.П., Симонян А.М., Суворова Ю.В., Хачатрян А.М., Хачатрян В.Р., Хачатрян С.С., Цатурян А.К., Шавлакадзе Н., Шекян Г.Г.

БАГДОЕВ
Александр Георгиевич



Крупному ученому-механику, член-корреспонденту НАН Армении Александру Георгиевичу Багдоеву исполнилось 75 лет!

Александр Георгиевич Багдоев родился 9-ого июля 1933 года в городе Тбилиси. В школьные годы он увлекался историей, языками, писал стихи. Переехав в Ереван начал увлекаться математикой и физикой. Закончив школу в 1950г., он поступил на механико-математический факультет МГУ. В 1955 году Александр Георгиевич поступает в аспирантуру на кафедре ”Волновой и газовой динамики”, где заведующим кафедрой был академик Х.А.Рахматулин, а руководителем диссертации был профессор той же кафедры А.Я.Сагомонян. В 1958 году в МГУ состоялась защита кандидатской диссертации, которая была посвящена решению задач проникания тел или ударных волн в сжимаемую жидкость.

После защиты кандидатской диссертации воспитанник мех-мата МГУ возвращается в Ереван и начинает свою трудовую деятельность в Институте математики и механики (с 1971 Институт Механики) Академии Наук Армении, где он до настоящего времени и работает. В 1972 году в МГУ Александр Георгиевич защищает докторскую диссертацию, которая была посвящена вопросам определения особенностей фронтов линейных и нелинейных волн. В 2000 году Александр Георгиевич избирается членом-корреспондентом НАН Армении.

Научные интересы Александра Георгиевича охватывают обширный круг вопросов механики деформируемого твердого тела. Он является автором трех монографий и более чем 350 статей.

Своим основным достижением в механике Алекандр Георгиевич считает обобщение метода Пуанкаре–Лайтхилла–Го на двумерные волновые задачи дифракции и каустики.

В последние годы А.Г. Багдоев вместе со своими учениками изучает линейные и нелинейные вопросы развития аналитических и численных методов при изучении колебаний тонких пластин и оболочек при наличии электромагнитных полей, а также при решении смешанных граничных нестационарных задач сплошной среды. Александр Георгиевич занимается также вопросами практической философии и этики. Кроме лирических стихов детского периода, в зрелом возрасте им написаны 3 оды историко-философского содержания, отражающие характерные для мыслящих личностей конца 20-го и 21-го веков устремления к созданию образа творческой во всем личности,. Результаты этих исследований опубликованы в популярной и научной литературе.

Следуя примеру Лейбница, Александр Георгиевич старается сблизить всевозможные области естественных и гуманитарных наук путем теоретического исследования детерминированных и стохастических процесссов в экономике, физике, социологии, биологии, сейсмологии, в сочетании с экспериментальными временными зависимостями.

Педагогическая деятельность крупного ученого обширна. Под его руководством защитили свои диссертации 14 кандидатов и 3 доктора наук. Александр Георгиевич долгие годы преподавал в разных вузах Армении. В последнее время его педагогическая деятельность тесно связана с Горисским Государственным Университетом, где он создал своебразную научную школу механиков. Особо следует отметить тот факт, что научная деятельность Александра Георгиевича отличается широким диапазоном интересов, крайне плодотворна и многопланова, а в сочетании с его высокими человеческими качествами является примером подражания для молодых ученых.

Сердечно поздравляем Александра Георгиевича Багдоева с юбилеем! Желаем крепкого здоровья, новых творческих достижений, успехов в установлении здоровых отношений между личностями, глашатаем которого он является.

ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ДВИЖЕНИЯ ДИСЛОКАЦИЙ В УСЛОВИЯХ ХОЛОДНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Авакян Р.М., Аракелян М.М., Назарян Э.А., Чубарян Э.В.

Ереван, Армения

Известно, что в процессе холодной пластической деформации происходит деформационное упрочнение, вследствие чего изменяются реологические свойства деформируемых сред. Одной из основных проблем динамики деформируемых сред является установление характера накопления и увеличения плотности дислокаций в результате холодной пластической деформации. Экспериментально установлено, что при деформировании сдвиги на поверхности деформируемых образцов на несколько порядков больше величины межатомного расстояния. Наличие в деформируемой среде перед началом холодной деформации дислокаций не объясняет это явление. Поэтому принимается, что в процессе холодной деформации образуется большое число новых дислокаций. Существующие модели возникновения и размножения дислокаций в процессе холодной пластической деформации не учитывают взаимодействия дислокаций.

Настоящая работа посвящена исследованию взаимодействия двух аналогичных дислокаций Френкеля-Конторовой при их совместном движении в одной плоскости скольжения с одинаковыми скоростями. Векторы Бюргерса дислокаций параллельны друг другу. Для конкретности рассматриваются дислокации одного знака, между которыми, как известно, действуют силы отталкивания. В рассматриваемой модели одна из дислокаций заменяется ее упругим полем и рассматривается воздействие этого поля на соседнюю дислокацию. Дислокация, которая заменяется упругим полем, находится в начальный момент в начале координат. Рассматривается воздействие этой дислокации на единицу длины второй дислокации, имеющей координаты x, y. Как показали Френкель-Конторова, уравнение, описывающее движение дислокации, есть уравнение синус-Гордона. [1] С учетом поля соседней дислокации оно принимает вид:

$$m\ddot{y}_n = -f_0 \sin(\frac{2\pi y_n}{a}) + k(y_{n+1} - y_n) - k(y_n - y_{n-1}) + F$$

где y_n – смещение n-го атома от положения равновесия, m – масса атома, $f = f_0 \sin(\frac{2\pi x}{a})$ – периодическая сила, действующая со стороны подложки, F – сила, действующая со стороны соседней дислокации. После элементарных преобразований, измеряя отклонение атома от положения равновесия в угловых единицах, согласно $2\pi\dfrac{y_n}{a}=\varphi+\xi_n$ получим нелинейное дифференциальное уравнение синус-Гордона в виде:

$$\varphi_{tt}-c_0^2\varphi_{xx}+\omega_0^2\sin\varphi-\frac{2\pi F}{ma}=0, \qquad (1)$$

где c_0 – скорость звука , $\omega_0^2\equiv\dfrac{2\pi f_0}{ma}$ – характерная частота.

Как показано в [2], в областях, далеких от ядра, напряжения движущейся дислокации Френкеля-Конторовой аналогичны напряжениям движущейся дислокации Пайерлса. Тогда в плоскости скольжения $(\sigma_{xx}=0;\ \sigma_{yy}=0;$ $\sigma_{zz}=0; y=0)$ получим:

$$(\sigma_{xy})_{y=0}=\frac{\mu b c_t^2}{2\pi(x-vt)v^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c_t^2}}}\left[\left(2-\frac{v^2}{c_t^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{v^2}{c_t^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c_l^2}}\right] \qquad (2)$$

где μ – модуль сдвига, c_t , c_l – скорости распространения поперечных и продольных звуковых волн, соответственно, σ_{xy} – компонента касательного сдвигового напряжения, b – вектор Бюргерса. Переходя к силе на единицу длины дислокации, согласно $F_x=b\sigma_{xy}$, после элементарных преобразований получим:

$$F=\frac{\mu b^2c_t^2\left[\left(2-\dfrac{v^2}{c_t^2}\right)^2-4\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c_t^2}}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c_l^2}}\right]}{\omega^2 ma(x-vt)v^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c_t^2}}} \qquad (3)$$

Переходя к новым переменным, согласно следующим преобразованиям: $x=\dfrac{v_0}{\omega}\tilde{x},\ t=\dfrac{\tilde{t}}{\omega}$, и обозначая для удобства $\tilde{x}\to x, \tilde{t}\to t, \gamma=\dfrac{\mu b^2c_t^2}{\omega ma}$, получим уравнение синус-Гордона (1) в виде (x и t – теперь безразмерные переменные):

$$\ddot{\varphi}=-\sin\varphi+\varphi''+\gamma\frac{\left[\left(2-\dfrac{v^2}{c_t^2}\right)^2-4\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c_t^2}}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c_l^2}}\right]}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c_t^2}}(c_tx-vt)v^2} \qquad (4)$$

Все константы взяты для меди. Нами выбрана медь, так как движение дислокаций в меди (ГЦК структура) начинается при очень низких нагрузках (при 298К составляет $8*10^2$ см/с при $\pm \approx 10^6$дн/см^2) и может меняться в зависимости от напряжения в широком интервале скоростей.

Рассмотрим, как меняется взаимодействие между дислокациями в зависимости от скорости их движения.

Как известно, при возрастании скорости область сдвиговых напряжений сжимается в направлении оси x. Нами моделированы контуры постоянных напряжений для движущейся с различными скоростями краевой дислокации .

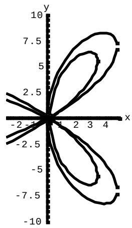


Рис.1. Контуры постоянных напряжений движущейся краевой дислокации.

Как видно из рисунка, уже при относительно малом увеличении скорости (на рис. от 10^{-2} см/с до 10^{-1} см/с) область постоянных сдвиговых напряжений сжимается в направлении x. Этот эффект должен привести к тому, что при увеличении скорости взаимодействие между дислокациями уменьшится.

Проведем численный эксперимент для некоторого интервала возможных скоростей . Используя (5) и выбирая начальные условия в новых переменных для относительно малых скоростей (~10^{-3}см/с) получаем:

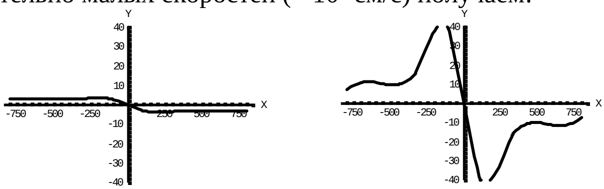


Рис.2 .Поле смещений дислокации, находящейся под воздействием соседней дислокации, для разных моментов времени (малые скорости)

На рис.2 показано, как изменяется поле смещений дислокации, находящейся под воздействием соседней дислокации, с течением времени. Как видно из рисунков, под действием поля соседней дислокации поле данной дислокации искажается уже в течение небольшого интервала времени, то есть взаимодействие между дислокациями существенно.

Дальнейший эксперимент показал что при увеличении скорости взаимодействие ослабляется.

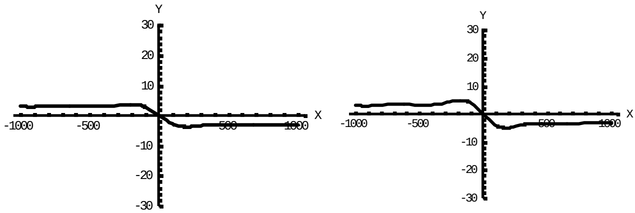


Рис.3. Поле смещений дислокации, находящейся под воздействием соседней дислокации, для разных моментов времени (большие скорости)

На рис.3 представлено поле смещений дислокации, находящейся в поле соседней дислокации при скорости их движения ~10^5 см/с. Как видно из рисунков, через тот же интервал времени, что и представленный на рис.2, поле смещений данной дислокации почти не искажается.

Как показал численный эксперимент, в пределе, когда скорость дислокаций стремится к скорости звука, взаимодействие между ними стремится к нулю.

Нами исследована также область скоростей $2*10^5$ см/с – $2.45*10^5$ см/с.

Как показал численный эксперимент, в этом интервале скоростей область сдвиговых напряжений сжимается по направлению к оси x и, начиная с некоторого значения, меняет знак (рис.4).

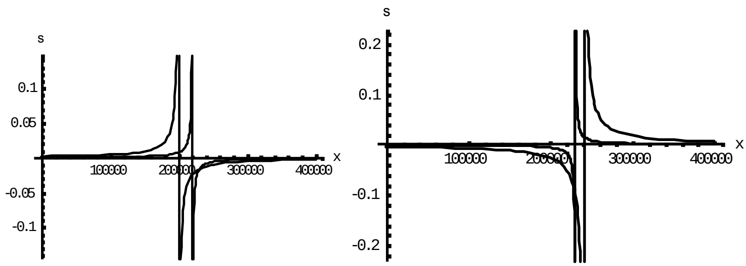


Рис.4. Зависимости сдвиговых напряжений от координаты.

Этому соответствует график решения уравнения (5) в этом интервале скоростей. Как видно из рис. 5, поле смещений дислокации при возрастании скорости также сначала сжимается по направлению к оси x, а затем меняет знак.

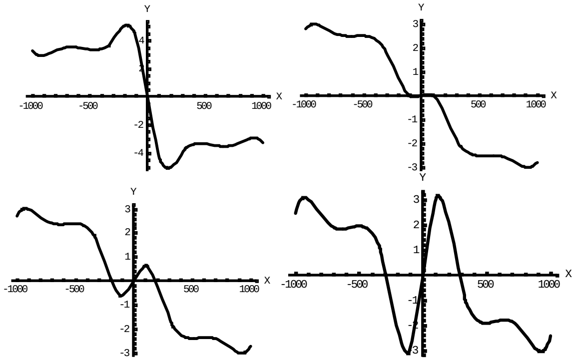


Рис.5.Поле смещений дислокации в исследованной области скоростей.

Представляет интерес рассмотреть влияние периодичности решетки реальных кристаллов на характер и скорость движения дислокации. Впервые задача о движении дислокаций в поле периодического потенциала была рассмотрена Пайерлсом. Напряжением Пайерлса называют напряжение, которое требуется для преодоления дислокацией потенциального барьера решетки кристалла. Был проведен численный эксперимент с использованием невозмущенного уравнения синус-Гордона с различными значениями потенциала Пайерлса.

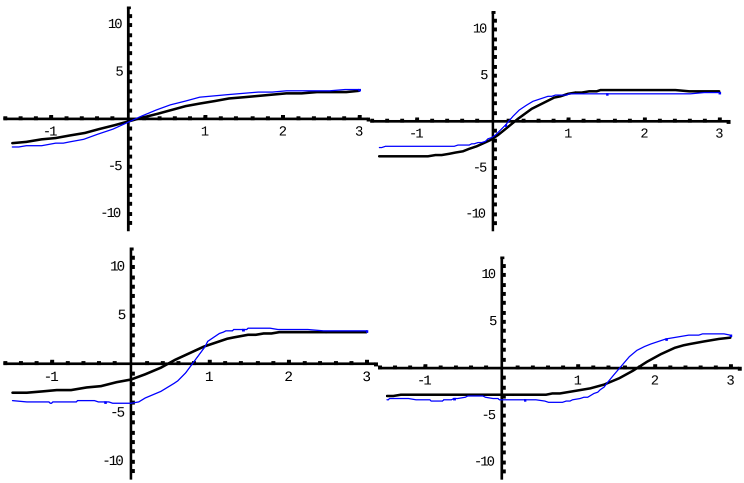


Рис.6. Эволюция распространиния дислокации в кристаллах с низким барьером Пайерлса (жирная линия) и высоким барьером Пайерлса.

На рис. 6 показаны эволюция распространиния дислокации в кристаллах с низким барьером Пайерлса (жирная линия) и высоким барьером Пайерлса (10^{-4}« -10^{2}«) [2] для различных моментов времени.

При низких барьерах движение поступательное. При увеличении высоты барьера характер движения изменяется. В кристаллах с высоким барьером дислокация совершает как-бы колебательное движение в направлении скольжения. Происходит искажение хвостовых областей дислокаций. Ширина дислокации периодически меняется, оставаясь все время меньше, чем в кристаллах с низким барьером. При учете силы трения для этого случая движение дислокаций замедляется, амплитуда колебаний в направлении скольжения значительно уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солитоны в действии. /Под редакцией К. Лонгрена, Э.Скотта.М., 1981.
2. Дж.Хирт, И. Лоте.Теория дислокаций. М.: 1972.

Сведения об авторах:

Ереванский государственный университет
Адрес: ул. Алек Манукян, 1, Ереван

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ВЫЯВЛЕНИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЭМУЛЬСИОННЫХ СМЕСЕЙ

Аванесян В.Г.

Степанакерт, НКР

Напряженное состояние в рассматриваемой точке вязкой жидкости характеризуется девятью компонентами напряжений.

Обобщенный закон Ньютона, устанавливающий дифференциальную связь между этими компонентами напряжений и скоростями деформации частиц жидкости, в тензорной форме имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} \sigma_{xx}\sigma_{xy}\sigma_{xz} \\ \sigma_{yx}\sigma_{yy}\sigma_{yz} \\ \sigma_{zx}\sigma_{zy}\sigma_{zz} \end{Vmatrix} = \left(-\sigma + \mu \cdot \mathrm{div}\bar{V}\right) \begin{Vmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{Vmatrix} + 2\eta \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx}\varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx}\varepsilon_{zy}\varepsilon_{zz} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

или

$$T_{\text{íàï.}} = (\sigma + \mu \cdot \mathrm{div}\bar{V}) \cdot T_{\text{åä.}} + 2\eta \cdot T_{\text{ñê.äåô..}} \tag{2}$$

где $T_{\text{íàï.}}$ – тензор напряжений; $\bar{V}$ – вектор скорости рассматриваемой точки; $T_{\text{åä.}}$ – единичный; $T_{\text{ñê.äåô.}}$ – тензор скоростей деформации, который можно выразить

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x};\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right);\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right);\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{gathered} \tag{3}$$

На основании обощенного закона Ньютона (1) имеем

$$\begin{gathered} \sigma_{xx} = -\sigma + \mu \cdot \mathrm{div}\bar{V} + 2\eta \cdot \varepsilon_{xx};\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\eta \cdot \varepsilon_{xy};\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\eta \cdot \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yy} = -\sigma + \mu \cdot \mathrm{div}\bar{V} + 2\eta \cdot \varepsilon_{yy};\ \ \sigma_{zz} = -\sigma + \mu \cdot \mathrm{div}\bar{V} + 2\eta \cdot \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\eta \cdot \varepsilon_{yz} \end{gathered} \tag{4}$$

В равенствах (4) содержатся два коэффициента вязкости η и μ: η непосредственно связан со скоростью деформации сдвига ε, а μ – со скоростью объемной деформации частиц. Последнее условие необходимо учесть при исследовании движения жидкости или газа, когда сжимаемость их более значительна. Обобщенный закон Ньютона оказывается недостаточным для изучения напряженного состояния ряда реальных вязкопластичных сред в определенных условиях. Эти жидкости приводятся в движение после преодоления касательного напряжения деформации сдвига.

Компонент напряженного состояния вязкопластичной среды равен сумме двух компонентов, вызванных вязкими и пластическими свойствами среды. На основании этого получаем уравнение, связывающее компоненты напряжений и скорости деформации.

Для несжимаемой среды напряженное состояние, вызванное вязкостью, определяется уравнением, которое в тензорной форме имеет вид

$$\text{Ä}' = 2\eta \cdot T_{\text{ñê.äåô.}} \tag{5}$$

Напряженное состояние, вызванное пластичностью несжимаемой среды, по теории Сен-Венана-Мизеса выражается уравнением

$$\text{Ä}'' = \frac{2\tau_0}{a'} \cdot T_{\text{ñê.äåô.}} \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6) для вязкопластичной среды, получим девиатор полного напряжения

$$\text{Ä} = 2 \cdot \left(\eta + \frac{\tau_0}{a_1}\right) \cdot T_{\text{ñê.äåô.}} \tag{7}$$

где τ_0 – предельное напряжение сдвига; a_1 – интенсивность скоростей деформации сдвига. Выражение (7) может быть и таким

$$\text{Д}= \begin{Vmatrix} \sigma_{xx}+\sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}+\sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zy}+\sigma \end{Vmatrix} \tag{8}$$

$$a_1 = \pm\sqrt{2\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2} \tag{9}$$

Знак скорости деформации сдвига при рещении конкретной задачи становится известным, а знак a_1 выбирается так, чтобы он был положительной величиной.

Для несжимаемой вязкопластичной среды из (6) следует, что компоненты напряжений в прямоугольных декартовых координатах должны выражаться уравнениями:

$$\sigma_{xx} = -\sigma + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{a_1}\right)\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{a_1}\right)\varepsilon_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{a_1}\right)\varepsilon_{yz} \qquad (10)$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{a_1}\right)\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = -\sigma + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{a_1}\right)\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = -\sigma + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{a_1}\right)\varepsilon_{zz}$$

Направление максимального касательного напряжения в каждой точке в случае плоской деформации совпадает с направлением максимальной скорости сдвига (10), т.е.

$$\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\sigma_{xy}} = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xy}} \qquad (11)$$

Применив принцип Д’Аламбера к произвольному объему для вывода уравнения течения сплошной среды, из равенства нулю геометрической суммы сил – поверхностных, инерции и массовых – получим следующее выражение:

$$\int_s \sigma_n dS + \int_v (\overline{F} - \overline{a})\rho \cdot dV = 0 \qquad (12)$$

где ρ – плотность среды; V – произвольный объем, взятый внутри исследуемой среды с площадью поверхности; F – вектор массовой силы, отнесенный к единице массы; $\overline{a}$ – вектор ускорения частицы среды; n – направление внешней нормали к поверхности; σ_n – вектор напряжения поверхностной силы, который можно выразить через свои проекции

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos(n, x) + \sigma_y \cdot \cos(n, y) + \sigma_z \cdot \cos(n, z) \qquad (13)$$

Поверхностные интегралы выразим через объемные

$$\int_s \sigma_x \cos(\bar{n}, x) dS = \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dV; \; \int_s \overline{\sigma}_y \cdot \cos(n, y) dS = \int_v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot dV$$

$$\int_s \sigma_z \cdot \cos(n, z) \cdot dS = \int_v \frac{\partial \sigma_z}{z} \cdot dV \qquad (14)$$

Выражения (13) и (14) последовательно подставим в (12)

$$\int_v \left[(\bar{F} - \bar{a})\rho + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right] \cdot dV = 0 \tag{15}$$

Равенство (15) возможно в том случае, когда подынтегральная функция равна нулю, т.е.

$$\bar{F} - \bar{a} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \right) = 0 \tag{16}$$

Из (16) можем получить уравнения движения сплошной среды (если его спроектировать на оси прямоугольной декартовой системы координат) в компонентах напряжений:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial V_x}{\partial t} &= \rho \cdot f_x - \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
\rho\frac{\partial V_y}{\partial t} &= \rho \cdot f_y - \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
\rho\frac{\partial V_z}{\partial t} &= \rho \cdot f_z - \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$V_x = \frac{\partial x}{\partial t};\ V_y = \frac{\partial y}{\partial t};\ V_z = \frac{\partial z}{\partial t};\ \tau_{xx} = \sigma + \sigma_{xx}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{xy};\ \tau_{xz} = \sigma_{xz};\ \tau_{yy} = \sigma + \sigma_{yy};\ \tau_{yz} = \sigma_{yz};\ \tau_{zz} = \sigma + \sigma_{zz}$$

$\sigma_{xx};\sigma_{xy};\sigma_{xz};\sigma_{yy};\sigma_{yz};\sigma_{zz}$ – проекции поверхностных напряжений, которые определяются для вязкой среды из (4) при $\mathrm{div}\bar{V} = 0$, а для вязкопластичной– из (10); σ – среднее нормальное давление или напряжение.

Рекомендуется учесть при использовании выражения (4) и (10) зависимости ньютоновской и пластической вязкости и предельного касательного напряжения деформации сдвига от температуры (для неизотермического процесса), так как они очень чувствительны к ней.

<u>**Сведения об авторе:**</u>

Аванесян В.Г.
Доктор технических наук, профессор
Кафедра инженерии АрГУ

TIME-OPTIMAL CONTROLLED SEARCH OF A IMMOBILE OBJECT

Avetisyan V.V. (*Armenia*), Mojtaba Ghanbari (*Iran*)

1. Statement of the problem. We consider a system of controlled mobile point object X and immobile point object Y

$$X: \quad \dot{x} = \mathrm{v}, \quad x(t) \in D; \quad \mathrm{v}(t) \in V; \quad t \ge t_0 \qquad Y: \quad y(t) \equiv y^0 \in \tilde{D}; \; t \ge t_0$$
$$D = \{x \in R^3 : \; 0 < x_i \le a_i \le d, \; i = 1,2,3\} \quad \tilde{D} = \{y \in R^2 : \; 0 < y_i \le a_i \le d, \; i = 1,2\}$$
$$V = \{\mathrm{v} \in R^3 : \; |\mathrm{v}_i| \le V_i, \; i = 1,2,3\} \tag{1}$$

Here x is the state vector of the object X ; v – vector of control parameters. The information about object y^0 can be improved during the motion by means of observations, described by moving informational set $G = G(x(t))$ depending upon the current the state vector $x(t)$, while

$$G(x(t)) = G(\tilde{x}(t), x_3(t), C) = \{\tilde{\xi} \in R^2 : \; |\tilde{\xi} - \tilde{x}| \le h/2 = Cx_3, \quad \tilde{x} = (x_1, x_2) \in \tilde{D}, \; C > 0\} \tag{2}$$

The object Y is considered to be observed (to be precisely known) at the first moment $t_* \ge t_0$, when the observation condition holds:

$$y^0 \in G(x^*), \qquad x^* = x(t_*) \tag{3}$$

According to available information the class of the pairs of open-loop control functions of the type[1]: $\mathrm{v} = \{\mathrm{v}_0(x^0, t_0; t), \, \mathrm{v}_1(x^*, t_*, y^0, t)\}$ is considered as the set of admissible controls. Here $x^0, t_0; x^*, t_*, y^0$ are parameters. On the interval $[t_0, t_*]$ the search control v_0 is used, which depends also upon set-parameters D, G . After the observation moment t_*, when the vector y^0 becomes known, a point-to-point control v_1 is used on $[t_*, T]$, which brings the state vector from x^* to y^0 . Another requirement to admissible control is to produce finite moments t_*, T . Let the class of admissible controls be nonempty. Assume that the first coordinates $\tilde{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ $0 \le x_1^0, x_2^0 \le a_1, a_2$ and the parameters a_1, a_2 (1), C (2) are given. Then to each value of vertical coordinate x_3^0, $0 \le x_3^0 \le a_3$ and each couple $\mathrm{v} = \{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1\}$ and each $y^0 \in \tilde{D}$ unique trajectory $x(t)$, $t_0 \le t \le T$ and the time of motion $T(x_3^0, \mathrm{v}) = t^*(x_3^0, \mathrm{v}_0) + t^1(x^*(x_3^0, \mathrm{v}_0), y^0, \mathrm{v}_1)$ correspond. Now the minimax duration of the process $T_* = T - t_0$ and guaranteeing control v^*

and the initial diameter of the circle of detection $h_0^* = 2C\left(x_3^0\right)^*$ are defined from:

$$T_* = \min_{0<h_0\le h_{\max}} \min_{\mathrm{v}=\{\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_1\}} \max_{y^0\in\tilde{D}} T(h_0, y^0, \mathrm{v}) \qquad (4)$$

2. Control algorithm. Consider two space broken lines L_1 and L_2 coming from the starting point $x_i^0 = (0,0,x_3^{0(i)})$, $0 < x_3^{0(i)} \le 1$, $i = 1, 2$, who's projections L_1' and L_2' on the rectangular bottom $\tilde{D}$ in the plane Ox_1x_2 are shown in fig.1a and 1b, respectively.

Remark. The projection of the trajectory of object X (under the control v_0) on the rectangular bed $\tilde{D}$ is covering [2], then the time t_* at which the desired object Y is detected at the endpoint of this trajectory ($y^0 = \{(a_1,0),(0,a_2),(a_1,a_2)\}$) is called a guaranteed search time. Moving along the broken line L_i, the projection of the manipulator gripper scans the rectangle $\tilde{D}$ along the broken line L_i'.

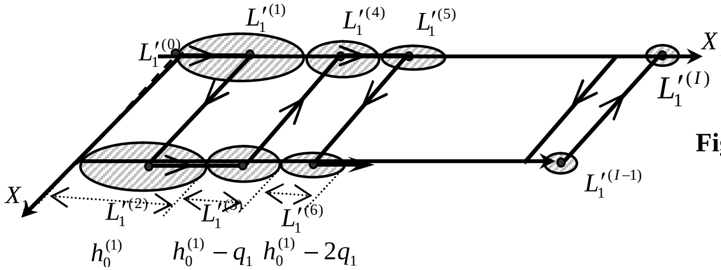


Fig. 1a

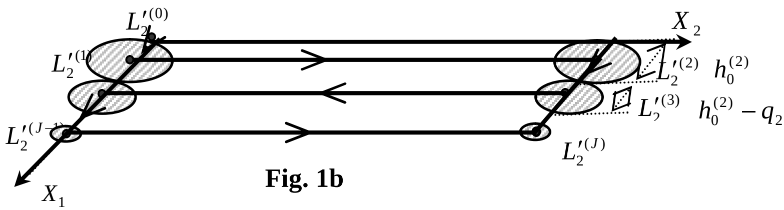


Fig. 1b

Assume that the lengths of the sections of the broken lines that lie in the lateral sides of the rectangle decrease according to the arithmetic progression law with a constant $0 < q_i < h_0^{(i)}$, where $h_0^{(i)} = 2Cx_3^{0(i)}, 0 < h_0^{(i)} \le \min\{a_1, a_2\}$ is the initial diameter of the circle of detection. Obviously that

$$a_2 = (2h_0^{(1)} - (n_1 - 1)\cdot q_1)n_1/2, \quad a_1 = (2h_0^{(2)} - (n_2 - 1)\cdot q_2)n_2/2 \qquad (5)$$

where n_i is an integer that specifies the number of described sections or steps of scanning. Then, the controls under which the object X moves along the trajectories $L_i\left(i=1,2\right)$ are given as follows:

$$\mathrm{v}_{L_1}=\begin{cases}\mathrm{v}_1=0,\quad \mathrm{v}_2=V_2,\quad \mathrm{v}_3=0, & t_0\le t\le t_1^{(1)}\\ \mathrm{v}_1=V_1,\quad \mathrm{v}_2=0,\quad \mathrm{v}_3=0 & t_{4r+1}^{(1)}\le t\le t_{4r+2}^{(1)},\ r=0,1,...,[(n_1-1)/2]\\ \mathrm{v}_1=-V_1,\quad \mathrm{v}_2=0,\quad \mathrm{v}_3=0 & t_{4r+3}^{(1)}\le t\le t_{4r+4}^{(1)},\ r=0,1,...,[(n_1-1)/2]\\ \mathrm{v}_1=0,\ \mathrm{v}_2=(2h_0^{(1)}-(2r+1)q_1CV_3)/q_1,\quad \mathrm{v}_3=V_3, & t_{2r}^{(1)}\le t\le t_{2r+1}^{(1)},\ r=0,1,...n_1-1\\ \mathrm{v}_1=0,\quad \mathrm{v}_2=CV_3,\quad \mathrm{v}_3=V_3 & t_{2r+2}^{(1)}\le t\le t_{2r+3}^{(1)},\ r=n_1-1\end{cases}\tag{6}$$

$$\mathrm{v}_{L_2}=\begin{cases}\mathrm{v}_1=V_1\quad \mathrm{v}_2=0\quad \mathrm{v}_3=0 & t_0\le t\le t_1^{(2)}\\ \mathrm{v}_1=0\quad \mathrm{v}_2=V_2\quad \mathrm{v}_3=0 & t_{4r+1}^{(2)}\le t\le t_{4r+2}^{(2)},\ r=0,1,...,[(n_2-1)/2]\\ \mathrm{v}_1=0\quad \mathrm{v}_2=-V_2\quad \mathrm{v}_3=0 & t_{4r+3}^{(2)}\le t\le t_{4r+4}^{(2)},\ r=0,1,...,[(n_2-1)/2]\\ \mathrm{v}_1=(2h_0^{(2)}-(2r+1)q_2CV_3)/q_2,\quad \mathrm{v}_2=0,\ \mathrm{v}_3=V_3, & t_{2r}^{(2)}\le t\le t_{2r+1}^{(2)},\ r=0,1,...n_2-1\\ \mathrm{v}_1=CV_3,\ \mathrm{v}_2=0,\quad \mathrm{v}_3=V_3, & t_{2r+2}^{(2)}\le t\le t_{2r+3}^{(2)},\quad r=n_2-1\end{cases}\tag{7}$$

The total time the motion of the X along the trajectories $L_i, i=1,2$ is computed as

$$T_{L_1}\left(h_0^{(1)},n_1,q_1\right)=t_{L_1}^{*}+t_{L_1}^{1},\qquad T_{L_2}\left(h_0^{(2)},n_2,q_2\right)=t_{L_2}^{*}+t_{L_2}^{1}\tag{8}$$

$$t_{L_1}^{*}\left(h_0^{(1)}n_1,q_1\right)=h_0^{(1)}\big/2V_2+n_1a_1/V_1+\left(n_1-1\right)q_1\big/2CV_3$$

$$t_{L_1}^{1}\left(h_0^{(1)},n_1,q_1\right)=h_{n_1}^{(1)}\big/2CV_3=(h_0^{(1)}-\left(n_1-1\right)q_1)/2CV_3$$

$$t_{L_2}^{*}\left(h_0^{(2)},n_2,q_2\right)=h_0^{(2)}\big/2V_1+n_2a_2/V_2+\left(n_2-1\right)q_2\big/2CV_3$$

$$t_{L_2}^{1}\left(h_0^{(2)},n_2,q_2\right)=h_{n_2}^{(2)}\big/2CV_3=(h_0^{(2)}-\left(n_2-1\right)q_2)/2CV_3$$

Using the relations

$$q_1=\left(2Ch_0^{(1)}V_3\right)\big/\left(V_2+CV_3\right),\qquad q_2=\left(2Ch_0^{(2)}V_3\right)\big/\left(V_1+CV_3\right)\tag{9}$$

for T_{L_1}, T_{L_2} from (8), (9) we obtained respectively

$$T_{L_1}\left(h_0^{(1)},n_1\right)=h_0^{(1)}(V_2+CV_3)/2CV_2V_3+n_1a_1/V_1\tag{10}$$

$$T_{L_2}\left(h_0^{(2)},n_2\right)=h_0^{(2)}(V_1+CV_3)/2CV_1V_3+n_2a_2/V_2\tag{11}$$

3. Optimal choice of the control from two constructed controls. We come to the solution of the problem (4). Taking into account the *Remark* and (10), (11), we write problem (4) in the form

$$T^{*}=\min\left\{\min_{0<h_0^{(1)}\le h_{\max}}\ \min_{n_1\in Z}T_{L_1}(h_0^{(1)},n_1),\quad \min_{0<h_0^{(2)}\le h_{\max}}\ \min_{n_2\in Z}T_{L_2}(h_0^{(2)},n_2)\right\}\tag{12}$$

At first for given a_1,a_2,V_1,V_2,V_3,C, using (9), we resolve (5) for $n_i,\ i=1,2$

$$n_1^{\pm}(h_0^{(1)})=(V_2+2CV_3)/2CV_3\pm\sqrt{\Delta_1}>0\tag{13}$$

$$\Delta_1=((V_2+2CV_3)/2CV_3)^2-(a_2\left(1+CV_3\right)/CV_3)(h_0^{(1)})^{-1}$$

$$n_2^{\pm}(h_0^{(2)})=(V_1+2CV_3)/2CV_3\pm\sqrt{\Delta_2}>0\tag{14}$$

$$\Delta_2 = ((V_1 + 2CV_3)/2CV_3)^2 - (a_1(1+CV_3)/CV_3)(h_0^{(2)})^{-1}$$

In (13), (14) $\Delta_i \geq 0,\ i = 1,2$ if $\frac{¥_i}{\ \ _i^2} \leq h_0^{(i)} \leq h_{\max}$, $_1 = \frac{V_2 + 2CV_3}{2CV_3}$,

$¥_1 = \frac{a_2(1+CV_3)}{CV_3}$, $_2 = \frac{V_1 + 2CV_3}{2CV_3}$, $¥_2 = \frac{a_1(1+CV_3)}{CV_3}$. Using the relations (13), (14) for $n_{i_1}^-(h_0^{(i)})$, we find the optimal $h_0^{(1)*}, h_0^{(2)*}$ from

$$T_{L_i}^-(a_1, a_2, V_1, V_2, V_3, C, h_0^{(i)}) \to \min_{\frac{¥_i}{\ _i^2} \leq h_0^{(i)} \leq h_{\max}} \tag{15}$$

$$T_{L_1}^- = h_0^{(1)}(V_2 + CV_3)/2CV_2V_3 + a_1((V_2 + CV_3)/2CV_1V_3 - \sqrt{\Delta_1}/V_1) \tag{16}$$

$$T_{L_i}^- = h_0^{(2)}(V_1 + CV_3)/2CV_1V_3 + a_2((V_2 + CV_3)/2CV_2V_3 - \sqrt{\Delta_2}/V_2) \tag{17}$$

The optimal values $h_0^{(1)*}$ and $h_0^{(2)*}$ in (15) are found as follows:

$$h_0^{(i)*} = \begin{cases} h_0^{(i)-}, & if \quad T_{L_i}^-(h_0^{(i)-}) = \min T_{L_i}^-(h_0^{(i)}),\ ¥_i/\ _i^2 \leq h_0^{(i)-} \leq h_{\max} \\ ¥_i/\ _i^2, & if \quad T_{L_i}^-(h_0^{(i)-}) = \min T_{L_i}^-(h_0^{(i)}),\ 0 < h_0^{(i)-} < ¥_i/\ _i^2 \end{cases},\quad i = 1,2 \tag{18}$$

After use numerical methods and computer programming (we have used MAPLE 10) the values $h_0^{(1)*}, h_0^{(2)*}$ are found from (15)-(18). Then with $h_0^{(1)*}, h_0^{(2)*}$, (13) and (14) are calculated n_1, n_2, but n_1^*, n_2^* are selected from following:

$$n_i^* = \begin{cases} n_i^-(h_0^{(i)*}), & if \ n_i^-(h_0^{(i)*}) = [n_i^-(h_0^{(i)*})] \\ [n_i^-(h_0^{(i)*})], & if \ n_i^-(h_0^{(i)*}) \neq [n_i^-(h_0^{(i)*})] \end{cases},\quad i = 1,2 \tag{19}$$

Now q_1^*, q_2^* are calculated with (5). After that, from (12), we fined the time T^*, optimal control v^* and optimal parameters h_0^*, n^*, q^* from the followig conditions:

$$T^*(a_1,a_2) = \min\{T_{L_1}^*(a_1,a_2),\ T_{L_2}^*(a_1,a_2)\},\quad T_{L_i}^*(a_1,a_2) = T_{L_i}^-(a_1,a_2,h_0^{(i)*},n_i^*) \tag{20}$$

$$\mathrm{v}^*, h_0^*, n^*, q^* = \begin{cases} \mathrm{v}_{L_1}^*, h_0^{(1)*}, n_1^*, q_1^*, & if \quad T^* = T_{L_1}^* = \min(T_{L_1}^*, T_{L_2}^*) \\ \mathrm{v}_{L_2}^*, h_0^{(2)*}, n_2^*, q_2^*, & if \quad T^* = T_{L_2}^* = \min(T_{L_1}^*, T_{L_2}^*) \end{cases} \tag{21}$$

4. Example. Suppose that we have a three-link electromechanical manipulator operating in the Cartesian coordinate system whose links move relative to each other in three mutually perpendicular directions. Under some assumptions [3,4], motion control of the manipulator gripper $X(x_1, x_2, x_3)$ in each coordinate x_i is kinematic, and the motion equations have the following simple form: $p_i k_i \dot{x}_i = u_i$, $|u_i| \leq U_i$, $i = 1,2,3$. Here u_i the control voltage of the i-th motor, U_i is the maximum voltage of the i-th motor, k_i is the parameter of a motor, p_i

is a dimensional transmission ratio that connects the angular velocity of the armature of the i-th motor and the linear velocity of the corresponding link $\mu_i = p_i \dot{x}_i$. Obviously that $\dot{x}_i = \mathrm{v}_i$, $|\mathrm{v}_i| \le V_i$, $i = 1,2,3$, $\mathrm{v}_i = u_i (p_i k_i)^{-1}$, $V_i = U_i (p_i k_i)^{-1}$. Suppose the following parameters are given: $d = 1m$, $C = 0.05$, $p_1 = 720 m^{-1}$, $p_3 = 15000 m^{-1}$, $k_1 = 0.3 Nm \cdot A^{-1}$, $k_2 = 0.233 Nm \cdot A^{-1}$, $k_3 = 0.316 Nm \cdot A^{-1}$, $U_1 = U_2 = U_3 = 110V$.

So $V_1 = 0.509 m \cdot s^{-1}$, $V_2 = 0{,}724 m \cdot s^{-1}$, $V_3 = 0.023\, m \cdot s^{-1}$. The programs for realization of the algorithm (12)-(20) are written with MAPLE 10.

If $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.8$, then $h^* = h_2^* = 0.0524\, m$, $q^* = q_2^* = 0.00289\, m$, $n^* = n_2^* = 19$, $T^* = T_{L_2}^* = 43.624\, s$. Fig. 2 is surface of function T_{L_1}, that $0.01 \le h \le 0.1$, $0.01 \le V_3 \le 0.02$, $a_1 = 0.5, a_2 = 0.8$.

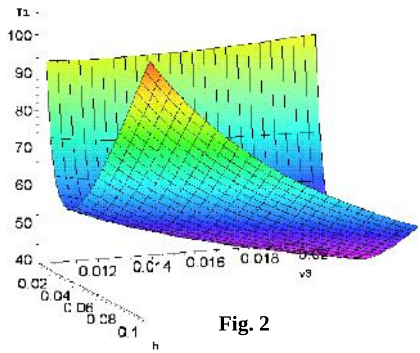


Fig. 2

REFERENCES

1. **Melikyan A.A.** “Optimal guaranteeing control of the dynamic system with the search for the goal point”, *Soviet Math. Dokl., 1991, vol. 43, no 1, pp. 193-197.*
2. **Avetisyan V.V.** “Optimal search of a immobile object in rectangular domain, in minimal guaranteed time”, *Journal of Computer and Systems Sciences Interna–tional, 2002, vol. 41, no. 1, pp. 57-64.*
3. **Avetisyan V.V., BarseghyanA.R.** “The optimization as control in catching of goal object by robot-manipulator under the incomplete information,” *Izv. NAN RA. Mechanics, 2004, No. 2, pp.58-68.*
4. **Avetisyan V. V.** “Control of the Search for an Immobile Object Aimed at Its Capture”, *Journal of Computer and Systems Sciences International, 2006, Vol. 45, No. 6, pp. 997–1005.*

Information about authors;

V.V. Avetisyan
Doctor Sciences, Yerevan State University
E-mail: vanavet@yahoo.com
Mojtaba Ghanbari
Islamic Azad University-Farahan-Iran
E-mail: ghanbari543@yahoo.com

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Агабекян П.В., Гулян К.Г.

Ереван, Армения

В работе рассматривается контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами, причем стрингеры параллельны границе пластины и расположены на одной линии. Решение задачи строится методом, изложенным в [1].

Пусть полубесконечная пластина с двумя полубесконечными стрингерами деформируется под действием сил, приложенных на концах стрингеров. Модули упругости стрингеров одинаковы и равны E_1.

Требуется определить контактные силы, действующие между стрингерами и пластиной.

Относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактных участков [2].

Тогда уравнения равновесия стрингеров запишутся в виде

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} = -\frac{\tau(x)}{E_1F_1}; \quad |x| > a \tag{1}$$

при следующих граничных условиях

$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=\pm a} = \frac{P}{E_1F_1} \tag{1'}$$

где $u_1(x)$ – перемещение точек стрингеров, $\tau(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных сил, F_1 – площадь поперечного сечения стрингеров, P – сосредоточенная сила, действующая на концах стрингеров.

Уравнения равновесия (1) при условии (1') можно записать с помощью одного уравнения в следующем виде:

$$\frac{dU_1}{dx} = \left[\delta(x-a) - \delta(x+a)\right]\frac{P}{E_1F_1} - \frac{\tau^*(x)}{E_1F_1}, \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

где

$$U_1(x) = \left[\theta(x-a) + \theta(-x-a)\right]\frac{du_1}{dx}$$

$$\tau^*(x) = \left[\theta(x-a) + \theta(-x-a)\right]\tau(x)$$

$\delta(x)$ – функция Дирака, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

С другой стороны, для горизонтальных перемещений точек полубесконечной пластины, когда на нее действуют тангенциальные усилия с интенсивностью $\tau^*(x)$, имеем [3]

$$U_2(x,b)=\frac{1}{\pi h_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{A_0\frac{1}{x-t}+A_1\frac{x-t}{(x-t)^2+4b^2}+A_2\frac{8b^2(x-t)}{\left[(x-t)^2+4b^2\right]^2}+\right.$$

$$\left.+A_3\frac{2b^2(x-t)\left[(x-t)^2+12b^2\right]}{\left[(x-t)^2+4b^2\right]^3}\right\}\tau^*(t)dt,\quad -\infty<x<\infty \qquad (3)$$

где $U_2(x,b)=\dfrac{du_2(x,b)}{dx}$, $u_2(x,b)$ – горизонтальные перемещения точек пластины при $y=b,$ $U_2(x,b)=U_2^{(1)}(x,b)+U_2^{(2)}(x,b)$,

$$U_2^{(1)}(x,b)=\left[\theta(x-a)+\theta(-x-a)\right]\frac{du_2(x,b)}{dx}\quad -\infty<x<\infty$$

$$U_2^{(2)}(x,b)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\frac{du_2(x,b)}{dx}\quad -\infty<x<\infty$$

h_2 –толщина пластины, b – расстояние стрингеров от границы пластины,

$$A_0=\frac{\lambda^*+3\mu_2}{4\mu_2(\lambda^*+2\mu_2)},\quad A_1=\frac{\mu_2^2+(\lambda^*+2\mu_2)^2}{4\mu_2(\lambda^*+\mu_2)(\lambda^*+2\mu_2)}$$

$$A_2=\frac{\lambda^*+3\mu_2}{4\mu_2(\lambda^*+2\mu_2)},\ A_3=\frac{\lambda^*+\mu_2}{2\mu_2(\lambda^*+2\mu_2)},\ \lambda^*=\frac{2\lambda_2\mu_2}{\lambda_2+2\mu_2}$$

λ_2 и μ_2 – коэффициенты Ляме материала пластины.

Условия контакта между пластиной и накладками будет следующее

$$U_1(x)=U_2(x,b)\quad -\infty<x<\infty \qquad (4)$$

Теперь применив к (2), (3) и (4) преобразование Фурье, после некоторых выкладок, из условия контакта и с помощью обратного преобразования Фурье для тангенциальных контактных напряжений получим

$$\tau^*(x)=\frac{H}{A_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}R(x-t)U_2^{(2)}(t,b)dt+P\lambda g(x),\quad -\infty<x<\infty \qquad (5)$$

где $R(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}d\sigma,\ \lambda=\dfrac{H}{A_0E_1F}$

$$\bar{K}(\sigma)=|\sigma|+\left(B_1|\sigma|+2B_2b\sigma^2+2B_3b^2|\sigma|^3\right)e^{-2|\sigma|b}$$

$$g(x)=R(x-a)-R(x+a),\ \ B_1=A_1A_0^{-1},\ B_2=A_2A_0^{-1},\ B_3=A_3A_0^{-1}$$

Далее, имея в виду, что $\tau^*(x)=0$ при $|x|<a$, из уравнения (5) для деформации промежуточного интервала между накладками получим следующее интегральное уравнение:

$$\frac{H}{A_0}\int_{-a}^{a}R'(x-t)\frac{du_2(t,b)}{dt}dt+\lambda Pg(x)=0,\ \ |x|<a \tag{6}$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению интегрального уравнения (6).

Решение интегрального уравнения (6) приводим к эквивалентным квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений.

Структура решения интегрального уравнения (6) зависит от ядра $R(x)$. Для этого $\bar{R}(\sigma)$ представим в виде

$$\bar{R}(\sigma)=\frac{1}{\lambda+|\sigma|}-\frac{\bar{K}_1(\sigma)}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda+|\sigma|+\bar{K}_1(\sigma))}=\frac{1}{\lambda+|\sigma|}+\bar{R}_1(\sigma) \tag{7}$$

где $\bar{K}_1(\sigma)=\left(B_1|\sigma|+2B_2b\sigma^2+2B_2b^2|\sigma|^3\right)e^{-2|\sigma|b}$.

Применив к (7) обратное преобразование Фурье, будем иметь [4]

$$R(x)=\frac{1}{\pi}\left[\psi(1)-\ln(\lambda x)\right]+\frac{\lambda|x|}{2}+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(-1)^m\frac{(\lambda x)^{2m}}{\pi(2m)!}\left[\psi(2m+1)-\ln(\lambda x)\right]+\frac{1}{2}\frac{|\lambda x|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} \tag{8}$$

где ряд сходится при любых x и где $\psi(u)$ – известная функция.

Тогда из (8) для $R'(x)$ получим

$$R'(x)=-\frac{1}{\pi x}+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}x+R_1'(x) \tag{9}$$

где $R_1'(x)=O(\ln|x|)$ при $|x|\to 0$.

Заменяя в уравнении (6) $t=at,\ x=ax$ и имея в виду представление (9), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(at)}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}\left\{aR_1'\left[a(x-t)\right]+\frac{\lambda a}{2}\operatorname{sgn}(x-t)\right\}\varphi(at)dt+\lambda Pg(ax)=0 \tag{10}$$

где $\varphi(at) = u_2'(at) \quad -1 < t < 1$.

Таким образом, решение задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения (10).

Решение уравнения (10) ищем в виде

$$\varphi(at) = X_0 F(t) + \lambda P \psi(t)$$

где $F(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}^{(1)} T_{2n}(t)$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}^{(2)} T_{2n}(t), \qquad T_k(u) = \cos(k \arccos u), \quad k = 0,1,2,...$$

многочлены Чебышева первого рода.

Выше имелась в виду четность $\varphi(at)$.

Коэффициенты $Y_{2n}^{(j)} \quad (j = 1,2)$ определяются из квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [1,5].

$$Y_{2m}^{(j)} + \sum_{n=1}^{\infty} K_{2m,2n} \; Y_{2n}^{(j)} = l_m^{(j)}, \qquad (j = 1,2) \quad m = 1,2,...$$

где

$$K_{2m,2n} = \frac{a}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left\{ 2R_1'\left[a(x-t)\right] + \lambda \operatorname{sgn}(x-t) \right\} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}} U_{2m-1}(x) T_{2n}(t) dt dx$$

$$l_m^{(1)} = -K_{2m,0} = \frac{a}{\pi} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left\{ 2R_1'\left[a(x-t)\right] + \lambda \operatorname{sgn}(x-t) \right\} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-t^2}} U_{2m-1}(x) dt dx$$

$$l_m^{(2)} = -g_m = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \left\{ R\left[a(x-1)\right] - R\left[a(x+1)\right] \right\} \sqrt{1-x^2} U_{2m-1}(x) dx$$

Бесконечная система получена обычным методом ортогональных многочленов Чебышева, при этом имелось в виду [5]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)}{\sqrt{t-x}\sqrt{1-t^2}} dt = U_{k-1}(x) \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

Постоянная X_0 определяется из условия

$$a \int_{1}^{\infty} \tau(as) ds = P$$

и имеет вид

$$X_0 = \frac{P\left[1-\lambda a\int\limits_1^\infty \psi_1(x)\,dx\right]}{a\int\limits_1^\infty F_1(x)\,dx}$$

где

$$F_1(x)=\frac{H}{\pi A_0}\int\limits_{-1}^{1}\frac{F(t)\,dt}{t-x}+a\int\limits_{-1}^{1}R_1'\left[a(x-t)\right]F(t)\,dt$$

$$\psi_1(x)=\frac{H}{\pi A_0}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\psi(t)\,dt}{t-x}+a\int\limits_{-1}^{1}R_1'\left[a(x-t)\right]\psi(t)\,dt+g(ax)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №2. С.62-71.
2. Муки Р., Стренберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. // ПМ. Тр. Амер. общ. инж. механиков. 1968, сер. Е. №4. С.124-135.
3. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. //Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН Армении, 2006. С.138-143.
4. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. т.57. №2. С.3-10.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 467с.

Сведения об авторах:

Агабекян Пайкар Вараздатович
К.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. М. Баграмяна 24б
Тел.: (37410) 73-76-14
E-mail: mechins@ sci.am

Гулян Карлен Геворкович
К.ф.-м.н., доцент Государственного университета экономики
Адрес: Ереван, ул. М. Налбандяна 128
Тел. 39-19-39

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.
Ереван, Армения

Определению напряженно-деформированного состояния тороидальных оболочек посвящено много работ [1], где задачи рассмотрены в постановке классической теории оболочек. Учитывая особенность геометрии тора [2] (переменность знака гауссовой кривизны) и широкое распространение в технике и строительстве конструкций вида тороидальной оболочки, в предлагаемой работе решается динамическая задача для тонкой тороидальной оболочки асимптотическим интегрированием [3-5] уравнений трехмерной задачи теории упругости анизотропного неоднородного тела. Выведены рекуррентные формулы для амплитуд компонент вектора перемещения и тензора напряжений. Найдены вызывающие резонанс частоты собственных колебаний. Произведен анализ выведенных формул.

Имеем тороидальную оболочку в одноименной системе координат, занимающую область (фигура)

$$\Omega_* = \{ ¯, ¨, ¥ : |¯| \le ®,\ 0 \le ¨ \le 2®,\ |¥| \le h,\ h << r \}$$

Материал оболочки анизотропный, в каждой точке имеющий плоскость упругой симметрии перпендикулярно к оси ¥ (13 коэффициентов анизотропии) и неоднородный по продольным координатам ¯, ¨ .

Пусть поверхностям тороидальной оболочки $¥ = \pm h$ сообщены перемещения

$$u_j(¯, ¨, \pm h, t) = \bar{u}_j^{\pm}(¯, ¨, t), \quad j = ¯, ¨, ¥ \tag{1.1}$$

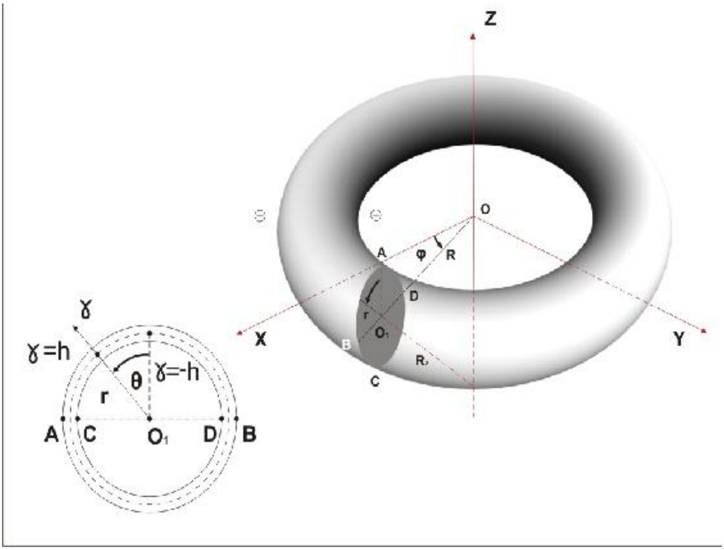
или переменная нагрузка

$$\pm_{j¥}(¯, ¨, \pm h, t) = \mp_{jz}^{\pm}(¯, ¨, t), \quad j = ¯, ¨, ¥ \tag{1.2}$$

Поверхность оболочки считается непрерывной и замкнутой, поэтому другие условия (типа погранслоя [6-7]) не ставятся.

На оболочку действует также тепловое поле, влияние которого учитывается по модели Дюгамеля – Неймана и предполагается, что температурная функция $\bar{T}(¯, ¨, ¥, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и соответствущим граничным условиям.

Требуется исследовать напряженно-деформированное состояние тороидальной оболочки.



Фигура

Перепишем уравнения равновесия динамической задачи термоупругости и соотношения упругости анизотропного тела с учетом температурных напряжений

$$\frac{\partial}{\partial\sim}\left(H_2H_3\pm_{\sim\sim}\right)+\frac{\partial}{\partial}\left(H_1H_3\pm_{\sim}\right)+\frac{\partial}{\partial\yen}\left(H_1H_2\pm_{\sim\yen}\right)-\pm\quad H_3\frac{\partial H_2}{\partial\sim}-$$

$$-\pm_{\yen\yen}H_2\frac{\partial H_3}{\partial\sim}+\pm_{\sim}\;H_3\frac{\partial H_1}{\partial}+\pm_{\sim\yen}H_2\frac{\partial H_1}{\partial\yen}=\;^\circ\ddot{u}_{\sim}H_1H_2H_3$$

$$H_1=(1+k_{\sim}\yen),\quad H_2=(1+k\;\yen),\quad H_3=1,\;\;(\sim,\quad,\yen;1,2,3),$$

$$col\left[e_{\sim\sim}-\sim_{11}T,...,e_{\sim}\;-\sim_{12}T\right]=\left\|a_{ij}\right\|_{6\times6}col\left[\pm_{\sim\sim},\pm\quad,\cdots,\pm_{\sim}\;\right]$$

$$col\left[\pm_{\sim\sim}+\yen_{11}T,\cdots,\pm_{\sim}\;+\yen_{12}T\right]=\left\|b_{ij}\right\|_{6\times6}col\left[e_{\sim\sim},e\quad,\cdots,e_{\sim}\;\right] \qquad (1.3)$$

$$\left\|b_{ij}\right\|_{6\times6}=\left\|a_{ij}\right\|_{6\times6}^{-1}\quad a_{ij}=a_{ij},\quad b_{ij}=b_{ij}$$

$$e_{\sim\sim}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_{\sim}}{\partial\sim}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial}u\quad+\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\yen}u_{\yen}$$

$$e_{\sim}\;=\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{u_{\sim}}{H_1}\right)+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\sim}\left(\frac{u}{H_2}\right),\;\;(\sim,\quad,\yen;\;\;1,2,3)$$

Здесь H_1, H_2, H_3 – коэффициенты Ламе, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы координатной поверхности, $k_\alpha = \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial \beta}, k_\beta = \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial B}{\partial \alpha}$ – геодезические кривизны, a_{ij} – коэффициенты упругой податливости, b_{ij} – коэффициенты упругости, α_{ij} (i,j = 1,2,3) – коэффициенты линейного теплового расширения.

Для рассматриваемой тороидальной оболочки: $\alpha = \theta$, $\beta = \varphi$, а также

$$\begin{aligned}
&A = r, B = R + r\sin\theta, R_1 = r, R_2 = (R + r\sin\theta)/\sin\theta, k_\alpha = 0,\\
&k_\beta = \cos\theta/(R + r\sin\theta),\ \alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\theta, \varphi) \quad i, j = 1,2,3 \qquad (1.4)\\
&a_{ij} = a_{ij}(\theta, \varphi), \quad b_{ij} = b_{ij}(\theta, \varphi) \quad i, j = 1,2,\cdots,6;\\
&\alpha_{13} = \alpha_{23} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0\\
&a_{1j} = a_{2j} = a_{3j} = a_{6j} = b_{1j} = b_{2j} = b_{3j} = b_{6j} = 0 \quad j = 4,5,
\end{aligned}$$

Для решения поставленных краевых задач заменяем все искомые и заданные в (1.1),(1.2) функции их образами преобразования Фурье

$$\overline{Q}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty Q(\mu)\sin\mu t\, d\mu, \quad Q(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \overline{Q}(t)\sin\mu t\, dt \quad (Q, T) \qquad (1.5)$$

(В дальнейшем, для краткости изложения, оперируя образами преобразования Фурье физических величин, за образами будут сохранены названия соответствующих физических величин.)

Компоненты симметричного тензора напряжений заменяем компонентами несимметричного тензора по формулам

$$\begin{aligned}
&\tau_{\alpha j} = (1 + \gamma/R_2)\sigma_{\alpha j} \quad j = \alpha, \beta, \gamma, \quad \tau_{\beta j} = (1 + \gamma/R_1)\sigma_{\beta j}\\
&\tau_{\gamma\gamma} = (1 + \gamma/R_1)(1 + \gamma/R_2)\sigma_{\gamma\gamma}, \quad j = \alpha, \beta, \gamma
\end{aligned} \qquad (1.6)$$

и переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\begin{aligned}
&\xi = \theta, \quad \eta = \varphi, \quad \zeta = \gamma/h = \varepsilon^{-1}\gamma/r, \quad u_\alpha = u/r\\
&u_\beta = v/r, \quad u_\gamma = w/r, \quad \varepsilon = h/r, \quad h << r
\end{aligned} \qquad (1.7)$$

получаем систему сингулярно возмущенных уравнений, решение которой ищем в виде асимптотического представления [3,4]

$$Q(\theta, \varphi, \gamma, \mu) = \varepsilon^{\chi_Q}\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta, \mu), \quad \chi_u = 0, \ \chi_\sigma = -1 \qquad (1.8)$$

Одновременно заданную температурную функцию представляем в виде

$$T(¯,¨,¥,µ) = £^{-1}\sum_{s=0}^{S} £^{s} T^{(s)}(¶,¦,¸,µ) \qquad (1.9)$$

Подставив (1.9), (1.10) в преобразованную систему и приравняв в левых и правых частях уравнений коэффициенты при $£^{s}$, получаем непротиворечивую систему уравнений, которая имеет вид

$$b_{33}\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial ¸^{2}} + °µ^{2}h^{2}w^{(s)} = ¥_{33}\frac{\partial T^{(s)}}{\partial ¸} + R_w^{(s-1)} \qquad (1.10)$$

$$b_{45}\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial ¸^{2}} + b_{55}\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial ¸^{2}} + °µ^{2}h^{2}u^{(s)} = R_u^{(s-1)} \qquad (u,v;\ \ 4,5)$$

Здесь обозначены

$$R_w^{(s-1)} = r_1 2_{\sim\sim}^{(s-1)} + r_2 2^{(s-1)} - \frac{\partial 2_{\sim ¥}^{(s-1)}}{\partial ¸} - \frac{r}{B}\frac{\partial 2_{¥}^{(s-1)}}{\partial ¸} - rk\ 2_{\sim ¥}^{(s-1)} -$$

$$- °´\,^{2}h^{2}L(w^{(s-1)}) - \frac{\partial}{\partial ¸}(b_{13}e_{\sim\sim *}^{(s-1)} + b_{23}e_{*}^{(s-1)} + b_{33}e_{¥¥*}^{(s-1)} + b_{36}e_{\sim\ *}^{(s-1)})$$

$$R_u^{(s-1)} = \frac{r}{AB}\frac{\partial}{\partial ¶}(B 2_{\sim\sim}^{(s-1)}) + rk\ 2^{(s-1)} - \frac{r}{AB}\frac{\partial}{\partial ¦}(A 2_{\sim}^{(s-1)}) - rk_{\sim} 2_{\sim}^{(s-1)} -$$

$$- ¸ r_1 \frac{\partial 2_{\sim ¥}^{(s-1)}}{\partial ¸} - °´\,^{2}h^{2}L(u^{(s-1)}) - b_{45}\frac{\partial}{\partial ¸}e_{¥*}^{(s-1)} - b_{55}\frac{\partial}{\partial ¸}e_{\sim ¥*}^{(s-1)} -$$

$$- \frac{2r}{R_{1}} 2_{\sim ¥}^{(s-1)},\ (\sim,\ \ ;\ \ ¶,¦;\ \ u,v;\ \ A,B;\ \ 1,2;\ \ 4,5)$$

$$e_{\sim\sim *}^{(s-1)} = \frac{r}{A}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial ¶} + k_{\sim} v^{(s-1)} + r_1 w^{(s-1)} + \qquad (1.11)$$

$$+ ¸ r_2 \left(\frac{r}{A}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial ¶} + k_{\sim} v^{(s-2)} + r_1 w^{(s-2)}\right) - L(T^{(s-1)}) -$$

$$- ¸\,(a_{11} r_1 2_{\sim\sim}^{(s-1)} + a_{12} r_2 2^{(s-1)} + a_{16} r_1 2_{\sim}^{(s-1)})\ (\sim,\ \ ;\ \ ¶,¦;\ \ u,v;\ \ A,B,\ \ 1,2)$$

$$e_{¥¥*}^{(s-1)} = L\left(\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial ¸} - T^{(s-1)}\right) - ¸\,(a_{13} r_1 2_{\sim\sim}^{(s-1)} + a_{23} r_2 2^{(s-1)} + a_{36} r_1 2_{\sim}^{(s-1)})$$

$$e_{¥*}^{(s-1)} = L\left(\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial ¸}\right) - r_2 v^{(s-1)} - ¸ r_1 r_2 v^{(s-2)} + \frac{r}{B}\left(\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial ¦} + ¸ r_1 \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial ¦}\right) -$$

$$- a_{44} ¸ r_2 2_{¥}^{(s-1)} - a_{45} ¸ r_1 2_{\sim ¥}^{(s-1)} \qquad (\sim,\ \ ;\ \ ¶,¦;\ \ u,v;\ \ A,B;\ \ 1,2;\ \ 4,5)$$

$$e_{~*}^{(s-1)} = r\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial ¦} - k\ \ v^{(s-1)}\right) + ¸ r r_1\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial ¦} - k\ \ v^{(s-2)}\right) -$$

$$- L(T^{(s-1)}) + r\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial ¶} - k_{~} u^{(s-1)}\right) + ¸ r r_2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial ¶} - k_{~} u^{(s-2)}\right) +$$

$$+ a_{16} ¸ r_1 ²\,{}_{~~}^{(s-1)} + a_{26} ¸ r_2 ²\,{}_{~}^{(s-1)} + a_{66} ¸ r_1 ²\,{}_{~}^{(s-1)}$$

$$L(Q^{(s-1)}) = ¸\ (r_1 + r_2)Q^{(s-1)} + ¸ r_1 r_2 Q^{(s-2)}, \quad r_1 = r/R_1 = 1, \quad r_2 = r/R_2$$

Общее решение системы разрешающих уравнений (1.11) выражается следующими рекуррентными формулами:

$$u^{(s)} = (a - b_{44} ª_1^2)(M_u^{(s)} \sin ª_1 ¸ + N_u^{(s)} \cos ª_1 ¸) +$$

$$+ b_{45} ª_2^2 (M_v^{(s)} \sin ª_2 ¸ + N_v^{(s)} \cos ª_2 ¸) + I_{~}^{(s)}(¸) \qquad (1.12)$$

$$w^{(s)} = M_w^{(s)} \sin ª_3 ¸ + N_w^{(s)} \cos ª_3 ¸ + I_{¥~}^{(s)}(¸), \quad (~,\ \ ; u, v; 1,2; 4,5)$$

Здесь обозначены

$$ª_3 = ´\, h\sqrt{°/b_{33}}, \qquad ª_{1,2}^2 = a\left(b_{44} + b_{55} \pm \sqrt{c}\right)/(2\Delta), \qquad a = °\,µ^2 h^2$$

$$c = (b_{55} - b_{44})^2 + 4b_{45}^2, \quad \Delta = b_{44}b_{55} - b_{45}^2$$

$$I_{~}^{(s)}(¸) = \frac{1}{ª_1}\int_0^{¸} \Phi_{~}^{(s)}(²)\sin ª_1(¸ - ²)\,d² \qquad (~,\ \ , ª;\ \ 1,2,3) \qquad (1.13)$$

$$\Delta_{\bullet} = a^2\sqrt{c}\,(b_{55} - b_{44} - \sqrt{c})/(2\Delta)$$

$$\Phi_{~}^{(s)}(¸) = \left((a - b_{55} ª_2^2)R_u^{(s-1)}(¸) - b_{45} ª_2^2 R_v^{(s-1)}(¸)\right)/\Delta_{\bullet}$$

$$\Phi_{¥}^{(s)}(¸) = ¥_{33}\frac{\partial T^{(s)}}{\partial ¸}\Big/ b_{33} + R_w^{(s-1)}(¸)/b_{33}, \ (~,\ \ ;\ \ u, v;\ \ 1,2;\ \ 4,5)$$

2. Общий интеграл поставленных краевых задач (1.13) содержит 6s функций интегрирования, которые однозначно определяются из граничных условий (1.1), (1.2). Удовлетворив граничным условиям (1.1), получаем

$$M_w^{(s)} = \left[w^{+(s)} - w^{-(s)} - I_w^{(s)}(¸ = 1) + I_w^{(s)}(¸ = -1)\right]/(2\sin ª_3)$$

$$N_w^{(s)} = \left[w^{+(s)} + w^{-(s)} - I_w^{(s)}(¸ = 1) - I_w^{(s)}(¸ = -1)\right]/(2\cos ª 3)$$

$$M_u^{(s)} = (F_u^{+(s)} - F_u^{-(s)})/(2\sin ª_1), \quad N_u^{(s)} = (F_u^{+(s)} + F_u^{-(s)})/(2\cos ª_1)$$

$$F_u^{\pm(s)} = \left[(a - b_{55} ª_2^2)\left(u^{\pm(s)} - I_{~}^{0s}(¸ = \pm 1)\right) - b_{45} ª_2^2\left(v^{\pm(s)} - \right.\right.$$

$$-I^{(s)}(¸\ =\pm1)\Big)\Big]\Big/\Delta_{\bullet}\quad (\sim,\ \ ;\ \ u,v;\ \ 1{,}2;\ \ 4{,}5)\,,\sin 2ª_1\neq 0 \tag{2.1}$$

$$u^{\pm(0)}=u_{\sim}^{\pm}\Big/r,\qquad u^{\pm(s)}=0,\quad s\neq 0\qquad (\sim,\ \ ,¥;\ \ u.v,w\ \ 1{,}2{,}3)$$

Заметим, что при граничных условиях (1.1) дисперсионными уравнениями частот собственных колебаний и резонансные частоты нормальных и поперечных (сдвиговых) колебаний тороидальной оболочки будут, соответственно,

$$\sin 2ª_j=0\quad j=1,2,3,\quad ª_{3\kappa}=\frac{®\kappa}{2}\quad\Rightarrow\quad ´_{rez.}=\frac{®k}{2h}\sqrt{\frac{b_{33}}{°}}$$

$$ª_{(1,2)\kappa}=\frac{®\kappa}{2}\quad\Rightarrow ´_{rez.}=\frac{®k}{2h}\sqrt{\frac{2\Delta}{°\,(b_{44}+b_{55}\pm\sqrt{c})}} \tag{2.2}$$

Когда на внешней и внутренней поверхностях тороидальной оболочки заданы условия первой краевой задачи, амплитуды вынужденных колебаний определяются по формулам

$$M_w^{(s)}=\frac{1}{2\cos ª_3}(F_{¥}^{+(s)}+F_{¥}^{-(s)}),\quad N_w^{(s)}=\frac{1}{2\sin ª_3}(F_{¥}^{-(s)}-F_{¥}^{+(s)})$$

$$M_u^{(s)}=\frac{ª_2}{2\cos ª_1}\Big[(ab_{44}-\Delta ª_2^2)(F_{\sim}^{-(s)}-F_{\sim}^{+(s)})-ab_{45}(F^{-(s)}-F^{+(s)})\Big]$$

$$N_u=\frac{ª_2}{2\sin ª_1}\Big[(ab_{44}-\Delta ª_2^2)(F_{\sim}^{-(s)}-F_{\sim}^{+(s)})-ab_{45}(F^{-(s)}-F^{+(s)})\Big] \tag{2.3}$$

$$(\sim,\ \ ;\ \ u,v;\ \ 1{,}2;\ \ 4{,}5)\quad \sin 2ª_j\neq 0,\quad j=1,2,3$$

Здесь обозначены

$$F_{¥}^{\pm(s)}=\frac{1}{ª_3 b_{33}}\Big(2_{¥¥}^{\pm(s)}-2_{¥¥\bullet}^{(s)}(¸\ =\pm1)\Big)-\frac{1}{ª_3}\frac{\partial}{\partial ¸}\Big[I_{¥}^{(s)}(¸\ )\Big]_{¸\ =\pm1}$$

$$F_{\sim}^{\pm(s)}=\frac{1}{\Delta_{\bullet\bullet}}\left\{2_{\sim¥}^{\pm(s)}-2_{\sim¥\bullet}^{(s)}(¸\ =\pm1)-\frac{\partial}{\partial ¸}\Big[b_{45}I^{(s)}(¸\ )+b_{55}I_{\sim}^{(s)}(¸\ )\Big]_{¸\ =\pm1}\right\}$$

$$(\sim,\ \ ;\ \ 4{,}5)\qquad \Delta_{\bullet\bullet}=ª_1ª_2\Delta\Delta_{\bullet}$$

$$2_{¥¥\bullet}^{(s)}=b_{13}e_{\sim\sim *}^{(s-1)}+b_{23}e_{*}^{(s-1)}+b_{33}e_{¥¥ *}^{(s-1)}-¥_{33}T^{(s)}$$

$$2_{¥\bullet}^{(s-i)}=b_{44}e_{¥ *}^{(s-1)}+b_{45}e_{\sim¥\bullet}^{(s-1)},\quad (\sim,\ \ ;\ \ 4{,}5) \tag{2.4}$$

$$2^{\pm(0)}_{¥¥} = \pm^{\pm}_{¥¥},\quad 2^{\pm(1)}_{¥¥} = £(r_1 + r_2)\pm^{\pm}_{¥¥},\quad 2^{\pm(2)}_{¥¥} = £^{2} r_1 r_2 \pm^{\pm}_{¥¥}$$

$$2^{\pm(s)}_{¥¥} = 0,\quad s > 2;\qquad 2^{\pm(0)}_{\sim¥} = \pm^{\pm}_{\sim¥},\quad 2^{\pm(1)}_{\sim¥} = £ r_2 \pm^{\pm}_{\sim¥},\quad 2^{\pm(s)}_{\sim¥} = 0,\quad s > 1$$

$$2^{\pm(0)}_{¥} = \pm^{\pm}_{¥},\quad 2^{\pm(1)}_{¥} = £ r_1 \pm^{\pm}_{¥},\quad 2^{\pm(s)}_{¥} = 0,\quad s > 1$$

Заметим, что когда на лицевых поверхностях оболочки заданы условия первой краевой задачи, резонансные частоты анизотропной тороидальной оболочки определяются по формулам (2.2).

Таким образом, рекуррентые расчетные формулы (1.9), (1.13), (2.1)-(2.5) позволяют вычислить компоненты вектора перемещения и тензора напряжений тороидальной оболочки с любой заранее заданной асимптотической точностью, когда на ее поверхностях заданы условия первой или второй краевых задач теории термоупругости. Если на ее внешней и внутренней поверхностях будут заданы комбинации смешанных граничных условий, составленных из (1.1), (1.2), то амплитуды вынужденных колебаний определятся, соответственно, рекуррентными формулами по (2.1) или (2.3) в зависимости от того, какая именно компонента вектора перемещения или 000 тензора напряжений задана.

Анализ напряженно-деформированного состояния тороидальной оболочки показывает, что в зоне, где гауссова кривизна поверхности отрицательна (область: $-® < ¯ < 0$), значения напряжений $\pm_{\sim\sim}, \pm_{\sim}, \pm_{\sim¥}, \pm_{¥¥}$ несколько выше по сравнению с их соответствующими значениями зоны ($0 < ¯ < ®$) положительной гауссовой кривизны. Это наглядно видно из таблицы, где приведены отношения модулей этих напряжений для тороидальной и, радиуса r (при $R \to \infty$), цилиндрической оболочек в соответствующих точках.

Таблица	h=0.1r		h=0.01r	
	R=2r	R=1.5r	R=2r	R=1.5r
$\pm_A / 2_A$	0.968	0.962	0.997	0.997
$\pm_B / 2_B$	1.111	1.253	1.010	1.020
$\pm_C / 2_C$	1.034	1.042	1.003	1.004
$\pm_D / 2_D$	0.909	0.833	0.990	0.990

В заключение заметим, что приведенный общий интеграл (1.13) применим также для определения напряженно-деформированного состояния тороидальной оболочки, когда на ее внешней поверхности заданы компоненты и вектора перемещения, и тензора напряжений (все шесть условий с верхним индексом “+” из (1.1),(1.2)), а на внутренней поверхности условия не заданы.

Такие задачи считаются [8,9] ,,некорректными по Адамару”. Возникновение такой задачи для торообразной оболочки обусловлено практически невозможностью произвести измерение на ее внутренней поверхности. Для таких задач амплитуды определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
&M_w^{(s)} = \left(w^{+(s)} - I_w^{(s)}(\text{¸} \;=1)\right)\sin \text{ª}_3 + F_{\text{¥}}^{+(s)} \cos \text{ª}_3 \\
&N_w^{(s)} = \left(w^{+(s)} - I_w^{(s)}(\text{¸} \;=1)\right)\cos \text{ª}_3 + F_{\text{¥}}^{+(s)} \sin \text{ª}_3 \qquad (2.5)\\
&M_u^{(s)} = \text{ª}_2\left((ab_{44} - \Delta \text{ª}_2^2)F_{\text{~}}^{+(s)} - ab_{45}F^{+(s)}\right)\cos \text{ª}_1 + \\
&+\left((a - b_{55}\text{ª}_2^2)F_u^{+(s)} - b_{45}\text{ª}_2^2 F_v^{+(s)}\right)\sin \text{ª}_1 \\
&N_u = \left((a - b_{55}\text{ª}_2^2)F_u^{+(s)} - b_{45}\text{ª}_2^2 F_v^{+(s)}\right)\cos \text{ª}_1 - \\
&-\text{ª}_2\left((ab_{44} - \Delta \text{ª}_2^2)F_{\text{~}}^{+(s)} - ab_{45}F^{+(s)}\right)\sin \text{ª}_1 \quad (\text{~} \;\; ;\; u,v;\; 1,2;\; u,v)
\end{aligned}
$$

Как следует из (2.5) в ,,некорректной по Адамару” задаче тороидальной оболочки резонанс не возникает. Это свидетельствует о том, что ,,некорректная по Адамару” задача не сможет полноценно моделировать реальное динамическое состояние тороидальной оболочки.

Работа выполнена при содействии гранта INTAS-06-1000017-8886.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков В.Н. Статика тороидальых оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. 100с.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука,1976. 512с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука, 1997. 414с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.
5. Агаловян Л.А. Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т.50. Вып. 2. С. 271-278.
6. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвуз. сборник н. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С. 51-58.
7. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв АН Арм.ССР. Механика.1984. Т.37. №6. С. 3-15.
8. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некоторые задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

9. Хачикян А.С. О гармонических и бигармонических задачах для задач с неклассическими граничными условиями.// Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. № 4. С. 24-31.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович

Академик НАН РА, д.ф.-м.н.
заведующий отделом механики тонкостенных систем
Института механики НАН РА, советник директора Института
Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24Б, 0019, Ереван, Армения
Дом. адрес: ул. Давида Маляна 4, кв. 63, 0096, Ереван, Армения
Тел.: (37410) 525835
E-mail: aghal@mechins.am

Геворкян Рубен Степанович

Д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник
Института механики НАН РА
Дом. адрес: ул. Киевяна 12, кв. 6,0028, Ереван, Армения
Тел.: (37410) 270828
E-mail:gevorgyanrs@mail.ru

О ЧАСТОТАХ И ФОРМАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ СО СВОБОДНЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ КРАЯМИ

Агаловян Л.А., Закарян Т.В.
Ереван, Армения

Первая краевая задача теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропной полосы, находящейся в условиях плоской деформации, асимптотическим методом рассмотрена в [1,2]. В этих работах была установлена принципиально новая асимптотика для компонент тензора напряжений и вектора перемещения, которая существенно отличается от соответствующей асимптотики в статической задаче. В работах [3-6] рассмотрены вынужденные и собственные колебания анизотропных полос, пластин и оболочек при иных граничных условиях на лицевых поверхностях. В данной работе асимптотическим методом найдены частоты и формы собственных колебаний ортотропной полосы со свободными продольными краями. Доказано, что существуют два типа собственных колебаний – сдвиговые и продольные, которым соответствуют различные группы частот собственных колебаний. Показано, что один тип собственных колебаний порождает собственные колебания другого типа, но с меньшей амплитудой.

1.Требуется определить ненулевые решения динамических уравнений теории упругости:

уравнения движения –

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

соотношения упругости –

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\beta_{11}\sigma_{xx}+\beta_{12}\sigma_{yy}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\beta_{12}\sigma_{xx}+\beta_{22}\sigma_{yy}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{66}\sigma_{xy} \tag{1.2}$$

$$\beta_{ij}=\frac{1}{a_{33}}\left(a_{ij}a_{33}-a_{i3}a_{j3}\right),\qquad i,j=1,2\ ,\ a_{66}=\frac{1}{G_{12}}$$

в области $D=\left\{(x,y):\ \ 0\le x\le l,\ -h\le y\le h,\ h<<l\right\}$, занятой полосой при однородных граничных условиях при $y=\pm h$

$$\sigma_{yy}(x,h)=0,\ \sigma_{xy}(x,h)=0,\ \sigma_{yy}(x,-h)=0,\ \sigma_{xy}(x,-h)=0 \tag{1.3}$$

Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}(x,y,t)=\sigma_{11}(x,y)\exp(i\omega t)\,,\ \sigma_{xy}(x,y,t)=\sigma_{12}(x,y)\exp(i\omega t)\\ \sigma_{yy}(x,y,t)=\sigma_{22}(x,y)\exp(i\omega t)\ ,\ u(x,y,t)=u_x(x,y)\exp(i\omega t)\\ v(x,y,t)=u_y(x,y)\exp(i\omega t)\end{gathered} \tag{1.4}$$

где ω – неизвестная частота собственных колебаний. Подставив (1.4) в уравнения (1.1) и соотношения (1.2), перейдя к безразмерным координатам и перемещениям $\xi = x/l$, $\zeta = y/h$, $U = u_x/l$, $V = u_y/l$, получим систему

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\omega_*^2 U = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta} + \varepsilon^{-2}\omega_*^2 V = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\xi} = \beta_{11}\sigma_{11} + \beta_{12}\sigma_{22}, \quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} = \beta_{12}\sigma_{11} + \beta_{22}\sigma_{22} \tag{1.5}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta} + \frac{\partial V}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2\omega^2, \quad \varepsilon = h/l$$

которая сингулярно возмущена малым параметром ε. Ее решение складывается из решений внутренней задачи и пограничных слоев локализованных вблизи торцов $x = 0, l$

$$I = I^{\text{int}} + I_b^I + I_b^{II}. \tag{1.6}$$

Решение внутренней задачи будем искать в виде [3]

$$\sigma_{jk}^{\text{int}} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}(\xi,\zeta), \quad (U^{\text{int}}, V^{\text{int}}) = \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)})$$
$$\omega_*^2 = \varepsilon^s\omega_{*s}^2, \quad s = \overline{0, N} \tag{1.7}$$

Подставив (1.7) в (1.5), применив правило Коши умножения рядов $\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\right)$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta} + \omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = 0, \quad k = \overline{0, s}$$

$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi} = \beta_{11}\sigma_{11}^{(s)} + \beta_{12}\sigma_{22}^{(s)}, \quad \frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} = \beta_{12}\sigma_{11}^{(s)} + \beta_{22}\sigma_{22}^{(s)} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi} = a_{66}\sigma_{12}^{(s)}$$

Из системы (1.8) напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(-\beta_{12}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + \beta_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right), \quad \sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1}\left(\beta_{11}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} - \beta_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)$$

$$\sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right), \quad \Delta_1 = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 \tag{1.9}$$

Подставив значения $\sigma_{12}^{(s)},\sigma_{22}^{(s)}$ в первые два уравнения (1.8), для определения $U^{(s)},V^{(s)}$ получим уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{66}\omega_{*k}^2U^{(s-k)}=f_u^{(s)},\quad k=\overline{0,s}\\ f_u^{(s)}=-\left(a_{66}\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial^2V^{(s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)\end{gathered}\tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}\omega_{*k}^2V^{(s-k)}=f_v^{(s)},\quad k=\overline{0,s}\\ f_v^{(s)}=\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\frac{\partial^2U^{(s-1)}}{\partial\xi\,\partial\zeta}-\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}\end{gathered}\tag{1.11}$$

Рассмотрим приближение $s=0$. Для $U^{(0)},\sigma_{12}^{(0)}$ получим

$$U^{(0)}=C_1^{(0)}(\xi)\sin\sqrt{a_{66}}\omega_{*0}\zeta+C_2^{(0)}(\xi)\cos\sqrt{a_{66}}\omega_{*0}\zeta\tag{1.12}$$

$$\sigma_{12}^{(0)}=\frac{\omega_{*0}}{\sqrt{a_{66}}}\left(C_1^{(0)}(\xi)\cos\sqrt{a_{66}}\omega_{*0}\zeta-C_2^{(0)}(\xi)\sin\sqrt{a_{66}}\omega_{*0}\zeta\right)$$

Удовлетворив граничным условиям $\sigma_{12}(\xi,\pm1)=0$, получим уравнения относительно ω_{*0}

$$\text{а) }\sin\sqrt{a_{66}}\omega_{*0}=0\ \Rightarrow\ \omega_{*0n}^{I}=\frac{\pi n}{\sqrt{a_{66}}},\ n\in N\tag{1.13}$$

$$\text{б) }\cos\sqrt{a_{66}}\omega_{*0}=0\ \Rightarrow\ \omega_{*0n}^{II}=\frac{\pi}{2\sqrt{a_{66}}}(2n+1),\ n\in N$$

которым будут соответствовать собственные функции:

$$\text{а) }U_n^{I(0)}=C_{2n}^{(0)}(\xi)\cos\pi n\zeta,\ \text{б) }U_n^{II(0)}=C_{1n}^{(0)}(\xi)\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta\tag{1.14}$$

Из уравнения (1.11) и формул (1.9) получим

$$\begin{gathered}V^{(0)}=C_3^{(0)}(\xi)\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_{*0}\zeta+C_4^{(0)}(\xi)\cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_{*0}\zeta,\\ \sigma_{22}^{(0)}=\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_{*0}\left(C_3^{(0)}(\xi)\cos\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_{*0}\zeta-C_4^{(0)}(\xi)\sin\sqrt{\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}}\omega_{*0}\zeta\right)\end{gathered}\tag{1.15}$$

Удовлетворив условиям $\sigma_{22}(\xi,\pm1)=0$, получим а) $\omega_{*0n}^{III} = \sqrt{\dfrac{\beta_{11}}{\Delta_1}}\ \pi n, \quad n \in N, \quad V_n^{III(0)} = C_{4n}^{(0)} \cos \pi n \zeta$ (1.16)

б) $\omega_{*0n}^{IV} = \sqrt{\dfrac{\beta_{11}}{\Delta_1}}\ \dfrac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in N, \quad V_n^{IV(0)} = C_{3n}^{(0)} \sin \dfrac{\pi}{2}(2n+1)\zeta$

Если $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{I}$, оно не будет удовлетворять уравнению (1.13, б) и аналогичным уравнениям соответствующим (1.15), следовательно, они будут иметь нулевые решения. Таким образом, при $s = 0$ имеем решение

$$U_n^{I(0)} = C_{2n}^{(0)}(\xi)\cos \pi n\zeta, \quad \sigma_{12n}^{I(0)} = -\frac{\pi n}{a_{66}} C_{2n}^{(0)} \sin \pi n \zeta,$$
$$V_n^{I(0)} = 0, \quad \sigma_{11n}^{I(0)} = 0, \quad \sigma_{22n}^{I(0)} = 0 \tag{1.17}$$

точно так же частоте $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{II}$ соответствует решение

$$U_n^{II(0)} = C_{1n}^{(0)}(\xi)\sin \frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta, \quad \sigma_{12n}^{I(0)} = \frac{\pi(2n+1)}{2a_{66}} C_{1n}^{(0)} \cos \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta$$
$$V_n^{II(0)} = 0, \quad \sigma_{11n}^{II(0)} = 0, \quad \sigma_{22n}^{II(0)} = 0 \tag{1.18}$$

При $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{III}$ имеем

$$V_n^{III(0)} = C_{4n}^{(0)}(\xi)\cos \pi n\zeta, \quad \sigma_{22n}^{III(0)} = -\frac{\pi n \beta_{11}}{\Delta_1} C_{4n}^{(0)} \sin \pi n \zeta$$
$$\sigma_{11n}^{III(0)} = \frac{\pi n \beta_{12}}{\Delta_1} C_{4n}^{(0)} \sin \pi n \zeta, \quad \sigma_{12n}^{III(0)} = 0, \quad U_n^{III(0)} = 0 \tag{1.19}$$

а частотам $\omega_{*0} = \omega_{*0n}^{IV}$ соответствует

$$V_n^{IV(0)} = C_{3n}^{(0)}(\xi)\sin \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta, \ \sigma_{22n}^{IV(0)} = \frac{\beta_{11}}{\Delta_1}\frac{\pi}{2}(2n+1) C_{3n}^{(0)} \cos \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta$$
$$\sigma_{11n}^{IV(0)} = -\frac{\beta_{12}}{\Delta_1}\frac{\pi}{2}(2n+1) C_{3n}^{(0)} \cos \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta, \quad \sigma_{12n}^{IV(0)} = 0, \quad U_n^{IV(0)} = 0 \tag{1.20}$$

Решениям (1.17), (1.18) соответствуют сдвиговые собственные колебания, а решениям (1.19), (1.20) – продольные колебания. Легко убедиться, что собственные функции $\left\{\varphi_n = \cos \pi n \zeta\right\}$ и $\left\{\psi_n = \sin \dfrac{\pi}{2}(2n+1)\zeta\right\}$ составляют ортонормированную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$.

2. Рассмотрим вклад последующих приближений. При $s = 1$ уравнение (1.10) имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_n^{(1)}}{\partial\zeta^2} + a_{66}\omega_{*0n}^2 U_n^{(1)} + a_{66}\omega_{*1n}^2 U_n^{(0)} = f_{un}^{(1)} \qquad (2.1)$$

где неизвестными являются $U_n^{(1)}$ и ω_{*1n}. Если $\omega_{*0} = \omega_{_{*0n}}^I = \pi n \big/ \sqrt{a_{66}}$, в силу формул (1.10) и (1.17) $f_{un}^{(1)} = 0$. Решение уравнения (2.1) будем представлять в виде

$$U_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} U_k^{I(0)} = a_{nk} U_k^{I(0)} \quad , \quad k = \overline{0,\infty} \qquad (2.2)$$

где $U_k^{I(0)}$ – собственные функции для этого случая, которые составляют ортогональную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$. Подставив (2.2) в (2.1) , умножив обе части на $U_m^{I(0)}$ и проинтегрировав по ζ в пределах [-1;1], получим

$$a_{nk} a_{66} \left((\omega_{*0n}^I)^2 - (\omega_{*0k}^I)^2 \right) \int_{-1}^{1} U_k^{I(0)} U_m^{I(0)} d\zeta + (\omega_{*1n}^I)^2 a_{66} \int_{-1}^{1} U_n^{I(0)} U_m^{I(0)} d\zeta = 0 \qquad (2.3)$$

Если $m = k \ne n$, то из (2.3) следует $a_{nm} = 0$. При $m = n = k$ получаем $\omega_{*1n}^I = 0$. Остается неизвестным a_{nn}. Для ее определения воспользуемся в подобных случаях методом нормировки [7,8]. Потребуем , чтобы

$$\frac{1}{\left\| U_n^{I(0)} \right\|^2} \int_{-1}^{1} [U_n^{I(0)} + \varepsilon U_n^{I(1)}]^2 d\zeta = 1 \qquad (2.4)$$

откуда с учетом (2.2) будет следовать

$$\int_{-1}^{1} a_{nk} U_n^{I(0)} U_k^{I(0)} d¸ = 0 \ , \quad n \ne k, \quad a_{nn} \int_{-1}^{1} (U_n^{I(0)})^2 d¸ = 0 \qquad (2.5)$$

Первое из соотношений (2.5) удовлетворяется тождественно, а из второго следует $a_{nn} = 0$. Таким образом , приближению $s = 1$ соответствует нулевое решение

$$U_n^{I(1)} = 0 \ , \ \omega_{*1n}^I = 0 \qquad (2.6)$$

При $s = 2$ уравнение (1.10) записывается так:

$$\frac{\partial^2 U_n^{I(2)}}{\partial\zeta^2} + a_{66} (\omega_{*0n}^I)^2 U_n^{I(2)} + a_{66} (\omega_{*1n}^I)^2 U_n^{I(1)} + a_{66} (\omega_{*2n}^I)^2 U_n^{I(0)} = f_{un}^{I(2)}$$

$$f_{un}^{I(2)} = -\left(a_{66} \frac{\partial \sigma_{11n}^{I(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 V_n^{I(1)}}{\partial\xi\partial\zeta} \right) \qquad (2.7)$$

где $\sigma_{11n}^{I(1)}, V_n^{I(1)}$ должны быть определены из уравнения (1.11) и соотношений

(1.9) при $\omega_{*n} = \omega_{*n}^{I}$. Для этого случая $f_{vn}^{I(1)} = \left(\dfrac{\Delta_1}{a_{66}} - \beta_{12}\right)\dfrac{\pi n}{\beta_{11}}\left(C_{2n}^{(0)}(\xi)\right)' \times$ $\times \sin \pi n \zeta$. Решив уравнение (1.11), удовлетворив условиям $\sigma_{12}^{(2)}(\xi, \pm 1) = 0$, найдем $V_n^{I(1)}$

$$V_n^{I(1)} = A_n(\xi) \sin \pi n \zeta$$

$$A_n(\xi) = \left[\frac{\Delta_1}{\beta_{11}}(\omega_{*0n}^{I})^2 - \pi^2 n^2\right]^{-1}\left(\frac{\Delta_1}{\beta_{11}} - \beta_{12}\right)\frac{\pi n}{\beta_{11}}\left(C_{2n}^{(0)}(\xi)\right)' \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$f_{un}^{I(2)} = \left(\frac{a_{66}\beta_{12}}{\Delta_1} + 1\right)\frac{\partial^2 V_n^{I(1)}}{\partial\xi\partial\zeta} - \frac{a_{66}\beta_{22}}{\Delta_1}\frac{\partial^2 U_n^{I(0)}}{\partial\xi^2} \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.7), а также функцию $f_{un}^{I(2)}$ представим в виде

$$U_n^{I(2)} = c_{nk} U_k^{I(0)}, \qquad f_{un}^{I(2)} = d_{nk} U_k^{I(0)}, \;\; k = \overline{0, \infty} \tag{2.10}$$

где $d_{nk} = \dfrac{1}{\int\limits_{-1}^{1} (U_k^{I(0)})^2 d\zeta} \int\limits_{-1}^{1} f_{un}^{I(2)} U_k^{I(0)} d\zeta$. Подставив (2.10) в (2.7), умножив обе части на $U_m^{I(0)}$ и проинтегрировав по ¸ на интервале [-1;1], получим

$$\begin{gathered}\left((\omega_{*0n}^{I})^2 - (\omega_{*0k}^{I})^2\right) c_{nk} a_{66} C_{2k}^{(0)} C_{2m}^{(0)} \delta_{mk} + (\omega_{*2n}^{I})^2 a_{66} C_{2n}^{(0)} C_{2m}^{(0)} \delta_{nm} = \\ = d_{nk} C_{2k}^{(0)} C_{2m}^{(0)} \delta_{km}\end{gathered} \tag{2.11}$$

при $m = k \neq n$, $c_{nm} = \dfrac{d_{nm}}{a_{66}\left((\omega_{*0n}^{I})^2 - (\omega_{*0m}^{I})^2\right)}$

при $m = n = k$, $\omega_{*2n}^{I} = \dfrac{d_{nn}}{a_{66}}$. (2.12)

Коэффициент c_{nn} определяется из условия нормировки для $s = 2$. Несложно установить, что $c_{nn} = 0$. Таким образом, $U_n^{I(2)} \neq 0$, $\omega_{*2n}^{I} \neq 0$ и если ограничиться этим приближением, будем иметь

$$U_n^{I} = U_n^{I(0)} + \varepsilon^2 U_n^{I(2)}, \qquad \omega_{*n}^{I} = \omega_{*0n}^{I} + \varepsilon^2 \omega_{*2n}^{I}. \tag{2.13}$$

Такая же качественная картина имеет место для остальных случаев значений ω_*, т.е. ω_{*0n}^{I}, ω_{*0n}^{II}, ω_{*0n}^{III}, ω_{*0n}^{IV}. Поскольку $V_n^{I(1)} \neq 0$, можем заключить, что сдвиговые собственные колебания вызывают продольные собственные колебания и, наоборот, продольные собственные колебания вызывают сдвиговые колебания. Однако, эти сопутствующие колебания имеют амплитуды на порядок меньше, чем основные.

The authors express their gratitude to INTAS, grant 06-100017-8886 which made this investigation possible.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Об асимптотике вынужденных колебаний ортотропной полосы. //Докл. НАН РА. 2007. Т.107. №2 .С.173-178.
2. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. //В сб.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Ереван: 2007. С.21-27.
3. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
4. Агаловян Л.А, Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. // Докл.НАН РА. 2003. Т.103. №4. С. 296-301.
5. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Междунар. научн. журнал. Прикл. Механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.
6. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111-125.
7. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
8. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович
Академик НАН РА, заведующий отделом
советник директора Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел.: (+37410) 52-48-90
E-mail: aghal@mechins.sci.am

Закарян Татевик Владиковна
Аспирант, младший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел.: (+37410) 63-88-82
E-mail: tatevik83@rambler.ru

К ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА КРАЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х.
Ереван, Армения

Задачи об изгибе балок на упругих основаниях составляют обширную часть в области контактных и смешанных задач теории упругости. Существование многочисленных исследований в указанной области обусловлено большой теоретической и прикладной значимостью этих задач. Не останавливаясь подробно на этих работах, укажем лишь [1-3], в которых рассмотрена задача об изгибе полубесконечной балки на крае упругой полуплоскости. В [1,2] решения задач сведены к функционально-разностным уравнениям и построены их замкнутые решения. Анализ полученных решений позволил получить лишь качественные оценки о поведении контактных напряжений около конца балки и на бесконечности. В [3] решение указанной задачи сведено к краевой задаче Римана. Здесь построено замкнутое решение и получены асимптотические формулы для контактных напряжений с явно вычисленными коэффициентами.

В предлагаемом коротком сообщении вновь рассматривается указанная выше контактная задача. Решение задачи сведено к разностному уравнению и построено ее замкнутое решение. При помощи построенного решения и анализа функционального уравнения, позволяющее определить структуру аналитического продолжения преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения, предлагается своеобразный подход, позволяющий вычислить коэффициенты соответствующих асимптотических формул в конечном виде.

1. Пусть на границе упругой полуплоскости, отнесенной к декартовой системе координат XOY (OX направлена по краю полуплоскости, OY – по внешней нормали), изгибается полубесконечная балка (цилиндрический изгиб пластинки) с постоянной жесткостью D_0. К концу балки приложены сосредоточенная сила P_0 и момент M_0. При обычном предположении, что в контактной зоне касательные напряжения отсутствуют и контактирование происходит без отрыва балки от края полуплоскости [1-3], требуется определить закон распределения нормальных контактных напряжений, возникающих при контактировании полубесконечной балки с краем полуплоскости.

Решение поставленной задачи будет точным при принятых допущениях, если установленный закон распределения контактных напряжений $q(x)$ обеспечивает как выполнение условия равновесия балки

$$\int_0^\infty q(x)\,dx = P_0, \qquad \int_0^\infty xq(x)\,dx = M_0 \tag{1.1}$$

так и условие контакта между балкой и краем полуплоскости, сводящиеся в итоге к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{s-x}q(s)\,ds=\lambda\int_0^{\infty}\vartheta(s-x)(s-x)^2\,q(s)\,ds,\quad 0<x<\infty$$

$$\lambda=E_1\big/2D_0\left(1-\nu_1^2\right)=6E_1\left(1-\nu_0^2\right)\big/E_0h_0^3\left(1-\nu_1^2\right) \qquad (1.2)$$

В (1.1) и (1.2) $q(x)$–подлежащее определению неизвестное нормальное напряжение, $\vartheta(x)$ – функция Хевисайда, h_0 – толщина балки, E_1,ν_1 и E_0,ν_0 – модули упругости и коэффициенты Пуассона, соответственно, полуплоскости и балки.

Решение уравнения (1.2), с учетом (1.1), ищем в классе функции:

$$q(x)\sim x^{-\gamma}\ (\gamma<1)\quad \text{при}\quad x\to+0$$

$$q(x)\sim x^{-1-\delta}\ (\delta>0)\quad \text{при}\quad x\to\infty \qquad (1.3)$$

Заменив в (1.2) $x=\beta e^{\nu}$, $s=\beta e^{u}$, $\beta=\lambda^{-1/3}$ и применив к ней комплексное преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке, после некоторых преобразований приходим к следующему однородному функционально-разностному уравнению:

$$\operatorname{cth}\pi\alpha\cdot\bar{P}(\alpha)+\bar{P}(\alpha-3i)\big/\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)=0,\ -1<\operatorname{Im}\alpha<-\gamma \qquad (1.4)$$

с условиями, вытекающими из (1.1)

$$\bar{P}(-i)=P_0,\qquad \bar{P}(-2i)=\beta^{-1}M_0=M_* \qquad (1.5)$$

где

$$\alpha=\sigma+i\tau,\ P(u)=\beta q(\beta e^{u}),\ \bar{P}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}P(u)e^{i\alpha u}du \qquad (1.6)$$

Из оценок (1.3) и анализа функционального уравнения следует, что $\delta=3$, а $\gamma=1/2$, которые указывают, что контактные напряжения характеризуются качественными оценками: $q(x)\sim x^{-4}$ при $x\to\infty$ и $q(x)\sim x^{-1/2}$ при $x\to+0$, что согласуется с результатами [1-3]. Таким образом, без решения задачи можно получить качественные оценки о поведении контактных напряжений. Однако для получения асимптотических формул с конкретными коэффициентами, следует построить решение задачи, позволяющее определение этих коэффициентов.

Решение разностного уравнения (1.4) с условиями (1.5) построено методом Койтера [4] и имеет вид

$$\bar{P}(\alpha)=-\frac{2i}{3}Y(\alpha)F(\alpha) \qquad (1.7)$$

$$F(\alpha)=\Gamma(i\alpha)\frac{\operatorname{ch}(\pi\alpha/2)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}\left[P_0\frac{\operatorname{sh}(\pi(\alpha-i)/3)}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha-2i)/3)}-\sqrt{3}M_*\right] \tag{1.8}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, а $Y(\alpha)$ – решение уравнения

$$\operatorname{ch}\pi\alpha/(\operatorname{ch}\pi\alpha-1)=Y(\alpha-3i)/Y(\alpha),\ -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{1.9}$$

$Y(\alpha)$ – регулярная в полосе $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$, там не имеет нулей и удовлетворяет условиям (A – конечная постоянная):

$$Y(-i)=1,\ \ Y(\alpha)\to A \text{ при } |\alpha|\to\infty,\ -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$$

и представляется в виде

$$Y(\alpha)=\exp\left[\int_{-i}^{\alpha}\bar{X}(\xi)d\xi\right]=\exp\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{ch}(u/2)}{(e^{3u}-1)e^u\operatorname{sh}u}\cdot\frac{e^{i\alpha u}-e^u}{u}du\right] \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}\bar{X}(\alpha)=\frac{i\pi}{3\operatorname{sh}2\pi\alpha}\left[\sqrt{3}\left(\operatorname{sh}\frac{2\pi\alpha}{3}-i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{2\pi\alpha}{3}\right)-\right.\\ \left.-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{sh}\frac{4\pi\alpha}{3}-i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{4\pi\alpha}{3}\right)-3i\operatorname{ch}\pi\alpha-2\alpha-5i\right]\end{gathered} \tag{1.11}$$

По обратной формуле Фурье из (1.7) получим решение задачи в виде

$$p(\nu)=\beta q(\beta e^{\nu})=\frac{1}{2\pi}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty}\bar{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}d\alpha,\quad -4<c<-1/2 \tag{1.12}$$

2. Асимптотические формулы, характеризующие поведение контактного напряжения при $x\to+0$ и $x\to\infty$, как обычно, получаются из (1.12) при помощи теоремы Коши о вычетах. Но для этого необходимо определить полюса аналитического продолжения (АП) функции $\bar{P}(\alpha)$ вне полосы $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$ и уметь вычислить соответствующие вычеты в этих полюсах. Ясно, что из (1.12) невозможно непосредственно угадать структуру АП $\bar{P}(\alpha)$. Для этой цели, помимо (1.12), необходимо существенным образом использовать функциональное уравнение (1.4), т.е. параллельно рассматривать АП уравнения (1.4) вне полосы $-1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$.

Рассмотрим сначала АП $\bar{P}(\alpha)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha>-1$, имея при этом в виду, что $\bar{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$. Тогда из функционального уравнения (1.4) следует, что точка $\alpha=-i/2$ может быть простым полюсом для АП $\bar{P}(\alpha)$. С другой стороны, так как $\bar{P}(-3i)$ – конечная величина, то $\overline{P}(0)$ также конечна. Аналогичным образом, из (1.4) следует, что $\overline{P}(i)$ и $\overline{P}(2i)$ – конечные величины, а точки $\alpha = ik$ $(k = 3, 4, ...)$ являются простыми нулями АП $\overline{P}(\alpha)$. Далее, так как $\overline{P}(-5i/2)$ конечна, то опять из (1.4) получим, что точка $\alpha = i/2$ может быть простым полюсом для АП $\overline{P}(\alpha)$. Аналогично, точка $\alpha = 3i/2$ может быть простым полюсом для АП $\overline{P}(\alpha)$, так как $\overline{P}(-3i/2)$ конечна. Точка $\alpha = 5i/2$ может быть уже полюсом второго порядка, так как $\alpha = -i/2$ – простой полюс $\overline{P}(\alpha)$, а $\mathrm{ch}(5\pi i/2) = 0$. Продолжая эти рассуждения, нетрудно убедиться, что аналитическое продолжение в точках–тройках $\{(3n-1/2)i; (3n+1/2)i; (3n+3/2)i\}_{n=0}^{\infty}$ $\overline{P}(\alpha)$ может иметь полюса $(n+1)$-го порядка.

Аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что аналитическое продолжение $\overline{P}(\alpha)$ в области $\mathrm{Im}\,\alpha < -1/2$ имеет полюса $(n+1)$-го порядка в точках–тройках: $\{-(3n+4)i; -(3n+5)i; -(3n+6)i\}_{n=0}^{\infty}$.

Приступим к определению асимптотической формулы для контактных напряжений $q(x)$ при $x \to +0$. Так как $x = e^{\nu}$ и $\nu < 0$ при $x \to +0$, то при выходе из полосы регулярности контур интегрирования в (2.12) следует замыкать в верхней полуплоскости и рассматривать полюса аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$ в области $\mathrm{Im}\,\alpha > -1$. Тогда ограничиваясь четырьмя первыми полюсами (в точках $-i/2$, $i/2$, $3i/2$ имеем простой полюс, а в точке $5i/2$ – полюс второго порядка), при помощи теоремы Коши о вычетах из (2.12) получим

$$\beta q(\beta x) = i\sum_{k=0}^{3} B_{-1}^{\frac{i(2k-1)}{2}} x^{\frac{2k-1}{2}} - B_{-2}^{(5i/2)} x^{5/2} \ln x + O\left(x^{\frac{7}{2}}(\ln x + 1)\right) \qquad (2.1)$$

где $B_{-1}^{(\alpha_k)}$ – вычет аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$ в точках $\alpha_k = (k-1/2)i$ $\left(k = \overline{0,3}\right)$, а $B_{-2}^{(5i/2)} = \lim\limits_{\alpha \to 5i/2} (\alpha - 5i/2)^2\, \overline{P}(\alpha)$.

Вычислим коэффициенты, входящие в разложение (2.1).

Для вычисления $B_{-1}^{(-i/2)}$ АП $\overline{P}(\alpha)$ в точке $\alpha = -i/2$ обратимся к функциональному уравнению (1.4), представив его в виде

$$\lim_{\alpha\to -i/2}\left[\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{(\alpha+i/2)\operatorname{sh}\pi\alpha}\left(\alpha+\frac{i}{2}\right)\overline{P}(\alpha)+\frac{\overline{P}(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)}\right]=0. \tag{2.2}$$

Вычислив предел, получим

$$B_{-1}^{(-i/2)}=\lim_{\alpha\to -i/2}\left(\alpha+\frac{i}{2}\right)\overline{P}(\alpha)=8i\overline{P}(-7i/2)/15\pi \tag{2.3}$$

Таким образом, вычет АП $\overline{P}(\alpha)$ в точке $\alpha=-i/2$ выражается через значение $\overline{P}(\alpha)$ в ее регулярной точке $\alpha=-7i/2$. Вычислив $\overline{P}(-7i/2)$ из (1.7) и подставив ее значение в (2.3), получим

$$B_{-1}^{(-i/2)}=-i\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\left[2P_0-\sqrt{3}M_*\right] \tag{2.4}$$

Аналогичным (2.2)–(2.4) путем, получим

$$\begin{gathered}B_{-1}^{(i/2)}=-\frac{2i}{3}\left[P_0-2\sqrt{3}M_*\right];\quad B_{-1}^{(3i/2)}=i\frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}}\left[P_0-\sqrt{3}M_*\right]\\ B_{-2}^{(5i/2)}=\frac{8}{15\pi\sqrt{3\pi}}\left[2P_0-\sqrt{3}M_*\right]\end{gathered} \tag{2.5}$$

Отметим, что при вычислении вычетов (2.4), (2.5) были использованы значения функции $Y(\alpha)$ в ее регулярных точках $-3i/2,-2i,-7i/2$:

$$Y(-3i/2)=\sqrt{3}/2,\ Y(-5i/2)=\sqrt{2}/2,\ Y(-7i/2)=\sqrt{6}/4 \tag{2.6}$$

Вычислим теперь $B_{-1}^{(5i/2)}$. Так как

$$B_{-1}^{(5i/2)}=\left.\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\alpha-\frac{5i}{2}\right)^2\overline{P}(\alpha)\right)\right]\right|_{\alpha=5i/2}$$

то из (1.7) и (1.8) получим

$$B_{-1}^{(5i/2)}=-\frac{2i}{3}\left(F\left(\frac{5i}{2}\right)y_{-1}^{(5i/2)}+y_{-2}^{(5i/2)}\left.\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=5i/2}\right) \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}y_{-1}^{(5i/2)}=\lim_{\alpha\to 5i/2}\frac{d}{d\alpha}\left((\alpha-5i/2)^2Y(\alpha)\right)\\ y_{-2}^{(5i/2)}=\lim_{\alpha\to 5i/2}(\alpha-5i/2)^2Y(\alpha)\end{gathered} \tag{2.8}$$

Точка $\alpha=5i/2$ уже не принадлежит полосе регулярности $Y(\alpha)$ и прямое вычисление пределов из (2.8) невозможно. Поэтому, обратимся к функциональному уравнению (2.5) и рассмотрим ее аналитическое продолжение из полосы регулярности $-1 < \operatorname{Im}\alpha < -0{,}5$ на всю комплексную плоскость. Равенство (1.9), очевидно, имеет место во всей комплексной плоскости, и где под $Y(\alpha)$ вне интервала $-4 < \operatorname{Im}\alpha < -0{,}5$ понимается ее аналитическое продолжение. Тогда из функционального уравнения (1.9) будем иметь

$$\lim_{\alpha\to 5i/2} \frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{(\operatorname{ch}\pi\alpha - 1)}\left(\alpha - \frac{5i}{2}\right) Y(\alpha) = \lim_{\alpha\to 5i/2}\left(\alpha - \frac{5i}{2}\right) Y(\alpha - 3i) \tag{2.9}$$

Вычислив пределы, имея в виду (2.8), получим

$$y_{-2}^{(5i/2)} = \frac{i}{\pi} y_{-1}^{(-i/2)},\ \ y_{-1}^{(-i/2)} = \lim_{\alpha\to i/2}\left(\alpha + \frac{i}{2}\right) Y(\alpha) \tag{2.10}$$

В свою очередь, опять из функционального уравнения (1.9) получим

$$y_{-1}^{(-i/2)} = \frac{1}{\pi i} Y(-7i/2) \tag{2.11}$$

Тогда из (2.6) и (2.10) будем иметь

$$y_{-2}^{(5i/2)} = \frac{1}{\pi^2} Y(-7i/2) = \frac{\sqrt{6}}{4\pi^2} \tag{2.12}$$

Для вычисления $y_{-1}^{(5i/2)}$ умножим уравнение (1.9) на $(\alpha - 5i/2)$, продифференцируем и вычислим пределы при $\alpha \to 5i/2$, имея при этом в виду (2.8), получим

$$-i\pi y_{-1}^{(5i/2)} + y_{-2}^{(5i/2)}\pi^2 = \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\alpha - \frac{5\mathrm{i}}{2}\right) Y(\alpha - 3i)\right)\right]\Bigg|_{\alpha=5i/2} \tag{2.13}$$

Проводя соответствующие вычисления и имея в виду (2.11), получим

$$y_{-1}^{(5i/2)} = \pi^{-2} Y'(-7i/2) \tag{2.14}$$

Таким образом, вычисление $y_{-1}^{(5i/2)}$ свелось к вычислению $Y'(-7i/2)$. Для ее вычисления обратимся к (1.10). Из (1.10) получим

$$Y'(-7i/2) = Y(-7i/2)\,\bar{X}(-7i/2) \tag{2.15}$$

а из (1.11), раскрывая неопределенность, –

$$\bar{X}\left(-\frac{7i}{2}\right) = -\frac{i}{6}\left[\frac{10\sqrt{3}\pi}{9} + 2 - 3\pi\right] \tag{2.16}$$

которое при помощи (2.15) и (2.14) дает окончательное значение $y_{-1}^{(5i/2)}$

$$y_{-1}^{(5i/2)} = -\frac{i\sqrt{6}}{24\pi^2}\left(\frac{10\sqrt{3}}{9}\pi^2 - 3\pi + 2\right) \tag{2.17}$$

Подставляя (2.12) и (2.17) в (2.7) и учитывая (1.8), получим значение вычета АП $\overline{P}(\alpha)$ в точке $\alpha = 5i/2$ в виде

$$B_{-1}^{(5i/2)} = i\frac{8\sqrt{6}}{45\pi^2}\left(\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)\left(\frac{5\sqrt{3}}{54} - \frac{3\pi}{4} - \psi(-5/2)\right) - \pi M_*\right) \tag{2.18}$$

где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ – известная пси-функция.

Подставляя теперь (2.4), (2.5) и (2.16) в (2.1), получим следующую асимптотическую формулу (ограничиваясь первыми четырьмя членами) для контактных напряжений $q(x)$ при $x \to +0$

$$\begin{aligned}\beta q(\beta x) = {} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}}\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)x^{-1/2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(P_0 - 2\sqrt{3}M_*\right)x^{1/2} - \\ & - \frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}}\left(P_0 - \sqrt{3}M_*\right)x^{3/2} - \\ & - \frac{8\sqrt{6}}{45\pi^2}\left[\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)\left(\frac{5\sqrt{3}}{54} - \frac{3\pi}{4} - \psi\left(-\frac{5}{2}\right)\right) - \pi M_*\right]x^{5/2} - \\ & - \frac{8\sqrt{3}}{45\pi\sqrt{\pi}}\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)x^{5/2}\ln x + O\left(x^{\frac{7}{2}}(\ln x + 1)\right), \qquad x \to 0\end{aligned} \tag{2.19}$$

Асимптотическое представление $q(x)$ при $x \to \infty$ (ограничиваясь опять первыми четырьмя членами) имеет вид

$$\begin{aligned}\beta q(\beta x) = {} & -\frac{P_0\Gamma(4)}{\pi x^4} - \frac{M_*\Gamma(5)}{\pi x^5} + \frac{2\Gamma(6)}{3\pi}\left(P_0 - \sqrt{3}M_*\right)\frac{1}{x^6} + \\ & + \frac{\Gamma(7)}{\pi^2}\left[P_0\left(\frac{9 + 8\pi\sqrt{3}}{27} - \psi(7)\right) - \frac{2\pi}{3}M_*\right]\frac{1}{x^7} + \\ & + \frac{P_0\Gamma(7)}{\pi^2}\frac{\ln x}{x^7} + 0\left(x^{-8}(\ln x + 1)\right) \qquad \textit{при} \quad x \to \infty\end{aligned} \tag{2.20}$$

Из формулы (2.19) следует, что контактные напряжения имеют корневую особенность в точке $x = +0$ и изчезают при $P_0 = \sqrt{3}\lambda M_0/2$. Из (2.20) при $x \to \infty$ контактное напряжение имеет разные порядки убывания от сосредоточенной силы P_0 и момента M_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. // ПММ. 1975. Т.39. Вып.6, С.1100-1109.
2. Нуллер Б.М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. // ПММ. 1974. Т.38. Вып.5. С.876-882.
3. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 1992. Т.45. №1-2.
4. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. //Quart. J. Mech. and Math. 1955. Vol.8. №2.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович

К.ф.-м.н., ведущий н.с.
Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Баграмян 24^{б}
E-mail: karo-aga@mechins.sci.am

Григорян Эдуард Хосровович

Д.ф.-м.н., ЕГУ, факультет математики и механики

АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Адамян В.Г.

Гюмри, Армения

На основе многолетних исследований автора созданы геометрические теории гравитации и межорбитальных переходов космических аппаратов, решены задачи баллистики в рамках этих теорий, разработаны принципы конструирования научных приборов, которые применены в задачах механики.

Цель обзора – охарактеризовать наиболее важные результаты в публикациях автора [1-21] за период 2003-2007 гг., в которых исследования велись по следующим направлениям:

1. Создание геометрической теории гравитации и решение задач баллистики в рамках этой теории.
2. Создание геометрической теории межорбитальных переходов космических аппаратов и выявление траектории оптимального перехода.
3. Конструирование научных приборов и применение их в задачах механики.

Трудно скрыть известную ностальгию по той ушедшей эре, когда в механике царила наглядность, а формальные аспекты были на втором плане. Можно считать бесспорным, что при решении всех задач геометрическим методом проявляются такие положительные качества, как доступность, простота, возможность оперативного изменения параметров решаемой задачи и наглядность полученных результатов.

Наша цель состояла в том, чтобы свести проблемы механики к определению величин при помощи действий над отрезками. Переход физических понятий на геометрический язык позволил нам увидеть эти понятия и решать механические задачи, исходя только из геометрических соображений. Исследуя любые задачи механики, мы всюду стремились изыскать геометрические элементы, изобрести единые установленные правила, по которым можно было бы найти связь между этими элементами. Это позволило нам сводить процесс решения рассмотренных задач к последовательному выполнению приемов, которым достаточно следовать, чтобы получить нужный результат. Мы надеемся, что читатель не обвинит нас в стремлении к наглядности. Что худого в том, что мы в своих исследованиях и доказательствах руководствуемся не только логикой, но и интуицией и глазом? Разве результаты оказались от этого менее достоверными?

Обзор будем вести последовательно, согласно нумерации указанных направлений.

1. В 1687 году Исаак Ньютон опубликовал свою книгу «Математические начала натуральной философии» [22], значение которой для механики трудно

переоценить. Выделим те моменты «Начала», которые явились впоследствии фундаментом новых научных направлений в наших исследованиях.

В четвертом отделе первой книги «Начала» Ньютон предлагал применить алгоритм Евклида определения конических сечений в задачах движения материальных тел и таким образом с поразительной четкостью указал дальнейшее направление возможного развития механики. Он попытался построить теории гравитации на этой основе, но одно обстоятельство не позволило ему осуществить это намерение. Чтобы соблюсти геометрическую однородность и получить количественные результаты, ему надо было вначале дать точную геометрическую интерпретацию понятиям скорости и ускорения, так как невозможно в построениях складывать расстояния со скоростью или с ускорением. Ньютон не сумел создать необходимый геометрический аппарат, поэтому алгоритмы Евклида не позволили ему геометрическими средствами решать поставленные в «Началах» задачи и проблемы механики и довольствоваться объяснением гравитации, далеко не соответствующим его желаниям. Не без серьезных оснований сегодня многие считают, что Ньютон занимался решением этих вопросов из чисто геометрического интереса и в «Началах» привел лишь ранее найденные им результаты, и, что, будто эта часть «Начала» не имеет значения для сколько-нибудь существенного развития науки о небесной механике.

Однако Ньютон не отступает перед возникшими трудностями и изобретает основу дифференциального и интегрального исчисления – нового рода познавательного языка, в котором он нуждался для формулировки общих законов движения. Многие ученые считают, что Ньютон был просто вынужден изобрести дифференцирование и интегрирование, чтобы иметь возможность развивать механику. По мнению Эйнштейна, «... дифференциальный закон является той единственной формой причинного объяснения, которая может полностью удовлетворять современного физика». Однако мы считаем, что принципиально предполагать невозможность подобного объяснения геометрическими методами было бы по меньшей мере преждевременно, так как после Ньютона еще не сделано ни одной попытки решить задачи механики без привлечения методов математического анализа.

Несмотря на всю решительную оппозицию аналитиков против посягательств геометрических методов, мною поставлена задача освободить механику от всех сложных математических выкладок и дать искомой теории гравитации геометрическую форму, при которой приходилось бы пользоваться только построениями с помощью циркуля и линейки. Мы настаивали на том, чтобы каждый шаг в цепи геометрического рассуждения непременно чему-нибудь соответствовал в нашем чувственном опыте. Алгоритм Евклида позволил нам построить собственный геометрический аппарат, который при решении задач механики заменил аппарат математического анализа, и с полной последовательностью вывести все признанные законы механики.

Свою теорию движения материальных тел [1] мы ценим за то, что она открыла для нас истинную гармонию мироздания. Мы испытываем чувство удовлетворения, убеждаясь, как без помощи произвольных вымыслов, но вполне естественно созидается и развивается благоустроенное и стройное целое, столь схожее с природой, и мы не можем не признать нашу геометрическую систему за саму природу.

В монографии «Альмагест-2» [1] развиваются выводы теории и решаются прямая и обратная задачи баллистики. Анализируются оптимальные условия старта и влияние начальных параметров и координат цели на получаемую траекторию. Рассматриваются семейства траекторий одинаковой начальной скорости и одинаковой дальности, а также определяются параметры траекторий максимальной дальности и минимальной начальной скорости. Основное содержание материалов монографии освещено в работах [2-8]. Применением разработанной нами теории гравитации удалось решить также уравнение Кеплера, что позволяет определить положение движущейся точки на орбите или время достижения этого положения [9,10].

2. Для наглядного представления эффективности созданной нами теории гравитации мы исследовали в рамках этой теории задачи межорбитальных переходов, которые настолько важны для астродинамики и в то же время настолько трудны, что все усилия механиков уже давно направлены на их решение. Такие задачи возникают в случаях, когда для достижения поставленной цели требуется переход космического аппарата на другую более подходящую орбиту. Сложность этих задач состоит в том, что переход с одной орбиты на другую желательно осуществить при минимальном расходе топлива или, как говорят, оптимальным образом. При оптимизации движения космического аппарата возникает необходимость достаточно точного определения предполагаемых моментов включения двигательных установок, величины и направлений управляемых ими тяг.

Следует подчеркнуть, что аналитические решения известны лишь для отдельных частных постановок задачи, примером которых являются задачи межорбитального перехода с одной круговой орбиты на другую или перехода между соосными орбитами. Необходимо отметить, что всякие попытки построить точную оптимальную траекторию перелета между компланарными орбитами общего вида на основе известных методов небесной механики не дали должного результата. Одной из причин постигшей ученых неудачи было то, что не представляется возможным известными методами сравнивать между собой по расходу топлива все переходные орбиты, что неизбежно приводит к сравнению лишь небольшого числа случайно выбранных переходов. Мы могли бы подобрать тысячи межорбитальных переходов, но они не говорят ровно ничего об оптимальной орбите. Этим подчеркивается тщетность и бессмысленность усилий ученых, пытающихся определить приближенными методами абсолютно оптимальную траекторию перелета между заданными компланарными орбитами.

Численный анализ космических полетов, проведенный исследователями, показал, что оптимальная переходная орбита в точках приложения импульсов касается заданных орбит [23]. Число таких котангенциальных переходов между компланарными орбитами бесконечно, и они образуют семейство орбит, огибающих заданные орбиты. Уже давно доказано следующее утверждение: геометрическим местом вторых фокусов котангенциальных переходных орбит является кривая второго порядка, фокусы которой совпадают со вторыми фокусами исходных орбит, а фокальная полуось равна разности больших полуосей этих орбит [23]. Наши исследования показали, что это свойство универсально, которое путем некоторых видоизменений можно доказать и при других видах заданных орбит.

В известных работах при нахождении оптимальных переходных орбит, с одной стороны, рассматривается множество переходов по пересекающим переходным орбитам, которые не могут претендовать на оптимальную переходную орбиту. Такие орбиты нужно исключить из рассмотрения, чтобы избежать излишних усилий и времени проектировщиков космических полетов. С другой стороны, не берется в рассмотрение бесконечное множество касательных переходных орбит, каждая из которых может оказаться искомой оптимальной орбитой перелета. Поэтому нет сомнения в том, что в этом вопросе ученые до сих пор действовали вслепую и оперировали одними числами. Это не решение, а только вычисление.

Целью проводимых нами исследований является разработка точного метода решения задачи оптимизации, позволяющего выводить самые строгие суждения об управлении движением космического аппарата при оптимальном переходе между заданными орбитами общего вида. Из вышеизложенного заключили, что оптимальную траекторию перелета нужно искать в семействе котангенциальных переходных орбит, сравнивая между собой по затратам топлива все орбиты этого семейства. Возникает вопрос: существует ли алгоритм, который четко реализовал бы основное свойство котангенциальных переходов? В работе [11] мы смогли разработать такой алгоритм и превратить указанные свойства котангенциальных переходов в механическую теорию, создав необходимый для наших целей геометрический аппарат. При нахождении оптимальной переходной орбиты уже нет необходимости рассматривать большое количество переходных орбит и производить их сравнение по затратам топлива, что характерно для вариационного подхода. Интуитивный подбор различных переходных орбит мы заменили общим алгоритмом определения котангенциальных переходов.

После разработки алгоритма построения текущего котангенциального перехода становится возможным определить в явном виде все необходимые параметры орбиты перелета и управления движением космического аппарата, зависящие от истинной аномалии начала перехода. Это позволило нам свести задачу поиска оптимального решения к нахождению начальной точки перехода на начальной орбите, при которой соответствующий котангенциальный переход был бы искомой оптимальной орбитой перелета. Таким образом, с помощью геометрического исчисления становятся доступными даже вопросы, не разрешимые другими методами. Все важные результаты были достигнуты путем изящного применения средств, имеющихся уже в античной геометрии. Метод, который освободил нас от приближенных расчетов, уже этим будет лучше других.

Основное содержание материалов монографии [11] освещено в работах [12-14].

3. Мы попытались также найти связь между механикой и техникой. Нас в основном интересовали практические вопросы, требующие решения конкретных технических и инженерных задач. Разработанные нами геометрические алгоритмы формообразования исследуемых орбит представляют не только теоретический интерес, но и являются кинематическими схемами возможных механизмов для задания различных движений и воспроизведения искомых физических процессов. Раскрытие образа механизма в совокупности исследуемым закономерностями является залогом успешного решения инженерной задачи и обеспечивает полноценное использование накопленных достижений, созданных теорией гравитации и межорбитальных котангенциальных переходов. Эти алгоритмы позволили нам сконструировать конструктивные схемы семи механизмов, осуществляющих движение звеньев в соответствии с исследуемыми физическими закономерностями. Все эти механизмы защищены авторскими свидетельствами [15-21].

Четыре из этих механизмов предназначены для определения положения движущейся точки на эллиптической, параболической или гиперболической орбите, или времени достижения этого положения [15-18]. Три последних механизма являются прицелами и предназначены обеспечить необходимую связь между линией прицеливания и направлением начальной скорости ракет, благодаря которому ствол ракетной установки автоматически устанавливается по отношению к горизонту под углом возвышения [19-21]. Следует подчеркнуть, что методы математического анализа почти исключают возможность построения таких механизмов, так как при их синтезе нельзя ограничиваться только вычислительными процессами, а нужно также учитывать геометрические свойства кинематических схем разрабатываемых механизмов и представленные им специфические требования.

В заключение отметим, что текст монографии [1,11] занимает 375 печатных страниц, что в сравнении с большими томами известных работ выглядит совсем невнушительным. Но, несмотря на малый объем, мы сумели изложить более общий метод и обширный материал. В этих монографиях представляют интерес также разделы «Итоги и перспективы», в которых перечисляются основные проблемы, которые нужно еще разработать на основе разработанного нами геометрического метода. Это подробный план на долгий срок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамян В.Г. Альмагест – 2. Геометрическая теория гравитации: Монография.- Ереван: ГАСПРИНТ, 2004. – 224с
2. Адамян В. Г., Заимцян Г.М., Адамян В.В. Геометрическое моделирование гиперболического движения тел в гравитационном поле.// Моделирование, оптимизация, управление:- Сб. научн. тр– Ереван: Чартарагет, 2004.- Вып. 7, т.1.- С. 69-76.
3. Адамян В.Г., Манандян Л.Т., Заимцян Г.М, Связь основных параметров кеплеровых движений с начальными условиями движения.// Моделирование, оптимизация, управление:- Сб. научн. тр. – Ереван: Чартарагет, 2004.- Вып. 7, т.2-С. 66-69.
4. Адамян В.Г., Заимцян Г.М. Геометрическое моделирование эллиптического движения тел в гравитационном поле.// Моделирование, оптимизация, управление: Сб.научн. тр – Ереван: Лусакн, 2003. Вып.6, N1. С.9–16.
5. Adamyan V.G., Zayimtsyan G.M., Manandyan L.T. Kinematic and geometric description of the solid motion in the gravity field.// Proceedings of International Conference ”Physics and Control”- Saint Petersburg, 2003 – P. 214-216.
6. Адамян В.Г., Заимцян Г.М., Манандян Л.Т. Геометрическое моделирование параболического движения тел в гравитационном поле.// Вестник ГИУА. Серия Моделирование, оптимизация, управление: -Ереван, 2005; Вып 8, т. 1.- С. 17-28.
7. Adamyan V., Sahradyan A., Zayimtsyan G., Adamyan V.V. The Research of Hyperbolic Motion of Bodies in Gravity Fields Library // 3rd INTERNATIONAL CONFERENCE "PHYSICS AND CONTROL" (PhysCon 2007), 2007, Potsdam, GERMANY: September 3-7.
8. Adamyan V., Sahradyan A., Zayimtsyan G., Adamyan V.V The Research of Elliptic Motion of Bodies in Gravity. Fields Library // 3rd INTERNATIONAL CONFERENCE "PHYSICS AND CONTROL" (PhysCon 2007) 2007, Potsdam, GERMANY: September 3-7.
9. Манандян Л.Т., Адамян В.Г. Определение времени и положения точки в эллиптическом движении.// Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Международная конференция, 1-7 октября: Горис, 2005.- С.242-246.
10. Адамян В.Г, Манандян Л.Т. Определение положения точки и времени при движении по параболической и гиперболической орбитам в поле центральной силы //Изв. НАН Армении. Сер.техн.наук. 2006. Т.59. №4- С.66-73.
11. Адамян В.Г. Геометрическая теория межорбитальных котангенциальных переходов: Монография.- Ереван: Авторское издание, 2007. – 152с.
12. Адамян В.Г, Манандян Л.Т, Заимцян Г.М. Геометрический подход для определения оптимального двухимпульсного перехода между компланар-

ными круговыми орбитами.// Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Международная конференция, 1-7 октября: Горис, 2005.- С.28-32.
13. Адамян В.Г., Заимцян Г.М., Манандян Л.Т., Адамян В.В. Оптимальный выбор траектории перелета космического аппарата между компланарными орбитами общего вида.// Тезисы докладов международной конф. "Механика композитов и оптимальное проектирование".- Ереван, 2006. – С. 18-19.
14. Адамян В.Г., Манандян Л.Т., Заимцян Г.М., Адамян Л.В. Разработка алгоритма формообразования котангенциальных переходов между эллиптической и параболической орбитами.// Актуальные проблемы механики сплошной среды.- Ереван, 2007.- С. 37-39.
15. Манандян Л., Адамян В. Авторское свидетельство PA N 1735 A2. 15.03.20 06.
16. Манандян Л., Адамян В. Авторское свидетельство PA N 1805 A2.15.06.2006.
17. Манандян Л., Адамян В., Заимцян Г., Авторское свидетельство PA N 1335 A2. 15.03.2007.
18. Манандян Л., Адамян В., Заимцян Г., Авторское свидетельство PA N 1976 A2. 15.06.2007.
19. Адамян В. Г., Заимцян Г., Манандян Л., Адамян В. В. Авторское свидетельство PA N 1741 A2. 15.03.2006.
20. Адамян В. Г., Карапетян М., Манандян Л., Заимцян Г., Авторское свидетельство PA N 1937 A2. 15.03.2007.
21. Адамян В. Г., Карапетян М., Манандян Л., Заимцян Г., Авторское свидетельство PA N 1938 A2. 15.03.2007.
22. И. Ньютон Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989.
23. Эрике К. Космический полет. Том 2. - М.: Наука, 1969. – 572 с.

Сведения об авторе:

Адамян Ваник Григорьевич

Д.т.н., проф. зав. кафедрой прикладной механики, профессор
Гюмрийский филиал ГИУА
Адрес: 3103, Гюмри, ул. М. Мкртчяна 2
Тел.: 0312-3-94-79 (раб.), 0312-3-84-94 (дом.)
E-mail: vgadamyan @mail.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДВУХИМПУЛЬСНОГО ПЕРЕХОДА МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ КРУГОВЫМИ ОРБИТАМИ

Адамян В.Г., Манандян Л.Т., Заимцян Г.М.

Гюмри, Армения

Задача перелета космического аппарата (КА) между компланарными круговыми орбитами является одной из наиболее изученных задач механики космического полета [1]. Для такого перелета требуется не менее двух импульсов скорости. С помощью первого импульса скорости КА переводится с начальной круговой орбиты на орбиту перелета, с условием, что переходная орбита должа пересекаться с конечной круговой орбитой или касаться с ней. В момент достижения конечной орбиты КА сообщается второй импульс скорости для перевода его на эту орбиту.

Оптимальную схему двухимпульсного перехода между компланарными круговыми орбитами впервые предложил Гоман [2], которая представляет собой полуэллипс, касающийся меньшей круговой орбиты в перицентре, а большой орбиты в апоцентре [3]. Позднее Лоуден доказал оптимальность подобного маневра. В работе [1] авторами рассмотрен другой способ доказательства, основанный на прямом исследовании минимума зависимости суммарных затрат характерической скорости на двухимпульсный маневр от параметров, которые определяют этот маневр. У нас такой же подход.

Двухимпульсный маневр полностью определяется величиной начального импульса скорости V_1 и углом φ между направлением этого импульса и вектором круговой скорости $V_{КР1} = \sqrt{g_1 r_1}$ в начале маневра M_1 (рис.1). С помощью векторного треугольника вычислим величину скорости КА после приложения первого импульса V_1

$$V_1 = \sqrt{V_{КР1}^2 + V_1^2 + 2V_{КР1}V_1\cos\varphi} \qquad (1)$$

и косинус начального угла наклона траектории

$$\cos\alpha_1 = \left(V_{КР1} + \Delta V_1\cos\varphi\right)/V_1$$

Предполагая, что траектория перелета пересекает круговую орбиту радиусом r_2 в точке M_2, вычислим величину скорости КА в этой точке. На основе интеграла энергии

$$r_1 + h_1 = r_2 + h_2 \qquad (2)$$

где скоростные высоты h_1 и h_2 определяются формулами [4]

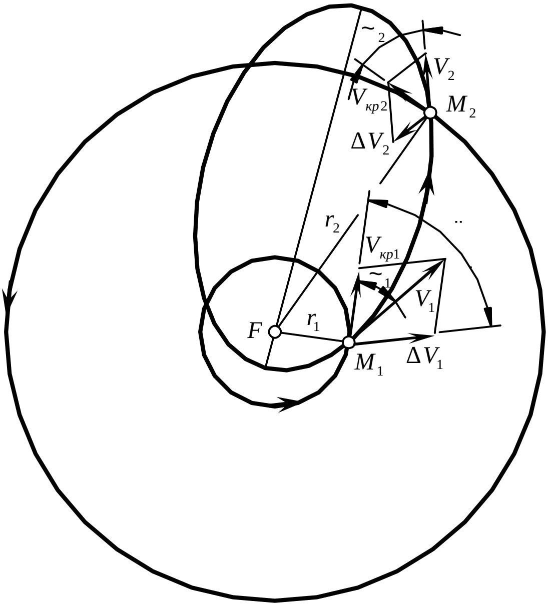


Рис. 1

$$h_1 = \frac{V_1^2 r_1}{2g_1 r_1 - V_1^2}, h_2 = \frac{V_2^2 r_2}{2g_2 r_2 - V_2^2} \qquad (3)$$

Из равенства (2) с учетом (3) и $g_2 r_2^2 = g_1 r_1^2$ после несложных преобразований находим величину скорости КА в точке M_2

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 - 2g_1 r_1^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \qquad (4)$$

Из интеграла площади найдем косинус угла $\sim_2$ наклона траектории

$$\cos\alpha_2 = r_1 V_1 \cos\alpha_1 / r_2 V_2 \qquad (5)$$

Тогда величина второго импульса скорости для перевода КА с траектории перелета на круговую орбиту радиусом r_2 равна

$$V_2 = \sqrt{V_{KP2}^2 + V_2^2 - 2V_{KP2} V_2 \cos\alpha_2} \qquad (6)$$

Суммарное приращение относительной скорости для выполнения маневров

$$V_\Sigma = V_1 + V_2$$

зависит от двух переменных, а именно: величины орбитальной скорости V_1 и угла α_1, определяющего его направление. Очевидно, что существует двухпараметрическое множество траекторий перелетов, выходящие через точку M_1. Тогда каким путем мы можем распознать и выделить искомую оптимальную траекторию перелета из этой совокупности. Здесь особое значение приобретает необходимость отыскания простых алгоритмов, позволяющих путем геометрического анализа быстро проанализировать большое число возможных вариантов орбит и наглядно представить влияние основных параметров, определяющих движение рассматриваемого объекта. Это означает, что необходимо подобрать величину скорости V_1 и его направление α_1, при которых обеспечивается оптимальный переход между заданными круговыми орбитами.

Из равенства (6) следует, что модуль скорости V_2 КА при достижении конечной орбиты зависит от модуля скорости V_1 КА в точке M_1 и не зависит от ее направления α_1. Из этого вытекает, что все траектории перелетов, выходящие через точку M, можно разбить на бесконечное число подсемейства траекторий перелетов одинаковой начальной скорости, зависящие от модуля скорости V_1. Далее внутри каждого подсемейства определим относительную оптимальную траекторию перелета и включим их в новое подсемейство. Очевидно, что в этом подсемействе и нужно искать абсолютно оптимальную траекторию перелета между заданными круговыми орбитами. Такой подход существенно сужает диапазон поиска искомой оптимальной траектории перелета.

Сначала зафиксируем модуль начальной скорости V_1 в точке M_1 и рассмотрим семейства траекторий с одинаковой начальной скоростью. Траектории этого семейства могут пересекаться с конечной орбитой, касаться или не иметь с ней общих точек. Касательная траектория разделяет подсемейство траекторий, пересекающих конечную орбиту в двух точках, от подсемейства траекторий, не имеющих с ней общих точек. Траектории второго подсемейства не достигают конечной орбиты и поэтому непригодны для перелета между заданными круговыми орбитами. Для всех траекторий первого подсемейства и для касательной траектории будут одинаковыми модуль орбитальной скорости V_2 при достижении конечной орбиты. Отсюда следует, что относительно оптимальным будет та траектория, у которой угол наклона α_2 минимальный. Так как у касательной траектории этот угол равен нулю, то она и будет относительно оптимальной.

Теперь рассмотрим семейства траекторий, проходящие через точку M_1 и касающиеся с конечной орбитой, и определим модуль скорости V_1, зависящий от угла α_1 наклона траектории.

Из равенства (5) и (6), принимая $\alpha_2 = 0^0$, после несложных преобразований получим

$$V_1^2 = 2g_1 r_1 r_2 (r_2 - r_1) \Big/ \left(r_2^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha_1 \right) \tag{7}$$

С помощью векторного треугольника, построенного в точке M_1, с учетом (7) и $V_{KP1} = \sqrt{g_1 r_1}$ после несложных преобразований вычислим величину первого импульса скорости V_1

$$\Delta V_1^2 = g_1 r_1 \left(1 + \frac{2r_2 \left(r_2 - r_1 \right)}{r_2^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha_1} - 2\sqrt{\frac{2r_2 \left(r_2 - r_1 \right)}{r_2^2 - r_1^2 \cos^2 \alpha_1}} \cdot \cos \alpha_1 \right) \tag{8}$$

Исследуя (7) и (8) на экстремум, как функции от угла наклона α_1, можно сделать вывод, что при $\alpha_1 = 0^0$ орбитальная скорость V_1 и первый импульс скорости V_1 получают, соответственно, свои максимальные и минимальные значения.

Увеличение скорости V_1 приведет к увеличению орбитальной скорости V_2 и уменьшению модуля второго импульса V_2. Таким образом, при реализации оптимальной траектории перелета необходимо движущейся по начальной орбите КА сообщить импульс, направленный вдоль его орбитальной скорости. Величина импульса выбирается таким образом, чтобы переходная эллиптическая орбита в дальнейшем касалась с конечной орбитой. В момент достижения апоцентра переходной орбиты КА сообщается второй импульс, также направленный вдоль орбитальной скорости. Этим импульсом КА переводится на конечную орбиту.

Из равенств (7) и (4), с учетом $\alpha_1 = 0^0$ после несложных преобразований получим величины орбитальных скоростей V_1 и V_2 для оптимальной траектории перелета

$$V_1 = \sqrt{2g_1 r_1 r_2 \big/ \left(r_1 + r_2 \right)}\,,\; V_2 = \sqrt{2g_1 r_1^3 \big/ r_2 \left(r_1 + r_2 \right)} \tag{9}$$

На основании $V_1 = V_1 - V_{\text{кр}1}$ и $V_2 = V_{\text{кр}2} - V_2$, с учетом (9), $V_{KP1} = \sqrt{g_1 r_1}$ и $V_{KP2} = \sqrt{g_1 r_1^2 / r_2}$, после несложных преобразований получим соответствующие импульсы скорости V_1 и V_2 для реализации оптимальной траектории перелета

$$V_1 = \sqrt{g_1 r_1}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 - r_2}} - 1\right),\ V_2 = \sqrt{\frac{g_1 r_1^2}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right)$$

направления которых совпадают с направлениями круговых скоростей V_{KP1} и V_{KP2}, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 445 с.
2. Гоман В. Досягаемость небесных тел. / В кн.: Н.А. Рынина “Теория космического полета ”. – М.: Изд–во АН СССР, 1932.
3. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1965.
4. Адамян В.Г. Альмагест–2. Геометрическая теория гравитации. Ереван: Гаспринт, 2004. 224 с.

Сведения об авторах:

Адамян Ваник Григорьевич

Д.т.н., проф., зав. кафедрой прикладной механики ГИУА
Гюмрийский филиал
Тел.: (+312)3-94-79 (раб.), (+312)3-60-03 (дом.)
E-mail: vgadamyan@mail.ru

Манандян Левон Туманович

К.т.н., доц. кафедры прикладной механики ГИУА Гюмрийский филиал
Тел.: (+312) 3-93-94 (раб.) (+312) 3-60-03 (дом.)
E-mail: roman@gyumri.am

Заимцян Геворг Микаелович

К.т.н., доц. кафедры прикладной механики ГИУА Гюмрийский филиал
Тел.: 3-94-79 (раб.), 3-43-21 (дом.)
E-mail: zgev@mail.ru

О РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ШТАМПОВ ПО ГРАНИЦЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ереван, Армения

Пусть по границе составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщиной h с коэффициентами Ламэ ª$_1$, «$_1$ и упругой полуплоскости с коэффициентами ª$_2$, «$_2$ с постоянной скоростью v_0 движется периодическая, с периодом $2L$, система абсолютно жёстких штампов, на каждый из которых действуют нормальная P и горизонтальная Q силы (рис.1). Будем считать, что полоса сцеплена с полуплоскостью, скорость движения штампов v_0 меньше скорости распространения поверхностных волн в составной полуплоскости, а в зонах контакта штампов с составной полуплоскостью имеет место сухое трение и касательные контактные напряжения, действующие под штампами, связаны с нормальными контактными напряжениями по закону Кулона т.е.

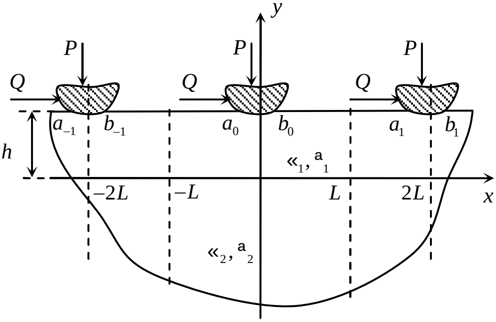


Рис.1

$$² (x) = f ± (x) \qquad (1)$$

где f – коэффициент трения.

Ставится задача: определить контактные напряжения, действующие под абсолютно жёсткими штампами и на линии контакта полуплоскости с полосой.

В движущейся со скоростью v_0 системе координат условие контакта абсолютно жёстких штампов с полуплоскостью имеет вид

$$v(x) = c + g(x); \quad (a_n < x < b_n; \ a_n = a + 2nL; \ b_n = b + 2nL; \ n \in) \qquad (2)$$

где $\mathrm{v}(x)$ – нормальные смещения точек границы составной полуплоскости, c – жёсткие смещения штампов, а $\mathrm{g}(x)$ – функция, описывающая геометрическую форму оснований штампов.

Используя результаты работы [1] и принцип суперпозиции, производную нормальных смещений точек границы составной полуплоскости под действием периодической системы нормальных нагрузок p и касательных нагрузок q, можно записать в виде следующего выражения:

$$
\begin{gathered}
v'(x) = -\frac{p}{\text{®«}_1} g_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-2nL} + \int_0^{\infty} \frac{F(kh)}{\Delta(kh)} \sin k(x-2nL)\,dk \right) + \\
+\frac{q}{\text{®«}_1} g_1 g_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\text{®}\delta(x-2nL) + \int_0^{\infty} \frac{G(k)}{\Delta(k)} \cos k(x-2nL)\,dk \right)
\end{gathered} \qquad (3)
$$

Здесь использованы обозначения:

$$g_1 = \frac{(1-\ _1)\sim_{11}}{2R_1^-};\ g_0 = \frac{C_1^-}{(1-\ _1)\sim_{11}};\ \sim_{ij} = \sqrt{1-v_0^2/c_{ij}^2};\quad _j = 1 - v_0^2/2c_{2j}^2$$

$$\sim_\pm = \sim_{11} \pm \sim_{21};\ R_i^\pm = \ _i^2 \pm \sim_{1i}\sim_{2i};\ C_i^\pm = \ _i \pm \sim_{1i}\sim_{2i};\ H_i^\pm = 1 \pm \sim_{1i}\sim_{2i};\ (i, j = 1, 2)$$

$$\Delta(k) = \text{«}^2 R_2^- + R_1^- \left(d_1^- (\operatorname{ch}\sim_+ k - 1) + d_2^+ \operatorname{sh}\sim_+ k \right) + R_1^+ \left(d_1^+ (\operatorname{ch}\sim_- k - 1) + d_2^- \operatorname{sh}\sim_- k \right)$$

$$
\begin{gathered}
F(k) = R_1^- \left(d_2^+ - d_1^- \right) \exp(-\sim_+ k) + \left(R_1^- d_2^- - R_1^+ d_1^+ \right) \operatorname{ch}\sim_- k + \\
+\left(R_1^- d_1^+ - R_1^+ d_2^- \right) \operatorname{sh}\sim_- k + \text{«}^2 R_2^- - R_1^- d_1^- - R_1^+ d_1^+
\end{gathered}
$$

$$G(k) = \frac{1}{C_1^-} \left(\left(R_1^- C_1^+ - R_1^+ C_1^- \right) \left(d_1^+ (\operatorname{ch} k\sim_- - 1) + d_2^- \operatorname{sh} k\sim_- \right) + \text{«} \left(R_1^- C_2^- - \text{«} R_2^- C_1^- \right) \right)$$

$$d_1^\pm = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sim_{11}\sim_{21}(1-\ _1)^2} \left(R_1^\pm H_2^- - 2\text{«} C_1^\pm C_2^- + \text{«}^2 H_1^\pm R_2^- \right); d_2^\pm = \frac{1}{2} \circ \left(\frac{\sim_{12}}{\sim_{11}} \pm \frac{\sim_{22}}{\sim_{21}} \right)$$

$$\text{«} = \frac{\text{«}_2}{\text{«}_1};\ \circ = \frac{\circ_2}{\circ_1};\ c = \frac{c_{22}^2}{c_{21}^2} = \frac{\text{«}}{\circ}$$

Ввиду периодичности задачи будем рассматривать только основной период $[-L, L]$. В этом случае для рядов, входящих в (3), имеем следующие выражения [2]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-2nL} = \frac{\text{®}}{2L} \operatorname{ctg} \frac{\text{®} x}{2L};\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2nL) = \delta(x);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2Ln} = \frac{\text{®}}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{\text{®} m}{L} \right)$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ik(x-2nL)}\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2nL}\,dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik2nL}\,dk = \\
= \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} \frac{\text{®}}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{\text{®} m}{L} \right) dk = \frac{\text{®}}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\text{®} m}{L} \right) e^{i\frac{\text{®} m}{L} x}
\end{gathered}
$$

$$K_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F(kh)}{\Delta(kh)} \sin k(x-2nL)\,dk = \frac{\text{®}}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(h\text{®}n/L)}{\Delta(h\text{®}n/L)} \sin \frac{\text{®} n}{L} x$$

$$\mathrm{K}_2(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{G(kh)}{\Delta(kh)}\cos k(x-2nL)\,dk=\frac{\circledR}{L}\left(\frac{1}{2}\frac{G(0)}{\Delta(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(h\circledR n/L)}{\Delta(h\circledR n/L)}\cos\frac{\circledR n}{L}x\right)$$

Таким образом, для нормальных смещений точек границы составной полуплоскости под действием контактных напряжений $p(x)$ и $q(x)$, действующих на интервале $[a,b]\in[-L,L]$, можем записать следующее выражение:

$$\mathrm{v}'(x)=-\frac{\mathsf{g}_1}{\circledR}\int_a^b\frac{\circledR}{2L}\mathrm{ctg}\frac{\circledR(x-s)}{2L}\frac{\pm(s)}{\text{«}_1}ds-\frac{\mathsf{g}_1}{\circledR}\int_a^b\mathrm{K}_1(x-s)\frac{\pm(s)}{\text{«}_1}ds+$$
$$+\mathsf{g}_1\mathsf{g}_0\frac{{}^{2}(x)}{\text{«}_1}+\frac{\mathsf{g}_1\mathsf{g}_0}{\circledR}\int_a^b\mathrm{K}_2(x-s)\frac{{}^{2}(s)}{\text{«}_1}ds \tag{4}$$

Дифференцируя условие контакта (2) по x, подставляя значения $\mathrm{v}'(x)$ из (4) и учитывая соотношение (1), получим следующее сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$f\mathsf{g}_0\frac{\pm(x)}{\text{«}_1}+\frac{1}{\circledR}\int_a^b\frac{\circledR}{2L}\mathrm{ctg}\frac{\circledR(s-x)}{2L}\frac{\pm(s)}{\text{«}_1}ds+$$
$$+\frac{1}{\circledR}\int_a^b\left(\mathrm{K}_1(s-x)+f\mathsf{g}_0\,\mathrm{K}_2(s-x)\right)\frac{\pm(s)}{\text{«}_1}ds=\frac{\mathrm{g}'(x)}{\mathsf{g}_1} \tag{5}$$

К этому уравнению нужно добавить условие равновесия штампов

$$\int_a^b\pm(s)\,ds=P \tag{6}$$

Решение уравнения (5) проводится численно-аналитическим методом дискретных особенностей [3].

Для использования метода дискретных особенностей произведем замену переменных

$$x=d+lt;\quad s=d+l{}^{2}\;;\quad\left(d=\frac{b-a}{2};l=\frac{b+a}{2};\right)\quad s,x\in(a,b)$$

Ядро Гильберта заменим на ядро Коши с регулярной добавкой и введём обозначения

$$\pm^*(t)=\frac{l}{P}\pm(d+lt);\;\mathrm{g}^*(t)=\frac{l\text{«}_1}{P\mathsf{g}_1}g'(d+lt)$$

$$\mathrm{K}^*(t)=\frac{1}{\circledR}\left(\frac{\circledR l}{2L}\mathrm{ctg}\frac{\circledR tl}{2L}-\frac{1}{t}+lK_1(lt)+f\mathsf{g}_0lK_2(lt)\right)$$

получим

$$f\text{g}_0 \pm^*(t) + \frac{1}{\text{®}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\text{²}-t}\pm^*(\text{²})\,d\text{²} + \frac{1}{\text{®}}\int_{-1}^{1}\text{K}^*(\text{²}-t)\pm^*(\text{²})\,d\text{²} = \text{g}^*(t) \tag{7}$$

Условие равновесия штампов при этом примет вид

$$\int_{-1}^{1}\pm^*(\text{²})d\text{²} = 1$$

Используя известные результаты Н.И.Мусхелишвили [4] о поведении сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования, решение уравнения (7) представим в виде

$$\pm^*(t) = (1-t)^{\sim}(1+t)\quad \text{¨}(t) = \mu(t)\,\text{¨}(t) \tag{8}$$

где $\sim$ и определяются из системы

$$\text{ctg}(\sim\text{®}) + f\text{g}_0 = 0;\quad 0<|\sim|,|\ \ |<1;\quad \sim + \ \ = -\text{©}$$

© – индекс уравнения (7), который может принимать значения 1,0,-1 в зависимости от поведения искомой функции в точках ± 1.

Неизвестную функцию $\text{¨}(t)$ заменим интерполяционным многочленом $\text{¨}_n(t)$, определяемым формулой

$$\text{¨}_n(t) = \sum_{m=1}^{n}\frac{\text{¨}_m\,\text{P}_n^{(\sim,\ )}(t)}{(t-\text{²}_m)\,\text{P}_n'^{(\sim,\ )}(\text{²}_m)} \tag{9}$$

где $\text{¨}_m = \text{¨}_n(\text{²}_m)$; $\{\text{²}_m\}_{m=1}^{n}$ – корни многочлена $\text{P}_n^{(\sim,\ )}(t)$. Подставляя представление функции $\pm^*(t)$ из (8) в (7) и в условие равновесия штампов, приходим к системе $n-\text{©}+1$ алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{n}\text{¨}_m\,\text{¡}_m\left(\frac{1}{\text{²}_m - t_k} + \text{®}K^*(\text{²}_m - t_k)\right) = \text{g}^*(t_k)$$

$$\sum_{m=1}^{n}\text{¨}_m\,\text{¡}_m = 1 \tag{10}$$

Здесь

$$\text{¡}_m = -\frac{1}{2^{\text{©}}\sin\text{®}\sim}\,\frac{\text{P}_{n-\text{©}}^{(-\sim,-\ )}(\text{²}_m)}{\text{P}_n'^{(\sim,\ )}(\text{²}_m)}$$

а $\{t_k\}_{k=1}^{n-\text{©}}$ – корни многочлена $\text{P}_{n-\text{©}}^{(-\sim,-\ )}(t)$.

Проведён численный анализ поставленной задачи в случае штампов с плоским основанием, и выявлены закономерности изменения контактных напряжений, действующих как под штампами, так и на линии стыка полуплоскости с полосой в зависимости от скорости движения штампов, физических и геометрических характеристик контактирующих тел.

Часть полученных результатов для случая, когда ρ=1, ν_1=ν_2=0.3, v_0=0.4c_{21},

f=0.27, $l = h$, L=1.5h, приведена в виде графиков (рис. 2,3). Из них явствует, что чем материал полуплоскости жёстче материала полосы, тем больше контактные напряжения в передней части штампов. На линии же стыка полосы с полуплоскостью имеет место обратное явление.

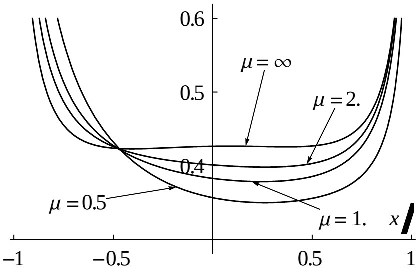


Рис.2

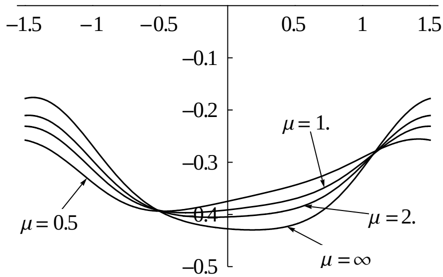


Рис.3

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирджанян А.А. О равномерном движении силовых нагрузок по границе кусочно-однородной полуплоскости. //В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Ереван. 2007.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280с.
3. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учётом тепловыделения. //ПММ. Т. 46. Вып. 3.1982.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510 с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наследникович
Д.ф.-м.н., директор Института механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 52-48-90
E-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович
Магистр ЕГУ
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 52-48-90
E-mail: amirjanyan@gmail.com

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГОСЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ПЕРЕОБУСЛОВЛИВАНИЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МАТРИЦ

Акопян Ю.Р.

Ереван, Армения

Метод конечных элементов, созданный вначале для решения уравнений строительной механики и теории упругости, в настоящее время является одним из эффективных вычислительных средств решения дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих различные физические процессы. С математической точки зрения метод можно рассматривать как обобщение классического метода Ритца-Галеркина, использующее кусочно-полиномиальные пробные функции [1]. Метод конечных элементов незаменим при решении задач в областях сложной геометрической формы – тогда компьютер используется не только для решения систем сеточных уравнений, но и для построения дискретных аппроксимаций.

Процесс решения краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными с помощью метода конечных элементов состоит, в основном, из следующих двух этапов:

– конечноэлементная аппроксимация краевой задачи;

– решение полученной системы сеточных уравнений.

В случае линейного дифференциального уравнения система сеточных уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, неизвестные которой являются значениями искомого приближенного решения в узлах сетки. При этом алгебраическая система обладает следующими характерными особенностями:

– система имеет высокий порядок, пропорциональный числу узлов сетки;

– матрица системы является разреженной;

– система, как правило, плохо обусловлена.

Все это является причиной того, что применение общих стандартных методов линейной алгебры для решения систем сеточных уравнений не всегда целесообразно. В связи с этим возникла необходимость в разработке специальных эффективных методов, учитывающих специфику задачи и позволяющих найти решение системы, затрачивая меньший объем вычислительной работы по сравнению с общими методами линейной алгебры.

Конечноэлементная аппроксимация двумерной самосопряженной эллиптической краевой задачи приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$Au = g \qquad (1)$$

с симметричной положительно определенной матрицей A. В случае кусочно-линейной аппроксимации на треугольной сетке матрица A имеет порядок $n = O(h^{-2})$, где h – шаг сетки. Системы сеточных уравнений (1) решаются, в основном, с помощью итерационных методов. Может быть применен, например, двухслойный чебышевский метод

$$\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{\mu_k} = -Au^{(k)} + g\ , \qquad k = 0,1,2,... \tag{2}$$

где μ_k есть специальным образом выбранные параметры, либо широко используемый метод сопряженных градиентов [2]. Скорость сходимости итерационного метода (2) (так же, как и метода сопряженных градиентов) зависит от *числа обусловленности* $\copyright(A)$ матрицы A, определяемого следующим образом:

$$\copyright(A) = \text{а}_{\max} / \text{а}_{\min} \tag{3}$$

где $\text{а}_{\max}$ и $\text{а}_{\min}$ есть соответственно наибольшее и наименьшее из собственных чисел матрицы A. Чем больше число обусловленности, тем больше итераций требуется проделать для достижения заданной точности [2], то есть увеличение числа обусловленности приводит к увеличению числа арифметических операций и, в конечном итоге, к увеличению машинного времени, требуемого для решения системы (1). Известно, что число обусловленности матрицы A растет с уменьшением шага h сетки. Например, в случае кусочно-линейной аппроксимации имеем $\copyright(A) = O(h^{-2})$. Поэтому в рассмотрение вводится так называемая *переобусловливающая матрица* или *переобусловливатель* M и вместо системы (1) рассматривается система

$$M^{-1}Au = M^{-1}g \tag{4}$$

(матрица M симметричная и положительно определенная). Соответственно, итерационный процесс (2) для системы (4) принимает вид

$$M\,\frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{\mu_k} = -Au^{(k)} + g\ , \qquad k = 0,1,2,... \tag{5}$$

Теперь уже скорость сходимости итерационного метода (5) зависит от числа обусловленности

$$\copyright(M^{-1}A) = \text{«}_{\max} / \text{«}_{\min} \tag{6}$$

где $\text{«}_{\max}$ и $\text{«}_{\min}$ есть соответственно наибольшее и наименьшее из собственных чисел матрицы $M^{-1}A$. Заметим, что в методе (5) переход от k-го приближения $u^{(k)}$ к $(k+1)$-му приближению $u^{(k+1)}$ осуществляется следующим образом:

- $r^{(k)} = -Au^{(k)} + g$
- $Mz^{(k)} = r^{(k)}$
- $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \mu_k z^{(k)}$

Как видим, здесь присутствует одна важная операция – решение системы с матрицей M. Поэтому к переобусловливателю M предъявляются, как правило, два основных требования. Во-первых, матрица M должна хорошо аппроксимировать матрицу A в том смысле, что число обусловленности $\copyright(M^{-1}A)$ должно быть существенно меньше числа обусловленности $\copyright(A)$ матрицы A. Во-вторых, в процессе реализации итерационного метода с переобусловливателем приходится неоднократно решать системы с матрицей M, и поэтому эта операция должна быть легко осуществимой. В силу перечисленных требований, матрицу M рассматривают в качестве *оптимального переобусловливателя* для матрицы A, если:

– матрица M спектрально эквивалентна матрице A в том смысле, что существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, не зависящие от порядка матрицы, что

$$c_1 v^T M v \le v^T A v \le c_2 v^T M v \qquad \forall v \tag{7}$$

в этом случае $\copyright(M^{-1}A) \le c_2 / c_1$, и число итераций, необходимых для получения решения системы (4) с заданной точностью, не зависит от порядка этой системы;

– число арифметических операций, требуемых для решения одной системы с матрицей M, пропорционально числу неизвестных.

Техника и методы построения переобусловливателей для конечно-элементных матриц довольно разнообразны. В частности, для построения оптимальных переобусловливателей хорошо приспособлены *многосеточные процедуры с внутренними итерациями*.

Алгебраические многосеточные методы переобусловливания с внутренними итерациями были предложены практически одновременно в работах У.Аксельсона и П.Вассилевского [3] и Ю.А.Кузнецова [4]. Направление, представленное в работе [3], и развитое в последующих работах этих же авторов, получило название *алгебраических методов многоуровневых итераций* (Algebric Multilevel Iteration Methods). Второе направление, начало которому было положено в [4] и в основе которого лежит разбиение сеточной области на малые подструктуры, было названо *алгебраическими многосеточными методами с разбиениями на подструктуры* (Algebric Multigrid / Substructuring Methods). Отличительной чертой обоих направлений, между которыми существует тесная внутренняя связь, является возможность построения переобусловливателей чисто алгебраическим путем. Свое дальнейшее развитие эти направления получили в работах Ю.Р.Акопяна и Ю.А.Кузнецова [5], У.Аксельсона и Ю.Р.Акопяна [6], У.Аксельсона, Ю.Р.Акопяна и Ю.А.Кузнецова [7] и др.

Идея построения переобусловливателей в рамках алгебраических многосеточных методов с разбиениями на подструктуры состоит в следующем. В основе всей конструкции лежит строящаяся по определенному принципу последовательность иерархических сеток. Далее, на каждом уровне измельчения сетки для имеющейся матрицы жесткости строится так называемый *двухсеточный переобусловливатель* – путем исключения определенных связей между некоторыми узлами сетки внутри локальных конечноэлементных структур (элементов, суперэлементов и др.). В результате дополнение Шура двухсеточного переобусловливателя лишь числовым множителем отличается от матрицы жесткости на более грубой сетке. Многосеточный переобусловливатель строится путем замены дополнения Шура в блочном представлении двухсеточного переобусловливателя на задаваемые неявно и рекурсивно определяемые матрицы. Эта рекурсия использует на каждом уровне измельчения сетки некоторые итерационные процедуры (например, чебышевские итерации), в которых в качестве переобусловливающей матрицы берется многосеточный переобусловливатель с предыдущего уровня, соответствующего более грубой сетке. Иначе говоря, многосеточный переобусловливатель для исходной матрицы жесткости строится рекурсивно, от одного уровня к другому, вплоть до самой грубой сетки, где система сеточных уравнений решается с помощью некоторого прямого метода (обычно эта система имеет небольшой порядок). При этом, благодаря способу декомпозиции сеточных структур, в процессе выполнения одного шага переобусловливания на промежуточных уровнях происходит обращение простых матриц (диагональных, либо блочно-диагональных с диагональными блоками низкого порядка). Тем самым шаг переобусловливания, заключающийся в переходе от самой мелкой сетки к самой грубой и обратно, предполагает лишь следующие вычислительные операции: *сложение векторов, умножение вектора на число, умножение матрицы на вектор* и *решение алгебраической системы низкого порядка на самой грубой сетке*.

Разработанные в работах [4,5] общие принципы построения алгебраических многосеточных переобусловливателей с внутренними итерациями позволяют строить оптимальные переобусловливатели не только для линейных конечных элементов, но также и для конечных элементов высокого порядка [8,9,10], включая серендиповые конечные элементы [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
2. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. Axelsson O. and Vassilevski P. S. Algebraic multilevel preconditioning methods. I. – *Numer. Math.,*56, 1989, 157-177.
4. Kuznetsov Yu. A. Algebraic multigrid domain decomposition methods. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling,* v. 4, № 5, 1989, 351-379.
5. Hakopian Yu. R. and Kuznetsov Yu. A. Algebraic multigrid/substructur-ing preconditioners on triangular grids. – *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling,* v. 6, № 6, 1991, 453-483.
6. Axelsson O. and Hakopian Yu. R. Algebraic multilevel preconditioners for perturbed finite element matrices. – *East - West J. Numer. Math.,* v. 6, № 1, 1997, 1-22.
7. Axelsson O., Hakopian Yu.R. and Kuznetsov Yu.A. Multilevel preconditioning for perturbed finite element matrices. – *IMA J. Numer. Anal.,*17, 1997, 125-149.
8. Hakopian Yu. Algebraic multilevel preconditioners for third order finite element approximation.- *Algebra, Geometry & their Applications* (Seminar Proceedings), Yerevan State University, v.1, 2001, 20-39.
9. Hakopian Yu.R. and Hovhannisyan H.A. Algebraic multilevel preconditioners for third order finite element approximations in rectangular domains.- *Algebra, Geometry & their Applications* (Seminar Proceedings), Yerevan State University, v.2, 2002, 58-72.
10. Акопян Ю.Р., Григорян А.Б. Об одном способе построения много-сеточных переобуславливателей для конечноэлементных матриц.- *Вестник РАУ, серия: физико-математические и естественные науки*, Ереван, Российско-Армянский (Славянский) государственный ун-т, No.2, 2006, 35-48.
11. Hakopian Yu.R. and Harutyunyan A.S. Two-level preconditioners for serendipity finite element matrices.- *Numer. Linear Algebra Appl.*, v.13, No.10, 2006, 847-864.

Сведения об авторе:

Акопян Юрий Рубенович

Д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой численного анализа и математического моделирования, Ереванский государственный университет
Адрес: Ереван, ул А.Манукяна 1
Тел.: (+37410)57-51-40
E-mail: yuri@arminco.com

GENERAL APPROACH TO DESCRIPTION OF TIME-DEPENDENT MATERIAL BEHAVIOUR

Alexeeva S.I., Mosin A.V., Suvorova J.V.
Москва, Россия

It is well known that polymer materials show time-dependent (or viscous) behavior, some even at low temperature. The constitutive equation should therefore include not only stresses and strains, but also time. During the last hundred years viscous properties of materials have been extensively investigated. Models developed starting from simple differential equations consisting of a few terms to complex integral equations with infinite number of terms (see, e.g., [1], which contains a comprehensive bibliography).

The theory of elastic after-effect in solids was first formulated by Boltzmann [2] in 1876 and was then forgotten for a long time. At the beginning of our century, independent of Boltzmann, the Italian mathematician Volterra obtained the same results [3-4]. He named this theory the hereditary type theory. Wide application of this model, however, was found only about 30 years ago.

The Volterra works are devoted in general to linear integral equations. Much work has been done for the generalization of the equation for the conditions of nonlinearity, which are important for certain materials [1,4-6].

A feasible way was attempted by introducing the nonlinear Rabotnov's equation [1], which was proposed in 1948, but received practical application only during last thirty years:

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \qquad (1)$$

This equation is distinguished from linear one by the introduction of the concept of the instantaneous deformation curve, that is the left side of the equation. Any process of deformation occurring in finite time is characterized by a curve, which lies underneath the instantaneous deformation curve. Putting $t = 0$, the integral part of (1) vanishes and the instantaneous curve is obtained, $\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t)$. (Practically, this is ordinary nonlinear elasticity). At $t > 0$, the integral part contributes to the equation and the associated $\sigma \sim \varepsilon$ curve becomes lower.

In the present work, we shall apply equation (1). Selection a kernel of linear integral equation is an elaborated task. But it occurs that for a nonlinear equation (1) the simplest kernel can be used, because the exactness of calculations is ensured by proper choice of $\varphi(\varepsilon)$ [7]. We shall employ here Abel's kernel:

$$K(t-\tau) = \frac{k}{(t-\tau)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (2)$$

This kernel has only two parameters.

For some types of loading equation (1) with (2) can be simplified to algebraic form. It is very important for the engineering purposes. The advantage of the approach consists in the fact that long-time behavior of a material can be predicted using the set of parameters determined in short-time laboratory experiments.

Below the experiments will describe made on the polymer material POM (polyoximethylene) at various types of loading: loading with various strain rates, creep and relaxation.

1. Procedure of parameter determination

The material POM in the form of specimens made from pultruded rod was tested at three various rates of loading $\varepsilon : 0.0004, 0.0038, 1.1 \;\; 1/s$. The experimental curves are shown in Fig.1. Easier way for determination of the parameters is to carry out the loading with constant rate of stress changing $\dot{\sigma} = const$. In such a case equation (1) can be integrated:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma\left(1 + \frac{k}{(1-\alpha)(2-\alpha)} t^{1-\alpha}\right) \tag{3}$$

But because we have experiments made with $\dot{\varepsilon} = const$, the next steps must be undertaken. At first we suggest that in the interval $0 \le \varepsilon \le 1\%$ relation between stress and strain is linear, $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$. Taking into account this relation, we can use the law $\dot{\sigma} = const$ for the equation (1), so equation (3) will be justified, where $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$. Let us take £ = 1% and for three strain rates take corresponding values of $\sigma : \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Using (3) the following relations can be written:

$$\pm_1\left(1 + \frac{k}{(1-\sim)(2-\sim)} t_1^{1-\sim}\right) = \sigma_2\left(1 + \frac{k}{(1-\alpha)(2-\alpha)} t_2^{1-\alpha}\right)$$

$$\pm_1\left(1 + \frac{k}{(1-\sim)(2-\sim)} t_1^{1-\sim}\right) = \pm_3\left(1 + \frac{k}{(1-\sim)(2-\sim)} t_3^{1-\sim}\right)$$

Parameters α and k can be determined from these relations: $\alpha = 0.913$, $k = 0.025 s^{-(1-\alpha)}$.

The next suggestion is that the parameters ~ and *k* determined for linear parts of curves, will be the same in the nonlinear region. It can be shown that a mistake, which arises from such type suggestion, will be negligible. At last, it is necessary to build curve $\varphi(\varepsilon)$. The procedure is very ease if we use equation (3), know values of α and k and take into consideration any curve $\sigma \sim \varepsilon$. Right part of equation (3) can be calculated and $\varphi(\varepsilon)$ can be built. Here we use for calculation $\varphi(\varepsilon)$ the lower curve received with $\dot{\varepsilon} = 0.0004 \;\; 1/s$, Fig.1. (For the engineering applications this curve can be approximated by any expression, for example by some polynomial or logarithm).

It must be underlined that the procedure of parameters determination can be fulfilled not only with the help of stress-strain diagrams, but also using creep curves (with help of isochronal diagrams) and using relaxation data (with help of one stress-strain diagram received with any loading rate).

2. Description of experimental results

Below we shall consider three types of loading: loading with constant strain rate, $\dot{\varepsilon} = const$, creep conditions, $\sigma = const$ and relaxation, $\varepsilon = const$. For the calculations determined parameters α and k were used and $\varphi(\varepsilon)$, Fig.1.

2.1. Tension with constant rates

Having known the values of k, α and $\varphi(\varepsilon)$, it is possible now to calculate diagram $\sigma \sim \varepsilon$ with any loading rate with help of equation (3). Calculations for strain rates 0.0038 and 1.1 1/s are shown in Fig.1.

2.2. Creep

Experiments on creep were carried out at three levels of stress σ_* = 74, 70 and 66 MPa, Fig.2 and 3. At first material was loaded with constant stress changing $\dot{\pm}$ =0.8 MPa up to σ_*:

$$\sigma = \dot{\sigma}t,\ 0 \le \sigma \le \sigma_*,\ 0 \le t \le t_*$$

$$\sigma = \sigma_*,\ \ \sigma_* = const,\ t_* \le t$$

Because there are two parts of loading, equation (1) must be written for $t \ge t_*$ in the next way:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma_* + \int_0^{t_*} \frac{k}{(t-\tau)^{\alpha}} \dot{\sigma}\tau d\tau + \int_{t_*}^{t} \frac{k}{(t-\tau)^{\alpha}} \sigma_* d\tau \tag{4}$$

This equation can be easy integrated:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma_* + \frac{k\sigma_*}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left[t^{1-\alpha} + (1-\alpha)(t-t_*)^{1-\alpha} \left(1 - \frac{t_*}{t} \right) \right] \tag{5}$$

At high level of stress, 74 MPa, specimens were broken after approximately 7 min. The first part of loading was continued during 92.5 s and it is clearly seen in Fig.2. In this figure curve calculated with help of (5) is given too. For the long times when $t_* << t$, equations (4) and (5) can be rewritten in the next form:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma_* + \int_0^{t} \frac{k}{(t-\tau)^{\alpha}} \sigma_* d\tau,\ \ \varphi(\varepsilon) = \sigma_* \left(1 + \frac{k}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right) \tag{6}$$

The difference Δ of values received with help of (6) and more exact expression (5) can be noticed only at times, which are very close to t_*. For example, for case of Fig.2, σ_* = 74 MPa, t_*= 92.5 s, we have Δ = 3% at t = 100 s and Δ = 1% at

$t = 360$s. If creep process is considered at times which duration is some hours, it is possible to use more simple equation (6) instead of (5). The influence of the first part of loading is negligible. That is seen in Fig.3 for stress levels $\sigma_* =$ 70 and 66 MPa. At this figure curves, calculated with help of (6) are given too.

2.3. Relaxation

Experiments on relaxation, $\varepsilon_* = \text{const}$, were fulfilled for three values of ε_* : 3, 6 and 9%, Fig.4. In the interval $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_*$ loading rate was constant £ =0.0004 1/s. So two parts of loading processes take place:

$$\dot{\varepsilon} = const\,,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_*\,,\ 0 \le t \le t_*$$

$$\varepsilon = const,\ \varepsilon = \varepsilon_*,\ t_* < t$$

Equation (1) can be written in the next form

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \frac{k\sigma}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left\{t^{1-\alpha} - (t-t_*)^{1-\alpha}\left[1 + \frac{t_*}{t}(1-\alpha)\right]\right\} + \\ + \int_{t_*}^{t} \frac{k}{(t-\tau)^{\alpha}}\sigma(\tau)d\tau \qquad (7)$$

For processes of relaxation it is interesting to predict the material behavior at long times, when $t_* << t$. In such a case it can be written

$$\varphi(\varepsilon) = \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^{\alpha}}\sigma(\tau)d\tau$$

or

$$\varphi(\varepsilon) = (1 + K^*)\sigma \qquad (8)$$

Taking into account that at relaxation process £ = const and ¨*(£)* =const, equation (8) gives the solution [1]:

$$\sigma = \frac{\varphi(\varepsilon)}{1+K^*} = \varphi(\varepsilon)(1 - K^* + K^{*2} - K^{*3} + \ldots)$$

Because $K(t-\tau) = k/(t-\tau)^{\alpha}$, we receive

$$\sigma = \varphi(\varepsilon)\left[1 - \beta\int_0^t Э_{\alpha}(-\beta, t-\tau)d\tau\right] \qquad (9)$$

where $\beta = \dfrac{k}{1-\alpha}$, $Э_{\alpha}(-\beta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-\beta)^n t^{n(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma\left[(1-\alpha)(n+1)\right]}$.

Here Γ(...) is gamma-function and (1-α)Γ(1-α) ≈ 1, because α is close to 1. Calculations by equation (9) can be fulfilled with help of the tables Э~ -integral functions [8].

Nevertheless formula (7) consists from two parts. The first one describes the influence of initially loading process on the final results. It occurs that this influence is sensible at times close to t_*. For example, if $t = 10$ min, the difference Δ between values, given by (3.1) and (3.3) consists:

£$_*$ = 3%, t_* = 1.25 min, Δ = 0.13%,
£$_*$ = 6%, t_* = 2.5 min, Δ = 0.6%,
£$_*$ = 9%, t_* = 3.75 min, Δ = 1.5%.

For longer times this difference becomes negligible. This conclusion proves the possibility of application (9) instead of (7). Curves of relaxation, calculated with (9) are shown in Fig.4 in comparison with experimental data

Conclusion

The results of the work show that the same constitutive equation with the same set of parameters allows to describe various types of loading. As an example polymer material POM was chosen, which has strongly pronounced time-dependent behavior and nonlinearity. As a constitutive equation the nonlinear hereditary type equation was used. This equation posses large possibilities because it was established on the base of physical nature of viscosity, the most pronounced feature of which can be seen at creep and relaxation processes. It must be underlined that at the considered types of loading integral equation leads to well known simple relationships. Necessity of such type a model often arises in an engineering practice at calculation of the structures, subjected to nonmonotonic loading. Model allows to describe a transition from one state to the other and to take into account the foregoing state influence on the final behavior of a construction. That gives the possibility to predict the work of construction at long-time period of exploitation on the base of short-time laboratory experiments. Cyclic loading and fatigue can be considered too in a rather simple way. In many cases for the conditions when work of a construction is bounded by a value of some small deformation (e.g. 1%), $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$ and calculations become to be some more simplified.

The approach can be applied to any material with time-dependent properties: for polymers, composites and metals at high temperature.

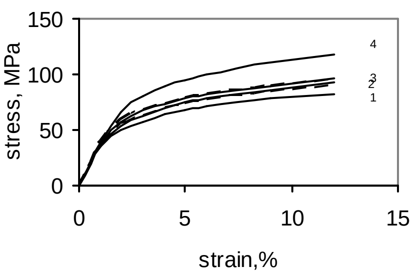


Fig.1. Curves of deformation with various rates of strain £ :1- 0.0004, 2 - 0.038, 3 - 1.1 1/s; 4 - ¨*(£)*.
—— experimental results,
------ calculated results.

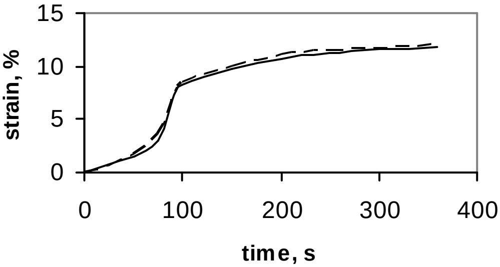


Fig.2. Creep curves at level of stress ± = 74 MPa.
——— experimental results,
------ calculated results.

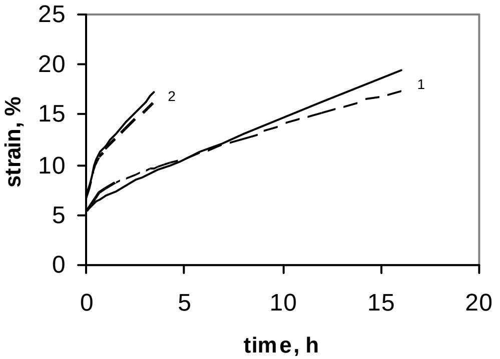


Fig.3. Creep curves at levels of stress ±: 1 – 66, 2 - 70 MPa.
——— experimental results,
------ calculated results.

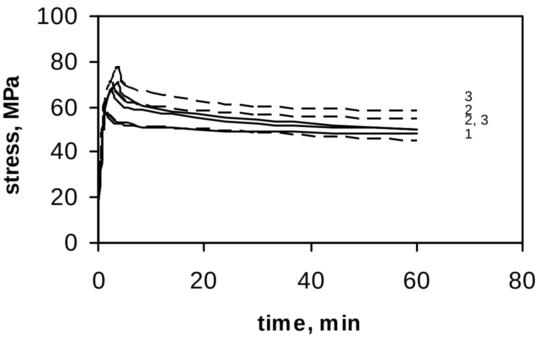


Fig.4. Curves of relaxation at various deformation £:
1 - 3, 2 - 6, 3 - 9%.
——— experimental results,
------ calculated results.

REFERENCES

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966, 752 с.
2. Boltzmann L. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. Ann. Phys. und Chemie, Erg. Bd. 7, 1876.

3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М., Наука, 1976, 288 с.
4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., Наука, 1982, 304 с.
5. Leaderman H. Elastic and Creep Properties of Filamentous and Other High Polymers. Textile Foundation, Washington, 1943.
6. Розовский М.И. Ползучесть и длительная прочность материалов//ЖТФ. – 1951. – №11, с.1311-1318.
7. Осокин А.Е., Суворова Ю.В. Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров//ПММ. – 1978. – Т.42, вып.6, с.1107-1114.
8. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Звонов Е.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М., Наука, 1969, 132 с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Алексеева Софья Июньевна

Д.т.н., ведущий научный сотрудник лаборатории механики композиционных материалов Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Москва, Россия
Адрес: Малый Харитоньевский пер., д.4, Москва РОССИЯ 101990
Тел.: (+7499) 135-78-30 (раб.), +7-903-684-75-67 (моб.)
E-mail: alexeevasofia@mail.ru

Мосин Александр Валентинович

К.т.н., научный сотрудник лаборатории механики композиционных материалов Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Москва, Россия
E-mail: alexeevasofia@mail.ru

Суворова Юлия Васильевна

Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики композиционных материалов Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
Тел.: +7-903-684-75-68 (моб.)
E-mail: juliasuvorova@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Арзуманян А.М.
Гюмри, Армения

В теоретических исследованиях параметроуправляемых процессов обычно применяют дифференциальное уравнение теплопроводности. Для моделирования температурных полей, которые возникают при обработке цветных металлов и сплавов режущими пластинами из монокристаллов из синтетического корунда, применяют следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\lambda_x}{c_x\rho_x}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\lambda_y}{c_y\rho_y}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2};\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0$$

которое обеспечивает теплообмен двумерным полем [1, 2].

Для решения описывающего температурное поле дифференциального уравнения теплопроводности можно применить конечно-разностный метод, согласно которому исследуемая сфера разделена сеткой, где аппроксимированы уравнение и граничные условия.

Для уменьшения затрат, используемых на исследования, возможно применение компьютерного моделирования процессов резания металлов. По сравнению с проведением обычных экспериментов, компьютерное моделирование требует предварительных усилий для создания моделей в виде программного обеспечения. Однако в дальнейшем эксперименты на модели оказываются гораздо более оперативными, дешевыми и эффективными.

Для построения математической модели распространения тепловых полей по поверхности определенной формы, сформулируем двумерную задачу теплопроводности в дифференциальной форме с учетом основных условий обработки цветных металлов лезвийным инструментом.

Нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+Q \tag{1}$$

где λ_x,λ_y – коэффициенты теплопроводности в направлениях x и y; Q – удельная мощность источника (стока) теплоты внутри тела (Вт/м^3); $c\rho,\lambda_x,\lambda_y,Q$ могут быть функциями x,y и T, т.е. тело может быть разнородным и его свойства могут зависеть от температуры. Уравнение применимо как к изотропным $\left(\lambda_x=\lambda_y\right)$, так и к анизотропным $\lambda_x\neq\lambda_y$ телам.

Использованы: начальное условие $\left(t=0\right)$

$$T\left(x,y,0\right)=T_0\left(x,y\right) \tag{2}$$

и следующие граничные условия:

а) на части граничной поверхности S_1 выполняются условия:

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y + q + \alpha_T \left(T - T_\infty\right) = 0 \qquad (3)$$

б) на части граничной поверхности S_2 заданы значения температуры:

$$T = T_B \qquad (4)$$

Объединение S_1 и S_2 образует полную границу S. Здесь l_x, l_y – направляющие косинусы вектора нормали к поверхности; q – удельная плотность теплового потока на поверхности S_1, Вт/м^3; α_T – коэффициент теплоотдачи; T_∞ – температура окружающей среды. Если на границе S_1 обе величины q и α_T равны нулю, то равенство (3) сводится к условию:

$$\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y = 0 \qquad (5)$$

что отражает отсутствие теплопереноса через границу S_1. В случае изотропного тела последнее условие можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \qquad (6)$$

где n – нормаль к поверхности.

С практической точки зрения задача (1)-(6) является достаточно полной для описания тепловых процессов при обработке металлов резанием. Например, с помощью объемного источника Q можно моделировать ввод теплоты через обрабатываемый материал, выделяющий теплоту при снятии стружки и трение по задней грани и т.д.

Математическая модель программы основана на методе конечных элементов и описана в работах [1,2].

Метод конечных элементов основан на вариационном подходе. В вариационном исчислении устанавливается, что решение уравнения (1) с граничными условиями (3), (4) эквивалентно отысканию минимума функционала:

$$\chi(T) = \int_V \left[\frac{1}{2}\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 - T\left(Q - \frac{\lambda}{c\rho}\frac{\partial T}{\partial t}\right)\right]\partial V +$$

$$+\int_S \left[qT + \frac{1}{2}\alpha_T \left(T - T_\infty\right)^2 \right]\partial S \qquad (7)$$

При помощи современных средств разработки объективно-ориентированного языка программирования Delphi и управляющей операционной системы Windows XP можно программировать процесс расчета и определить изменение температурных и силовых (деформирующих) полей во времени под воздействием заданного источника нагрева.

Граничные условия задаются для проведения анализа кинетики тепловых полей: к ним относится место ввода или отвода тепла по плоскости или в одном элементе, также может задаваться плоскость с конвективным теплообменом между окружающей средой и телом. Ввод данных, действующих по плоскости, таких как ввод тепла и конвективный теплообмен, производится заданием номера области и номеров точек, задающих эту плоскость. Ввод тепла в элементе задается заданием одной координаты, попадающей в данный элемент. Ввод тепла характеризуется мощностью источника тепла и временем его действия. Конвективный теплообмен задается температурой окружающей среды и коэффициентом теплоотдачи.

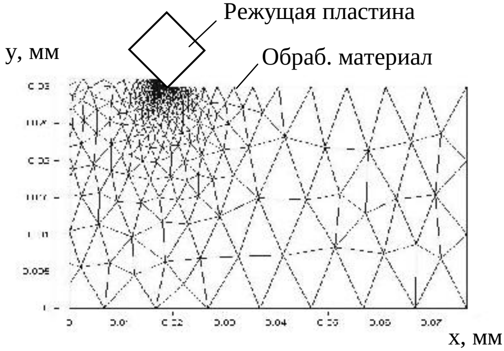


Рис. 1. Конечно-элементная аппроксимация анализируемого обрабатываемого материала.

После ввода всех граничных условий при необходимости можно указать конкретный единичный элемент тела, для которого в процессе анализа будут строиться графики кинетики изменения всех рассчитываемых значений, таких как средняя температура по элементу, деформация в ней и напряжения в зависимости от времени.

Для анализа изменения тепловых полей во времени задаются временной интервал и количество расчетов. При необходимости интервал времени можно продлить и рассмотреть дальнейшее распространение теплового поля по форме.

В предложенной методике делается попытка определения тепловых потоков и температуры при тонкой прерывистой обработке цветных металлов и сплавов режущими пластинами из синтетических корундов.

Мощность (Q) теплового потока, поступающего в режущую пластину, находится экспериментальным путём на установке, включающей в себя токарный станок, заготовки из медных и алюминиевых сплавов, торцевую однозубую фрезу из синтетического корунда, термопара и осциллограф[1,4].

В связи со сложностью измерения температуры на кромках лезвий торцевой фрезы практический интерес представляет аналитическое исследование температурного поля режушей пластины.

Для получения расчётных формул решалось дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \varphi(R, z) \tag{8}$$

при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=0} = 0,\ \left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_0} = -h_1 T\Big|_{R=R_0},\ \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = -h_2 T\Big|_{z=0},\ \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=L} = -h_3 T\Big|_{z=L}$$

и начальном условии $T\big|_{T=0} = 0$.

Функция источника тепла $\varphi(R, z)$ в (8) моделирует возникновение тепла в зоне обработки. Полагая, что основная часть тепла выделяется на рабочих поверхностях режущей пластины, функцию источника тепла удобно представить в виде

$$\varphi = \frac{q_0}{cp}\left(\frac{R}{R_0}\right)\exp\left(-\left(z/l_1\right)^2\right) \tag{9}$$

В этих выражениях: T – температура в данной точке режущей пластины, R и z – координаты в цилиндрической системе отсчёта, L – длина режущей пластины, $2R_0$ – наружный диаметр фрезы, l_1 – длина лезвия рабочей части режущей пластины, q_0 – плотность тепловыделения при $R = 0$ и $z = 0$, c – теплоёмкость, ρ – плотность, h_1, h_2, h_3 – приведённые ($h = a/\lambda$) коэффициенты теплоотдачи рабочих поверхностей (задней, задней вспомогательней и передней) пластины, λ – коэффициент теплопроводности, a – коэффициент температуропроводности материала режущей пластины. Решение уравнения (8) с учётом граничных и начального условий и выражения (9) запишется так:

$$T = \frac{2\sqrt{\pi q_0 l_1}}{\chi L}\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{\eta_k^2}{p(p+2)+\eta_k^2}\exp\left(-\frac{\eta_k^2 l_1^2}{L^2}\right)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{2p}{\sqrt{\pi\eta_k}}\int_0^{\frac{\eta_k l_1}{L}} e^{t^2}dt\right)\frac{2J_0(\mu_m) + \left(\mu_m - \frac{4}{\mu_m}\right)J_1(\mu_m)}{(\mu_m^2 + h_l^2 R_0^2)J_0^2(\mu_m)\lambda_{km}^2}\times$$

$$\times\left(1+e^{-a\lambda_{km}^2 T}\right)\left(\cos\left(\eta_k \frac{z}{L}\right)+\frac{p}{\eta_k}\sin\left(\eta_k \frac{z}{L}\right)\right)J_0\left(\mu_m \frac{R}{R_0}\right) \quad (10)$$

Здесь $p = h_2 L$, η_k и μ_m – корни характеристических уравнений, J_0 и J_1 – функции Бесселя 1-ого рода нулевого и первого порядков, $\lambda^2_{km} = \eta^2_k/L^2+\mu^2_m/R^2_0$ [4].

Величина плотности теплового потока q_0 находилась с учётом (9) из выражения:

$$Q = \int_V c\rho\varphi dV = \frac{\pi^{3/2}}{4} q_0 R_0^2 l_1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Резников А.Н., Резников Л.А. Тепловые процессы в технологических системах. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
2. Арзуманян А.М., Манукян О.С. Математическое моделирование температурного поля при параметроуправляемом процессе обработки материалов резанием// Вестник СГТУ. Саратов, № 2(24), выпуск 1, 2007, с. 27-31.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер.с англ. А.А.Шестокова., под ред. Б.Е. Победри., Мир, 1979г.
4. Бердников Л.Н. Предупреждение хрупкого разрушения режущего инструмента, обусловленного тепловой нагрузкой.// Вестник машиностроения. 1976. № 11. с. 62-65.

Сведения об авторе:

Арзуманян Алексан Мкртычевич

К. т. н., доцент, зав. департаментом профессиональной подготовки
Гюмрийского филиала ГИУА
Адрес: 377502, Гюмри, ул.Севяна 47, кв.5.
Тел.: (0312) 3-40-60 (сл.), (0312) 2-21-52 (дом.)
E-mail: arzal@yandex.ru

О РОЛИ СКРЫТОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОЦЕССАХ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛОВ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Санкт-Петербург, Россия

Научная литература по механике материалов располагает многочисленными экспериментальными данными по изучению скрытой энергии деформации, величина которой определяется разностью между работой деформации и количеством выделенного тепла. Методы измерения скрытой энергии деформации, в частности, сводятся к измерению с достаточной точностью работы деформации и выделившейся теплоты. В данном случае энергетический баланс определяется первым законом термодинамики, который имеет вид $U = A - Q$, где U – внутренняя (скрытая) энергия, A – работа деформации, Q – теплота.

Обзор ранних публикаций по этой теме можно найти в книгах [1-2]. В 70-ых годах XIX века с помощью довольно грубых опытов над образцами из поликристаллической меди Треска показал, что свыше 90% энергии пластического деформирования переходит в тепло, соответственно, 10% энергии остается в материале в виде “скрытой энергии деформации”. Более тщательные опыты Тейлора и Феррена 1925 г. [3] на простое растяжение образцов из поликристаллической стали, меди, алюминия и монокристаллического алюминия показали, что около 90% энергии деформации превращается в тепло. Остальная энергия идет на накопление в материале скрытой энергии деформации. В 1934 г. Тейлор и Квини [4] провели опыты на кручение и сжатие для определения теплового поведения с помощью как термопар, так и калориметров. По измерениям с помощью обоих приборов они получили сравнимые результаты для отожженной чистой меди и мягкой стали. Порядок величины теплоты был одинаковым и соответствовал отмеченным экспериментальным величинам скрытой энергии деформации.

Значительные исследования по скрытой энергии деформации были выполнены М.А. Большаниной с сотрудниками. Результаты этих исследований, а также полный обзор публикаций по этой теме, к моменту опубликования обзорной статьи 1957 г., отражены в публикации [5]. В дальнейшем, в 1966 г. в статье Диллона [6] были представлены результаты по изучению необратимой энергии деформации в опытах на циклическое нагружение кручением трубчатых образцов, изготовленных из меди. Диллон пришел к выводу, что и в случае циклического нагружения вывод Тейлора и Феррена, полученный в 1925 г., справедлив, а именно, большая часть необратимой энергии деформации переходит в тепло.

Результаты опытов по скрытой энергии деформации, выполненных в последние годы [7-9], показывают, что характер зависимости скрытой энергии от величины необратимой деформации выражается в виде логистической функции. Как следует из опытов над образцами из конструкционных материалов на циклическое нагружение [10], зависимости различных физико-механических характеристик от числа циклов нагружения, в частности, модуля упругости, имеют два четко выраженных участка, которые, как и в случае логистической функции, имеют выраженную точку перегиба. Эти результаты являются дополнительным подтверждением для использования логистической функции при формулировке критерия усталостной прочности. Как известно, с помощью логистической функции описываются различные процессы, приводящие к насыщению [11-15]. Можно предположить, что циклическая прочности металлов будет определяться количеством накопленной в образце скрытой энергии деформации, которая в момент разрушения будет достигать критической величины согласно логистической кривой на участке насыщения. Данные положения используются нами в работе для формулировки критерия усталостной прочности.

Известно, что логистическая функция является решением кинетического уравнения следующего вида:

$$\frac{d\yen}{d\pounds} = A\yen\,(\yen_* - \yen) \qquad (1)$$

где A, γ_* – постоянные. В общем случае A и $\yen_*$ могут быть функциями напряжения $A = A(\sigma)$, $\gamma_* = \gamma_*(\sigma)$.

Будем считать, что параметр $\yen$ в уравнении (1) характеризует относительное изменение скрытой энергии деформации $\yen = \dfrac{W}{W_*}$, где W – текущая, W_* – предельная величины скрытой энергии деформации. При этом $\yen_0 \le \yen \le \yen_*$, где γ_0, γ_* – соответственно, начальное и предельное значения параметра $\yen$, $\yen_0 < \yen_* \le 1$.

Решение уравнения (1) при начальном условии $\varepsilon = 0$ $\yen = \yen_0$ имеет вид

$$\yen = \frac{\yen_*}{1 + \left(\dfrac{\yen_*}{\yen_0} - 1\right) \cdot e^{-A\pounds\yen_*}} \qquad (2)$$

Таким образом, логистическая функция в виде соотношения (2) соответствует экспериментальным данным [7-9] по накоплению скрытой энергии деформации в зависимости от необратимой деформации образца. Эта функция показана на рис. 1 сплошной линией. Крестиками на этом рисунке отмечены результаты соответствующих опытов для образцов из алюминиевого сплава 2024-T351 согласно работе [9]. При этом приняты следующие значения постоянных $A = 26{,}852$, $\gamma_0 = 0{,}02$ и $\gamma_* = 0{,}94$.

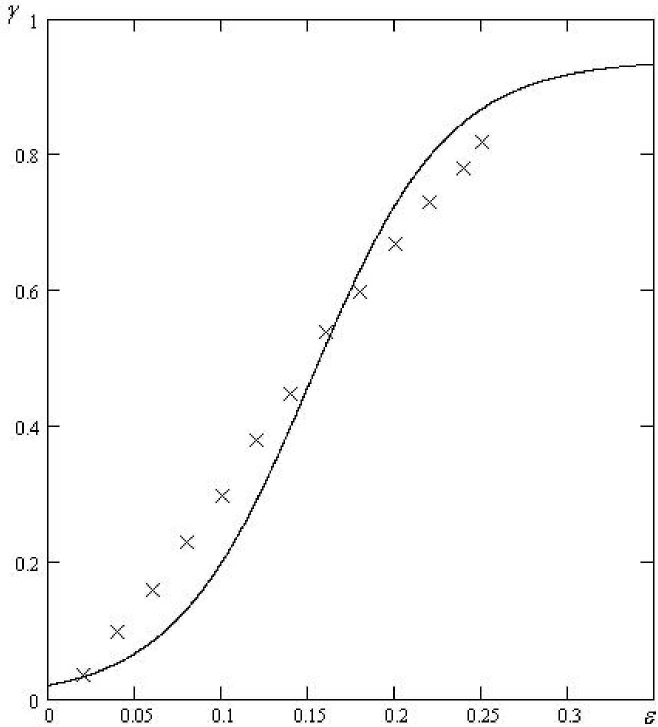


Рис. 1.

Как видно из рисунка, опытные точки накопления скрытой энергии деформации хорошо описываются с помощью соотношения (2).

Считая, что в момент разрушения $\varepsilon = \varepsilon_*$, $\text{¥} = k \cdot \text{¥}_*$, где k – постоянная, $0{,}5 \le k \le 1$, из (2) получим деформационный критерий разрушения

$$\text{£}_* = \frac{1}{A\text{¥}_*} \ln\left(\frac{k}{k-1} \left(\frac{\text{¥}_*}{\text{¥}_0} - 1 \right)\right) \qquad (3)$$

Критерий (3) связывает предельную величину необратимой деформации с критической величиной скрытой энергии деформации. При этом предельная величина необратимой деформации в этой формуле соответствует моменту разрушения при однократном нагружении. Формула (3) может быть использована для формулировки критерия разрушения при циклических нагружениях. С этой целью рассмотрим закономерности накопления циклической остаточной деформации в режиме “мягкого” цикла нагружения, когда в процессе опыта поддерживается постоянной нагрузка. Подобный режим нагружения является наиболее распространенным в инженерной практике, поэтому применяется в большинстве усталостных испытаний. Как показывают опыты [16-17], накопление остаточной деформации происходит от цикла к циклу и зависит от частоты нагружения [18]. При высоких частотах нагружения время нахождения образца под нагрузкой в течение одного цикла сокращается, поэтому уменьшается и величина остаточной деформации, накопленной за один цикл нагружения. Для учета этого обстоятельства введем приведенное время $z = t\, f^{-a}$ [19] (t – обычное время, f – частота нагружения, a – постоянная).

Характер кривых накопления остаточной деформации аналогичен кривым ползучести, поэтому для их описания можно воспользоваться степенным законом, связывающим скорость продольной деформации $\dot{\varepsilon} = \dfrac{1}{l}\dfrac{dl}{dz}$ ($\varepsilon = ln\; l/l_0$, где l_0, l – начальная и текущая длины образца соответственно) с напряжением σ

$$\frac{1}{l}\frac{dl}{dz} = B\sigma^{m} = B\sigma_0^{m}\left(\frac{F_0}{F}\right)^{m} \tag{4}$$

где B, m – постоянные, F_0, F – соответственно начальная и текущая площади поперечного сечения образца, $\sigma = P/F = \sigma_0 F_0/F$, $\sigma_0 = P/F_0$, P – растягивающая сила.

Для рассмотрения общего случая вязко-хрупкого разрушения введем текущий коэффициент поперечной деформации $\nu = -\varepsilon_y/\varepsilon_x = -\varepsilon_z/\varepsilon_x$. Тогда, учитывая геометрическое соотношение $F_0/F = (l/l_0)^{2\nu}$, можно записать уравнение (4) в виде

$$\frac{1}{l}\frac{dl}{dz} = B\sigma_0^{m}\left(\frac{l}{l_0}\right)^{2m\nu} \tag{5}$$

Для решения уравнения (5) следует располагать опытными зависимостями изменения ν при циклических нагружениях. В то же время можно получить некоторые приближенные оценки решения уравнения (5), если считать, что в условиях циклических нагружений выполняется приближенное соотношение $\nu \approx \nu_*$, где $\nu_* \approx \nu_*(\sigma_0)$ – величина коэффициента поперечной деформации в момент разрушения. Учитывая это предположение и принимая начальное условие $z = 0$ ($N = 0$), $l = l_0$, получим следующее решение уравнения (5)

$$\frac{1}{2\nu_* m}\left(1 - e^{-2\nu_* m\varepsilon}\right) = B\sigma_0^{m} z \tag{6}$$

Согласно (6) деформация $\varepsilon = \varepsilon_*$ в момент разрушения $z = z_p$ выражается в виде

$$\varepsilon_* = \frac{1}{2\nu_* m} \ln\left(1 - 2\nu_* m B \sigma_0^m z_p\right)^{-1} \tag{7}$$

Сравнивая формулы (3) и (7), получим следующий критерий усталости:

$$N\sigma_0^m = \frac{f^{(1+a)}}{2\nu_* m B}\left[1 - \left(\frac{k}{1-k}\left(\frac{\gamma_*}{\gamma_0} - 1\right)\right)^{-\frac{2m\nu_*}{A\gamma_*}}\right] \tag{8}$$

Из формулы (8) можно получить критерии вязкого (малоциклового) и хрупкого (многоциклового) разрушения. В первом случае следует считать $\nu_* = 0{,}5$, тогда из (8) имеем

$$N\sigma_0^m = \frac{f^{(1+a)}}{mB}\left[1 - \left(\frac{k}{1-k}\left(\frac{\gamma_*}{\gamma_0} - 1\right)\right)^{-\frac{m}{A\gamma_*}}\right] \tag{9}$$

Во втором случае выполняются приближенные соотношения $F_0 / F \approx 1$, $\nu_* \approx 0$, тогда критерий многоцикловой усталости запишется в виде

$$N\sigma_0^m = \frac{f^{(1+a)}}{A\gamma_* B} \ln\left[\frac{k}{1-k}\left(\frac{\gamma_*}{\gamma_0} - 1\right)\right] \tag{10}$$

Далее можно предположить, что с увеличением напряжения величина скрытой энергии деформации в момент разрушения будет уменьшаться. Действительно под воздействием высоких напряжений энергия деформации в основном будет затрачиваться на процессы скольжения по дислокационному механизму с образованием значительного количества тепла. Доля скрытой энергии деформации будет минимальной. Иная картина имеет место в случае длительного воздействия относительно малых напряжений. В этом случае необратимая деформация будет накапливаться по вакансионному механизму и доля скрытой энергии деформации будет значительной. Эта энергия затрачивается на процессы микроразрушений с образованием микропор и микротрещин, соответственно, на упрочнение и охрупчивание металлических материалов. С учетом этих обстоятельств величину скрытой энергии в момент разрушения будем задавать в виде убывающей степенной или экспоненциальной зависимости от величины напряжения:

$$\gamma_* = (1 + c \cdot \sigma)^{-\beta} \tag{11}$$

$$\gamma_* = e^{-\alpha\,\sigma} \tag{12}$$

где α, β, c – постоянные.

С учетом (11) и (12), критерий усталости (10) запишется, соответственно

$$N\sigma_0^m = \frac{f^{(1+a)}\cdot(1+c\sigma_0)^\beta}{AB}\ln\left(\frac{k}{k-1}\left(\frac{(1+c\sigma_0)^\beta}{\gamma_0}-1\right)\right) \tag{13}$$

$$N\pm_0^m = \frac{f^{(1+a)}}{AB\cdot e^{-\sim\,\pm_0}}\ln\left(\frac{k}{k-1}\left(\frac{e^{-\sim\,\pm_0}}{\text{¥}_0}-1\right)\right) \tag{14}$$

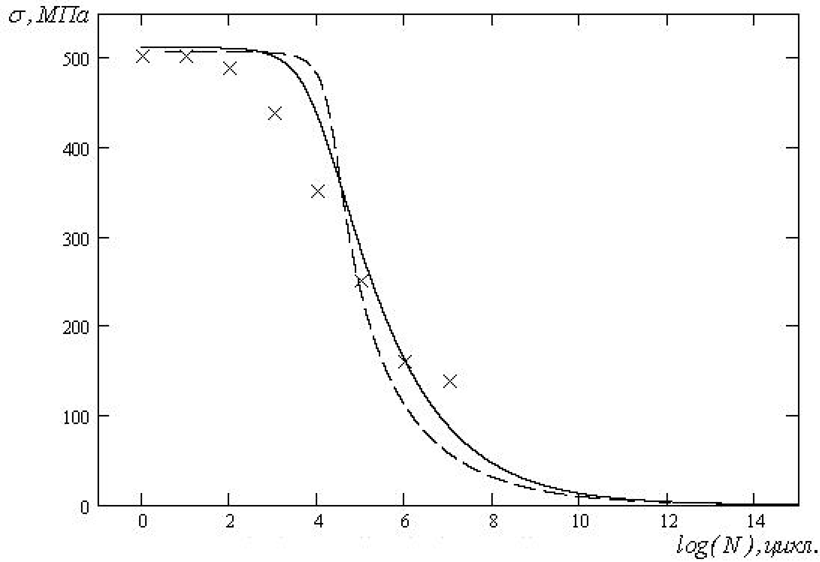


Рис. 2.

Теоретические кривые усталости, согласно критериям (13), (14), сравнивались с результатами опытов на осевое циклическое растяжение листовых образцов из алюминиевого сплава 2024-Т3 [16]. Механические характеристики этого сплава наиболее близки к соответствующим характеристикам сплава, используемого в работе [9] для измерения величины скрытой энергии деформации. Эти кривые показаны на рис. 2, соответственно, сплошной и пунктирной линиями. При этом были приняты следующие значения коэффициентов: $A = 26{,}852$, $m = 4$, $B = 3\cdot 10^{-15}\left[МПа\right]^{-4}\left[цикл\right]^{-1}\left[Гц\right]$,

$k = 0{,}9$, $\alpha = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \left[M\Pi a \right]^{-1}$, $c = 1{,}0 \left[M\Pi a \right]^{-1}$, $\beta = 0{,}61$, $a = 0$, $f = 1 \left[\Gamma ц \right]$. Крестиками на рисунке обозначены опытные точки. Как видно, кривые хорошо описывают экспериментальные точки на всем диапазоне кривых усталости.

Предварительные расчеты показывают, что общий критерий усталости (8) описывает качественную картину зависимости поведения металлических материалов с изменением частоты нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. М.: Наука. В двух частях. Часть II. 1984. 432 с.
2. Кузнецов В.Д. Физика твердого тела. Томск. Изд-во “Красное знамя”, 1941. Т. 2. 771с.
3. Taylor G.I., Farren W.S. The heat developed during plastic extension of metals // Proc. Roy. Soc. (London). 1925. Ser. A. vol. 107. P. 422-451.
4. Taylor G.I., Qunnney H. The latent energy remaining in a metal after cold working // Proc. Roy. Soc. (London). 1934. Ser. A. vol. 143. P. 307-326.
5. Большанина М.А., Панин В.Е. Скрытая энергия деформации // Исследование по физике твердого тела. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 193-234.
6. Dillon O.W. The heat generated during torsional oscillations of copper tubes // Intern. J. solids and structures. 1966. vol. 2. P. 181-204.
7. Oliferuk W., Maj M., Raniecki B. Experimental analysis of energy storage rate components during tensile deformation of polycrystals // Materials science and engineering A. 2004. 374. P. 77-81.
8. Плехов О., Саинтье Н., Наймарк О. Экспериментальное исследование процессов накопления и диссипации энергии в железе при упруго-пластическом переходе // ЖТФ. 2007. т. 77. № 9. С. 135-137.
9. Aravas N., Kim K.-S., Leckie F.A. On the calculations of the stored energy of cold work // Journal of Engineering materials and technology. 1990. vol. 112. P. 465-470.
10. Арутюнян А.Р., Зимин Б.А., Судьенков Ю.В. Приложение метода оптико-акустической спектроскопии к исследованию усталости конструкционных материалов // “Актуальные проблемы механики сплошной среды” Труды Международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна 25-28 сентября 2007 г., Цахкадзор, Армения. Ереван: Институт механики НАН Армении. 2007. С. 63-68.

11. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 240с.
12. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 328с.
13. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987. 158с.
14. Орлов А.Н. Долговременная прочность и физика разрушения // Тр. ЦКТИ. 1986. Вып. 230. С. 42-46.
15. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2004. 252с.
16. Форрест П. Усталость металлов. М.: Машиностроение. 1968. 352с.
17. Трощенко В.Т. Усталость и неупругость металлов. Киев: Наукова думка. 1971. 268с.
18. Усталостные испытания на высоких частотах нагружения / В.А. Кузьменко, Л.Е. Махотнюк, Г.С. Писаренко и др. Киев: Наук. Думка. 1981. 241с.
19. Alexander R. Arutyunyan, Robert A. Arutyunyan. Fatigue fracture in the high cycle regime // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. № 1. С. 15-18.

<u>Сведения об авторах:</u>

Арутюнян Роберт Ашотович

Д.ф.-м.н., профессор, НИИММ математико-механического факультета
Санкт-Петербургского гос. университета, вед. науч. сотр.,
Тел.:+7 (812) 4284164 (раб.), +7 (812) 5266591 (дом.)
Адрес: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр.28,
E-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

Арутюнян Александр Робертович

Аспирант, математико-механический факультет Санкт-Петербургского гос. Университета
Адрес: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр.28
Тел.:+7 (812) 4284245 (раб.) +7 (812) 5266591 (дом.)
E-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

ПЛОСКАЯ НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛУНОЧЕК С ТРЕЩИНОЙ

Арутюнян Л.А., Торосян Д.Р.

Ереван, Армения

В представленной работе дано решение плоской неоднородной контактной задачи теории упругости для двух областей с упругими характеристиками $«_м$ и $з_m$ $(m=1,2)$ (где $«_m$ – модули сдвига материалов, $з_m$ – коэффициенты Пуассона), образованных пересечением дуг окружностей с трещиной между материалами (рис. 1).

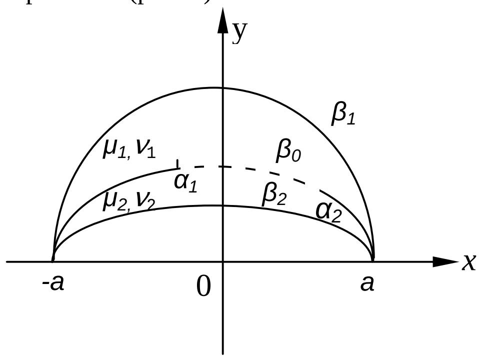


Рис.1

Предполагается, что на линии контакта нормальные напряжения и нормальные перемещения равны друг другу, а касательные напряжения пропорциональны нормальным.

Задача решается при помощи функции напряжений $\Phi_m(\sim, \ )$ $(m=1,2)$ в биполярной системе координат $\sim,$, которые связаны с декартовыми координатами x,y соотношениями [1]

$$gx=\mathrm{sh}\sim,\ \ gy=\sin\ ,\ \ ag=\mathrm{ch}\sim+\cos \qquad (1)$$

координата $\sim$ будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; в правой полуплоскости $\sim>0$, в левой $\sim<0$; ось оу является координатной линией $\sim=0$; точки $x=\pm a, y=0$ соответствуют значениям $\sim=\pm\infty$.

Координата меняется от $-®$ до $+®$, в верхней полуплоскости >0, в нижней – <0, $[-a,a]$ является координатной линией $=0$. Что касается отрезков оси ох при $x<-a$ и $x>+a$, то здесь координата терпит разрыв, равный $2®$, а именно, на верхнем берегу ($y=+0$) $=®$, на нижнем ($y=-0$) $=-®$.

Функция напряжений удовлетворяет бигармоническому уравнению, которое в биполярной системе координат имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\sim^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\sim^2\partial\ ^2}+\frac{\partial^4}{\partial\ ^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\sim^2}+\frac{\partial^2}{\partial\ ^2}+1\right)(g\Phi(\sim,\ ))=0 \qquad (2)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями

$$a¢_{\sim}=\left((\mathrm{ch}\sim+\cos\ )\frac{\partial^2}{\partial\ ^2}-\mathrm{sh}\sim\frac{\partial}{\partial\sim}+\sin\ \frac{\partial}{\partial\ }+\mathrm{ch}\sim\right)(g\Phi(\sim,\ ))$$

$$a¢\ =\left((\mathrm{ch}\sim+\cos\ )\frac{\partial^2}{\partial\sim^2}-\mathrm{sh}\sim\frac{\partial}{\partial\sim}+\sin\ \frac{\partial}{\partial\ }-\cos\ \right)(g\Phi(\sim,\ ))$$

$$a²_{\sim}\ =-(\mathrm{ch}\sim+\cos\ )\frac{\partial^2}{\partial\sim\partial\ }(g\Phi(\sim,\ )) \qquad (3)$$

$$U=\frac{g}{2«}\left((1-2³)\frac{\partial\Phi(\sim,\ )}{\partial\sim}-\frac{\partial\Psi(\sim,\ )}{\partial\ }\right)$$

$$V=\frac{g}{2«}\left((1-2³)\frac{\partial\Phi(\sim,\ )}{\partial\ }+\frac{\partial\Psi(\sim,\ )}{\partial\sim}\right)$$

$\Psi(\sim,\ )$–бигармоническая функция, связанная с $\Phi(\sim,\ )$ формулой

$$g\Psi(\sim,\ )=(1-³)\int\int\left(\frac{\partial^2}{\partial\sim^2}-\frac{\partial^2}{\partial\ ^2}-1\right)(g\Phi(\sim,\ ))d\sim d \qquad (4)$$

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками $«_1,³_1$ занимает область $-\infty<\sim<\infty$, $_0\le\ \ \le\ _1$, а второй с упругими характеристиками $«_2,³_2$ – область $-\infty<\sim<\infty$, $_2\le\ \ \le\ _0$. Граничные и контактные условия имеют вид [2,3]

$$(g\Phi_m(\sim,\ ))\Big|_{=\ _m}=¨_{m(\sim)}$$

$$\left.\frac{\partial(g\Phi_m(\sim,\ ))}{\partial\ }\right|_{=\ _m}=·_m(\sim),\ \left.\frac{\partial(g\Phi_m(\sim,\ ))}{\partial\ }\right|_{=\ _0}=k_m(g\Phi_m(\sim,\ ))\Big|_{=\ _0}$$

$$\sim<\sim_1 \text{ и } \sim>\sim_2 \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial(g\Phi_m(\sim,\ ))}{\partial\ }\right|_{=\ _0}=0,\ \sim_1<\sim<\sim_2,\ (g\Phi_m(\sim,\ ))\Big|_{=\ _0}=0,\ \sim_1<\sim<\sim_2$$

$$(g\Phi_1(\sim,\ ))\Big|_{=\ _0}=(g\Phi_2(\sim,\ ))\Big|_{=\ _0},\ \sim<\sim_1 \text{ и } \sim>\sim_2$$

$$V_1(\sim,\ )\big|_{=\ 0} = V_2(\sim,\ )\big|_{=\ 0}\ ,\ \sim < \sim_1 \text{ и } \sim > \sim_2 \text{, где } k_m = \text{const}\ ,\ m = 1{,}2\ .$$

Предполагается, что $¨_m(\sim)$ и $\cdot_m(\sim)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Бигармоническую функцию $\Phi_m(\sim,\ )$ удобно представить интегралом Фурье в следующем виде:

$$g\Phi_m(\sim,\ ) = \frac{1}{\sqrt{2®}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t,\ ) e^{-it\sim}\, dt \qquad (6)$$

где

$$f_m(t,\ ) = A_m(t)\,\text{ch}\,t(\ _m - \ )\cos(\ -\ _0) + B_m(t)\,\text{ch}\,t(\ -\ _0)\cos(\ _m - \ ) +$$
$$+ C_m(t)\,\text{sh}\,t(\ _m - \ )\sin(\ -\ _0) + D_m(t)\,\text{sh}\,t(\ -\ _0)\sin(\ _m - \ ) \qquad (7)$$

Удовлетворяя граничным условиям (5), получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования [3]:

$$A_m(t) = \frac{1}{a_m(t)}\left(X(t)\,\text{ch}\,t¥_m - \overleftarrow{\ }_m(t)\cos ¥_m\right)$$

$$B_m(t) = \frac{1}{a_m(t)}\left(-X(t)\cos ¥_m + \overleftarrow{\ }_m(t)\,\text{ch}\,t¥_m\right)$$

$$C_m(t) = \frac{X(t)}{a_m(t)b_m(t)}\left(t \cdot a_m(t)\,\text{ch}\,t¥_m + (t^2+1)\,\text{sh}\,t¥_m \sin ¥_m \cos ¥_m + k_m a_m(t)\,\text{sh}\,t¥_m\right) -$$
$$- \frac{\overleftarrow{\ }_m(t)}{a_m(t)b_m(t)}\left(t \cdot a_m(t)\cos ¥_m + (t^2+1)\,\text{sh}\,t¥_m\,\text{ch}\,t¥_m \sin ¥_m\right) + \frac{\bar{\cdot}_m(t)\,t\sin ¥_m}{b_m(t)} \qquad (8)$$

$$D_m(t) = -\frac{X(t)}{a_m(t)b_m(t)}\left(t \cdot a_m(t)\cos ¥_m + (t^2+1)\,\text{sh}\,t¥_m\,\text{ch}\,t¥_m \sin ¥_m + a_m(t)k_m \cdot t\sin ¥_m\right) +$$
$$+ \frac{\overleftarrow{\ }_m(t)}{a_m(t)b_m(t)}\left(t \cdot a_m(t)\,\text{ch}\,t¥_m + (t^2+1)\,\text{sh}\,t¥_m \sin ¥_m \cos ¥_m\right) - \frac{\bar{\cdot}_m \sin t¥_m}{b_m(t)}$$

где $X(t)$ – неизвестная функция, которая определяется позже, а величины $\overleftarrow{\ }_m(t)$ и $\bar{\cdot}_m(t)$ являются преобразованиями Фурье от $¨_m(\sim)$ и $\cdot_m(\sim)$.

$$\overleftarrow{\ }_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2®}} \int_{-\infty}^{\infty} ¨_m(\sim) e^{it\sim}\, dt\ ,\quad \bar{\cdot}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2®}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdot_m(\sim) e^{it\sim}\, dt \qquad (9)$$

$$a_m(t) = \text{sh}^2 t\gamma_m + \sin^2\gamma_m\ ,\ b_m(t) = \text{sh}^2 t\gamma_m - t^2\sin^2\gamma_m\ ,\ ¥_m = \ _m - \ _0$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из контактных условий (5), которые приводятся к следующей системе парных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-it\sim}\,dt = 0 \ ,\sim_1 < \sim < \sim_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(M(t)X(t) + N(t)\right)e^{-it\sim}\,dt = 0 \ ,\sim < \sim_1 \text{ и } \sim > \sim_2 \qquad (10)$$

где

$$M(t) = \frac{1}{b_1(t)}\left(\mathrm{sh}t¥_1\mathrm{ch}t¥_1 + t\sin ¥_1 \cos ¥_1 + k_1 t\sin^2 ¥_1\right) - $$
$$-\frac{h}{b_2(t)}\left(\mathrm{sh}t¥_2\mathrm{ch}t¥_2 + t\sin ¥_2 \cos ¥_2 + k_2 t\sin^2 ¥_2\right) \qquad (11)$$

$$N(t) = \frac{1}{b_1(t)}\left(-\overleftarrow{\ }_1(t)\left(t\cdot\mathrm{ch}t¥_1 \sin ¥_1 + \mathrm{sh}t¥_1 \cos ¥_1\right) + \dot{\overline{\ }}_1(t)\mathrm{sh}t¥_1 \sin ¥_1\right) +$$
$$+\frac{h}{b_2(t)}\left(\overleftarrow{\ }_2(t)\left(t\cdot\mathrm{ch}t¥_2 \sin ¥_2 + \mathrm{sh}t¥_2 \cos ¥_2\right) - \dot{\overline{\ }}_2(t)\mathrm{sh}t¥_2 \sin ¥_2\right)$$

$$h = \frac{«_1(1-³_2)}{«_2(1-³_1)}, \ \lim_{t\to\infty} M(t) = 1-h, \ \lim_{t\to\infty} N(t) = 0$$

Применяя преобразование Фурье к системе (10), получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода для определения неизвестных величин $X(t)$

$$M(t)X(t) + N(t) = -\frac{i}{2®}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(M(²)+1\right)X(²) + N(²)\right)\frac{e^{i(t-²)\sim_2} - e^{i(t-²)\sim_1}}{t-²}\,d² \qquad (12)$$

После некоторых преобразований получаем

$$U(t) = \frac{M(t)+1}{®M(t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(t-²)\sim_0}{t-²}U(²)\,d² + \frac{e^{-i\sim_0^* t}N(t)}{M(t)} \qquad (13)$$

где

$$\left(M(t)+1\right)X(t) + N(t) = e^{i\sim_0^* t}U(t) \ ,\sim_0^* = \frac{\sim_2 + \sim_1}{2}, \ \sim_0 = \frac{\sim_2 - \sim_1}{2} \qquad (14)$$

На линии контакта нормальные и касательные напряжения после некоторых преобразований примут вид

$$a¢^{(m)}(\sim, \ _0) = \frac{1}{\sqrt{2®}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-t^2\left(\mathrm{ch}\sim + \cos\ _0\right) + i\cdot t\cdot\mathrm{sh}\sim + k_m \sin\ _0 - \cos\ _0\right)X(t)e^{-it\sim}\,dt$$

$$a²_{\sim}^{(m)}(\sim, \ _0) = \frac{i\left(\mathrm{ch}\sim + \cos\ _0\right)k_m}{\sqrt{2®}}\int_{-\infty}^{\infty} tX(t)e^{-it\sim}\,dt \qquad (15)$$

В частном случае при $\sim_1 = \sim_2$ $X(t) = -\dfrac{M(t)}{N(t)}$, а при $\sim_1 = -\infty$ и $\sim_2 = \infty$ $X(t) = 0$.

Если $¥_1 = -¥_2 = ¥_0, \overleftarrow{\ }_1(t) = \overleftarrow{\ }_2(t) = \overleftarrow{\ }_0(t), \overline{\cdot}_1(t) = -\overline{\cdot}_2(t) = \overline{\cdot}_0(t)$ и $k_1 = -k_2 = k_0$, получаем $N(t) = (1+h)M_0(t), N(t) = (1+h)N_0(t)$

$$M_0(t) = \frac{1}{2b_0(t)}\left(\mathrm{sh}2t¥_0 + t\cdot\mathrm{sh}2¥_0 + 2k_0 t\sin^2¥_0\right) \tag{16}$$

$$N_0(t) = \frac{1}{b_0(t)}\left(-\overleftarrow{\ }_0(t)\left(t\cdot\mathrm{ch}t¥_0\sin¥_0 + \mathrm{sh}t¥_0\cos¥_0\right) + \overline{\cdot}_0(t)\mathrm{sh}t¥_0\sin¥_0\right)$$

$$b_0(t) = \mathrm{sh}^2 t¥_0 - t^2\sin^2¥_0$$

Решение поставленных задач не зависит от упругих характеристик составляющих материалов.

В частном случае для точечной нагрузки (рис. 2):

1) при $_0 = 0,\ \ _1 = \dfrac{®}{2},\ \ _2 = -\dfrac{®}{2}, k_1 = -k_2 = k_0$ получаем (рис. 2)

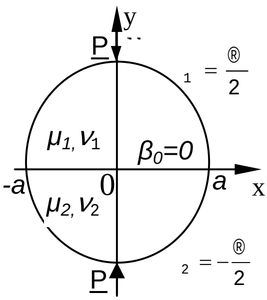


Рис. 2

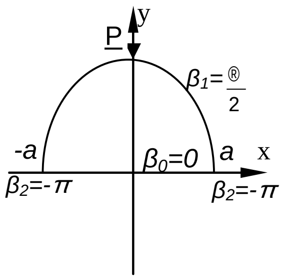


Рис. 3

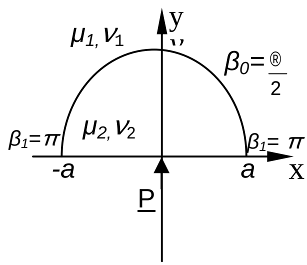


Рис. 4

$$X(t) = \frac{\sqrt{2®}\cdot P}{®a(t^2+1)} \frac{t\cdot\mathrm{ch}\dfrac{t®}{2} + ®(t^2+1)\mathrm{sh}\dfrac{t®}{2}\ ¢(t)}{\mathrm{sh}t® + 2tk_0} \tag{17}$$

где $¢(t)$ – дельта-функция.

2) При $_0 = 0,\ \ _1 = \dfrac{®}{2},\ \ _2 = -®$ получаем (рис. 3)

$$X(t)=\frac{\sqrt{2\pi}\cdot P}{\pi a\left(t^{2}+1\right)}\frac{t\cdot \operatorname{ch}\frac{t\pi}{2}+\pi\left(t^{2}+1\right)\operatorname{sh}\frac{t\pi}{2}\delta(t)}{\operatorname{sh}t\pi+2tk_{1}+h\cdot t\cdot \operatorname{ch}t\pi\left(\operatorname{ch}t\pi-2t^{2}-1\right)} \qquad (18)$$

3) при $_{0}=\frac{\text{®}}{2},\ _{1}=\text{®},\ _{2}=0, k_{1}=-k_{2}=k_{0}$ получаем (рис. 4)

$$X(t)=\frac{2\sqrt{2\text{®}}}{\text{®}a\left(t^{2}+1\right)}\cdot\frac{h}{h+1}\cdot\frac{\left[1+\text{®}\left(t^{2}+1\right)\text{¢}(t)\right]t\operatorname{ch}\frac{t\text{®}}{2}}{\operatorname{sh}t\text{®}+2tk_{0}} \qquad (19)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 232с.
2. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек.//Изв. АН Арм.ССР. Механика.1976.Т.29. №1.С. 51-66.
3. Арутюнян Л.А., Апикян Ж.Г., Аветисян Г.А. Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами // Инж. пробл. строительн. мех. ЕрПи. 1985. С.48-56.
4. Арутюнян Л.А., Торосян Д.Р. Плоская контактная задача для составного тела с несимметричными трещинами, выходящими на границу материалов. //Жур. “Мовсес Хоренаци”. 2007. №1-2. С. 87-94.

Сведения об авторах:

Арутюнян Л.А.
К.ф.-м.н., Институт механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. М. Баграмяна 24Б

Торосян Д.Р.
К.ф.-м.н., факультет мех.-мат., ЕГУ
Адрес: Ереван, Алек Манукян 1

ТЕОРИЯ СУХОГО ТРЕНИЯ И КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ АТОМАРНОЙ СТРУКТУРЫ

Аэро Э.Л., Бессонов Н.М., Булыгин А.Н.

Москва, Россия

1. Общая теория

Основное внимание в настоящем докладе будет посвящено проблемам микромеханики сухого трения в сверхтонких, наноскопических слоях. Наибольшие успехи в теории сухого адсорбционного трения достигнуты с использованием одномерных моделей монослоев на подложках с периодическим атомарным рельефом. Существенным недостатком этих монослойных моделей является одномерное приближение, если оно не выводится как частный случай из общих трехмерных уравнений. Во-первых, необходимо как-то задавать силу, которая является результатом воздействия на каждую частицу вышележащей части двумерного (трехмерного) тела, которая исключается из рассмотрения. Во-вторых, одномерные системы принципиально отличаются от двумерных и трехмерных. Проблема устойчивости и хаоса выглядит в них совсем иначе.

В этом разделе излагаются основы теории трения двух решеток. В основу положена модель сложной решетки, состоящей из двух подрешеток. Ее уравнения выводятся прямо из уравнений движения атомов так же, как это сделано в классической линейной теории кристаллов, берущей начало от работ Кармана, Борна, Хуан Куня [1]. Она обобщена в работах [2,3,4] на нелинейный случай в результате учета дополнительного принципа трансляционной симметрии, который введен нами для сложных решеток – жесткая взаимная трансляция u подрешеток (вся сложная решетка остается на месте!) на один период приводит к исходной структуре. Это значит, что энергия и сила взаимодействия соседних атомов является периодической функцией их взаимного смещения u. Существенным моментом этой теории является возможность учета влияния напряжений (возникающих в процессе трения) на потенциальные межатомные барьеры и на структуру решеток, а с ними – и на силу трения.

Исходим из вариации Лагранжиана

$$L=\int_0^t \int_v (Q-d)\, dV\, dt \tag{1.1}$$

Здесь Q и d – плотности кинетической энергии и энергии деформирования, соответственно,

$$Q=(1/2)(^{\circ}\dot{U}_n\dot{U}_n+«\,\dot{u}_n\dot{u}_n) \tag{1.2}$$

$$d=(1/2)[ª_{ijmn}U_{i,j}\,U_{m,n}+k_{ijmn}\,u_{i,j}\,u_{m,n}-(p-s_{ik}\,U_{i,k})(1-\cos u)] \tag{1.3}$$

Здесь U_i – акустические смещения (центров инерции пар атомов в элементарной ячейке), u_i – "оптические" (их взаимные смещения), ° – средняя плотность масс атомов, « – приведенная плотность пар атомов. Далее, тензоры коэффициентов упругости и микроупругости, соответственно: ª_{ikmn}, k_{ikmn}. s_{ik} – тензор коэффициентов стрикции, p – половина энергии активации жесткого сдвига подрешеток. И, наконец, слагаемое с множителем $(1-\cos u)$ представляет энергию взаимодействия подрешеток, которую следует выбрать как периодическую функцию микросмещений. В этом случае (1.3) оказывается инвариантной функцией к взаимным трансляциям и поворотам подрешеток.

Вариационные уравнения движения макроскопической и микроскопиической мод имеют вид

$$\text{°}\ddot{U}_i = \pm_{ij,j} \tag{1.4}$$

$$\pm_{ij} = \text{ª}_{ijmn} U_{m,n} - s_{ij}(1-\cos u) \tag{1.5}$$

$$\text{«}\ddot{u}_i = k_{ijmn} u_{m,nj} + l_i (p - s_{nj} U_{n,j}) \sin u \tag{1.6}$$

Первое уравнение представляет собой уравнение упругого континуума, а второе учитывает дискретную структуру решетки. Второе слагаемое справа в (1.6) отвечает взаимодействию соседних атомов в элементарной ячейке и учитывает ближний порядок в решетке. $l_i = u_i/u$ представляет собой орт вектора микросмещения соседних атомов u_i.

2. Основные уравнения двумерной теории

Для кристаллов кубической симметрии уравнения для полей макро- и микросмещений принимают вид

$$\text{°}\ddot{U}_x = \pm_{xx,x} + \pm_{xy,y}, \quad \text{°}\ddot{U}_y = \pm_{yy,y} + \pm_{yx,x} \tag{2.1}$$

$$\text{«}\ddot{u}_i = K_{ijmn} u_{j,mn} - l_i (p - s_{nj} U_{n,j}) \sin u_R, \quad u_R = u/a \tag{2.2}$$

Здесь компоненты тензора напряжений выражаются через смещения согласно соотношению (1.5), которое для кристаллов кубической симметрии записывается так:

$$\pm_{xx} = \pm^e_{xx} + \pm^f_{xx}; \quad \pm^e_{xx} = \text{ª}_1 U_{x,x} + \text{ª}_2 U_{y,y}; \quad \pm^f_{xx} = -s_{xx}(1-\cos u_R) \tag{2.3}$$

$$\pm_{yy} = \pm^e_{yy} + \pm^f_{yy}; \quad \pm^e_{yy} = \text{ª}_2 U_{x,x} + \text{ª}_1 U_{y,y}; \quad \pm^f_{yy} = -s_{yy}(1-\cos u_R) \tag{2.4}$$

$$\pm_{yx} = \pm^e_{yx} + \pm^f_{yx}; \quad \pm^e_{yx} = \text{ª}_3 (U_{x,y} + U_{y,x}); \quad \pm^f_{yx} = -s_{yx}(1-\cos u_R) \tag{2.5}$$

Очевидно, $\pm^e_{ik}$ представляет собой упругую составляющую сдвигового напряжения. Величина же $\pm^f_{ik}$ является неупругой составляющей, поскольку она квадратична по смещению $\vec{u}$ и не зависит от его направления, но имеет знак, противоположный знаку макроскопического смещения $\vec{U}$.

Соответствующую силу $\pm^{f}_{yx}$ в плоскости скольжения (XZ) можно принять за силу трения.

3. Приближение тонкой контактной зоны

Трение двух протяженных тел, контактирующих в плоскости $x=0$ при скольжении вдоль направления OY , харктеризуется процессами в чрезвычайно узком наномасштабном зазоре шириной L. Поэтому допустимы следующие ограничения:

$$U_x << U_y, \ddot{U}_x << \ddot{U}_y; \quad u_x << u_y, \ddot{u}_x << \ddot{u}_y; \quad \partial()/\partial y << \partial()/\partial x \qquad (3.1)$$

Используя условия (4.1), выпишем (в нулевом приближении по малым слагаемым) уравнения, определяющие двумерные стационарные поля макро- и микросмещений $U_x = U_x(x,y), U_y = U_y(x,y); \quad u_x = u_x(x,y), u_y = u_y(x,y)$.

Уравнения (2.2) (для полей этих микросмещений) с учетом принятых допущений запишутся для кубических кристаллов следующим образом:

$$« \ddot{u}_y \approx k_3 u_{y,xx} - (p - \mp) \sin u_y - (s_1^2/2 ª_3) \sin 2u_y \qquad (3.2)$$

$$« \ddot{u}_x \approx k_1 u_{x,xx} + (k_2 + k_3) u_{y,yx} \qquad (3.3)$$

$$\begin{gathered} \mp = -£_2 N + £_3 \pm_{yx}; \quad £_2 = (s_{xx} + s_{yy})/(ª_2 + ª_1) \\ £_3 = s_{yx}/ª_3; 2N = -(\pm_{xx} + \pm_{yy}) \end{gathered} \qquad (3.4)$$

Здесь $ª_1, ª_2, ª_3$ – модули упругости кубического кристалла, а $s_{xx} = s_{yy}$ и s_{yx} – компоненты тензора стрикции s_{ij} . Коэффициент s_1 в (3.2) представляет собой громоздкую комбинацию этих величин.

При выводе уравнений (3.2), (3.3) в последнем уравнении периодическим слагаемым пренебрегли в силу малости орта l_x . Кроме того, было введено обозначение для давления (сжатия) N .

Эти асимптотические уравнения (даже после предельного их упрощения) описывают нетривиальные эффекты при трении деформируемых кристаллических тел с учетом изменения их дискретной структуры.

Так наличие периодических слагаемых в уравнении (3.2) означает, что при трении необходимо преодолевать потенциальные атомные барьеры, адгезионные силы сцепления. Удвоенный коэффициент (2p) представляет собой энергию активации трения абсолютно жестких решеток. Далее, преодоление главного потенциального барьера за счет сдвиговых напряжений определяется условием обращения в нуль величины эффективной энергии активации процесса трения P.

$$P = 2p - \mp = 2p + £_2 N - £_3 \pm_{yx} \qquad (3.5)$$

Величина P эффективного потенциального барьера содержит компоненты тензора напряжений и определяет устойчивость микроструктуры в поле внешних напряжений. Увеличение потенциального барьера за счет давления N, препятствующего скольжению и его снижение за счет сдвиговой силы $±_{yx}$, способствующей ему, является основной принципиальной особенностью любого процесса трения.

Критическое условие потери устойчивости $P=0$ приобретает форму кинетического закона Амонтона-Кулона (трения скольжения)

$$±_{yx}=(£_2/£_3)\,N+2\,p/£_3 \qquad (3.6)$$

Слагаемое $2\,p/£_3$ представляет собой силу адгезионного сцепления, а величина

$$K=£_2/£_3=(s_{xx}+s_{yy})\,ª_3/s_{yx}\,(ª_2+ª_1) \qquad (3.7)$$

играет роль коэффициента трения.

Интересна роль модулей упругости в его определении, а также коэффициентов стрикции.

4. Статические эффекты структурных перестроек в поле напряжений

Ограничимся в этом разделе анализом статического трения. Положим также, что поперечная нагрузка N не зависит от пространственных координат, а поле микросмещений слабо меняется вдоль плоскости скольжения. В этом грубом одномерном приближении получалось вышеупрощенное уравнение (3.2). Его можно один раз проинтегрировать, что дает уравнение уже первого порядка

$$(1/2)\,k_3\,(u_{y,x})^2\approx(p-\bar{±})(1-\cos u_y)-(s_1^2/2ª_3)(1-\cos u_y)^2+G \qquad (4.1)$$

Здесь константа интегрирования G означает эффективную энергию структурных градиентов при скольжении. Интегрируя также уравнение (4.3), получим

$$g=k_1\,u_{x,x}+(k_2+k_3)\,u_{y,y} \qquad (4.2)$$

Здесь g – константа интегрирования.

С помощью этих соотношений можно исключить из плотности энергии деформирования (1.3) градиенты микросмещений ($k_{ijmn}\,u_{i,j}\,u_{m,n}$), а с помощью (тоже первого интеграла (1.5)) – градиенты макроскопических смещений ($ª_{ijmn}U_{i,j}\,U_{m,n}$). В результате получим выражение

$$d=P\,(1-\cos u_y)-(s_1^2/2ª_3)(1-\cos u_y)^2+G_1 \qquad (4.3)$$

Здесь введена новая константа

$$G_1=G+(\bar{±}^2/ª)+g^2/2k_2 \qquad (4.4)$$

Сложный механизм перестройки микроструктуры при трении может быть выявлен анализом этого выражения для энергии.

Известно, что существует устойчивый режим трения покоя, сменяемый с увеличением сдвиговых напряжений неустойчивым, скачкообразным трением, который переходит в устойчивый режим кинетического трения скольжения. Эти режимы смены устойчивости решетки под действием напряжений описываются предложенной теорией.

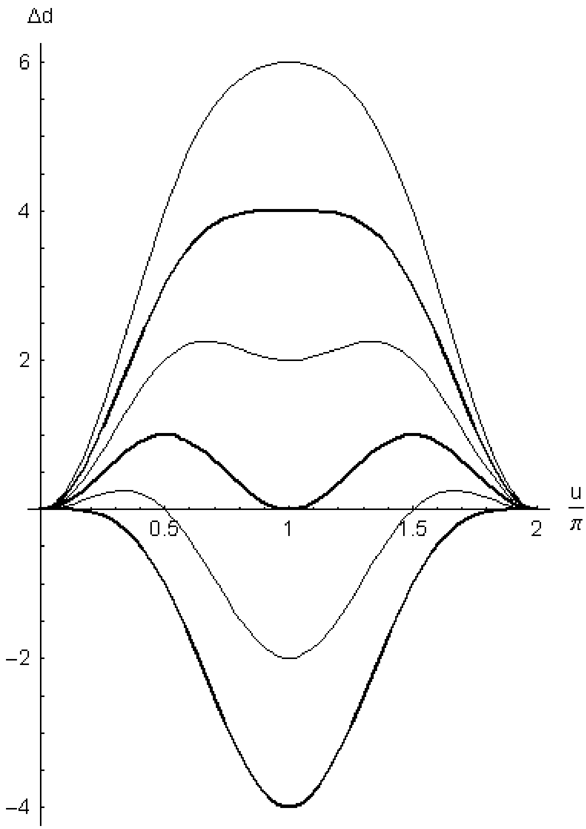


Рис.1. Зависимость энергии микросмещений (перестройки структуры) от величины микросмещений атомов u при различных напряжениях сдвига, понижающих энергетические максимумы.

Рассмотрим выражение (4.3) для энергии микродеформаций в зависимости от величины микросмещения. На графиках рис. 1 показана зависимость приращения полной энергии $\Delta d = d - G_1$ от величины микросмещений u. С учетом внешних напряжений, входящих в эффективный барьер, выражение (4.3) дает серию кривых. Все они имеют общие точки в узлах решетки при $|u| = 0, 2®, 3®, \ldots$, образуя экстремумы. Однако в точках, отвечающих микросмещениям на половину межатомного расстояния $u = n®$, ($n = 1, 3, 5, \ldots$), экстремальные значения оказываются различными в зависимости от величины и знака напряжения.

Наибольший максимум энергии относится к нулевым значениям напряжения. С увеличением положительного значения напряжения высота максимума снижается и при некотором его пороговом значении $±_{1t}$, соответствующем пороговому значению эффективного барьера P_{1t}, возникает предельная кривая (верхняя жирная линия), являющаяся бифуркационной границей, ниже которой происходит качественное изменение потенциального рельефа. На максимумах в точках $u = n®$ появляется небольшой провал – локальный малый минимум. Неустойчивые точки $u = n®$ начинают стабилизироваться. Напротив, устойчивость точки равновесия $|u| = 0, 2®, 3®, \ldots$ очевидно снижается.

С дальнейшим ростом напряжений локальные минимумы усугубляются и при достижении второго порога $±_{2t}$ снижаются до уровня общего минимума в указанных выше точках равновесия. Соответствующая средняя жирная кривая демонстрирует новый рельеф (новую структуру решетки) с удвоенной частотой следования экстремумов и иной, большей устойчивостью. Это – вторая бифуркационная граница, отвечающая более низкому значению P_{2t}. Ниже расположены кривые с удвоенным периодом равным периоду верхней кривой, но с иной конфигурацией и устойчивостью. И наконец, при достижении третьего порога по напряжениям $±_{3t}$ (нижняя жирная кривая) эти кривые превращаются в зеркальное отражение первой (верхней) кривой с экстремумами противоположного знака. Возникает структура с устойчивыми состояниями в точках $u = n®$, а точки первоначальной устойчивости (недеформированной решетки) становятся неустойчивыми. Происходит микросдвиг одной решетки по отношению к другой на половину межатомного расстояния.

Неустойчивость этого состояния означает конец области трения покоя и возникновение спонтанного трения скольжения – система скатывается в следующий энергетический минимум. Точки бифуркации микроструктуры контактного сопряжения количественно характеризуются соотношениями

$$P = 4(s_1^2/2ª_3); \quad P = 2(s_1^2/2ª_3); \quad P = 0 \tag{4.5}$$

$$±_{1t} = 2(p - 2s_1^2/ª_3); \quad ±_{2t} = 2(p - s_1^2/ª_3); \quad ±_{3t} = 2p \tag{4.6}$$

Легко видеть, что если коэффициент стрикции положителен ($s_1 > 0$), то, как следует из последнего равенства, положительны и значения пороговых напряжений. Они связаны неравенствами

$$\pm_{3t} > \pm_{2t} > \pm_{1t} \tag{4.7}$$

Иными словами, увеличение внешнего эффективного напряжения $\pm$ приводит к снижению устойчивости недеформированного состояния $u=0, 2\text{®}, 3\text{®},...$ за счет понижения потенциальных межатомных барьеров в точках $u=n\text{®}$, ($n=1,3,5,...$) вплоть до их инверсии – возникновения потенциальных ям, показанных на рис.1. Обращаясь к определению (3.4) величины $\pm$ как поправки к начальной энергии активации связей в решетке, видим, что теория позволяет найти критические значения этой поправки (4.6), которые определяют границы различных этапов контактного взаимодействия трущихся тел.

5. Динамические эффекты при трении

Полученные выше динамические уравнения макроскопического и микроскопического движения тел могут описывать многочисленные эффекты в контактах трущихся тел. Анализ нелинейных эффектов требует детального изложения. В пределах этого краткого сообщения обратим внимание лишь на некоторые из них.

Ограничимся одномерным приближением и рассмотрим простой случай, когда вдоль плоскости контакта ($x=0$) реализуются условия однородного сдвига $u=u_y(x,t)$. Локализованная стационарная волна возмущения контакта двух тел распространяется ортогонально плоскости контакта как в обоих направлениях оси $0X$

$$u=u(q); \quad q=(x-V\,t); \quad V \le 0; V \ge 0 \tag{5.1}$$

Здесь L играет роль ширины локализованной волны или периода протяженной волны. Перестройка структуры связана не только с напряжением, но и со скоростью распространения локализованной волны V. Подставляя это представление в динамическое уравнение микроколебаний (2.4) и (3.2), получим после соответствующих преобразований систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно волновой переменной q

$$\text{ª}(1-V^2/V_s^2)U_{,q} = s(1-\cos u)+\pm; \qquad V_s^2 = \text{ª}/\text{°} \tag{5.2}$$

$$\tilde{l}_o^2\, p(1-V^2/V_k^2)u_{,qq} = p_1 \sin u + p_2 \sin u \cos u; \qquad V_k^2 = k/\text{«} \tag{5.3}$$

Здесь $\pm$ – константа интегрирования, V_s, V_k – скорость линейного звука и скорость оптической моды, соответственно. Это внешнее постоянное поле напряжений. Далее, коэффициенты p_1, p_2, p_3 (эффективные потенциальные барьеры) и $\tilde{l}_o^2 \big/ 2$ – характерный масштаб (длина когерентности решетки) являются громоздкими функциями скорости и напряжения.

Последнее нелинейное уравнение является обобщением известного уравнения синус-Гордона, решением которого, при некоторых условиях являются локализованные волны. Оно один раз интегрируется. В результате получается выражение для квадрата микроградиента, аналогичное (3.2).

Рассмотрим одно из решений уравнения (5.3) типа удлиненной волны, которая возникает при $G = 0$, которое на плоскости контакта $x = 0$ дает проскальзывание $u=$®, равносильное разрыву межатомных связей

$$\mathrm{tg} u/2 = +- \frac{a}{\mathrm{sh}(q - q_o)}; \quad q = (x - V\,t)/L \tag{5.4}$$

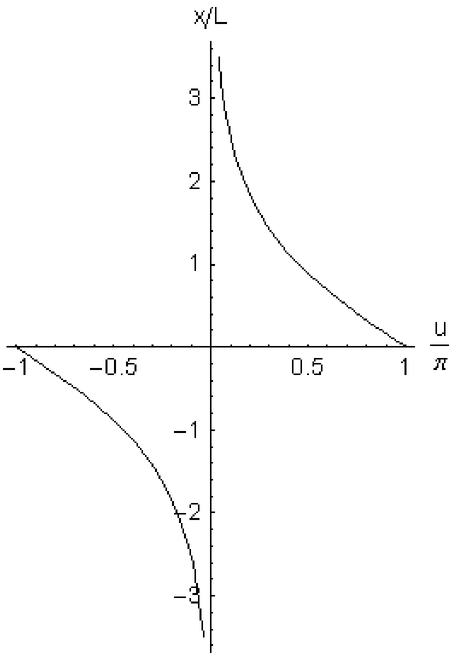


Рис.2. Распределение микросмещений u *атомов вблизи центра зоны трения* $q = 0$.

Двойные знаки справа в (5.5) отвечают паре возможных решений. Это разрывное локализованное решение. Оно представлено на рис.2 для случая положительного знака справа в приведенной формуле. Разрыв микросмещения отвечает микропроскальзыванию в середине зоне контакта шириной L.

Отметим, что в другой записи

$$1-\cos u = \frac{2a^2\, tg^2 u/2}{1+\mathrm{tg}^2 u/2} \tag{5.5}$$

Тогда с помощью (5.2) можно найти поле макроскопических деформаций.

Характерный размер L, фигурирующий в решении (5.4), оказывается функцией не только напряжения, но и скорости V

$$l_o^2/L^2 = \frac{1}{(1-V^2/V_k^2)} - \frac{\widehat{S}}{p\,\text{ª}\,(1-V^2/V_s^2)(1-V^2/V_k^2)}; \quad \widehat{S} = s_1\,(2s_1 + \overline{\pm}) \tag{5.6}$$

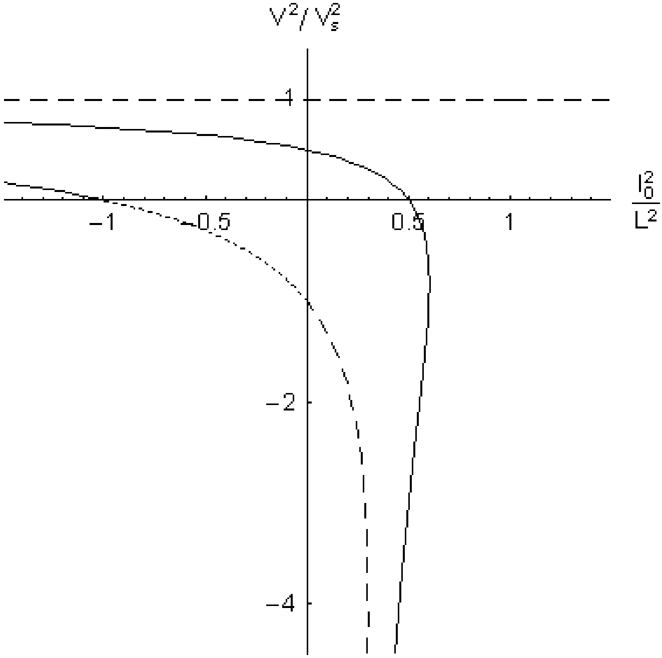


Рис.3. Дисперсионные зависимости решения (5.4) при разных значениях напряжений. Верхней кривой отвечает меньшее напряжение сдвига.

Эта функция показана на рис.3 для двух значений параметра $\widehat{S} = 0.5$ (верхняя кривая) и $\widehat{S} = 2$ (нижняя кривая). Она, очевидно, существует и имеет физический смысл и в области отрицательных значений квадрата скорости и квадрата ширины. Вообще говоря, эта функция представляет дисперсионные ветви нелинейных колебаний. Интересны две подобласти этой зависимости.

Первая (коротковолновая) подобласть определяется неравенством $l_o^2/L^2 \le 1-\widehat{S}/p^{a}$ (в области мнимых значений $\mathrm{Im}L=\Lambda$). Здесь однако $V^2>0$, т.е. V – действительная величина. Тогда, вводя обозначение для частоты $\mu=V/\Lambda$ и длины волны $\Lambda=-iL$, получим в решении (5.4) волновой аргумент и его функцию (в знаменателе) в виде

$$q=(x-Vt)/i\Lambda; \quad \mathrm{sh}\,q=-i\sin(x/\Lambda-\mu t) \tag{5.7}$$

Переход в первую область (в область мнимых значений характерной длины L) означает смену режима трения – вместо "дислокационного" (связанного с локализованным дефектом) возникает волновой, связанный с распространением истинной волны, длина которой, как уже отмечено, $\Lambda=-iL$, а частота $\mu=V/\Lambda$. После подстановки (5.7) в (5.4) или (5.5), получаем решение, представляющее собой делокализованную периодическую волну. Ей отвечает на рис. 3 участок нижней кривой (сплошная линия) – ветвь, уходящая налево и вверх. Это – волна перестройки структуры решетки в зоне контакта трущихся тел. Соответствующие эффекты в статике обсуждались в предыдущем разделе. Переход через точку $l_o^2/L^2=0$ (из "дислокационной" области в истинно волновую) происходит при определенной пороговой скорости $V_{cm}^2/V_s^2=1-\widehat{S}/p^{a}$ в зависимости от величины $\widehat{S}$, т.е. от напряжений согласно (5.7). На рис. 3 показаны две кривые – нижняя (высокое напряжение), соответствующая $\widehat{S}/p^{a}=2$ (о которой шла речь выше) и верхняя (низкое напряжение, $\widehat{S}/p^{a}=0.5$). Во втором случае скорость V_{cm} – действительная величина.

Во второй подобласти (нижняя кривая, крупный штрих), задаваемой неравенствами $0<l_o^2/L^2<l_o^2/L_{oo}^2; \quad 0>(V/V_s)^2>(\widehat{S}/p^{a}-1)$ возникают длинноволновые колебания. Здесь длины L – действительные величины, а скорости – мнимые. Здесь примем обозначение для частоты $\mathrm{Im}V=\mu L$. В результате

$$q=x/L-i\mu t; \quad \mathrm{sh}\,q=\mathrm{sh}(x/L)\cos(\mu t)-i\,\mathrm{ch}(x/L)\sin(\mu t) \tag{5.8}$$

После подстановки этих формул в (5.4) или (5.5), получаем решение, представляющее стоячую локализованную волну типа бризера (шириной L)– колеблющегося дефекта. В отличие от динамического режима, рассмотренного выше, это – безизлучательный режим трения. Соответствующая область представлена на рис.3 нижней кривой, уходящей вниз и направо (крупный штрих).

Приведенный здесь пример разрывного решения дан в весьма схематической форме. Необходимо учесть ещё поперечные микросмещения в зоне трения и зависимость от продольной координаты y, что требует однако более развернутого изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток.- М.: И. Л., 1958. -488 с.
2. Аэро Э.Л. Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой.// Успехи механики. 2002. Т.1. № 3. С.130-176.
3. Aero E.L. Micromechanics of a double continuum in a model of a medium with variable periodic structure // Journal of Engineering Mathematics. - 2005. - V.1.- p.1-15. DOI 10.1007/s10665-005-9012-3, Springer.
4. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. Сильно нелинейная теория формирования наноструктуры вследствие упругих и неупругих деформаций кристаллических тел // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 5. С.170-187.

Сведения об авторах:

Аэро Эрон Люттович

Д.ф.-м.н., с.н.с., зав.лаб. микромеханики материалов
Института проблем машиноведения РАН
Адрес: 199178, Большой пр.61, ИПМаш РАН
Тел: (812)321 47 64 (сл.),.(812)567 25 15(дом.)
E-mail: aero@microm.ipme.ru

Бессонов Николай Михайлович

Д.ф.-м.н., с.н.с., в.н.с.лаб. микромеханики материалов
Института проблем машиноведения РАН
Адрес: 199178, Большой пр.61, ИПМаш РАН
Тел: (812)321 47 64 (сл.), (812)533 87 30 (дом.)
E-mail: bessonov@microm.ipme.ru

Булыгин Анатолий Николаевич

Д.ф.-м.н., с.н.с., в.н.с.лаб. микромеханики материалов
Института проблем машиноведения РАН
Адрес: 199178, Большой пр.61, ИПМаш РАН
Тел: (812)321 47 64 (сл.), (812)592 70 22 (дом.)
E-mail: aero@microm.ipme.ru

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В ФЕРРОМАГНИТНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С УЧЕТОМ ОБМЕННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д, Даноян З.Н.,
Даноян Э.А., Саакян С.Л.
Ереван, Армения

В работах [1,3,4,5] без учета обменных сил рассмотрены поверхностные спиновые волны в недеформируемых ферромагнитных средах разной структуры, находящихся в постоянном магнитном поле. Здесь рассматриваются спиновые поверхностные волны в полупространстве с учетом обменных взаимодействий частиц в среде при некотором обобщенном граничном условии для спина.

Предполагается, что полубесконечный ферромагнитный кристалл в декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ занимает область $x_2 > 0$. Ось x_3 совпадает с осью анизотропии легкого намагничивания кристалла. Вне кристалла (в области $x_2 < 0$) предполагается вакуум. Кристалл намагничен до насыщения внешним магнитным полем $\vec{H}_0$. Объемная плотность намагниченности кристалла $\vec{M}_0 = °_0 \vec{«}_0$ ($°_0$ – плотность) параллельна магнитному полю и направлена по оси легкого намагничивания, т.е. по оси x_3. Предполагается также, что тело находится в состоянии, характеризующейся вектором возмущения магнитного момента (спина) $\vec{«} = \left(«_1\left(x_1, x_2, t \right), «_2\left(x_1, x_2, t \right), 0 \right)$ и магнитостатическим потенциалом $\Phi\left(x_1, x_2, t \right)$ ($\vec{h} = -\mathrm{grad}\Phi$ – возмущение магнитного поля). Магнитостатическое поле в вакууме характеризуется магнитным потенциалом $\Phi^{(e)}\left(x_1, x_2, t \right)$.

При такой постановке задачи волновое поле в среде описывается следующими уравнениями [1]:

$$\left.\begin{aligned} &\partial «_1/\partial t - ¥_0 M_0\left(\widehat{b} - ª\nabla_\perp^2\right)«_2 - ¥_0 «_0\, \partial\Phi/\partial x_2 = 0 \\ &¥_0 M_0\left(\widehat{b} - ª\nabla_\perp^2\right)«_1 + \partial «_2/\partial t + ¥_0 «_0\, \partial\Phi/\partial x_1 = 0 \\ &°_0\left(\partial «_1/\partial x_1 + \partial «_2/\partial x_2\right) - \nabla_\perp^2 \Phi = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } x_2 > 0 \qquad (1)$$

$$\nabla_\perp^2 \Phi^{(e)} = 0 \text{ при } x_2 < 0 \qquad (2)$$

где

$$\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2,\ \widehat{b} = b + H_0/M_0,\ M_0 = °_0 «_0 \qquad (3)$$

Здесь через b обозначена постоянная магнитной анизотропии среды, ª – модуль обменных взаимодействий, а $¥_0$ – гиромагнитное отношение. Будем предполагать, что направление распространения волн совпадает с осью $\pm x_1$, т.е. перпендикулярно к направлению $\vec{H}_0$.

Граничные условия на $x_2 = 0$ имеют следующий вид:

$$\Phi - \Phi^{(e)} = 0\,,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - °_0«_2 = \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial x_2}\,,\ ¶\,\frac{\partial«_1}{\partial x_2} + «_1 = 0\,,\ ¶\,\frac{\partial«_2}{\partial x_2} + «_2 = 0 \quad (4)$$

Кроме того, должны выполняться условия затухания на бесконечности

$$\Phi \to 0 \text{ при } x_2 \to +\infty \text{ и } \Phi^{(e)} \to 0 \text{ при } x_2 \to -\infty\,. \quad (5)$$

Последние два граничных условия приведены в [1,2]. Величину ¶ нужно найти или выбрать определенным образом в конкретной задаче. Известны два частных случая этого условия: при $¶ = 0$ и при $¶ \to +\infty$.

Отыскивая решения уравнений (1) и (2) в виде плоских гармонических волн и удовлетворяя условиям (4)-(5), получим систему однородных алгебраических уравнений, условие разрешимости которой дает следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{gathered}\left[1 - ¶\left|\sim\right|\left({}_1 + {}_2\right)\right]\left\{4\tilde{\Omega}\left(\pm\Omega + \Omega_{DE}\right)\cdot\left({}_1\,{}_2 - 1\right) - \left({}_2 - {}_1\right)\cdot W\right\} + \\ + ¶^2 \sim^2 \left\{4\left(\pm\Omega + \Omega_{DE}\right){}_1\,{}_2 R - \left({}_1 + {}_2 - 1\right)\left({}_2 - {}_1\right)\right\} = 0\end{gathered} \quad (6)$$

где

$$R = \tilde{\Omega}\left({}_1\,{}_2 - 1\right) - \pm\Omega\left({}_2 - {}_1\right),\ W = 4\Omega^2 + 4\pm\Omega\Omega_{DE} + 1 \quad (7)$$

$$\pm = |k|/k = \pm 1\,,\ \Omega = \mu/¥_0 M_0\,,\ \tilde{\Omega} = \sqrt{1/4 + \Omega^2}\,,\ \sim = \sqrt{ª}\,k \quad (8)$$

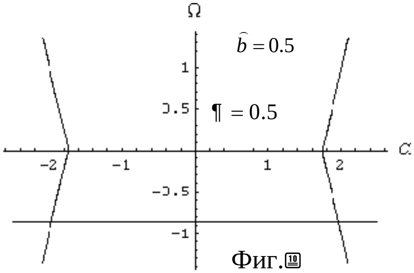
$${}_1 = \sqrt{\frac{\sim^2 + \Omega_{DE} - \tilde{\Omega}}{\sim^2}}\,,\quad {}_2 = \sqrt{\frac{\sim^2 + \Omega_{DE} + \tilde{\Omega}}{\sim^2}}\,,\ \Omega_{DE} = \hat{b} + 1/2 \quad (9)$$

Здесь Ω_{DE} – частота волны Деймона-Эшбаха, которая распространяется по одному направлению оси x_1 в недеформируемом ферромагнитном полупространстве, когда обменные эффекты не учитываются [1,5].

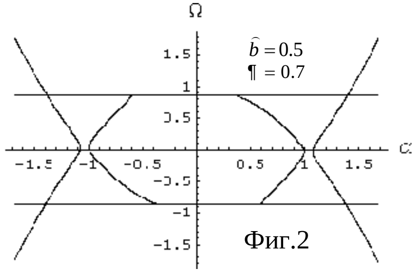
При $¶ \to +\infty$ подстановкой убеждаемся, что (6) удовлетворяется при $\pm\Omega = \pm\sqrt{\hat{b}(\hat{b}+1)}$. Величина $\Omega_{SV} = \sqrt{\hat{b}(\hat{b}+1)}$ есть частота объемных спиновых волн, распространяющихся под прямым углом к внешнему магнитному полю $\vec{H}_0$, когда обменные эффекты не учитываются. Также установлено, что при $¶ \to +\infty$ ни одна другая пара $\pm\Omega$ и $\sim$ не может быть решением уравнения (6). Легко показать, что дисперсионное уравнение (6) при $\P = 0$ удовлетворяется только и только, когда $\pm\Omega = \pm\sqrt{\widehat{b}(\widehat{b}+1)}$. Следовательно, при любом $\P$ уравнение будет удовлетворяться, когда $\pm\Omega = \pm\sqrt{\widehat{b}(\widehat{b}+1)}$. Доказывается и численно устанавливается, что при $\P \neq 0,\infty$ уравнение (6) имеет и другие решения. Ниже приведены графики решений задачи в зависимости частот от волнового числа. Чтобы при заданном $\widehat{b}$ выявить характер кривых в зависимости также от $\P$, мы постепенно меняем параметр от нуля до некоторого его значения, когда картина уже не меняется. На графиках прямые соответствуют частоте Ω_{SV} , а также первая и третья четверти декартовой системы соответствуют волнам, распространяющимся по положительному, а вторая и четвертая четверти – отрицательному направлению оси x_1 .

Итак, при малых значениях $\P$ имеем картину, показанную на фиг.1. Увеличение параметра $\P$ сначала приводит к картине, показанной на фиг.2. При дальнейшем увеличении этого параметра, как будто две кривые приближаются и замыкаются так, как показано на фиг.3-4. Далее, как показано на фиг.5, замкнутая кривая изчезает. Потом, “приближаясь”, две другие кривые встречаются в некоторой точке, как показано на фиг.6. После этого, “точка соприкосновения” передвигается к точке $(0,\Omega_{SV})$, как показано на фиг.7. Такой же характер имеем и при других $\widehat{b}$. Графики на фиг.6 и 8 показывают, что при увеличении параметра $\widehat{b}$ эти этапы проходят быстрее (в зависимости от $\P$).

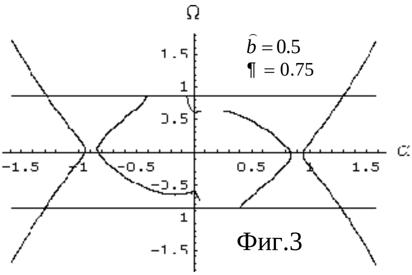
Таким образом, при заданном волновом числе, в основном, одна поверхностная магнитная волна распространяется в положительном, а другая в отрицательном направлении с разными частотами. Имеются также зоны молчания, т.е. интервалы волновых чисел, когда одна или обе волны отсутствуют.



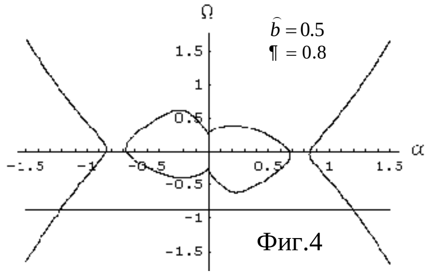
Фиг.1



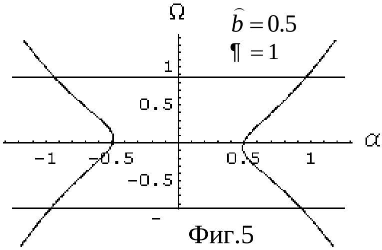
Фиг.2



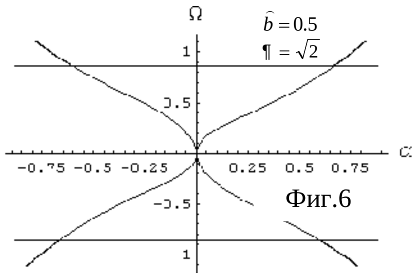
Фиг.3



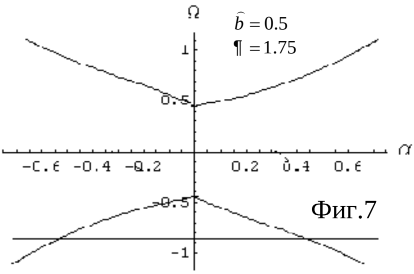
Фиг.4



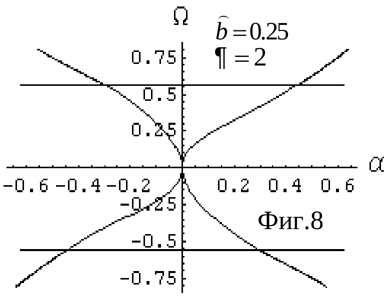
Фиг.5



Фиг.6



Фиг.7



Фиг.8

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560с.
2. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973.
3. Асанян Д.Д., Багдасарян Г.Е., Саакян С.Л. Поверхностные спиновые волны в слоистых средах. //Информационная технология и управление. Материалы Международной конференции «Прикладные и математические аспекты естествознания». Ереван, 1999, 3, с.34-45

4. Саакян С.Л. Распространение спиновых волн в кусочно-однородном ферромагнитном слое. // Механика, Материалы республиканской XII конференции молодых ученых, Ереван, 2003.
5. R.W. Damon, J.R. Eshbach (1961). Magnetostatic modes of a ferromagnetic slab.– J. Phys. Chem. Solids, 19, pp. 308-320, 1961.

<u>Сведения об авторах:</u>

Багдасарян Геворг Ервандович

Академик НАН Армении, главный научный сотрудник
Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail: mechins@sci.am

Даноян Завен Нерсесович

Д ф.-м. н., зав отделом Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail: mechins@sci.am

Даноян Эдуард Айказович

К.ф.-м.н., Ереванский госуниверситет
Адрес: ул. Алек Манукян, 1, Ереван
E-mail: mechins@sci.am

Асанян Давреш (D.J. Hasanyan)

К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении
Address: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail: davo1991_1991@yahoo.com

Саакян Саак Левонович

Институт механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail:sahaklevon@yahoo.com

ОТРАЖЕНИЕ СПИНОВЫХ (МАГНИТНЫХ) ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ФЕРРОМАГНИТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А., Атоян Л.А.

Ереван, Армения

В работе рассматривается отражение плоских спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства, граничащего с вакуумом. Рассматриваются два случая: учет обменного эффекта и пренебрежение им. Получены волновые поля в ферромагнитной среде и в вакууме. Показано, что в общем случае падения в ферромагнетике кроме зеркально отраженной волны возникают две неоднородные сопутствующие поверхностные волны, а в вакууме распространяется магнитостатическая сопутствующая поверхностная волна.

Эта задача рассмотрена в работе [1], где допущена ошибка (в решении для ферромагнетика не учтена одна из отраженных поверхностных сопутствующих волн).

§1. Постановка задачи. Пусть ферромагнитный недеформируемый кристалл в декартовой системе координат Oxyz занимает область $y > 0$. Вне кристалла (в области $y < 0$) предполагается вакуум. Граница кристалла $y = 0$ магнитно-свободна. Ось $0\mathrm{z}$ совпадает с осью анизотропии легкого намагничивания кристалла. Предполагается, что кристалл находится во внешнем магнитном поле $\vec{H}_0$, а объемная плотность намагниченности $\vec{M}_0 = \rho_0 \vec{\mu}_0$ параллельна магнитному полю $\vec{H}_0$ (ρ_0 – плотность кристалла, $\vec{\mu}_0$ – плотность намагниченности, отнесенной к единице массы), причем они направлены по оси легкого намагничивания, т.е. по оси $0\mathrm{z}$. Предполагается, что кристалл не деформируется, а возмущения в нем характеризуются вектором $\vec{\mu}\{\mu(x,y,t), \nu(x,y,t), 0\}$ магнитного момента и магнитостатическим потенциалом $\varphi(x,y,t)$, где $\vec{h} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ – возмущение напряженности магнитного поля. Магнитостатическое поле в вакууме характеризуется магнитным потенциалом $\varphi_e(x,y,t)$, где $\vec{h}_e = -\mathrm{grad}\,\varphi_e$ – возмущение напряженности магнитного поля .

При этих допущениях волновое поле в среде и в вакууме описываются следующими уравнениями и граничными условиями [1,2]:

1.Уравнения в ферромагнетике (в области $y > 0$):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mu}{\partial t}=\Omega_M\,(\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\widehat{b}\nu-\lambda\Delta\nu)\\ \dfrac{\partial\nu}{\partial t}=\Omega_M\,(-\rho_0^{-1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\widehat{b}\mu+\lambda\Delta\mu),\ \ \Delta\varphi=\rho_0(\dfrac{\partial\mu}{\partial x}+\dfrac{\partial\nu}{\partial y})\end{cases} \qquad (1.1)$$

2. Граничные условия на поверхности ферромагнетика (в области $y=0$):

$$\varphi=\varphi_e;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\rho_0\nu=\frac{\partial\varphi_e}{\partial y};\ \frac{\partial\nu}{\partial y}=0;\ \frac{\partial\mu}{\partial y}=0 \qquad (1.2)$$

3.Уравнение в вакууме (в области $y<0$):

$$\Delta\varphi_e=0 \qquad (1.3)$$

Здесь $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, $\Omega_M=\gamma_0 M_0=\gamma_0\rho_0\mu_0$, $\widehat{b}$ – постоянная магнитной анизотропии, λ – модуль обменного взаимодействия, γ_0– гиромагнитное отношение ($\gamma_0=1.76\cdot 10^7$ $(Э\cdot с)^{-1}$).

§ 2. Решение задачи в виде плоских гармонических волн. Вначале рассмотрим отражение спиновой объемной волны с учетом обменного эффекта, т.е. при $\lambda\neq 0$. Найдем выражения падающих и возникающих волн.

Для этого решение системы (1.1) ищем в виде плоских (однородных и неоднородных) магнитоупругих волн:

$$(\mu,\nu,\varphi)=((M,N,\Phi)e^{iqy}e^{i(px-\omega t)}) \qquad (2.1)$$

где M,N,Φ – амплитуды соответствующих величин, p и q – продольное и поперечное волновые числа, ω – частота волны.

Подставляя выражения (2.1) в систему уравнений (1.1), получим однородные линейные уравнения для определения соотношения между неизвестными амплитудами. Условие разрешимости этой системы дает дисперсионное уравнение для определения квадрата волнового числа в зависимости от частоты ω, или для определения поперечного волнового числа q в зависимости от продольного волнового числа p и от частоты ω:

$$k^2[\Omega^2-(\widehat{b}+\lambda k^2)(1+\widehat{b}+\lambda k^2)]=0;\Omega=\omega/\Omega_M;k^2=p^2+q^2 \qquad (2.2)$$

Из (2.4) получим следующие значения для квадрата волнового числа:

$$k^2=\lambda^{-1}\left[(-\Omega_{DE}+\sqrt{1/4+\Omega^2});-(\Omega_{DE}+\sqrt{1/4+\Omega^2})<0;\ 0\right] \qquad (2.3)$$

где $\Omega_{DE}=1/2+\widehat{b}$ – так называемая частота Деймона-Эшбаха [3], характеризующая поверхностную спиновую волну, которая распространяется по поверхности ферромагнитного недеформируемого полупространства при пренебрежении обменного эффекта.

Из (2.5) следует, что объемные (однородные) волны могут соответствовать только решениям $(2.3)_1$ при $k^2 > 0$. Для выполнения условия $k^2 > 0$ получаем неравенство: $\Omega > \Omega_{SV} \equiv \sqrt{\widehat{b}(1+\widehat{b})}$,где Ω_{SV} – частота объемных спиновых волн, распространяющихся под прямым углом к магнитному полю $\vec{H}_0$, когда обменные эффекты не учитываются [2]. Таким образом, закон дисперсии объемных (однородных) спиновых волн дается уравнением

$$k^2 = k_0^2 = \lambda^{-1}\left(-\Omega_{DE} + \sqrt{1/4+\Omega^2}\right) > 0 \tag{2.4}$$

при выполнении вышеуказанного условия .

Из равенства $k_0^2 = q_0^2 + p^2$ и из (2.4) получим поперечные волновые числа для падающей и зеркально отраженной объемных волн:

$$\begin{cases} q = q_{пад} = -q_0; \; q = q_{отр} = q_0, \\ q_0 = \sqrt{\lambda^{-1}\left(-\Omega_{DE} + \sqrt{1/4+\Omega^2}\right) - p^2} > 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Введя угол скольжения θ, т.е. угол между волновым вектором $\vec{k} = \{p, q, 0\}$ и положительным направлением оси OX, продольное и поперечное волновые числа для падающей и отраженной волны определим по формулам:

$$p = k_0 \cos\theta, \;\; q_{1,2} = \mp q_0, \; q_0 = k_0 \sin\theta \tag{2.6}$$

Вторым и третьим корням из (2.3) соответствуют неоднородные волны с поперечными волновыми числами

$$\begin{cases} q = \pm i|p|, \; q = \pm i r_0, \\ r_0 = \sqrt{\lambda^{-1}\left(\Omega_{DE} + \sqrt{1/4+\Omega^2}\right) + p^2} > 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Для волн, затухающих в глубь ферромагнетика, следует брать корни из (2.7) со знаком плюс:

$$q_3 = +i r_0, \quad q_4 = i|p| \tag{2.8}$$

Решение уравнения (1.3) для вакуума представим в виде:

$$\varphi_e = \Phi_e e^{|p|y} e^{i(px-\omega t)} \tag{2.9}$$

Таким образом, получаем полное решение, описывающее распространение возмущений в ферромагнетике и в вакууме при падении спиновой объемной волны из объема ферромагнетика на его границу:

1. Решение в ферромагнетике (в области $y > 0$):

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \nu = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$$
$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \tag{2.10}$$

2. Решение (2. 9) в вакууме (в области $y < 0$).

Здесь имеем следующие частные решения:

а) для падающей волны:

$$(\mu_0, \nu_0, \varphi_0) = ((M_0, N_0, \Phi_0) e^{-iq_0 y} e^{i(px - \omega t)}) \tag{2.11}$$

б) для зеркально отраженной волны:

$$(\mu_1, \nu_1, \varphi_1) = ((M_1, N_1, \Phi_1) e^{iq_0 y} e^{i(px - \omega t)}) \tag{2.12}$$

г) для первой сопутствующей поверхностной волны:

$$(\mu_2, \nu_2, \varphi_2) = ((M_2, N_2, \Phi_2) e^{-r_0 y} e^{i(px - \omega t)}) \tag{2.13}$$

д) для второй сопутствующей поверхностной волны:

$$(\mu_3, \nu_3, \varphi_3) = ((M_3, N_3, \Phi_3) e^{-|p| y} e^{i(px - \omega t)}) \tag{2.14}$$

Амплитуды вышеуказанных волн согласно (2.2) связаны соотношениями:

$$M = \frac{\circ_0^{-1}[-q\Omega + ip(\widehat{b} + \mathrm{a} k^2)]\Phi}{\Omega^2 - (\widehat{b} + \mathrm{a} k^2)^2}, N = \frac{\circ_0^{-1}[p\Omega + iq(\widehat{b} + \mathrm{a} k^2)]\Phi}{\Omega^2 - (\widehat{b} + \mathrm{a} k^2)^2} \tag{2.15}$$

§3. Нахождение искомых амплитуд. Для нахождения неизвестных амплитуд $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_e$ подставляем решения (2.9) и (2.10) в граничные условия (1.2). Решая полученную систему уравнений, находим искомые амплитуды:

$$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_e) = \left(\frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1}, \frac{A_2}{A_1 + iB_1}, \frac{A_3}{A_1 + iB_1}, \frac{A_e}{A_1 + iB_1} \right) \Phi_0 \tag{3.1}$$

Здесь

$$A_1 = p^2 q_0 [pq_0 (\sigma + R)^2 + r_0 (R^2 - 1)(2 + \sigma Q)]$$
$$B_1 = q_0^2 r_0^2 (R^2 - 1)(2 + \sigma Q) + \sigma p^2 Q (q_0^2 + r_0^2)(\sigma + R)^2 - p^3 r_0 Q (\sigma + R)^2$$
$$A_2 = -2 pq_0 R [q_0^2 (R^2 - 1)(2 + \sigma Q) + \sigma p^2 Q (\sigma + R)^2]$$
$$A_3 = -2 pq_0 (R^2 - 1)(\sigma + R)(\sigma pr_0 - q_0^2) \quad (3.\ 2)$$
$$A_e = 2A_1 + A_2 + A_3 =$$
$$= pq_0 \{-2(R^2 - 1)(\sigma + R)(\sigma pr_0 - q_0^2) - 2R[\sigma p^2 Q (\sigma + R)^2 +$$
$$+ q_0^2 (R^2 - 1)(2 + \sigma Q)] + p[pQ(\sigma + R)^2 + r_0 (R^2 - 1)(2 + \sigma Q)]\}$$

В общем случае падения коэффициенты отражения для зеркально отраженной волны, согласно вышеприведенным результатам имеют значения:

$$R_{коэф}(M) = M_1 / M_0 =$$
$$= \frac{(-Rq_0 + ip)\Phi_1}{(Rq_0 + ip)\Phi_0} = -\frac{Rq_0 - ip}{Rq_0 + ip} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = -\frac{Rq_0 - ip}{Rq_0 + ip} \cdot \frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1} \tag{3.3}$$
$$R_{коэф}(N) = N_1 / N_0 =$$
$$= \frac{N_1}{N_0} = \frac{(Rp + iq_0)\Phi_1}{(Rp - iq_0)\Phi_0} = \frac{Rp + iq_0}{Rp - iq_0} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{Rp + iq_0}{Rp - iq_0} \cdot \frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1} \tag{3.4}$$
$$R_{коэф}(\Phi) = \Phi_1 / \Phi_0 = \frac{A_1 - iB_1}{A_1 + iB_1} \tag{3.5}$$

Эти коэффициенты комплексны и по модулю равны единице. Известно, что такая ситуация соответствует полному внутреннему отражению электромагнитных и акустических волн, возникающих при определенных углах и определенных соотношениях между параметрами граничащих сред [4, 5]. В рассматриваемой задаче отражение спиновой волны вследствие возникновения сопутствующих поверхностных волн имеет характер полного внутреннего отражения при любом угле скольжения. Исключение составляет нормальное падение ($\theta = \pi / 2$).

При пренебрежении обменным эффектом ($\lambda = 0$) первая сопутствующая волна не возникает.

Таким образом, в общем случае падение объемной спиновой волны из объема ферромагнитного полупространства на его границу сопровождается зеркально отраженной объемной волной и а) двумя сопутствующими поверхностными (неоднородными) волнами в ферромагнетике в случае учета обменного эффекта, б) одной сопутствующей поверхностной (неоднородной) волной без учета обменного эффекта, а также магнитостатической поверхностной (неоднородной) волной в вакууме в обоих случаях. Коэффициенты отражения для объемной волны в общем случае комплексны и по модулю равны единице, т. е. Отражение, вследствие возникновения сопутствующих поверхностных волн, имеет характер полного внутреннего отражения. Исключение составляет нормальное падение, когда $\theta = \pi / 2$ и скольжение по поверхности ферромагнетика, когда $\theta = 0, \theta = \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Отражение двумерных спиновых волн от границы ферромагнитного полупространства.//В кн.: «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести». Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН Армении, 2006. 306 с.

2. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Наука, 1991. 560 с.
3. Damon R. W., Eshbach I. R. Magnetostatic modes of a ferromagnetic slab. J. Phys. Chem. Solids, 1961, 19, p. 308-220.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович
Академик НАН Армении, главный науч. сотрудник
Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail: mechins@sci.am

Даноян Завен Нерсесович
Д.ф..-м.н., зав. отделом Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail: mechins@sci.am

Манукян Гоар Аслановна
К.ф.-м.н., ст. науч. сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail: mechins@sci.am

Атоян Левон Оганесович
К.ф.-м.н., ст. науч. сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
E-mail: mechins@sci.am

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ВИДОИЗМЕНЕННОГО ТОКА СМЕЩЕНИЯ

Багдоев А.Г., Шекоян А.В.
Ереван, Армения

Известно, что линейные уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразования Лоренца и не инвариантны относительно преобразования Галилея, а для нелинейных уравнений гидродинамики–наоборот.

В том случае, когда среда описывается уравнениями Максвелла для движущейся среды с учетом тока смещения и уравнениями движения среды, появляется трудность, состоящая в том, что они не инвариантны относительно этих преобразований. Следует отметить, что обычные уравнения магнитной гидродинамики (МГД), в которых отбрасывается ток смещения, так как в этих процессах частота ω гораздо меньше электропроводности среды – σ , инвариантны относительно преобразования Галилея.

За последние годы появились новые данные о магнитных звездах [1], где есть огромные магнитные и электрические поля и большие частоты, сравнимые с электропроводностью $(\mu \sim \pm)$. Поэтому появляется необходимость написать видоизмененные уравнения магнитной гидродинамики, учитывающие эти обстоятельства. А именно сохраняется и видоизменяется ток смещения таким образом, чтобы новая система МГД была инвариантна относительно преобразования Галилея.

Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot}\overline{H} = \frac{4®}{C}\overline{j} + \frac{1}{C}\frac{d\overline{D}}{dt} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\overline{E} = -\frac{1}{C}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\overline{j} = \pm\,\overline{E}', \quad \overline{E}' = \overline{E} + \frac{\overline{V}\times\overline{B}}{C} \tag{3}$$

$$\circ\,\frac{d\overline{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{\overline{j}\times\overline{B}}{C} \tag{4}$$

$$\overline{D} = \pounds\,\overline{E}', \qquad \overline{B} = «\,\overline{H} \tag{5}$$

где $\overline{E},\overline{D}$ – векторы электрического напряжения и смещения, $\overline{H},\overline{B}$ – векторы магнитного напряжения и индукции, $\overline{j}$ – вектор плотности электрического тока, $\overline{V}$ – скорость движения среды, P – давление, $\pounds$ и « – диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость, C – скорость света в вакууме

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\bar{V}\nabla\right) \tag{6}$$

В обычных уравнениях Максвелла берется $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, мы заменили его $\frac{d\bar{D}}{dt}$, где $\bar{D}=\varepsilon\bar{E}'$. Из выражения (6) следует, что уравнения (1)–(5), в отличие от обычных уравнений Максвелла, нелинейные.

Обычно в магнитной гидродинамике исключают $\bar{E}$ и при этом получают следующее уравнение [2]:

$$\frac{d\bar{B}}{dt}=\left(\bar{B}\nabla\right)\bar{V}-\bar{B}\,\mathrm{div}\,\bar{V}+\frac{C^2}{4\pi\sigma}\Delta\bar{H} \tag{7}$$

которое решают совместно с уравнением (4).

Для сравнения выведем уравнение типа (7), исключая $\bar{E}$ в системе уравнений (1)–(5). Делая итерацию в (1)

$$\sigma\bar{E}'=\frac{C}{4\pi}\mathrm{rot}\,\bar{H}-\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{rot}\,\bar{H}\right) \tag{8}$$

подставляя (8) в (3), получим уравнение индукции с учетом токов смещения

$$\frac{d\bar{B}}{dt}=\left(\bar{B}\nabla\right)\bar{V}-\bar{B}\,\mathrm{div}\,\bar{V}+\frac{C^2}{4\pi\sigma}\Delta\bar{H}-\frac{C^2\varepsilon}{\left(4\pi\sigma\right)^2}\mathrm{rot}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{rot}\,\bar{H}\right) \tag{9}$$

В уравнении (9) последнее слагаемое новое, что есть следствие замены $\frac{\partial D}{\partial t}$ на $\varepsilon\frac{dE'}{dt}$.

Таким образом, электромагнитные процессы в электропроводящих средах при больших частотах и полях предлагается описывать уравнениями (1)–(5) или уравнениями (9), (3)–(5). Конечно, для замыкания системы (1)–(5) следует добавить уравнение неразрывности среды и уравнения состояния.

Для примера, иллюстрирующего влияние последнего члена в (9) на нелинейные высокочастотные волны в плазме, выведем нелинейное эволюционное уравнение методами, разработанными в работах [1,3–5], из уравнений (1)–(5).

Это уравнение в основных порядках имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial\xi}+\frac{L}{2}\Delta_{\perp}U=\frac{1}{C_n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Gamma U\frac{\partial U}{\partial\xi}+D\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+A\frac{\partial^3 U}{\partial\xi^3}\right) \tag{10}$$

где U – нормальная к волне скорость частицы среды, C_n – нормальная скорость линейной волны, ξ – эйконал.

Уравнение (10) отличается от полученных в указанных выше работах коэффициентом A, имеющим для данного случая следующий вид:

$$A = \frac{a_1^2 C^2 \text{£}}{\text{®±}\, C_n^2 \left(2C_n^2 - a^2 - a_1^2\right)}$$

где a – скорость звука, a_1 – скорость Альфвена.

В отличие от работ [1,3–5], где рассматривается тепловая релаксация, дающая третье слагаемое в правой части уравнения (10), здесь она получается из-за учета последнего слагаемого в (9), обусловленного магнитной дисперсией.

В конце отметим, что замена в токе смещения $\frac{\partial}{\partial t}$ на $\frac{d}{dt}$ и $\bar{D} = \text{£}\,\bar{E}'$ изменяет также приведенное ниже известное уравнение Максвелла, которое является другой записью закона Кулона для статики, постулированного Максвеллом для неподвижных сред.

Действительно, запишем уравнение непрерывности зарядов

$$\frac{\partial \text{°}_e}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{j} = 0 \tag{11}$$

и подставим туда выражение, которое получится из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{1}{4\text{®}} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{D}$$

тогда получим

$$\operatorname{div} \bar{D} = 4\text{®°}_e$$

В нашем случае из уравнения (1) получится

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{1}{4\text{®}} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \frac{d\bar{D}}{dt}$$

И, учитывая (6), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{°}_e - \frac{1}{4\text{®}} \operatorname{div} \bar{D}\right) - \frac{1}{4\text{®}} \operatorname{div}\left[\left(\bar{V}\nabla\right)\bar{D}\right] = 0 \tag{12}$$

Если в (11) подставить $\bar{V}=0$, т.е. неподвижная среда, то (12) совпадает с (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Седракян Д.М. Волновые пучки в плазме в поперечном магнитном поле. //Астрофизика. 2001. Т.44. №1. С.139–147.
2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Изд. Физмат наук, 1962. 246с.

3. Минасян М.М. Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ереван: Изд. ЕГУ, 2007. 254с.
4. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Отражение нелинейного пучка от свободной поверхности магнитоупругого слоя. //МТТ. 1997. №4. С.69–76.
5. Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В., Сафарян Ю.С. Слабо-линейные волны в механике сплошной среды в модельных задачах. //Вестник Чувашкого Госпедуниверситета. 2007. №3. С.32–51.

<u>Сведения об авторах:</u>

Багдоев Александр Георгиевич

Доктор-профессор, чл-корр. НАН Армении, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Ереван–0019, пр.Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел:.56–82–01
E–mail: bagdoev@mechins.sci.am

Шекоян Ашот Вазгенович

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Ереван–0019, пр.Маршала Баграмяна 24^{б}
E–mail: ashotshek@mechins.sci.am

ЭКРАНИРОВАННАЯ ПОВЕРХНОСТНАЯ СДВИГОВАЯ ВОЛНА В ПЬЕЗОАКТИВНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Белубекян М.В.
Ереван, Армения

Рассматривается распространение электроупругих сдвиговых волн в системе полупространство из пьезоэлектрического материала класса 6мм и расположенного над полупространством экрана электрического или магнитного поля. Задача рассматривается на основе гиперболических уравнений электромагнитного поля, в отличие от проведённых ранее исследований в квазистатическом приближении. Показывается, что уточнение несущественно для скорости распространения поверхностной волны, но имеет важное значение для характера распространения электромагнитной волны в зазоре между экраном и полупространством.

1. Пьезоактивное полупространство из материала класса 6мм в прямоугольной декартовой системе координат (x,y,z) занимает область $-\infty < x < \infty,\ 0 \le y < \infty,\ -\infty < z < \infty$. На расстоянии h $(y = -h)$ от полуплоскости расположен плоский экран, который препятствует проникновению электрического поля в пространство $y = -h$ (рис. 1).

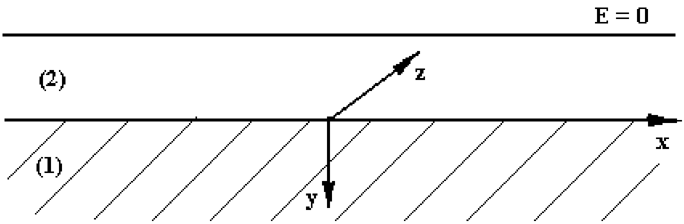


Рис. 1

Принимается система единиц и обозначений статьи [1]. Уравнения распространения чисто сдвиговых электроупругих волн в полупространстве $y \ge 0$ имеют вид

$$\begin{cases} c_{44}\Delta w - e_{15}\left(\dfrac{\partial E_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_2^{(1)}}{\partial y}\right) = \circ\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ e_{15}\Delta w - \pounds_{11}^{(1)}\left(\dfrac{\partial E_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial E_2^{(1)}}{\partial y}\right) = 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial y} = -\text{«}_1 \frac{\partial H_3^{(1)}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial H_3^{(1)}}{\partial y} = e_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \text{£}_{11}^{(1)} \frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_3^{(1)}}{\partial x} = -e_{15} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - \text{£}_{11}^{(1)} \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial t} \tag{1.3}$$

где w – упругое перемещение в направлении оси z; $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}$ – компоненты напряжённости электрического поля по направлению осей x и y соответственно, $H_3^{(1)}$ – компонента напряжённости магнитного поля в направлении оси z; c_{44} – модуль сдвига, ° – плотность материала упругой среды, $\text{£}_{11}^{(1)}$ – диэлектрическая проницаемость, «_1 – магнитная проницаемость (пьезомодуль) материала среды класса 6мм, Δ – оператор Лапласа.

К уравнениям (1.1) – (1.3) необходимо присоединить следующие уравнения электродинамики для области $0 < y < h$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_2^{(2)}}{\partial x} - \dfrac{\partial E_1^{(2)}}{\partial y} = -\text{«}_0 \dfrac{\partial H_3^{(2)}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_3^{(2)}}{\partial y} = \text{£}_{11}^{(2)} \dfrac{\partial E_1^{(2)}}{\partial t}, \qquad \dfrac{\partial H_3^{(2)}}{\partial x} = -\text{£}_{11}^{(2)} \dfrac{\partial E_2^{(2)}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.4}$$

Требуется найти решения системы уравнений (1.1) – (1.4), удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{cases} \pm_{23} = 0, \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad D_1^{(1)} = D_1^{(2)} \quad \text{ïðè} \quad y = 0 \\ E_1^{(2)} = 0 \quad \text{ïðè} \quad y = -h \end{cases} \tag{1.5}$$

и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty} w = 0, \qquad \lim_{y\to\infty} H_3^{(1)} = 0 \tag{1.6}$$

Для компонент напряжений $\pm_{13}, \pm_{23}$ и компонент индукции электрического поля $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$ $(i = 1,2)$ должны иметь место следующие функциональные связи :

$$\pm_{32} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - e_{15} E_2^{(1)}, \qquad \pm_{31} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} - e_{15} E_1^{(1)} \tag{1.7}$$

$$D_1^{(1)} = e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} + \text{£}_{11}^{(1)} E_1^{(1)}, \qquad D_2^{(1)} = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} + \text{£}_{11}^{(1)} E_2^{(1)} \tag{1.8}$$

$$D_1^{(2)} = \text{£}_{11}^{(2)} E_1^{(2)}, \qquad D_2^{(2)} = \text{£}_{11}^{(2)} E_2^{(2)} \tag{1.9}$$

Уравнения (1.1) – (1.3), согласно [1], приводятся к более простому виду

$$\Delta w=\frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\qquad \Delta H_3^{(1)}=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 H_3^1}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

где

$$c_t^2=\frac{\bar{c}_{44}}{\rho}=\frac{c_{44}}{\rho}(1+\chi),\qquad c_1^2=\frac{1}{\varepsilon_{11}^{(1)}\mu_1},\qquad \chi=\frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}^{(1)}} \tag{1.11}$$

Аналогично, уравнения (1.4) приводятся к виду

$$\Delta H_3^{(2)}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 H_3^{(2)}}{\partial t^2},\qquad c_2^2=\frac{1}{\varepsilon_{11}^{(2)}\mu_0} \tag{1.12}$$

2. Представляя решения уравнений (1.10) в виде гармонических волн

$$w=f(y)\exp i(\omega t-kx),\qquad H_3^{(1)}=g(y)\exp i(\omega t-kx) \tag{2.1}$$

получим обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно функций $f(y), g(y)$, решения которых, удовлетворяющие условиям затухания (1.6), определяются следующим образом :

$$f(y)=A_1e^{-k\sqrt{1-\eta}\,y},\qquad g(y)=B_1e^{-k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,y} \tag{2.2}$$

где A_1, B_1 – произвольные постоянные и приняты новые обозначения

$$\eta=\frac{\omega^2}{k^2c_t^2},\qquad \theta_1=\frac{c_t^2}{c_1^2}<<1 \tag{2.3}$$

Из условий затухания следует, что параметр η, характеризующий искомую фазовую скорость поверхностной волны, должен удовлетворять условию

$$0<\eta<1 \tag{2.4}$$

С учётом (2.1) и (2.2) из уравнений (1.3) определяются компоненты электрического поля

$$\begin{cases} E_1^{(1)}=\dfrac{ik}{\varepsilon_{11}^{(1)}}\left(\dfrac{\sqrt{1-\theta_1\eta}}{\omega}B_1e^{-k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,y}+e_{15}A_1e^{-k\sqrt{1-\eta}\,y}\right)\exp i(\omega t-kx)\\ E_2^{(1)}=\dfrac{k}{\varepsilon_{11}^{(1)}}\left(\dfrac{1}{\omega}B_1e^{-k\sqrt{1-\theta_1\eta}\,y}+e_{15}\sqrt{1-\eta}\,A_1e^{-k\sqrt{1-\eta}\,y}\right)\exp i(\omega t-kx)\end{cases} \tag{2.5}$$

Аналогичным образом, согласно (1.4) и (1.12), определяются компоненты электромагнитного поля в зазоре между экраном и полупространством:

$$
\begin{cases}
H_3^{(2)} = \left(B_2 e^{-k\sqrt{1-g_2¦}\,y} + C_2 e^{k\sqrt{1-g_2¦}\,y}\right)\exp i(\mu t - kx) \\
E_1^{(2)} = \dfrac{ik\sqrt{1-g_2¦}}{\mu £_{11}^{(1)}}\left(B_2 e^{-k\sqrt{1-g_2¦}\,y} - C_2 e^{k\sqrt{1-g_2¦}\,y}\right)\exp i(\mu t - kx) \\
E_{a}^{(2)} = \dfrac{k}{\mu £_{11}^{(2)}}\left(B_2 e^{-k\sqrt{1-g_2¦}\,y} + C_2 e^{k\sqrt{1-g_2¦}\,y}\right)\exp i(\mu t - kx)
\end{cases} \tag{2.6}
$$

где

$$
g_2 = \frac{c_t^2}{C_2^2}, \qquad C_2^2 = («_0 £_{11}^{(2)})^{-1} \tag{2.7}
$$

3. Подстановка (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) в граничные условия (1.5) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, B_1, B_2, C_2 :

$$
\begin{cases}
c_{44}(1+ ¡)\sqrt{1-¦}\,A_1 + \dfrac{e_{15}}{\mu £_{11}^{(1)}} B_1 = 0 \\
e_{15} A_1 + \dfrac{\sqrt{1-¯_1¦}}{\mu} B_1 - \dfrac{\sqrt{1-¯_2¦}}{\mu}\dfrac{£_{11}^{(1)}}{£_{11}^{(2)}}(B_2 - C_2) = 0 \\
B_1 - B_2 - C_2 = 0 \\
B_2 e^{k\sqrt{1-¯_2¦}\,h} - C_2 e^{-k\sqrt{1-¯_2¦}\,h} = 0
\end{cases} \tag{3.1}
$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.1) приводит к дисперсионному уравнению, определяющему искомую величину ¦ , характеризующую фазовую скорость поверхностной волны

$$
\Gamma(¦, kh) \equiv ¡ - (1+¡)\sqrt{1-¦}\left[\sqrt{1-g_1¦} + £_{11}^{(1)}\left(£_{11}^{(2)}\right)^{-1}\sqrt{1-g_2¦}\ \mathrm{th}(kh\sqrt{1-g_2¦})\right] = 0 \tag{3.2}
$$

Из (3.2), в пределе $kh \to 0$ и в приближении $g_1 << 1$, получается выражение для фазовой волны Гуляева-Блюстейна [2] :

$$
¦ = 1 - ¡^2 (1+¡)^{-2} \tag{3.3}
$$

Уравнение (3.2) в приближении $g_1 << 1$, $g_2 << 1$ приводится к уравнению, определяющему фазовую скорость экранированной волны Гуляева-Блюстейна в квазистатическом приближении [3] :

$$
¦ = 1 - ¡^2 (1+¡)^{-2}\left(1 + \frac{£_{11}^{(1)}}{£_{11}^{(2)}}\,\mathrm{th}\,kh\right)^{-2} \tag{3.4}
$$

В пределе $kh \to 0$ из уравнения (3.2) получается уравнение для волны Гуляева-Блюстейна в точной постановке [1] :

$$\sqrt{1-¦}\sqrt{1-g_1¦} = ¡(1+¡)^{-1} \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) имеет два корня, один из которых удовлетворяет условию затухания (2.4), другой не удовлетворяет.

Из решений уравнений (3.2) и (3.5) следует, что влияние уточнения на скорость поверхностной волны Гуляева-Блюстейна несущественно. Однако решение задачи в точной постановке, в отличие от квазистатической, позволяет определить магнитное поле в зазоре между полупространством и экраном, что необходимо в задачах, связанных с применением метода неразрушающего контроля. Напряжённость магнитного поля определяется при помощи произвольного множителя A_1, характеризующего возмущение упругого перемещения, следующим образом :

$$H_3^{(2)} = -e_{15}\mu(1+¡^{-1})\sqrt{1-¦}\,A_1\frac{\mathrm{ch}[k(h+y)\sqrt{1-g_2¦}\,]}{\mathrm{ch}(kh\sqrt{1-g_2¦}\,)} \tag{3.6}$$

Необходимо отметить, что аналогичные результаты получаются также на основе модели, предложенной в статье [4].

4. Если граничные условия непрерывности нормальной составляющей индукции электрического поля $D_2^{(1)} = D_2^{(2)}$ из (1.5) заменить более естественным граничным условием

$$H_3^{(1)} = H_3^{(2)} \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{4.1}$$

то результаты получаются идентичными.

Отсюда следует, что используемое в квазистатическом приближении граничное условие

$$D_2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \tag{4.2}$$

есть граничное условие экрана для магнитного поля, в противоположность условию равенства нулю потенциала электрического поля, что является экраном электрического поля.

Пусть на расстоянии h от полупространства расположен экран магнитного поля. Тогда условие $\mathrm{E}_1^{(2)} = 0$ из (1.5) заменяется условием

$$H_3^{(2)} = 0 \;\text{при}\; y = -h \tag{4.3}$$

В остальном постановка задачи остаётся такой же, что и в пункте 1. Для рассматриваемого случая дисперсионное уравнение получается в виде

$$\Gamma(¦,kh) \equiv ¡-(1+¡)\sqrt{1-¦}\left[\sqrt{1-g_1¦}+£_{11}^{(1)}\left(£_{11}^{(2)}\right)^{-1}\sqrt{1-g_2¦}\;\mathrm{cth}(kh\sqrt{1-g_2¦}\,)\right]=0 \tag{4.4}$$

В пределе $kh \to 0$ получается уравнение

$$\sqrt{1-¦}\sqrt{1-g_2¦}=0 \tag{4.5}$$

которое удовлетворяет условию затухания (2.4) и не имеет решения. Такой же результат получается при условии (4.2).

Из сравнения дисперсионных уравнений электрического (3.2) и магнитного (4.4) экранов следует, что для экрана электрического поля максимальная локализация есть при $kh \to 0$ ($h = 0$), минимальная локализация – при $kh \to \infty$ (экран удаляется от полупространства). Для экрана магнитного поля локализация (отсутствие локализации) есть при $kh \to 0$, а максимальная локализация – при $kh \to \infty$. Причём минимальная локализация от электрического экрана ($kh \to \infty$) равна максимальной локализации от магнитного экрана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yang J.S. Bleustein-Gulyaev waves in piezoelectromagnetic materials. Intern. Journ. of Applied Electromagnetics and Mechanics 2000, 12, p. 235 – 240.
2. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239с.
3. Аветисян А.С., Карапетян М.Э. Экранирование волны Гуляева-Блюстейна. В сб. «Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем». Ереван: Изд.ЕГУ. 2002. С.97– 101.
4. Shaofan Li. The electromagnetic-acoustic surface wave in a piezoelectric medium: The Bleustein-Gulyaev mode. Journ. Appl. Phys. 1996, 80(9), p. 5264 – 5269.

Сведения об авторе:

Белубекян Мелс Вагаршакович

К.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник
Института механики НАН Армении
Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^{б}, 0019, Ереван, Армения
Тел.: (+37410) 52-15-03
E-mail: mbelubekyan@mechins.sci.am
mbelubekyan@yahoo.com

НАДЕЖНОСТЬ СИНХРОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Белуян З.А., Белуян С.З.
Ереван, Армения

Современный этап развития электрических машин характерен двумя основными прогрессивными тенденциями – стремлением к неуклонному росту производительности, что связано с повышением скоростей вращения, с одной стороны, и уменьшением массогабаритных показателей и себестоимости, с другой.

Повышение удельной мощности на единицу массы приводит к динамической перенапряженности конструктивных элементов и к снижению надежности изделия.

В настоящее время электрические машины проектируются в соответствии с традиционной формой с некоторой модернизацией, которая не всегда является оптимальной с точки зрения материалоемкости и надежности [1].

При доводке опытных образцов таких машин, зачастую, приходится затрачивать огромные материальные и трудовые ресурсы, чтобы обеспечить качество и требуемую надежность, а иногда приходится вовсе отказаться от этих образцов.

Причиной такого положения является, прежде всего, отсутствие четко сформулированных и систематизированных принципов оценки надежности и долговечности машин с учетом исходных проектных данных. Ядром развития современного машиностроения вообще и электрических машин, в частности, должен стать вопрос оптимизации основных показателей надежности и экономической эффективности на основе теоретических и экспериментальных исследований.

Только при использовании результатов таких исследований можно разработать основные принципы создания современных добротных электрических машин, качество, надежность и работоспособность которых заведомо обеспечена на стадии их проектирования [2].

Все электрические машины (синхронные, асинхронные) состоят из ротора, обмоток статора и обмоток ротора, подшипниковых узлов, подшипниковых щитов и корпуса с шихтованным статором.

Синхронные электрические машины и генераторы дополнительно имеют щеточные узлы и блоки регулирования напряжения.

Надежность, работоспособность и долговечность этих узлов и определяют качество и надежность всей машины в целом.

Выбор показателей надежности для электрических машин производится в соответствии с их назначением. Для машин общепромышленного назначения показатели надежности определяются по экономическому критерию, а для машин спец-назначения (например, для оборонной техники) – по критерию безопасности.

Для определения основных показателей надежности машин прежде всего необходимо установить закон распределения вероятности безотказной работы путем либо прямых испытаний самих изделий, что требует длительного времени и больших материальных затрат, либо иметь статистические данные об эксплуатации.

Для определения номенклатуры показателей надежности электрических машин необходимо учесть конструктивные факторы, факторы изготовления и эксплуатации.

Наиболее полной характеристикой надежности, как случайной величины, является закон распределения безотказной работы в течение назначенного времени t [2].

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t)\,dt\right], \qquad \lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$$

$$T_0 = \int_0^\infty P(t), \qquad \lambda_i(t) = \frac{\Delta n_i(t)}{N_i(t)\Delta t}$$

где $f(t)$ – плотность распределения случайной величины, $\lambda(t)$ – интенсивность отказа i–ого элемента машины, T_0 – наработка на отказ, $P(t)$ – вероятность отказа машины за время t (ВБР), $N_i(t)$ – среднее число отказов элементов i–ого типа, Δn_i – количество отказавших элементов i–ого типа за время Δt.

Учитывая, что отказ одного элемента (узла) электрической машины (генератора) приводит к отказу всей системы (машины), то можно принять, что все элементы соединены последовательно. Тогда можно записать [3]

$$P_г(t) = \prod_{i=1}^{m} P_i(t) = P_{брн}(t)\cdot P_{кщ}(t)\cdot P_{под}(t)\cdot P_{об.с}(t)\cdot P_{об.р}(t)$$

где $P_г(t)$, $P_{брн}(t)$, $P_{кщ}(t)$, $P_{под}(t)$, $P_{об.с}(t)$, $P_{об.р}(t)$ – вероятности безотказной работы за время t генератора, блока регулирования напряжения, контактно–щеточного узла подшипниковых узлов, обмотки статора, обмотки ротора:, соответственно.

Модель надежности блока регулирования напряжения строится с учетом конструкции блока и числа элементов, входящих в блок регулирования. Поскольку вероятность безотказной работы БРН подчиняется экспоненциальному закону распределения, то

$$P_{брн}(t) = \exp\left[\sum_{i=0}^{N}\int_0^t \lambda_i(t)\,dt\right] = \prod_{i=1}^{N} P_i(t_i) = e^{-\lambda t_{брн-ш}}$$

Здесь $t_{брнi}$ –наработка на отказ i –ого элемента $БРН$, $P_i(t_i)$ – вероятность безотказной работы i -ого элемента $\lambda_i(t)$ – интенсивность отказа i -ого элемента, N – количество элементов, λ – интенсивность отказа БРН.

В контактно-щеточный узел генератора входят: контактные кольца, щетки, щеткодержатели и подводящие провода. Следовательно, вероятность безотказной работы определится выражением

$$P_{кщ}(t) = P_{кк}(t) \cdot P_{щ}(t) \cdot P_{щ.д}(t) \cdot P_{пр}(t),$$

где $P_{кк}(t)$, $P_{щ}(t)$, $P_{щ.д}(t)$, $P_{пр}(t)$ – вероятность безотказной работы контактных колец, щеток, щеткодержателей и подводящих проводов, соответственно. Вероятность безотказной работы щеткодержателя также подчиняется экспоненциальному закону распределения и потому

$$P_{кщ}(t) = \exp\left[\sum_{i=0}^{m}\int_0^t \lambda_i(t)dt\right] = P_{кк}(t) \cdot P_{щ} \cdot P_{щ.д}(t) \cdot P_{пр}$$

Вероятность безотказной работы подшипниковых узлов электрических машин, согласно [5], имеет вид:

$$P_{под}(t) = \exp[-\lambda t]$$

где $\lambda(t) = \left(t/5.11t_p\right)^{\beta}$, t – назначенный срок службы подшипников, t_p – расчетное время наработки подшипника, $\beta = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\ln P_i(t_i)\right) \times$

$$\times\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(t_i/5.112t_p\right)\right]^{-1}$$ – усредненное значение показателя.

Электрические машины в процессе эксплуатации проходят характерные периоды работы: период приработки $t_{пр}$, период нормальной работы $t_н$ и период старения $t_{ст}$. Тогда вероятность безотказной работы $P_t(t)$ определится как произведения вероятностей в различные периоды [3,4].

$$P_г(t) = P_г(t_{пр} + t_н + t_{ст}) = P(t_{пр}) \cdot P(t_н) \cdot P(t_{ст})$$

Вероятность безотказной работы за период приработки и нормальной работы подчиняются экспоненциальному закону распределения [5], следовательно,

$$P(t_{пр}) = e^{-\lambda t_{пр}}, \quad P(t_н) = e^{-\lambda t_н}$$

где λ – интенсивность отказа в период $t_{пр} + t_н$.

Вероятность безотказной работы за период старения подчиняется нормальному закону распределения [4], следовательно,

$$P(t_н) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{ст}^{\infty} \exp\left[-(t - t_{ст})^2 / 2\delta^2\right] dt$$

где $t_{ст} = \sum t_i / N_0$, $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{ст})^2 / N_0 - 1}$, t_i – наработка на отказ i-ого генератора или узла, N_0 – общее количесво исследуемых генераторов

Вероятность безотказной работы электрических машин в целом с учетом внезапных и износовых отказов может быть определена выражением:

$$P(t) = \exp(\lambda_{ср} \cdot t)\left[0.5 + \frac{1}{\sigma_и \sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-\frac{T_и - \tau}{2\sigma_n^2}\right) d\tau\right]$$

где $T_и$ и $\sigma_и$ – среднее время безотказной работы машин и его квадратическое отклонение, характеризующие износ и старение генератора, $\lambda_{ср}$ – интенсивность отказов.

Среднее время безотказной работы машин с учетом как внезапных, так и износовых отказов будет:

$$T_{ср} = \frac{1}{\lambda_{ср}}\left[1 - e^{\lambda_{ср} T_и + \frac{\lambda_{ср}^2 \sigma_и^2}{2}}\right]$$

Как показывают статические данные эксплуатации, все типы генераторов эксплуатируют до наступления периода старения, потому принимается $P(t_{ср}) = 1$.

Период приработки для синхронных генераторов общепромышленного назначения, согласно статистическим данным, составляет $t_{пр} = 3000$ часов. Это время, в течение которого скрытые дефекты выявляются и устраняются. Период нормальной работы для указанных генераторов составляет $t_н = 40000$ часов. Интенсивность отказа для синхронных генераторов мощностью от 50 до 100квт за время нормальной работы $t_н$ остается постоянной.

Результаты расчетов и статистических данных эксплуатации некоторых типов синхронных генераторов и электродвигателей приведены в табл. 1.

Таблица1.

Вероятность безотказной работы синхронных генераторов и электрических машин

Тип машины	Мощность квт	Частота вращения, об./мин.							
		до 3000 об./мин.				до 8000 об./мин.			
		Расч.		Эксперим.		Расч.		Эксперим.	
		5мин.	8000ч	5мин.	8000ч	5мин.	10000ч	5мин.	10000ч
Генераторы	до 4 квт	0,9997	0,274	0,9999	0,286	0,9999	0,697	0,9999	0,698
	до 40 квт	0,9993	0,265	0,9994	0,281	0,9998	0,689	0,9997	0,673
	до 100 квт	0,9991	0,261	0,9988	0,279	0,9999	0,684	0,9999	0,671
Эл. машины	до 4 квт	0,9998	0,665	0,9999	0,669	0,9999	0,766	0,9999	0,761
	до 40 квт	0,9987	0,654	0,9998	0,667	0,9999	0,764	0,9999	0,9998
	до 100 квт	0,396	0,648	0,391	0,662	0,9998	0,759	0,9999	0,747

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетов Д.Н. Работоспособность и надежность деталей машин. М.: Высшая школа, 1974.
2. Шекян Г.Г., Белуян З.А. К расчету надежности и долговечности подшипниковых узлов генераторов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №.3. С.66–69.
3. Андрейков В.А., Емельянов И.А. Надежность дизель–электрических агрегатов и их систем автоматизации М.: Машиностроение, 1970.
4. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
5. Шекян Г.Г. Динамика роторных машин. Ереван: Изд. „Гитутюн” НАН РА, 2004.

Сведения об авторах:

Белуян Зармик Апресович
К.т.н. ГИУА г.Ереван

Белуян С.З.
соискатель
МЭИ, г. Москва

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СДВИГОВЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ И ДВУМЯ ИЗОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ИЗ ЗОЛОТА И ПЛАТИНЫ

Берберян А.Х.
Ереван, Армения

В данной работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява [1] в трехслоистой системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm и прикрепленных к ней двух изотропных проводящих слоев [2,3] Au и Pt, произвольной толщины h_1 и h_2. В частности, показано существование волны Лява щелевого типа, обусловленной исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Изучены дисперсионное уравнение, структура и поведение мод волны Лява. Приведены качественные графики дисперсионных кривых.

Упругие и электрические поля в пьезоэлектрической подложке (область $x_1 > 0$) взаимосвязаны и описываются квазистатическими уравнениями линейной теории электроупругости:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\sigma_{ik} = c_{iklm}\gamma_{lm} - e_{lik} E_l, \quad D_i = e_{ikj}\gamma_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi, \ \mathrm{div}\,\vec{D} = 0, \ \gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

Здесь u_i – составляющая упругого перемещения, σ_{ik} – составляющая тензора напряжений, $\vec{E}(E_k)$ – напряженность электрического поля, $\vec{D}(D_k)$ – электрическая индукция, γ_{lm} – составляющая тензора деформаций, φ – потенциал электрического поля, c_{iklm} – составляющая тензора упругих постоянных, e_{lik} – составляющая тензора пьезоэлектрических постоянных, ε_{ik} – составляющая тензора диэлектрических постоянных, x_k – координаты, t – время, ρ – плотность пьезоэлектрика.

1. Постановка задачи. Если в квазистатической постановке электрическое поле не проникает в проводящую среду, то в слоях упругое поле опишется уравнениями (1), (2), где $E_l \equiv 0$. Главная ось пьезоэлектрика (L_6 или L_4) направлена по оси Ox_3, ось Ox_1 перпендикулярна к поверхности границы и направлена в глубь полупространства. Верхний край системы $x_1 = -(h_1 + h_2)$ механически свободен.

Рассмотрим антиплоское деформационное состояние

$$u_1 \equiv 0,\ u_2 \equiv 0,\ u_3 = u(x_1, x_2, t),\ \ -(h_1 + h_2) < x_1 < +\infty$$
$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t), \quad 0 < x_1 < +\infty \tag{3}$$

для нашего случая получим следующие дифференциальные уравнения:

1.В подложке ($0 < x_1 < +\infty$):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{44}\nabla^2 u + e_{15}\nabla^2\varphi, \quad \varepsilon_{11}\nabla^2\varphi - e_{15}\nabla^2 u = 0 \tag{4}$$

2.В основном слое $(-h_1 < x_1 < 0)$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{44}^{(1)}\nabla^2 u_1 \tag{5}$$

3.В дополнительном слое $(-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1)$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{44}^{(2)}\nabla^2 u_2 \tag{6}$$

Упругие и электрические характеристики должны удовлетворять условиям $x_1 \to +\infty,\ u \to 0,\ \varphi \to 0$ и граничным условиям на границах слоистой системы, а также условиям непрерывности подложки и основного слоя:

1. На границе $x_1 = -h_1$

$$\sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)},\ u_1 = u_2 \tag{7}$$

2. На границе $x_1 = 0$

$$\sigma_{13} = \sigma_{13},\ u = u_1,\ \varphi = 0 \tag{8}$$

Примем следующие обозначения:

$$c_{44} = c,\ c_{44}^{(1)} = c_1,\ c_{44}^{(2)} = c_2,\ e_{15} = e,\ e_{14} = d,\ \varepsilon_{11} = \varepsilon$$
$$\bar{c} = c(1 + \chi^2),\ \chi^2 = e^2/\varepsilon c,\ \bar{e} = e/\varepsilon,\ S = \sqrt{\bar{c}/\rho},\ S_1 = \sqrt{c_1/\rho_1} \tag{9}$$
$$S_2 = \sqrt{c_2/\rho_2},\ \varphi' = \varphi - \bar{e}u,\ S = S_0\sqrt{1+\chi^2},\ S_0 = \sqrt{c/\rho}$$

где χ^2 – коэффициент электромеханической связи, S_0 – скорость распространения упругих сдвиговых объемных волн, S, S_1, S_2 – скорости распространения упругих сдвиговых объемных волн в подложке и в слоях, φ' – новая неизвестная функция, связанная с перемещением u и потенциалом φ подложки.

Из уравнений (1)-(8) получим модель для получения волн Лява.

1.Уравнения в подложке ($0 < x_1 < +\infty$)

$$\nabla^2 u = \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\varphi' = 0 \tag{10}$$

2. В основном слое $(-h_1 < x_1 < 0)$

$$\nabla^2 u_1 = \frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{11}$$

3. В дополнительном слое $(-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1)$

$$\nabla^2 u_2 = \frac{1}{S_2^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tag{12}$$

4. Граничные условия при $x_1 = -(h_1 + h_2)$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \tag{13}$$

5. При $x_1 = -h_1$

$$u_1 = u_2, \quad c_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = c_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{14}$$

6. При $x_1 = 0$

$$u = u_1,\ \bar{e}u + \ddot{\ }' = 0,\ \bar{c}\,\frac{\partial u}{\partial x_1} + e\frac{\partial \ddot{\ }'}{\partial x_1} - d\,\frac{\partial \ddot{\ }'}{\partial x_2} - de'\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = c_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{15}$$

7. Условия затухания при $x_1 \to +\infty$

$$u \to 0, \quad \ddot{\ }' \to 0 \tag{16}$$

2. Решение задачи. Решение уравнений будем искать в виде плоской гармоничной волны, которая распространяется в направлении оси Ox_2 и затухает вдоль оси Ox_1, когда $x_1 \to +\infty$.

Удовлетворяя граничным условиям, получим дисперсионное уравнение

$$\beta(V) = \tilde{c}_1\beta_1(V)\ \frac{\tilde{c}_1\beta_1(V)\,\mathrm{tg}(\beta_1 K_1) + \tilde{c}_2\beta_2(V)\,\mathrm{tg}(\ \ _2 K_2)}{\tilde{c}_1\beta_1(V) - \tilde{c}_2\beta_2(V)\,\mathrm{tg}(\beta_1 K_1)\mathrm{tg}(\ \ _2 K_2)} \tag{17}$$

где

$$_1(V) = \sqrt{1 - V^2/S_1^2}, \quad _2(V) = \sqrt{1 - V^2/S_2^2},\ K_1 = ph_1,\ K_2 = ph_2 \tag{18}$$

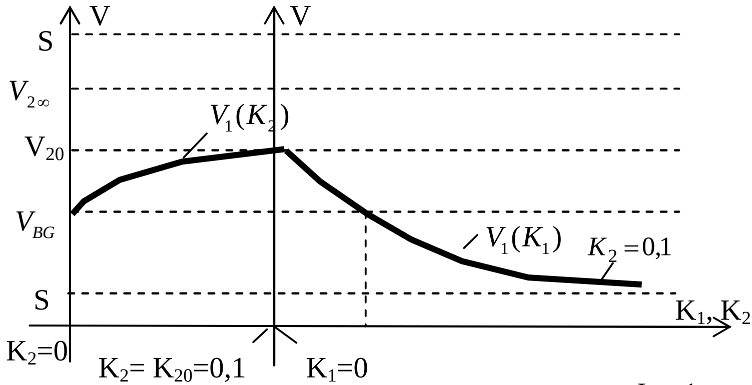
Здесь K_1, K_2 – приведенные (относительные) постоянные.

Приведем в таблице некоторые величины данных сред.

	C$_{44}$ N/m^2	ρ kg/m^3	e$_{15}$ c/m^2	ε$_{11}$ F/m	S m/s	V$_{BG}$ m/s
1 PZT-4	2,56*10^{10}	7,5*10^3	12,7	65*10^{-10}	2592,65	2256,85
2 Au	4,24*10^{10}	19,30*10^3	–	–	1482,19	–
3 Pt	7,65*10^{10}	21,4*10^3	–	–	1690,71	–

Мы здесь рассмотрим только общий случай. Возьмем для второго слоя определенную фиксированную толщину K_2 (например, $K_{20} = 0{,}1$), а K_1 будем изменять в интервале $[\,0, \infty\,]$. Если $K_1 = 0$, то в системе подложка-слой будет распространяться волна Лява со скоростью $V_{20} < V_{2\infty}$ (фиг.1). Теперь добавим 1-ый слой толщиной K_1. В полученной двухслойной системе распространится первая мода волны Лява со скоростью меньшей чем V_{20}, которая при определенном значении K_{1*} приравнится к скорости волны Гуляева-Блюстейна и затем, параллельно возрастанию значения K_1, убывая, будет стремиться к скорости объемных волн первого слоя S_1.

Для высоких мод волны приведем значения критических точек $K_{12} = 2{,}989$, $K_{13} = 6{,}338$, $K_{14} = 9{,}678$ при $K_1 = 0{,}1$.



Фиг.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
2. Кесенних Г.Г. Поверхностные волны Лява для двух изотропных слоев на изотропной подложке. //Акуст. журнал. 1984. Т.30. Вып.1. С.74-78.
3. Danoyan Z.N., Pilliposyan G. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer.– International Jornal Solids and Structures, V.12, 2007.

Сведения об авторе:

Берберян Армен Хачатурович

Мл. науч.сотр. Института механики НАН Армении

Адрес: Армения, Ереван, ул. Ширака, д. 7/1 кв.10

Тел.: (+37410)46-20-96, (+37494)19-19-86

ПРОБИВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ДЕФОРМИРУЕМЫМ ИНДЕНТОРОМ ПРИ НАЛИЧИИ РАЗРЯДНОГО ТОКА

Ванцян А.А, Овсепян Д.Х.
Ереван, Армения

Задача проникания деформируемого индентора в полупространство при наличии разрядного тока численно решена в [1-4]. С практической точки зрения представляет интерес пробивание преграды конечной толщины, что и рассматривается в настоящей работе. В работе [1-2], в предположении независимости искомых величин от ¨ цилиндрической системы координат, на основе решения системы уравнений, включающей в себя уравнения сохранения массы, количества движения, энергии, а также уравнение индукции, определены напряженно-деформированное состояние в полупространстве и в инденторе, форма деформированного индентора и кратера, а также форма свободной поверхности полупространства. Кроме этого, определялось распределение плотности разрядного тока в полупространстве и в инденторе в течение процесса проникания.

В настоящей работе аналогичная проблема решена для соударения индентора и пластины, поверх которой посредством изоляционного слоя приклеена тонкая пластинка. Здесь дополнительно учтено условие на свободной поверхности пластины при $z = h$.

На фигурах проиллюстрированы картинки напряженно-деформируемого состояния при соударении деформируемого индентора формы цилиндра и преграды при заданных скорости и параметрах среды и индентора. В настоящей работе постоянные среды и индентора одинаковы.

Тело – цилиндр, V_0 =720м/сек., h =0.25 м, l_0 =0.3м,

$$J = 0,\ \pm_s = 3\cdot 10^{8}\ \text{í/ì}^{2},\ °_0 = 2700\ \text{êã/ì}^{3},\ « = 7\cdot 10^{11}\ \text{í/ì}^{2},$$

$$a_1 = -1.53\cdot 10^{11}\ \text{í/ì}^{2},\ a_2 = -1.74\cdot 10^{11}\ \text{í/ì}^{2},\ a_3 = -0.532\cdot 10^{11}\ \text{í/ì}^{2},$$

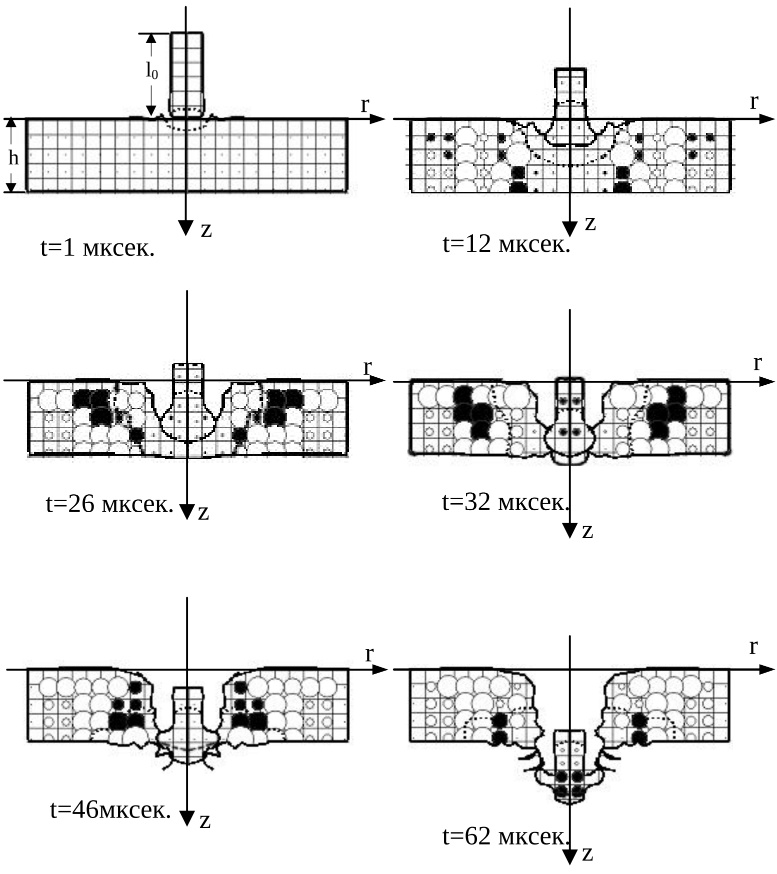
$$a_4 = -1.912,\ a_5 = 0.386$$

○ $\sim -6\pm_s$ ● $\sim -6\pm_s$

○ $\sim -3\pm_s$ ● $\sim -3\pm_s$

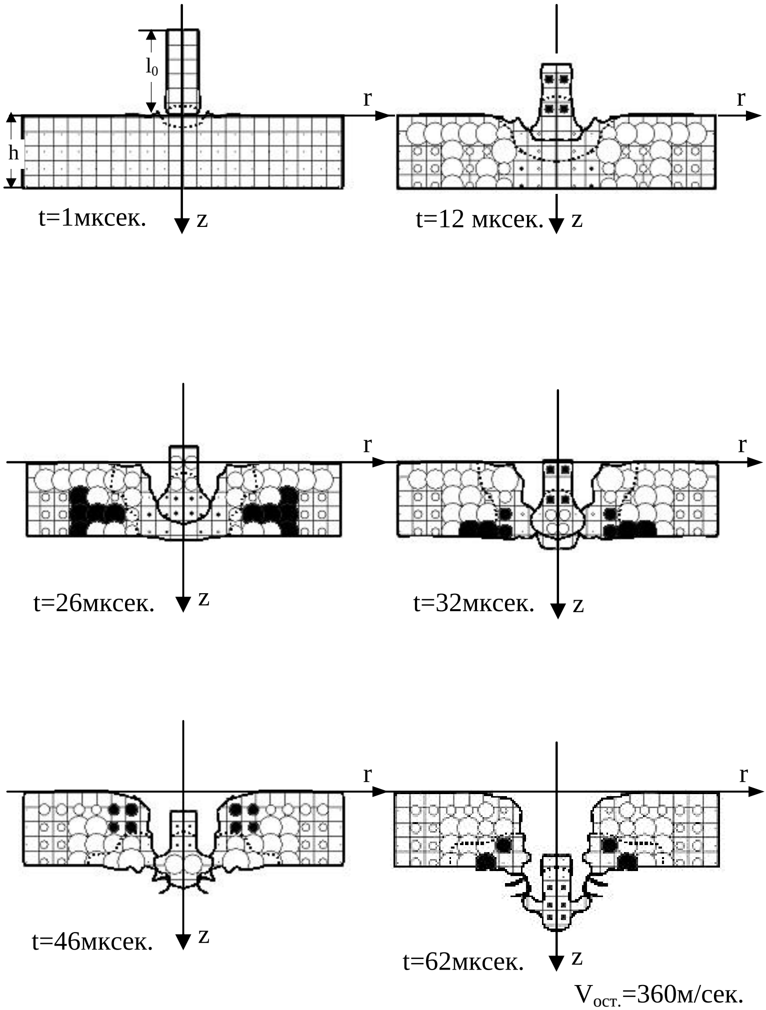
○ $\sim -10^{-1}\pm_s$ ● $\sim -10^{-1}\pm_s$

поле напряжений– $\pm_{rr}$



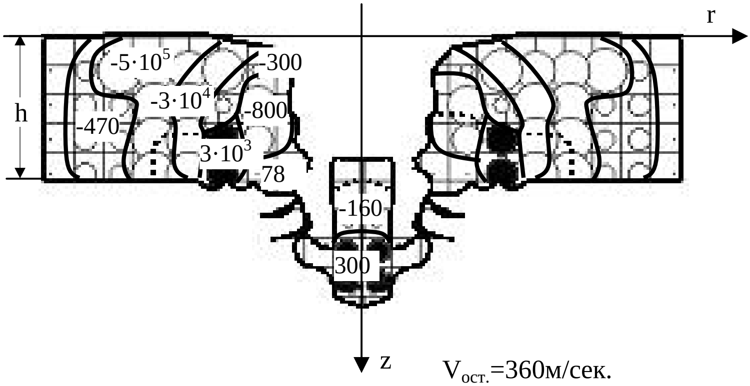
Фиг. 1

поле напряжений–$\pm_{zz}$

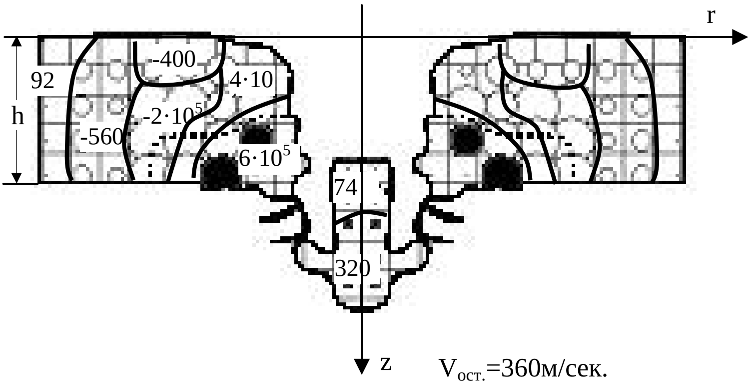


Фиг. 2

Эквипотенциальные поверхности



поле напряжений–$\pm_{rr}$, t=62мксек.

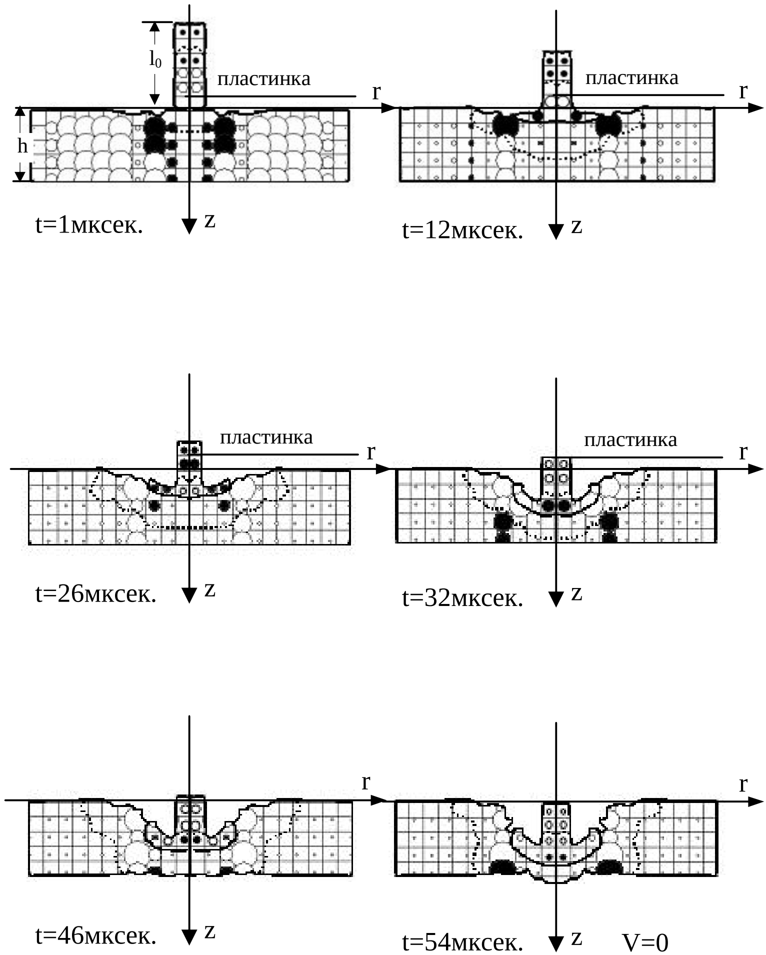


поле напряжений–$\pm_{zz}$, t=62мксек.

Фиг. 3

$$C = 0.02,\ R = 0.001,\ L = 7\cdot10^{-8},\ J_o = 10^5 \text{А/м}^2$$

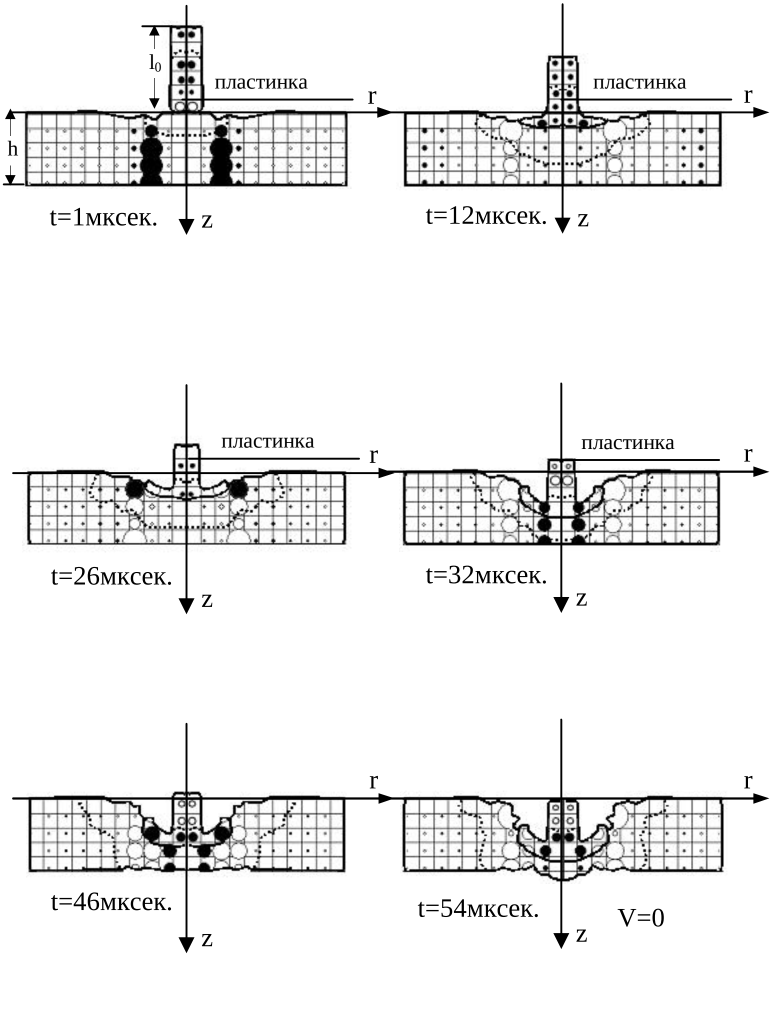
поле напряжений– $\pm_{rr}$



Фиг. 4

$C = 0.02$, $R = 0.001$, $L = 7 \cdot 10^{-8}$, $J_0 = 10^5$ А/м^2

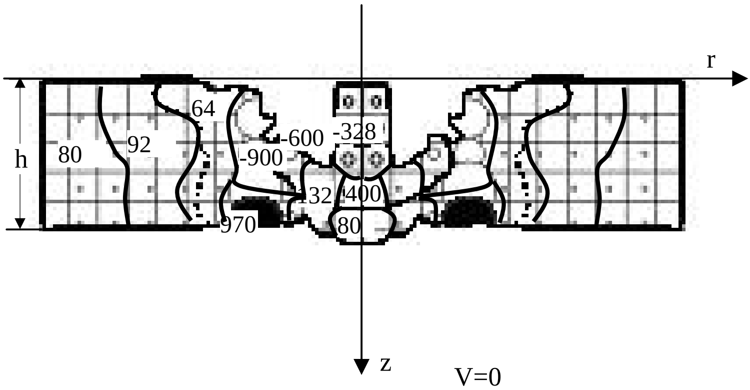
поле напряжений – $\pm_{zz}$



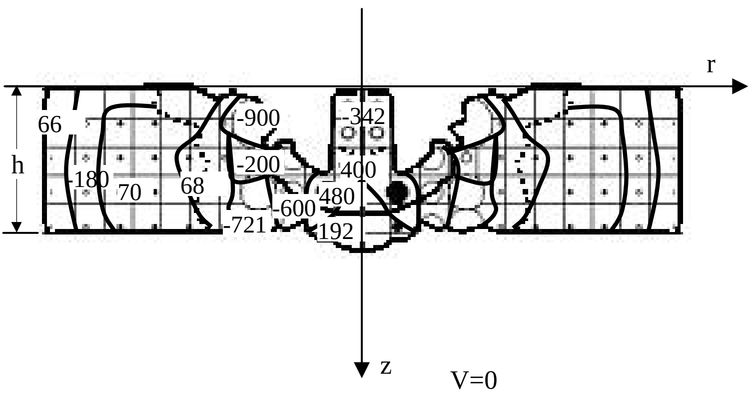
Фиг. 5

$C = 0.02,\ R = 0.001,\ L = 7 \cdot 10^{-8},\ J_0 = 10^5$А/м^2

Эквипотенциальные поверхности



поле напряжений– $\pm_{rr}$, t=54мксек.



поле напряжений– $\pm_{zz}$, t =54мксек.

Фиг. 6

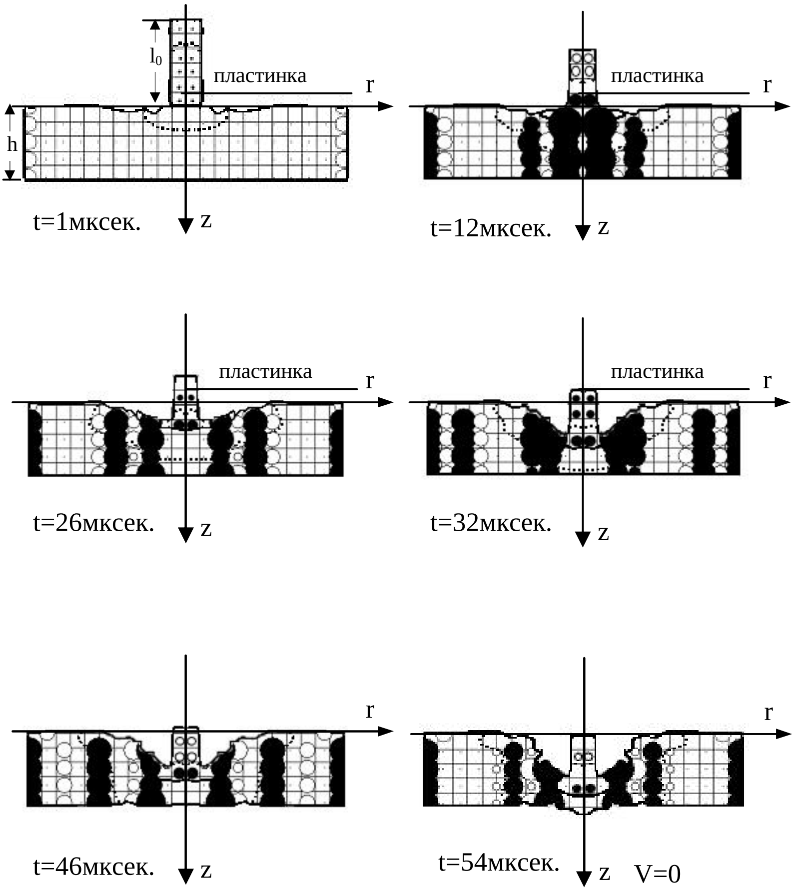
$C = 0.02$, $R = 0.001$, $L = 7\cdot10^{-8}$, $J_0 = 10^5$ А/м^2

○ ~ $-3\cdot10^2 J_0$ ● ~ $+3\cdot10^2 J_0$

○ ~ $-2\cdot10 J_0$ ● ~ $+2\cdot10 J_0$

○ ~ $-7\cdot10^{-1} J_0$ ● ~ $+7\cdot10^{-1} J_0$

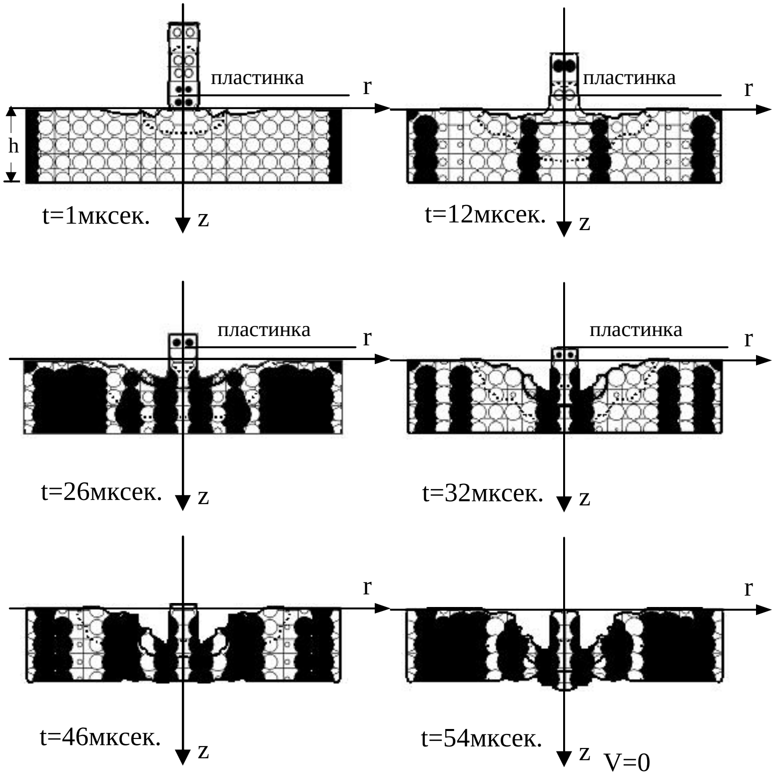
поле – J_{rr}



Фиг. 7

$$C = 0.02,\ R = 0.001,\ L = 7\cdot10^{-8},\ J_0 = 10^5 \text{А/м}^2$$

поле – J_{rr}



Фиг. 8

На фиг. 4,5 приведены аналогичные картины напряжений в случае, когда в результате соударения проходит ток через пластину, индентор и тонкую пластинку и происходит разряд конденсатора [1,2].

Анализируя данные фиг. 4 и 5, заключаем, что при соударении индентора и среды при отсутствии тока происходит пробивание пластины, в то время как при наличии разрядного тока индентор застревает в пластине той же толщины, не пробивая ее. Этот результат можно объяснить проявлением электронно-пластического эффекта, приводящего к существенным пластическим деформациям индентора [5,6].

На фиг.6 приведены эквипотенциальные поверхности напряжений при наличии тока. На всех фигурах пунктирными линиями обозначены границы раздела упругих и пластических областей.

На фиг. 7,8 обозначены поля составляющих тока J_{rr} и J_{zz}.

Как показано на фиг. 7,8, распределение плотности тока носит колебательный характер как по координатам, так и по времени, что было отмечено также в [7], где разряд происходил в полупространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванцян А.А., Овсепян Д.Х. Проникание деформируемых инденторов различной формы в первоначально упругую среду. //Айкакан Банак. 2005. Т. 1(43). С.59-64.
2. Ванцян А.А., Овсепян Д.Х. Проникание деформируемого индентора в первоначльно упругую среду при наличии магнитного поля. //V Международная конференция “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис, 2005, с. 105-115.
3. Ванцян А.А., Овсепян Д.Х. Напряженно-деформированное состояние при соударении деформируемого индентора об упругое полупространство при наличии разрядного тока. //V Международная конференция “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис, 2005, с. 116-123.
4. Vantsyan A.A., Hovsepyan D.Kh., The penetration of deformable indentor into half-space in the presence of discharge current and magnetic field, Actual problems of Mechanics of continuum media, Yerevan, 2007, p. 497-499.
5. Ванцян А.А. Влияние электромагнитных полей и анизотропных свойств среды на динамические процессы в сплошных средах. Ереван: 2004. 224 с.
6. Спицын В.И., Троицкий О.А. Электропластический эффект в металлах. //Вест. АН СССР. 1974. №11.
7. Беклемишев Н.Н, Шапиро Г.С. О законе деформирования и критерии разрушения пластического проводящего материала с учетом воздействия импульса электромагнитного поля. М.: Наука, 1984. С. 41-59.

<u>Сведения об авторах:</u>

Ванцян Анушаван Аристакесович

Д.ф-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник
Института механики НАН Армении
Тел.: (374 93) 524501, (374 10) 561523

Овсепян Духик Хачиковна

Младший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (374 94) 552008

ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТОУПРУГИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Варданян А.В.

Ереван, Армения

В строительных конструкциях, в трубопроводах, в атомных электростанциях и управляемых термоядерных реакциях имеются пьезокерамические и магнитоупругие пластины и оболочки. Поэтому получение значений частот их колебаний имеет не только теоретическое, но и прикладное значение.

В работе [1] дается пространственным подходом определение частот свободных изгибных колебаний тонких магнитоупругих пластин в поперечном магнитном поле.

Путем решения пространственной задачи в пластине и в диэлектрике вне нее и удовлетворения граничных условий для напряжений и магнитных полей получается дисперсионное соотношение для частот, $\mu = \mu\left(k, \sim\right)$, где $\sim = \dfrac{a_1}{a}$, © –1/см, волновое число, a, b – скорости упругих продольной и поперечной волны, a_1 – скорость Альфвена.

Это трансцендентное уравнение численно решается для значения электропроводности $\pm = 3 \cdot 10^{17}$ (алюминий), и $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{1}{3}$ получена таблица 1, для безразмерной частоты $\mu' = \dfrac{\mu}{a©} \cdot 10^3$, $a = 10^4$ см/сек, h=0.1 см (толщина пластины).

Таблица 1

~ \ ©	0.1	0.2	0.4
1/10000	2.72161	2.55715	2.39688
3/10000	1.62323	4.65435	6.99327
5/10000	$9.17466 \cdot 10^{-3}$	8.42858	7.93553
1/1000	$4.75171 \cdot 10^{-3}$	$2.20522 \cdot 10^{-3}$	11.9159
1/100	$9.06542 \cdot 10^{-5}$	$8.52301 \cdot 10^{-5}$	$8.9509 \cdot 10^{-5}$
1/10	$5.64018 \cdot 10^{-6}$	$7.15264 \cdot 10^{-6}$	$5.38087 \cdot 10^{-6}$

Проведено также разложение частоты μ через параметры $©h$, $\sim$ и по полученной асимптотической формуле проведены расчеты, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

~ \ k	0.1	0.2	0.4
1/10000	0.00271982	0.00544239	0.0108862
3/10000	0.00270547	0.00543509	0.0108825
5/10000	0.00267849	0.00542069	0.0108752
1/1000	0.00258407	0.00535697	0.0108414
1/100	0.0510628	0.0245892	0.0136846
1/10	5.19519	2.59616	1.29523

Расчеты по гипотезе Кирхгофа [1] дает табл. 3.

Таблица 3

~ \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1/10000	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
5/10000	0.00272165	0.00544331	0.00816496	0.0108866	0.0136083
1/1000	0.00272165	0.00544331	0.00816496	0.0108866	0.0136083
1/100	0.00272152	0.00544304	0.00816457	0.0108861	0.0136076
1/10	0.00270785	0.00541585	0.00812401	0.0108323	0.0135408

Здесь оставлено большое число знаков после точки, поскольку изменение μ' в зависимости от ~ весьма мало, в то время как по табл. 1 и 2 оно весьма большое.

В случае магнитоупругой цилиндрической оболочки в магнитном поле также были проведены [2] расчеты частот изгибных свободных колебаний по точному пространственному подходу и по гипотезе Кирхгофа и снова получилось количественное различие.

Для цилиндрической пьезоэлектрической продольно поляризованной оболочки по пространственному подходу в [3] получено для безразмерной частоты $\neg = \mu/(k\sqrt{\frac{C_{11}}{\circ}})$ дисперсионное уравнение с детерминантом шестого порядка, для пластины с поперечной поляризацией это уравнение выведено в [3], [4] и имеет вид детерминанта третьего порядка. В качестве основного материала взят $BaTiO_3$ [3,5] с соответствующими пьезомодулями e_{15}, e_{31}, e_{33}, а при расчетах берутся значения этих постоянных, уменьшенные в одинаковое число раз, при этом безразмерные параметры $«_5, «_6$ в [3] прежние, а единственно изменяющийся параметр $n = (e_{15} + e_{31})^2$, $k_1^2 = \frac{n}{300}$, и берется n=0;0,1;…;5;…;10, h=0,1 см, $R = 10^3$ см, $2h$ – толщина оболочки, R – ее радиус.

Результаты расчетов для оболочки [3] даны в табл. 4 для пространственного подхода.

$h = 0.1, R = 10^3,\ \dfrac{Э_{33}}{Э} = 10$, $\text{«}_5 = 2,\ \ \text{«}_6 = 3/2$ Таблица 4

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
n=4	0.0145	0.0102	0.0083	0.0072	0.0064
n=50	0.0299	0.02118	0.0173	0.0149	0.0134
n=100	0.0366	0.0259	0.0211	0.0183	0.0164

Выведено уравнение частот по гипотезе Кирхгофа [3], которое для пологих оболочек в основных порядках совпало с упругим случаем, даваемым табл. 5.

Таблица 5

©	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
	0.000957427	0.00216025	0.00457347	0.00804156	0.0125266

Для пьезоэлектрической пластины по пространственному подходу [3] результаты расчетов частот при тех же указанных пьезомодулях e_{15}, e_{31}, e_{33} даны в табл. 6,7

$\dfrac{Э}{Э_{33}} = 0.1,\ \ \text{«}_5 = 2,\ \ \text{«}_6 = 3/2$ Таблица 6

n k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.00819971	0.00181705	0.00127862	0.00110499	0.00102893
0.1	0.00815647	0.00181323	0.00127684	0.00110385	0.00102811
1	0.00778193	0.00177958	0.00126111	0.00109375	0.00102082
2	0.00739502	0.00174369	0.00124417	0.00108281	0.0010129
3	0.00703645	0.00170928	0.00122777	0.00107216	0.00100516
4	0.00670386	0.00167626	0.0012119	0.0010618	0.000997599
5	0.00639507	0.00164455	0.00119651	0.0015171	0.00090204
10	0.00514322	0.00150326	0.00112624	0.00100498	0.000955548
20	0.00358862	0.00128617	0.00101218	0.00092666	0.000895961
30	0.00269912	0.00112765	0.00092348	0.00086345	0.000846381
40	0.0021397	0.00100709	0.00085243	0.00081118	0.000804326
50	0.00176197	0.00091243	0.00079414	0.00076713	0.00076809

$$\frac{Э}{Э_{33}} = 1, \quad «_5 = 2, \quad «_6 = 3/2$$

Таблица 7

n \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.0133858	0.0286255	0.0461802	0.0665458	0.0901484
0.1	0.0133868	0.0286303	0.046193	0.0665728	0.0901976
1	0.0133957	0.0286731	0.0463084	0.0668164	0.090643
2	0.0134057	0.0287208	0.0464374	0.0670894	0.0911434
3	0.0134157	0.0287688	0.0465673	0.0673649	0.0916496
4	0.0134257	0.028817	0.0466981	0.067643	0.0921618
5	0.0134357	0.0288654	0.0468298	0.0679237	0.0926801
10	0.0134861	0.0291106	0.0475022	0.069366	0.0953662
20	0.0135885	0.0296176	0.048919	0.0724553	0.101268
30	0.0136931	0.0301481	0.0504375	0.075834	0.108066
40	0.0137998	0.0307034	0.0520643	0.0795193	0.116269
50	0.0139088	0.0312848	0.0538038	0.0835286	0.0589026

а по гипотезе Кирхгофа получается

$$¬ = \frac{1}{2} ©h \sqrt{1 + \frac{3k_1^2}{1 + 4k_1^2}}$$

$2h$ – толщина пластины, и результаты расчетов даны в табл. 8 для h =0,1 см.

Таблица 8

n \ k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
n=0	0.005	0.01	0.015	0.02	0.025
n=0.1	0.00500416	0.0100083	0.0150125	0.0200166	0.0250208
n=1	0.00504095	0.0100819	0.01512229	0.0201638	0.0252048
n=2	0.00508052	0.010161	0.0152416	0.0203221	0.0254026
n=3	0.00511878	0.0102376	0.0153563	0.0204751	0.0255939
n=4	0.0051558	0.0103116	0.0154674	0.0206232	0.025779
n=5	0.00519164	0.0103833	0.0155749	0.0207666	0.0259582
n=10	0.00535504	0.0107101	0.0160651	0.0214202	0.0267752

Кроме того, проведены расчеты дисперсионного соотношения для пластины в предположении $e_{15} = e_{33} = «_5 = «_6 = 0$ при той же формуле $©_1^2$.

Как видно из таблиц, имеется значительное отличие частот, рассчитанных по пространственному подходу и гипотезе Кирхгофа. Те же сравнения пространсвенного подхода и по гипотезе могут быть получены для ZnO, CdS.

Другие задачи для пьезопластин представлены [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян А.В., Сафарян Ю.С., Кевнаксзян Л.С. //В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван. 2007.
2. Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В. //Докл.НАН Армении. 2006. Т.106. №3.
3. Bagdoev A.G., Vardanyan A.V., Vardanyan S.V. //Вестник Сам. ГУ. 2007.N2(52).
4. Бардзокас Д.У., Фильштинский М.Л. Электроупругость кусочно-неоднородных тел. Университетская книга. Сумы. 2000.
5. Берлингуер Д., Керран Л., Жаффе. Физическая акустика./Под редакцией У. Мезона. Т.I. М.: Мир, 1966.
6. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости. Ереван: Изд. Ереванского университета, 1961.

Сведения об авторе:

Варданян А.В.

Аспирант Института механики НАН Армении
Адрес: Ереван, 0019, Пр. М. Баграмяна 24^{б}
Тел. 568201
E-mail: avardanyan@mechins.sci.am

ОБЩАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ОТРЫВЕ

Варданян С.В.
Ереван, Армения

Рассматривается общая плоская задача в рамках теории предельного состояния при отрыве. Исследуется напряженное состояние, получены характеристические соотношения.

Пусть связь между компонентами напряжения $\pm_{ij}$ и главными компонентами напряжения $\pm_i$ определяется по формулам [1]:

$$\begin{aligned}
&\pm_x = \pm_1 l_1^2 + \pm_2 m_1^2 + \pm_3 n_1^2, \quad {}^2_{xy} = \pm_1 l_1 l_2 + \pm_2 m_1 m_2 + \pm_3 n_1 n_2 \\
&\pm_y = \pm_1 l_2^2 + \pm_2 m_2^2 + \pm_3 n_2^2, \quad {}^2_{xz} = \pm_1 l_1 l_3 + \pm_2 m_1 m_3 + \pm_3 n_1 n_3 \\
&\pm_z = \pm_1 l_3^2 + \pm_2 m_3^2 + \pm_3 n_3^2, \quad {}^2_{yz} = \pm_1 l_2 l_3 + \pm_2 m_2 m_3 + \pm_3 n_2 n_3
\end{aligned} \tag{1}$$

где направляющие косинусы удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\
&l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0 \\
&l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \quad l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

и пусть условие отрыва имеет вид [2]:

$$\pm_1 = \pm_2, \ \pm_3 = d, \ d = \text{const} \tag{3}$$

учитывая (3) и (2), из (1) получим:

$$\begin{aligned}
&\pm_x = \pm_1 + (d - \pm_1) n_1^2, \quad {}^2_{xy} = (d - \pm_1) n_1 n_2 \\
&\pm_y = \pm_1 + (d - \pm_1) n_2^2, \quad {}^2_{xz} = (d - \pm_1) n_1 n_3 \\
&\pm_z = \pm_1 + (d - \pm_1) n_3^2, \quad {}^2_{yz} = (d - \pm_1) n_2 n_3
\end{aligned} \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\neg = \pm_1 = \pm_2, \ 3\pm = \pm_x + \pm_y + \pm_z = 2\neg + d \\
&\neg = \frac{1}{2}(3\pm - d), \ \pm = \frac{1}{3}(2\neg + d)
\end{aligned} \tag{5}$$

Тогда соотношения (4) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
&\pm_x = \neg + (d - \neg) n_1^2, \quad {}^2_{xy} = (d - \neg) n_1 n_2 \\
&\pm_y = \neg + (d - \neg) n_2^2, \quad {}^2_{xz} = (d - \neg) n_1 n_3 \\
&\pm_z = \neg + (d - \neg) n_3^2, \quad {}^2_{yz} = (d - \neg) n_2 n_3
\end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) можем написать:

$$\frac{2_{xy}2_{xz}}{2_{yz}}=\left(d-\neg\right)n_1^2,\quad \frac{2_{xy}2_{yz}}{2_{xz}}=\left(d-\neg\right)n_2^2,\quad \frac{2_{xz}2_{yz}}{2_{xy}}=\left(d-\neg\right)n_3^2 \tag{7}$$

или

$$\frac{2_{xy}2_{xz}}{2_{yz}}+\frac{2_{xy}2_{yz}}{2_{xz}}+\frac{2_{xz}2_{yz}}{2_{xy}}=d-\neg \tag{8}$$

Исходя из (7) и (8), соотношения (6) запишутся в форме:

$$\pm_x=\neg+\frac{2_{xy}2_{xz}}{2_{yz}},\ \pm_y=\neg+\frac{2_{xy}2_{yz}}{2_{xz}},\ \pm_z=\neg+\frac{2_{xz}2_{yz}}{2_{xy}} \tag{9}$$

$$\frac{2_{xy}2_{xz}}{2_{yz}}+\frac{2_{xy}2_{yz}}{2_{xz}}+\frac{2_{xz}2_{yz}}{2_{xy}}=d-\neg \tag{10}$$

(10) можно записать в форме:

$$\left(2^2_{xz}+2^2_{yz}\right)2^2_{xy}-\left(d-\neg\right)2_{xy}\left(2_{xz}2_{yz}\right)+2^2_{xz}2^2_{yz}=0 \tag{11}$$

Следуя [2,3,4], положим:

$$2_{xz}=\left(d-\neg\right)T\cos\ddot{},\ 2_{yz}=\left(d-\neg\right)T\sin\ddot{} \tag{12}$$

Из (11) получим:

$$2^2_{xy}-\left(d-\neg\right)\cos\ddot{}\,\sin\ddot{}\,2_{xy}+\left(d-\neg\right)^2T^2\cos^2\ddot{}\,\sin^2\ddot{}=0 \tag{13}$$

или

$$2_{xy}=\frac{d-\neg}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4T^2}\right)\sin\ddot{}\,\cos\ddot{} \tag{14}$$

для случая плоской задачи имеет место

$$2_{xz}=2_{yz}=T=0 \tag{15}$$

и следовательно,

$$2_{xy}=\frac{d-\neg}{2}\left(1\pm1\right)\sin\ddot{}\,\cos\ddot{} \tag{16}$$

В дальнейшем будем рассматривать только верхний знак (+).

Подставляя выражения (12) и (14) в (9), получим:

$$\pm_x=\neg+\frac{d-\neg}{2}\left(1+\sqrt{1-4T^2}\right)\cos^2\ddot{}$$

$$\pm_y=\neg+\frac{d-\neg}{2}\left(1+\sqrt{1-4T^2}\right)\sin^2\ddot{}$$

$$\pm_z=\neg+\frac{2\left(d-\neg\right)T^2}{1+\sqrt{1-4T^2}}$$

$$\text{²}_{xz} = (d - \neg) T \cos \text{¨}\,,\ \text{²}_{yz} = (d - \neg) T \sin \text{¨}$$
$$\text{²}_{xy} = \frac{d - \neg}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4T^2}\right)\sin \text{¨} \cos \text{¨} \qquad (17)$$

Полагая $|2T| \le 1$, можем написать:

$$2T = \sin \mathrm{g} \qquad (18)$$

а (17) можно записать в форме:

$$\pm_x = \neg + \frac{d - \neg}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\cos^2 \text{¨}\,,\ \pm_y = \neg + \frac{d - \neg}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\sin^2 \text{¨}$$
$$\pm_z = \neg + \frac{d - \neg}{2}(1 - \cos \mathrm{g}), \qquad \text{²}_{xz} = \frac{d - \neg}{2}\sin \mathrm{g} \cos \text{¨} \qquad (19)$$
$$\text{²}_{yz} = \frac{d - \neg}{2}\sin \mathrm{g} \sin \text{¨}\,, \qquad \text{²}_{xy} = \frac{d - \neg}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\sin \text{¨} \cos \text{¨}$$

Из (19) можно получить

$$(\pm_x - \pm_y)^2 + 4\text{²}^2_{xy} = \frac{(d - \neg)^2}{4}(1 + \cos \mathrm{g})^2 \qquad (20)$$

или при плоской задаче:

$$(\pm_x - \pm_y)^2 + 4\text{²}^2_{xy} = (d - \neg)^2 \qquad (21)$$

Пусть все функции, входящие в (19), зависят только от двух переменных – x и y:

$$\neg = \neg(x, y),\ \mathrm{g} = \mathrm{g}(x, y),\ \text{¨} = \text{¨}(x, y) \qquad (22)$$

С учетом (22) и (19) уравнения равновесия можно представить в виде:

$$\left(1 - \frac{1}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\cos^2 \text{¨}\right)\frac{\partial \neg}{\partial x} - \frac{d - \neg}{2}\sin \mathrm{g} \cos^2 \text{¨}\, \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x} -$$
$$-(d - \neg)(1 + \cos \mathrm{g})\cos \text{¨} \sin \text{¨}\, \frac{\partial \text{¨}}{\partial x} -$$
$$-\frac{1}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\cos \text{¨} \sin \text{¨}\, \frac{\partial \neg}{\partial y} - \frac{d - \neg}{2}\sin \mathrm{g} \cos \text{¨} \sin \text{¨}\, \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial y} + \qquad (23)$$
$$+\frac{d - \neg}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\cos 2\text{¨}\, \frac{\partial \text{¨}}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{1}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\cos \text{¨} \sin \text{¨}\, \frac{\partial \neg}{\partial x} - \frac{d - \neg}{2}\sin \mathrm{g} \cos \text{¨} \sin \text{¨}\, \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x} +$$
$$+\frac{d - \neg}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\cos 2\text{¨}\, \frac{\partial \text{¨}}{\partial x} + \left(1 - \frac{1}{2}(1 + \cos \mathrm{g})\sin^2 \text{¨}\right)\frac{\partial \neg}{\partial y} -$$

$$-\frac{d-\neg}{2}\sin g\sin^2\ddot{}\ \frac{\partial g}{\partial y}+(d-\neg)(1+\cos g)\cos\ddot{}\ \sin\ddot{}\ \frac{\partial\ddot{}}{\partial y}=0$$

$$-\frac{1}{2}\sin g\cos\ddot{}\ \frac{\partial\neg}{\partial x}+\frac{d-\neg}{2}\cos g\cos\ddot{}\ \frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d-\neg}{2}\sin g\sin\ddot{}\ \frac{\partial\ddot{}}{\partial x}-$$

$$-\frac{1}{2}\sin g\sin\ddot{}\ \frac{\partial\neg}{\partial y}+\frac{d-\neg}{2}\cos g\sin\ddot{}\ \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{d-\neg}{2}\sin g\cos\ddot{}\ \frac{\partial\ddot{}}{\partial y}=0$$

Добавив к (23) следующие соотношения

$$\frac{\partial\neg}{\partial x}dx+\frac{\partial\neg}{\partial y}dy=d\neg$$

$$\frac{\partial\ddot{}}{\partial x}dx+\frac{\partial\ddot{}}{\partial y}dy=d\ddot{} \qquad (24)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy=dg$$

получим систему алгебраических уравнений относительно

$$\frac{\partial\neg}{\partial x},\frac{\partial\neg}{\partial y},\frac{\partial\ddot{}}{\partial x},\frac{\partial\ddot{}}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y}$$

причем:

$$\frac{\partial\neg}{\partial x}=\frac{\Delta_1}{\Delta},\frac{\partial\neg}{\partial y}=\frac{\Delta_2}{\Delta},\frac{\partial\ddot{}}{\partial x}=\frac{\Delta_3}{\Delta},\frac{\partial\ddot{}}{\partial y}=\frac{\Delta_4}{\Delta},\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\Delta_5}{\Delta},\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\Delta_6}{\Delta} \qquad (25)$$

На характеристиках должны одновременно выполняться соотношения:

$$\Delta=\Delta_i=0,\ i=1,\dots,6. \qquad (26)$$

Из уравнения $\Delta=0$ получим:

$$\left(2-(1+\cos g)\cos^2\ddot{}\ \right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(-2+3(1+\cos g)\cos^2\ddot{}\ \right)\mathrm{tg}\ddot{}\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+$$
$$+\left(2-3(1+\cos g)\sin^2\ddot{}\ \right)\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(-2+(1+\cos g)\sin^2\ddot{}\ \right)\mathrm{tg}\ddot{}\ =0 \qquad (27)$$

решение которого представляется в виде:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\sim,}=\frac{(1+\cos g)\cos\ddot{}\ \sin\ddot{}\ \pm\sqrt{2}\sqrt{\cos g-1}}{-2+(1+\cos g)\cos^2\ddot{}}$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{¥}=\mathrm{tg}\ddot{} \qquad (28)$$

Отметим, что для случая $g=®$ характеристики $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\sim,}$ становятся ортогональными.

Из $\Delta_i = 0, \ i = 1,...,4$ получим:

$$\sqrt{2}\sqrt{\cos g - 1}d\neg + (d - \neg)(\cos g + 1)d^{\cdot\cdot} = 0 \text{ вдоль линии } \sim \quad (29)$$

$$\sqrt{2}\sqrt{\cos g - 1}d\neg - (d - \neg)(\cos g + 1)d^{\cdot\cdot} = 0 \text{ вдоль линии}$$

а из $\Delta_i = 0, \ i = 5,6$ получим

$$\sqrt{2}\sqrt{\cos g - 1}d\neg + (d - \neg)(\cos g + 1)d^{\cdot\cdot} = 0$$

$$\sqrt{2}\sqrt{\cos g - 1}d\neg - (d - \neg)(\cos g + 1)d^{\cdot\cdot} = 0 \quad (30)$$

$$\sin\frac{g}{2}d\neg - \frac{1}{2}(d - \neg)\cos\frac{g}{2}dg = 0$$

В случае, когда $\cos g = 1, g = 0, T = 0$, будем иметь:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\sim,} = -\mathrm{ctg}^{\cdot\cdot}, \ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{¥} = \mathrm{tg}^{\cdot\cdot} \quad (31)$$

и

$$d^{\cdot\cdot} = 0 \text{ вдоль линий } \sim, \quad (32)$$

Таким образом, напряженное состояние в общей плоской и плоской задаче предельного состояния при отрыве определено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704с.
2. Ивлев Д.Д., Максимова Л.А.,. Непершин Р.И, Радаев Ю.Н.,. Сенашев С.И, Шемякин Е.И. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. М.: Физматлит, 2008. 832с.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232с.
4. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т1,2. М: Физматлит, 2001, 2002. 445, 448сс.

Сведения об авторе:

Варданян Седрак Ваникович
К.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б
Тел 374 93 288421
E-mail: sedrak@mechins.sci.am
vardanyan_s@yahoo.com

ОБ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОС ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭФФЕКТОВ

Геворкян Г.З.
Ереван, Армения

Вопросы влияния поперечных сдвигов на значения частот свободных поперечных колебаний ортотропных пластин линейно-переменной толщины рассмотрены в [1]. В работах [2-3] исследовано влияние инерции вращения, обжатия и нормального напряжения. В настоящей работе эти вопросы исследуются для полос переменной (не только по линейному закону) толщины.

1. Рассмотрим ортотропную пластину-полосу переменной толщины $h(x)$, бесконечную вдоль оси Oy и длины a по оси Ox. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины. Координатные оси параллельны главным направлениям анизотропии материала пластины-полосы. Уравнения изгибных колебаний в безразмерном виде согласно [4] можно представить в виде:

$$
\begin{gathered}
H^2 s^3 \frac{d^2 H}{dx^2}\frac{d^2 f}{dx^2} - H\left[8 + s^2\left((\chi + k_3 A_1)\frac{d^2 H}{dx^2}\right]\frac{d\varphi}{d\overline{x}} - 16\frac{dH}{d\overline{x}}\varphi - sH\Omega^2 \times \\
\times\left[12 f + sH\frac{dH}{d\overline{x}}\left(k_1 s\frac{df}{d\overline{x}} - k_2\chi\varphi\right) - \frac{k_3 s H^2}{2}\left(A_1 s\frac{d^2 f}{d\overline{x}^2} - \overline{\Delta}_2\frac{d\varphi}{dx}\right)\right] = 0 \\
s^3 H^2 \frac{\partial^3 f}{\partial\overline{x}^3} + 2s^3 H\frac{dH}{d\overline{x}}\frac{d^2 f}{d\overline{x}^2} - H^2 s^2\left[(\chi + k_3 A_1)\frac{d^2\varphi}{d\overline{x}^2}\right] - \\
-2Hs^2\left[(\chi + k_3 A_1)\frac{dH}{d\overline{x}}\right]\frac{d\varphi}{d\overline{x}} + 8\varphi + \Omega^2 H^2 s^2\left(k_1 s\frac{df}{d\overline{x}} - k_2\chi\varphi\right) = 0
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где приняты обозначения

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12},\ \Delta_2 = a_{13}(a_{55}B_{11} + A_1) + a_{23}(a_{55}B_{12} + A_2) \tag{2}$$

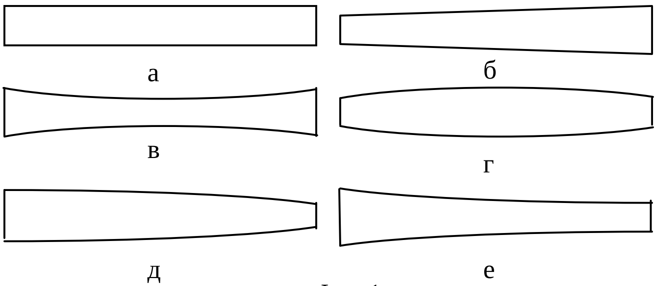
$$
\begin{gathered}
x = a\overline{x},\ \ z = h_0\overline{z},\ s = h_0 / a,\ h = h_0 H,\ \ B_{ij} = \alpha_{ij}B_{11} \\
\chi = a_{55}B_{11},\ \overline{\Delta}_2 = B_{11}\Delta_2,\ \omega^2 = B_{11}\Omega^2/\rho a^2 \\
w = h_0 f\cos\omega t,\ \ \varphi_1 = B_{11}\varphi\cos\omega t,\ \ u_z = h_0 u\cos\omega t
\end{gathered}
\tag{3}
$$

a_{ij} и B_{ij} – упругие постоянные материала [5], φ_1 – функция, характеризующая распределение касательных напряжений τ_{xz}, w – прогиб срединной плоскости пластины, t – время, ρ – плотность материала, ω –круговая частота колебаний пластины, k_1, k_2, k_3 – коэффициенты, определяющие постановку задачи и принимающие значения 0 или 1. При $k_1 = 1$ учитывается инерция вращения, обусловленная классическим изгибом, при $k_2 = 1$ учитывается инерция вращения от поперечных сдвигов, а при $k_3 = 1$ учитываются обжатие и напряжение σ_z. Если коэффициент равен нулю, то соответствующий фактор не учитывается.

Рассмотрим пластины-полосы переменной толщины, для которых безразмерная толщина $H(x)$ изменяется по законам (фиг. 1):

$$а) H(x) = 1,\ б) H(x) = 2(1+x)/3,\ в) H(x) = 3(x-0.5)^2 + 0.75$$

$$г) H(x) = 1.2[1-2(x-0.5)^2],\ д) H(x) = 0.6(2-x^2),\ е) H(x) = 0.75[1+(x\text{-}1)^2]$$



Фиг. 1

К уравнениям (1) следует добавить соответствующие граничные условия. В случае постоянной толщины и без учета поперечных эффектов решение уравнений (1) можно получить аналитически. В данном случае приходится решать численно. Для численного решения применяется метод коллокаций и вторая форма метода Ритца [6] и, если расхождение решений не превосходит 0,1%, результат считается окончательным. В табл. 1-4 приведены безразмерные значения первых трех частот двух групп изгибных колебаний. Первая строка для каждой полосы относится к классической постановке задачи, вторая строка к изотропной полосе, а третья – к ортотропной. Для каждой частоты определяется вид функций f и φ, что позволяет определить характер колебаний. Первые частоты Ω_i^1 относятся, в основном, к поперечным колебаниям, которые сопровождаются сдвиговыми колебаниями малой амплитуды. Вторые частоты Ω_i^2 относятся к сдвиговым колебаниям, которые сопровождаются поперечными колебаниями малой амплитуды. При классической постановке Ω_i^2 отсутствуют.

Таблица 1

			Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2
Шарнир–шарнир	а	кл.	0.2849	1.396	2.564	–	–	–
		из.	0.2798	1.064	2.227	16.59	17.34	18.47
		орт	0.2485	0.7305	1.155	5.805	7.482	9.832
	б	кл.	0.2744	1.119	2.652	–	–	–
		из.	0.2701	1.049	2.282	14.46	17.52	21.33
		орт	0.2440	0.7350	1.158	5.544	7.823	10.05
	в	кл.	0.2279	1.026	2.231	–	–	–
		из.	0.2272	1.026	2.231	13.39	16.12	19.96
		орт	0.1988	0.6506	1.048	4.815	6.846	9.998
	г	кл.	0.3131	1.181	2.652	–	–	–
		из.	0.3093	1.108	2.304	16.37	17.46	22.01
		орт	0.2866	0.7937	1.242	6.587	7.665	10.57
	д	кл.	0.2839	1.135	2.646	–	–	–
		из.	0.2793	1.062	2.280	15.13	17.24	21.47
		орт	0.2499	0.7371	1.161	5.776	7.816	10.12
	е	кл.	0.2615	1.097	2.672	–	–	–
		из.	0.2565	1.026	2.282	13.64	17.86	21.22
		орт	0.2255	0.6996	1.097	5.262	7.813	10.01

Таблица 2

			Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2
Заделка–заделка	а	кл.	0.6458	1.782	3.433	–	–	–
		из.	0.6212	0.9676	2.352	24.13	25.34	28.17
		орт	0.4933	0.7894	1.183	7.934	8.756	10.23
	б	кл.	0.6287	1.726	3.424	–	–	–
		из.	0.5812	0.9452	2.214	21.12	23.32	24.77
		орт	0.4426	0.7118	1.052	6.127	8.152	10.27
	в	кл.	0.8162	1.986	2.834	–	–	–
		из.	0.7625	1.245	2.126	20.26	21.39	24.36
		орт	0.5944	0.8851	1.247	6.652	8.123	9.756
	г	кл.	0.4724	1.369	3.657	–	–	–
		из.	0.4413	0.9942	2.243.	22.37	24.52	26.31
		орт	0.3112	0.7751	1.253	7.627	8.745	10.22
	д	кл.	0.5963	1.679	3.391	–	–	–
		из.	0.5522	0.8552	2.214	20.32	21.53	23.08
		орт	0.4126	0.6928	0.9852	5.827	7.452	9.273
	е	кл.	0.6686	1.767	3.419	–	–	–
		из.	0.6053	1.123	2.382	18.74	20.06	21.82
		орт	0.5255	0.7196	1.138	5.267	7.965	11.20

Таблица 3

			Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2
Заделка–шарнир	а	кл.	0.4451	1.442	2.991	–	–	–
		из.	0.4256	0.8856	1.358	18.72	20.08	22.32
		орт	0.3458	0.6512	0.9712	6.110	7.526	9.021
	б	кл.	0.3919	1.366	2.867	–	–	–
		из.	0.3641	0.8655	1.526	15.52	16.96	18.02
		орт	0.3125	0.6317	1.124	5.470	7.027	8.481
	в	кл.	0.4790	1.452	2.573	–	–	–
		из.	0.4327	0.8941	1.126	12.48	14.21	16.30
		орт	0.3352	0.6422	0.8815	4.765	6.846	8.093
	г	кл.	0.3846	1.223	3.072	–	–	–
		из.	0.3614	1.021	1.528	17.54	18.66	20.32
		орт	0.2911	0.7753	1.116	5.682	6.235	7.254
	д	кл.	0.4602	1.426	2.959	–	–	–
		из.	0.4123	0.7824	1.023	15.37	16.02	18.23
		орт	0.3196	0.6422	0.8361	5.154	6.146	7.113
	е	кл.	0.4883	1.45367	3.066	–	–	–
		из.	0.4521	0.8214	1.257	13.34	14.66	17.52
		орт	0.3523	0.6653	0.9752	5.862	7.813	9.108

Таблица 4

			Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2	Ω_3^2
Заделка–свободный край	а	кл.	0.1015	0.6361	1.782	–	–	–
		из.	0.09854	0.4413	0.9273	17.41	18.54	19.87
		орт	0.07411	0.3620	0.7554	6.216	8.181	9.832
	б	кл.	0.0631	0.5428	1.662	–	–	–
		из.	0.06051	0.3702	0.8833	16.14	17.98	19.72
		орт	0.04356	0.2563	0.6751	6.507	8.256	9.583
	в	кл.	0.1139	0.6766	1.583	–	–	–
		из.	0.1089	0.4978	0.9852	14.77	16.32	18.23
		орт	0.0791	0.3895	0.6623	5.254	7.246	8.223
	г	кл.	0.0822	0.6198	1.750	–	–	–
		из.	0.0798	0.5214	0.8814	17.41	18.55	20.21
		орт	0.5847	0.4352	0.6521	7.867	8.565	11.57
	д	кл.	0.1421	0.7117	1.839	–	–	–
		из.	0.1342	0.5684	1.154	17.21	19.53	21.11
		орт	0.1023	0.4781	0.7548	6.837	7.845	10.32
	е	кл.	0.1501	0.6962	1.787	–	–	–
		из.	0.1432	0.5412	1.298	16.44	17.86	19.24
		орт	0.1545	0.4547	0.8851	6.286	7.913	9.518

Для изотропного материала принято

$$\chi = 3,\ A_1 = -0,5,\ \bar{\Delta}_2 = -2,25$$

а для ортотропного

$$\chi = 20,\ A_1 = -5,\ \bar{\Delta}_2 = -128$$

На основе вычислений и табл. 1–4 можно сделать следующие заключения.

1. Применение второй формы метода Ритца для определения частот основной формы свободных колебаний полосы переменной толщины очень эффективно. Уже второе приближение для первой частоты обеспечивает совпадение трех значащих цифр с последующими приближениями.
2. Метод коллокаций также достаточно быстро приводит к результатам. Уже после 8 точек коллокаций первая частота практически не меняется.
3. Учет поперечных факторов приводит к появлению новых видов колебаний и уменьшает значения частот поперечных колебаний. Это больше сказывается на второй и третьей частоте, чем на первой.
4. Учет влияния поперечных факторов более ощутим для более жесткой формы крепления и при переменности толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Задача свободных поперечных колебаний ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов.// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. №2. С. 50-57.
2. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и инерции вращения.// В. сб.: посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С. 137-146.
3. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. О неклассической задаче определения частот свободных колебаний ортотропных пластин линейно-переменной толщины. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Горис 1-7 октября 2005.
4. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия// Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 12-20.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.

Сведения об авторе:

Геворкян Гнун Завенович

К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА
E-mail: gnungev2002@yahoo.com

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН В КРИСТАЛЛИЗУЮЩЕЙСЯ ПОЛОСЕ

Геворгян С.Х. ***, Габриелян Д.С., Мурадян Л.М.***
Ереван, Армения

В процессе кристаллизации в высокотемпературном поле непрерывно литого сляба под действием совокупности определенных технологических и конструктивных факторов зарождается трещина [1].

Учитывая геометрические параметры непрерывно литого сляба, его рассматриваем как бесконечную полосу, на одной стороне которой происходит кристаллизация жидкого металла с квазистационарным ростом толщины-полосы. Рост толщины полосы можно аппроксимировать выражением

$$a(t) = a_0 + k\sqrt{t} \qquad (1)$$

где a_0 – начальная толщина полосы, k – коэффициент кристаллизации, t – время.

Пусть в некоторый момент времени на кристаллизующейся стороне полосы образуется краевая поперечная трещина. Согласно наблюдениям, жидкий металл поступает в образованную щель и частично заполняет её, соединив части берегов трещины. В результате появляется внутренняя трещина с перманентной длиной ℓ_0, которая определяется ликвидационными характеристиками жидкого металла, а изменение длины нестационарной краевой трещины можно представить при помощи монотонно убывающей функции от времени:

$$\ell_1(t) = \ell_0 - \ell_2 - (K_1 - K)\sqrt{t} \qquad (2)$$

где ℓ_2 – глубина проникновения жидкого металла, проникающего в трещину ($K_1 > K$).

В момент времени

$$t_* = (\ell_0 - \ell_2)^2 (K_1 - K)^{-2} \qquad (3)$$

краевая трещина полностью заполняется жидким металлом и в полосе остается только внутренняя трещина длиной ℓ_0.

Таким образом, при частичном заполнении жидким металлом краевой трещины в процессе кристаллизации напряженное состояние около вершин двух коллинеарных трещин характеризуется соответстующими коэффициентами интенсивности напряжений, причем одна из трещин внутренняя с перманентной длиной, а вторая – нестационарная, длина которой стремится к нулю.

Учитывая, что наличие трещин практически не влияет на температурное поле, задача теплопроводности для бесконечной полосы сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \copyright \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0 \le x \le 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &T = \ddot{\ }_1(t), \quad x = 0 \\ &T = T_c, \quad\ \ x = a(t) \end{aligned} \tag{5}$$

где $\copyright$ – коэффициент температуропроводности.

Не вникая в подробности вывода, приведем решение температурной задачи (4), (5) [2]:

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{2}{a(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{\copyright\circledR^2 n^2 t}{a(t)}\right) \sin\frac{\circledR n x}{a(t)} \times \\ & \times\left[\int_0^{a(t)} f(x')\sin\frac{\circledR n x'}{a(t)}dx' + \frac{\circledR\copyright n}{a(t)}\left(\int_0^t \exp\left(\frac{\copyright\circledR^2 n^2 \text{ª}}{a^2(t)}\right)\ddot{\ }_1(\text{ª})d\text{ª} - (-1)' T_c(t)\right)\right] \end{aligned} \tag{6}$$

$f(x)$ – значение температурного поля при $t = 0$.

Ненулевое температурное напряжение, вызываемое несимметричным температурным полем (6), выражается формулой [3].

$$\begin{aligned} \pm_y = {} & -\frac{\sim ET}{1-\neg} + \frac{1}{a(t)(1-\neg)} \times \\ & \times \int_0^{a(t)} \sim TEdx + \frac{12\left(x - \frac{a(t)}{2}\right)}{a^3(t)} \int_0^{a(t)} \sim TE\left(X - \frac{a(t)}{2}\right)dx \end{aligned} \tag{7}$$

Выражением (7) определяются напряжения в полосе от температурного поля до момента возникновения трещин. Принимая во внимание, что напряженно-деформированное состояние у вершин трещин характеризуется коэффициентом интенсивности напряжений (КИН), который может быть получен из решения термоупругой задачи полосы с трещинами, берега которых нагружены силами

$$P_i(X) = -\pm_y^i(X), \quad \left|X\right| < 1$$

$2\ell_i$ – длина i-ой трещины.

Разрешающее уравнение плоской термоупругой задачи относительно функции напряжений Эри Ф имеет вид

$$\Delta\Delta\ \Phi + \text{ª} M_1(\Phi) + \text{ª}^2 M_2(\Phi) = -\sim E_0(1+m)e^{-3^{-}}\ \Delta\Theta \qquad (8)$$

где M_1 и M_2 – дифференциальные операторы следующего вида:

$$M_1(\Phi) = 2\Theta_x\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2\Theta_y\Delta\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2(1+\neg)\Theta_{xy}\Delta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} +$$

$$+\Theta_{xx}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \neg\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) + \Theta_{yy}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \neg\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)$$

$$M_2(\Phi) = \Theta_x^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \neg\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) +$$

$$+2(1+\neg)\Theta_x\Theta_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \Theta_y^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \neg\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)$$

где $\Theta = \dfrac{T(x,t)}{T_0}$, T_0 – температура, при которой учитывается влияние на модуль упругости; ª, E_0 – постоянные аппроксимации модуля упругости; $m=0$ для плоского напряженного состояния, $m = \dfrac{\neg}{1-\neg}$ – для плоской деформации, $\neg$ – коэффициент Пуассона.

Решение (8) ищем в виде ряда относительно малого параметра ª

$$\Phi = \Phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{ª}^n \cdot \Phi_n \qquad (9)$$

где Φ_0 – решение плоской термоупругой задачи для неоднородного тела.

Используя (9), из (8) получим рекуррентную систему неоднородных бигармонических уравнений

$$\Delta\Delta\Phi_0 = -\sim E_0(1+m)\Delta\Theta$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

$$\Delta\Delta\Phi_n = -M_1(\Phi_{n-1}) - M_2(\Phi_{n-2}) - \sim E_0(1+m)\frac{\Theta\Delta(-1)'}{n!}$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial x^2} = -P_n(x_i),\ \left|x_i\right| \le \ell_i,\ y=0,\ i=1{,}2$$

где $P_n(x_i) = \dfrac{\partial^2 \Phi_n^*}{\partial x^2}$, а Φ_n^* – решение рекуррентной системы неоднородных уравнений для сплошной среды с заданной неоднородностью.

Применяя метод, предложенный в работе [5] при помощи системы интегральных уравнений в случае двух коллинеарных трещин, определим КИН в виде

$$
\begin{aligned}
K_1 &= S_0 \sqrt{\ell_1}\, \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m+M} U_1(t_m)\, tg\, \frac{2m-1}{4M} \cdot ® \\
K_2 &= -S_0 \sqrt{\ell_2}\, \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m+M} U_2(t_m)\, ctg\, \frac{2m-1}{4M} \cdot ® \\
K_3 &= -S_0 \sqrt{\ell_2}\, \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{m+M} U_2(t_m)\, tg\, \frac{2m-1}{4M} \cdot ®
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где K_1 соответствует вершине краевой трещины, K_2 и K_3 – вершинам внутренней трещины, S_0 – силовой фактор, к которому отнесена нагрузка, $U_1(t),\ U_2(t_m)$ – интерполяционные полиномы Лагранжа по чебышевским узлам, M – натуральное число.

Расчеты, проведенные для слябов с начальными толщинами 20 мм и 50 мм, показывают, что, поведение КИН до закрытия краевой трещины у всех вершин одинаково нестабильно, причем напряжения у вершины краевой трещины мало отличаются от напряжений у наиболее удаленной вершины внутренней трещины. Следует отметить также, что при значениях $\ell_0 = 6$ мм и $a_0 = 20$ мм КИН у всех вершин меняются во времени как по значению, так и по знаку, а при $\ell_0 = 6$ мм и $a_0 = 50$ мм у всех вершин появляются сжимающие напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леклерк Т., Поллак В. Дефекты непрерывных слябок, влияющие на качество конечного продукта и меры по их предотвращению. //В сб.: «Непрерывное литье стали. – М.: Металлургия, 1982. С. 203-224.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. 488с.
3. Коляно Ю.М. Нестационарное температурное поле и температурные напряжения в тонких пластинках с теплоотдачей, термоупругие характеристики которых зависят от температуры. //В сб.: «Тепловые

напряжения в элементах конструкций». Вып. 5. Киев: Наукова думка, 1977. С.111-127.

4. Габриелян Д.С., Геворгян С.Х., Мурадян Л.М. Напряженное состояние корки непрерывного слитка в кристаллизаторе с учетом ползучести. Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. – Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН Армении, 2006. С. 112-118.
5. Паносян В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распространение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

Сведения об авторах:

Геворгян Сурен Хикарович

Д.т.н., профессор ГИУА
Адрес: Армения, Ереван, Комитаса 3/54
Тел.: (+37410) 52-49-67
E-mail: xikar@web.am

Габриелян Давид Самвелович

Аспирант ГИУА
Адрес: Армения, Ереван, В. Айгекци, д. 100
Тел.(+37410) 25-38-63
E-mail: david0032@yahoo.com

Мурадян Левон Мурадович

К.т.н., доцент ГИУА
Адрес: Армения, Ереван, Теряна 105
Тел.: (+37410) 55-67-69

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА ОСАЖДЕНИЯ ТВЕРДОЙ ФАЗЫ ИЗ ГИДРОТЕРМАЛЬНОГО РАСТВОРА НА ЗАЛЕЧИВАНИЕ СИСТЕМЫ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРЕЩИН

Глико А.О.

Москва, Россия

Оценки проницаемости пород в пределах гидротермальных систем лежат в интервале 10^{-11} – 10^{-16} м^2 [Brace, 1984; McNabb, Wilcock, 1995]. Такие значения характерны для трещиноватых пород, и предположение о том, что проницаемость в гидротермальных условиях обусловливается развитием трещин, выглядит естественным и общепринятым [Кирюхин и др., 1991]. Состояние трещиноватого массива пород и, соответственно, величина проницаемости могут существенно меняться за счет процессов осаждения различных компонент, в первую очередь кремнезема, действия термоупругих напряжений, а также вследствие тектонических деформаций. Сейсмотектонические явления могут приводить как к резкому прекращению гидротермальной активности в результате локального сжатия, так и к продлению жизни гидротермальных систем в результате деформаций растяжения и инициирования системы новых трещин. Мы не рассматриваем здесь этот вопрос и концентрируемся на анализе влияния факторов, действующих в более или менее спокойной сейсмической обстановке.

При подъеме гидротермального раствора (флюида) по трещинам, в результате охлаждения растворимость кремнезема и других компонентов уменьшается, что приводит к выпадению осадка, осаждению его на стенках трещин и зарастанию или залечиванию трещин. Этот процесс должен приводить к уменьшению проницаемости пород и оказывать, таким образом, существенное влияние на жизнь гидротермальной системы. Явление залечивания трещин в результате выпадения осадка из гидротермального раствора с образованием ряда минеральных соединений было обнаружено при исследовании различных гидротермальных систем на суше [Facca, Tonani, 1967; Keith et al., 1978; Keith, Muffler, 1978; White et al., 1988; Carroll et al., 1998], а также ряда высокотемпературных гидротермальных систем на дне океанов [Tivey, Delaney, 1986; Peter, Scott, 1988; Delaney et al., 1992; Tivey et al., 1999].

Существует довольно обширная литература, посвященная моделированию процессов уменьшения проницаемости среды в результате осаждения различных минеральных образований (в первую очередь кремнезема, ангидрита, галита). В большинстве случаев рассматривается пористая насыщенная среда при однородном течении Дарси, однофазном [Walder, Nur, 1984; Wells, Ghiorso, 1991] или многофазном [Verma, Pruess, 1988; Battistelli et al., 1995]. Эти модели могут хорошо описывать изменения проницаемости в условиях установившегося теплового режима, когда теплообмен между ближайшими трещинами становится пренебрежимо малым. Исследование существенно нестационарных процессов, таких как, например, внедрение горячего гидротермального флюида в холодный массив пород требует учета теплообмена между трещинами и вмещающим массивом пород и, таким образом, не может быть выполнено в рамках моделей насыщенной пористой среды.

Важным продвижением явилась работа Лоувелла и др.[Lowell et al., 1993], в которой исследовано залечивание одиночной трещины при поступлении в нее горячего гидротермального раствора и осаждения кремнезема. При постановке задачи предполагалось, что поток флюида и температура флюида на входе в трещину остаются постоянными во времени. Эти условия вряд ли являются адекватными реальной ситуации. В особенности это касается предположения о постоянстве потока флюида, так как в условиях зарастания трещины величина потока флюида может сохраняться лишь за счет вполне определенного возрастания давления в гидротермальном резервуаре.

В данной работе залечивание трещины (системы параллельных трещин) исследуется в гораздо более общей постановке, когда и температура флюида на входе в систему и поток флюида могут меняться во времени.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сначала течение флюида в одиночной плоской трещине, заключенной в теплопроводном массиве пород. Поскольку сечение трещины $b(x,t)$ мало по сравнению с расстоянием между соседними трещинами, ее поперечный размер не влияет на распространение тепла в массиве. Это естественное физическое упрощение впервые было введено еще Бодварссоном [Bodvarsson, 1969]. Введем декартову систему координат следующим образом: Ось Ox направим по оси простирания трещины, а ось Oy – перпендикулярно к трещине. При достаточно больших скоростях течения флюида перенос тепла в массиве будет осуществляться, в основном, в направлении, перпендикулярном к направлению простирания трещины. В этом случае уравнение переноса тепла в массиве записывается в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad 0 \le y < \infty \tag{1}$$

При этом, решение (1) должно зависеть от x как от параметра.

На стенке трещины, т.е. при $y = 0$ ставится условие равенства потока тепла, переносимого флюидом, и поступающего в массив

$$c_{pf} q(t) \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{y=0} = 2k \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} \tag{2}$$

Здесь $q(t) = \rho_f v(x,t) b(x,t)$ – поток массы флюида (в кг/м) в плоской трещине шириной $b(x,t)$, а $\circ_f, v$ и c_{pf} – соответственно, плотность флюида, скорость его течения и его теплоемкость при постоянном давлении, k – теплопроводность массива.

Пусть к начальному моменту времени существовало равновесное состояние массива и его температура была постоянной $T(x,y,0)=T_0$. В момент $t=0$ флюид поступает в трещину, при этом считается заданной температура флюида в основании. Пусть функция $f(x,t)=T(x,0,t)-T_0$ обозначает температуру флюида в трещине (или, точнее, ее отличие от начальной температуры массива). Тогда будет задана функция $f_0(t)=f(0,t)$, а изменения температуры массива будем обозначать как $T_1(x,y,t)=T(x,y,t)-T_0$. Уравнение теплопроводности (1) должно решаться с граничным условием $T_1(x,0,t)=f(x,t)$ и условием на бесконечности $T_1 \to 0$ при $y \to \infty$.

В случае системы одинаковых плоско-параллельных трещин, расположенных перпендикулярно к оси Ox на расстоянии $2l$ друг от друга, в силу симметрии задачи распределение температуры в массиве определяется из решения уравнения теплопроводности (1) на отрезке $0 \le x \le l$ с условием (2) в одной граничной точке отрезка и условием адиабатичности в другой (поскольку поток тепла в срединной плоскости, разделяющей соседние трещины, должен быть равен нулю). Так, если мы располагаем (из соображений технического удобства) основания трещин в точках $y=\pm nl (n=1,2,3)$, то условие (2) должно выполняться в точке $y=l$, а в точке $y=0$ ставится условие $(\partial T_1/\partial y)\big|_{y=0}=0$. При этом, как указывалось выше, функция $T_1(x,y,t)$ должна удовлетворять уравнению теплопроводности (1) и зависеть от x как от параметра.

Флюид содержит растворенную компоненту, осаждение которой при охлаждении флюида приводит к изменению профиля трещины $b(x,t)$. В начальный момент времени трещина является щелью однородной ширины $b(0,x)=b_0=\text{const}$. Процесс выпадения осадка и залечивания трещины в предположении равновесной концентрации растворенного вещества описывается уравнением баланса массы [Wood, Hewett, 1982; Lowell et al., 1993]

$$\rho_s \frac{\partial b}{\partial t} = q(t)\gamma \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{y=0} \tag{3}$$

Левая часть уравнения представляет собой массу осадка, выпавшего в единицу времени и пропорциональную скорости залечивания трещины, а правая часть уравнения – массу растворенного компонента, потерянного раствором за единицу времени. В этом уравнении $\circ_s$ – плотность выпавшего осадка (кремнезема), а ¥ $=$ ôc_s / ôT – производная равновесной концентрации растворенного компонента по температуре. При рассмотрении задачи о системе трещин условие (3) ставится в точке $y = l$.

Таким образом, если известно изменение во времени величины $q(t)$ потока флюида или известна функциональная связь потока флюида и ширины трещины (т.е. известен тип течения флюида в трещине), рассматриваемая задача формулируется в виде системы уравнений (1-3) для трех неизвестных функций $T_1(x, y, t)$, $f(x,t)$, $b(x,t)$ с соответствующими граничными условиями.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $f(x,t)$ и $b(x,t)$.

Основная идея преобразования исходной системы состоит в том, чтобы записать выражения для производных $(\partial T / \partial y)$ в точках $y = 0$ (для случая одиночной трещины) и $y = l$ (для случая системы трещин) в виде функционалов от $f(x,t)$. Это можно сделать, используя решения уравнения теплопроводности с соответствующими граничными условиями (решение первой краевой задачи для случая одиночной трещины и смешанной задачи для случая системы трещин). Тогда подстановка полученных соотношений в уравнение (2) дает интегродифференциальное уравнение для температуры флюида $f(x,t)$. Эти соотношения можно записать в едином виде

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial y}\right|_{y=0} = -\int_0^t \frac{\partial f}{\partial \tau} K(t-\tau)\, d\tau \qquad (4)$$

где $K(t-\tau) = K_1(t-\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}}$ в случае одиночной трещины и

$K(t-\tau) = K_2(t-\tau) = \dfrac{1}{l}\theta\left(0; \dfrac{t-\tau}{\tau_0}\right)$ в случае системы трещин.

Здесь ² $_0 = l^2 / a^2$, а ¯ $_2(p,t)$ – эллиптическая тэта-функция Якоби.

Подставляя (4) в (2) и переписывая остальные уравнения и условия, получаем систему двух уравнений (одно интегродифференциальное и одно дифференциальное). При заданной величине $q(t)$ потока флюида или функциональной связи потока флюида и профиля трещины (когда известен тип течения флюида в трещине), эти уравнения определяют функции $f(x,t)$ и $b(x,t)$.

$$c_{pf}q(t)\frac{\partial f}{\partial x}=-2k\left[\int_0^t\frac{\partial f}{\partial\tau}K(t-\tau)d\tau\right] \quad (5)$$

$$\rho_s\frac{\partial b}{\partial t}=q(t)\gamma\frac{\partial f}{\partial x} \quad (6)$$

Система уравнений (5-6) дополняется граничным условием для функции $f(x,t)$ и начальным условием для функции $b(x,t)$.

$$f(0,t)=f_0(t) \quad (7)$$

$$b(0,x)=b_0 \quad (8)$$

Такая постановка не является экстравагантной, поскольку изменения потока флюида во времени на обозримых интервалах времени порядка десятилетий могут быть измерены (и в ряде случаев измеряются) в результате мониторинга гидротермальных систем. На более продолжительных интервалах времени такие изменения по-видимому могут оцениваться на основе геохимических данных. С физической точки зрения более ясной является постановка, в которой считается известным характер течений флюида в трещинах. В этом случае изменение величины потока оказывается функциональным образом связано с изменяющимся профилем трещин. При этом, уравнения (5) и (6) и уравнение, определяющее величину потока, образуют систему связанных нелинейных уравнений. Один из возможных вариантов такой постановки возникает в том случае, когда можно предполагать ламинарное вязкое течение несжимаемого (это предположение выглядит наиболее сомнительным) флюида при достаточно плавном и в определенном смысле медленном изменении профиля трещины. Тогда, рассматривая течения как пуазейлево и полагая, что разница давления в гидротермальном резервуаре и на выходе системы сохраняется постоянной, можно записать

$$q(t)=\frac{q_0L}{b_0^3}\left[\int_0^L\frac{dx}{b^3(x,t)}\right]^{-1} \quad (9)$$

Таким образом, задача в данном случае состоит в решении системы уравнений (5), (6) и (9) относительно трех функций $f(x,t)$, $b(x,t)$ и $q(t)$ с граничным условием (7) и начальными условиями для ширины трещин и потока флюида

Рассмотрим случай постоянного потока флюида, записав первые два уравнения в безразмерном виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-A\int_0^t\frac{\partial f}{\partial\tau}\vartheta_2(0;t-\tau)d\tau \quad (10)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = B\frac{\partial f}{\partial x} \tag{11}$$

Пространственная координата x нормирована здесь на расстояние между ближайшими трещинами l, время нормировано на естественный масштаб $\tau_0 = l^2/a^2$ (где a^2 – температуропроводность массива), температура флюида $f(x,t)$ нормирована на ΔT (разницу между начальными температурами флюида и массива), а функция профиля трещин нормирована на начальную ширину трещин b_0. Безразмерные параметры A и B, соответственно, равны

$$A = \frac{2k}{c_{pf}q_0},\ B = \frac{q_0\gamma\Delta Tl}{\rho_S a^2 b_0} \tag{12}$$

Эволюция температуры флюида находится из решения линейного уравнения (10), которое представляет собой ряд по произведениям экспонент и полиномов Эрмита. Подстановка этого выражения в (11) позволяет определить эволюцию профиля трещин.

ОСОБЕННОСТИ ЗАЛЕЧИВАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН

Вследствие того, что при внедрении горячего флюида в холодный массив пород максимальный градиент температуры создается в основании трещин, процесс залечивания трещин в этом случае развивается вверх, начинается с их основания. Поэтому оценки времени залечивания системы трещин можно получить, исследуя эволюцию ширины трещин в их основании, описываемую в размерном виде следующим выражением, получающимся из общего решения при $x = 0$.

$$b(0,t) = b_0 - ABb_0\int_0^{p_0} \vartheta_2(0;\xi)d\xi \tag{13}$$

где $p = \tau/\tau_0$.

Отсюда можно получить и решение для одиночной трещины, как предельный асимптотический случай при $p = \tau/\tau_0 << 1$. При малых значениях аргумента тэта-функция имеет асимптотику $\vartheta_2(0;y) \sim 1/\sqrt{\pi y}$, поэтому соответствующая асимптотика для $b(0,t)$ имеет вид

$$b(0,t) = b_0 - \frac{2ABb_0\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\tau_0}} = b_0 - 2ABb_0\sqrt{\frac{a^2t}{\pi}} = b_0 - \frac{4k\gamma\Delta T}{c_{pf}\rho_s\sqrt{\pi a^2}}\sqrt{t}\ .$$

Отсюда получается и оценка времени залечивания t^* одиночной трещины в условиях постоянства температуры и потока флюида на входе в трещину, которая всегда полностью залечивается по прошествии указанного интервала времени

$$t^* = \frac{\pi a^2 c_{pf}^2 \rho_s^2 b_0^2}{16(\Delta T)^2 k^2 \gamma^2} \tag{14}$$

Поведение системы трещин оказывается более сложным. Наличие характерного масштаба времени установления теплового равновесия между соседними трещинами $\tau_0 = l_0^2 / a^2$ обусловливает существование критического значения начальной ширины трещин. Физический смысл этого критического значения заключается в следующем. В случае бесконечной системы плоско-параллельных трещин процесс осаждения твердой фазы заканчивается с установлением теплового равновесия между соседними трещинами, поскольку при этом прекращаются потери тепла через стенки трещины. В зависимости от определяющих физических параметров, возможны два сценария – либо трещины полностью успеют залечиться либо количество осажденной на стенках твердой фазы к указанному моменту времени окажется меньшим величины, необходимой для полного зарастания трещин. Критическое значение начальной ширины трещин b_{cr} соответствует максимально широким трещинам, которые могут быть полностью залечены. Бесконечная система трещин с большей начальной шириной, чем b_{cr} не может быть залечена при физических условиях, отвечающих данному значению b_{cr}.

Действительно, при $p \to \infty$ (на больших временах) значение интеграла от тэта-функции стремится к единице и, таким образом, максимальное значение второго слагаемого в (13) равно ABb_0. Эта величина и представляет собой критическое значение начальной ширины трещин

$$b_{cr} = ABl = \frac{2\rho_m c_{pm} \Delta T \gamma l}{\rho_s c_{pf}} \tag{15}$$

Для оценки b_{cr} используем характерные величины $\rho_m = 3.0 \cdot 10^3$ $кг/м^3$ для плотности пород основного состава, $\rho_s = 2.5 \cdot 10^3$ $кг/м^3$ для плотности осаждаемого кремнезема, $c_{pm} = 10^3$ $Дж/кг \cdot K$ для теплоемкости пород и $c_{pf} = 4 \cdot 10^3$ $Дж/кг \cdot K$ для теплоемкости флюида. Тогда получаем, что $b_{cr} = 0.6\gamma \Delta T l$. Величина γ, представляющая собой производную равновесной концентрации кремнезема в растворе по температуре может сильно зависеть от давления, солености и pH раствора. По имеющимся данным [см. Carroll t al., 1998], в гидротермальных условиях величина γ лежит в интервале значений $10^{-6} - 10^{-4}\ K^{-1}$. Таким образом, при перегреве флюида относительно массива пород на $100K$, при средней величине $\gamma = 10^{-5}\ K^{-1}$ получаем следующую оценку для b_{cr}: $b_{cr} \approx 0.6 \cdot 10^{-3} l$. Для системы трещин, расположенных на расстоянии 10 *м* друг от друга, критическое значение начальной ширины составит 0.6 *см*. Это означает, что достаточно протяженные (т.е. содержащие достаточно большое число трещин) системы трещин, расположенных на расстоянии 10 *м* друг от друга с начальной шириной меньшей указанного значения 0.6 *см*, будут залечиваться равномерным образом за времена меньшие или порядка величины τ_0, которая в данном случае составляет около 3 лет. Системы трещин с большей начальной шириной не могут быть залечены полностью аналогичным способом. Полное залечивание таких систем может происходить лишь последовательным путем, когда сначала залечиваются периферические трещины, и процесс залечивания распространяется вглубь самой системы. При этом должно происходить стягивание гидротермальной активности к центральной области системы. Действительно, для системы конечных размеров, т.е. содержащей конечное число трещин, эволюция профиля всех трещин, за исключением двух внешних, на первом этапе (до момента полного залечивания внешних трещин) будет описываться системой уравнений (1-2). Для двух внешних трещин эволюция профиля и температуры флюида будет определяться тем обстоятельством, что величина потока тепла, теряемого флюидом, будет равна для этих трещин полусумме потоков тепла, теряемых внутренней трещиной и одиночной трещиной. Соответственно, решение будет являться полусуммой решений для бесконечной системы трещин и одиночной трещины. Для достаточно широких трещин время залечивания внешних трещин составит примерно удвоенное время залечивания одиночной трещины $2t^*$, где t^* определяется соотношением (21). После залечивания двух периферических трещин начинается залечивание следующих ближайших трещин, которые становятся периферическими.

Сведения об авторе:

Глико Александр Олегович
Д.ф.-м.н., академик РАН, академик-секретарь
Отделения наук о Земле РАН, директор Института
Адрес: Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН
123995 Б.Грузинская ул., 10, Москва, Россия
Тел.:+7-495-2520726 (раб.), +7-916-8160080 (моб.)
Факс: +7-495-2556040
E-mail: gliko@ifz.ru

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ К КОНТАКТНЫМ И СМЕШАННЫМ ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Григорян А.Б., Мхитарян С.М.
Ереван, Армения

Методы краевых задач теории аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений широко применяются в исследованиях по контактным и смешанным задачам математической теории упругости [1 – 4], в механике трещин [5, 6] и в других областях механики сплошных сред. Особый интерес представляют те классы краевых задач, которые допускают замкнутые решения и которыми описываются задачи механики сплошных сред, имеющие теоретическое и практическое значение. В настоящей работе рассматривается один такой класс сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, Гильберта и с родственными ядрами, часто встречающимися в статических и динамических задачах указанных выше областей механики сплошных сред. Замкнутые решения этих уравнений строятся при помощи обобщенных собственных функций соответствующих интегральных операторов и формул обобщенного интегрального преобразования Фурье.

Предварительно вкратце излагается постановка контактных задач теории упругости, сводящихся к обсуждаемым сингулярным интегральным уравнениям. Затем указывается путь их решения.

1. Рассмотрим плоскую контактную задачу о вдавливании штампа общей конфигурации в упругую полуплоскость с учетом сил сцепления в контактной зоне. Пусть в нижнюю упругую полуплоскость $y<0$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ¬, отнесенную к правой прямоугольной системе координат Oxy, под действием вертикальной силы P вдавливается штамп. При этом будем считать, что поверхность основания штампа описывается уравнением $y=f(x)$, а участок соприкасания штампа с границей упругой полуплоскости занимает отрезок $[-a,a]$ горизонтальной оси Ox. Для общности постановки задачи будем считать также, что прижимающая к упругому основанию штампа вертикальная сила P приложена к штампу на некотором расстоянии b $(b<a)$ от вертикальной оси Oy и направлена противоположно к этой оси, а справа от штампа в отрицательном направлении оси Ox на расстоянии c от этой оси на штамп действует горизонтальная сдвигающая сила T. Далее предположим, что в контактной зоне $[-a,a]$ между штампом и упругой полуплоскостью действуют только силы сцепления, вследствие чего штамп сцеплен с упругим основанием. Исходя из этой модели контакта, примем, что коэффициент трения между штампом и полуплоскостью настолько велик, что в каждой

точке контактной зоны имеет место жесткое сцепление, т.е. штамп вместе с прилегающими к нему участками упругой полуплоскости перемещается как одно целое. В этом случае тангенциальные усилия под штампом меньше нормальных давлений, умноженных на коэффициент трения, и стало быть, недостаточны, чтобы произвести сдвиг штампа относительно полуплоскости.

При этих предположениях требуется определить законы распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений, действующих под штампом.

Описанная контактная задача в рамках указанной модели контакта [2,3] эквивалентна следующей смешанной граничной задаче для нижней упругой полуплоскости $y < 0$:

$$
\begin{aligned}
&u(x,y)\,|_{y=0} = C_1, \qquad \neg(x,y)\,|_{y=0} = -f(x) - \sim x + C_2 \qquad (-a < x < a)\\
&\pm_y(x,y)\,|_{y=0} = {}^2{}_{xy}(x,y)\,|_{y=0} = 0 \qquad (a < |x| < \infty) \qquad\qquad (1)\\
&\pm_x(x,y), \pm_y(x,y), {}^2{}_{xy}(x,y) \to 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \to \infty
\end{aligned}
$$

Здесь $u(x,y)$ и $\neg(x,y)$ – компоненты смещений точек упругой полуплоскости по направлению осей Ox и Oy, соответственно, $\pm_x, \pm_y, {}^2{}_{xy}$ – компоненты напряжений, $\sim$ – угол поворота штампа, а C_1 и C_2 – компоненты жесткого поступательного смещения штампа по осям.

Решение смешанной граничной задачи (1) сведем к решению сингулярного интегрального уравнения. С этой целью воспользуемся решением в смещениях первой граничной задачи для нижней упругой полуплоскости:

$$
\begin{aligned}
&\pm_y\,|_{y=0} = -p(x), \; {}^2{}_{xy}\,|_{y=0} = -{}^2(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)\\
&\pm_x, \pm_y, {}^2{}_{xy} \to 0 \text{ при } x^2 + y^2 \to \infty \qquad\qquad (2)
\end{aligned}
$$

Здесь $p(x)$ и ${}^2(x)$ – наперед заданные функции, характеризующие распределение нормальных и тангенциальных напряжений на границе полуплоскости. Отправляясь от известных уравнений Ляме плоской теории упругости [1], при помощи интегрального преобразования Фурье в классе обобщенных функций для компонент смещений граничных точек нижней упругой полуплоскости, получим следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
&u(x) = u(x,0) = -\mathrm{g}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{1}{|x-s|}\,{}^2(s)ds - \mathrm{g}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(x-s)\,p(s)ds + C_1\\
&\neg(x) = \neg(x,0) = -\mathrm{g}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \ln\frac{1}{|x-s|}\,p(s)ds + \mathrm{g}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(x-s)\,{}^2(s)ds + C_2 \qquad (3)\\
&\mathrm{g}_1 = 2(1-\neg^2)/E, \quad \mathrm{g}_2 = (1+\neg)(1-2\neg)/E, \quad (-\infty < x < +\infty)
\end{aligned}
$$

Теперь при помощи (3) реализуя граничные условия (1), после несложных преобразований придем к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению поставленной контактной задачи:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)ds}{s-x}-i\,\mathrm{th}(\pi\kappa)\varphi(x)=g(x)\\
\varphi(x)=p(x)+i\tau(x);\ \kappa=\frac{1}{2\pi}\ln(3-4\nu),\quad g(x)=\frac{\varepsilon+f'(x)}{\pi\vartheta_1}
\end{gathered}
\qquad (4)
$$

Здесь $p(x)$ и $\tau(x)$ – уже неизвестные нормальные и тангенциальные контактные напряжения с обратным знаком, соответственно, интеграл при $s=x$ понимается в смысле главного значения по Коши, а производная $f'(x)$ функции $f(x)$ принадлежит классу гельдеровских функций на $[-a,a]$. При этом по постановке задачи должно выполняться условие

$$
|\tau(x)/p(x)|<k\qquad(-a<x<a)
$$

где k – коэффициент кулоновского трения. Кроме того, из условий равновесия штампа

$$
\int_{-a}^{a}p(x)dx=P;\ \int_{-a}^{a}\tau(x)dx=T;\ \int_{-a}^{a}xp(x)dx=Pb-Te \qquad (5)
$$

и, следовательно, решение интегрального уравнения (4) должно быть подчинено условиям (5), причем из третьего условия (5) – моментного условия равновесия штампа определяется его угол поворота ε.

Таким же образом решение периодической контактной задачи для упругой полуплоскости с учетом сил сцепления, решение аналогичных задач с двумя участками контакта, а также решение многих задач о напряженном состоянии кусочно-однородной упругой плоскости с трещинами сводится к решению сингулярного интегрального уравнения типа (4):

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}K(x-s)\varphi(s)ds-i\,\mathrm{th}(\pi\kappa)\varphi(x)=g(x)
$$

где ядерная функция $K(x)$ имеет один из следующих видов:

$$
1)\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{x}{2};\quad 2)\frac{1}{2}\mathrm{cth}\frac{x}{2};\quad 3)\frac{1}{2\sin(x/2)};\quad 4)\frac{1}{2\mathrm{sh}(x/2)}
$$

Таким образом, описанный класс сингулярных интегральных уравнений тесно связан с контактными и смешанными задачами математической теории упругости.

2. Для решения интегрального уравнения (4) сначала методами краевых задач теории аналитических функций, как в [7], устанавливается спектральное соотношение

$$\frac{1}{\text{®} i}\int_{-a}^{a}\frac{\text{¨}_{\text{«}}(s)ds}{s-x}=\mathrm{th}(\text{®«})\text{¨}_{\text{«}}(x)\qquad(-a<x<a;-\infty<\text{«}<+\infty)$$

$$\text{¨}_{\text{«}}(x)=(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\text{«}}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\text{«}}\qquad x\in(-a,\,a)$$

дающее обобщенные собственные функции интегрального оператора

$$S\text{¨}=\frac{1}{\text{®} i}\int_{-a}^{a}\frac{\text{¨}(s)ds}{s-x}.$$

Затем при помощи известных формул Фурье–Планшереля выводятся формулы обобщенного интегрального преобразования Фурье по функциям $\text{¨}_{\text{«}}(x)$:

$$G(\text{«})=\int_{-1}^{1}g(x)\text{¨}_{-\text{«}}(x)dx;\quad g(x)=\frac{1}{\text{®}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\text{«})\text{¨}_{\text{«}}(x)d\text{«}\qquad(a=1)$$

Исходя из указанных соотношений, решение уравнения (4) при $\text{«}=\text{«}_0,\ a=1$, что не ограничивает его общность, представляется формулой

$$\text{¨}(x)=-\frac{i}{2}\mathrm{sh}(2\text{®«}_0)g(x)-$$

$$-\frac{\mathrm{ch}^2(\text{®«}_0)}{\text{®}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-i\text{«}_0}(1+x)^{-\frac{1}{2}+i\text{«}_0}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}+i\text{«}_0}(1+s)^{\frac{1}{2}-i\text{«}_0}}{s-x}g(s)ds \quad (6)$$

$$(-1<x<1)$$

Отметим, что формулу (6) можно получить также из результатов [4].

Входящий в (6) интеграл с осциллирующей при $s\to\pm1$ подынтегральной функцией удается эффективно вычислить при помощи квадратурной формулы Гаусса для вычисления сингулярного интеграла с ядром Коши, используя при этом корни многочленов Чебышева второго рода, как узлы [6,8,9].

Таким же методом решаются остальные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М : Наука, 1966. 708с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304с.
3. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270с.

4. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949. 380с.
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640с.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
7. Мхитарян С.М. Математические исследования. //Кишинев: АН Молдовской ССР. 1969. Т.4. Вып.1.С.98 – 109.
8. Teocaris P.S., Loakimidis N.I. //Quart. Appl. Math. 35, 1977/78, №1, pp. 173 –187.
9. Григорян А. Б. //Уч. записки ЕГУ, Естественные науки, 2007. №1. С.3–16.

Сведения об авторах:

Григорян Акоп Борисович

Аспирант РАУ
Тел. (+37493)-264632
E-mail: hakobgrig@mail.ru

Мхитарян Сурен Манукович

Д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник
Института механики НАН РА.
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^{б}
Тел: (+37410)-62-10-25
E-mail: mechins@sci.am

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОФИЛИРОВАННОСТИ ВКЛАДЫША НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

Григорян Д.Г., Акопян В.В.
Ереван, Армения

Исследованию напряженного состояния вытягиваемого из пластины вкладыша, изготовленного из другого материала, посвящено много работ [1,2,3]. В данной работе методом фотоупругости исследуется распределение напряжений при вытягивании вклеенного вкладыша из эпоксидной пластины в зависимости от материала и геометрии профиля вкладыша.

Вкладыши были изготовлены из стали, дюралюминия и стеклотекстолита. Стальные и дюралюминевые вкладыши имеют выступ на конце (рис.1), а образцы из стеклотекстолита имеют выступы с высотой 1 и 1.5 мм и шагом 7-18мм. Длина вкладышей составляет от 30 до 60 мм (рис.2). Вкладыши склеены с пластиной эпоксидным клеем ЭД-20.

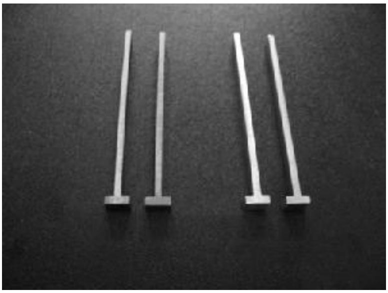


Рис. 1

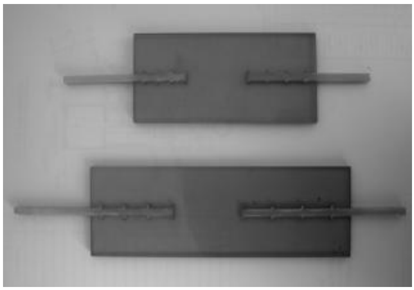


Рис. 2

Исследования проводились методом полос на поляризационно-проекционной установке ППУ-7, что, в отличие от других механических и оптических методов, позволяет рассматривать распределение напряжений по всей длине сцепления. Растягивающая сила достигала 1000 Н.

На рис. 3 показано распределение изохром на образцах со стальными и дюралюминиевыми вкладышами с растягивающей силой 300Н. На образцах со стальными и с дюралюминиевыми вкладышами видно, что рабочей поверхностью является свободный конец, то есть напряжения пластине передаются главным образом от свободного конца вкладыша.

Как видно из рисунка, при одинаковых геометрических параметрах вкладышей на образцах со стальными и дюралюминиевыми вкладышами напряженное состояние вблизи выступов значительно различается. На стальных вкладышах напряжения относительно большие и имеет место много заметных очагов концентрации напряжений.

Отметим, что модуль упругости стали в 3 раза больше модуля упругости дюралюминия.

а) дюралюминиевый вкладыш б) стальной вкладыш

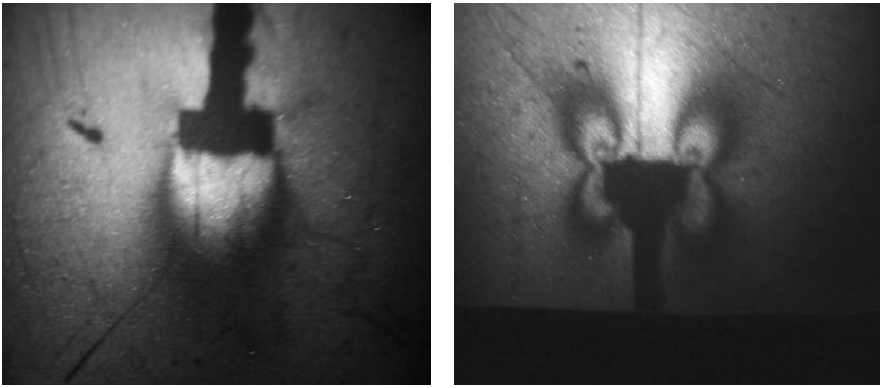


Рис. 3

В проведенной ранее работе [4] исследовалось влияние отношения модулей упругости пластины и вкладыша на распределение напряжений по поверхности сцепления. Исследованные в [4] вкладыши имели гладкую поверхность. В отличие от стального и дюралюминиевого вкладышей, во вкладышах из стеклотекстолита, дерева и АГ-4С, которые имеют меньший модуль упругости, максимальные значения касательных напряжений перемещаются к внешней части вкладыша и, соответственно, с уменьшением соотношения модулей упругости пластины и вкладыша уменьшается нагруженность свободного конца вкладыша.

На рис. 4 изображены изохромы, образовавшиеся на образцах с стеклотекстолитовыми вкладышами: рис.4.1 – гладкая поверхность, рис.4.2 – с выступами с шагом 18мм, рис.4.3 – с выступами с шагом 13мм.

Как видно из рис. 4.1, на образце с вкладышем с гладкой поверхностью напряжения передаются пластине с внешнего конца, а при наличии выступов напряжения передаются с внутреннего конца [4].

Из рис. 4.2 и 4.3 видно, что при изменении шага выступов от 13 до 18 мм меняется распределение напряжения.

Рис.4.1 – гладкая поверхность

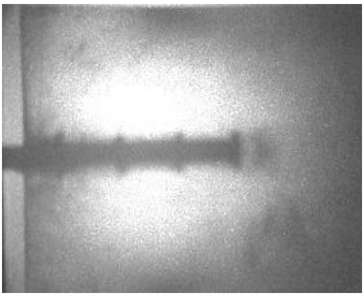


Рис.4.2 – с выступами с шагом 18мм

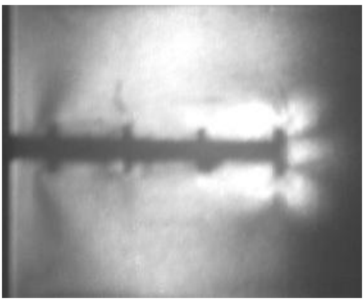


Рис.4.3 – с выступами с шагом 13мм.

Рис. 4

На образце с вкладышем с шагом 13мм возникшее напряжение на порядок больше, и концентрация напряжений очевидна на всех углах конечного выступа. При малых нагрузках остальные выступы не нагружаются, работает только последний выступ.

На образце с вкладышем с шагом выступов 18мм напряжения распределяются более равномерно, а на последнем выступе – меньше очагов концентраций напряжений.

На всех испытанных образцах сохранялась следующая закономерность: при относительно малых шагах нагруженность выступов более подчеркнута, напряжения распределяются по выступам. При больших значениях шагов участки между выступами также начинают воспринимать нагрузку, то есть нагрузка от вкладыша пластине передается также поверхностью сцепления.

Полученные результаты могут быть полезны при определении оптимального профиля арматуры для железобетонных конструкций [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине.//Тр. Амер.общ-ва инженеров-механиков. Русский перевод, М.: Мир, 1968. С. 124-135.
2. Мадатян С.А. Арматура железобетонных конструкций. М.: Воентехлит, 2000. 258 с.
3. Мулин Н.М., Коневский В.П., Судаков Г.Н. Новый тип профиля для стержневой арматуры. //В сб.трудов. «Эффективные виды арматуры для железобетонных конструкций». Под ред. Михайлова К.В.. М.: Издательство литературы по строительству, 1970. С 16-45.
4. Григорян Д.Г., Ширинян Р.А. Исследование совместной работы арматуры и бетона поляризационно-оптическим методом. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №1. С.79-85.
5. ¶ñÇ·áñÛ³Ý ¸.Ð. ²Ùñ³ÝÇ åñáýÇÉÇ ³½¹»óáõÃÛáõÝÁ µ»ïáÝÇ ¨ ³Ùñ³ÝÇ Ñ³Ù³ï»Õ ³ßË³ï³ÝùáõÙ: ºñÖÞäÐ ï»Õ»Ï³·Çñ. 1/2007(1/2). ¿ç 8-11:

<u>Сведения об авторах:</u>

Григорян Давид Гамлетович

К.т.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: +37493578796
Дом +37410423044
E-mail: Davit-grigoryan@yandex.ru

Акопян Вачаган Варужанович

Младший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел. +37493366211
Дом. +37410647131
E-mail: vvv-am@rambler.ru ; vvv@mechins.sci.am

ВТОРИЧНЫЕ РЕЗОНАНСЫ ПРИ ПУЛЬСАЦИЯХ ТЕРМИЧЕСКИ РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Григорян Ш.А., Оганян Г.Г.

Ереван, Армения

1. Исходные уравнения. В реальной системе жидкость-газ имеет место необратимый межфазный теплообмен между пузырьком и окружающей его безграничной жидкостью. Обзор работ по тепловому и динамическому взаимодействию одиночного газового пузырька с несжимаемой жидкостью приведен, например, в [1]. Там же предложена модель такого же взаимодействия в разреженной газожидкостной смеси пузырьковой структуры, в которой радиальное движение в окрестности пузырька описывается упрощенной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. На их основе при квазиадиабатическом поведении газа в пузырьке в [2] получено нелинейное уравнение, описывающее свободные пульсации термически релаксирующего газового пузырька сферической формы в несжимаемой вязкой жидкости. При описании нелинейных вынужденных пульсаций оно примет вид

$$\dddot{R} + µ_{ar}^{2}\dot{R} + 2¢\ddot{R} - £2\sim R\dot{R} + £4\dot{R}\ddot{R} + £R\dddot{R} + \frac{1}{t_T}\left(\frac{µ_{ar}^{2}}{¥}R - £\frac{¥+1}{¥}µ_{ar}^{2}R^{2} + £R\ddot{R} + £\frac{3}{2}\dot{R}^{2}\right) = µ_{ar}^{2}µF\sin µt - \frac{µ_{ar}^{2}}{t_T}F\cos µt \tag{1.1}$$

$$¢ = \frac{1}{2}\frac{1}{t_T} + \frac{2«}{°_1}\frac{1}{R_0^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{t_T}\left(1 + \frac{8}{3¥}\frac{«}{°_1}\frac{1}{ª_2\,\mathrm{Nu}}\right), \qquad t_T = \frac{2}{3¥}\frac{R_0^2}{ª_2\,\mathrm{Nu}}$$

$$µ_{ar}^{2} = \frac{3¥p_0}{°_1}\frac{1}{R_0^2}, \quad \sim = \frac{3¥+1}{2}µ_{ar}^{2}$$

Здесь R – безразмерный возмущенный радиус пузырька, точки над R – кратность дифференцирования по времени t, $£$ – безразмерный малый параметр, характеризующий величину отклонения радиуса от своего значения в состоянии покоя (термодинамического равновесия), $°_1$ и $«$ – плотность и динамическая вязкость жидкости, $ª_2$ и $¥$ – температуропроводность и показатель адиабаты газа, Nu – безразмерное число Нусельта, характеризующее интенсивность межфазного теплообмена, $µ_{ar}$ – резонансная частота Миннаерта, $F \sim 1$ – безразмерная амплитуда внешней вынуждающей гармонической силы с частотой $µ$, t_T – время тепловой релаксации.

По определению квазиадиабатического режима время t_T превосходит макроскопическое время, например, период пульсации пузырька: $t_T > 2® / μ_{ar}$. В силу требования слабого затухания за счет вязкости и теплообмена можно полагать, что их влияние на формирование общего механизма диссипации проявляется через величины одного порядка малости

$$\frac{1}{2}\frac{1}{μ_{ar}}\frac{1}{t_T} \sim \frac{2«}{°_1}\frac{1}{R_0^2}\frac{1}{μ_{ar}} \sim £, \quad ª_2\,\mathrm{Nu} \sim \frac{8}{3¥}\frac{«}{°_1}$$

Таким образом, в случае слабого теплообмена порядок величины исходного радиуса равен

$$R_0 \sim \frac{1}{£}\sqrt{\frac{4}{3¥}}\sqrt{\frac{«}{°_1}\frac{«}{°_0}}$$

что соответствует мелкому пузырьку.

При вынужденных пульсациях возникают резонансные явления, которые применительно к уравнению (1.1) реализуются при значениях $μ = μ_{ar}$ и $μ = 2μ_{ar}, μ = μ_{ar}/2$ вынуждающей частоты. Им соответствуют главный (основной) и супергармонический, субгармонический вторичные резонансы. Ниже проводится исследование последних двух резонансных явлений.

Построение решения уравнения (1.1) можно провести методом Крылова-Боголюбова-Митропольского, однако, для компактной записи приводимых выкладок удобнее использовать метод многих масштабов [3,4]. Согласно идее метода, в рассмотрение вводятся „быстрое” $T_0 = t$ и „медленное” $T_1 = £t$ время, так что $R(t) = R(T_0, T_1)$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + £\frac{\partial}{\partial T_1}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + £\,2\frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \ldots \\ \frac{d^3}{dt^3} = \frac{\partial^3}{\partial T_0^3} + £\,3\frac{\partial^3}{\partial T_0^2 \partial T_1} + £^2\,3\frac{\partial^3}{\partial T_0 \partial T_1^3} + \ldots\end{gathered} \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) ищется в виде

$$R = r_0(T_0, T_1) + £ r_1(T_0, T_1) + \ldots \tag{1.3}$$

Разложение (1.3) подставляется в преобразованное посредством (1.2) уравнение (1.1) и далее слагаемые при одинаковых степенях $£$ приравниваются. В результате выкладок в нулевом приближении получим уравнение относительно функции r_0, интегрирование которого определяет ее явный вид

$$r_0\left(T_0,T_1\right)=A\left(T_1\right)e^{i\mu_{ar}T_0}+\Lambda e^{i\mu T_0}+k.c.,\quad \Lambda=\frac{\mu_{ar}^2}{\mu^2-\mu_{ar}^2}\frac{F}{2} \qquad (1.4)$$

где $A\left(T_1\right)$ – медленно меняющаяся по t комплексная амплитуда, символом (к.с.) обозначены невыписанные здесь комплексно сопряженные функции. Для нахождения $A\left(T_1\right)$ необходимо обратиться к следующему приближению.

Из первого (порядка ε) приближения следует уравнение относительно функции r_1, которое после подстановки функции (1.4) приводится к виду, интегрируемому по переменной T_0. Полагая константу интегрирования равной нулю, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r_1}{\partial T_0^2}+\mu_{ar}^2 r_1=-i2\mu_{ar}\left(\frac{dA}{dT_1}+\mu_{ar}\text{¢}_1 A\right)e^{i\mu_{ar}T_0}-\\
&-i2\mu\left(\text{¢}_1+\frac{\mu_{ar}^2}{\mu^2}\frac{1}{2t_r}\right)\Lambda e^{i\mu T_0}+\frac{2\sim+2\mu_{ar}^2}{2}A^2e^{i2\mu_{ar}T_0}+\\
&+\frac{2\sim+5\mu^2}{2}\Lambda^2e^{i2\mu T_0}+\left(2\sim+\mu_{ar}^2+3\mu_{ar}\mu+\mu^2\right)A\Lambda e^{i\left(\mu_{ar}+\mu\right)T_0}+\\
&+\left(2\sim+\mu_{ar}^2+3\mu_{ar}\mu+\mu^2\right)\bar{A}\Lambda e^{-i\left(\mu_{ar}-\mu\right)T}+k.c.
\end{aligned} \qquad (1.5)$$

$$\text{¢}_1=\frac{1}{\mu_{ar}}\left(\text{¢}_{\text{«}}+\frac{\text{¥}-1}{2\text{¥}}\frac{1}{t_T}\right),\quad \text{¢}_{\text{«}}=\frac{2\text{«}}{\text{°}_1}\frac{1}{R_0^2}$$

Частные решения уравнения (1.5) представляют собой функции, содержащие как секулярные, так и члены с малыми знаменателями. Однако, такие члены в решениях должны отсутствовать, что достигается подходящим выбором функции $A\left(T_1\right)$. Такой подбор зависит от типа исследуемого резонанса.

2. Резонанс (супергармонический) на частоте $\mu\approx 2\mu_{ar}$. Близость вынуждающей частоты к удвоенной собственной выразим через параметр линейной расстройки частоты $\text{£}\pm=2\mu_{ar}-\mu$. Тогда $\mu T_0=2\mu_{ar}T_0-\pm T_1$ и в уравнении (1.5) первое и шестое слагаемые его правой части можно объединить. Отсюда, в силу требования отсутствия секулярных членов в выражении функции r_1, определится уравнение с переменным коэффициентом, которое описывает модуляцию комплексной амплитуды

$$\frac{dA}{dT_1} = -\text{¢}_1 \mu_{ar} A - i\mu_{ar} G\Lambda \bar{A} e^{-i\pm T_1} \qquad (2.1)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{F}{(1-\pm_{11})(3-\pm_{11})}, \quad G = \frac{3\text{¥} - \pm_{11}(1-\pm_{11})}{2}, \quad \pm_{11} = \pm\frac{\pm}{\mu_{ar}} = 2 - \frac{\mu}{\mu_{ar}}$$

Подстановкой $A = B(T_1)\exp(i\pm T_1/2)$ и последующим возвратом к физическому времени t, уравнение (2.1) приведется к виду линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\dot{B} + \mu_{ar}\frac{2\text{¢}_1 - i\pm_{11}}{2}B + i\mu_{ar} G\Lambda \bar{B} = 0 \qquad (2.2)$$

Уравнение типа (2.2) исследовано в [4] и его общее решение запишется в виде

$$B(t) = b_1 e^{k_1 T} + b_2 e^{k_2 T} - i\frac{\sqrt{G^2F^2 - \Sigma^2}}{GF - \Sigma}\left(b_1 e^{k_1 T} - b_2 e^{k_2 T}\right), \quad T = \mu_{ar} t \qquad (2.3)$$

$$k_{1,2} = -\text{¢}_1 \pm \frac{\pm_{11}}{2G}\sqrt{G^2F^2 - \Sigma^2}, \quad \Sigma = \pm_{11}(1+\pm_{11})(3+\pm_{11}), \quad b_{1,2} = \text{const}$$

При фиксированных значениях ¢_1 и $\pm_{11}$ амплитуда пульсаций должна оставаться малой величиной. Такое требование выполнимо в случае $B \to 0$ при $t \to \infty$, что налагает ограничения на значения вынуждающей силы F и посему, в силу (1.4), вид функции r_0 запишется в разных формах. Действительно, показатели экспонент в (2.3) являются вещественными и неположительными $(k_{1,2} \le 0)$ в диапазоне

$$\frac{\Sigma}{G} \le F \le \frac{\Sigma}{G}\sqrt{1 + 2\left(\frac{\text{¢}_1}{\pm_{11}}\right)^2}$$

Для таких значений вынуждающей силы F решение (2.3) предстанет в виде

$$R(t) = 2\left(b_1 e^{k_1 T} + b_2 e^{k_2 T}\right)\cos\left(\frac{2+\pm_{11}}{2}T\right) + 2\sqrt{\frac{FG+\Sigma}{FG-\Sigma}} \times$$
$$\times\left(b_1 e^{k_1 T} + b_2 e^{k_2 T}\right)\sin\left(\frac{2+\pm_{11}}{2}T\right) + \frac{\pm_{11}}{\Sigma}F\cos\left[(2+\pm_{11})T\right] \qquad (2.4)$$

При значениях $F < \Sigma/G$ величины $k_{1,2}$ являются комплексными и потому решение (1.3) примет форму

$$R(t) = 2b_1 e^{-\text{¢}_1 T}\left(1 - \sqrt{\frac{\Sigma + GF}{\Sigma - GF}}\right)\cos\left(\frac{2 + \pm_{11}}{2} + \frac{\pm_{11}}{2\Sigma}\sqrt{\Sigma^2 - G^2 F^2}\right)T +$$

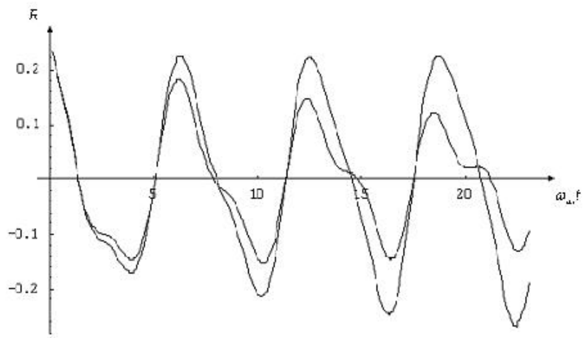
$$+2b_2 e^{-\text{¢}_1 T}\left(1 + \sqrt{\frac{\Sigma + GF}{\Sigma - GF}}\right)\cos\left(\frac{2 + \pm_{11}}{2} - \frac{\pm_{11}}{2\Sigma}\sqrt{\Sigma^2 - G^2 F^2}\right)T +$$

$$+\frac{\pm_{11}}{\Sigma} F \cos\left(2 + \pm_{11}\right)T \qquad (2.5)$$

Здесь малый параметр ε отнесен к коэффициентам $b_{1,2}$. Из решений (2.4), (2.5) следует, что при $T \to \infty$

$$R = \frac{\pm_{11}}{\Sigma} F \cos\left(2 + \pm_{11}\right)T \qquad (2.6)$$

т.е. пузырек пульсирует с постоянной амплитудой, пропорциональной величине вынуждающей силы.



На фигуре приведены графики решения (2.4), отнесенные к пульсирующему в воде при $p_0 = 0{,}1$ МПа и $F = 0{,}25$ мелкому (кривая 1, $R_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ м, $\text{¢}_1 = 0.144,\ b_1 = b_2 = 0.049,\ \pm_{11} = 0.098$) и крупному (кривая 2, $R_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ м, $\text{¢}_1 = 0.085,\ b_1 = b_2 = 0.049,\ \pm_{11} = 0.099$) воздушному $\left(\text{¥} = 1.4\right)$ пузырьку. Соответствующие им законы теплообмена взяты в виде

$$\frac{1}{t_T} = \frac{10}{3}\text{¢}_{\text{«}}, \quad \frac{1}{t_T} = 6\left(\mu_{ar}^2 \text{¢}_{\text{«}}\right)^{1/3}$$

Учет нелинейности приводит к искажению формы синусоидального затухания амплитуды, что проявляется в незначительном увеличении радиуса пузырька в стадии его сжатия. Амплитуда мелкого пузырька, стремясь к предельному значению (2.6), затухает быстрее крупного. В отсутствие теплообмена $(\mathrm{Nu} \to 0)$ для крупного пузырька вначале эффект нелинейности преобладает над вязкостью и потому его амплитуда увеличивается вплоть до момента $t = 16\text{®}/\mu_{ar}$. Затем начинается обратный процесс доминирования эффекта вязкости над нелинейностью, вследствие чего амплитуда пульсаций убывает, стремясь к значению (2.6).

Аналогичная картина наблюдается и для решения (2.5), однако, в силу определения F, с более малой амплитудой.

3. Резонанс (субгармонический) на частоте $\mu \approx \mu_{ar}/2$. Вводя в рассмотрение параметр расстройки частоты $\text{£}\pm = \mu - \mu_{ar}/2$, будем иметь $2\mu T_0 = \mu_{ar} T_0 + 2\pm T_1$ и в уравнении (1.5) первое и четвертое слагаемые правой части можно объединить. Тогда требование отсутствия секулярных членов в решении r_1 и последующий возврат к физическому времени t приводит к уравнению

$$\dot{A} = -\mu_{ar}\text{¢}_1 A - i\frac{2\sim + 5\mu_{ar}^2}{4\mu_{ar}}\Lambda^2 e^{i2\pm_{12}T}, \qquad T = \mu_{ar} t$$

$$\Lambda = -\frac{2F}{(1-2\pm_{12})(3+2\pm_{12})}, \; \pm_{12} = \text{£}\frac{\pm}{\mu_{ar}} = \frac{\mu}{\mu_{ar}} - \frac{1}{2}$$

Общим решением полученного уравнения является функция

$$A(t) = A_0 e^{-\text{¢}_1 T} - i\frac{1}{\text{¢}_1 + i2\pm_{12}}\frac{2\sim + 5\mu_{ar}^2}{4\mu_{ar}^2}\Lambda^2 e^{i2\pm_{12}T}$$

$$\frac{1}{\text{¢}_1 + i2\pm_{12}} = \frac{1}{\sqrt{\text{¢}_1^2 + 4\pm_{12}^2}} e^{-i\,\mathrm{arctg}\,2\pm_{12}/\text{¢}_1} \tag{3.1}$$

где $A_0 = A(0)$ – постоянная интегрирования. Представляя комплексную амплитуду в форме $A = ae^{i\;\;/2}$, где $a(t)$ – действительная амплитуда, (t) – фаза, решение (1.3), согласно (3.1), можно записать в явном виде

$$R(t) = a_0 e^{-\text{¢}_1 T}\cos(T + {}_0) - \frac{4F}{(1-2\pm_{12})(3+2\pm_{12})}\cos\frac{1+2\pm_{12}}{2}T +$$

$$+\frac{8\sim + 5\mu_{ar}^2(1+2\pm_{12})^2}{2\mu_{ar}^2(1-2\pm_{12})^2(3+2\pm_{12})^2}\frac{F^2}{\sqrt{\text{¢}_1^2 + 4\pm_{12}^2}}\left[\sin(1+2\pm_{12})T - \mathrm{arctg}\frac{2\pm_{12}}{\text{¢}_1}\right]$$

Здесь $a_0 = a(0)$, $_0 = \ (0)$. Таким образом, учет межфазного теплообмена приводит к увеличению коэффициента диссипации ¢_1 и, в силу формул (2.4), (2.5), (3.1), к усилению затухания амплитуды пульсаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 300с.
2. Оганян Г.Г. Нелинейные свободные пульсации термически релаксирующего газового пузырька сферической формы в несжимаемой жидкости. // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №1. С. 58–69.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
4. Nayfeh A.S. Introduction to Perturbation Techniques. Etc.: Wiley, 1981.= Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.

Сведения об авторах:

Григорян Ш.А.

Доцент, Российско–Армянский (Славянский) Государственный университет, фак-т прикладной математики и информатики
Тел. (+37410) 21 14 71

Оганян Г.Г.

К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес:375019, Ереван, пр.М. Баграмяна 24б
Институт механики НАН РА
Тел. ((+37410) 64 03 59
E-mail: ogan@mechins.sci.am

О КОЛЕБАНИЯХ БЕЗМОМЕНТНОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г.

Ереван, Армения

В работе исследуются собственные колебания ортотропной безмоментной гофрированной, конечной и бесконечной, цилиндрической оболочки со свободными граничными образующими в предположении, что образующие ортогональны к направляющей кривой (рис. 1,2).

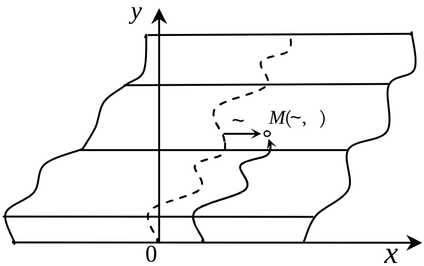


Рис.1

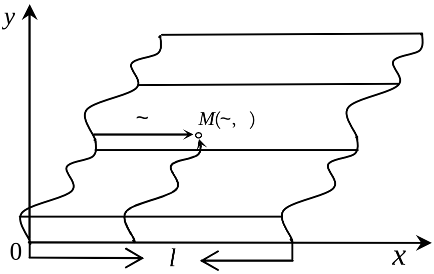


Рис.2

Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для ортотропной пластины–полосы и прямоугольной пластины, соответственно. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и задач на собственные значения полубесконечной гофрированной безмоментной цилиндрической оболочки со свободной образующей и полубесконечной гофрированной безмоментной цилиндрической оболочки–полосы со свободной образующей при наличии шарнирного закрепления на граничных направляющих.

На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α,β) ($-\infty<\alpha<\infty$, если цилиндрическая оболочка бесконечна; $0\le\alpha\le l$, если цилиндрическая оболочка имеет длину l и $0\le\beta\le\beta_0$), являющиеся, соответственно, длиной образующей и длиной дуги направляющей кривой.

Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой можно представить в виде ряда Фурье

$$R^{-2}=k_2^2\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_m\exp(imk_1\beta),\ k_1>0,\ 0\le\beta\le\beta_0$$
$$\beta_0=2\pi p/k_1,\ p\in N,\ \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|R_m\right|<\infty \qquad (1)$$

Если цилиндрическая оболочка бесконечна, то $k_2=2\pi n_0/l,\ n_0\in N$, где l

произвольное положительное число, или $k_2 = \pi / l$, если цилиндрическая оболочка имеет длину l. В качестве исходных уравнений используются уравнения, которые соответствуют безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек и записаны в выбранных криволинейных кординатах ~,

$$
\begin{aligned}
&-B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2} - B_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2} - (B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha} = \lambda u_1 \\
&-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta} - B_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2} - B_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} + B_{22}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right) = \lambda u_2 \qquad (2) \\
&-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} - \frac{B_{22}}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta} + \frac{B_{22}}{R^2}u_3 = \lambda u_3
\end{aligned}
$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях ~, и нормали к поверхности оболочки, $R^{-1} = R^{-1}(\ )$ – кривизна направляющей кривой, B_{ij} – коэффициенты упругости. ª = μ ^{2} ° , где μ – угловая частота собственных колебаний, ° – плотность материала [1].

Рассматриваются следующие граничные условия:

$$
\left.\frac{B_{12}}{B_{22}}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{u_3}{R}\right|_{\beta=0,\beta_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial\beta}\right|_{\beta=0,\beta_0} = 0 \qquad (3)
$$

$$
u_i(\alpha + 2\pi / k_2, \beta) = u_i(\alpha,\beta), \ i = \overline{1,3}\,. \qquad (4)
$$

$$
\left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad u_2\big|_{\alpha=0,l} = 0 \qquad (5)
$$

Граничные условия (3), (4) соответствуют бесконечной цилиндрической оболочке: соотношения (3) выражают условия свободного края при $= 0$ и $\beta = \beta_0$, а (4) являются условиями волнообразности колебания, где $k_2 = 2® n_0 / l$, $n_0 \in N$ (Рис. 1). Граничные условия (3),(5) соответствуют конечной цилиндрической оболочке: соотношения (5) условия шарнирного закрепления по граничным направляющим ~ $= 0$ и ~ $= l$, где $k_2 = \pi / l$ (рис. 2).

Задачи (2)-(4) и (2),(3),(5) самосопряженные и вне отрезка [0, ª $_0$]–множество значений функции

$$
\Omega(\beta,\theta) = \frac{B_{66}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta}{B_{66}(B_{11}\sin^4\theta + B_{22}\cos^4\theta) + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta} \qquad (6)
$$

$$
0 \le \beta \le s, \ 0 \le \theta \le 2\pi
$$

имеют сколь угодно большие положительные собственные значения. Отрезок $[0,\lambda_0]$ является общим участком непрерывного спектра задач (2)-(4) и (2),(3),(5) [1]. Решение системы (2) при $\lambda > \lambda_0$ ищем в виде

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \cos(k_2 n\alpha)\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{n,m}\exp((\chi + im)k_1\beta)\\
&u_2 = \sin(k_2 n\alpha)\sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{n,m}\exp((\chi + im)k_1\beta)\\
&u_3 / R = k_2\sin(k_2 n\alpha)\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{n,m}\exp((\chi + im)k_1\beta)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

После подстановки выражения (7) в систему (2), из первых двух уравнений (2), приравнивая соответствующие коэффициенты полученных тригонометрических рядов, получим

$$
\begin{aligned}
&c_{n,m}(\chi)u_{nm} = n\,a_{n,m}(\chi)w_{n,m},\; c_{n,m}(\chi)v_{n,m} = iq_m\,b_{n,m}(\chi)w_{n,m}\\
&c_{n,m}(\chi) = \frac{B_{22}}{B_{11}}q_m^4 + \left[\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}n^2 - \frac{B_{22}+B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right]q_m^2 +\\
&+(n^2-\eta^2)\left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right),\quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2B_{66}},\quad q_m = \frac{k_1}{k_2}(\chi i - m)\\
&b_{n,m}(\chi) = \frac{B_{22}}{B_{11}}q_m^2 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta^2\\
&a_{n,m}(\chi) = \frac{B_{22}}{B_{11}}q_m^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}n^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta^2,\quad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Из третьего уравнения системы (2), учитывая соотношения (8) и правило умножения тригонометрических рядов ([2] с.287), а также предполагая, что $R_{n,m}(0)\neq 0\ (m=0,1,2,\ldots)$, приходим к бесконечной системе уравнений

$$
\sum_{\gamma=1}^{\infty}R_\gamma\frac{P_{n,m-\gamma}(\chi)}{R_{n,m}(0)}\omega_{n,m-\gamma} + \frac{R_{n,m}(\chi)}{R_{n,m}(0)}\omega_{n,m} + \sum_{\gamma=1}^{\infty}R_{-\gamma}\frac{P_{n,m+\gamma}(\chi)}{R_{n,m}(0)}\omega_{n,m+\gamma} = 0 \tag{9}
$$

$$
m = 0,\pm1,\pm2,\ldots
$$

$$
\begin{aligned}
&P_{n,\alpha}(\chi) = \left(q_\alpha\right)^2\eta^2 - (n^2-\eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{11} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}}n^2 - \eta^2\right),\omega_{n,\alpha} = w_{n,\alpha}/c_{n,\alpha}(\chi)\\
&R_{n,m}(\chi) = \frac{B_{11}}{B_{22}}\eta^2 c_{n,m}(\chi) + R_0P_{n,m}(\chi),\ \alpha = m-\gamma,\ m,\ m+\gamma
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Представим q_m – корни уравнения $R_{n,m}(\chi)=0,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ в виде

$$q_m^{(j)} = \theta_n^{(j)} k_1 / k_2\,, \quad j = \overline{1,4}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11}$$

где $-_n^{(j)}$, $j = \overline{1,4}$ не зависят от m, а $-_n^{(1)}$ и $-_n^{(2)}$ имеют неположительные мнимые части. Определитель системы (9) обозначим через $\Delta(i¡)$.

Характеристический показатель ¡ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(i\chi) = 0 \tag{12}$$

Доказывается, что

$$\Delta(i\chi) = \Delta(0) + \frac{\sin^4(i\pi\chi) - \left(\sin^2(\pi\theta_n^{(1)}) + \sin^2(\pi\theta_n^{(2)})\right)\sin^2(i\pi\chi)}{\sin^2(\pi\theta_n^{(1)})\sin^2(\pi\theta_n^{(2)})} \tag{13}$$

а потому характеристический показатель ¡ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &\sin^4(i\pi\chi) - \left(\sin^2(\pi\theta_n^{(1)}) + \sin^2(\pi\theta_n^{(2)})\right)\sin^2(i\pi\chi) + \\ &+ \Delta(0)\sin^2(\pi\theta_n^{(1)})\sin^2(\pi\theta_n^{(2)}) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

которое является аналогом уравнения Хилла [2]. Определитель $\Delta(i¡)$ – четная периодическая функция по ¡ с периодом i. Поэтому, если $¡_1$ и $¡_2$ – различные корни уравнения (14) с неположительными действительными частями, то $¡_3 = -¡_1$ и $¡_4 = -¡_2$ – также различные корни уравнения (14).

Пусть $(w_{n,0}^{(j)}, w_{n,1}^{(j)}, w_{n,-1}^{(j)}, \ldots, w_{n,m}^{(j)}, w_{n,-m}^{(j)}, \ldots),\ j = \overline{1,4}$ являются нетривиальными решениями системы (9) при $¡_j,\ j = \overline{1,4}$, соответственно.

Представим решения задачи (2)-(4) и (2),(3),(5) в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos(k_2 n\alpha)\sum\nolimits_{j=1}^{4} A_j \exp(\chi_j k_1\beta)\sum\nolimits_{m=-\infty}^{m=+\infty} u_{n,m}^{(j)} \exp(imk_1\beta) \\ u_2 &= \sin(k_2 n\alpha)\sum\nolimits_{j=1}^{4} A_j \exp(\chi_j k_1\beta)\sum\nolimits_{m=-\infty}^{m=+\infty} v_{n,m}^{(j)} \exp(imk_1\beta) \\ u_3 / R &= k_2 \sin(k_2 n\alpha)\sum\nolimits_{j=1}^{4} A_j \exp(\chi_j k_1\beta)\sum\nolimits_{m=-\infty}^{m=+\infty} w_{n,m}^{(j)} \exp(imk_1\beta) \end{aligned} \tag{15}$$

где $A_j,\ j = \overline{1,4}$ неопределенные коэффициенты, $u_{n,m}^{(j)}, v_{n,m}^{(j)}$ определяются из соотношений (8) при $¡ = ¡_j$. При этом условия (4) и (5) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, придавая параметру k_2 разные значения.

Подставляя (15) в (3), получается система уравнений

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{j=1}^{4} R_{1j} A_j = 0, \qquad &\sum\nolimits_{j=1}^{4} R_{1j} \exp(z_j) A_j = 0 \\ &\sum\nolimits_{j=1}^{4} R_{2j} A_j = 0, \qquad &\sum\nolimits_{j=1}^{4} R_{2j} \exp(z_j) A_j = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$R_{1j} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} R_{1j}^{(n,m)} \omega_{n,m}^{(j)}, \qquad R_{2j} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} R_{2j}^{(n,m)} \omega_{n,m}^{(j)}$$

$$R_{1j}^{(n,m)} = \left(q_m^{(j)}\right)^2 \eta^2 - (n^2 - \eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{11} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} n^2 - \eta^2\right), R_{2j}^{(n,m)} = i\chi_j - m \tag{17}$$

$$\omega_{n,m}^{(j)} = w_{n,m}^{(j)} / c_{n,m}^{(j)},\ q_m^{(j)} = \frac{k_1}{k_2}(i\chi_j - m),\ z_j = k_1 \chi_j \beta_0,\ j = \overline{1,4},\ m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Чтобы система (16) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы ее определитель $\Delta(¦)$ равнялся нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\Delta(\eta)\exp(z_1 + z_2) = (R_{11}R_{22} - R_{21}R_{12})(R_{13}R_{24} - R_{23}R_{14})(1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - \\ &-2(R_{11}R_{23} - R_{21}R_{13})(R_{12}R_{24} - R_{22}R_{14})\exp(z_1 + z_2) + \\ &+(R_{12}R_{23} - R_{22}R_{13})(R_{11}R_{24} - R_{21}R_{14})(\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

После определения четырех разных характеристических показателей $¡_j, j = \overline{1,4}$ из уравнения (14), коэффициенты $\mu_{n,\sim}^{(j)}$ $(\sim = m-¥, m, m+¥)$ в (9) могут быть выражены через $\mu_{n,o}^{(j)}$ и миноры определителя $\Delta(i¡_j)$. Используя соотношения (8), составляются четыре независимых решений вида (7).

Таким образом, доказано следующее утверждение: ***если*** $R^{-2}(\quad)$ ***можно представить в виде (1) и*** $ª \notin [0, ª_0]$***, то уравнение (18) является дисперсионным уравнением задачи*** (2)-(4) $(\kappa_2 = 2®n_0 / l)$ ***или*** (2),(3),(5) $(\kappa_2 = ® / l)$***, где*** $¡_1$ ***и*** $¡_2$ ***– различные корни уравнения (14) с неположительными действительными частями.***

Если $¡_1$ *и* $¡_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $_0 \to \infty$ уравнения (18) преобразуются в совокупность уравнений

$$\begin{aligned} R_{11}R_{22} - R_{21}R_{12} &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} A_{m,\gamma}(\chi_1, \chi_2)\omega_{n,\gamma}^{(1)}\omega_{n,m-\gamma}^{(2)} = 0 \\ R_{13}R_{24} - R_{23}R_{14} &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} A_{m,\gamma}(-\chi_1, -\chi_2)\omega_{n,\gamma}^{(3)}\omega_{n,m-\gamma}^{(4)} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$$A_{m,\gamma}(x,y) = ((m-2\gamma)i + y - x)\left[(n^2 - \eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{11} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} n^2 - \eta^2\right) - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \eta^2 (\gamma i + x)((m-\gamma)i + y)\right]$$

которые являются дисперсионными уравнениями полубесконечной гофрированной безмоментной ортотропной цилиндрической оболочки со свободной образующей ($k_2 = 2\pi n_0 / l$, где l –произвольное положительное число) или дисперсионными уравнениями полубесконечной гофрированной безмоментной ортотропной цилиндрической оболочки–полосы со свободной образующей, когда боковые направляющие шарнирно закреплены ($\kappa_2 = ® / l$ **,** где l – длина образующей цилиндрической оболочки).

Отметим, что для приближенного вычисления используется метод редукции, который допускает система (9).

Частные случаи. а) Пусть $R^{-2}(\quad) = k_2^2 R_0$, $R_m = 0$, $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Этот случай трактуется как оболочечная конструкция составленная из одинаковых ортотропных круговых бесконечных цилиндрических оболочек открытого профиля (тогда $\kappa_2 = 2®n_0 / l$ **,** где l **–**произвольное положительное число) или оболочечная конструкция, составленная из одинаковых ортотропных круговых конечных цилиндрических оболочек открытого профиля (тогда $\kappa_2 = ® / l$ **,** где l –длина образующих составляющих цилиндрических оболочек) [3-4]. На линиях раздела цилиндрических оболочек кривизна направляющей кривой имеет устранимые особенности. Пусть длина одной круговой арки равна s , а радиус – R . Обозначим через $\kappa_1 = 2® / s$ **.**

В этом случае система (9) принимает вид

$$R_{n,m}\omega_{n,m} = 0, \quad \omega_{n,m} = w_{n,m} / c_{n,m}, \; m = 0, \pm 1, 2, \ldots \tag{20}$$

а ¡ – корни уравнения (14) имеют вид

$$\begin{gathered} \chi_1 = -i(\theta_1 + m), \, \chi_2 = -i(\theta_2 + m), \, \chi_3 = i(\theta_1 + m) \\ \chi_2 = i(\theta_1 + m), \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{gathered} \tag{21}$$

В этом случае уравнение (18) распадается на уравнения

$$\begin{gathered} (\chi_2 - \chi_1)^2 K_{2m}^2 \left(\eta_m^2\right)(1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - \\ -8R_{11}^{(n,m)} R_{22}^{(n,m)} R_{12}^{(n,m)} R_{21}^{(n,m)} \exp(z_1 + z_2) + \\ +(i\chi_2 + i\chi_1 - 2m)^2 K_{3m}^2 \left(\eta_m^2\right)\left(\exp(2z_1) + \exp(2z_2)\right) = 0 \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{gathered} \tag{22}$$

$$K_{\alpha m}(\eta^2) = (n^2 - \eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{11} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} n^2 - \eta^2\right) + \\ + (-1)^\alpha \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \eta^2 (i\chi_1 - m)(i\chi_2 - m), \; \alpha = 2,3$$

$$\begin{gathered} R_{1j}^{(n,m)} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \eta^2 (i\chi_j - m)^2 - (n^2 - \eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{11} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} n^2 - \eta^2\right) \\ R_{2j}^{(n,m)} = i\chi_j - m, \; z_j = \chi_j k_1 \beta_0 \end{gathered} \tag{23}$$

Уравнения (22) можно привести к эквивалентному виду

$$K_{2m}^2\left(\eta_m^2\right)(1+\exp(2(z_1+z_2)))-8m_{11}m_{12}m_{22}m_{21}\exp(z_1+z_2)+ \tag{24}$$
$$+\left(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21}\right)^2\left(\exp(2z_1)+\exp(2z_2)\right)+4m_{11}m_{21}(m_{11}m_{22}+$$
$$+m_{12}m_{21})[z_1z_2]\left(\exp(z_2)-\exp(z_1)\right)+4m_{11}^2m_{21}^2[z_1z_2]^2=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

где $K_{2m}\left(¦_m^2\right)$ определяется по формуле (23), а

$$m_{11}=\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2\eta^2(i\chi_j-m)^2-(n^2-\eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{11}-B_{12}^2}{B_{22}B_{66}}n^2-\eta^2\right)$$
$$m_{21}=i\chi_j-m,\ m_{22}=i \tag{25}$$
$$[z_1z_2]=(\exp(z_2)-\exp(z_1))/(z_2-z_1)k_1\beta_0,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Численный анализ показывает, что применение дисперсионных уравнений (24) более эффективно. Заметим, что если ¡$_1$ и ¡$_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $_0\to\infty$ уравнения (22) и (24) преобразуются в уравнения

$$K_{2m}(\eta^2)=(n^2-\eta^2)\left(\frac{B_{11}B_{11}-B_{12}^2}{B_{22}B_{66}}n^2-\eta^2\right)+\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2\eta^2(i\chi_1-m)(i\chi_2-m)=0 \tag{26}$$
$$m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

которые являются дисперсионными уравнениями планарных колебаний для полубесконечной безмоментной оболочечной конструкции со свободной граничной образующей, составленной из счетно одинаковых ортотропных круговых бесконечных цилиндрических оболочек открытого профиля ($k_2=2\pi n_0/l$) или полубесконечной безмоментной оболочечной конструкции со свободной граничной образующей, составленной из счетно одинаковых ортотропных круговых конечных цилиндрических оболочек открытого профиля, когда боковые направляющие шарнирно закреплены ($k_2=\pi/l$).

б) Пусть $R^{-2}(\beta)=k_2^2R_0=0$, т.е. имеем пластинку–полосу со свободными границами или прямоугольную пластинку со свободными противолежащими сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены. В этом случае (когда $R_0\to0$) уравнения $R_{n,m}(¡)=0,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ преобразуются в уравнения

$$c_{n,m}(\chi)=\frac{B_{22}}{B_{11}}q_m^4+\left[\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}n^2-\frac{B_{22}+B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right]q_m^2+(n^2-\eta^2)\left(n^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right)=0 \tag{27}$$
$$m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

которые являются характеристическими уравнениями системы планарного колебания пластинки (с. [5]). Заметим, что в этом случае вид дисперсионных уравнений (22), (24), (26) не меняется, только под ¡$_1$ и ¡$_2$ надо понимать соответствующие корни уравнения (27).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1.С. 84-99.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные диференциальные уравнения. М.: Изд. ин. лит., 1953. 346с.
3. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями // Прикл. мех.– 2006.– Т. 42.– № 12.– С. 97-114.
4. Гулгазарян Г.Р, Саакян Р.Д. Колебания тонкостенной упругой конструкции из незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек со свободной и шарнирно закрепленной граничными образующими // Проблемы прочности и пластичности: //Межвуз. Сб.: / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2007. Вып. 69. С.143-158.
5. Гулгазарян Г.Р, Гулгазарян Л.Г., Саакян Р.Д. Колебания тонкой упругой ортотропной круговой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленным краями // Прикл. матем. и мех. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 463-475.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович

Д.ф.-м.н., профессор каф. матем. анализа и теории функций АГПУ
имени Х.Абовяна
Тел.: (+37410) 649121, (+37491) 706700
E-mail: ghulgr@yahoo.com

Гулгазарян Рубен Гургенович

К.ф.-м.н., научн. сотр. ЕрФИ им. Братьев Алиханянов
Тел.: (+37410) 649121, (+37491) 759147
E-mail: ghulr@yahoo.com

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОЛНОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Гулгазарян Л.Г.
Ереван, Армения

1. Основные уравнения и постановка задачи. Рассмотрим собственные колебания двухслойной ортотропной оболочки, $\Omega=\{\alpha,\ \beta,\gamma;\ \alpha,\ \beta\in\Omega_0,\ -h_2\le\gamma\le h_1\}$, где Ω_0 – поверхность контакта слоев, α – длина образующей, β – длина дуги направляющей оболочки, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к поверхности контакта слоев. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений σ_{ij} [1,2].

Имеем: уравнения движения

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}\right)-k_\beta\sigma_{\beta\beta}^{(j)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\sigma_{\beta\alpha}^{(j)}\right)+k_\alpha\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}+\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial\gamma}+$$

$$+\frac{2\sigma_{\alpha\gamma}^{(j)}}{R_1}=\rho^{(j)}\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2U^{(j)}}{\partial t^2},$$

$$(A\leftrightarrow B;\ \alpha\leftrightarrow\beta;\ R_1,R_2;\ U,V),\ j=I,II$$

$$\frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma}^{(j)}}{\partial\gamma}-\left(\frac{\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}}{R_1}+\frac{\sigma_{\beta\beta}^{(j)}}{R_2}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial\alpha}+$$

$$+\frac{1}{B}\frac{\partial\sigma_{\beta\gamma}^{(j)}}{\partial\beta}+k_\beta\sigma_{\alpha\gamma}^{(j)}+k_\alpha\sigma_{\beta\gamma}^{(j)}=\rho^{(j)}\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2W^{(j)}}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}=\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\sigma_{\beta\alpha}^{(j)}\ \text{(условие симметрии)}$$

уравнения состояния (соотношения упругости)

$$\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial\alpha}+k_\alpha V^{(j)}+\frac{W^{(j)}}{R_1}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{11}^{(j)}\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{12}^{(j)}\sigma_{\beta\beta}^{(j)}+a_{13}^{(j)}\sigma_{\gamma\gamma}^{(j)}$$

$$(A,B;\ \alpha\leftrightarrow\beta;\ R_1\leftrightarrow R_2;\ U\leftrightarrow V;\ a_{11},a_{22};\ a_{13},a_{23})$$

$$\left[1+¥\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{¥^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial W^{(j)}}{\partial ¥}=$$
$$=\left(1+\frac{¥}{R_1}\right)a_{13}^{(j)}2_{~~}^{(j)}+\left(1+\frac{¥}{R_2}\right)a_{23}^{(j)}2^{(j)}+a_{33}^{(j)}2_{¥¥}^{(j)} \tag{1.2}$$
$$\left(1+\frac{¥}{R_1}\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U^{(j)}}{\partial}-k\ V^{(j)}\right)+\left(1+\frac{¥}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V^{(j)}}{\partial ~}-k_{~}U^{(j)}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{¥}{R_1}\right)a_{66}^{(j)}2_{~}^{(j)}$$
$$\left[1+¥\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{¥^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial U^{(j)}}{\partial ¥}-\left(1+\frac{¥}{R_2}\right)\frac{U^{(j)}}{R_1}+\frac{1}{A}\left(1+\frac{¥}{R_2}\right)\frac{\partial W^{(j)}}{\partial ~}=$$
$$=\left(1+\frac{¥}{R_1}\right)a_{55}^{(j)}2_{~¥}^{(j)},\quad (A,B;\ \ ~,\ \ ;\ \ R_1\leftrightarrow R_2;\ \ U,V;\ \ a_{55},a_{44})$$

где $k_{~}, k$ – геодезические кривизны, A,B – коэффициенты первой квадратичной формы, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны поверхности контакта, $\circ^{(j)}$ – плотности слоев, $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости ($a_{ik}^{(j)}=a_{ki}^{(j)}$), j – номер слоя.

На лицевой поверхности $¥=h_1$ заданы следующие условия:

$$2_{~¥}^{I}(h_1)=0,\ \ 2_{¥}^{I}(h_1)=0,\ \ 2_{¥¥}^{I}(h_1)=0 \tag{1.3}$$

а на поверхности $¥=-h_2$ – условия

$$U^{II}(-h_2)=0,\ \ V^{II}(-h_2)=0,\ \ W^{II}(-h_2)=0 \tag{1.4}$$

На поверхности контакта слоев заданы условия полного контакта

$$2_{~¥}^{I}(¥=0)=2_{~¥}^{II}(¥=0),\ \ 2_{¥}^{I}(¥=0)=2_{¥}^{II}(¥=0),\ \ 2_{¥¥}^{I}(¥=0)=2_{¥¥}^{II}(¥=0) \tag{1.5}$$

$$U^{I}(¥=0)=U^{II}(¥=0),\ \ V^{I}(¥=0)=V^{II}(¥=0),\ \ W^{I}(¥=0)=W^{II}(¥=0) \tag{1.6}$$

Условия на боковой поверхности пока не конкретизируются. Они влияют на значения амплитуд колебаний в зоне погранслоя.

2. Решение внутренней задачи. В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам $~=R¶$, $=R¦$, $¥=£R¸=h¸$, $U=Ru$, $V=R\text{v}$, $W=Rw$, $h=\max\{h_1,h_2\}$, $µ_*^2=h^2µ^2$, $£=h/R$ – малый параметр.

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде:

$$Q_{\sim}^{(j)} = Q_{mk}^{(j)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸})e^{i\mu t} \qquad (\sim, \quad ,\text{¥});\ m,k=1,2,3; \quad j=I,II \tag{2.1}$$

где $Q_{\sim}^{(j)}$ – любая из величин напряжений и перемещений, μ – частота собственных колебаний. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром £ система относительно $Q_{mk}^{(j)}$, решение которой представляется в виде суммы решений внутренней задачи и пограничного слоя. Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\begin{gathered}
\text{²}_{mk}^{(j)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸}) = \text{£}^{-1+s}\text{²}_{mk}^{(j,s)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸}), \quad m,k=1,2,3; \quad s=\overline{0,N},\ j=I,II \\
\left(u^{(j)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸}), \mathrm{v}^{(j)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸}), w^{(j)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸})\right) = \\
= \text{£}^{s}\left(u^{(j,s)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸}), \mathrm{v}^{(j,s)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸}), w^{(j,s)}(\text{¶},\text{¦},\text{¸})\right),\ \mu_*^2 = \text{£}^{s}\mu_{*s}^2,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Обозначение $s=\overline{0,N}$ здесь и далее означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $0,N$.

Из асимптотики (2.2) следует, что, в отличие от классической теории [1,2], для данного класса задач все компоненты тензора напряжений асимптотически равноправны, равноправны также перемещения, и допущения классической теории пластин и оболочек здесь не применимы.

После подстановки (2.2) и применяя правило Коши умножения рядов, для определения неизвестных коэффициентов разложения $Q_{mk}^{(j,s)}$ получается непротиворечивая система, которая преобразуется в следующий вид:

$$\begin{gathered}
\text{²}_{12}^{(j,s)} = P_{1\text{²}}^{(j,s-1)}, \text{²}_{21}^{(j,s)} = P_{1\text{²}}^{(j,s-1)} - r_2\text{¸}\,\text{²}_{21}^{(j,s-1)} + r_1\text{¸}\,\text{²}_{12}^{(j,s-1)} \\
\sum\nolimits_1^{(j,s)} = P_{2\text{²}}^{(j,s-1)}, \sum\nolimits_2^{(j,s)} = P_{3\text{²}}^{(j,s-1)} \\
\frac{\partial \text{²}_{13}^{(j,s)}}{\partial \text{¸}} + \mu_{*m}^2 \circ^{(j)} u^{(j,s-m)} = P_{6\text{²}}^{(j,s-1)}, \quad m=\overline{0,s} \\
(13,23,33; \quad u,\mathrm{v},w; \quad 6\text{²},5\text{²},4\text{²}) \\
\frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial \text{¸}} - a_{55}^{(j)}\text{²}_{13}^{(j,s)} = P_u^{(j,s-1)}, \quad \frac{\partial \mathrm{v}^{(j,s)}}{\partial \text{¸}} - a_{44}^{(j)}\text{²}_{23}^{(j,s)} = P_{\mathrm{v}}^{(j,s-1)} \\
\frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial \text{¸}} - \sum\nolimits_3^{(j,s)} = P_w^{(j,s-1)}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$P_{1\text{²}}^{(j,s-1)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \text{¦}} - k\ \ R\text{v}^{(j,s-1)} + r_1 \text{¸}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial \text{¦}} - k\ \ R\text{v}^{(j,s-2)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{A}\frac{\partial \text{v}^{(j,s-1)}}{\partial \text{¶}} - k_{\sim} R u^{(j,s-1)} + r_2 \text{¸}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \text{v}^{(j,s-2)}}{\partial \text{¶}} - k_{\sim} R u^{(j,s-2)}\right) - r_1 \text{¸}\, a_{66}^{(j)} \text{²}_{12}^{(j,s-1)}\right]$$

$$P_{2\text{²}}^{(j,s-1)} = \frac{1}{A}\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \text{¶}} + k_{\sim} R\text{v}^{(j,s\text{-}1)} + r_1 w^{(j,s-1)} - r_1 \text{¸}\, a_{11}^{(j)} \text{²}_{11}^{(j,s-1)} +$$

$$+ r_2 \text{¸}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial \text{¶}} + k_{\sim} R\text{v}^{(j,s-2)} + r_1 w^{(j,s-2)}\right) - r_2 \text{¸}\, a_{12}^{(j)} \text{²}_{22}^{(j,s-1)} \tag{2.4}$$

$$(2\text{²}, 3\text{²};\ A, B; \sim, \ ;\ r_1 \leftrightarrow r_2;\ \text{¶}, \text{¦};\ u \leftrightarrow \text{v};\ \text{²}_{11} \leftrightarrow \text{²}_{22};\ a_{11}, a_{22})$$

$$P_{4\text{²}}^{(j,s-1)} = r_1 \text{²}_{11}^{(j,s-1)} + r_2 \text{²}_{22}^{(j,s-1)} - \frac{1}{A}\frac{\partial \text{²}_{13}^{(j,s-1)}}{\partial \text{¶}} - \frac{1}{B}\frac{\partial \text{²}_{23}^{(j,s-1)}}{\partial \text{¦}} - k\ \ R\text{²}_{13}^{(j,s-1)} -$$

$$- k_{\sim} R\text{²}_{23}^{(j,s-1)} - \text{°}^{(j)}(r_1 + r_2)\text{¸}\,\text{µ}_{*n}^{2} w^{(j,s-1-n)} - \text{°}^{(j)} r_1 r_2 \text{¸}^{2}\text{µ}_{*q}^{2} w^{(j,s-2-q)}$$

$$P_{5\text{²}}^{(j,s-1)} = -\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \text{¦}}\left(A\text{²}_{22}^{(j,s-1)}\right) + k_{\sim} R\text{²}_{11}^{(j,s-1)} - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \text{¶}}\left(B\text{²}_{12}^{(j,s-1)}\right) - k\ \ R\text{²}_{21}^{(j,s-1)} -$$

$$- r_2 \text{¸}\frac{\partial \text{²}_{23}^{(j,s-1)}}{\partial \text{¸}} - 2 r_2 \text{²}_{23}^{(j,s-1)} - (r_1 + r_2)\text{¸}\,\text{°}^{(j)}\text{µ}_{*n}^{2}\text{v}^{(j,s-1-n)} - \text{°}^{(j)} r_1 r_2 \text{¸}^{2}\text{µ}_{*q}^{2}\text{v}^{(j,s-2-q)}$$

$$(5\text{²}, 6\text{²};\ A \leftrightarrow B;\ \sim \leftrightarrow \ ;\ r_2, r_1;\ \text{v}, u;\ \text{¶} \leftrightarrow \text{¦};\ \text{²}_{11} \leftrightarrow \text{²}_{22};\ \text{²}_{12} \leftrightarrow \text{²}_{21};\ \text{²}_{23}, \text{²}_{13})$$

$$P_{u}^{(j,s-1)} = -\text{¸}(r_1 + r_2)\frac{\partial u^{(j,s-1)}}{\partial \text{¸}} - \text{¸}^{2} r_1 r_2 \frac{\partial u^{(j,s-2)}}{\partial \text{¸}} + r_1 u^{(j,s-1)} +$$

$$+ \text{¸}\, r_1 r_2 u^{(j,s-2)} - \frac{1}{A}\frac{\partial w^{(j,s-1)}}{\partial \text{¶}} - \frac{r_2 \text{¸}}{A}\frac{\partial w^{(j,s-2)}}{\partial \text{¶}} + r_1 \text{¸}\, a_{55}^{(j)} \text{²}_{13}^{(j,s-1)}$$

$$(u, \text{v};\ \ A, B;\ \ r_1 \leftrightarrow r_2;\ \ \text{¶}, \text{¦};\ \ \text{²}_{13}, \text{²}_{23};\ \ a_{55}, a_{44})$$

$$P_{w}^{(j,s-1)} = -\text{¸}(r_1 + r_2)\frac{\partial w^{(j,s-1)}}{\partial \text{¸}} - \text{¸}^{2} r_1 r_2 \frac{\partial w^{(j,s-2)}}{\partial \text{¸}} + r_1 \text{¸}\, a_{13}^{(j)} \text{²}_{11}^{(j,s-1)} +$$

$$+ r_2 \text{¸}\, a_{23}^{(j)} \text{²}_{22}^{(j,s-1)}, \qquad n = \overline{0, s-1};\ q = \overline{0, s-2}$$

$$r_1 = \frac{R}{R_1},\ r_2 = \frac{R}{R_2},\quad \sum\nolimits_{i}^{(j,s)} = a_{i1}^{(j)} \text{²}_{11}^{(j,s)} + a_{i2}^{(j)} \text{²}_{22}^{(j,s)} + a_{i3}^{(j)} \text{²}_{33}^{(j,s)}$$

Используя соотношения (2.3), компоненты тензора напряжений выражаются через $u^{(j,s)}$, $\mathrm{v}^{(j,s)}$, $w^{(j,s)}$:

$$\sigma_{13}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}}\left[\frac{\partial u^{(j,s)}}{\partial \zeta} - P_u^{(j,s-1)}\right], \quad \sigma_{23}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(j)}}\left[\frac{\partial \mathrm{v}^{(j,s)}}{\partial \zeta} - P_{\mathrm{v}}^{(j,s-1)}\right]$$

$$\sigma_{12}^{(j,s)} = P_{1\xi}^{(j,s-1)}, \quad \sigma_{21}^{(s)} = P_{1\xi}^{(j,s-1)} - r_2\zeta\sigma_{21}^{(j,s-1)} + r_1\zeta\sigma_{12}^{(j,s-1)} \qquad (2.5)$$

$$\sigma_{11}^{(j,s)} = \frac{1}{\Delta^{(j)}}\left[\Delta_2^{(j)}\frac{\partial w^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \Delta_{23}^{(j)}P_{2\xi}^{(j,s-1)} + \Delta_1^{(j)}P_{3\xi}^{(j,s-1)} - \Delta_2^{(j)}P_w^{(j,s-1)}\right]$$

$$(11,22,33; \quad \Delta_2,\Delta_3,\Delta_{12}; \quad \Delta_{23},\Delta_1,\Delta_2; \quad \Delta_1,\Delta_{13},\Delta_3)$$

где

$$\Delta_1^{(j)} = a_{13}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{33}^{(j)}a_{12}^{(j)}, \ \Delta_2^{(j)} = a_{12}^{(j)}a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)}a_{13}^{(j)} \qquad (2.6)$$

$$\Delta_3^{(j)} = a_{13}^{(j)}a_{12}^{(j)} - a_{11}^{(j)}a_{23}^{(j)}, \quad \Delta^{(j)} = a_{11}^{(j)}\Delta_{23}^{(j)} + a_{13}^{(j)}\Delta_2^{(j)} + a_{12}^{(j)}\Delta_1^{(j)}$$

$$\Delta_{ik}^{(j)} = a_{ii}^{(j)}a_{kk}^{(j)} - (a_{ik}^{(j)})^2, \quad i,k = 1,2,3;$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{(j)}\mu_{*m}^2 \circ^{(j)} u^{(j,s-m)} = a_{55}^{(j)}P_{6\xi}^{(j,s-1)} + \frac{\partial P_u^{(j,s-1)}}{\partial \zeta}$$

$$n = \overline{0,s}, \ (u,\mathrm{v}; \ a_{55},a_{44}; \ 6\xi,5\xi)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta_{12}^{(j)}}\mu_{*m}^2 \circ^{(j)} w^{(j,s-m)} = F_w^{(j,s-1)} \qquad (2.7)$$

$$F_w^{(j,s-1)} = \frac{1}{\Delta_{12}^{(j)}}\left[\Delta^{(j)}P_{4\xi}^{(j,s-1)} - \Delta_2^{(j)}\frac{\partial P_{2\xi}^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} - \Delta_3^{(j)}\frac{\partial P_{3\xi}^{(j,s-1)}}{\partial \zeta} + \Delta_{12}^{(j)}\frac{\partial P_w^{(j,s-1)}}{\partial \zeta}\right]$$

Решение задачи должно удовлетворять условиям (1.3)-(1.6). Поэтому, учитывая структуру общего решения, для определения величин $\sigma_{mk}^{(j,s)}$, $u^{(j,s)}$, (u,v,w) внутренней задачи из условий (1.3), (1.4), соответственно, будут использованы следующие граничные условия при $\zeta = \zeta_1$:

$$\sigma_{13}^{(I,s)}(\zeta = \zeta_1) = -\sigma_{13b}^{-(I,s)}(\zeta = \zeta_1) \quad (13,23,33) \qquad (2.8)$$

и условия при $\zeta = -\zeta_2$

$$u^{(II,s)}(\zeta = -\zeta_2) = -u_b^{-(II,s)}(\zeta = -\zeta_2) \quad (u,\mathrm{v},w) \qquad (2.9)$$

где $\sigma_{13b}^{-(I,0)} = 0$, $(13,23,33)$, $u^{-(II,0)} = 0, \quad (u,\mathrm{v},w)$.

После построения пограничного слоя определятся величины $2^{-(I,s)}_{mkb}$, $\overline{u}_b^{(II,s)}$ (u, v, w). Они являются известными функциями.

При $s = 0$ система (2.7) превращается в систему из независимых уравнений:

$$\frac{\partial^2 u^{(j,0)}}{\partial \text{¸}^2} + a_{55}^{(j)} \mu_{*0}^{2} \circ^{(j)} u^{(j,0)} = 0 \qquad (u, \mathrm{v}, w;\ a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12}) \quad (2.10)$$

решениями которых являются

$$u^{(j,0)}(\text{¶}, \text{¦}, \text{¸}) = C_1^{(j,0)}(\text{¶}, \text{¦}) \sin\sqrt{a_{55}^{(j)} \circ^{(j)}} \mu_{*0} \text{¸} + C_2^{(j,0)}(\text{¶}, \text{¦}) \cos\sqrt{a_{55}^{(j)} \circ^{(j)}} \mu_{*0} \text{¸}$$

$$(u, \mathrm{v}, w; 1,3,5;\ 2,4,6;\ a_{55}, a_{44}, \Delta / \Delta_{12}) \qquad (2.11)$$

Подставив (2.11) в (2.5) и удовлетворив граничным условиям (1.5), (1.6), (2.8) и (2.9), получаем независимые однородные алгебраические системы относительно неизвестных $C_i^{(j,0)}$. Из условия существования ненулевых решений этих систем вытекают следующие уравнения частот:

$$D_u(\mu_{*0}) = A_u^- \cos(\mu_{*0} B_u^-) - A_u^+ \cos(\mu_{*0} B_u^+) = 0 \qquad (u, \mathrm{v}, w) \qquad (2.12)$$

где

$$A_u^{\pm} = \sqrt{\frac{\circ^{I} a_{55}^{II}}{\circ^{II} a_{55}^{I}}} \pm 1 \qquad (u, \mathrm{v}, \mathrm{w};\ a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)}, \Delta^{(j)} / \Delta_{12}^{(j)})$$

$$B_u^{\pm} = \sqrt{a_{55}^{II} \circ^{II}}\, \text{¸}_2 \pm \sqrt{a_{55}^{I} \circ^{I}}\, \text{¸}_1 \quad (u, \mathrm{v}, \mathrm{w};\ a_{55}^{(j)}, a_{44}^{(j)}, \Delta^{(j)} / \Delta_{12}^{(j)}) \qquad (2.13)$$

Частотам μ_{*n}^{u} и μ_{*n}^{v} соответствуют сдвиговые собственные колебания оболочки, а частотам μ_{*n}^{w} – продольные колебания.

3. О вкладе приближений $s \geq 1$. Решение при $s \geq 1$ будет зависеть от того, какое из значений частот μ_{*0n}^{u}, μ_{*0n}^{v}, μ_{*0n}^{w} взять за основу вычислений, в частности, при решении уравнений (2.7). Необходимо рассмотреть все три случая. При $s \geq 1$ уравнения (2.7) становятся неоднородными.

Рассмотрим приближение $s = 1$. Если $\mu_{*0} = \mu_{*0n}^{u}$, то из соотношений (2.5), (2.11) и граничных условий (1.5), (1.6), (2.8), (2.9) относительно $2_{¥}$, $2_{¥¥}$, V, W следуют равенства

$$\mathrm{v}_{nu}^{(j,0)} = w_{nu}^{(j,0)} = 0,\ 2_{23u}^{(j,0)} = 2_{33u}^{(j,0)} = 2_{12u}^{(j,0)} = 2_{21u}^{(j,0)} = 2_{11u}^{(j,0)} = 2_{22u}^{(j,0)} = 0 \qquad (3.1)$$

так как после удовлетворения указанным граничным условиям, полученные алгебраические системы однородных уравнений будут иметь отличные от нуля определители, в силу того, что $\mu_{*0} = \mu^{u}_{*0n}$ не является решением не выписанных явно уравнений (2.10).

$$\frac{\partial^2 u^{(j,1)}_{nu}}{\partial \text{¸}^{\,2}} + a^{(j)}_{55}(\mu^{u}_{*0n})^2 \circ^{(j)} u^{(j,1)}_{nu} + a^{(j)}_{55}(\mu^{u}_{*1n})^2 \circ^{(j)} u^{(j,0)}_{nu} = F^{(j,0)}_{uu} \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}^{(j,1)}_{nu}}{\partial \text{¸}^{\,2}} + a^{(j)}_{44}(\mu^{u}_{*0n})^2 \circ^{(j)} \mathrm{v}^{(j,1)}_{nu} = 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(j,1)}_{nu}}{\partial \text{¸}^{\,2}} + \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta^{(j)}_{12}}(\mu^{u}_{*0n})^2 \circ^{(j)} w^{(j,1)}_{nu} = F^{(j,0)}_{wu} \qquad (3.4)$$

где

$$F^{(j,0)}_{uu} = -(r_1 + r_2)\frac{\partial u^{(j,0)}_{nu}}{\partial \text{¸}}$$

$$F^{(j,0)}_{wu} = \frac{1}{\Delta^{(j)}_{12}}\left[\Delta^{(j)} P^{(j,0)}_{4²u} - \Delta^{(j)}_{2}\frac{\partial P^{(j,0)}_{2²u}}{\partial \text{¸}} - \Delta^{(j)}_{3}\frac{\partial P^{(j,0)}_{3²u}}{\partial \text{¸}} + \Delta^{(j)}_{12}\frac{\partial P^{(j,0)}_{wu}}{\partial \text{¸}}\right] \qquad (3.5)$$

Из уравнения (3.3), соотношений (2.5) и граничных условий (1.5), (1.6), (2.8), (2.9) следует

$$\mathrm{v}^{(I,1)}_{nu} = \frac{2}{D_u(\mu_{*0})}\Bigg(\bar{\mathrm{v}}^{(II,1)}_{b}(\text{¸} = -\text{¸}_2)\cos\sqrt{a^{I}_{44}\circ^{I}}\,\mu^{u}_{*0n}(\text{¸} - \text{¸}_1) +$$
$$+ \frac{\bar{²}^{(I,1)}_{13b}(\text{¸} = \text{¸}_1)}{2}\sqrt{\frac{a^{I}_{44}}{\circ^{I}}}\left(A^{-}_{\mathrm{v}}\sin K^{-}_{1\mathrm{v}}\mu^{u}_{*0n} + A^{+}_{\mathrm{v}}\sin K^{+}_{1\mathrm{v}}\mu^{u}_{*0n}\right)\Bigg) \qquad (3.6)$$

$$\mathrm{v}^{(II,1)}_{nu} = \frac{2}{D_u(\mu_{*0})}\Bigg(\bar{²}^{(I,1)}_{13b}(\text{¸} = \text{¸}_1)\sqrt{\frac{a^{II}_{44}}{\circ^{II}}}\sin\sqrt{a^{II}_{44}\circ^{II}}\,\mu^{u}_{*0n}(\text{¸} + \text{¸}_2) +$$
$$+ \frac{\bar{\mathrm{v}}^{(II,1)}_{b}(\text{¸} = -\text{¸}_2)}{2}\left(A^{+}_{\mathrm{v}}\cos K^{-}_{2\mathrm{v}}\mu^{u}_{*0n} - A^{-}_{\mathrm{v}}\cos K^{+}_{2\mathrm{v}}\mu^{u}_{*0n}\right)\Bigg)$$

$$K^{\pm}_{1\mathrm{v}} = \sqrt{a^{II}_{44}\circ^{II}}\,\text{¸}_2 \pm \sqrt{a^{I}_{44}\circ^{I}}\,\text{¸}, \quad K^{\pm}_{2\mathrm{v}} = \sqrt{a^{II}_{44}\circ^{II}}\,\text{¸} \pm \sqrt{a^{I}_{44}\circ^{I}}\,\text{¸}_1$$

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$w^{(j,1)}_{nu} = C^{(j,1)}_{5nu}\sin\sqrt{\frac{\Delta^{(j)}\circ^{(j)}}{\Delta^{(j)}_{12}}}\mu^{u}_{*0n}\text{¸} + C^{(j,1)}_{6nu}\cos\sqrt{\frac{\Delta^{(j)}\circ^{(j)}}{\Delta^{(j)}_{12}}}\mu^{u}_{*0n}\text{¸} + w^{(j,1)}_{0u} \qquad (3.7)$$

где $w^{(j,1)}_{0u}$ – частное решение уравнения (3.4). Удовлетворив граничным условиям (1.5),(1.6),(2.8),(2.9) относительно $W, ²_{¥¥}$ и учитывая, что определитель полученной системы отличен от нуля, однозначно определяем неизвестные коэффициенты $C_{5nu}^{(j,1)}$ и $C_{6nu}^{(j,1)}$.

Собственные функции $u_n^{(j,0)}$, соответствующие различным собственным значениям частот, ортогональны с весом $\sqrt{\circ^{j}}$ на интервале $[-¸_2, ¸_1]$ [4].

Функции $u_{nu}^{(j,1)}$ будем искать в виде

$$u_{nu}^{(j,1)}(¶,¦,¸) = \sum b_{nm}^{(j)}(¶,¦) u_{mu}^{(j,0)}{}_{m}(¸) + u^{j*}(¸), \quad j = I, II \tag{3.8}$$

$$u^{1*}(¸) = \frac{-a_{55}^{I}\,2_{13b}^{(I,1)}(¸ = ¸_1)}{2¸_1} ¸^2, \quad u^{2*}(¸) = \frac{-u_b^{(II,1)}(¸ = -¸_2)}{2¸_2} ¸^2$$

Здесь и далее знак суммы означает суммирование от 0 до ∞.

Граничные условия (2.8), (2.9) будут удовлетворены тождественно, а из условий контакта (1.5), (1.6) следует, что

$$b_{nm}^{I} = b_{nm}^{II} = b_{nm} \tag{3.9}$$

Подставим разложения (3.8) в уравнение (3.2). При $j = I$ уравнение умножаем на $u_{ku}^{(I,0)}$ и интегрируем по $¸$ на интервале $[0, ¸_1]$, а при $j = II$ умножаем на $u_{ku}^{(II,0)}$ и интегрируем по $¸$ на интервале $[-¸_2, 0]$. После сложения этих уравнений получим

$$\begin{gathered} b_{nk}((μ_{*0n}^{u})^2 - (μ_{*0k}^{u})^2)\int_{-¸_2}^{¸_1} ·_k ·_k \, d¸ + (μ_{*1n}^{u})^2 \int_{-¸_2}^{¸_1} ·_n ·_k \, d¸ = \\ = \frac{1}{a_{55}^{I}} \int_0^{¸_1} Q_1 u_{ku}^{(I,0)} d¸ + \frac{1}{a_{55}^{II}} \int_{-¸_2}^{0} Q_2 u_{ku}^{(II,0)} d¸ \end{gathered} \tag{3.10}$$

где

$$·_n = \begin{cases} \sqrt{\circ^{I}}\, U_n^{(I,0)}, & 0 \le ¸ \le ¸_1 \\ \sqrt{\circ^{II}}\, U_n^{(II,0)}, & -¸_2 \le ¸ \le 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

$$Q_1 = F_{uu}^{(I,0)} - \frac{\partial^2 u^{1*}}{\partial ¸^2} - a_{55}^{I}(μ_{*0n}^{u})^2 \circ^{I} u^{1*}$$

$$Q_2 = F_{uu}^{(II,0)} - \frac{\partial^2 u^{2*}}{\partial ¸^2} - a_{55}^{II}(μ_{*0n}^{u})^2 \circ^{II} u^{2*}$$

Если $k \ne n$, из соотношения (3.10) однозначно определяются b_{nk}:

$$b_{nk}=\frac{\dfrac{1}{a_{55}^{I}}\displaystyle\int_{0}^{\xi_1}Q_1u_{ku}^{(I,0)}d\xi+\dfrac{1}{a_{55}^{II}}\int_{-\xi_2}^{0}Q_2u_{ku}^{(II,0)}d\xi}{\left((\mu_{*0n}^{u})^2-(\mu_{*0k}^{u})^2\right)\|\varphi_k\|} \tag{3.12}$$

При $k=n$ находим

$$(\mu_{*1n}^{u})^2=\frac{1}{a_{55}^{I}\|\varphi_n\|}\int_{0}^{\xi_1}Q_1u_{nu}^{(I,0)}d\xi+\frac{1}{a_{55}^{II}\|\varphi_n\|}\int_{-\xi_2}^{0}Q_2u_{nu}^{(II,0)}d\xi \tag{3.13}$$

Для определения b_{nn} введем следующую функцию:

$$\varphi_n^{(s)}=\begin{cases}\sqrt{\rho^{I}}\,U_n^{(I,s)}, & 0\le\xi\le\xi_1\\ \sqrt{\rho^{II}}\,U_n^{(II,s)}, & -\xi_2\le\xi\le 0\end{cases}$$

$$\|\varphi_n^{(0)}\|=\|\varphi_n\|=\int_{-\xi_2}^{\xi_1}\varphi_n\varphi_n d\xi \tag{3.14}$$

Нормируя функцию $\Phi_n=\varphi_n^{(0)}+\varepsilon\varphi_n^{(1)}+\cdots$ и ограничиваясь первым приближением, получим [5,6]

$$\|\varphi_n^{(0)}\|^{-1}\int_{-\xi_2}^{\xi_1}(\varphi_n^{(0)}+\varepsilon\varphi_n^{(1)})^2d\xi=1 \tag{3.15}$$

откуда следует

$$b_{nn}=-\frac{\rho^{I}\displaystyle\int_{0}^{\xi_1}u^{1*}u_{nu}^{(I,0)}d\xi+\rho^{II}\int_{-\xi_2}^{0}u^{2*}u_{nu}^{(II,0)}d\xi}{\|\varphi_n\|} \tag{3.16}$$

Случаи $\mu_{*n}=\mu_{*n}^{v}$ и $\mu_{*n}=\mu_{*n}^{w}$ рассматриваются аналогично предыдущему.

Поскольку, согласно формуле (2.12), значения частот при $s=0$ совпадают с соответствующими частотами для ортотропных пластин [4], эффект оболочки, т.е. влияние кривизн поверхности оболочки, проявляется начиная с приближения $s=1$. Отметим, что для ортотропных пластин влияние последующих приближений на значения частот будет порядка ε^2.

Аналогичным образом рассматриваются приближения $s\ge 2$. Однако для приложений они вряд ли будут представлять интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т.70. Вып. 1. С.111-125.
4. Оганесян Р.Ж. Собственные колебания двухслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. //Изв.НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 4. С. 33-44.
5. Nayfeh A. Perturbation Methods. N.Y. etc.: Wiley, 1973 = Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455с.
6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Гулгазарян Лусине Гургеновна

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Института механики НАН Армении
Адрес: пр. М. Баграмяна 24^{б}, 0019, Ереван, Армения
Тел.:(+37491) 30-25-54, (+37410) 52-48-90
E-mail: lusina@mail.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ

Гургенян А.А.
Ереван, Армения

Рассматривается задача об определении нелинейных уравнений коротких волн вблизи слабой ударной волны для стационарного неоднородного потока вокруг тонкого тела в проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. Предполагается, что скорость основного потока больше, чем скорость магнитоакустической волны.

Уравнения движения для этой среды представляют собой квазилинейные гиперболические уравнения:

$$A_{i,j}^{(1)}(\overline{U},\overline{x})\frac{\partial U_j}{\partial x}+A_{i,j}^{(2)}(\overline{U},\overline{x})\frac{\partial U_j}{\partial y}+ \\ +A_{i,j}^{(3)}(\overline{U},\overline{x})\frac{\partial U_j}{\partial z}+B_i(\overline{U},\overline{x})=0 \tag{1.1}$$

где $i,j=1,2...m$, $\overline{x}=\{x,y,z\}$ – радиус-вектор в системе координат, связанный с телом и $\overline{U}=U_j$ – вектор неизвестных функций, определяющих параметры движения.

Если параметры входящего потока $U_j=V(x)$, тогда можно допустить, что за слабой ударной волной, произведенной телом, имеет место $U_j=V_j+u_j$, где u_j,¥ малы, ¥ – характерная величина, пропорциональная толщине тела или углу между вектором скорости входящего потока и касательной плоскости к поверхности тела.

Сохраняя в (1.1) малые величины порядка ¥ , можно получить [1]

$$a_{i,j}^{(k)}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+t_{i,e}u_e=-\frac{\partial A_{i,j}^{(k)}}{\partial V_e}u_e\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \tag{1.2}$$

где $x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z$

$$a_{i,j}^{(k)}=A_{i,j}^{(k)}(\overline{V}\ \overline{x}),\quad t_{i,e}=\frac{\partial A_{i,j}^{(k)}}{\partial V_e}\frac{\partial V_j}{\partial x_k}+\frac{\partial B_i}{\partial V_e}$$

по повторящимся индексам проводится суммирование.

Пусть ²$(x,y,z)=0$ будет уравнением линейной волны. Правая часть уравнения (1.2) вблизи волны нелинейна по отношению к u и того же порядка ¥ , так как $u\frac{\partial u}{\partial ²}\sim u$. Если выразить в (1.2) производные по x_k

через производные по τ и сохранить величины порядка $\frac{\partial u}{\partial {}^2} \sim 1$, можно получить условия совместности на волне линейной задачи

$$a_{i,j}^{(k)}\, u_j \frac{\partial {}^2}{\partial x_k} = 0 \qquad (1.3)$$

Для получения нетривального решения u_j необходимо предположить

$$\Delta = \det a_{i,j}^{(k)} \frac{\partial {}^2}{\partial x_k} = 0 \qquad (1.4)$$

Поскольку второй член в левой части и правая часть уравнения (1.2) порядка $\yen$, возможно выразить все величины u_j через одну из них, например, через u_i.

Затем удобно выбрать $u_i = u$, где u – проекция вектора возмущенной скорости частицы на нормаль волны. Тогда (1.2) перепишется так

$$a_{i,j}{}^{(1)} \frac{\partial u_j}{\partial x} + a_{i,j}{}^{(2)} \frac{\partial u_j}{\partial y} + a_{i,j}{}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial z} = K_i u \frac{\partial u}{\partial {}^2} - T_i u \qquad (1.5)$$

Уравнение (1.4), т.е. $\Delta(\sim, \ \ , {}^2, x, y, z) = 0$ (где $\sim = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\ \ = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\yen = \frac{\partial f}{\partial z}$) является дифференциальным уравнением характерической поверхности $f(x, y, z) = 0$ для линейного оператора в левой части (1.5). Вследствие однородности Δ по $\sim, \ \ , \yen$ следует

$$\sim\Delta_{\sim} + \ \ \Delta\ \ + \yen\Delta_{\yen} = 0 \qquad (1.6)$$

Лучевые уравнения следующие [2]:

$$\frac{dx}{d\pm} = \frac{\partial\Delta}{\partial\sim}, \frac{dy}{d\pm} = \frac{\partial\Delta}{\partial\ \ }, \frac{dz}{d\pm} = \frac{\partial\Delta}{\partial\yen} \qquad (1.7)$$

где $\pm$ – параметр, измеренный вдоль луча.

Удобно выбрать систему прямоугольных криволинейных координат ${}^2, a_1$, a_2, где ^{2} измеряется в нормальном направлении линейной волны, a_i – вдоль лучей.

Рассмотрим ту область вблизи волны, где u существенно зависит не только от ^{2}, но также и от a_1, a_2.

Такие области существуют вблизи линии соприкосновения различных волн, например, волны, исходящие из рабочей кромки тела и точечной волны (или конуса Маха), исходящие из вершины тела (рис.1).

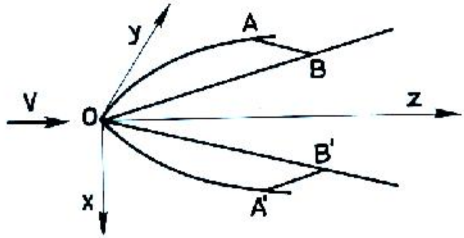


Рис. 1

Для типичного случая можно указать более точные порядки рассматриваемой области: $^2 \sim ¥$, $a_1 \sim 1$, $a_2 \sim ¥^{\frac{1}{2}}$.

Возможно решить формально систему уравнений (1.5) по отношению к $u_1 = u$ и записать уравнение

$$\Delta(p,q,s)u = A_{1,j}(p,q,s)K_j u \frac{\partial u}{\partial ^2} \tag{1.8}$$

где $p = \frac{\partial}{\partial x}$, $q = \frac{\partial}{\partial y}$, $s = \frac{\partial}{\partial z}$ и $\Delta = \det\left(\sim_{i,j}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$ –детерминант матрицы оператора левой части уравнения (1.7) $A_{i,j}$ – коэффициенты элементов $\sim_{i,j}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_k}$. В (1.8) производные низшего порядка не выписаны и это дает нам возможность обращаться с операторами как с числами [3]. Разлагая Δ в ряд Тейлора по степеням малого оператора $\frac{\partial}{\partial a_1}$, $\frac{\partial}{\partial a_2}$, сохраняя в полученном выражении величины первого порядка $\frac{\partial}{\partial a_1}$ и величины второго порядка $\frac{\partial}{\partial a_2}$, а также принимая во внимание (1.6), получим

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial ^2} \right)^{m-2}} = \left(\Delta_{\sim} \frac{\partial a_1}{\partial x} + \Delta \ \frac{\partial a_1}{\partial y} + \Delta_{¥} \frac{\partial a_1}{\partial z} \right) \frac{\partial^2}{\partial ^2 \, \partial a_1} +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Delta_{\sim\sim}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)^2+\Delta\quad\left(\frac{\partial a_2}{\partial y}\right)^2+\Delta_{\text{¥¥}}\left(\frac{\partial a_2}{\partial z}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\Delta_{\sim}\quad\frac{\partial a_2}{\partial x}\frac{\partial a_2}{\partial y}+2\Delta_{\sim,\text{¥}}\frac{\partial a_2}{\partial x}\frac{\partial a_2}{\partial z}+2\Delta\ _{\text{¥}}\frac{\partial a_2}{\partial y}\frac{\partial a_2}{\partial z}\right\}\frac{\partial^2}{\partial a_2^2}+\ldots \qquad (1.9)$$

Можно показать, что при вычислении коэффициента $\frac{\partial^2}{\partial a_2^2}$ в уравнениях произвольной среды возможно сочетать оси x, y, z с осями движущегося триэдра $x_1, x_2 x_3$ с началом, выбранным в некоторой точке $X(x_0, y_0, z_0)$ (рис.2) на линии соприкосновения волн (т. е на линии OB).

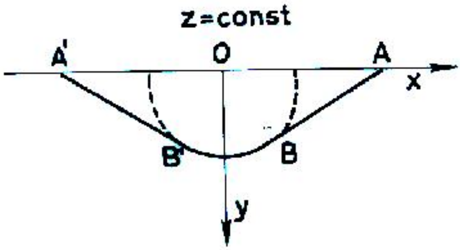


Рис. 2

Для этого выберем оси x, y, z вдоль линий $^{2}, a_1, a_2$, соответственно, $dx = H_1 d^{2}$, $dy = H_2 da_1$, $dz = H_3 da_2$, тогда скобка в (1.9) будет $\frac{\Delta_{yy}}{H_3^2}$. Из (1.8) и (1.9) можно написать уравнение вблизи волны в виде

$$\frac{\Delta}{H_2}\frac{\partial^2 u}{\partial^{2}\partial a_1}+\frac{1}{2}\Delta_{\text{¥¥}}\frac{\partial^2 u}{H_3^2\partial a_2^2}+\ldots=\frac{\partial}{\partial^{2}}A_{1,j}K_j u\frac{\partial u}{\partial^{2}} \qquad (1.10)$$

Для того, чтобы уточнить правую часть уравнения (1.10) и проверить коэффициент производной $\frac{\partial^2}{\partial a_1^2}$, можно написать уравнение характеристики в нелинейной формулировке [4].

$$\overline{V}\mathrm{grad}f + C_n\,|\,\mathrm{grad}f\,| = 0 \qquad (1.11)$$

где $\overline{V}\left(V_x, V_y, V_z\right)$ – вектор скорости частицы, $f = {}^{2} - {}^{2}(a_1, a_2) = 0$ – уравнение нелинейной характеристики, нормальная скорость которой для соответствующей задачи, $C_n = -{}^{3}{}_n, {}^{3}{}_n$ – компонент $\overline{V}$ к нормали характеристической поверхности, а ${}^{2} = 0$ соответствует линейной характеристике.

Допуская, что декартовые координаты x, y, z в уравнении (1.11) соответствуют упомянутым ортогональным координатам ${}^{2}, a_1, a_2$ и принимая во внимание то, что $\frac{\partial {}^{2}}{\partial a_1}, \frac{\partial {}^{2}}{\partial a_2}$ –малые производные, из (1.11) можно получить уравнение первого порядка по τ

$$\frac{1}{H_1}(V_x + u) - V_y \frac{\partial {}^{2}}{H_2 \partial a_1} - {}^{3}{}_z \frac{\partial {}^{2}}{H_3 \partial a_2} + \frac{C_n}{H_1}\sqrt{1 + \left(\frac{H_1 \partial {}^{2}}{H_3 \partial a_2}\right)^2} = 0 \qquad (1.12)$$

Поскольку $\frac{\partial {}^{2}}{\partial a_1} \sim {}^{2}$, величина $\left(\frac{\partial {}^{2}}{\partial a_1}\right)^2$ под квадратным корнем опущена. Более того, в нелинейной задаче можно записать $C_n = c_n + {}^{a}u$, где c_n – нормальная скорость линейной волны и ^{a} – известный коэффициент.

Из уравнения характеристик линейной задачи

$\Delta = 0, \Delta = \sim {}^{3}{}_x + \ {}^{3}{}_y + \yen {}^{3}{}_z + C_n\sqrt{\sim^2 + \ {}^2 + \yen^2}$, можно получить для малых $\sim, \ , \yen$

$$\Delta \ = V_y + \frac{1}{H_1}\frac{\partial C_n}{\partial \ }, \ \Delta_{\yen} = V_z + \frac{1}{H_1}\frac{\partial C_n}{\partial \yen}, \ \Delta_{\yen\yen} = \frac{1}{H_1}\left(H_1^2 C_n + \frac{\partial^2 C_n}{\partial \yen^2}\right)$$

Записывая

$$C_n(\sim, \ , \yen) = C_n(\sim, 0, 0) + \frac{\partial C_n}{\partial \ } \ + \frac{\partial C_n}{\partial \yen}\yen + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_n}{\partial \yen^2}\yen^2 \qquad (1.13)$$

$\ = -\frac{\partial {}^{2}}{H_2 \partial a_1}, \yen = -\frac{\partial {}^{2}}{H_3 \partial a_2}, C_n = (\sim, 0, 0) = -V_x$, используя (1.13) и сравнивая полученные уравнения с уравнением характеристики для (1.10), можно показать, что коэффициент второго слагаемого в (1.10) записан правильно и уточнить правую сторону (1.10).

Конечное нелинейное уравнение вблизи волны можно записать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {}^{2} \partial \pm} + \frac{1}{2}\Delta_{\yen\yen}\frac{\partial^2 u}{H_3^2 \partial \sim_2^2} - \frac{\partial u}{\partial {}^{2}}\frac{d \ln \Phi}{d \pm} = -\frac{\partial}{\partial {}^{2}}\left(\frac{{}^{a} + 1}{H_1} u \frac{\partial u}{\partial {}^{2}}\right) \qquad (1.14)$$

Здесь вместо производных по τ первого порядка, которые не выписаны в

(1.10), появляется дополнительная величина $-\frac{\partial u}{\partial ²}\frac{d\ln\Phi}{\partial \pm}$, где $\Phi(²)$ – амплитуда одномерного линейного решения, или лучевого решения, $\pm$ – независимая переменная, представляющая собой “время пробега” вдоль луча, которое определяется из соотношения [5,6]

$$d\pm = \frac{H_2 da_1}{\Delta}$$

Коэффициент $(ª + 1)$ получается из условий совместности на нелинейной характеристике.

Уравнение (1.14) можно записать также в неортогональных координатах $²,¯,z$. Здесь ось z направлена вдоль входящего потока, в то время как уравнение $² = \mathrm{const}$ дает уравнение точечной волны. А именно, $² = \mathrm{const}$ представляет собой поперечное сечение точечной волны с плоскостью $z = \mathrm{const}$ (фиг. 2). Наконец, $¯ = \mathrm{const}$ дает уравнение луча. Значение $¯$ и $²$ выясняется сравнением с соответствующей нестационарной плоской задачей [1], где t заменяется на z и можно допустить $\sim_1 = a_1(z,²)$, $\sim_2 = a_2(¯,²)$. Тогда уравнение (1.9), (1.14) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \pm} + \frac{1}{2«}\frac{\partial v'}{\partial ²} - u\frac{\partial \ln\Phi}{\partial \pm} = \frac{ª + 1}{H_1}u\frac{\partial u}{\partial ²}, \quad \frac{\partial u}{\partial ¯} = \frac{\partial v'}{\partial ²} \tag{1.15}$$

где

$$« = \Delta_{\sim\sim}\left(\frac{\partial ¯}{\partial x}\right)^2 + \Delta \quad \left(\frac{\partial ¯}{\partial y}\right)^2 + 2\Delta_{\sim} \quad \frac{\partial ¯}{\partial x}\frac{\partial ¯}{\partial y} = -\frac{1}{H_3^2}\frac{″(\sim)\Delta^3\left(\sim^2 + \quad ^2\right)}{\sim\Delta_{\sim} + \quad \Delta}$$

$(\sim)$ определяется из уравнения линейной характеристики, H_3 – коэффициент Ламе по отношению к $¯$ и $dz/d\pm = \sim\Delta_{\sim} + \quad \Delta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Даноян З.Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1969. Т.22. №5.
2. Ieffrey A., Tanutti T., NonIinear wave propagation. 1964, New-York-London.
3. Багдоев А.Г. Уравнения нелинейной вязкотермомагнитоупругой среды вблизи фронтов волн. //Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1974. Т. 27. №1.
4. Kuo Y.V. A simiIarity ruIe for the interaction between a conicaI fieId and a pIane shock. I.Aeronaut. Set. VoI.22, №7, p.504-505, 1955.
5. Багдоев А.Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Ереван: 1967.

6. Минасян М.М. Распространение малых возмущений в магнитной гидродинамике. //Докл.АН Арм.ССР. 1972. Т. IV. №5.
7. Багдоев А.Г. Исследование окрестности волны вблизи особой линии. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1971.Т. 24. №1.
8. LighthiII M.I. Shock»s strength in supersonic “conicaI fieIds»«. PhiIosoph. Mag. v.40 1949.
9. Гургенян А.А. Устранение особенности решения для медленной магнитозвуковой волны с учетом конечной электропроводности. //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1972. Т.25. №4.
10. Zahalak G.I., Myers M.K. CouicaI fIow neer singuIar rays, JonrnaI of fIuid mecshanics 1974. vol 63. №3.
11. Whitham G.B. The behaviour of supersonic flow past o boldy of revolation for from the axis “Proceed Roy. Soc. A 201” 89 (1950).

<u>Сведения об авторе:</u>

Гургенян Альберт Арамович

К.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
теоретической механики ЕрГУАС
Тел.: 24-40-32, (093) 24-17-30

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОГО ДИСКА С ТРЕЩИНАМИ ИЛИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Давтян З.А.

Ереван, Армения

В настоящей работе рассматривается задача определения напряженного состояния круглого диска с произвольным числом трещин или тонких абсолютно жестких включений, расположенных на диаметре диска, находящегося в условиях антиплоской деформации. Обширный класс задач о взаимодействии щелей и включений с массивными телами рассмотрен в [1-4].

1. Пусть упругий круглый диск с диаметром *R* состоит из верхнего и нижнего полудисков, которые имеют разные модули сдвига. Пусть далее круглый диск, отнесенный к полярной системе координат (r,φ) или к правой прямоугольной системе координат *Oxy*, содержит систему трещин, расположенных вдоль оси *Ox*

$$L=\left\{\bigcup_{k=1}^{N}\ \left[a_k\le x\le b_k\right],\quad y=0\right\},\ L'=\left[-R,R\right]\setminus L$$

$$\left(a_{k-1}<b_{k-1}<a_k\,,\quad b_N>a_N\,,\quad k=1,2,3....N\right)$$

берега которых в направлении оси *Oz* загружены касательными нагрузками разных интенсивностей. Предполагается, что под действием таких сил круглый диск находится в условиях антиплоской деформации.

Тогда отличной от нуля будет только компонента перемещений $u\left(r,\varphi\right)$ в направлении оси *Oz*. Требуется определить раскрытие трещин, касательные напряжения вне трещин на линии ее продолжения и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений (КИН).

Аналогичная задача для пространства рассмотрена в работе [5].

Выведем определяющие уравнения поставленной задачи.

С этой целью представим смещение верхнего (+) и нижнего (–) полукруга в виде интегралов

$$\varPhi_{\pm}\left(t,\varphi\right)=\int_0^{\infty}\left[A_{\pm}\left(\lambda\right)\mathrm{sh}\left(\lambda\varphi\right)+B_{\pm}\left(\lambda\right)\mathrm{ch}\left(\lambda\varphi\right)\cos\left(\lambda t\right)d\lambda\right] \tag{1.1}$$

которые удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\varPhi_{+}\Big|_{\varphi=0}-\varPhi_{-}\Big|_{\varphi=0}=V_1\left(t\right)=\begin{cases}\varphi_1\left(t\right), & t\in L\\ 0, & t\in L'\end{cases}$$

$$\varPhi_{+}\Big|_{\varphi=\pi}-\varPhi_{-}\Big|_{\varphi=-\pi}=V_2\left(t\right)=\begin{cases}\varphi_2\left(t\right), & t\in L\\ 0, & t\in L'\end{cases}$$

$$\varphi_1(t)=u_1^+-u_1^-;\qquad \varphi_2(t)=u_2^+-u_2^-$$

$$\mu_+\frac{\partial\Phi_+}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}-\mu_-\frac{\partial\Phi_-}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=T_1(t)=\begin{cases}\psi_1(t), & t\in L\\ 0, & t\in L'\end{cases} \tag{1.2}$$

$$\mu_+\frac{\partial\Phi_+}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\pi}-\mu_-\frac{\partial\Phi_-}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=-\pi}=T_2(t)=\begin{cases}\psi_2(t), & t\in L\\ 0, & t\in L'\end{cases}$$

$$\psi_1(t)=\tau_1^{\,+}-\tau_1^-,\qquad \psi_2(t)=\tau_2^{\,+}-\tau_2^-$$

Здесь введены обозначения: $r=\mathrm{Re}^{-t},u_\pm\left(\mathrm{Re}^{-t},\varphi\right)=\phi_\pm(t,\varphi)$, μ_+ и μ_- – модули сдвига материалов верхнего и нижнего полудисков, $u_i^\pm(t)$ (i=1,2) – смещения граничных точек верхней и нижней полукругов при $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ соответственно, $\tau_i^\pm(t)$ (i=1,2)–заданные касательные нагрузки на берегах трещин.

Подставляя выражение (1.1) в (1.2), для коэффициентов $A_\pm(\lambda)$ и $B_\pm(\lambda)$ получим следующие выражения:

$$A_+(\lambda)=\theta\left(\overline{T_1}(\lambda)\frac{\mathrm{sh}\lambda\pi}{\lambda}+\mu_-\overline{V}_2(\lambda)-\mu_-\overline{V_1}(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\pi\right)$$

$$A_-(\lambda)=\theta\left(\mu_+\overline{V_2}(\lambda)-\overline{T_1}(\lambda)\frac{\mathrm{sh}\lambda\pi}{\lambda}-\mu_+\overline{V_1}(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\pi\right) \tag{1.3}$$

$$B_+(\lambda)=\theta\left(\frac{\overline{T}_2(\lambda)}{\lambda}-\overline{T}_1(\lambda)\frac{\mathrm{ch}\lambda\pi}{\lambda}+\mu_-\overline{V_1}(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\pi\right)$$

$$B_-(\lambda)=\theta\left(\frac{\overline{T_2}(\lambda)}{\lambda}-\overline{T}_2(\lambda)\frac{\mathrm{ch}\lambda\pi}{\lambda}-\mu_+\overline{V_1}(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\pi\right)$$

Здесь $\theta=1/(\mu_++\mu_-)\mathrm{sh}\lambda\pi$, а $\overline{T}_i(\lambda)$, $\overline{V_i}(\lambda)$ (i=1,2) – трансформанты Фурье соответствующих функций.

Теперь используя граничные условия

$$\mu_+\frac{\partial\Phi_+}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}+\mu_-\frac{\partial\Phi_-}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=G_1(t)=\begin{cases}g_1(t), & t\in L\\ \tau(t), & t\in L'\end{cases} \tag{1.4}$$

$$\mu_+\frac{\partial\Phi_+}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\pi}+\mu_-\frac{\partial\Phi_-}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=\pi}=G_2(t)=\begin{cases}g_2(t), & t\in L\\ \tau(t), & t\in L'\end{cases}$$

и учитывая выражения (1.1) и (1.3), а затем перейдя к старым координатам, после несложных преобразований получим следующие интегральные уравнения:

$$\alpha T_1(x) + \beta\int_0^R V_1(u) K_2(u,x)\,du = G_1(x) \quad 0 < x < R \tag{1.5}$$

$$\alpha T_2(x) - \beta\int_0^R V_2(u) K_1(u,x)\,du = G_2(x) \quad -R < x < 0$$

Здесь $$K_1(x,u) = \frac{1}{(u+x)^2} + \frac{x^2}{(ux+R^2)^2}, \quad K_2(x,u) = K_1(-u,x)$$

$$\varphi(u) = \begin{cases} V_2(u), & 0 < u < R \\ V_1(u), & -R < u < 0 \end{cases}, \quad \alpha = \frac{(\mu_+ - \mu_-)}{(\mu_+ + \mu_-)}, \quad \beta = \frac{2\mu_-\mu_+}{\pi(\mu_+ + \mu_-)}$$

Теперь принимая, что $\tau_1^+ = \tau_2^+ = \tau^+$, $\tau_1^- = \tau_2^- = \tau^-$ уравнения (1.5) можно свести к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{1}{u-x} + \frac{1}{u - R^2/x}\right)\varphi'(u)\,du = F(x), \quad -R < x < R \tag{1.6}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in L \\ h(x), & x \in L' \end{cases}, \quad f(x) = \frac{\tau^+}{\mu_+} + \frac{\tau^+}{\mu_-}, \; h(x) = \frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+\mu_-}\tau(x)$$

Рассматривая уравнение (1.6) на системе щелей L, придем к следующему разрешающему интегро-дифференциальному уравнению задачи:

$$\frac{1}{\pi}\int_L\left(\frac{1}{u-x} + \frac{1}{u - R^2/x}\right)\varphi'(u)\,du = f(x) \quad (x \in L) \tag{1.7}$$

которое должно рассматриваться при граничных условиях

$$\varphi(a_k) = \varphi(b_k) = 0, \quad (k = 1, 2 \ldots N) \tag{1.8}$$

выражающих условие непрерывности смещений в концевых точках разрезов.

Рассматривая же (1.6) вне L, т.е. на L', можно определить разрушающие напряжения в зонах стыка полудисков:

$$\frac{\beta}{\pi}\int_L\left(\frac{1}{u-x} + \frac{1}{u - R^2/x}\right)\varphi'(u)\,du = \tau(x), \quad (x \in L') \tag{1.9}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению интегро-дифференциального уравнения (1.7) при граничных условиях (1.8), после чего разрушающие касательные напряжения вне разрезов определяются по формуле (1.9). КИН определяется известным способом [2].

Уравнение (1.7) при условиях (1.8) можно свести к регулярной бесконечной системе алгебраических уравнений при помощи ортогональных многочленов Чебышева.

Отметим, что уравнение (1.6) получено также в работе [7], где намечены пути его точного решения.

Теперь в изложенной выше постановке рассмотрим аналогичную задачу о включениях, когда круглый диск вдоль отрезков $\left[a_к, b_к\right]\left(k=1,2,...N\right)$ на оси *Ox* содержит *N* тонких абсолютно жестких включений.

В этой задаче требуется определить скачок касательных напряжений на системе включений L, а именно функции $\tau_1\left(x\right)=\tau_1^+-\tau_1^-, \tau_2\left(x\right)=\tau_2^+-\tau_2^-$.

В дальнейшем будем считать, что $\tau_1^+=\tau_2^+,\quad \tau_1^-=\tau_2^-$, и положим

$$u\left(x\right)=u_+(x)=u_-(x)\ \ x\notin L,\ u_+\left(x\right)=u_-(x)=u_0(x)\ \ x\in L$$

где $u_0(x)$ – заданная функция.

Сохраняя прежние обозначения, в обсуждаемом случае для вывода разрешающих уравнений поставленной задачи можем записать

$$\mu_+\frac{\partial u_+}{\partial x}=-\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}K(x,u)g_+(u)du\quad -R<x<R \tag{2.1}$$

$$\mu_-\frac{\partial u_-}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}K(x,u)g_-(u)du$$

Здесь $g_\pm\left(u\right)=\begin{cases}\tau_\pm\left(u\right),u\in L\\ \tau(u),u\in L\end{cases}$

Теперь при помощи почленного сложения уравнений (2.2) придем к ключевому интегральному уравнению задачи:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}K(x,u)g(u)du=\tilde{u}(x)\quad -R<x<R \tag{2.2}$$

$$g(u)=g_+(u)-g_-(u)\ \text{ на } L,\ \tilde{u}(x)=\mu_+\frac{\partial u_+}{\partial x}+\mu_-\frac{\partial u_-}{\partial x}$$

Далее, рассматривая интегральное уравнение (2.2) на системе включений, придем к следующему интегральному уравнению задачи:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{L}K(x,u)g(u)du=\mu u_0(x)\quad (x\in L),\quad \mu=\frac{(\mu_++\mu_-)}{\mu_+\mu_-} \tag{2.3}$$

которое должно рассматриваться при условиях

$$\int_{a_k}^{b_k}g(u)du=0,\quad (k=12...N) \tag{2.4}$$

выражающих условия равновесия включений.

Рассматривая же уравнение (2.2) на L, придем к равенству

$$-\frac{1}{\pi}\int_L K(x,u)g(u)du = \mu u(x), \quad (x \in L') \tag{2.5}$$

После того, как найдено решение уравнения (2.3) при условии (2.4), смещение вне включений определится формулой (2.5), а затем можно будет определить остальные механические характеристики задачи. Рассмотрены частные случаи и выяснены основные закономерности изменения характерных механических величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982.
2. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Р. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наукова думка, 1983.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука,1976.
5. Гулян К.Г., Мхитарян Г.Г., Мхитарян С.М. О концентрации напряжений возле щелей или тонких включений в неоднородной среде при антиплоской деформации. //Докл. АН Арм.ССР. 1988. №5.
6. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
7. Шерман Д.И. По поводу одного особого интегрального уравнения и его применения в некоторых задачах теории упругости. //Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1969, №3.

Сведения об авторе:

Давтян Завен Азибекович

К.ф.-м.н., с.н.с. Института механики НАН РА
E-mail: mechins@sci.am

АНТИПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ НА ОДНОМ БЕРЕГУ

Даштоян Л.Л., Акопян Л В.

Ереван, Армения

Рассмотрено антиплоское состояние упругого пространства, содержащего полубесконечную магистральную трещину, перпендикулярно выходящую на один из берегов конечной трещины, другой берег которого жестко защемлен. Выведена ключевая система сингулярных интегральных уравнений и построено ее замкнутое решение.

Пусть упругое пространство ослаблено полубесконечной магистральной трещиной, перпендикулярно выходящей на срединную точку одного из берегов конечной трещины длиной $2a$, другой берег которой жестко защемлен. Считается, что пространство деформируется под воздействием касательных нагрузок $\tau_0(r)$, приложенных в симметричных областях берегов полубесконечной трещины. Требуется определить раскрытие конечной трещины, контактные напряжения в зоне защемления, а также коэффициент интенсивности напряжений в концевой точке горизонтальной трещины.

Ввиду симметрии поставленной задачи относительно оси OY будем рассматривать только правую полуплоскость в полярной системе координат и поставленную задачу сформулируем в виде следующей граничной задачи:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{\theta z}^{(1)}(r,\frac{\alpha}{2})=\tau_0(r) && (0<r<\infty)\\
&W_2(r,-\frac{\alpha}{2})=0 && (0<r<\infty)\\
&\tau_{\theta z}^{(1)}(r,0)=\tau_{\theta z}^{(2)}(r,0) && (a<r<\infty)\\
&W_1(r,o)=W_2(r,o) && (a<r<\infty)\\
&W_2(r,o)=c && (0<r<a)\\
&\tau_{\theta z}^{(2)}(r,o)=0 && (0<r<a)
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

Здесь функции $W_j(r,\theta)$ $(j=1,2)$ – компоненты смещения, соответственно, нижней и верхней четверть-плоскостей, каждая из которых в области своего определения удовлетворяет уравнению Лапласа и с компонентами напряжений $\tau_{\theta z}^{(j)}(r,\theta)$ связаны известными соотношениями:

$$
\tau_{\theta z}^{(j)}(r,\theta)=-\frac{G}{r}\frac{\partial W_j(r,\theta)}{\partial\theta}\qquad (j=1,2) \qquad (1.2)
$$

где G – модуль сдвига пространства.

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение скачки смещений и напряжений, действующих на берегах конечной трещины по формулам

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r,0)-\tau_{\theta z}^{(2)}(r,0)=\tau(r)$$

$$0<r<a \tag{1.3}$$

$$W_1(r,0)-W_2(r,0)=W(r)$$

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу, состоящую из первых четырех условий (1.1) и (1.3). Представляя решения уравнений Лапласа в виде интегралов Меллина [1], получим

$$W_j(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[A_j\sin\theta s+B_j\cos\theta s\right]r^{-s}ds$$

$$\left(-1<Re\ c<0,\quad j=1,2\right)$$

Удовлетворяя указанным условиям, определим неизвестные коэффициенты A_j и B_j $j=1,2$ при помощи неизвестных функций $\tau(r)$ и $W(r)$. Далее, учитывая последние два условия (1.1), для определения функций $\tau(r)$ и $W^{/}(r)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} GW^{/}(r)-\dfrac{G}{\pi r}\displaystyle\int_0^a\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}W^{/}(r_0)dr_0-\dfrac{1}{\pi r}\displaystyle\int_0^a\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0-r}\tau(r_0)dr_0=f_1(r) \\ \\ \tau(r)-\dfrac{1}{\pi r}\displaystyle\int_0^a\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}\tau(r_0)dr_0-\dfrac{G}{\pi r}\displaystyle\int_0^a\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0+r}W^{/}(r_0)dr=-f_2(r) \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь

$$f_1(r)=-\frac{1}{\pi r}\int_L\frac{\sqrt{2r_0r}(r_0-r)}{r_0^2+r^2}\tau_0(r_0)dr_0$$

$$f_2(r)=\frac{1}{\pi r}\int_L\frac{\sqrt{2r_0r}(r_0+r)}{r_0^2+r^2}\tau_0(r_0)dr_0$$

Отметим, что нужно построить те решения системы (1.4), которые ограничены в точке $r=0$ и, кроме того, $W(a)=0$.

Вводя функции $\varphi_{\pm}(r)=\sqrt{r}(GW^{/}(r)\pm\tau(r))$, систему (1.4) можно свести к двум независимым интегральным уравнениям:

$$\cdot_{+}(r)-\frac{1}{\text{®}}\int_0^a \frac{2r_0\,\text{¨}_{+}(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0 = F_+(r) \tag{1.5}$$

$$\cdot_{-}(r)+\frac{1}{\text{®}}\int_0^a \frac{2r_0\,\text{¨}_{+}(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0 = F_-(r) \tag{1.6}$$

$$F_{\pm}(r)=\sqrt{r}\,(f_1(r)\mp f_+(r))$$

Теперь в (1.5) и (1.6) перейдем к новым переменным $r_0^2 = sa^2$, $r^2 = xa^2$.
Тогда, обозначив

$$\cdot_{+}^{*}(x)=\cdot_{+}(a\sqrt{x}), \qquad \cdot_{-}^{*}(x)=\cdot_{-}(a\sqrt{x})/\sqrt{x}$$

$$F_{+}^{*}(x)=F_{+}(a\sqrt{x}), \qquad F_{-}^{*}(x)=F_{-}(a\sqrt{x})/\sqrt{x}$$

придем к следующим интегральным уравнениям:

$$\cdot_{\pm}^{*}(x)\mp\frac{1}{\text{®}}\int_0^1 \frac{\cdot_{\pm}^{*}(s)}{s-x}ds = F_{\pm}^{*}(x) \tag{1.7}$$

Ограниченные в точке $x=0$ решения этих уравнений можно записать в следующем виде [2]:

$$\cdot_{\pm}^{*}(x)=\mp\mu_{\pm}(x)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}F_{\pm}^{*}(x)-\frac{1}{2\text{®}}\int_0^1 \frac{F_{\pm}^{*}(s)-F_{\pm}^{*}(x)}{\mu_{\pm}(s)(s-x)}\right] \tag{1.8}$$

При этом,

$$\mu_{+}(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{3}{4}}, \qquad \mu_{-}(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Перейдя к исходным переменным в (1.8), получим

$$\cdot_{+}(r)=-\mu_{+}^{*}(r)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}F_{+}(r)-\frac{1}{\text{®}}\int_0^a \frac{F_{+}(r_0)-F_{+}(r)}{\mu_{+}^{*}(r_0)(r_0^2-r^2)}r_0dr_0\right] \tag{1.9}$$

$$\cdot_{-}(r)=\mu_{-}^{*}(r)\left[\frac{\sqrt{2r}}{2}F_{-}(r)-\frac{1}{\text{®}}\int_0^a \frac{\sqrt{r}F_{-}(r_0)-\sqrt{r_0}F_{+}(r)}{\mu_{-}^{*}(r_0)(r_0^2-r^2)}\sqrt{r_0r}\,dr_0\right] \tag{1.10}$$

$$\mu_{+}^{*}(r)=\frac{r^{3/2}}{(a^2-r^2)^{3/4}}, \qquad \mu_{-}^{*}(r)=\frac{\sqrt{r}}{(a^2-r^2)^{1/4}}$$

Используя значения функции $\varphi_{\pm}(r)$ из (1.9) – (1.10), для искомых функций $W^{/}(r)$ и $\sigma(r)$ получим выражения

$$W^{/}(r)=\frac{1}{2G}\left\{-\frac{\sqrt{2}rF_{+}(r)}{2(a^2-r^2)^{3/4}}+\frac{\sqrt{2}rF_{-}(r)}{2(a^2-r^2)^{1/4}}+\right.$$

$$+\frac{r}{\pi(a^2-r^2)^{3/4}}\int_0^a\frac{\left[F_{+}(r_0)-F_{+}(r)\right](a^2-r_0^2)^{3/4}}{(r_0^2-r^2)\sqrt{r_0}}dr_0- \qquad (1.11)$$

$$\left.-\frac{\sqrt{r}}{\pi(a^2-r^2)^{1/4}}\int_0^a\frac{\sqrt{r}F_{-}(r_0)-\sqrt{r_0}F_{-}(r)}{\sqrt{r_0}(r_0^2-r^2)}(a^2-r_0^2)^{1/4}dr_0\right\}$$

$$\sigma(r)=-\frac{\sqrt{2}r\left[F_{+}(r)+\sqrt{a^2-r^2}F_{-}(r)\right]}{4(a^2-r^2)^{3/4}}+$$

$$+\frac{r}{2\pi}\int_0^a\frac{\left[F_{+}(r)-F_{-}(r)\right]}{r_0^2-r^2}\left(\frac{a^2-r_0^2}{a^2-r^2}\right)^{3/4}\frac{dr_0}{\sqrt{r_0}}+ \qquad (1.12)$$

$$+\frac{r}{2\pi}\int_0^a\frac{\sqrt{r}F_{-}(r_0)-\sqrt{r_0}F_{-}(r)}{r_0^2-r^2}\left(\frac{a^2-r_0^2}{a^2-r^2}\right)^{1/4}dr_0$$

Учитывая, что $W(a)=0$, функцию $W(r)$ можно представить в виде

$$W(r)=\int_0^r W^{/}(r)dr-\int_0^a W^{/}(r)dr=\int_a^r W^{/}(r)dr$$

$$W(0)=-\int_0^a W^{/}(r)dr$$

Определим контактные напряжения на линии вне трещины. Для этого используем соотношение

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,0)=\sigma_{zz}^{(2)}(r,0)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}GsA_1(S)r^{-s-1}ds=$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^a \frac{\sqrt{rr_0}\,\tau(r_0)}{r_0 + r} + \frac{G}{2\pi r}\int_0^a \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 + r} W^{/}(r_0) - f_2(r) \qquad (1.13)$$

$$(r > a)$$

При помощи функций $\varphi_{\pm}^{*}(x)$ уравнение (1.13) можно записать в следующем виде

$$\tau_{z}^{(j)}(r,0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{r}}\int_0^1 \frac{\varphi_{+}^{*}(s)}{s - \left(\frac{r}{a}\right)^2} ds - \frac{\sqrt{r}}{2\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_{-}^{*}(s)}{s - \left(\frac{r}{a}\right)^2} ds - f_2(r)$$

$$(r > a) \qquad (1.14)$$

Из формул (1.8) нетрудно установить, что в точке $x = 1 \quad (r = a)$ функция $\varphi_{+}^{*}(x)$ имеет особенность порядка $3/4$, а функция $\varphi_{-}^{*}(x)$ – порядка $1/4$. Следовательно, доминирующей является функция $\varphi_{+}^{*}(x)$. Исходя из этого, подставим в (1.14) значения $\varphi_{+}^{*}(x)$.

После некоторых нетрудных математических выкладок получим

$$\tau_{z}^{(j)}(r,0) = -\frac{r}{2\sqrt{2}\pi\left(r^2 - a^2\right)^{3/4}}\int_0^a \frac{\left(a^2 - r_0^2\right)^{3/4} F_{+}^{*}(r_0)}{\sqrt{r_0}\left(r_0^2 - a^2\right)} dr_0 -$$

$$-\frac{\sqrt{r}}{2\pi}\int_0^1 \frac{\varphi_{-}^{*}(s)ds}{s - \left(\frac{r}{a}\right)^2} - f_2(r) \qquad (r > a) \qquad (1.15)$$

При помощи (1.15) для коэффициента интенсивности напряжений в точке $r = a$ получим следующее выражение:

$$K_{III}(a) = \sqrt{2\pi}\lim_{r\to a+0}(r - a)^{3/4}\,\tau_{z}^{(j)}(r,0) =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2a}}{4\sqrt{\pi}}\int_0^a \frac{F_{+}(r_0)dr_0}{\sqrt{r_0}\sqrt[4]{a^2 - r_0^2}} \qquad (1.16)$$

Рассмотрим один частный случай поставленной задачи, когда $\tau(r) = 0$, т.е. когда берега конечной горизонтальной трещины свободны от напряжений. В этом случае ключевое уравнение поставленной задачи имеет следующий вид:

$$\frac{G}{2\pi\sqrt{r}}\int_0^a \frac{\sqrt{r_0}W^{/}(r_0)}{r_0-r}dr_0 = f_2(r) \qquad (0<r<a) \tag{1.17}$$

Решение уравнения (1.17), ограниченное в точке $r=0$, следующее:

$$W^{/}(r) = \frac{2}{\pi G\sqrt{a-r}}\int_0^a \frac{\sqrt{a-r_0}\,f_2(r_0)}{r_0-r}dr_0 \tag{1.18}$$

Используя значение $W^{/}(r)$ из (1.18) для напряжений, действующих на линии вне трещины, получим формулу

$$\tau_{\theta z}^{(j)}(r,0) = -\frac{1}{\pi\sqrt{r-a}}\int_0^a \frac{\sqrt{a-r_0}\,f_2(r_0)}{r_0-r}dr_0$$

Нетрудно вычислить коэффициент интенсивности напряжений в точке $r=a$.

$$K_{III}(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \frac{f_2(\xi)d\xi}{\sqrt{a-\xi}} \tag{1.19}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.

Сведения об авторах:

Даштоян Лилит Левоновна

К.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б
Тел: (+37410) 56-81-89;
E-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна

Младший научный сотрудник Института механики НАН РА

МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНО-ПРОВОДЯЩЕГО УПРУГОГО СЛОЯ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Казарян К.Б., Казарян Р.А.

Ереван, Армения

Задача о распространении периодических волн в упругом слое со свободными границами впервые была решена Рэлеем и Лэмбом [1]. Волны в упругом слое, лежащем на жестком основании, впервые были рассмотрены в [2]. Вопросы магнитоупругих колебаний пластин рассматривались во многих работах, в частности, [3–4]. К недавно опубликованным работам по колебанию тонких тел во внешнем магнитном поле можно отнести работы [5,6].

Рассмотрена задача периодических колебаний в упругом слое $(-\infty < x < \infty,\ -d < y < d)$, заключенном между плоскостями $x_2 = \pm d$, свободными от напряжений. Слой является электропроводящим и находится во внешнем магнитном поле H_0 , направленным вдоль оси x . Рассматривается плоская задача: упругие перемещения и возмущения электромагнитного поля будут независимыми от переменной y .

Математически плоская задача магнитоупругих колебаний слоя во внешнем магнитном поле формулруется следующим образом.

Необходимо найти решения следующих связанных уравнений динамической теории упругости и уравнений Максвелла в области, занимаемой упругим слоем и уравнений Максвелла в среде, окружающей слой.

$$\Delta A = \frac{4\text{®±}}{c^2}\left(\frac{\partial A}{\partial t} - H_0\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + {}^{-}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(1 - {}^{-}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}^2} + {}^{-}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} + \left(1 - {}^{-}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{H_0}{4\text{®°}c_l^2}\Delta A = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}$$

$$\Delta A^{(e)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^{(e)}}{\partial t^2} = 0$$

Индексы $(e) = 1,\ (e) = 2$ относятся к областям $y \ge d,\ y \le -d,$ соответственно.

Здесь $u(x, y, t)$; $\mathrm{v}(x, y, t)$ есть упругие перемещения слоя, $A(x, y, t)$ – потенциал возмущенного электромагнитного поля в слое; $A^{(1)}(x, y, t)$; $A^{(2)}(x\ , y, t)$ – потенциалы возмущенного электромагнитного поля в области $y \ge d,\ y \le -d,$ соответственно.

Физико-механические характеристики материала упругого слоя обозначены следующим образом: $\pm$ – электропроводимость, $^{-} = c_t^2 \big/ c_l^2$, c_t^2 – скорость поперечных упругих волн, c_l^2 – скорость продольных волн, $\circ$ – плотность материала среды, c – электродинамическая постоянная.

На границах раздела $y = \pm d$, свободного от напряжений упругого слоя, и внешней средой, отождествляемой с вакуумом, имеют место граничные условия непрерывности потенциалов возмущенного электромагнитного поля и их производных.

Представляя решение задачи в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси x, решая систему дифференциальных уравнений с учетом граничных условий, получено дисперсионное уравнение относительно фазовой скорости магнитоупругих колебаний.

Для тонкой пластинки в длинноволновом приближении получено соответствующее дисперсионное уравнение.

Для конкретных проводящих материалов получены численные результаты относительно фазовой скорости связанной магнитоупругой волны.

Проведено сравнение с известными результатами, основанных на гипотезе Киргоффа и гипотезе магнитоупругости тонких тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости.–М.: Мир,1975.–872 с.
2. Ишков П.К. О распространении упругих волн в слое, лежащем на жестком основании. Изв. АН СССР.Сер. геофизика,1941,2.
3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин.– М.: Наука, 1977. 272с.
4. Амбарцумян С.А.,Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин.– Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143с.
5. Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В. //Докл.НАН Армении. 2006. Т.106. №3.
6. Belubekyan M., Chazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate , Journal of Applied Mechanics, Transaction ASME, USA, November 2007, Vol. 74. p.1071-1077

<u>Сведения об авторах:</u>

Казарян К.Б.
Д.ф-.м.н.,в.н.с. Института механики НАН Армении
E-mail: ghkarren@gmail.com

Казарян Р.А.
К.ф.-м.н
Институт механики НАН Армении

THE INFLUENCE OF AXIAL TENSION ON THE STRENGTH, CREEPING DEFORMATIONS, AND DISSIPATIVE PROPERTIES OF GLASS-REINFORCED TUBES UNDER THE SHEAR CONDITIONS

Karapetyan K.A.
Yerevan, Armenia

Introduction

It is known that it is possible to use tubular elements from layered and longitudinal-crossly reinforced composites as driving shafts and axles of quickly rotating rotors [1, 2], though such materials badly resist to the shear [3]. Under exploitation these constructions are mainly subjected to shear in the conditions of intensive vibration and the question of increasing their shear strength and damping properties is an actual problem.

The influence of the permanent axial tension on the strength under shear and on the coefficient of the energy relative scattering (logarithmic decrement of damping) of layered tubular elements from polymeric composites is considered.

Experimental

Test samples are tubes with the inside diameter 38 mm, the thickness of the wall 2.25 mm, and the length 285 mm, made on the base of glass cloth impregnated by binder. The directions of the tube longitudinal axis and the base of glass cloth coincided $\left(\ddot{} = 0^\circ\right)$.

The short–term tests of the tubes were conducted by the following procedure. As a preliminary the limits of the samples strength under one-axial tension $\pm_z^*$ and under simple torsion 2–_z^* were determined. Later the tested samples-twins were subjected to the axial tension till the certain level (0.2; 0.4; 0.6 and 0.8 σ_z^*) and keeping this loading unchangeable were lead up to fracture through static application of the torque.

During the creeping tests, the glass-reinforced tubes were loaded by the essential level of torsion torque M_K (0.5,0.6,0.7, and 0.8 2–_z^* correspondingly) and carried out the observations of the changes of shear deformations the dependence on time. The similar tests for tubes preliminary loaded by the axial tension P corresponding 0.6 $\pm_z^*$ were made.

At the investigation of damping properties (coefficient of scattering or dissipation of energy $\cdot$) of tubes the static direct method the essence of which is in building the static hysteresis loop for every cycle of loading–off-loading and conducting the corresponding calculations, was applied.

The calculations were fulfilled on the base of the experimentally obtained dependence between the intensities of shear deformations Γ and tangential stresses T.

The analytic expressions of the denoted values in cylindrical coordinate system have the form of [4]

in case of the simple torsion of the tubes-

$$\mathrm{T} = \left|\tau_{\theta z}\right| \tag{1}$$

$$\Gamma = \left|\gamma_{\theta z}\right| \tag{2}$$

in case of the tubes torsion under permanently acting tension

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\pm_z^2 + 3²_{–z}^2} \tag{3}$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\left(£_z - £_r\right)^2 + \left(£_r - £_–\right)^2 + \left(£_– - £_z\right)^2 + 1.5¥_{–z}^2}{1.5}} \tag{4}$$

In expression (4) $£_r = -¬_1 £_z$, $£_– = -¬_2 £_z$, where the average values of Poisson's ratio $¬_1$ and $¬_2$ for the tested glass-reinforced plastic equal approximately 0.2 and 0.16 correspondingly.

The experimental dependence between T and Γ in the regions of the ascending (→) and descending (←) branches of the hysteresis loop in the frame of the cycle was approximated by following function

$$\overset{\rightleftarrows}{T} = T_L \frac{\Gamma - \Gamma_{res}}{\overset{\rightleftarrows}{a} \pm \overset{\rightleftarrows}{b}\left(\Gamma - \Gamma_{res}\right)} \tag{5}$$

were T_{L} is the limiting value of T, corresponding to the fracture of tested samples, Γ_{res} is the intensity of the residual shear deformations, a and b are the parameters of the approximation.

In the denominator of formula (5) the sign (+) is chosen in case of the convexity of a deformation curve, and the sign (-) is chosen in case of its concavity.

The calculations showed that in here considered cases of tubes experiments the description of the experimental dependences between T and Γ by function (5) is acceptable.

The energy scattering coefficient ψ was calculated by the following formula

$$\cdot = \frac{\Delta W}{W} == 1 - \frac{\overleftarrow{a}\left\{\mp\frac{\left(\Gamma_{amp} - \Gamma_{res}\right)}{\overleftarrow{X}} - \ln\left|1 \mp \frac{\left(\Gamma_{amp} - \Gamma_{res}\right)}{\overleftarrow{X}}\right|\right\}}{\vec{a}\left[\pm\frac{\Gamma_{amp}}{\vec{X}} - \ln\left|1 \pm \frac{\Gamma_{amp}}{\vec{X}}\right|\right]} \tag{6}$$

where ΔW is the value of the energy scattering for a cycle, W is the full deformation energy of the cycle, Γ_{amp} is the amplitude value of the shear deformation intensity, $\vec{\bar{X}} = \vec{\bar{a}} / \vec{\bar{b}}$.

The results of short-term tests are brought in the table 1.

Table 1.

σ_z^i / σ_z^*	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$\tau_{\theta z}^*$, MPa	47,1	50,4	49,5	61,4	53,1

According to the data in the table, with the increase of the level of permanently acting tensile stress the initial increase and further decrease of the shear strength of glass-reinforced plastic tubes take place. The maximum significance of this strength growth reaching more than 30%, is observed in the tubes which are preliminarily loaded by axial tensile stress $0.6\pm_z^*$.

It was also found out that under torsion of tubes, loaded beforehand by axial tension the fracture takes place along elliptical section. With this the largest angle of the inclination of the fracture plane reaches under the axial stress $0.6\pm_z^*$ and composes 13-17°.

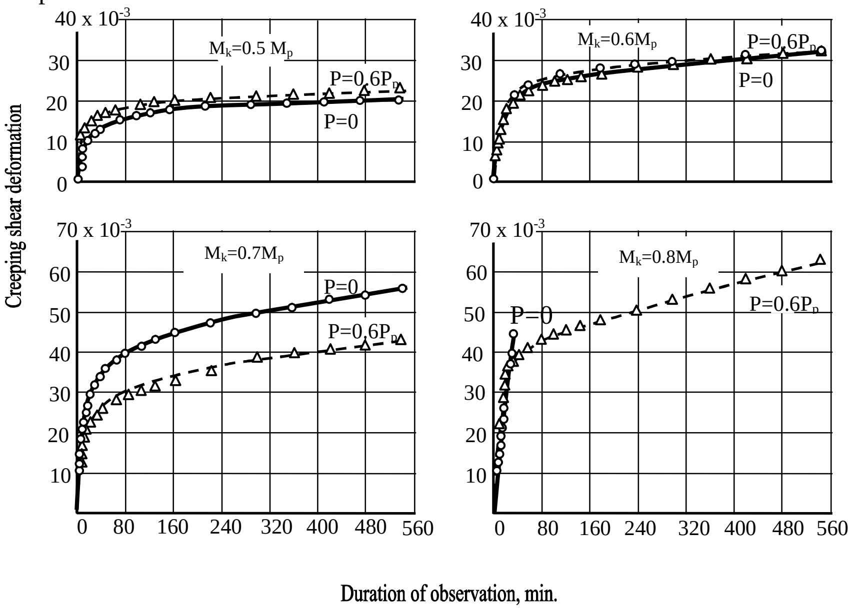


Fig.1 Curves of creeping shear deformations of glass-reinforced tubes

The experimental curves of glass-reinforced tubes' creeping are represented in Fig.1. From the data of fig.1 it follows that in case of simple torsion (P=0) when the value of torsion torque M_K=0.8M_p (M_p- destructive torsion torque) the shear deformations of creeping are developing intensively until the destruction of tubes within 22-33 min. after loading. In case of axial tension (P=0.6P_p) with the above-mentioned value of torsion torque creeping deformations are developing with the significant damping (Fig.1).

From the data of Fig.1 it also follows that the presence of axial tension does not influence the value of creeping shear deformations, in case of the loading of glass-reinforced tubes by the torsion torque $M_K \le 0.6M_p$. In case of $M_K > 0.6M_p$ the presence of axial tension brings to the more significant decrease of value $\tau^c_{\theta z}$.

Curves of intensities changes of amplitude $\left(\Gamma_{amp}\right)$ and residual $\left(\Gamma_{res}\right)$ shear deformations in the frame of the cycle depending on number n of cycle of tube tests under repeated-static torsion (curve 1) and the torsion in the conditions $\sigma_z = 0.6\sigma_z^*$ (curve 2) are represented in Fig.2.

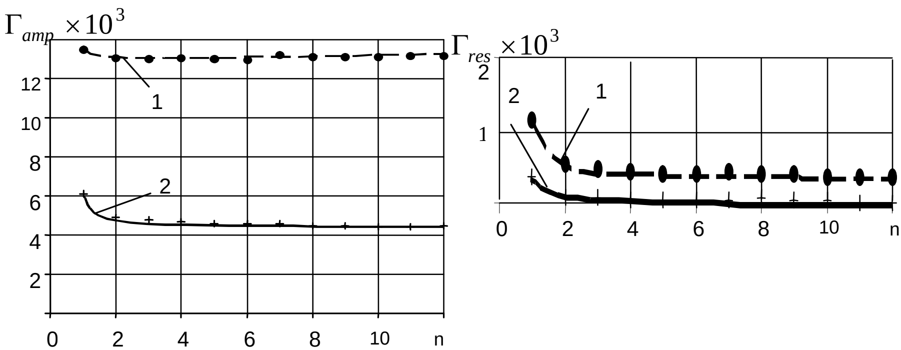


Fig. 2 Curves of changes of amplitude and residual shear deformations.

From the data of Fig. 2 it follows that in case of repeated-static torsion of glass-reinforced plastic tubes, the presence of the permanent torsion brings to essential decrease of values Γ_{amp} and Γ_{res} for the same cycle.

In the Fig.3 the curves of changes of the scattering energy coefficient ψ depending on the number of the loading–off-loading cycle, obtained in the condition of the cyclical pure shear (curve 1) and the shear under the presence of the permanent tension $\sigma_z = 0.6\sigma_z^*$ (curve 2), are brought.

From this figure it follows that when applying the permanent tensile stress $\sigma_z = 0.6\sigma_z^*$, the coefficient of the energy scattering (capacity of damping) of glass-reinforced plastic tubes, subjected to cyclical torsion, is 1.3-1.5 times more than under cyclical pure shear.

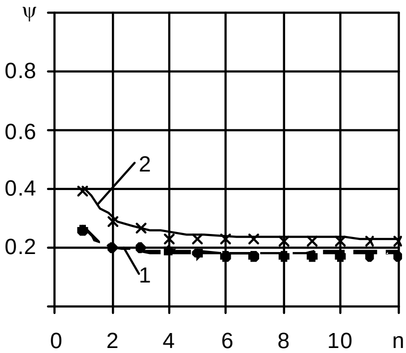


Fig. 3 Change of damping factor

Conclusion

Of the above-indicated experimentally obtained regularities it is possible to come to the conclusion that the shear strength and damping properties of the reinforced composites constructive elements in the form of hollow shafts may be essentially increased by applying additional permanent axial tension.

The constructive solution of this question in the concrete mechanisms may appear very simple.

REFERENCES

1. Authorial testimony of the USSR, No 1419651, 1988, No 32, p. 28
2. Stepanenko N.D. – On rational reinforcing of the constructions of composite materials. *Reports of AN SSSR*, **4** (1989) 878-881.
3. Baltin U.P., Tamough V.P. –Cyclical strength of glass-reinforced plastics under shear in reinforcing plane. *Mechanics of polymers*, **5** (1975) 928-931.
4. Kachanov, L.M. *Bases of the plasticity theory.* Nauka, Moscow (1969)

Information about author:

Karapetyan K. A.

Doctor of Engineering Sciences
Dean of the Laboratory of Experimental Investigations
Institute of Mechanics of NAS of RA
Address:24b Baghramyan, Yerevan, 0019, Armenia
Tel: (37410)524852
E-mail: koryan@mechins.sci.am

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАПИЛЛЯРНОЙ ТРУБКЕ

Карапетян С.Г.
Ереван, Армения

Капиллярность – широко распространенное явление, наблюдаемое в тонких сосудах, почвогрунтах, растениях, организмах.

Процесс капиллярного поднятия связывают с силой поверхностного натяжения, под воздействием которой на поверхности круглого твердого тела образуется мениск. Жидкости, у которых сцепление с твердым телом больше по сравнению со сцеплением молекул самой жидкости, считаются смачивающими, а жидкость, у которых это сцепление меньше – несмачивающими. Поверхность смачивающей жидкости изгибается у стенки твердого тела, поднимаясь вдоль нее в виде вогнутого мениска. Поверхность несмачивающейся жидкости изгибается, опускаясь вдоль стенки в виде выпуклого мениска. Поверхностное натяжение при вогнутом мениске меньше, а при выпуклом больше по сравнению с поверхностным натяжением при плоской поверхности. В связи с этим в тонких сосудах возникает добавочное, капиллярное давление, под воздействием которого жидкость поднимается до определенной высоты $H_к$. Высота капиллярного поднятия определяется эмпирическими формулами, где динамика этого процесса не учитывается.

Капиллярное поднятие связывают и с электромолекулярной силой. При соприкосновении частиц грунта с водой возникают электрическое поле и электромолекулярная сила, поляризующие молекулы воды с образованием диполи, притягивающихся к поверхности минеральных частиц. Электромолекулярные силы связывают молекулы воды, непосредственно окружающие частицы грунта, образуя прочно связанную воду. Этот слой, в свою очередь, связывает прилегающие к ним молекулы воды, образуя рыхло связанную воду. При этом, граница между прочно связанной и рыхло связанной водой трудно проводимая.

Природа капиллярность объясняет и электрохимическим процессом. Считается, что это под воздействием энергии гидратации ионов и молекул на пограничной поверхности твердой и жидкой фаз возникает капиллярная сила.

В настоящей работе делается попытка дать новое объяснение сущности капиллярного процесса и его динамики, основанные на следующих предпосылках.

1. Движение жидкости в капиллярной трубке происходит под воздействием следующих 3-х взаимосвязанных сил: а) силы тяготения $G_{тг}$, возникающейся между массой капиллярной трубки и массы жидкости, удерживающей определенный объем жидкости в капилляре; б) силы тяжести удерживаемой жидкости или гравитационной силы $G_{гв}$, ограничивающей высоту капиллярного подъема на определенном уровне, где силы $G_{тг}$ и $G_{гв}$

уравновешиваются и восходящее движение жидкости прекращается; в) силы внешнего давления $\left(G_{гс} = G_{тг} = G_{гв}\right)$, приводящей в движение связанную жидкость с определенной скоростью.

2. Сила тяготения имеет радиальное направление, противодействуя силам $G_{гв}$ и $G_{гс}$.

3. Перемещение жидкости в капиллярной трубке происходит по двухпорционной модели движения жидкости (ДМДЖ), согласно которой за время перемещения отмеченной поверхности жидкости (ОПЖ) на длину связанного слоя $h_{св,i}/2$ при подаче, поддержке и стекании такого же слоя $\left(h_{св,i}/2 = h_{гс,i}/2 = h_{ст,i}/2\right)$ длина его удваивается, составляя $h_{св,i}$.

Рассмотрим движение жидкости в капиллярной трубке на фоне вышеуказанных предпосылок. Примем, что данная капиллярная трубка удерживает единичный объем жидкости $N_{ож}$ с площадью сечения $F_{о,ж} = 1мм^2 = 10^{-2}1см^2$ и высотой $h_{о,св} = 0.1см$. Масса жидкости равна $M_{ж,i} = 10^{-3} \cdot 1 \cdot F_{j.ж} \cdot h_{о,св} {}^\circ{}_i$, где ${}^\circ{}_i$ – плотность жидкости, г/см^3. Масса заполненной трубки составляет $M_{тр,i} = 10^{-3} \cdot 1 \cdot F_{о,тр} \cdot h_{о,св} \cdot \neg_i$, где $\neg_i$ – объемный вес заполненной трубки г/см^3.

Если в данном капилляре на высоте $h_{о,св}$ удерживается единичный объем жидкости, то это значит, что сила тяготения и гравитации в слое $h_{о,св}$ уравновешиваются и согласно ДМДЖ количество движущейся жидкости в капилляре удваивается. В вертикальном положении трубки первая половина $N_{о,св}/2$ за счет силы тяготения остается в трубке, занимая высоту $h_{о,св}$, а вторая половина $\left(N_{о,ст}/2\right)$ за счет гравитационной силы вытекает из нее. (фиг.1а). При определенном уклоне трубки высота связанной жидкости в капилляре составляет $2h_{о,св}$. Эту высоту получаем и при определенной площади сечения трубки. Для указанных условий можем написать следующее равенство:

$$2N_{о,св} = F_{о,тр} \cdot h_{о,св} + F_{о,тр} \cdot h_{о,ст}, \qquad (1)$$

откуда при $N_{о,св} = N_{о,ст}$ имеем $2N_{о,св} = 2N_{о,ст}$, что видно из фиг. 1б.

Двухкратное увеличение слоя $h_{св,i}$ происходит и при ДМДЖ, согласно которой за определенный промежуток времени с определенной скоростью ОПЖ из плоскости 1-1 перемещается в плоскость 2-2 и из плоскости 2-2 в 3-3.

В наклонном положении капилляра объем связанной жидкости $2F_{о,ж}h_{о,св}$

в (1) удерживается в капилляре, где удельная масса заполненной трубки составляет $M_{уд} = F_{о,ж} h_{о,св} \cdot \neg_i$. С учетом этого условия и равенства (1) можем написать

$$F_{о,св} h_{о,св} \cdot \nu_i = 2F_{св,i} \cdot h_{о,св} \cdot \rho_i + 2F_{ст,i} \cdot h_{о,ст} \rho_i, \tag{2}$$

откуда при $2F_{св,i} = 2F_{ст,i} = F_{о,ж} = F_{о,тр}$ получаем следующее уравнение капиллярного движения жидкости по двухпорционной модели

$$h_{о,св} = \frac{F_{о,ж} \cdot h_{о,св} \left(\neg_i - 2 \circ_i \right)}{2F_{о,тр} \cdot \circ_i} \tag{3}$$

уравнение (3) показывает отношение сил $G_{тг}$ и $G_{гв}$ или массы связанной и стекавшей жидкости в слое h_0, где сила тяготения $\left(G_{тг} = N_{о,св} \left(\neg_i - 2 \circ_i \right) \right) g$ превышает силу гравитации $\left(G_{гв} = N_{о,ст} \circ_i \cdot g \right)$ на соответствующую величину и в капилляре возникает восходящее движение жидкости, прекращающегося на высоте $h_{о,св}$. Обозначим через g ускорение силы тяжести, см/сек^2.

Масса единичного объема жидкости в массе единичного объема заполненной трубки составляет определенную долю, равную

$$W_i = \frac{N_{о,ж} \circ_i}{N_{о,тр} \neg_i} \tag{4}$$

Подставляя значение $\circ_i$ из (4 в (3), получаем аналогичное уравнение капиллярного движения жидкости в виде:

$$h_{о,ст} = \frac{F_{о,ж} h_{о,св} \left(1 - 2W_i \right)}{2F_{о,тр} \cdot W_i} \tag{5}$$

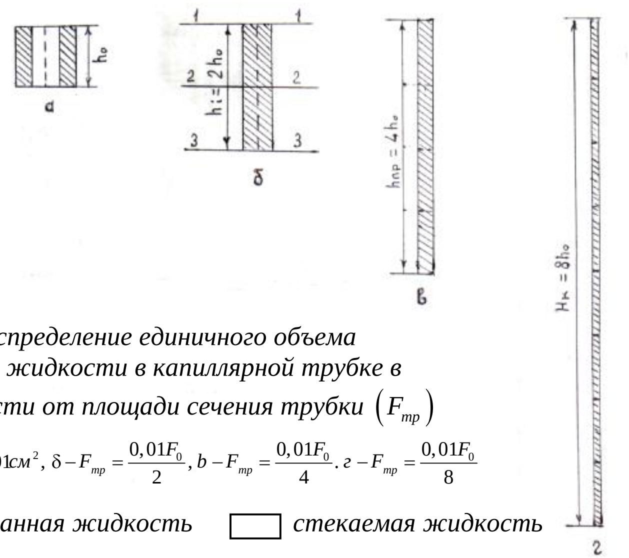
составляющие $\left(\neg_i - 2 \circ_i \right) / \circ_i$ в (3) и $\left(1 - 2W_i \right) / W_i$ в (5) представляют собой коэффициенты капиллярности или коэффициенты фильтрации, определяемые по формулам:

$$K_i = \frac{\neg_i - 2 \circ_i}{\circ_i} \text{ и } K_i = \frac{\neg_i - 2W_i}{W_i} \tag{6}$$

Из (3) и (5) видно, что слой $h_{о,св}$ или $h_{о,ст}$ является предельно минимальным слоем капиллярного подъема, так как процесс однократного перемещения единичного объема жидкости в слое $h_{о,св}$ в вертикальном положении трубки $\left(\mathrm{I}_0 = 1 \right)$ происходит при минимально допустимом значении коэффициента капиллярности, равном единице. При $K_i < 1$ условие $h_{св,i} = h_{ст,i}$ в процессе перемещения ОПЖ на длину $h_{св,i}$ не соблюдается. При условии $K_i < 1$ и $F_{тр,i} = F_{о,тр}$ единичный слой $h_{о,св}$ и $h_{о,ст}$ увеличивается и уравнения (3) и (5) принимают вид:

$$h_{ст,i} = \frac{F_{о,ж} \cdot h_{ст,i}\left(\neg_i - 2^\circ{}_i\right)}{2F_{тр,i} \cdot {}^\circ{}_i} \text{ и } h_{ст,i} = \frac{F_{о,ж} \cdot h_{ст,i}\left(1 - 2W_i\right)}{2F_{тр,i} \cdot W_i} \qquad (7)$$

При определенной площади сечения трубки слой $h_{св,i}$ достигает предельно максимальной величины $\left(h_{пр}\right)$, которая согласно фиг. 1.в составляет:



Фиг. 1 Распределение единичного объема связанной жидкости в капиллярной трубке в зависимости от площади сечения трубки $\left(F_{тр}\right)$

$a - F_{тр} = 0,01 см^2$, $\delta - F_{тр} = \frac{0,01F_0}{2}$, $b - F_{тр} = \frac{0,01F_0}{4}$. $г - F_{тр} = \frac{0,01F_0}{8}$

связанная жидкость *стекаемая жидкость*

$$h_{пр} = 4h_{о,св} \qquad (8)$$

Перемещение ОПЖ на длину $h_{пр}$ приводит к удвоению этого слоя, составляя:

$$H_k = 2h_{пр} = 8h_{о,св} \qquad (9)$$

Предельно максимальные величины $h_{пр}$ и H_k обусловлены максимально допустимыми значениями коэффициента K, так как удвоенная величина W_i

не может превышать объема $F_{о,ж}h_{ст,i}$. Это объясняется тем, что после стекания несвязанной жидкости из объема $F_{о,ж}h_{ст,i}$ в нем остается небольшое количество прочно связанной жидкости, удерживаемой электромолекулярной силой, превышающей силу гравитации.

Перемещение ОПЖ на длину $h_{о,св}$ при таком же гидростатическом давлении $\left(h_{о,сс} = h_{о,св}\right)$ происходит за определенный промежуток времени $\left(t_i\right)$ с определенной скоростью нисходящего движения жидкости. Эту скорость получаем из уравнения (7) при делении его левой и правой частей на t_i.

$$\neg_{нис,i} = \frac{F_{о,ж}\cdot h_{о,гс}\left(\neg_i - 2{}^{\circ}{}_i\right)}{2F_{тр,i}\cdot {}^{\circ}{}_i\cdot t_j} \text{ и } \neg_{нис,i} = \frac{F_{о,ж}\cdot h_{о,гс}\left(1-2W_i\right)}{2F_{тр,i}\cdot W_i\cdot t_j} \qquad (10)$$

Отношение $h_{о,гс}/t_j$ в (10) представляет собой скорость восходящего движения жидкости, которая для предельного слоя $h_{пр}$ с учетом (8) составляет:

$$\mathrm{v}_{вос,j} = \frac{h_{пр}}{4t_i} \qquad (11)$$

Подставляя t_j из (11) в (10), уравнение капиллярного движения жидкости принимает следующий вид:

$$\mathrm{v}_{нис,i} = \frac{2F_{о,ж}\cdot h_{о,гс}\cdot \mathrm{v}_{о,вос}\left(\neg_i - 2{}^{\circ}{}_i\right)}{F_{тр,i}h_{пр}\cdot {}^{\circ}{}_i} \text{ или } \mathrm{v}_{нис,i} = \frac{2F_{о,ж}\cdot h_{о,гв}\cdot \mathrm{v}_{о,вос}\left(1-2W_i\right)}{F_{тр,i}h_{пр}\cdot W_i} \qquad (12)$$

Из (12) видно, что коэффициент капиллярности имеет размерность скорости. В процессе перемещения ОПЖ на длину $h_{о,гс}$ она удваивается и в ней имеет место однократный водообмен с числом кратности $n_0 = 1$. Число кратности водообмена в слое $h_{гс,i} > h_{о,нс}$ будет больше единицы и длина $h_{гс,i}$ составит:

$$h_{гс,i} = n_i h_{о,гс} \qquad (13)$$

где n_i – целые числа, колеблющиеся от 1 до 4. Для указанного условия уравнение (12) с учетом (6) и (13) примет вид:

$$\mathrm{v}_{нис,i} = \frac{4F_{о,ж}\cdot \mathrm{v}_{о,вос} n_i h_{о,гс}\cdot K_i}{F_{тр,i}h_{пр}} \qquad (14)$$

При перемещении ОПЖ на длину $h_{гс,i}$ в ней происходит спад напора на такую же величину и для ДМДЖ имеем следующее необходимое и достаточное условие

$$h_{сп,i} = h_{гс,i} = h_{ст,i} = h_{св,i} \qquad (15)$$

Одновременно отношение $n_i h_{о,гс} / h_р$ в (14) характеризует гидравлический уклон потока в слое $h_{пр}$, равном:

$$I_i = \frac{n_i h_{о,гс}}{h_{пр}} \qquad (16)$$

Если спад напора происходит на длину $h_{о,гс} = 1 см$, то с учетом (8) в (14) получаем отношение $n_i \cdot h_{о,гс} / h_{о,гс}$, которое характеризует обратную величину уклона потока. Тогда на основании (16) можем написать: $1/I_i = n_i h_{о,гс} / h_{о,гс}$, откуда получаем следующую формулу для определения уклона потока в слое $h_{гс,i}$:

$$I_i = \frac{1}{n_i} \qquad (17)$$

уклон потока можно определить и по функции:

$$I_i = \sin\sim = \frac{1}{n_i} \qquad (18)$$

где α –угол наклона капилляра.

Из (14) и (16) получаем следующую формулу для определения скорости нисходящего потока в зависимости от уклона трубки

$$v_{нис,j} = \frac{4F_{о,ж} \cdot v_{о,вос} K_i I_j}{F_{тр,i}} \qquad (19)$$

Подставляя n_i из (17) в (14), получаем следующую формулу для определения скорости восходящего движения жидкости в зависимости от уклона трубки

$$v_{вос,i} = \left(4F_{о,ж} \cdot v_{о,нис} \cdot K_i\right) / F_{тр,i} \cdot I_i \qquad (20)$$

Составляющие $v_{нис} \cdot F_{тр,i}$ и $v_{вос} \cdot F_{тр,i}$ в (19) и (20) представляют собой расходы исходящего и восходящего потоков жидкости в капилляре, определяемые по следующим формулам, соответственно:

$$q_{нис,j} = 4q_{0,вос} \cdot K_i \cdot I_j \qquad (21)$$

$$q_{вос,j} = \left(q_{о,нис} \cdot K_i\right) / I_j \qquad (22)$$

Умножая левую и правую части уравнения (20) на продолжительность перемещения ОПЖ на длину $h_{о,св}(t_i)$ и учитывая условие $v_{о,нис} \cdot t_i = h_{о,гс}$, получаем следующую формулу для определения высоты подъема жидкости в капилляре в зависимости от уклона потока:

$$h_{св,j} = \frac{4F_{0,ж} \cdot h_{о,гс} \cdot K_i}{F_{тр,i} \cdot I_j} \tag{23}$$

Предельная величина подъема жидкости в капилляре $h_{пр}$, где силы $G_{тг}$ и $G_{вг}$ уравновешиваются и движение прекращается, определяется минимальным значением $I_{мин}$ по формуле

$$h_{пр} = \frac{4F_{0,ж} \cdot h_{о,гс} \cdot K_i}{F_{тр,i} \cdot I_{мин}} \tag{24}$$

Высота капиллярного подъема жидкости определяется при $I_{мин}/2$ по формуле:

$$H_K = \frac{8 \cdot F_{0,ж} \cdot h_{о,гв} \cdot K_i}{F_{тр,i} \cdot I_{мин}} \tag{25}$$

Вышеуказанные формулы показывают, что изменение скорости движения жидкости или расхода потока от гидравлического уклона при нисходящем движении происходит по линейному закону, а при восходящем движении–по обратно пропорциональной закономерности. Сущность линейного движения заключается в том, что вытеснение из капилляра доли связанной жидкости $\left(h_{c,i}/h_{пр}\right)$ происходит под воздействием такого же слоя ГСД $\left(h_{гс} = h_{св,i}\right)$ или внешней силы $G_{гс,i}$ в процессе перемещения ОПЖ на длину $h_{св,i}$ за время t_i со скоростью $v_{нис,i}$, или при спаде напора на такую же величину, что приводит к пропорциональному изменению скорости движения жидкости от уклона потока, определяемой отношением $h_{гс,i}/h_{пр}$ или $G_{гс,i}/G_{тг}$.

Восходящее движение жидкости в капилляре обусловлено изменением отношения определенной силы $G_{тг}$ к возрастающей силе $G_{гв}$ в процессе перемещения ОПЖ на высоту $h_{св,i}$ за время t_i со скоростью $v_{вос,i}$, где указанные силы уравновешиваются и движение подъема жидкости прекращается. Отношение $G_{тг}/G_{гв,i}$ или $h_{св}/h_{св,i}$ характеризует обратное. Величина гидравлического уклона и скорость восходящего движения обратно пропорциональны уклону потока.

Как видно из (20) и (23), скорость или высота подъема жидкости в капилляре зависит от произведения $F_{тр,i} \cdot I_i$, которое для данного капилляра определенная величина, характеризующая расход потока или объем связанной жидкости в капилляре. При единичном уклоне и определенной площади сечения трубки или же при единичной площади сечения трубки и определенного его уклона имеем $I_0 F_{тр,i} = F_{0,тр} \cdot I_i$ или $I_i / I_0 = F_{тр,i} / F_{0,тр}$, откуда видно, что высота подъема или объема связанной жидкости в данном капилляре определяется долей единицы этих показателей, представленной параметром W_i в (12). Это значит, что W характеризует капиллярное движение жидкости в зависимости от уклона потока или такого значения площади сечения трубки. Отметим, что в почвегрунтах W показывает долю общей пористости или полной влагоемкости в единичном объеме грунта.

Уравнения (21) и (22) показывают, что при единичном значении $I_0 = 1$ имеем максимально доступный расход нисходящего движения жидкости и минимально допустимый расход восходящего движения $q_{мак}$ обусловлен максимально допустимой величиной $\neg_{мак}$ или минимально допустимым значением $W_{мин}$, поскольку при $\neg_i > \neg_{мак}$ или $W_i > \neg_{мин}$ имеем $v_{нис,i} > v_{нис,мак}$ и в капилляре возникает сила инерции, способствующая увеличению стекаемой жидкости за счет связанной и нарушенной закономерности ДМДЖ. В почвогрунтах условие $v_{нис,i} > v_{нис,мак}$ приводит к перемещению мелких частиц грунта за пределы $h_{св,i}$, где W становится переменной величиной. В этом отношении максимально допустимая скорость или $q_{нис,мак}$ является критерием для определения верхнего предела применимости линейной закономерности движения жидкости в капилляре. Рассматриваемая закономерность имеет и нижний предел применимости, обусловленный минимально допустимой величиной $\neg_{мин}$ или максимально допустимой величиной $W_{мак}$.

В капиллярной трубке с объемным весом $\neg_{мин}$ сила $G_{тг}$ почти отсутствует и после стекания жидкости на стенке трубки остается небольшое количество прочно связанной жидкости, удерживаемой электромолекулярными силами. В тяжёлых грунтах значение W стремится к 50%-му рубежу, но не достигает его, так как кроме наличия прочно связанной влаги, в процессе насыщения глин в них остается защемленный воздух, уменьшающий количество стекаемой жидкости, т.е. в глинах имеем $W_{мак} = 0.5$. Указанное условие определяет нижний предел применимости линейного закона фильтрации.

Достоверность закономерности движения жидкости в капиллярах проверена опытами в почвогрунтах и в капиллярных трубках. На базе рассматриваемого уравнения исследован процесс кровообращения в организме. Предложены расчетные формулы для определения ряда процессов в почвогрунтах и в организме. Сопоставление данных расчетов с данными наших опытов и опубликованных в литературе данными показало удовлетворительные результаты [2] и [3]. Ниже приводятся результаты опытов, проведенных в стеклянной трубке с диаметром 0,83мм или с площадью сечения $F_{тр} = 10^{-3} \cdot 0,54 см^2$ и с коэффициентом капиллярности $K = 0.455 см/сек$ при $\neg_i = 2.455 г/см^3$ и $°_i = 1 г/см^3$, показывающие положительные результаты.

Параметры	Формулы	Расчетные данные				Фактические данные			
I	15	0.25	0.33	0.5	1	0.25	0.33	0.5	1
α^0	–	15	19.5	30	90	15	19.5	30	90
$v_{нис,см/сек}$	19	0.84	1.12	1.68	3.37	0.8 *	1.1 *	1.6 *	3.3 *
$v_{вос,см/сек}$	20	13.48	10.1	6.74	3.37	–	–	6.5	3.3
$h_{св}, см$	23	13.48	10.1	6.74	3.37	13.4	10	6.7	3.3

•) Фактическая продолжительность нисходящего перемещения ОПЖ на длину 3.37 определена при увеличении уклона от последующего значения к предыдущему по средней величине t_i, т.е. в 2 раз больше расчетной, так как постоянное ГСД $h_{гс.i} = h_{св.i}$ уменьшено от 3,37 до нуля.

Применение полученной закономерности капиллярного движения жидкости в областях гидродинамики, физиологии, атмосферы и в технике и технологии различных отраслей позволит по новому решить практические задачи, в чем и заключается научное и практическое ее значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаппель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнолдса. М.: Изд. „Мир”, 1976.
2. Карапетян С.Г. О закономерности движения жидкости в капиллярах. //Биологический журнал Армении. 2007. Т. 59. № 3-4. 2007.
3. Карапетян С.Г. Исследование моделирования кровообращения в организме. //Биологический журнал Армении. 2008.Т.60. №1–2.
4. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехтеориздат, 1952. 676с.
5. Роде А.А. Почвенная влага. М.: Изд. АН СССР, 1952. 456с.
6. Справочное руководство. Гидрогеология. Л.: Гостехтеориздат, 1950. 936с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Карапетян Сос Геворкович
Канд. геолого-минералогических наук
Тел. 42-05-54

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ОТ СТРИНГЕРОВ РАЗЛИЧНЫХ ДЛИН К УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЛИ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВ

Керопян А.В.
Ереван, Армения

В работе рассматриваются задачи для упругих тел, моделированных в виде упругой полуплоскости и бесконечной пластины, которые вдоль линии $y=0$ в плоскости xoy (для пластины xoy ее средняя плоскость) усилены стрингерами в виде тонких упругих накладок, состоящих из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска с одинаковыми упругими характеристиками. Здесь контактное взаимодействие между стрингерами и деформируемыми основаниями во всех участках осуществляется через тонкий слой клея, каждый дифференциальный элемент которого находится в условиях чистого сдвига (с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками). Контактирующая тройка (стрингеры, слой клея, основание) деформируется под действием горизонтальных сил, приложенных к стрингерам.

Для краткого изложения работы в основе постановки задачи в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость, а по ходу ее решения приведены результаты для упругой бесконечной пластины, по возможности, с одинаковыми обозначениями.

§1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E или сдвига G , коэффициент Пуассона ¬) на границе $y=0$ (в плоскости xoy) на участках $|x|<a$ и $|x|>b$ усилена стрингерами малой толщины h и с модулями упругости E_1 . Здесь контакт между стрингерами и деформируемым основанием во всех участках осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k , коэффициент Пуассона $¬_k$ и толщина h_k). Задача заключается в определении контактных напряжений, когда на краях стрингеров, т. е. в точках $x=\pm a$, $x=\pm b$ приложены горизонтальные силы P , а в точках $x=\pm c$ – горизонтальные силы Q ($c>b>a$).

Для стрингеров принимается модель контакта по линии, а для слоя клея– условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингерами действуют только касательные контактные напряжения [1-5].

Согласно вышепринятой модели, из условия равновесия элемента стрингеров и закона Гука получим уравнения равновесия стингеров, которые с помощью обобщенных функций можно записать в виде [1-3]:

$$\frac{dU^{(1)}(x)}{dx}=\frac{T(x)}{E_1h}-\frac{P[\delta(x-a)-\delta(x+a)]}{E_1h}+$$
$$+\frac{P[\delta(x-b)-\delta(x+b)]}{E_1h}-\frac{Q[\delta(x-c)-\delta(x+c)]}{E_1h}\qquad -\infty<x<\infty \tag{1.1}$$

Здесь

$$U^{(1)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x+a)-\theta(x-a)+\theta(x-b)\right]du^{(1)}/dx$$
$$T(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x+a)-\theta(x-a)+\theta(x-b)\right]\tau(x) \tag{1.2}$$

где $u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров, $\tau(x)$ – интенсивность касательных контактных напряжений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная.

В дальнейшем для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями:

$$\bar{f}(\alpha)=F\left[f(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}d\,x$$

$$f(x)=F^{-1}\left[\bar{f}(\alpha)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha$$

Далее, предполагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь условие [1-5] :

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k\tau(x),\ x\in(-\infty,-b]\cup[-a,a]\cup[b,+\infty) \tag{1.3}$$

которое в обобщенных функциях представим так:

$$U^{(1)}(x)=U^{(2)}(x)+kT^{*}(x) \tag{1.4}$$

где $T^{*}(x)=T'(x)+\tau(a)\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]-\tau(b)\left[\delta(x-b)+\delta(x+b)\right]$ $\tau(a)$, $\tau(b)$ – значения $\tau(x)$ в точках $x=a$ и $x=b$ при учете $\tau(-x)=-\tau(x)$, $k=h_k/G_k$, $G_k=E_k/2(1+\nu_k)$, штрих означает дифференцирование по x, $u^{(2)}(x,0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

С другой стороны, деформацию в граничных точах упругой полуплоскости, когда на ее границе $y=0$ действуют только касательные напряжения с интенсивностью $T(x)$, в обобщенных функциях представим в виде

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} = U^{(2)}(x) + G_u(x) = \frac{1}{\text{®}\, A}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{T(s)\,ds}{s-x} \tag{1.5}$$

Здесь

$$U^{(2)}(x) = \left[\text{¯}(-x-b) + \text{¯}(x+a) - \text{¯}(x-a) + \text{¯}(x-b)\right]du^{(2)}/dx$$

$$G_u(x) = [\text{¯}(x+b) - \text{¯}(x+a) + \text{¯}(x-a) - \text{¯}(x-b)]g_u(x)$$

$$g_u(x) = du^{(2)}/dx,\ x \in (-b,-a) \cup (a,b) \tag{1.6}$$

$$A = 2G\left(1 - \text{¡}^{\,2}\right), \qquad \text{¡}^{\,2} = \left(1 - 2\text{¬}\right)/2\left(1 - \text{¬}\right),$$

G – модуль сдвига материала полуплоскости.

При решении задачи для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, в предположении, что стрингеры находятся на поверхности пластины по линии $y = 0$ (xoy – средняя плоскость пластины), в (1.5) следует A заменить на $A^* = 8Gd/b_1^*\left(3 - \text{¬}\right)$, где d – толщина пластины, в (1.1) h следует заменить площадями поперечных сечений стрингеров F, а в (1.4) – k на $k^* = k\big/b_1^*$, b_1^* – ширина стрингеров в контактных участках.

Теперь, применив к (1.1), (1.4) и (1.5) обобщенное преобразование Фурье, получим следующее функциональное уравнение на действительной оси:

$$\begin{gathered}\left(\text{ª}^2 + 2\ \ |\pm| + \pm^2\right)\overline{T}(\pm) = \frac{i\pm}{k}\overline{G}_u(\pm) + 2i\text{ª}^2 P\left(\sin a\pm - \sin b\pm\right) + \\ +2i\text{ª}^2 Q\sin c\pm - 2i\pm^2(a)\cos a\pm + 2i\pm^2(b)\cos b\pm, \quad -\infty < \pm < \infty\end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$\text{ª}^2 = 1\big/kE_1h, \qquad = 1\big/2kA,\ \ \overline{\mathrm{T}}(\pm) = F\left[T(x)\right] \tag{1.8}$$

Для бесконечной пластины в (1.7) ª^2 следует заменить на $\overline{\text{ª}}^2 = 1\big/k^*E_1F$, а на $^* = 1\big/2k^*A^*$.

Таким образом, задачи сведены к решению функциональных уравнений типа (1.7).

§2. Решение функционального уравнения (1.7). Для этой цели определим $\overline{T}(\pm)$ из уравнения (1.7) :

$$\overline{T}(\pm) = \frac{i\pm\,\overline{G}_u(\pm)}{k\left(\text{ª}^2 + 2\ \ |\pm| + \pm^2\right)} + \overline{g}\ \ (\pm),\ -\infty < \pm < \infty \tag{2.1}$$

которое после обратного преобразования Фурье представим в виде

$$T\left(x\right)=-\frac{1}{k}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K'\ (x-s)G_u(s)\,ds+g\ \ (x),\ -\infty<x<\infty \tag{2.2}$$

Здесь

$$K\ \ \left(x\right)=F^{-1}\left[\bar{K}\ \ \left(\pm\right)\right],\ \ T\left(x\right)=F^{-1}\left[\bar{T}\left(\pm\right)\right],\ \ \ G_u\left(x\right)=F^{-1}\left[\bar{G}_u\left(\pm\right)\right]$$

$$\bar{K}\ \ \left(\pm\right)=\frac{1}{ª^2+2\ \ \ \left|\pm\right|+\pm^2},\ \ K'\ \left(x\right)=\frac{1}{2®}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-i\pm e^{-i\pm x}d\pm}{ª^2+2\ \ \ \left|\pm\right|+\pm^2} \tag{2.3}$$

$$g\ \ \left(x\right)=F^{-1}\left[\bar{g}\ \ \left(\pm\right)\right]=Qª^2\left[K\ \ \left(x-c\right)-K\ \ \left(x+c\right)\right]+$$
$$+Pª^2\left[K\ \ \left(x-a\right)-K\ \ \left(x+a\right)+K\ \ \left(x+b\right)-K\ \ \left(x-b\right)\right]+$$
$$+²\left(a\right)\left[K'\ \left(x-a\right)+K'\ \left(x+a\right)\right]-²\left(b\right)\left[K'\ \left(x-b\right)+K'\ \left(x+b\right)\right]$$

Теперь, поскольку $T\left(x\right)=0$ при $x\in\left(-b,-a\right)\cup\left(a,b\right)$, $G_u\left(x\right)=0$ при $x\notin(-b,-a)\cup(a,b)$, $T\left(x\right)=²\left(x\right)$ при $x\in(-a,a)$ и имеют место соотношения $²\left(-x\right)=-²\left(x\right)$, $g_u\left(-x\right)=g_u\left(x\right)$, то из (2.2) будем иметь:

$$\frac{1}{k}\int\limits_a^b[K'\ (x-s)+K'\ (x+s)]g_u(s)\,ds=g\ \ (x)\ ,\quad x\in(a,b) \tag{2.4}$$

и

$$²(x)=-\frac{1}{k}\int\limits_a^b[K'\ (x-s)+K'\ (x+s)]g_u(s)\,ds+g\ \ (x),\quad x\in(-a,a) \tag{2.5}$$

где теперь (2.2) представлено так:

$$T(x)=-\frac{1}{k}\int\limits_a^b[K'\ (x-s)+K'\ (x+s)]g_u(s)\,ds+g\ \ (x),\quad x\in(-\infty,\infty) \tag{2.6}$$

при условиях

$$\int\limits_{-a}^{a}²(s)\,ds=0,\ \ \int\limits_b^{\infty}T(s)\,ds=Q-P \tag{2.7}$$

После определения функции $g_u\left(x\right)$ из интегрального уравнения (2.4), значения $T(x)$ при $\left|x\right|<a$ будут определяться из (2.5), а при $\left|x\right|>b$ –из (2.6), причем значения в точках $x=a$ и $x=b$ будут определяться из (2.5) и (2.6), соответственно, при условии (2.7).

Таким образом, задачи сведены к решению интегрального уравнения (2.4). Для решения (2.4) представим $\bar{K}\ \ \left(\pm\right)$ в виде [3-4]:

$$\bar{K}\ \left(\pm\right)=\frac{1}{\left(b_2-b_1\right)}\left(\frac{1}{b_1+|\pm|}-\frac{1}{b_2+|\pm|}\right)$$

и поскольку

$$K_{b_j}\left(x\right)=F^{-1}\left[\frac{1}{b_j+|\pm|}\right]=\frac{1}{®}\ln\frac{1}{|b_jx|}+R_{b_j}\left(x\right),\quad \left(j=1,2\right)$$

$$K'_{b_j}\left(x\right)=F^{-1}\left[\frac{-i\pm}{b_j+|\pm|}\right]=-\frac{1}{®x}+\frac{b_j}{2}\operatorname{sgn}x+R_{\ \ j}\left(x\right) \tag{2.8}$$

то следовательно будем иметь:

$$K\ \left(x\right)=F^{-1}\left[K\ \left(\pm\right)\right]=\frac{¥}{®}\ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)+¥R\left(x\right)$$

$$K'\ \left(x\right)=-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x+¥R\ \left(x\right) \tag{2.9}$$

где

$$b_1=\frac{a^2}{+\sqrt{\ ^2-a^2}},\quad b_2=\frac{a^2}{-\sqrt{\ ^2-a^2}},\quad ¥=\frac{1}{b_2-b_1}=\frac{1}{2\sqrt{\ ^2-a^2}}$$

$$R\left(x\right)=R_{b_1}\left(x\right)-R_{b_2}\left(x\right),\ R\ \left(x\right)=R_{\ 1}\left(x\right)-R_{\ 2}\left(x\right)$$

$$R_{b_j}\left(x\right)=-\frac{C}{®}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k\left[\frac{\left(b_jx\right)^{2k}}{®\left(2k\right)!}\left(\ln\frac{1}{|b_jx|}+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2k}-C\right)-\frac{|b_jx|^{2k-1}}{2\left(2k-1\right)!}\right]\qquad\left(j=1,2\right)$$

$$R_{\ j}\left(x\right)=b_j\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k\left[\frac{\left(b_jx\right)^{2k-1}}{®\left(2k-1\right)!}\left(\ln\frac{1}{|b_jx|}+1+\ldots+\frac{1}{2k-1}-C\right)+\frac{\left(b_jx\right)^{2k}}{2\left(2k\right)!}\operatorname{sgn}x\right]\quad\left(j=1,2\right)$$

$¢\left(x\right)$ – функция Дирака, C – постоянная Эйлера.

Здесь следует отметить, что в (2.9) функции $R\left(x\right)$ и $R\ \left(x\right)$, характеризующие регулярные части ядер $K\ (x)$ и $K'\ (x)$, обладают тем свойством, что они имеют суммируемые с квадратом производные на отрезках $[-a,a]$ и $[a,b]$.

Из (2.9) следует, что $K\ (x)$ – непрерывная функция, а ее значение в точке $x=0$ конечно, причем $K\ (0)=(¥/®)\ln(b_2/b_1)$. Следовательно, из представления (2.3) и (2.9) следует, что $T(x)$ в точках $x=\pm a$, $x=\pm b$ и $x=\pm c$ имеет конечные значения.

Теперь, используя соотношения (2.9), уравнение (2.4) можно записать в виде

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\left[\operatorname{sgn}(x-s)+1\right]g_u(s)ds+¥\int_a^b\left[R\ (x-s)+R\ (x+s)\right]g_u(s)ds=$$
$$=kg\ (x),\quad x\in(a,b)$$

которое после дифференцирования будет иметь вид

$$g_u(x)-¥\int_a^b\left[R'\ (x-s)+R'\ (x+s)\right]g_u(s)ds=-kg'\ (x),\quad a<x<b \qquad (2.10)$$

Таким образом, задача определения контактных напряжений сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.10), поскольку, как известно [3] :

$$R'\ (x)=R'_{\ 1}\ (x)-R'_{\ 2}\ (x)=\frac{\left(b_2^2-b_1^2\right)}{®}\ln\frac{1}{|x|}+\tilde{R}(x) \qquad (2.11)$$

а также

$$K''(x)=-¢\ (x)+\frac{2}{®}\ln\frac{1}{|x|}+¥\tilde{R}(x) \qquad (2.12)$$

$$\tilde{R}'(x)=\frac{(b_1-b_2)}{2}\operatorname{sgn}x+\overline{R}_2\ (x)$$

$\tilde{R}(x)$ –дифференцируемая функция и вместе с $\overline{R}_2(x)$ определяется как в работе [3], а штрих во всех формулах означает дифференцирование по x.

Интегральное уравнение (2.10) допускает решение методом последовательных приближений при

$$¥\int_a^b\left|R'\ (x-s)+R'\ (x+s)\right|dx<1 \qquad (2.13)$$

Согласно (2.3), (2.9) и (2.12), легко заметить, что $g_u(x)$ в точках $x=a$, $x=b$ имеет логарифмическую особенность.

Далее, как построено решение уравнения (2.10), контактные напряжения при $|x|<a$ будут задаваться формулой (2.5), причем значение в точке $x=a$ получим из (2.5), подставляя $x=a$ с учетом первого условия из (2.7). Определяя вышеуказанным способом $T(x)$ при $|x|<a$, ее значения при $x>b$ будут определяться из (2.6) при требовании $x>b$, причем значение в точке $x=b$ будет определяться из (2.6) при подстановке $x=b$, совместно с вторым условием – из (2.7). Далее, из (2.1) – в силу разложения $\overline{K}\ (\pm)$ при $|\pm|\to 0$, получим, что $T(x)=F^{-1}\left[\overline{T}(\pm)\right]$ при $|x|\to\infty$ имеет степенной порядок $o\left(x^{-3}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керопян А.В. Контактные задачи для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склеенными стрингерами. //Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 2007. №2. С. 35-44.
2. Керопян А.В. Решение контактных задач для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склеенными разнородными стрингерами.// Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №1. С.37-47.
3. Керопян А.В. Об одном классе контактных задач для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склееным упругими разнородными стрингерами. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 2008. №3.
4. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками. // Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С.180-184.
5. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. // Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol. XXIII, 1970, p. 521.

Сведения об авторе:

Керопян Агаси Вачаганович

К.ф.-м.н., доцент кафедры механики ЕГУ
Адрес: ул. А.Манукяна 1
Тел.: 551148(раб.), 461941 (дом)
E-mail: agas50@ysu.am

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ С ИЗЛОМАМИ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Кипиани Г.О., Буксианидзе А.А., Тодуа Н.Н.

Тбилиси, Грузия

Рассматриваются пологие призматические оболочки, составленные из плоских сборных элементов. При соединении краев примыкающих друг к другу пластин не удается обеспечить абсолютное жесткое соединение, способное передавать без потерь изгибающие и крутящие моменты. В результате, напрягаются упруго-сопротивляющиеся повороту цилиндрические шарниры. Методике учета этих упругих шарниров при динамическом расчете системы и посвящена выполненная авторами работа, результаты которой представлены на конференциях.

Система, составленная из плоских элементов, рассматривается как единая пологая оболочка с изломами срединной поверхности.

Разрешающие уравнения задачи о свободных колебаниях примут вид [1]:

$$D\Delta^4 W - \sum_{i=1}^{k} \bar{}_{ai} ¢ \left(x - x_i\right) \frac{\partial^2 ¨}{\partial y^2} - \sum_{j=1}^{k} \bar{}_{bi} ¢ \left(y - y_i\right) \frac{\partial^2 ¨}{\partial x^2} + ph \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 ¨ + \sum_{i=1}^{k} \bar{}_{ai} ¢ \left(x - x_i\right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \sum_{j=1}^{\ell} \bar{}_{bj} ¢ \left(y - y_i\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

Для оболочки с шарнирно-закрепленными краями граничные условия:

$$\textit{при}\ x = 0,\ x = a \quad w = 0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0,\ \mathrm{T}_x = \frac{\partial^2 ¨}{\partial y^2} = 0, \mathrm{T}_{xy} = -\frac{\partial^2 ¨}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\textit{при}\ y = 0,\ y = b \quad w = 0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0,\ \mathrm{T}_y = \frac{\partial^2 ¨}{\partial x^2} = 0, \mathrm{T}_{xy} = -\frac{\partial^2 ¨}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (2)$$

Считая, что свободные колебания оболочки происходят по гармоническому закону с круговой частотой μ_{mn} по формам колебаний m вдоль оси x, и n вдоль оси y, искомые функции $¨(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ представим в виде, удовлетворяющем граничным условиям [2]:

$$W\left(x, y, t\right) = W_{mn} \sin \mu_{mn} t \sin \sim_m x \sin_n y$$

$$¨\left(x, y, t\right) = ¨_{mn} \sin \mu_{mn} t \sin \sim_m x \sin_n y \qquad (3)$$

Применяя метод Бубнова–Галеркина для решения системы дифференциальных уравнений (1), получим однородную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных постоянных w_{mn} и $¨_{mn}$ [2]:

$$D\left(\sim_m^2 + \ {}_n^2\right)^2 W_{mn} + \left(\ {}_n^2 \overset{H}{x} + \sim_m^2 \overset{H}{x}_y\right)\ddot{\ }_{mn} - ph\mu_{mn}^2 W_{mn} = 0$$

$$ph\mu_{mn}^2 \frac{1}{Eh}\left(\sim_m^2 + \ {}_n^2\right)^2 \ddot{\ }_{mn} - \left(\ {}_n^2 \overset{H}{x}_x + \sim_m^2 \overset{H}{x}_y\right) W_{mn} = 0 \qquad (4)$$

Нетривиальное решение системы однородных уравнений возможно при равенстве нулю определителя:

$$ph\mu_{mn}^2 \frac{1}{Eh}\left(\sim_m^2 + \ {}_n^2\right)^2 - \frac{1}{Eh} D\left(\sim_m^2 + \ {}_n^2\right)^4 - \left(\ {}_n^2 \overset{H}{x}_x + \sim_m^2 \overset{H}{x}_y\right)^2 = 0$$

откуда получим квадрат частоты свободных изгибных колебаний прямоугольной в плане пологой оболочки с изломами срединной поверхности в направлениях координатных осей:

$$\mu_{mn}^2 = \frac{1}{ph}\left[D\left(\sim_m^2 + \ {}_n^2\right)^2 + \frac{Eh}{\left(\sim_m^2 + \ {}_n^2\right)^2}\left(\ {}_n^2 \overset{H}{x}_x + \sim_m^2 \overset{H}{x}_y\right)^2\right] \qquad (5)$$

При неограниченном увеличении числа граней складчатой оболочки, когда ее срединная поверхность стремится к поверхности гладкой оболочки, являющейся «опорной» для складчатой, формула (5) в пределе переходит в известную формулу, полученную В.З.Власовым для квадрата частоты свободных колебаний гладкой облочки положительной гауссовой кривизны [3]. На рис.1 показаны зависимости μ_{m1} от числа изломов и волнового числа $m(n=1)$, штриховой линией показан график изменения μ_{1m} для гладкой сферической оболочки, в которую вписаны складчатые оболочки.

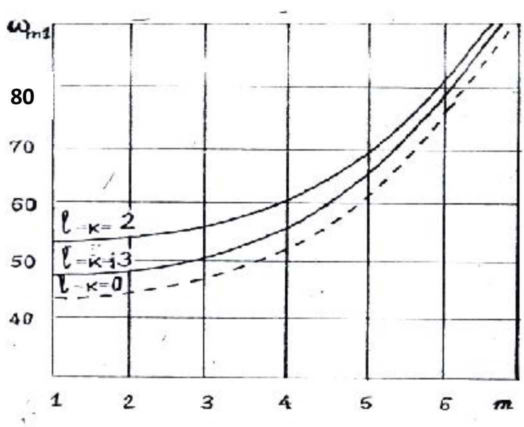


Рис.1. Зависимости частот свободных колебаний квадратных в плане оболочек с изломами срединной поверхности по направлениям координатных осей x и y от количества изломов ℓ и k и от волнового числа m.

Анализ графиков (рис.1) показал, что складчатые оболочки с изломами срединной поверхности являются более жесткими пространственными конструкциями, чем гладкие оболочки. В приведенном примере низшие частоты у складчатых оболочек ($k=\ell=2$) оказались на 19% выше, чем у гладких. При увеличении числа изломов частота свободных колебаний уменьшается и в пределе приближается к частоте колебаний гладкой оболочки, в которую вписаны складчатые оболочки [4]. При увеличении волновых чисел высшие частоты у складчатых и гладких оболочек выравниваются, и, например, при $m=5$ ($k=\ell=2$) разница составляет всего 11%. Линейная задача о малых вынужденных колебаниях пологих оболочек решена на основании введения в систему уравнений движения (1) возмущающей силы, изменяющейся во времени по периодическому закону. Решение задачи методом Бубнова-Галеркина привело к формуле для параметра амплитуды вынужденных установившихся изгибных колебаний w_{mn} для каждой из форм колебаний ($m,n=1,2,3,...$) призматической оболочки:

$$W_{mn}=\frac{1}{ph}\frac{q_{mn}}{\left(\mu_{mn}^2-\Omega^2\right)} \tag{6}$$

где q_{mn} определяется для каждого вида нагружения оболочки μ_{mn}^2 по формуле (5), а частота возбуждения Ω – по заданной характеристике причины возбуждения. Выражение динамического коэффициента для этого типа колебаний имеет вид:

$$A=\frac{W_{mn}}{W_{mn}^{cm}}=\frac{1}{1-\dfrac{\Omega^2}{\mu_{mn}^2}} \tag{7}$$

Для учета демпфирования вводим в уравнение движения (7) силу упругого сопротивления $q=2ph\mu\frac{\partial w}{\partial t}$, где £ – коэффициент демпфирования, определяемый экспериментально. Решение этой задачи привело к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2W_{mn}}{dt^2}+2\pounds\frac{dW_{mn}}{dt}+\mu_{mn}^2W_{mn}=\frac{q_{mn}}{ph}\sin\Omega t \tag{8}$$

решение которого имеет вид:

$$W_{mn}(t)=\ell^{-\pounds t}\left[W_{mn}{}^{\circ}\cos\left(t\sqrt{\mu_{mn}^{2}-\pounds^{2}}\right)+\frac{v^{0}+\pounds W_{mn}^{0}}{\sqrt{\mu_{mn}^{2}-\pounds^{2}}}\sin\left(t\sqrt{\mu_{mn}^{2}-\pounds^{2}}\right)\right]+$$
$$+\frac{q_{mn}}{ph}\frac{\mu_{mn}^{2}-\Omega^{2}}{\left(\mu_{mn}^{2}-\Omega^{2}\right)^{2}+4\pounds^{2}\Omega^{2}}\sin\Omega t-\frac{q_{mn}}{ph}\frac{2\pounds\Omega^{2}}{\left(\mu_{mn}^{2}-\Omega^{2}\right)^{2}+4\pounds^{2}\Omega^{2}}\cos\Omega t \tag{9}$$

Динамический коэффициент вынужденных колебаний демпфированной оболочки, определяемый отношением параметра амплитуды вынужденных колебаний к параметру статического прогиба, определяется выражением:

$$A=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\text{«}^{2}\right)^{2}+K^{2}\text{«}^{2}}} \tag{10}$$

где введены обозначения для отношения частот $\text{«}=\Omega/\mu_{mn}$ и $K=2\pounds/\mu_{mn}$.

Для динамического расчета складчатых оболочек в пределах линейной теории, имеющих различные способы закрепления краев, разработана методика подбора соответствующих заданным граничным условиям аппроксимирующих функций метода Бубнова-Галеркина, основанная на использовании фундаментальных балочных функций В.З.Власова. Приведены примеры использования предложенной методики для различных закреплений краев оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кипиани Г.О., Михайлов Б.К. Свободные колебания тонкостенных систем из плоских элементов с податливими связями // Сб. докладов: “Статика и динамика тонкостенных конструкций”. Тбилиси, 4-8 июня, 1990. С.109-110.
2. Михайлов Б.К., Кипиани Г.О. Деформированность и устойчивость пространственных пластинчатых систем с разрывными параметрами. Санкт-Петербург: Стройиздат СПБ, 1996. 442 с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение к технике М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. Кондратьева Л.Н., Михайлов Б.К. О нелинейных колебаниях складчатой оболочки // XVIII Междун. конф. и “математическое моделирование в механике сплошных сред на основе м. С. 57-58.

<u>Сведения об авторах:</u>

Кипиани Гела Отарович

Д.т.н., профессор Департамента Инженерной Механики Грузинского Технического Университета
Адрес: 0175, Тбилиси, ул. М. Костава, 77
Тел.:(995 32) 34 25 71
E-mail: gelakip@yahoo.com

Буксианидзе Амиран Артемович

Д.т.н, профессор Департамента Инженерной Механики Грузинского Технического Университета
Адрес: 0175, Тбилиси, ул. М. Костава, 77
Тел.: (995 32) 95 67 70
E-mail: gelakip@yahoo.com

Тодуа Нино Николаевна

Докторант
Тел.: (995 32) 63 01 71
E-mail: gng@posta.ge

К УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ КАСАТЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ НАГРУЗОК

Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ереван, Армения

Следуя [3], [4], получаются выражения поправочных коэффициентов, учитывающих влияние изменения поперечных касательных напряжений по толщине цилиндрически ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. Составляются разрешающие уравнения и формулируются основные краевые условия задачи изгиба пластин. Плоская задача не рассматривается, поскольку она ничем не отличается от соответствующей задачи классической теории пластин.

1. В цилиндрических координатах $r, \bar{\ }, z$ рассмотрим ортотропную круглую пластину толщины h, находящуюся под действием произвольных поверхностных нагрузок. В рамках сдвиговой теории первого порядка имеем [2]:

$$u_r = u + z\cdot\ddot{\ }\ ,\ u_{-} = v + z\cdot\cdot\ ,\ u_z = w \qquad (1.1)$$

Здесь u_r, u_{-} и u_z – перемещения точек пластины по направлениям координатных линий $r, \bar{\ }$ и z, соответственно. Через u, v, w обозначены перемещения точек срединной плоскости $z = 0$. Функции $\ddot{\ }$ и $\cdot$ характеризуют положение первоначально нормального элемента пластины после ее деформирования. Разумеется, что этот элемент уже не нормален к срединной поверхности деформированной пластины.

Примем обозначения:

$$R_1 = \frac{R^+ - R^-}{2}, R_2 = R^+ + R^-, \bar{\ }_1 = \frac{\bar{\ }^+ - \bar{\ }^-}{2}, Z_2 = Z^+ + Z^- \qquad (1.2)$$

Здесь $R^-, R^+, \bar{\ }^-, \bar{\ }^+, Z^-, Z^+$ – компоненты поверхностных нагрузок по направлениям $r, \bar{\ }, z$. При этом знак ”+ ”относится к поверхности $z = +\frac{h}{2}$, а знак ”– ” – к поверхности $z = -\frac{h}{2}$.

С учетом геометрически линейных соотношений и соотношений обобщенного закона Гука при (1.1) имеем [1]:

$$e_{rz} = \ddot{\ } + \frac{\partial w}{\partial r},\ e_{-z} = \cdot + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \bar{\ }} \qquad (1.3)$$

$$\pm_r = B_{11}\frac{\partial u}{\partial r} + B_{12}\frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \bar{\ }}\right) + z\left[B_{11}\frac{\partial \ddot{\ }}{\partial r} + B_{12}\frac{1}{r}\left(\ddot{\ } + \frac{\partial \cdot}{\partial \bar{\ }}\right)\right]$$

$$\sigma_\theta = B_{22}\frac{1}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+B_{12}\frac{\partial u}{\partial r}+z\left[B_{12}\frac{\partial\psi}{\partial r}+B_{22}\frac{1}{r}\left(\psi+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$\tau_{r\theta} = B_{66}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right)+B_{66}z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\varphi}{r}\right) \qquad (1.4)$$

Здесь B_{ij} – параметры материала, $e_{rz}, e_{\theta z}$ – деформации поперечных сдвигов, $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ – основные напряжения пластины.

Напряжениям (1.4) соответствуют внутренние моменты:

$$M_r = D_{11}\frac{\partial\psi}{\partial r}+D_{12}\frac{1}{r}\left(\psi+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right),\; M_\theta = D_{12}\frac{\partial\psi}{\partial r}+D_{22}\frac{1}{r}\left(\psi+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

$$M_{r\theta} = D_{66}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\varphi}{r}\right) \qquad (1.5)$$

где $D_{ij} = \frac{B_{ij}h^3}{12}$ – жесткости пластины.

Чтобы составить систему разрешающих уравнений задачи изгиба пластины, необходимо иметь еще и выражения поперечных сил. Следуя [3] и [4], попытаемся эти выражения получить с помощью уравнения виртуальных работ [5].

Имея в виду уравнения равновесия дифференциального элемента сплошной среды [1], заключаем, что напряжениям (1.4) соответствуют поперечные касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$, изменяющиеся по толщине по закону квадратной параболы. Удовлетворив поверхностным условиям

$$\tau_{rz}^{+} = R^{+},\; \tau_{rz}^{-} = -R^{-},\; \tau_{\theta z}^{+} = \Theta^{+},\; \tau_{\theta z}^{-} = -\Theta^{-} \qquad (1.6)$$

и имея в виду, что $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau_{rz}dz = N_r$, $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau_{\theta z}dz = N_\theta$, находим:

$$\tau_{rz} = \frac{3N_r}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)-\frac{R_1}{2}\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right)+\frac{z}{h}R_2$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{3N_\theta}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)-\frac{\Theta_1}{2}\left(1-\frac{12z^2}{h^2}\right)+\frac{z}{h}\Theta_2 \qquad (1.7)$$

Наряду с пластиной, находящейся под действием действительных нагрузок, рассмотрим еще одну такую же пластину, которая при тех же краевых условиях нагружена только единичной силой, приложенной по направлению искомого прогиба действительной пластины. Согласно уравнению виртуальных работ, работа единичной силы на реальном прогибе пластины w равна работе напряжений, вызванных единичной силой, на действительных деформациях. Ради простоты рассмотрим только работы, которые совершают поперечные касательные напряжения

$$\tau_{rz}^{(1)} = \frac{3N_r^{(1)}}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right), \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{3N_\theta^{(1)}}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \tag{1.8}$$

на соответствующих реальных деформациях

$$e_{rz} = \frac{3N_r}{2B_{55}h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{R_1}{2B_{55}}\left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{55}h}R_2$$

$$e_{\theta z} = \frac{3N_\theta}{2B_{44}h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{\Theta_1}{2B_{44}}\left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{44}h}\Theta_2 \tag{1.9}$$

Здесь B_{55} и B_{44} – модули сдвига материала в плоскостях zOr и $zO\theta$, соответственно.

Для этой работы можно написать:

$$\int_v \left\{ \frac{3N_r^{(1)}}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)\left[\frac{3N_r}{2B_{55}h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{R_1}{2B_{55}}\left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{55}h}R_2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3N_\theta^{(1)}}{2h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)\left[\frac{3N_\theta}{2B_{44}h}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{\Theta_1}{2B_{44}}\left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{44}h}\Theta_2\right]\right\} dv \tag{1.10}$$

где v – объем пластины. Интегрируя по толщине пластины, выражение (1.10) можно привести к виду

$$\int_S \left(\frac{N_r^{(1)}N_r}{G_{55}h}K_r + \frac{N_\theta^{(1)}N_\theta}{G_{44}h}K_\theta \right) ds \tag{1.11}$$

Здесь S – площадь срединной плоскости пластины. Коэффициенты K_r и K_θ имеют вид

$$K_r = \frac{6}{5} - \frac{R_1 h}{5N_r}, \quad K_\theta = \frac{6}{5} - \frac{\Theta_1 h}{5N_\theta} \tag{1.12}$$

Заметим, что величины R_2 и Θ_2 не входят в выражения K_r и K_θ. Это и естественно, поскольку они относятся к плоской задаче пластины.

При неучете влияния распределения поперечных касательных напряжений по толщине пластины

$$K_r = K_\theta = 1 \tag{1.13}$$

Следовательно, коэффициенты (1.12) являются поправочными, т.е. учитывают отмеченное влияние.

Так как

$$e_{rz} = \ddot{\ } + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{N_r}{B_{55}h} K_r\,,\ e_{-z} = \cdot\ + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial -} = \frac{N_-}{B_{44}h} K_- \tag{1.14}$$

то с учетом (1.12) для поперечных сил находим:

$$N_r = \frac{5B_{55}h}{6}\left(\ddot{\ } + \frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{R_1 h}{6}\,, N_- = \frac{5B_{44}h}{6}\left(\cdot\ + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial -}\right) + \frac{\bar{\ }_1 h}{6} \tag{1.15}$$

2.Система разрешающих уравнений задачи изгиба пластины в усилиях и моментах имеет вид [1]:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_-}{\partial -} + \frac{1}{r}N_r = -Z_2\,,\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r-}}{\partial -} + \frac{1}{r}\left(M_r - M_-\right) = N_r - hR_1$$

$$\frac{\partial M_{r-}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_-}{\partial -} + \frac{2}{r}M_{r-} = N_- - h\bar{\ }_1 \tag{2.1}$$

Подставив значения моментов (1.5) и поперечных сил (1.15) в (2.1), получим систему разрешающих уравнений задачи изгиба пластины относительно функций $\ddot{\ }$, $\cdot$, w:

$$B_{55}\left(\frac{\partial \ddot{\ }}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) + \frac{B_{44}}{r}\left(\frac{\partial \cdot}{\partial -} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial -^2}\right) + \frac{B_{55}}{r}\left(\ddot{\ } + \frac{\partial w}{\partial r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{6Z_2}{h} + \frac{\partial R_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\ }_1}{\partial -} + \frac{R_1}{r}\right)$$

$$D_{11}\frac{\partial^2 \ddot{\ }}{\partial r^2} + \frac{D_{66}}{r^2}\frac{\partial^2 \ddot{\ }}{\partial -^2} + \frac{D_{12}+D_{66}}{r}\frac{\partial^2 \cdot}{\partial r \partial -} + \frac{D_{11}}{r}\frac{\partial \ddot{\ }}{\partial r} - \frac{D_{22}+D_{66}}{r^2}\frac{\partial \cdot}{\partial -} -$$

$$-\left(\frac{D_{22}}{r^2} + \frac{5}{6}B_{55}h\right)\ddot{\ } - \frac{5}{6}B_{55}h\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{5}{6}hR_1 \tag{2.2}$$

$$\frac{D_{22}}{r^2}\frac{\partial^2 \cdot}{\partial -^2} + D_{66}\frac{\partial^2 \cdot}{\partial r^2} + \frac{D_{12}+D_{66}}{r}\frac{\partial^2 \ddot{\ }}{\partial r \partial -} + \frac{D_{66}}{r}\frac{\partial \cdot}{\partial r} + \frac{D_{22}+D_{66}}{r^2}\frac{\partial \ddot{\ }}{\partial -} -$$

$$\left(\frac{D_{66}}{r^2} + \frac{5}{6}B_{44}h\right)\cdot\ - -\frac{5}{6}B_{44}\frac{h}{r}\frac{\partial w}{\partial -} = -\frac{5}{6}h\bar{\ }_1$$

Система (2.2) имеет шестой порядок, в силу чего на каждом крае пластины необходимо иметь по три краевых условия.

Приведем некоторые, часто встречающиеся условия для края $r = \text{const}$:

а) условия свободного опирания:

$$D_{11}\frac{\partial \ddot{\ }}{\partial r} + D_{12}\frac{1}{r}\left(\ddot{\ } + \frac{\partial \cdot}{\partial -}\right) = 0\,,\ \left(M_r = 0\right)\ \frac{1}{r}\frac{\partial \ddot{\ }}{\partial -} + \frac{\partial \cdot}{\partial r} - \frac{\cdot}{r} = 0$$

$$\left(M_{r-}=0\right),\ 5B_{55}\left(\ddot{}\ +\frac{\partial w}{\partial r}\right)+R_1=0,\ \left(N_r=0\right) \tag{2.3}$$

б) условия шарнирного опирания:

первые два условия совпадают с условиями свободного опирания (2.3). Взамен последнего условия (2.3) следует брать условие $w=0$.

в) условия заделанного края:

$$\ddot{}\ =0,\ \cdot\ =0,\ w=0 \tag{2.4}$$

Возможны и другие условия. Аналогично можно написать условия и для края $\bar{}\ =\text{const}$.

Таким образом, система уравнений (2.2) с соответствующими краевыми условиями позволяет учитывать влияние изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластины при наличии поверхностных касательных нагрузок.

В заключение отметим, что теория, предложенная в [2], не обладает такой возможностью, поскольку эта теория учитывает влияние поперечных сдвигов только посредством поперечных сил N_r и N_{-}. Вследствие чего, в случае действия только касательных поверхностных нагрузок, когда поперечные силы равны нулю, она поправок дать не может.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.:Наука, 1987. 360 с.
2. Васильев В.В. Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
3. Киракосян Р.М. Доклады НАНА. Т.106. №3. С. 245-251.
4. Киракосян Р.М. Доклады НАНА. Т.106. №4. С.304-311.
5. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов.- М.: Мир, 1976. 669с.

Сведения об авторах:

Киракосян Размик Макарович
Д.т.н., главный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^{б}, 0019, Ереван, Армения
Тел.: (+37410)52-48-90

Степанян Сейран Павлович
К.ф.-м.н., доцент кафедры численного анализа и математического моделирования ЕГУ
Адрес: ул. Алека Манукяна1, г.Ереван, Армения
Тел: (+37410)57-51-40 (раб), (+37410) 55-90-96 (дом.)
E-mail: SEYRANSTEP@yahoo.com

О СОВРЕМЕННЫХ ТЕНДЕНЦИЯХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Кукуджанов В.Н.
Москва, Россия

Как было показано в работах автора [1, 2], метод расщепления является одним из наиболее эффективных методов численного-аналитического интегрирования уравнений упругопластических сред как при решении статических, так и динамических задач, при малых упругих и больших пластических деформациях. В настоящей работе рассматривается развитие и обобщения этого метода на большие упругие и большие пластические деформации. Принимается модель гиперупругопластической среды, основанная на мультипликативном разложении тензора градиента перемещения на произведение тензоров градиентов упругой и пластической деформации. Принимается метод расщепления, определяющий уравнения по физическим процессам. Показано, что для гиперупругопластической среды на этапе предиктора интегрируются гиперупругие динамические уравнения, относительно тензора конечных деформаций Альманзи и тензора напряжений Коши. На этапе корректор решается задача релаксации найденного на этапе предиктора упругого напряжения, доказывается, что при этом коротационная производная переходит в материальную, благодаря чему принцип объективности удовлетворяется тождественно и интегрирование уравнений сводится к интегрированию систем уравнений нелинейной релаксации, которая в простых случаях напряженного состояния интегрируется в замкнутом виде. В общем случае гиперупругой анизотропной среды – система линеаризуется и решается численно методом последовательных приближений Ньютона.

Предложенным методом получено решение задачи о схлопывании конической оболочки под действием детонационной волны и образовании кумулятивной струи. Решение получено с использованием подвижной эйлеровой-лагранжевой сетки [3].

1. Определяющие уравнения гиперупругопластической среды

В теории упругости рассматриваются гипо- и гиперупругие среды. Для гипоупругого тела обратимость деформаций имеет место только в малом. При больших деформациях процессы, происходящие в таком теле, необратимы – появляются гистерезисные потери, т.е. среда диссипативна [2]. Для описания среды, в которой происходят обратимые процессы при больших деформациях (резиноподобные и другие материалы органической природы), используется гиперупругая модель, имеющая потенциал напряжений. Это замечание справедливо и для моделей, в которых гипоупругое тело является составным элементом.

Приведем описанный алгоритм со строгим доказательством сделанных утверждений.

Примем *гипотезу аддитивности упругой и пластической скорости деформаций*

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}^e+\mathbf{L}^p \qquad (1)$$

где $\mathbf{L}=\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ – тензор скорости полной деформации, $\mathbf{F}=\partial\vec{x}/\partial\vec{x}_0$ – тензор градиента перемещений, $\mathbf{L}=\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}$ и $\mathbf{L}^p$ – тензор скоростей упругой и пластической деформации, которые определяются на основе гипотезы о мультипликативном разложении тензора градиента перемещения

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}\mathbf{P} \qquad (2)$$

Пусть $\mathbf{L}^p$ удовлетворяет ассоциированному закону пластического течения при условии пластичности Мизеса

$$\mathbf{L}^p=\frac{D}{Dt}\mathbf{A}^p=\frac{d\Lambda}{dt}\mathbf{s}$$

где $\mathbf{A}^p$ – пластическая составляющая тензора Альманзи, D/Dt – объективная производная, независящая от вращения частицы как жесткого целого.

В качестве объективной производной тензора пластической деформации примем коротационную производную

$$\frac{D\mathbf{A}^p}{Dt}=\frac{d}{dt}\mathbf{A}^p+\mathbf{A}^p\mathbf{L}_R+\mathbf{L}_R\mathbf{A}^p,\quad \mathbf{L}_R=\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1},\quad \mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U} \qquad (3)$$

где $\mathbf{U}$ – правый тензор чистой деформации, $\mathbf{R}$ – ортогональный тензор вращения частицы, $\dot{\mathbf{R}}$ – его материальная производная. Тензор $\mathbf{F}$ вычисляется по полю скоростей интегрированием уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{x_i^{n+1}-x_i^n}{\Delta t}=з_i^{n+1/2}$$

после чего находим тензор Альманзи

$$\mathbf{A}^{n+1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}\right)^{n+1}$$

Предиктор. Применяем расщепление к уравнению (1). Полагаем $\mathbf{L}_R=\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}=0$, следовательно $\dot{\mathbf{P}}=0$, поэтому $\mathbf{P}^{n+1}=\mathbf{P}^n$.

$$\mathbf{F}^{n+1}=\tilde{\mathbf{E}}^{n+1}\mathbf{P}^n,\quad \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}=\mathbf{F}^{n+1}\left(\mathbf{P}^n\right)^{-1}$$

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}^e\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{E}}^{-T}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{I}-\left(\mathbf{P}^n\right)^{-T}\left(\tilde{\mathbf{F}}^{n+1}\right)^{-T}\left(\tilde{\mathbf{F}}^{n+1}\right)\left(\mathbf{P}^n\right)\right]$$

Для определения тензора $\tilde{\mathbf{E}}^{n+1}$ решаем упругую динамическую задачу одним из известных методов по явной схеме и напряжение $\tilde{\sigma}$ определяется из гиперупругого закона

$$\left(\tilde{\pm}^{e}\right)^{n+1} = \left(\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial \mathbf{A}^{e}}\right)^{n+1} \qquad (4)$$

Корректор. На этапе корректор необходимо провести корректировку напряжений, вычисленных на основе гиперупругих зависимостей (4).

На основании расщепления на этапе корректор $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = 0$, откуда

$$\dot{\mathbf{F}} = 0\,, \quad \dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} = 0\,, \quad \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^{-1} = 0 \qquad (5)$$

где $\mathbf{R}$ – ортогональный, а $\mathbf{U}$ – симметричный тензор.

Докажем теорему, что $\mathbf{L}_R = 0$ и $D/Dt \equiv d/dt$. Теорема: В процессе релаксации напряжения объективная производная эквивалентна материальной производной

Доказательство. Из (5) следует, что $\mathbf{L}_R = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = 0$. Докажем, что $\mathbf{L}_R$ - кососимметричый тензор:

$$\mathbf{L}_R = \left(\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}\right)^{T} = \mathbf{R}^{-T}\dot{\mathbf{R}}^{-T} = \mathbf{R}\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{\cdot} = -\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = -\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}$$

Тензор $\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}$ – симметричный, т.к. $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{T}$ и $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-T}$

$$\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\right)^{\bullet} = \mathbf{U}^{-T}\dot{\mathbf{U}}^{-T} = \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}$$

Перестановочность тензоров $\dot{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{U}^{-1}$ доказывается дифференцированием тождества $\left(\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}\right)^{\bullet} = 0$:

$$\mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} = 0$$

Тогда из уравнения (5) следует, что симметричный тензор равен кососимметричному и, следовательно,

$$\mathbf{L}_R = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = 0$$

и объективная производная равняется материальной.

$$\frac{D\pm}{Dt} = \frac{d\pm}{dt} = \frac{d^2\Phi}{d\left(\mathbf{A}^{e}\right)^2}\frac{d\mathbf{A}^{e}}{dt} = \frac{d^2\Phi}{d\left(\mathbf{A}^{e}\right)^2}\mathbf{L}^{e} = -\frac{d^2\Phi}{d\left(\mathbf{A}^{e}\right)^2}\mathbf{L}^{p} = -\frac{d^2\Phi}{d\left(\mathbf{A}^{e}\right)^2}\frac{d\Lambda}{dt}\pm \qquad (6)$$

Т.к. для гиперупругого тела существует потенциал

$$£^{e} = \frac{\partial\Phi^{-1}(\pm)}{\partial\pm}$$

то в уравнение (6) правая часть есть функция только тензора напряжений

$$d^2\Phi = «(\pm)\left(d\mathbf{A}^{e}\right)^2 \qquad (7)$$

и уравнение (6) описывает релаксацию напряженного состояния среды.

Для анизотропного гиперупругого тела уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{d\pm_{ij}}{d\Lambda} = -\text{«}_{ijkl}(\pm)\pm_{kl}\,. \tag{8}$$

При простых напряженных состояниях для изотропного случая система уравнений может быть проинтегрирована в замкнутом виде так же просто, как в случае малых упругих деформаций. В общем случае анизотропной упругости система уравнений релаксации (7) теперь не распадается на отдельные уравнения и приходится решать систему нелинейных тензорных уравнений релаксации совместно с уравнением для внутренних переменных ¡_i итерационным методом Ньютона

$$\begin{cases} \dfrac{d\pm_{ij}}{d\Lambda} = \dfrac{d^2\Phi}{\left(d\mathbf{A}^e\right)^2}\pm_{ij} = \text{«}_{ijkl}(\pm)\pm_{kl} \\ \dfrac{d\text{¡}_i}{d\Lambda} = f_i\left(\text{¡}_i, \pm_{ij}\right) \end{cases} \tag{9}$$

Система интегрируется численно по локально-неявной схеме и на каждом шаге находим $\Delta\Lambda$ итерационным методом из совместного решения (9) с условием пластичности.

В традиционном способе решения $\Delta\Lambda$ предварительно исключается из продифференцированного условия пластичности и ассоциированного закона, он приводит к существенно большим затратам на решение тех же задач.

$$\begin{cases} \dfrac{\pm_{ij}^{n+1} - \pm_{ij}^{n}}{\Delta\Lambda} = \text{«}_{ijkl}\left(\pm_{ij}^{n}\right)\pm_{kl}^{n+1} \\ \dfrac{\text{¡}_i^{n+1} - \text{¡}_i^{n}}{\Delta\Lambda} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial \pm_{kl}}\right)^n \pm_{kl}^{n+1} + \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial \text{¡}_k}\right)^n \text{¡}_k^{n+1} \end{cases}$$

2. Деформирование металлической облицовки кумулятивного заряда.

Рассмотрим в качестве примера задачу об образовании кумулятивной струи, имеющей важные практические приложения. Расчет схлопывания металлических облицовок заряда взрывчатого вещества (ВВ) под действием продуктов детонации проводится обычно на основе стационарной гидродинамической теории формирования кумулятивной струи . Интегральные параметры кумулятивной струи определяются в рамках гидродинамической модели с достаточной для приложений степенью точности. Иначе обстоит дело с расчетом напряженного состояния облицовки и струи. Стационарная гидродинамическая модель не позволяет рассчитать завершающие стадии формирования струи. Существуют также такие режимы деформирования, для которых неприменима модель идеальной жидкости. Это относится, например, к массивным оболочкам зарядов ВВ.

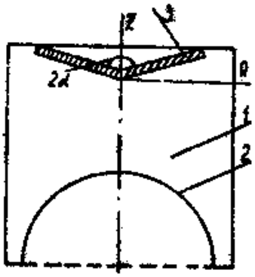


Рис. 1. Схема кумулятивного заряда

В данной работе процессы кумуляции в осесимметричных конических и сферических облицовках рассматриваются на основе уравнений динамики упругопластической среды с конечными деформациями.

Схема кумулятивного заряда с металлической облицовкой приведена на рис. 1. По цилиндрическому заряду ВВ I с постоянной скоростью D распространяется детонационная волна 2, которая в некоторый момент времени достигает конической облицовки 3. Под действием давления, создаваемого продуктами детонации ВВ, облицовка деформируется. Известно [4, 5], что при этом в зависимости от параметров облицовки возможны следующие основные режимы кумуляции: а) схлопывание облицовки с образованием высокоскоростной кумулятивной струи; б) интенсивное натекание материала на ось с формированием из облицовки высокоскоростного элемента; в) выворачивание облицовки без выраженного кумулятивного эффекта. Этот режим деформирования характерен для процессов обработки деталей импульсным давлением: штамповка взрывом, сварка взрывом.

В данной работе все перечисленные режимы рассматриваются в рамках следующей постановки задачи. Вдоль внешней криволинейной образующей осесимметричной облицовки с переменной скоростью, определяемой геометрией задачи, распространяется осесимметричный импульс давления заданной формы. Форма импульса давления должна определяться из решения газодинамической задачи о разлете продуктов детонации ВВ. Расчеты показывают, что удовлетворительные результаты могут быть получены при определении формы импульса давления на основе решения одномерной задачи о взаимодействии детонационной волны с преградой [6].

На внутренней поверхности облицовки вектор напряжений равен нулю. В начальный момент времени облицовка свободна от напряжений. Деформирование облицовки рассматривается без учета малости толщины облицовки.

Принималось, что детонационная волна сферическая, максимум давления $p_{\max}$ на фронте импульса давления постоянен. Характер падения давления в каждой точке образующей облицовки за фронтом выбирался, исходя из решения одномерной задачи взаимодействия детонационной волны с преградой

$$p(t) = p_{\max}\left[t^{*}/\left(t_p + t\right)\right]^3$$

где t^*, t_p – характерные времена разгрузки, зависящие от расстояния от вершины конуса.

Расчеты выполнены для различных конфигураций облицовок. Некоторые результаты, иллюстрирующие режимы кумуляции, представлены на рис. 2-3 и в таблице. Параметры модельного заряда взяты из работы [7], диаметр заряда принят равным $1.25D_0$, D_0 – диаметр облицовки, $h/L = 0.05$ – отношение толщины к длине образующей.

На рисунках отдельной стрелкой дан масштаб скорости, c_1 – продольная ско-
рость звука, $t_0 = h/c_1$ – время пробега звуковой волны по толщине h недеформированной облицовки. Вектор скорости в граничных точках изображен стрелками в выбранном масштабе в системе отсчета, связанной с центром масс облицовки, V_{z0} – скорость движения центра масс.

В случае угла раствора конуса $70^\circ < \sim < 90^\circ$ кумуляция практически отсутствует. Во всей облицовке имеют место значительные растягивающие напряжения, которые могут вызвать разрушение облицовки в процессе ее деформирования. В облицовках при $45^\circ < \sim < 70^\circ$ рис. 2 наблюдается интенсивное натекание материала на ось с формированием кумулятивной струи и обратного потока [5]. В облицовке с $\sim = 60^\circ$ появляются значительные растягивающие напряжения вдоль образующей на периферии облицовки, которые могут вызвать разрушения с образованием “юбки”. При $\sim \leq 45^\circ$

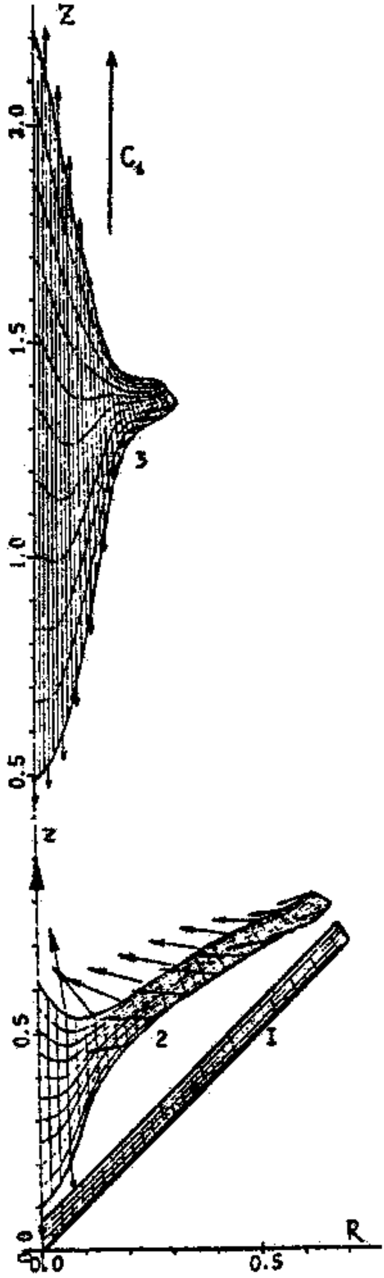


Рис. 2

образуется кумулятивная струя (рис. 2), в которой наблюдаются растягивающие напряжения вдоль оси облицовки, которые могут вызвать разрушение формируемой кумулятивной струи. Координатная сетка на рисунках соответствует разностной адаптирующейся подвижной эйлерово-лагранжевой сетке, на которой проводились расчеты.

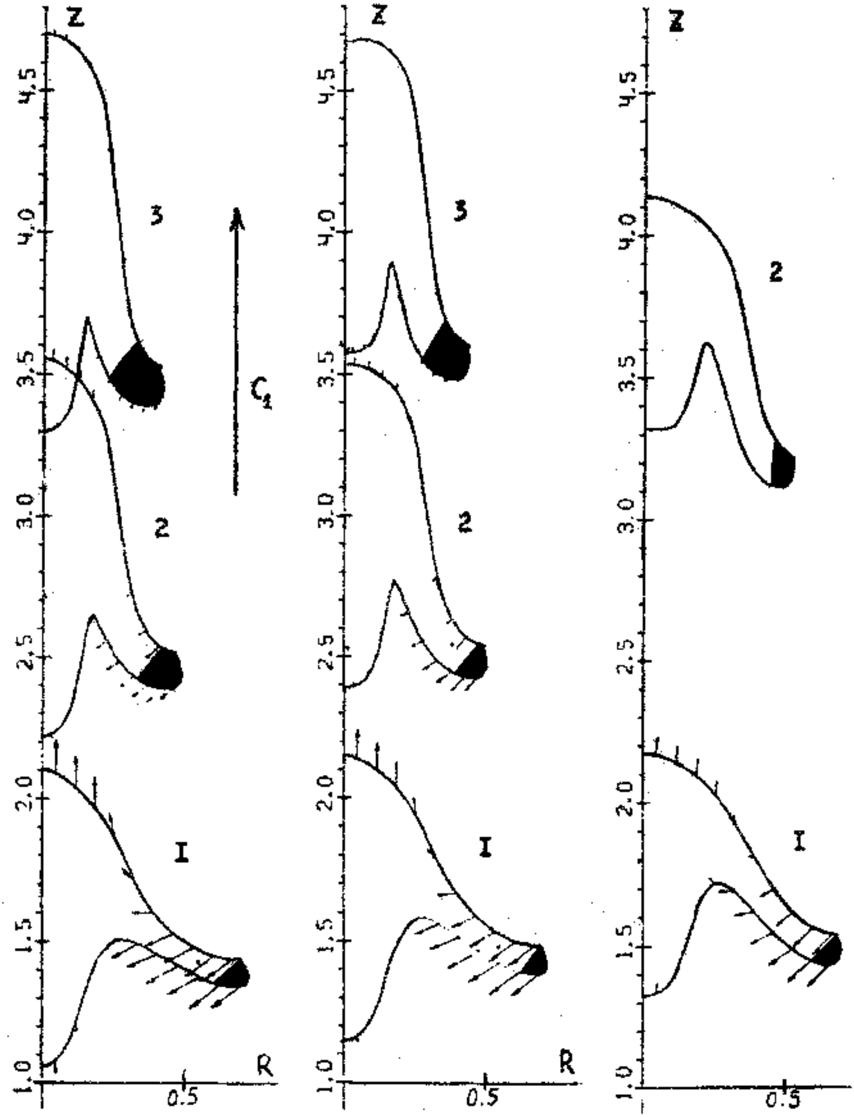
На рис. 2. показано образование кумулятивной струи в моменты времени: $t_1 = 0$; $t_2 = 13.8t_0$, $V_{z0} = 0.37c_1$; $t_3 = 50.4t_0$, $V_{z0} = 0.35c_1$.

Для исследования влияния неизотермического процесса были проведены расчеты деформирования облицовок для различных значений коэффициента Грюнайзена ¥ $= 0$ (изотермический случай), ¥ $= 2$, ¥ $= 4$. Для конической облицовки с углом полураствора ~ $= 30^\circ$ в момент времени $t = 11.9t_0$, где t_0 - время пробега звуковой волны по толщине недеформированной облицовки.

Расчеты показали, что наибольшее различие наблюдается вблизи оси облицовки. Анализ полученного поля скоростей показывает, что изменяется характер течения материала облицовки вблизи оси. В расчетах, не учитывающих разогрев и вызванное им объемное расширение материала, показали, что в процессе деформирования наблюдается постоянное натекание материала на ось облицовки с последующим растеканием вдоль оси (кумулятивный эффект). Если же учесть разогрев, то натекание, а вместе с ним и кумулятивный эффект уменьшаются. При этом на более поздних стадиях $t \geq 10t_0$ наблюдается некоторое движение материала от оси.

Исследовано влияние предела текучести материала на характер деформирования облицовки. На рис. 3 приведены результаты расчета для медной облицовки ~ $= 60^\circ$, $2h/D_0 = 0.1$, $p_{max} = 167K_{so}$, ª$_0/K_{so} = 483$, «$_0/K_{so} = 207$, при различных значениях предела текучести: а) $K_s = 0.3K_{so}$, б) $K_s = K_{so}$, в) $K_s = 3K_{so}$.

Значение K_{so} выбрано равным динамическому пределу текучести на сдвиг для меди. Условия нагружения во всех трех случаях одинаковые. Анализируя результаты расчетов, можно отметить, что на начальных этапах деформирования величина предела текучести практически не влияет на изменение формы облицовки. И напротив, конечный результат формирования: удлинение и эффективный диаметр существенно зависят от пластических свойств материала. На периферии облицовки наблюдаются зоны разрушения – показаны черным цветом на рис. 3. а) $t_1 = 34.4t_0$; $t_2 = 65.8t_0$; $t_3 = 92.6t_0$; б) $t_1 = 36t_0$; $t_2 = 67.6t_0$; $t_3 = 96.8t_0$; в) $t_1 = 38.4t_0$; $t_2 = 86.3t_0$, $V_{z0} = 0.41c_1$.



(а) (б) (в)

Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений. // Изв. РАН. МТТ. 2004. №1.С.98-108.
2. Кукуджанов В.Н. Связанные модели упругопластичности и поврежденности и интегрирование их уравнений // Изв. РАН. МТТ. 2006. №6. С.103-135.
3. Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Математическое моделирование задач импульсного деформирования, взаимодействия и разрушения упругопластических тел. М.: ИПМ АН СССР. Препринт №280. 1986. 68 с.
4. Лаврентьев М.А. Кумулятивный заряд и принципы его работы // Успехи матем. наук. 1957. Т.12. Вып.4. С.41-56.
5. Титов В.М. Возможные режимы гидродинамической кумуляции при схлопывании облицовки // Докл. АН СССР. 1979. Т.247. №5. С.1082-1085.
6. Физика взрыва. Под редакцией К.П.Станюковича. М.: Наука, 1975. 704 с.
7. Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Решение нестационарных задач динамики упругопластической среды методом подвижных сеток // В сб.: «Численные методы в механике твердого деформируемого тела». М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1984. С. 65-86.

Сведения об авторе:

Кукуджанов Владимир Николаевич

Д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ
Главный научный сотрудник
Институт проблем механики Российской академии наук (ИМПех РАН)
Адрес: 119526, Россия, Москва, пр-т Вернадского 101, корп.1, ИПМех РАН
Тел.: +7-495-434-46-39
Факс: +7-499-739-95-31
E-mail: kukudz@ipmnet.ru
http://ipmnet.ru/~kukudz

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ И НЕЛИНЕЙНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В КОМПОЗИТАХ

Кукуджанов К.В.
Москва, Россия

Изучение динамической реакции композитов началось в конце 60-х годов прошлого века в связи с широким внедрением в авиастроение и ракетостроение новых композиционных материалов. Возникающая при этом задача динамики для неоднородной среды, состоящей из большого количества чередующихся фаз, представляет собой проблему большой сложности, решить которую напрямую аналитически или численно часто просто невозможно. Это обстоятельство привело к разработке ряда приближенных моделей, описывающих с той или иной степенью точности реальный процесс распространения волн в композите. В этих моделях исходная неоднородная среда заменяется некоторым континуумом, свойства которого определяются экспериментально на представительных образцах или аналитически по известным свойствам фаз и их геометрии. Кроме того, при интенсивных динамических нагрузках матрица композита начинает вести себя нелинейно, проявляя выраженные вязкопластические свойства. Учет такого рода нелинейности необходим при построении континуальной модели.

1. Основные уравнения. В настоящей работе рассматриваются волокнистые или слоистые композиты, состоящие из упругих волокон или слоев между которыми находится неупругая вязкопластическая матрица, которые мы будем моделировать некоторым двухскоростным взаимодействующим континуумом, который представляет собой совокупность двух классических односкоростных сред, имеющих свое собственное движение и заполняющих один и тот же объем, равный объему исходной неоднородной среды. Таким образом, в каждой точке, занимаемой исходной неоднородной средой (композитом), в любой момент времени предполагается одновременное существование двух различных материальных частиц, принадлежащих разным односкоростным средам и характеризующиеся своей совокупностью переменных параметров. Возможность такого описания связана с предположением о существовании характеристического элемента объема *V*. Характеристические объемы являются точками пространства, в котором записываются основные уравнения теории двухскоростной смеси, содержащей компоненты композита пропорционально их объемному содержанию. Введем обычным образом для каждого из композитов смеси объемное содержание $\text{¦}_{\sim} = V_{\sim}/V$, где $V_{\sim}$ – объем α-го компонента композита $\sim\, = 1{,}2\,(V = V_1 + V_2)$, парциальную плотность (приходящуюся на единицу объема композита) $\circ_{\sim} = \text{¦}_{\sim}\circ^*_{\sim}$, где $\circ^*_{\sim}$ – реальная плотность материала α-фазы композита, вектор скорости, а также другие параметры, характеризующие свой компонент смеси, при этом первому компоненту смеси соответствует матрица, а второму волокна.

Формулировка основных законов для компонентов смеси не встречает принципиальных трудностей, чего нельзя сказать о законе взаимодействия между компонентами смеси и определяющих соотношений для них. После того как установлен общий вид определяющих соотношений для компонентов смеси и законов взаимодействия между ними, не противоречащий термодинамике и принципу материальной объективности, встает задача о конкретизации этих выражений и об определении входящих в них механических констант смеси. Эта задача представляет собой основную трудность в теории многоскоростных смесей. Существуют две возможности ее решения: аналитическое на основе микромодельного анализа, использующего знания микроструктуры материала и индивидуальных характеристик его компонент, и феноменологическое, основанное на использовании экспериментальных данных.

Полная система уравнений движения двухфазной смеси в случае упругой деформации волокон и упруговязкопластической деформации матрицы приводится в [1] (деформации предполагаются малыми, перенос массы и энтропии между компонентами смеси отсутствующими):

$$
\begin{aligned}
&(°_1 + °_{12})\dot{\mathrm{v}}_i^{(1)} = ±^{(1)}_{ij,j} + K\left(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}\right) + l\left(\mathrm{v}_i^{(2)} - \mathrm{v}_i^{(1)}\right) + °_{12}\dot{\mathrm{v}}_i^{(2)} \\
&(°_2 + °_{12})\dot{\mathrm{v}}_i^{(2)} = ±^{(2)}_{ij,j} + K\left(u_i^{(1)} - u_i^{(2)}\right) + l\left(\mathrm{v}_i^{(1)} - \mathrm{v}_i^{(2)}\right) + °_{12}\dot{\mathrm{v}}_i^{(1)} \\
&\dot{u}_i^{(\sim)} = \mathrm{v}_i^{(\sim)} \qquad\qquad \sim = 1,2 \\
&±^{(\sim)}_{ij} = L^{(\sim)}_{ijkl}\left[\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{v}^{(\sim)}_{k,l} + \mathrm{v}^{(\sim)}_{l,k}\right) - H(\sim)£^{(\sim)p}_{kl}\right] \qquad i,j = 1,2,3 \\
&£^{(1)p}_{ij} = \begin{cases} 0, & S^{(1)} < k_m\left(I^{(1)p}\right) \\ \dfrac{1}{²_{0m}} \dfrac{¨_m\left(\dfrac{S^{(1)} - k_m\left(I^{(1)p}\right)}{k_m(0)}\right)}{S^{(1)}} s^{(1)}_{ij}, & S^{(1)} \ge k_m\left(I^{(1)p}\right) \end{cases} \\
&K, l, °_{12} = \begin{cases} K^e, 0, °^e_{12} & S^{(1)} < k_m\left(I^{(1)p}\right) \\ K^p, l, °^p_{12} & S^{(1)} \ge k_m\left(I^{(1)p}\right) \end{cases} \\
&H(\sim) = \begin{cases} 1, & \sim = 1 \\ 0, & \sim = 2 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $°_\sim$ – парциальная плотность фазы, $°_{12}$ – присоединенная плотность, $\mathbf{u}^{(\sim)} = \left(u_i^\sim\right)$ – вектор перемещений, $\mathbf{v}^{(\sim)} = \left(\mathrm{v}_i^\sim\right)$ – вектор скорости, $±^{(\sim)}_{ij}$ – тензор напряжений, $L^{(\sim)}$ – матрица упругих модулей α-й компоненты смеси, $S^{(1)}$ – второй инвариант тензора аналога девиатора напряжений $s_{ij}^{(1)}$ для первого компонента смеси (матрицы), $I^{(1)p}$ - интенсивность пластических деформаций в первом компоненте смеси(матрице), $k_m(I^{(1)p})$ – зависимость предела текучести матрицы от интенсивности пластических деформаций, ² $_{0m}$ – время релаксации материала матрицы.

Все механические константы смеси ° $_{\sim}$, $L^{(\sim)}_{ijkl}$, ° $_{12}{}^{e}$, ° $_{12}{}^{p}$ l K^e , K^p и вид $s_{ij}^{(1)}$ – определяются на основе микромодельного анализа в явном виде по известным характеристикам компонентов слоистого и однонаправленного волокнистого композитов [1].

Уравнения (1) образуют замкнутую систему уравнений двускоростной анизотропной упруговязкопластической смеси. Как видно из этих уравнений, полученная двухскоростная смесь представляет собой совокупность двух односкоростных анизотропных сред, связанных друг с другом посредством соответствующих членов в уравнениях движения.

В настоящей работе помимо двухскоростной модели мы будем моделировать исходный слоистый или волокнистый композит еще в рамках односкоростной модели предложенной в [2], в предположении что волокна остаются упругими, а матрица ведет себя упруговязкопластически. Модель позволяет заменить такой композит обобщенной анизотропной упруговязкопластической средой с кинематическим упрочнением, все механические константы которой вычисляются по известным свойствам и геометрии его компонентов. В случае если матрица остается упругой уравнения односкоростной модели представляют собой уравнения теории эффективных модулей для композита.

2. Дисперсия гармонических волн в упругих композитах. Дисперсия вызвана многократным отражением-преломлением волны на многочисленных границах раздела волокно-матрица композита. Теория эффективных модулей, моделирующая исходный неоднородный материал некоторым однородным анизотропным континуумом (односкоростной смесью) неспособна описывать дисперсию плоских волн, в то время как последняя является важной интегральной характеристикой материала, играющей определяющую роль в распространении нестационарных волн в композите. Для того чтобы понять насколько точно модель двухскоростной смеси воспроизводит реальную ситуацию (или другими словами, насколько точно она позволяет учесть неоднородность материала при распространении волн), проведем сравнение дисперсионных кривых для плоских гармонических волн полученных по этой модели, с имеющимися экспериментальными результатами. Считая смесь упругой, рассмотрим решение системы уравнений (1) вида $u_i^{(\sim)} = A_i^{(\sim)}\,\mathrm{e}^{ik\left(n_i x_i - ct\right)}$ где k – волновое число, c – фазовая скорость, $A_i^{(\sim)}$ – амплитуда волны, $\vec{n}$ – единичная нормаль в направлении распространения. Условием существования нетривиального решения такого вида является выполнение дисперсионного соотношения, связывающего c и k, при этом получается, что каждому значению волнового числа k реально соответствует два значения скорости $c(k)$. На плоскости k-c они образуют две спектральные дисперсионные кривые. Первой (главной моде) соответствует конечная скорость распространения, а второй моде – бесконечная при $k \to 0$ (рис 1).

2.1. На рис.1 представлено сравнение между экспериментальными данными [3] и расчетами по предлагаемой модели для первой моды продольных волн, распространяющихся вдоль волокон бор-эпокситногор волокнистого композита. Характеристики его волокон(f) и матрицы(m) (заимствованы из [11]), на основе которых вычислялись константы двускоростной смеси, следующие: $\eta_f = 0.54$, $\eta_m = 0.46$, $E^{(f)} = 379.2$ ГПа, $E^{(m)} = 0.5$ ГПа, $\nu^{(f)} = 0.18$, $\nu^{(m)} = 0.40$, $\rho_f = 2.68$ г/см^3, $\rho_m = 1.26$ г/см^3, $r_f = 0.1016$мм, $r_m = 0.138$ мм. Согласие с экспериментом при умеренных частотах очень хорошее и несколько хуже при высоких.

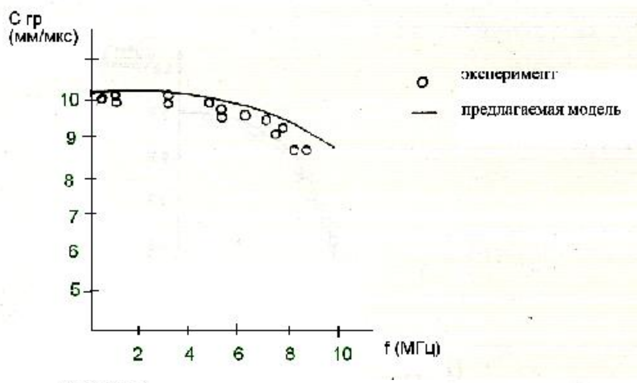


Рис. 1

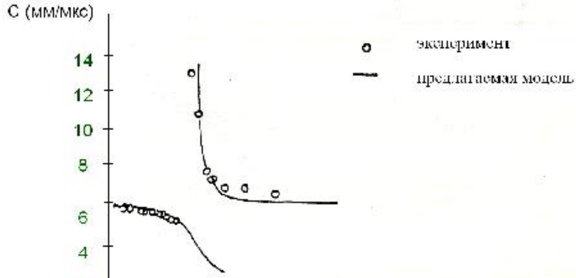


Рис. 2а

2.2. Сравнение дисперсионных кривых с экспериментальными данными для волокнистого вольфрам-алюминиевого композита [4] представлено на рис.2. Характеристики его волокон(f) и матрицы(m) (заимствованы из [12]), на основе которых вычислялись константы двухскоростной смеси, следующие: $\eta_f = 0.221$, $\eta_m = 0.779$, $E^{(f)} = 400.0$ ГПа, $E^{(m)} = 71.0$ ГПа, $\nu^{(f)} = 0.28$, $\nu^{(m)} = 0.34$, $\rho_f = 19.19$ г/см^3, $\rho_m = 2.44$ г/см^3, $h_f = 0.0625$ мм, $h_m = 0.158$ мм.

На рис.2а дисперсионные кривые первой и второй мод для продольных волн, распространяющихся по нормали к слоям, сравниваются с результатами экспериментов с ультразвуком. В увеличенном масштабе дисперсионная кривая для первой моды показана на рис.2б. Видно, что и для этого композита согласие с экспериментом хорошее не только для первой, но и второй моды.

2.3. Сравнение главной моды для продольных волн, распространяющихся перпендикулярно волокнам с данными эксперимента [4] для волокнистого вольфрам-алюминиевого композита представлено на рис.3. Характеристики его волокон(f) и матрицы(m), на основе которых вычислялись константы смеси, следующие: $\eta_f = 0.022$, $\eta_m = 0.978$, $E^{(f)} = 400.0$ ГПа, $E^{(m)} = 71.0$ ГПа, $\nu^{(f)} = 0.28$, $\nu^{(m)} = 0.345$, $\rho_f = 19.19$ г/см^3, $\rho_m = 2.70$г/см^3, $h_f = 0.0625$ мм, $h_m = 0.424$ мм.

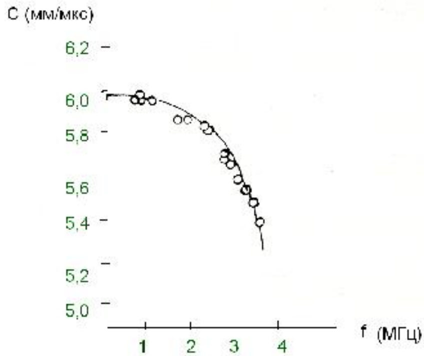


Рис. 2б

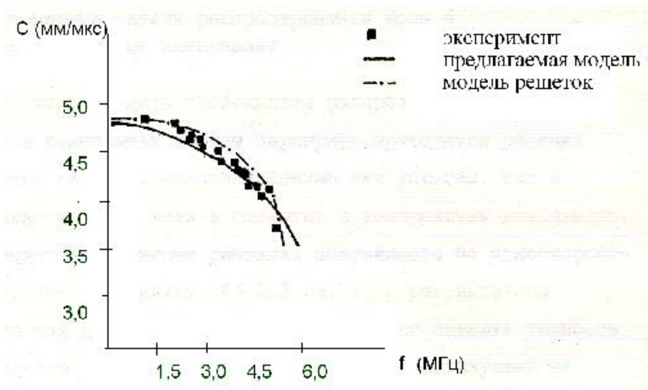


Рис. 3

Таким образом, можно заключить, что для рассмотренных слоистых и волокнистых композитных материалов, предлагаемая модель двухскоростной смеси хорошо количественно описывает дисперсию упругих гармонических волн, распространяющихся в материале как вдоль, так и поперек армирующих элементов.

Далее будем рассматривать композиты, состоящие из вольфрамовых волокон, заключенных в алюминиевую матрицу. Этот материал типичен по своим свойствам для композитов типа металл-металл, широко применяемых в технике. Заметим, что в [5,6] на примерах сравнения с имеющимися экспериментальными данными, точными решениями и результатами прямых численных расчетов на ячейках периодичности для широкого круга композиционных материалов (не только композитов типа металл-металл), было показано, что рассматриваемая двухскоростная модель хорошо воспроизводит процессы распространение волн в произвольном направлении. При этом сам характер решения слабо зависит от того, рассматриваются слоистый или волокнистый композиты и от того, в каком направлении вдоль или поперек волокон распространяются волны.

Для выявления влияния изучаемых факторов на процесс распространения волн в композитах, получим отклик по односкоростной и более точной двухскоростной моделям, и сравним его с результатами экспериментов, проведенных по методике, описанной в [4].

3. Нестационарные нелинейные волны в композитах. Перейдем к исследованию распространения упруговязкопластических волн в композитах.

3.1. Рассмотрим слоистый композит толщиной l = 0,358см, состоящий из слоев вольфрамовых волокон, чередующихся со слоями алюминиевой матрицы. Будем рассматривать распространение волн по нормали к слоям, т.е. вдоль оси z. Лицевая поверхность этого композита подвергается нагружению ступенчатым импульсом скорости (удар толстой алюминиевой пластиной (2.54 см) с начальной скоростью v_0 = 0.0567 мм/мкс). К его тыльной поверхности жестко прикреплен буфер из плавленого кварца толщиной δ = 0.64 см, E = 100.6 ГПа, G = 41.8 ГПа, ρ = 2.77 г/см^3, импеданс подбирался приблизительно равным импедансу матрицы так, чтобы волны проходили в буфер практически не отражаясь. За буфером располагается окошко тоже из плавленого кварца. В момент $t = 0$ на лицевой поверхности композита задается скорость v_z = 0.0283 мм/мкс, которая в последующие моменты остается постоянной. При этом матрица переходит в пластическое состояние и в композите распространяется упруговязкопластическая волна. Реальная диаграмма алюминия $k_m(\varepsilon)$ аппроксимировалась кривой с линейным упрочнением (тангенс угла наклона на вязкопластическом участке $\mu_0^{(m)}$). Упругие константы и геометрия материалов матрицы и волокон, заимствованные из [2]12, приведены в п.2.2, для вязкопластического течения матрицы: $k_m(0)$=0.065Гпа, $\mu_0^{(m)}$= 5.48Гпа, $\tau_0^{(m)}$ =1.5мкс.

Измеренная в экспериментах скорость задней поверхности буфера в зависимости от времени, представлена на рис. 4. Там же приведены результаты расчетов по предлагаемым односкоростной [4] (слева) и двухскоростной [1] (справа) моделям. Для сравнения также был проведен расчет по этим моделям в предположении, что матрица остается упругой.

3.2. Рассмотрим слой из волокнистого композита толщины $l = 0.754$ см состоящий из вольфрамовой проводки заключенной в алюминиевую матрицу. Свойства компонентов приведены в п.2.3.. Зависимость $k_m(\varepsilon)$ такая же как в предыдущем случае, для вязкопластического течения матрицы: $k_m(0)$=0.065Гпа, $\mu_0^{(m)}$= 5.9Гпа, $\tau_0^{(m)}$ =1.5мкс. Будем рассматривать распространение волн перпендикулярно волокнам, при этом схема эксперимента остается без изменений, за исключением того, что буфер берется толщиной 0.629 см. В момент $t = 0$ к лицевой поверхности прикладывается постоянная по времени скорость $v_z = 0.0505$ мм/мкс, взятая из эксперимента [2]. Зависимости скорости от времени, полученная при расчете по двухскоростной модели и измеренная в эксперименте, представлены на рис.5. Видно, что имеется неплохое совпадение этих кривых. Характер решения по сравнению со слоистым композитом остается неизменным.

Из сравнения полученных результатов видно, что, если пренебрегать неоднородностью материала (односкоростная модель), то получается решение в форме ступеньки, размазанной за счет вязкостных эффектов. Характерных "колебаний" решения в этом случае не получается. Очевидно, что правильно предсказать время прихода волны к тыльной поверхности, на которой производились измерения, односкоростная модель не может. Тогда как, учитывая неоднородность материала с помощью двухскоростной модели, мы можем его точно предсказать.

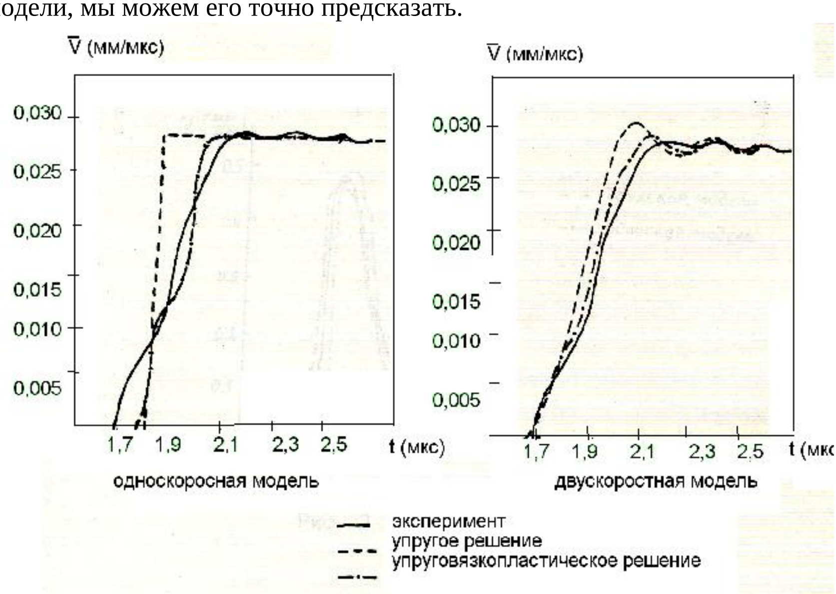


Рис. 4а Рис. 4б

Если пренебречь неупругим поведением матрицы, но учесть неоднородность материала, то наблюдается значительное увеличение максимальной амплитуды решения и уменьшение времени нарастания импульса. На лицо также отсутствие предвестника, характерного для упругопластической волны.

Решение задачи с учетом, как неоднородности, так и упруговязкопластичности материала хорошо согласуется с экспериментальными результатами. При этом во время нарастания сигнала $t = 1.70\text{-}1.95$ мкс (рис.4) на рассчитанной по моделям кривой видны точки перегиба решения, наблюдаемые так же в эксперименте и обусловленные упруговязкопластическими процессами в матрице: двухволновой конфигурацией, связанной с билинейной диаграммой $\sigma = k_m(\varepsilon)$. В упругом решении этого не наблюдается.

3.3. Рассмотрим, наконец, вольфрам-алюминиевый слоистый композит со следующими характеристиками: : $\eta_f = 0.22$, $\eta_m = 0.78$, $\lambda^{(f)} = 256.0$ ГПа, $\lambda^{(m)} = 54.0$ ГПа, $\mu^{(f)} = 201.0$ ГПа, $\mu^{(m)} = 29.0$ ГПа, $\rho_f = 19.2$ г/см^3, $\rho_m = 2.44$ г/см^3, $h_f = 0.063$ мм, $h_m = 0.159$ мм, $k_m(0)$=0.065Гпа, $\mu_0^{(m)}$= 5.8Гпа, $\tau_0^{(m)}$ =1.0мкс. Будем изучать распространение упругих волн по нормали к его слоям. Композит представляет собой полупространство, на границе которого задаются зависимости скорости от времени различной степени гладкости (они приведены на рис.6 слева). Средняя скорость на расстоянии $l = 0.360$ см от поверхности, полученная из расчетов по двухскоростной модели (в случае упругой матрицы), в зависимости от времени, представлена на рис.6 (справа).

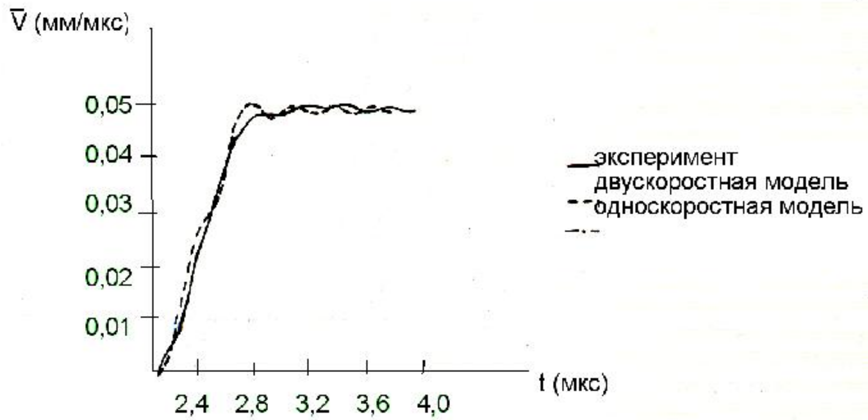


Рис. 5

Из приведенных расчетов следует, что с увеличением степени гладкости прикладываемой нагрузки уменьшаются различия в форме решений, получающихся по двухскоростной и односкоростной моделям: получающееся решение на участке его сильного нарастания на фронте волны стремится по форме к прикладываемой нагрузке, а колебания решения за фронтом затухают. Вязкопластическое течение матрицы еще больше сглаживает решение. Так, при учете в расчетах упруговязкопластических свойств матрицы в случае наиболее гладкой нагрузки, из приведенных на рис.6, колебания за фронтом незначительны. Необходимо обратить внимание, что односкоростная модель занижает скорость распространения возмущений в композиционном материале, поэтому хотя с увеличением гладкости прикладываемой нагрузки различия между формой и характером решений получаемых по рассматриваемым моделям уменьшаются, тем не менее, если мы пренебрегаем при расчетах неоднородностью материала, то имеет место постоянное запаздывание прихода импульса к поверхности измерений.

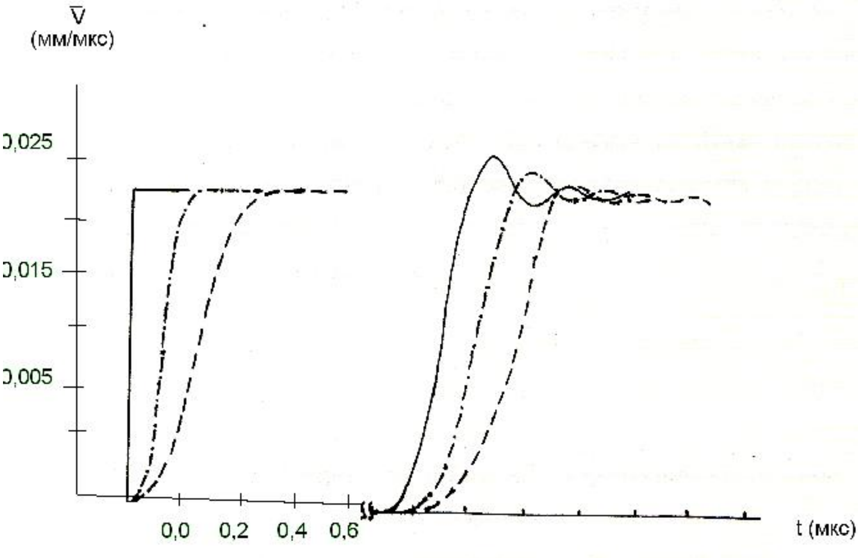


Рис. 6

Таким образом, на основании сравнения отклика, предсказываемого двухскоростной моделью с результатами экспериментов или односкоростной модели, можно сделать вывод, что предлагаемая двухскоростная модель смесей хорошо описывает как распространение гармонических волн, так и нестационарную неупругую реакцию композитов на динамические нагрузки. Она достаточно точно предсказывает время прихода и время нарастания импульса, амплитуду сигнала, а также частоту колебаний решения за фронтом волны для ступенчатой нагрузки, а также упруговязкопластическую реакцию композита. Если же влиянием неоднородности композита мы пренебрегаем и ищем решение на основе односкоростной модели, то она дает результаты, довольно сильно отличающиеся от экспериментальных в областях резкого изменения решения. С увеличением же гладкости прикладываемой нагрузки, эти различия уменьшаются. При этом учет неупругого поведения сглаживает решение и улучшает согласие с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов К.В. Двухскоростная модель упруговязкопластического деформирования композитных материалов // Изв. РАН, МТТ, 2001. №5. С. 74-86.
2. Кукуджанов К.В. Динамическое деформирование и разрушение неупругих слоистых композитов // Изв. РАН, МТТ, 1997. № 4. С. 87-98.
3. Тошер, Гузельсу. Экспериментальное исследование дисперсии волн в волокнистом композиционном материале // Труды американкого общества инженеров механиков. Прикл. механика (русский перевод). 1972. №1. с.97-102.
4. Драмхелер, Сазерленд. Решеточная модель композиционного материала для исследования распространения волн напряжения // Труды американкого общества инженеров механиков. Прикл. механика (русский перевод). 1973. т.40, №1. с.157-164.
5. Кукуджанов КВ. Исследование дисперсии упругих волн в композитах на основе двухскоростной модели // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб., 2006. Вып.67. С. 111-118.
6. Кукуджанов К.В. Распространение одномерных упруговязкопластических волн в композиционных материалах // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С. 165-173.

Сведения об авторе:

Кукуджанов Константин Владимирович

К.ф.-м.н, научный сотрудник
Института проблем механики РАН
Адрес: РФ, Москва, пр. Вернадского, 101, ИПМех РАН
Тел: .+7495 434-46-39
E-mail: kconstantin@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕЗАНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Левитин А.Л.
Москва, Россия

Процессы резания играют важную роль в технологических процессах. Фундаментальное понимание образования стружки важно для эффективного использования данных процессов. Рассмотрение процесса резания требует учета больших деформаций, скоростей деформаций и нагрева, приводящих к температурному разупрочнению и разрушению материала. Точное решение данных проблем не получено, хотя исследования предпринимаются с середины XX века [1,2]. В последние годы благодаря численному моделированию проведены исследования влияния на образование стружки угла резания, термомеханических свойств детали и резца, механизма разрушения. Однако во многих работах, например [3,4], рассматриваются либо начальный этап образования стружки, либо принята двумерная постановка задачи (плоская деформация), либо разрушение происходит по заданному интерфейсу.

В настоящей работе методом конечных элементов произведено трехмерное моделирование динамического процесса резания упруговязко-пластической пластины (деталь) абсолютно жестким резцом, движущимся с постоянной скоростью V_0 при различных наклонах грани резца α (рис. 1). Варьировался размер толщины на направлении оси z таким образом, что напряженное состояние изменялось от близкого к плосконапряженному H<<1 (тонкая пластина) до плоскодеформируемого H>>1 (широкая пластина) состояния. Задача решалась на подвижной лагранжево-эйлеровой сетке методом конечных элементов с использованием явных схем интегрирования определяющих уравнений.

В работе принимается термоупруговязкопластическая модель типа Мизеса – модель пластичности с пределом текучести в виде зависимости, предложенной Джонсоном-Куком (Johnson-Cook) (1), включающая деформационное и вязкопластическое упрочнение и термическое разупрочнение:

$$\sigma_Y\left(\varepsilon^{pl},\dot{\varepsilon}^{pl},T\right)=\left[A+B\left(\varepsilon^{pl}\right)^n\right]\left[1+C\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}^{pl}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)\right]\left(1-\hat{T}^m\right) \qquad (1)$$

где σ_Y – предел текучести, $\bar{\varepsilon}^{pl}$ – интенсивность пластических деформаций $\hat{\theta}$ – относительная температура, зависящая от температуры плавления θ_{melt}.

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \theta < \theta_{transition} \\ (\theta - \theta_{transition})/(\theta_{melt} - \theta_{transition}) & \text{при} \quad \theta_{transition} \le \theta \le \theta_{melt} \\ 1 & \text{при} \quad \theta > \theta_{melt} \end{cases}$$

Материал детали принят однородным. В расчетах использовался относительно мягкий материал Al2024-T3 (упругие: E = 73 ГПа, $\nu = 0.33$; пластические: A = 369 МПа, B = 684 МПа, n = 0.73, ε_0 = 5.77E-04, C = 0.0083, m = 1.7, $\theta_{transition} = 300\,\mathrm{K}$, $\theta_{melt} = 775\,\mathrm{K}$; $= 0.9$) и более жесткий 42CrMo4 (упругие: E = 202 ГПа, $\nu = 0.3$; пластические: A = 612 МПа, B = 436 МПа, n = 0.15, ε_0 = 5.77E-04, C = 0.008, m = 1.46, $\theta_{transition} = 300\,\mathrm{K}$, $\theta_{melt} = 600\,\mathrm{K}$; $= 0.9$). Производится сравнение адиабатического процесса резки и полной термомеханической задачи.

Разрушение определяется достижением критической интенсивности пластической деформации ε_f^{pl} (соответствующий конечный элемент удаляется из расчета) и не ограничено заданным направлением. В приведенных расчетах бралось $\varepsilon_f^{pl} = 1.0$. Скорость движения резца 2 м/с и 20 м/с.

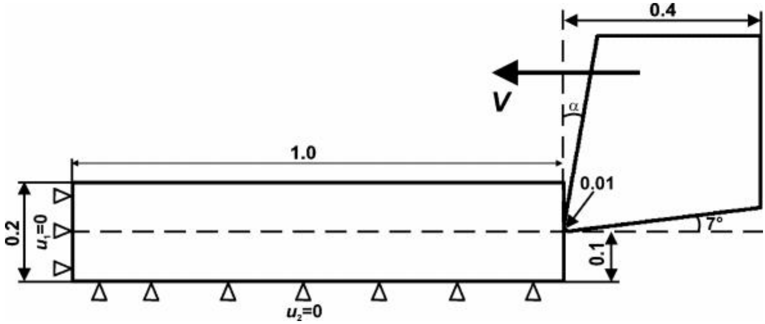
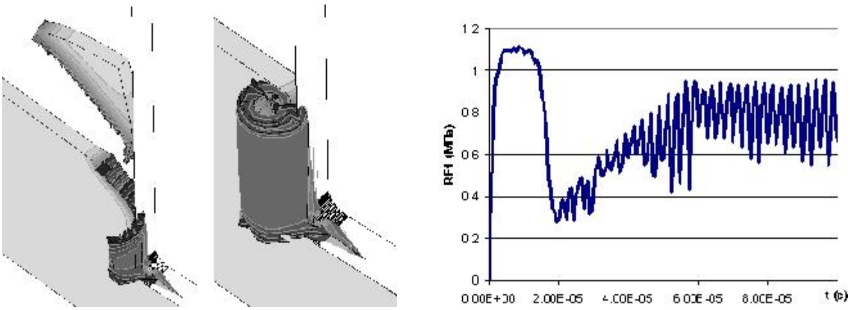


Рис. 1. Геометрия задачи и граничные условия

При небольшой толщине пластины сначала под действием резца образуется полоса сдвига, по которой происходит разрушение и отделение первого чипа от основного материала. После этого резец движется вдоль образца, расплющивая его и срезая материал, вытекающий в боковом направлении с образованием непрерывно сворачивающейся спиралевидной стружки (рис. 2). Сила, действующая на резец после начального неустановившегося участка, на котором она максимальна, выходит на стационарное значение и процесс резания происходит квазимонотонно. Высокочастотные колебания около этого значения связаны с разрушением материала на контактной поверхности (удаление элементов из расчета).

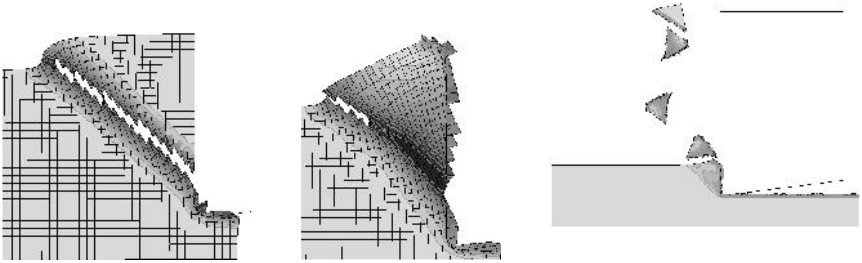


(*а*) (*б*)

Рис. 2. Образование стружки и распределение интенсивности пластических деформаций (а) и суммарная сила реакции резца (б) при резке тонкой пластины (термомеханическая модель, деталь 42CrMo4, резец 90^{o}, V = 2 м/с)

При большой толщине пластины (плоская деформация) процесс принимает качественно иной характер. Режущим резцом при ортогональном резании выдавливаемый материал образует бугор, который растет по мере движения резца и при этом вблизи конца резца зарождается полоса сдвига, которая продвигается к свободной поверхности. По ней происходит разрушение и часть материала в виде чипа отделяется от обрабатываемой детали (рис. 3*а*).

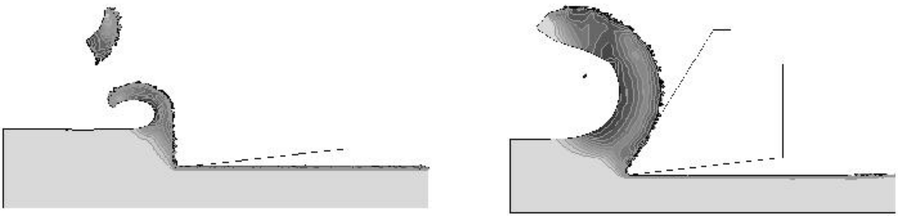
После этого образуется новый бугор и новая полоса сдвига и процесс приобретает немонотонный квазипериодичский характер, определяемый скоростью движения резца. В некоторых случаях одновременно на поверхности бугра зарождается встречная полоса сдвига. При слиянии этих полос происходит разрушение (рис. 3*б*).



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 3. Образование стружки и распределение интенсивности пластических деформаций при резке толстой пластины из 42CrMo4, угол наклона верхней грани резца 90º.
(а) термомеханическая модель, V = 20 м/с, отрыв начального куска;
(б) адиабатическая модель, V = 2 м/с, отрыв второго куска;
(в) адиабатическая модель, V = 2 м/с, отрыв серии кусков.

При малой скорости резки и учете теплопроводности или уменьшении угла наклона резца полосы и/или увеличении пластичности детали (дюралюминий) не образуется полоса локализации и слой срезается однородно без образования чипов (рис. 4).



(*а*)

(*б*)

Рис. 4. Стружка при термомеханической модели резки
(а) деталь 42CrMo4, резец 90º; (б) деталь Al2024-T3, резец 60º.

На рис 5. приведены результаты расчета силы сопротивления резанию, действующей на инструмент во времени при резании толстой пластины. Видно, что имеется начальный участок неустановившегося процесса, связанный с образованием первичной полосы сдвига, при котором сила сопротивления максимальна. Для ортогональной резки (рис. 5*а*) после разрушения и отделения куска пластины происходит резкий спад, величина которого зависит от скорости резания, после чего наступает этап установления и выход на квазиустановившееся стационарное значение силы сопротивления.

Аналогичные спады происходят при отколе последующих кусков (кривая 1 на рис. 5). Отметим, что падение силы реакции связано с тем, что после откола первого куска резец давит на нагретый полосой сдвига (ослабленный материал), который легко разрушается (элементы выбрасываются из расчета).

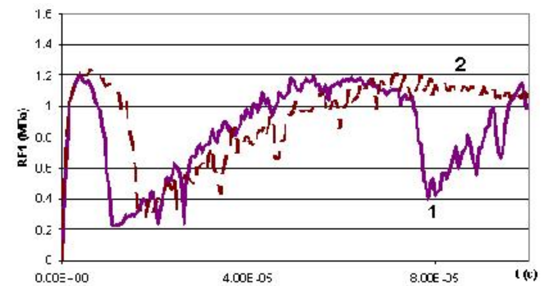


Рис. 5. Сила, действующая на резец при резке толстой пластины. Материал 42CrMo4, резец 90º. 1– адиабатическая модель, 2–термомеханическая модель

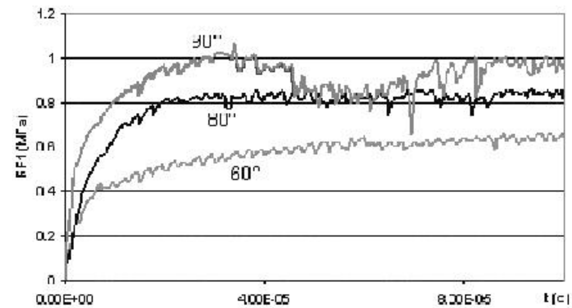


Рис. 6. Сила, действующая на резец при резке толстой пластины. Материал Al2024-T3. Различные углы наклона резца.

Для более мягкого материала (рис. 6) характерно образование непрерывной стружки, которая дает монотонную силу реакции резца. При кусковой стружке сила реакции имеет пилообразный вид, что отрицательно сказывается на технологическом процессе резки.

Автор выражает признательность Г.И.Канелю и В.Н.Кукуджанову за участие в постановке и полезные советы при обсуждении задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00523).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shaw M.C. A quantized theory of strain hardening as spplied to cutting of metals, Journal of Applied Physics, 21, June, 1950, 599-606.
2. Shaw M.C. Metal cutting principles. Oxford Science Publications, New York, 1997.
3. Liu K., Melkote S.N. Material strengthening mechanisms and their contribution to size effect in micro-cutting // ASME Transactions Journal of Manufacturing Science and Engineering, 128 (3), 2006, pp. 730-738.
4. Miguélez H., Zaera R., Rusinek A., Moufki A. and Molinari A., Numerical modelling of orthogonal cutting: Influence of cutting conditions and separation criterion // J. Phys France, 2006, 134, 417-422.

Сведения об авторе:

Левитин Александр Леонидович
Младший научный сотрудник
Институт проблем механики Российской академии наук (ИМПех РАН)
Адрес: 119526, Россия, Москва, пр-т Вернадского 101, корп.1, ИПМех РАН
Тел.: +7-916-389-40-13
Факс: +7-499-739-95-31
E-mail: alex_lev@ipmnet.ru

О ТЕЧЕНИЯХ ДИЛАТИРУЮЩИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Максимова Л.А.

Москва, Россия

1. В работах [1, 2] рассмотрены течения несжимаемых изотропных сред. Показано, что наибольшая свобода течения имеет место, когда два главных напряжения равны между собой, третье отлично от них, в этом случае течение определяется волновым уравнением.

Дилатансией называется явление, когда изменение формоизменения тела сопровождается изменением объема. К дилатирующим средам относятся грунты, изменение формы которых может сопровождаться разрыхлением.

Ниже рассматриваются уравнения, определяющие течение некоторых дилактирующих сред.

Рассмотрим плоское течение изотропной среды, обозначим через $\pm_x, \pm_y, {}^2{}_{xy}$ компоненты напряжения в декартовой системе координат xy. Условие предельного состояния определим в виде

$$f(\pm, J) = \copyright, \quad \copyright - \text{const} \tag{1.1}$$

где $\pm, J$ – инварианты тензора напряжений

$$\pm = \frac{1}{2}(\pm_x + \pm_y), \quad J = \sqrt{(\pm_x - \pm_y)^2 + 4\,{}^2{}_{xy}^{\,2}} \tag{1.2}$$

Предположим, что условие предельного состояния (1.1) является однородной функцией первого порядка своих аргументов, будем иметь

$$f(\pm, J) = \frac{\partial f}{\partial \pm}\pm + \frac{\partial f}{\partial J}J = \copyright \tag{1.3}$$

Согласно ассоциированному закону, из (1.1) получим

$$\begin{gathered}
\pounds_x = \text{ª}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \pm} + \frac{\partial f}{\partial J}\frac{(\pm_x - \pm_y)}{J}\right] \\
\pounds_y = \text{ª}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \pm} - \frac{\partial f}{\partial J}\frac{(\pm_x - \pm_y)}{J}\right] \\
\pounds_{xy} = 2\text{ª}\frac{\partial f}{\partial J}\,{}^2{}_{xy}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Из (1.3), (1.4) найдем

$$\pounds_x + \pounds_y = \text{ª}\frac{\partial f}{\partial \pm} \tag{1.5}$$

$$\frac{\pounds_{xy}}{\pounds_x - \pounds_y} = \frac{{}^{2}{}_{xy}}{\pm_x - \pm_y} \tag{1.6}$$

$$\pm_x \pounds_x + \pm_y \pounds_y + 2{}^{2}{}_{xy} \pounds_{xy} = \copyright\text{ª} \tag{1.7}$$

Из (1.4) можно также получить

$$\sqrt{(\pounds_x - \pounds_y)^2 + 4\pounds_{xy}^2} = 2\text{ª}\frac{\partial f}{\partial J} \tag{1.8}$$

Из (1.5), (1.8) будем иметь искомое дилатансионное соотношение

$$\pounds_x + \pounds_y + \sqrt{(\pounds_x - \pounds_y)^2 + 4\pounds_{xy}^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \pm} \Big/ 2\frac{\partial f}{\partial J} \right) = 0 \tag{1.9}$$

Изменение формы определяет в (1.9) выражение, стоящее под радикалом. При $\frac{\partial f}{\partial \pm} = 0$, согласно (1.9), имеет место условие несжимаемости.

При

$${}^{2}{}_{xy} = 0, \quad \pm_x - \pm_y \neq 0 \tag{1.10}$$

Из (1.6) получим

$$\pounds_{xy} = 0 \tag{1.11}$$

Согласно (1.11), уравнение (1.9) примет вид

$$\pounds_x + \pounds_y + a(\pounds_x - \pounds_y) = 0, \quad a = \frac{\partial f}{\partial \pm} \Big/ 2\frac{\partial f}{\partial J} \tag{1.12}$$

Имеют место формулы Коши

$$\pounds_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \pounds_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \pounds_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tag{1.13}$$

где u, v – компоненты скорости перемещения.

Согласно (1.13), уравнение (1.11) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.14}$$

Уравнению (1.14) удовлетворим, полагая

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{1.15}$$

Согласно (1.13), (1.15), уравнение (1.12) примет вид

$$(1-a)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - (1+a)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1.16}$$

Рассмотрим условие предельного состояния, используемое в статике сыпучей среды [3]

$$\sqrt{(\pm_x - \pm_y)^2 + 4{}^{2}{}_{xy}^{2}} - (\mathrm{tg}\,^\circ)\pm = 2\copyright, \quad ^\circ, \copyright - \mathrm{const} \tag{1.17}$$

Согласно (1.12), (1.17), уравнение (1.15) принимает вид

$$\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,^\circ\right)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,^\circ\right)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1.18}$$

При ${}^{2}{}_{xy}, \pm_x = \pm_y$, согласно (1.6), величина $\pounds_{xy}$ отлична от нуля. Предполагая безвихревой характер течения

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.19}$$

можно удовлетворить уравнению (1.18), полагая

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{1.20}$$

Из (1.9), (1.13), (1.20) следует

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + a\sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)^2} = 0 \tag{1.21}$$

Таким образом, при условиях (1.10) в пределе при $\pm_x - \pm_y \to 0$ имеет место бессдвиговое течение, определяемое уравнением (1.16), при $\pm_x = \pm_y$ безвихревое течение дилатирующей среды определяется уравнением (1.21), при отсутствии эффектов дилатаксии при $a = 0$ уравнение (1.21) переходит в уравнение Лапласа.

2. В общем случае рассмотрим условие предельного состояния в виде

$$\text{²}_{\max} = \text{©} + \mathrm{tg}\,\text{°} \cdot \pm, \quad \text{²}_{\max} = \frac{\pm_i - \pm_j}{2}$$
$$\pm = \frac{1}{3}(\pm_x + \pm_y + \pm_z), \quad \text{°}, \text{©} - \mathrm{const} \tag{2.1}$$

В случае условия полного предельного состояния из (2.1) следует

$$\pm_1 = \pm_2, \quad \pm_3 = \pm_1 + \text{©} + \mathrm{tg}\,\text{°} \cdot \pm \tag{2.2}$$

Рассматривая выражения (2.2) в качестве обобщенного потенциала, получим

$$\text{£}_1 = \text{ª} + \text{«}\left(-1 - \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,\text{°}\right)$$
$$\text{£}_2 = -\text{ª} + \text{«}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,\text{°}\right) \tag{2.3}$$
$$\text{£}_3 = \text{«}\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,\text{°}\right)$$

Из (2.3) следует

$$\text{£}_1 + \text{£}_2 + \text{£}_3 + \frac{\mathrm{tg}\,\text{°}}{1 - \frac{1}{3}\mathrm{tg}\,\text{°}}\text{£}_3 = 0 \tag{2.4}$$

Из условия изотропии А.Ю. Ишлинского [1, 2]

$$\text{£}_{ik}\pm_{kj} = \pm_{ik}\text{£}_{kj} \tag{2.5}$$

Совмещая главные оси 1, 2, 3 с осями координат xyz при условиях (2.2), получим

$$\text{£}_{xz} = \text{£}_{yz} = 0 \tag{2.6}$$

откуда [1, 2]

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{2.7}$$

Перепишем соотношение (2.4) в виде

$$\pounds_x + \pounds_y + \frac{1+\frac{2}{3}\mathrm{tg}^\circ}{1-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^\circ}\pounds_z = 0 \tag{2.8}$$

Для случая потенциального течения

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{2.9}$$

уравнение (2.4) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{tg^\circ}{1-\frac{1}{3}tg^\circ}\pounds_3 = 0 \tag{2.10}$$

где инвариант $\pounds_3$ может быть выражен через компоненты тензора $\pounds_{ij}$, и, следовательно, согласно (2.9) через производные Ψ_{ij}.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю., Максимова Л.А.// Докл.РАН. 2000. Т. 371. №1. С. 49-51.
2. Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю., Максимова Л.А. // МТТ. 1999. №6. С.39–54.
3. Соколовский Л.А. Статика сыпучей среды.

Сведения об авторе:

Максимова Людмила Анатольевна

Д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики
Московского горного университета

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ И ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Манандян Л.Т., Адамян В.Г.
Гюмри, Армения

В работе [1], [2], где рассмотрено движение точки под действием центральной силы, указано, что скорость точки при эллиптическом движении можно представить в виде двух слагаемых следующим образом: слагаемое V_1 перпендикулярно к большой оси эллипса, постоянно по модулю и по направлению, а V_2 перпендикулярно к радиусу-вектору, постоянно по модулю (рис.1).

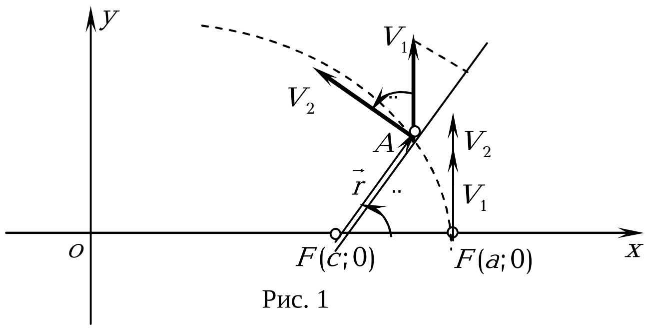


Рис. 1

Представление скорости в таком виде дает возможность определить время и положение точки в эллиптическом движении.

В этом случае радиальное и трансверсальное составляющие будут [3]:

$$V_r = V_1 \sin\ddot{} = \frac{dr}{dt} \tag{1}$$

$$V_T = V_1 \cos\ddot{} + V_2 = r\frac{d\ddot{}}{dt} \tag{2}$$

Из уравнения (1) и (2) получим

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\ddot{}}{K + \cos\ddot{}} d\ddot{} \tag{3}$$

где $K = \dfrac{V_2}{V_1}$.

Интегрируя уравнения (3), получим $\int \frac{dr}{r} = \int \frac{\sin\ddot{}}{K + \cos\ddot{}} d\ddot{}$, и учитывая начальные условия $¨ = 0$, $r = r_0$, получим

$$r = \frac{r_0(K+1)}{K+\cos ¨}. \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда движение произойдет по эллиптической орбите. Подставляя значения K и $r_0 = a - c$ в уравнение (4), будем иметь:

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos ¨} \tag{5}$$

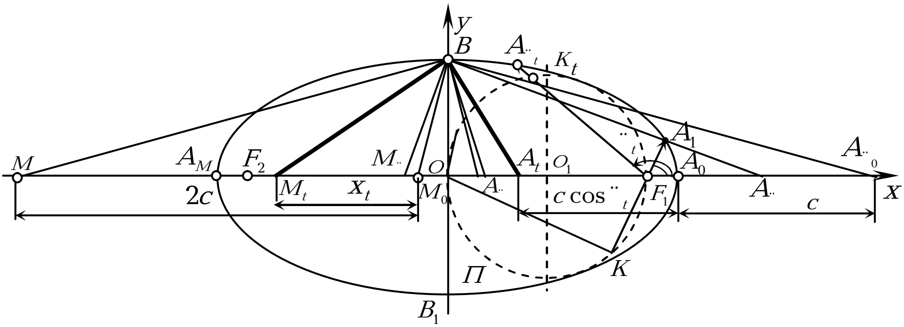


Рис. 2

При $¨ = 0$ точка находится в положении A_0, где $r = r_0 = a - c$, а слагаемые скорости V_1 и V_2 направлены по одной прямой (рис.1).

Из уравнения (2) имеем:

$$\frac{d¨}{dt} = \frac{V_1\cos ¨ + V_2}{r}$$

откуда

$$\frac{d¨}{dt} = \frac{V_1\cos ¨ + V_2}{r} \tag{6}$$

Подставляя значение r в уравнение (6) и интегрируя, получим

$$\int_0^t dt = \frac{\int_0^{¨} \frac{r_0(K+1)}{(K+\cos ¨)^2}}{V_1} \tag{7}$$

После интегрирования будем иметь

$$tV_1 = r_0\pounds(1+\pounds)\left[\frac{\pounds\sin ¨}{(\pounds^2-1)(1+\pounds\cos ¨)} - \frac{1}{\pounds^2-1}\frac{2}{\sqrt{1-\pounds^2}}\operatorname{arctg}\frac{(1-\pounds)\operatorname{tg}\frac{¨}{2}}{\sqrt{1-\pounds^2}}\right]\Big|_0^{¨}$$

В пределах 0-® получим $TV_1 = r_0 £ (1+£) \frac{1}{1-£^2} \frac{®}{\sqrt{1-£^2}}$, где $£ = \frac{c}{a}$.

После несложных преобразований получим

$$T = \frac{® ca}{bV_1} \tag{8}$$

Отметим, что значение T можно получить другим путем. Как известно, $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d¨}{dt}$, так как $\frac{1}{2} r^2 \frac{d¨}{dt} = C = \text{const}$, получим $S = \frac{C}{2} T$, где $S = \frac{® ab}{2}$ – половина площади эллипса, а T – время, когда точка из A_0 переходит в точку A_M. Считая, что $(V_1 + V_2) r_0 = C$, будем иметь

$$T = \frac{® ab}{(V_1 + V_2) r_0}$$

и после преобразования получим $T = \frac{® ca}{bV_1}$.

Из уравнения (7) определение времени в зависимости от угла ¨ несколько затруднено, поэтому для решения задачи мы предлагаем другой более простой алгоритм. Отметим, что уравнение (7) – это уравнение равномерного движения, так как V_1 постоянно по модулю.

Уравнения (5) и (7) дают возможность определить время движения и положение точки. Уравнение (5) – это уравнение эллипса с фокусами $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$, а a и b – полуоси эллипса.

Если возьмем прямоугольный треугольник высотой b, тогда отрезки на гипотенузе будут r и $a + c\cos ¨$, так как

$$b^2 = r(a + c\cos ¨) \tag{9}$$

Используя уравнения (9), можно определить положение точки в зависимости от угла ¨. Допустим, радиус-вектор повернулся на угол ¨, из точки O_1 с радиусом $\frac{c}{2}$ проведем окружность, тогда из OKF_1 $F_1K = c\cos ¨$ (рис.2). Из точки A_0 отложим отрезок, равный отрезку F_1K, получим точку $A_¨$ ($OA_¨ = a + c\cos ¨$). Соединяя точку $A_¨$ с точкой B, и из точки B, опуская перпендикуляр к прямой $BA_¨$, ($BM_¨ \perp BA_¨$), получим точку $M_¨$. Отрезок $OM_¨ = r$ представляет собой модуль расиуса-вектора. Из точки F_1

отложим величину отрезка $OM_{¨}$ по направлению радиуса-вектора, получим положение точки A_1. Если $¨ = 0$, тогда из точки A_o отложим отрезок $A_o A_{¨o} = c$ и аналогичным путем ($BM_o \perp BA_{¨o}$) получим $OM_0 = r_0 = F_1 A_0 = a - c$. Таким образом, выполняя указанные построения, можно получить положение точки в любом значении угла $¨$.

Теперь получим положение точки в любой момент времени t. Как отмечено, отрезок OM_o представляет собой модуль радиус-вектора при $¨ = 0$, а OM – при $¨ = ®$. В момент времени t, когда точка из A_o переходит A_M одновременно по оси x, конечная точка радиуса-вектора M_o, перемещаясь равномерно, достигает точки M. Тогда отрезок $M_o M$ можно принимать как отрезок времени, масштаб которого будет

$$«_t = \frac{T}{2c} = \frac{®a}{2bV_1} \text{ [сек/м]} \tag{10}$$

Допустим в момент времени t нужно определить положение точки. Для этого из точки M_0 отложим отрезок $X_t = \frac{t}{«_t} = \frac{2V_1 b}{®a} t$ и получим точку M_t и радиус-вектор точки $r_t = OM_t$ в момент времени t. Соединяем точку M_t с точкой B и из точки B опустим перпендикуляр к прямой BM_t, получим точку A_t, а отрезок $A_0 A_t = c\cos ¨$. Из точки F_1 проведем дугу с радиусом $A_0 A_t$ до пересечения с окружностью ***П,*** получим точку K_t. Соединяя точку F_1 с точкой K_t, получим, что $F_1 K_t$ будет направлением радиуса-вектора (рис.2).

Из точки F_1 по направлению $F_1 K_t$, подставляя отрезок, равный OM_t, получим положение точки $A_{¨t}$ в момент времени t.

Очевидно, что когда точка из A_o ($r_0 = a - c = OM_o$) по верхней части эллипса ($A_o B A_M$) переходит в точку $A_M \left(r_M = c + a\right)$, модуль радиуса-вектора увеличивается, и точка M_0, равномерно двигаясь по оси x ($M_0 \rightarrow M$), достигает точки M. Когда точка из A_M по нижней части эллипса ($A_M B_1 A_o$) переходит в точку A_o, модуль радиус-вектора уменьшается и точка M, равномерно двигаясь по оси x ($M \rightarrow M_0$), достигает точки M_0. Это означает, что точка, двигаясь по оси x, дважды переходит через точку M_t. Если время t удовлетворяет условию $2nT < t < (2n+1)T$ ($n = 0,1,2,...$ – число оборотов), то точка проходит по верхней части эллипса ($A_o B A_M$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рой А. Движение по орбитам М.: Мир, 1981. 544с.
2. Адамян В.Г. Альмагест-2 Геометрическая теория гравитации. Ереван: 2004. 222с.
3. Бухгольц Н.Н.Основной курс теоретической механики. М.: 1965. 467с.

Сведения об авторах:

Манандян Левон Туманович

К.т.н., доцент ГИУА Гюмрийского филиала
Кафедра прикладной механики
Тел.: 3-93-94 (раб.), 3-33-95 (дом.)
E-mail: roman@gyumri.am

Адамян Ваник Григорьевич

Д.т.н., профессор ГИУА Гюмрийского филиала
Кафедра прикладной механики
Тел.: 3-94-79 (раб.), 3-60-03(дом.)
E-mail: vgadamyan@mail.ru

ITERATIVE METHODS FOR STABILIZED DISCRETE CONVECTION-DIFFUSION PROBLEMS

Manukyan N.K.
Yerevan, Armenia

In this paper we study the computational cost of solving the convection-diffusion equation using various discretization strategies and iteration solution algorithms. The choice of discretization influences the properties of the discrete solution and also the choice of solution algorithm. The discretizations considered here are stabilized low – order finite element schemes using streamline diffusion, crosswind diffusion and shock-capturing. The latter, shock-capturing discretizations lead to nonlinear algebraic systems and require nonlinear algorithms. We compare various preconditioned Krylov subspace methods including Newton-Krylov methods for nonlinear problems, as well as several preconditioners based on relaxation and incomplete factorization. We find that although enhanced stabilization based on shock-capturing requires fewer degrees of freedom than linear stabilizations to achieve comparable accuracy, the nonlinear algebraic systems are more costly to solve than those derived from a judicious combination of streamline diffusion and crosswind diffusion. Solution algorithms based on GMRES with incomplete block-matrix factorization preconditioning are robust and efficient.

Consider the two-dimensional convection- diffusion equation

$$\begin{aligned} -£\,\Delta U + \quad \nabla U = f \qquad in \quad \Omega, \\ u = g \qquad in \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

where $\quad = (\ _1,\ \ _2)$ is a flow velocity field, £ is a diffusion or viscosity coefficient, and f, g are given functions. Our concern in this paper is the efficient solution of discrete versions of this problem by iterative methods, with emphasis on the effect of discretization strategy on the overall cost of achieving a specified accuracy. We are particularly interested in cases where the solution contains steep gradients, i.e. boundary layers or internal layers.

In this paper we make a comparison of the cost effectiveness of a collection of such discretization strategies, for solving a set of benchmark problems of the form (1). In identifying cost effectiveness, our aims are twofold:

1. To compare and contrast the different discretization strategies in their capability to compute accurate solutions of benchmark problems.
2. To identify efficient solution algorithms for each discretization.

For solution algorithms, we use preconditioned Krylov subspace methods, including Newton-Krilov variants of these ideas to handle nonlinear algebraic systems [1-2]. Our results indicate that the nonlinear shock-capturing discretization yield significantly more accurate solutions than linear stabilization methods.

However, the cost of solving the nonlinear systems also tends to be high. Although linear stabilizations require finer grids than nonlinear ones to achieve comparable accuracy, the overall solution costs of using linear discretizations are lower.

REFERENCES

1. Axelsson O.,On the numerical solution of convection dominated convection-diffusion problems. Mathematics Methods in Energy Research.Philadelphia: SIAM 1984.pp 3-21
2. Chan T.F., Jackson K.R., Nonlinear preconditioned Krylov space methods for discrete Newton algorithms. SIAM J.SCI.Stat. Comput.5, pp.533-542.

Information about autor:

Manukyan Narine K.

Yerevan State University
E-mail: narulka22000@yahoo.com

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО СЛОЯ С ТРЕЩИНАМИ И ЖЕСТКИМИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Манукян Э.А., Мкртчян М.С.
Ереван, Армения

Задачи о трещинах и включениях тесно связаны с задачами определения напряженно-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, содержащих концентраторы напряжений. Ввиду их теоретической и практической важности в вопросах горной механики, механики композитов и прочности разнообразных инженерных конструкций они стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-3]. В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния жестко закрепленной по граням кусочно-однородного упругого слоя при антиплоской деформации, содержащего на горизонтальной оси трещины и абсолютно жесткие тонкие включения.

1.Пусть, отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, кусочно-однородный упругий слой состоит из верхнего слоя $\Omega_+ = \{-\infty < x, z < \infty, 0 \le y \le h_+\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего слоя $\Omega_- = \{-\infty < x, z < \infty, -h_- \le y \le 0\}$ с модулем сдвига G_-, и в плоскости $y = 0$ содержит систему сквозных взаимно не пересекающихся трещин и тонких абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости Oxy составляют систему интервалов соответственно L_1 и L_2.

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \;\; a_k < b_k \quad (k = 1,2,...,N_1); \;\; b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \;\; c_k < d_k \quad (k = 1,2,...,N_2); \;\; d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1})$$

$$L = L_1 \bigcup L_2, \;\; L_1 \bigcap L_2 = \varnothing$$

Пусть, далее, свободные грани верхнего и нижнего слоев жестко закреплены, и, кроме того, берега трещин нагружены силами произвольных интенсивностей $\tau_{yz}\big|_{y=\pm 0} = -\tau_{\pm}^{(1)}(x) \quad (x \in L_1)$, а на систему включений L_2 действуют силы с равнодействующими P_k, направленные вдоль оси Oz и вызывающие продольный сдвиг упругого слоя в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy.

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах трещин, скачков напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородную упругую полосу вдоль оси Ox разрежем на две части, а затем для действующих на их гранях $y=\pm 0$ напряжений введем следующие обозначения $\left(L' = R/L\,;\, R=(-\infty,\infty)\right)$:

$$
\begin{gathered}
-2_{yz}\Big|_{y=+0} = T_+(x) = \begin{cases} 2_+^{(1)}(x) & (x\in L_1) \\ 2_+^{(2)}(x) & (x\in L_2) \\ 2\,(x) & (x\in L') \end{cases} \\
-2_{yz}\Big|_{y=-0} = T_-(x) = \begin{cases} 2_-^{(1)}(x) & (x\in L_1) \\ 2_-^{(2)}(x) & (x\in L_2) \\ 2\,(x) & (x\in L') \end{cases}
\end{gathered} \tag{1}
$$

На системе включений L_2 смещения постоянны:

$$
\begin{gathered}
u_z^+(x,y)\Big|_{y=+0} = u_z^-(x,y)\Big|_{y=-0} = ¢_k = \mathrm{const} \\
x\in(c_k,d_k)\ (k=\overline{1,N_2})
\end{gathered} \tag{2}
$$

Запишем также граничные условия на $y=\pm h_\pm$:

$$
u_z^+(x,y)\Big|_{y=h_+} = 0; \qquad u_z^-(x,y)\Big|_{y=-h_-} = 0 \tag{3}
$$

где $u_z^\pm(x,y)$ – смещения точек соответственно верхней и нижней полос, которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$
\Delta u_z^\pm(x,y) = \frac{\partial^2 u_z^\pm(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^\pm(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{4}
$$

Далее введем в рассмотрение следующие величины:

$$
\begin{gathered}
\Omega(x) = T_+(x) + T_-(x); \qquad h(x) = \frac{du_z^+(x,+0)}{dx} + \frac{du_z^-(x,-0)}{dx} \\
¡\,(x) = T_+(x) - T_-(x) = \begin{cases} \cdot\,(x) & (x\in L_2) \\ 2_+^{(1)}(x) - 2_-^{(1)}(x) & (x\in L_1) \\ 0 & (x\in L') \end{cases}
\end{gathered} \tag{5}
$$

а также плотность дислокаций смещений

$$w(x)=\frac{du_z^+(x,+0)}{dx}-\frac{du_z^-(x,-0)}{dx}=\begin{cases}\text{¨}\,(x) & (x\in L_1)\\ 0 & (x\in R/L_1)\end{cases}\tag{6}$$

Теперь с помощью прямого и обратного преобразования Фурье по переменной x, из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) с учетом обозначений (5)-(6) придем к системе ключевых уравнений задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}\frac{w(s)ds}{s-x}-\frac{1}{\text{®}}\int_{L_1}K(x-s)w(s)ds-\\ -\dfrac{G_+-G_-}{2G_+G_-}\,\text{¡}\,(x)-\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}M(x-s)\,\text{¡}\,(s)ds-\\ -\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_2}M(x-s)\,\text{¡}\,(s)ds=-\frac{G_++G_-}{2G_+G_-}\Omega(x);\quad (x\in R)\\ -\dfrac{G_+-G_-}{2}w(x)-\dfrac{G_+G_-}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}M(x-s)w(s)ds+\\ +\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\text{¡}\,(s)ds}{s-x}+\frac{1}{\text{®}}\int_{L_2}\frac{\text{¡}\,(s)ds}{s-x}-\frac{1}{\text{®}}\int_{L_1}Q(x-s)\,\text{¡}\,(s)ds-\\ -\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_2}Q(x-s)\,\text{¡}\,(s)ds=\frac{G_++G_-}{2}h(x);\qquad (x\in R)\end{cases}\tag{7}$$

где

$$K(x)=\int_0^\infty\frac{G_+[1-\mathrm{th}(\text{ª}h_-)]+G_-[1-\mathrm{th}(\text{ª}h_+)]}{G_+\mathrm{th}(\text{ª}h_-)+G_-\mathrm{th}(\text{ª}h_+)}\sin(\text{ª}x)d\text{ª}$$

$$M(x)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{th}(\text{ª}h_-)-\mathrm{th}(\text{ª}h_+)}{G_+\mathrm{th}(\text{ª}h_-)+G_-\mathrm{th}(\text{ª}h_+)}\cos(\text{ª}x)d\text{ª}$$

$$Q(x)=\int_0^\infty\frac{G_+\mathrm{th}(\text{ª}h_-)[\mathrm{th}(\text{ª}h_+)-1]+G_-\mathrm{th}(\text{ª}h_+)[\mathrm{th}(\text{ª}h_-)-1]}{G_+\mathrm{th}(\text{ª}h_-)+G_-\mathrm{th}(\text{ª}h_+)}\sin(\text{ª}x)d\text{ª}$$

Рассматривая теперь первое уравнение системы (7) на L_1, а второе уравнение на L_2, придем к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\text{®}}\int_{L_1}\frac{\text{¨}(s)ds}{s-x}-\frac{1}{\text{®}}\int_{L_1}K(x-s)\text{¨}(s)ds-\\
&-\frac{1}{\text{®}}\int_{L_2}M(x-s)\cdot(s)ds=\frac{1}{\text{®}}\int_{L_1}M(x-s)[\text{²}_+^{(1)}(s)-\text{²}_-^{(1)}(s)]ds-\\
&-\left[\frac{\text{²}_+^{(1)}(x)}{G_+}+\frac{\text{²}_-^{(1)}(x)}{G_-}\right]; \qquad (x\in L_1)\\
&-\frac{G_+G_-}{\text{®}}\int_{L_1}M(x-s)\text{¨}(s)ds+\frac{1}{\text{®}}\int_{L_2}\frac{\cdot(s)ds}{s-x}-\\
&-\frac{1}{\text{®}}\int_{L_2}Q(x-s)\cdot(s)ds=-\frac{1}{\text{®}}\int_{L_1}\frac{[\text{²}_+^{(1)}(s)-\text{²}_-^{(1)}(s)]ds}{s-x}+\\
&+\frac{1}{\text{®}}\int_{L_1}Q(x-s)[\text{²}_+^{(1)}(s)-\text{²}_-^{(1)}(s)]ds; \qquad (x\in L_2)
\end{aligned}
\right. \tag{8}
$$

Первое уравнение системы (8) должно рассматриваться при условиях

$$\int_{a_k}^{b_k}\text{¨}(x)dx=0, \qquad (k=\overline{1,N_1}) \tag{9}$$

эквивалентных условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а второе уравнение должно рассматриваться при условиях равновесия включений:

$$\int_{c_k}^{d_k}\cdot(x)dx=P_k, \qquad (k=\overline{1,N_2}) \tag{10}$$

Рассматривая же первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\text{²}(x)=&-\frac{G_+G_-}{\text{®}(G_++G_-)}\int_{L_1}\frac{\text{¨}(s)ds}{s-x}+\frac{G_+G_-}{\text{®}(G_++G_-)}\int_{L_1}K(x-s)\text{¨}(s)ds+\\
&+\frac{G_+G_-}{\text{®}(G_++G_-)}\int_{L_1}M(x-s)[\text{²}_+^{(1)}(s)-\text{²}_-^{(1)}(s)]ds+\\
&+\frac{G_+G_-}{\text{®}(G_++G_-)}\int_{L_2}M(x-s)\cdot(s)ds; \qquad (x\in L')
\end{aligned} \tag{11}
$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии упругой полосы с трещинами и абсолютно жесткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)-(10). После решения (8)-(10) разрушающее напряжение определяется формулой (11).

2.Для решения определяющей СИУ (8)–(10) сначала интервалы $((a_k, b_k),\ (k = \overline{1, N_1}))$ и $((c_k, d_k),\ (k = \overline{1, N_2}))$ системы преобразуем в интервалы $(-1;1)$, а затем определяющее СИУ преобразуем в систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций, заданную на интервале $(-1;1)$. Решение системы (8)–(10) строится числено-аналитическим методом [4,5] с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983. 488с.
4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.443с.
5. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publl., Leyden, 1973.

Сведения об авторах:

Манукян Эмиль Абетович

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б
Институт механики. НАН Армении
E-mail: mechins@sci.am

Мкртчян Мушег Сережаевич

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б
Институт механики. НАН Армении
Тел: (37410)-43-16-52
E-mail: mechins@sci.am

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ШТАМПЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

Мартиросян А.Н., Динунц А.С.

Горис, Армения

1. Статические задачи для штампов упругой среды при наличии шероховатости или износа решались в [1,2]. Нестационарная задача штампа с износом рассмотрена в [3]. Рассматривается плоская задача о штампе с износом, приложенным вдоль полуоси $y=0$, $x>0$. Штамп негладкий, $\pm_{xy} \neq 0$, но под ним горизонтальное смещение среды $U=0$. На левой границе полуплоскости $y=0$, $x<0$, $\pm_{yy}=0$, но для антисимметричности задачи принято $U=0$, т.е. граница имеет, как струна, только поперечные перемещения.

Обозначим U,V компоненты перемещений, a,b – скорости упругих волн. Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в плоском случае имеют вид:

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Граничные условия имеют вид $(y=0)$:

$$\pm_{yy}=0,\ x<0,\ \frac{\partial V}{\partial t}+k\pm_{yy}=C_0H(x)¢(t),\ x>0 \qquad (2)$$

$$U=0,\ -\infty<x<\infty$$

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначая $\overline{U},\overline{V}$ преобразование Лапласа по t от U,V, через $\overline{\overline{U}},\overline{\overline{V}}$ преобразование Фурье по x от $\overline{U},\overline{V}\Big|_{y=0}$ можно искать решение в виде

$$\overline{U};\overline{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\bar{\sim}x+i\bar{\ }_n y}\,\overline{\overline{U}}^{(n)};\overline{\overline{V}}^{(n)}d\bar{\sim} \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получим

$$\bar{\ }_n=\sqrt{\frac{\mu^2}{c_n^2}-\bar{\sim}^2},\ \bar{\ }_n^{\pm}=\sqrt{\frac{\mu}{c_n}\pm\bar{\sim}}$$

$$c_1=a,\ c_2=b,\ \bar{\ }_n=\bar{\ }_n^{+}\bar{\ }_n^{-},\ n=1,2 \qquad (4)$$

$s=-i\mu$ есть параметр преобразования Лапласа по t. Кроме того

$$\overline{\overline{V}}^{(1)}=\frac{\bar{1}}{\overline{\sim}}\,\overline{\overline{U}}^{(1)},\quad \overline{\overline{V}}^{(2)}=-\frac{\bar{\sim}}{=_{2}}\,\overline{\overline{U}}^{(2)}$$

Подставляя (3) в (2) и проводя обратное преобразование Фурье по x, можно получить уравнение Винера–Хопфа

$$\pm^{-}_{yy}\frac{k}{s}\left(1+\frac{s\left(\sim^{2}+{}_{1}\;{}_{2}\right)}{k\mu^{2}\circ i\;{}_{2}}\right)=\frac{C_0}{2\text{®}i\sim s}+\frac{V^{+}}{s} \tag{5}$$

$$\pm^{-}_{yy}=\frac{1}{2\text{®}}\int_{0}^{\infty}\overline{\pm}_{yy}\Big|_{y=0}e^{-i\bar{\sim}x}dx,\quad V^{+}=\frac{1}{2\text{®}}\int_{-\infty}^{0}\overline{V}\Big|_{y=0}e^{-i\bar{\sim}x}dx$$

Отметим, что индекс (+) дает функции аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\sim}$, а индекс (-) дает функции аналитические в нижней полуплоскости.

Уравнение (5) Винера-Хопфа решается известным методом в виде [4]

$$\pm^{-}_{yy}=\frac{s}{k}\cdot\frac{C_0}{2\text{®}i\bar{\sim}F^{+}(0)F^{-}(\bar{\sim})s}$$

Обратное преобразование Лапласа и Фурье дает (6), записанное в форме Смирнова–Соболева [5]

$$\begin{aligned}\pm_{yy}&=\frac{1}{2\text{®}i}\int_{\pm-i\infty}^{\pm+i\infty}e^{s(t-\bar{\sim}x)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{k2\text{®}}\cdot\frac{C_0\mu d\bar{\sim}}{si\mu\bar{\sim}F^{+}(0)F^{-}(\bar{\sim})}ds=\\&=-2\,\mathrm{Re}\,i\frac{C_0}{2\text{®}tF^{+}(0)F^{-}(\frac{t}{x})k}=\pm_{s}\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$F^{+}(0)=\sqrt{1-\frac{1}{ak^{\circ}}}$$

$$F^{-}(\sim)=e^{\frac{1}{2\text{®}i}\int_{1/a}^{1/b}\ln\frac{k\;{}_{2}^{\circ}-\left(\P^{2}-i\;{}_{1}^{*}\;{}_{2}\right)}{k\;{}_{2}^{\circ}-\left(\P^{2}+i\;{}_{1}^{*}\;{}_{2}\right)}\frac{d_{\text{¸}}}{{}_{\text{¸}}-\sim}}\cdot e^{\frac{1}{2\text{®}i}\int_{1/b}^{\infty}\ln\frac{k\;{}_{2}^{*}{}^{\circ}-i\left(\P^{2}-{}_{1}^{*}\;{}_{2}^{*}\right)}{k\;{}_{2}^{*}{}^{\circ}+i\left(\P^{2}+i\;{}_{1}^{*}\;{}_{2}^{*}\right)}\frac{d_{\text{¸}}}{{}_{\text{¸}}-\sim}}$$

или переходя к безразмерным переменным

$$a\sim=\frac{at}{x},\ \bar{\sim}=\sim\mu,\ \P=\frac{\text{¦}}{a}\mu,\quad {}_{1}^{*}=\frac{\mu}{a}\sqrt{\text{¦}^{2}-1}$$

$${}_{2}=\frac{\mu}{a}\sqrt{\frac{a^{2}}{b^{2}}-\text{¦}^{2}},\quad {}_{2}^{*}=\frac{\mu}{a}\sqrt{\text{¦}^{2}-\frac{a^{2}}{b^{2}}}$$

$$—^{*}_{n} = \sqrt{—\!\!\sim^{2} - \frac{\mu^{2}}{c_n^{2}}}\ ,\ c_1 = a\,, c_2 = b$$

получим

$$F^{-}(\sim) = \exp\left(\frac{1}{\text{®}} \int\limits_{1}^{a/b} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\text{¦}^{2}-1}\sqrt{\frac{a^{2}}{b^{2}}-\text{¦}^{2}}}{ka\circ\sqrt{\frac{a^{2}}{b^{2}}-\text{¦}^{2}-\text{¦}^{2}}} \frac{d\text{¦}}{\text{¦}-\sim a} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\text{®}} \int\limits_{a/b}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\text{¦}^{2}-1}\sqrt{\text{¦}^{2}-\frac{a^{2}}{b^{2}}-\text{¦}^{2}}}{ka\circ\sqrt{\text{¦}^{2}-\frac{a^{2}}{b^{2}}}} \frac{d\text{¦}}{\text{¦}-\sim a} \right)$$

При $x = 0$ получится

$$\pm_{yy} = 2\operatorname{Re} i \frac{C_0}{2\text{®}tF^{+}(0)F^{-}(\infty)k} \tag{7}$$

где $F^{-}(\infty) = 1$, откуда

$$\pm_{yy} = \frac{C_0}{\text{®}tk} \operatorname{Re} 1/\sqrt{\frac{1}{ak\circ} - 1} \tag{8}$$

Причем особенностей при $x = 0$ нет.

Хотя при $x = 0$ $\pm_{yy}$ конечно, теория упругости годится до того, как $\pm_{yy}$ достигнет предела текучести $\pm_{s}$. Тогда получится условие на упругое решение $\pm_{yy} < \pm_{s}$,

$$\operatorname{Re} 1/\sqrt{\frac{1}{ak\circ} - 1} < \pm_{s} \frac{\text{®}tk}{C_0} \tag{9}$$

Допустим $\dfrac{1}{ak\circ} > 1$, тогда $1/\sqrt{\dfrac{1}{ak\circ} - 1} < \pm_{s} \dfrac{\text{®}tk}{C_0}$.

Для $y = 0$, $x > 0$ имеет место (6)

$$\pm_{yy} = \operatorname{Re} \frac{C_0}{\text{®}tk\sqrt{\frac{1}{ak\circ} - 1}F^{-}(\frac{t}{x})}$$

$ka\circ$	0,1	0,4	0,8
x/at	0,1	0,1	0,1
0,2	0.711704	0.695566	0.672134
0,4	0.585756	0.552452	0.528352
0,6	0.978129	0.937057	0.926261
0,8	1.29186	1.25798	1.27588
1	1.54281	1.52019	1.41872
1,2	1.47803	1.46714	1.38373
1,4	1.43826	1.43383	1.3618
1,6	1.41154	1.41107	1.34679
1,8	1.39243	1.39456	1.33588
2	1.37812	1.38206	1.3276
2,2	1.367	1.37227	1.3211
2,4	1.35814	1.3644	1.31586
2,6	1.3509	1.35794	1.31155
2,8	1.34488	1.35255	1.30794
3	1.3398	1.34797	1.30487
3,2	1.33545	1.34404	1.30224
3,4	1.33169	1.34063	1.29995
3,6	1.32841	1.33764	1.29794
3,8	1.32551	1.33501	1.29616
4	1.32294	1.33266	1.29458
4,2	1.32065	1.33056	1.29316
4,4	1.31859	1.32867	1.29188
4,6	1.31672	1.32695	1.29072
4,8	1.31503	1.3254	1.28967
5	1.31349	1.32398	1.28871

2. Теперь рассмотрим частный случай, когда $k = 0$

$$\pm_{yy} = 0, \;\; x < 0 \quad \frac{\partial V}{\partial t} = C_0 H(x)\text{¢}(t), \;\; x > 0 \tag{10}$$

$U = 0, \;\; -\infty < x < \infty$

Аналогично получим решение в виде

$$\pm_{yy} = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\frac{C_0\circ}{2\text{®}}\, 2\,\mathrm{Re}\, i\, \frac{{}^{-}_{2}\left(\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}F^{-}\left(\frac{t}{x}\right)F^{+}(0)(-x)} =$$

$$= -\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\frac{C_0\circ}{2\text{®}}\, 2\,\mathrm{Re}\, \frac{i\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{t}{x}}}{tF^{-}\left(\frac{t}{x}\right)F^{+}(0)} = \tag{11}$$

$$=-\frac{2a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{C_0\,{}^\circ}{\sqrt{2ab}}\operatorname{Re}\frac{\sqrt{t-\frac{x}{b}}}{t\sqrt{x}F^-\left(\frac{t}{x}\right)}$$

где

$$F^+(0)=\sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}},\ F^-(\sim)=e^{-\frac{1}{\circledR}\int\limits_{1/a}^{1/b}arctg\frac{\stackrel{*}{1}\ \ \stackrel{*}{2}}{\text{¸}^{\,2}}\frac{d\text{¸}}{\text{¸}-\sim}}$$

$$F^-(\sim)=\exp\left(-\frac{1}{\circledR}\int\limits_{1}^{a/b}arctg\frac{\sqrt{\text{¦}^2-1}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\text{¦}^2}}{\text{¦}^2}\frac{d\text{¦}}{\text{¦}-\sim a}\right),\ a\sim=\frac{at}{x}$$

т. е. известная особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И.Я. Сжатие упругих тел, соприкасающихся по прямолинейному отрезку/ Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд.АН СССР, 1961.С. 564-571
2. Верлинский С.В., Шекян А.Л., Шекян Л.А. Пространственная контактная задача теории упругости для цилиндра конечной длины и полупространства при наличии фактора износа /Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2007. С.127-130.
3. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Варданян С.В., Мартиросян Г.А., Костандян К.С., Динунц А.С. Нестационарные задачи о трещинах и штампах/ Вестник, Ереван: 2007. С.106-119.
4. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: И.Л.,1962. 278с.
5. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред /«Зангак–97», 2007, с.244.

Сведения об авторах

Мартиросян А.Н.
Д. ф.-м. н., профессор, зав. каф. матем. в ГГУ
Адрес: Авангард 4, Горис, Армения
Тел.: (0284)23638, 22048, (093)192465
E-mail: dinunts2007@rambler.ru

Динунц А.С.
Преподавательница каф. матем. в ГГУ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ОТРАЖЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ОТ ЖЕСТКОГО ЭКРАНА

Мартиросян А.Н., Динунц А.С.
Горис, Армения

Рассматривается упругая плоскость, состоящая из двух полуплоскостей с различными свойствами. Левая полупрямая их границы представляет линию полного контакта, а правая полупрямая является жесткой заделкой.

В верхней полуплоскости имеется точечный импульс. Задача приводится к системе Винера – Хопфа, которая решается путем приведения задачи Гильберта к решению системы интегральных уравнений Фредгольма, правой частью которой является факторизация матричного коэффициента указанной системы Винера-Хопфа на бесконечности.

1.Приведение задачи к системе Винера-Хопфа.

Рассмотрим задачу о точечном источнике, действующем в верхней полуплоскости $y>0$ при наличии нижней полуплоскости с другими упругими постоянными и жесткого экрана при $x>0$. Уравнение движения в верхней полуплоскости имеет вид

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+b_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}+\left(a_1^2-b_1^{\,2}\right)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+b_1^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\left(a_1^2-b_1^2\right)\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y} \tag{1.1}$$

где $U_1=u_1-u_0$, $V_1=\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_0$, u_0,v_0 определяются из следующих уравнений [1, 5]:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+b_1^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\left(a_1^2-b_1^{\,2}\right)\frac{\partial^2 \text{з}_0}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{X_0}{\circ_1}\mathrm{H}(x-x_0)\mathrm{H}(y-y_0)\text{¢}(t)$$

$$\frac{\partial^2 \text{з}_0}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 \text{з}_0}{\partial y^2}+b_1^2\frac{\partial^2 \text{з}_0}{\partial x^2}+\left(a_1^2-b_1^{\,2}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{Y_0}{\circ_1}\mathrm{H}(x-x_0)\mathrm{H}(y-y_0)\text{¢}(t)$$

Для $y<0$ те же уравнения (1.1) с индексом 2, где u_1, v_1 и u_2, v_2 – перемещения, соответственно, в верхней и нижней полуплоскости, $\mathrm{H}(x)$– есть единичная функция Хевисайда, $\text{¢}(t)$ – функция Дирака.

Граничные условия имеют вид:

$$u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ \sigma_{1xy} = \sigma_{2xy},\ \sigma_{1yy} = \sigma_{2yy},\quad x<0$$

$$u_1 = 0,\ v_1 = 0,\ u_2 = 0,\ v_2 = 0,\quad x>0 \qquad (1.2)$$

$$u_1, v_1, u_2, v_2 = O(r^{\frac{1}{2}}),\ r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \text{ (условие на ребре)}$$

или для возмущений в верхней полуплоскости

$$U_1 + u_0 = u_2,\ V_1 + v_0 = v_2,\ \sigma_{1xy} + \sigma^0_{1xy} = \sigma_{2xy},\ \sigma_{1yy} + \sigma^0_{1yy} = \sigma_{2yy},\ x<0$$

$$U_1 = -u_0,\ V_1 = -v_0,\ u_2 = 0,\ v_2 = 0,\quad x>0 \qquad (1.3)$$

Обозначим чертой преобразования Лапласа по t, а двумя чертами преобразования Лапласа и Фурье по x, тогда из уравнений (1.1) получатся

$$\bar{\bar V}_1^{(k)} = \frac{a_1^2\alpha_1^2 - b_1^2\alpha_k^2}{\left(a_1^2 - b_1^2\right)\xi\alpha_k}\bar{\bar U}_1^{(k)},\ \bar{\bar V}_2^{(k)} = \frac{a_2^2\gamma_1^2 - b_2^2\gamma_k^2}{\left(a_2^2 - b_2^2\right)\xi\gamma_1}U_2^{(k)}$$

$$\bar U_1; \bar V_1 = \sum_{k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x + i\alpha_k y}\bar{\bar U}_1^{(k)}; \bar{\bar V}_1^{(k)} d\xi$$

$$\bar u_2; \bar v_2 = \sum_{k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x + i\gamma_k y}\bar{\bar u}_2^{(k)}; \bar{\bar v}_2^{(k)} d\xi$$

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_k^2} - \xi^2},\ \gamma_k = -\sqrt{\frac{\omega^2}{d_k^2} - \xi^2} \qquad (1.4)$$

$$c_1 = a_1,\ c_2 = b_1,\ d_1 = a_2,\ d_2 = b_2$$

где $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа по t; c_k и d_k – скорости упругих волн в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$; ρ_1 и ρ_2 – плотности сред занимающих верхнюю и нижнюю полуплоскости, соответственно.

Граничные условия при y=0 после преобразований имеют вид

$$\bar{\bar U}_1^{(1)} + \bar{\bar U}_1^{(2)} + \bar{\bar u}_0 - \bar{\bar u}_2^{(1)} - u_2^{(2)} = U^-,\ \bar{\bar V}_1^{(1)} + \bar{\bar V}_1^{(2)} + \bar v_0 = V^-$$

$$\bar{\bar\sigma}_{1xy} + \bar{\bar\sigma}^0_{1xy} - \bar{\bar\sigma}_{2xy} = \Omega_1^-,\ \bar{\bar\sigma}_{1yy} + \bar{\bar\sigma}^0_{1yy} - \bar{\bar\sigma}_{2yy} = \Omega_2^-,\ \bar{\bar v}_2^{(1)} + \bar{\bar v}_2^{(2)} = V_2^+$$

$$\bar{\bar U}_1^{(1)} + \bar{\bar U}_1^{(2)} + \bar{\bar u}_0 = \Phi^+,\ \bar{\bar V}_1^{(1)} + \bar{\bar V}_1^{(2)} + \bar v_0 = \Phi_1^+,\ \bar{\bar u}_2^{(1)} + \bar{\bar u}_2^{(2)} = u_2^+$$

$$\bar{\bar u}_0; \bar{\bar v}_0 = \sum_0^2 \bar{\bar u}_0^{(k)}; \bar{\bar v}_0^{(k)}\psi_k,\ \psi_k = \exp\left(-i\xi x_0 - i\alpha_k y_0\right),\quad \alpha_0 = 0,\ y_0 > 0$$

$$\bar{\bar u}_0^{(0)} = \frac{iX_0}{2\pi\rho_1 a_1^2\alpha_1^2\xi},\ \bar{\bar u}_0^{(1)} = -\frac{i}{4\pi\rho_1}\frac{X_0\xi + Y_0\alpha_1}{\alpha_1^2\omega^2}$$

$$\overline{\overline{u}}_0^{(2)}=-\frac{i}{4®°_1}\frac{X_0\ \ _2-Y_0\overline{\sim}}{_2\overline{\sim}µ^2}$$

$$³_0^{(0)}=\frac{i}{2®°_1}\frac{Y_0}{b_1^2\overline{\sim}}\ \ \frac{2}{2},\ ³_0^{(1)}=\frac{1}{\overline{\sim}}\overline{\overline{u}}_0^{(1)},\ ³_0^{(2)}=-\frac{\overline{\sim}}{2}\overline{\overline{u}}_0^{(2)}$$

$$U^-=\frac{1}{2®}\int_0^\infty(u_1-u_2)e^{-i\sim x}dx\,,V^-=\frac{1}{2®}\int_0^\infty(³_1-³_2)e^{-i\sim x}dx$$

$$\Omega_1^-=\frac{1}{2®}\int_0^\infty(±_{1xy}-±_{2xy})e^{-i\sim x}dx,\Omega_2^-=\frac{1}{2®}\int_0^\infty(±_{1yy}-±_{2yy})e^{-i\sim x}dx,\ y=0 \quad (1.5)$$

$$¡^+=\frac{1}{2®}\int_{-\infty}^0u_1e^{-i\sim x}dx\,,\ ¡_1^+=\frac{1}{2®}\int_{-\infty}^0³_1e^{-i\sim x}dx,U_2^+=\frac{1}{2®}\int_{-\infty}^0u_2e^{-i\sim x}dx$$

$$V_2^+=\frac{1}{2®}\int_{-\infty}^0³_2e^{-i\sim x}dx,\ y=0 \quad (1.6)$$

где индекс (+) дает функции аналитические в верхней полуплоскости плоскости $\overline{\sim}$, а индекс (-) – функции аналитические в нижней полуплоскости. X_0,Y_0 есть постоянные величины. Подставляя (1.4) в (1.5) и проводя обратное преобразование Фурье по x, можно получить систему уравнений Винера-Хопфа:

$$¡^+-U_2^+=U^-,\ ¡_1^+-V_2^+=V^- \quad (1.7)$$

$$a_{11}\ _1^+¡^++a_{12}\ _1^+¡_1^+-\frac{\Omega_1^-}{_1^-}+d_1=0$$

$$a_{21}\ _1^+¡^++a_{22}\ _1^+¡_1^+-\frac{\Omega_2^-}{_1^-}+d_2=0 \quad (1.8)$$

где

$$a_{11}=\frac{µ^2°_1i}{\sim^2+\ _1\ _2}-\frac{¥_1}{_1}\frac{µ^2°_2i}{(\sim^2+¥_1¥_2)},a_{22}=\frac{°_1i\ _2µ^2}{_1(\sim^2+\ _1\ _2)}-\frac{°_2iµ^2¥_2}{_1(\sim^2+¥_1¥_2)}$$

$$a_{12}=\frac{°_1i}{_1}\frac{\sim}{\sim^2+\ _1\ _2}\left[2\ _1\ _2b_1^2-\left(µ^2-2\sim^2b_1^2\right)\right]-$$

$$-\frac{°_2b_2^2i\sim}{_1(\sim^2+¥_1¥_2)}\left[2¥_1¥_2-\left(\frac{µ^2}{b_2^2}-2\sim^2\right)\right] \quad (1.9)$$

$$a_{21}=\frac{°_1 i\sim}{_1\left(\sim^2+\ _1\ _2\right)}\left[\mu^2-2b_1^2\sim^2-2b_1^2\ _1\ _2\right]-\frac{°_2 i\sim}{_1\left(\sim^2+¥_1¥_2\right)}\left[\mu^2-2b_2^2\sim^2-2b_2^2¥_1¥_2\right]$$

$$d_1=\sum_0^2 d_{1k}\ddot{}\ _k,\ d_2=\sum_0^2 d_{2k}\ddot{}\ _k,\ d_{10}=\frac{X_0\mu^2\ _2+Y_0a_1^2\bar{\sim}\ _1\left(\ _1-\ _2\right)}{2®a_1^2\bar{\sim}\ _1\ _2\ \bar{_1}\left(\bar{\sim}^2+\ _1\ _2\right)}$$

$$d_{20}=\frac{Y_0\mu^2\ _1+X_0b_1^2\bar{\sim}\ _2\left(\ _1-\ _2\right)}{2®b_1^2\bar{\sim}\ _1\ _2\ \bar{_1}\left(\bar{\sim}^2+\ _1\ _2\right)},\ d_{11}=-\frac{b_1^2\left(X_0\bar{\sim}+Y_0\ _1\right)}{2®\mu^2\ _1\ \bar{_1}}$$

$$d_{12}=-\frac{b_1^2\left(X_0\ _2-Y_0\bar{\sim}\right)}{2®\mu^2\bar{\sim}\ \bar{_1}},\ d_{21}=-\frac{a_1^2\left(X_0\bar{\sim}+Y_0\ _1\right)}{2®\mu^2\bar{\sim}\ \bar{_1}}$$

$$d_{22}=-\frac{a_1^2\left(-X_0\ _2+Y_0\bar{\sim}\right)}{2®\mu^2\ _2\ \bar{_1}}$$

$$\overset{=(1)}{u_1}=\frac{\sim\ _2}{\sim^2+\ _1\ _2}\left(¡_1^+ +\frac{\sim}{_2}¡^+ -\sum_0^2\left(\overset{=(k)}{³_0}+\frac{\sim}{_2}\overset{=(k)}{u_0}\right)\right)$$

$$\overset{=(2)}{u_1}=\frac{\sim\ _2}{\sim^2+\ _1\ _2}\left(\frac{_1}{\sim}¡^+ -¡_1^+ -\sum_0^2\left(-\overset{=(k)}{³_0}+\frac{_1}{\sim}\overset{=(k)}{u_0}\right)\right)$$

$$\overset{=(1)}{u_2}=\frac{\sim¥_2}{\sim^2+¥_1¥_2}\left(\frac{\sim}{¥_2}U_2^+ +V_2^+\right),\ \overset{=(2)}{u_2}=\frac{\sim¥_2}{\sim^2+¥_1¥_2}\left(\frac{¥_1}{\sim}U_2^+ -V_2^+\right)$$

Аналогичные формулы получатся из (1.4) для $\overset{=(k)}{³_1}$ и $\overset{=(k)}{³_2}$. Учитывая условие на ребре (1.2), можно из (1.7) убедиться, что

$$U^-=0,\ V^-=0,\ ¡^+=U_2^+,\ ¡_1^+=V_2^+ \tag{1.10}$$

2.Решение системы (1.8).

Для получения эффективного решения (1.8) применяем методы [2]. Уравнения (1.8) приводятся к задаче Гильберта.

$$¤^+=G¤^-+g \tag{2.1}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ d=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},\ g(\sim)=A^{-1}(\sim)\cdot\begin{pmatrix}-d_1\\ -d_2\end{pmatrix}$$

$$¤^+=\begin{pmatrix}{}_1^+¡^+\\ {}_1^+¡_1^+\end{pmatrix},\quad {}_1^{\pm}=\sqrt{\frac{\mu}{a_1}\pm\bar{\sim}}$$

$$G(\sim) = A^{-1}(\sim) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{d} & -\dfrac{a_{12}}{d} \\ -\dfrac{a_{21}}{d} & \dfrac{a_{11}}{d} \end{pmatrix}, ¤^{-} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Omega_1^{-}}{{}^{-}_{1}} \\ \dfrac{\Omega_2^{-}}{{}^{-}_{1}} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Матрица $G(\bar{\sim})$ на действительной оси $\bar{\sim}$ не имеет особенностей, так как $\bar{\sim} = \pm\dfrac{\mu}{c_{1,2}}$ – точки ветвления находятся вне действительной оси [2], в силу того, что преобразование Лапласа содержит в μ малую мнимую часть. Тем не менее, важно знать поведение $G(\bar{\sim})$ при $|\bar{\sim}| \approx \infty$. Поскольку при $|\bar{\sim}| \approx \infty$

$$\begin{aligned} & a_{11} = \frac{2a_1^2 b_1^2 \circ_1 i}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{2a_2^2 b_2^2 \circ_2 i}{a_2^2 + b_2^2} = a_{11}^0 i\,,\, a_{11}^0 = \frac{2a_1^2 b_1^2 \circ_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{2a_2^2 b_2^2 \circ_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ & a_{22} = a_{11} = a_{11}^0 i \\ & a_{12} = \left(\frac{2b_1^4 \circ_1}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{2b_2^4 \circ_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \operatorname{sgn}\sim = a_{12}^0 \operatorname{sgn}\sim \\ & a_{12}^0 = \frac{2b_1^4 \circ_1}{a_1^2 + b_1^2} - \frac{2b_2^4 \circ_2}{a_2^2 + b_2^2},\ a_{21} = -a_{12} = -a_{12}^0 \operatorname{sgn}\sim \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Как видно из (2.3), значения $G(\bar{\sim})$ при $\bar{\sim} = \pm\infty$ различны, т. е. в переменной $¦ = \dfrac{1}{\bar{\sim}}$ в точке $¦ = \pm 0$ имеется разрыв первого рода. Следуя [3], можно привести задачу к задаче с непрерывными коэффициентами. Для этого следует определить особенность решения в точке $x = 0$, соответствующей в преобразовании Фурье $\bar{\sim} \approx \infty$. Согласно [2] следует найти корни уравнения

$$\left| G^{-1}(+0)G(-0) - ª^{*} E \right| = 0 \qquad (2.4)$$

которое в данном случае имеет решение

$$ª_1^{*} = \frac{¨_2}{¨_1},\ ¨_k = \circ_k b_k^2 + \circ_{3-k} b_{3-k}^2 \frac{a_{3-k}^2 - b_{3-k}^2}{a_{3-k}^2 + b_{3-k}^2},\ k = 1,2 \qquad (2.5)$$

которое для $ª^{*} = \exp(2®f_2)$ дает $f_2 = \dfrac{1}{2®} \ln \dfrac{¨_2}{¨_1}$ (2.6)

Для того чтобы устранить эту особенность, соответствующую разрыву матрицы $G(\overline{\sim})$, можно записать при $\overline{\sim} \approx \infty$ уравнения (1.8), в которых оставлены лишь особые члены, т. е. не учтен свободный член

$$a_{11}^{0}\ {}_{1}^{+}\text{¡}^{+} - a_{12}^{0} i\,\mathrm{sgn}\sim\ {}_{1}^{+}\text{¡}_{1}^{+} = -\frac{i\Omega_1^-}{{}_{1}^{-}}$$

$$a_{12}^{0} i\,\mathrm{sgn}\sim\ {}_{1}^{+}\text{¡}^{+} - i a_{11}^{0}\ {}_{1}^{+}\text{¡}_{1}^{+} = -\frac{\Omega_2^-}{{}_{1}^{-}} \tag{2.7}$$

из которых, вводя новые функции, как [4], [6], можно получить

$$\text{¡}^{+}(\overline{\sim}) = G_3(\overline{\sim})\,\text{¡}^{-}(\overline{\sim}) + g_2(\overline{\sim}) \tag{2.8}$$

$$G_2(\overline{\sim}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2} - \frac{a_{21}-a_{12}}{2} i\right)\left(\overline{\ }{}_{1}^{+}\right)^{2if_2} & \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} + \frac{a_{21}+a_{12}}{2} i\right)\left(\overline{\ }{}_{1}^{+}\right)^{-2if_2} \\ \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} - \frac{a_{21}+a_{12}}{2} i\right)\left(\overline{\ }{}_{1}^{+}\right)^{2if_2} & \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2} + \frac{a_{12}-a_{21}}{2} i\right)\left(\overline{\ }{}_{1}^{+}\right)^{-2if_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{¡}^{+}(\overline{\sim}) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+ \\ \Psi_1^+ \end{pmatrix},\ \text{¡}^{-}(\overline{\sim}) = \begin{pmatrix} \Pi_1^- \\ \Pi_2^- \end{pmatrix},\ g_2(\overline{\sim}) = \begin{pmatrix} -\left(d_1 + i d_2\right) \\ -\left(d_1 - i d_2\right) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$G_3(\overline{\sim}) = G_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \left({}_{1}^{-}\right)^{2if_2} & 0 \\ 0 & \left({}_{1}^{-}\right)^{-2if_2} \end{pmatrix}$$

$${}_{1}^{+}\text{¡}^{+} + i\ {}_{1}^{+}\text{¡}_{1}^{+} = \Phi_2^+,\ \Phi_2^+ = \Phi_1^+\left(\overline{\ }{}_{1}^{+}\right)^{2if_2},\quad {}_{1}^{+}\text{¡}^{+} - i\ {}_{1}^{+}\text{¡}_{1}^{+} = \Psi_2^+$$

$$\Psi_2^+ = \Psi_1^+\left(\overline{\ }{}_{1}^{+}\right)^{-2if_2},\ \Phi_2^-\left(\overline{\sim}\right) = \Pi_1^-\left(\overline{\ }{}_{1}^{-}\right)^{2if_2},\ \Psi_2^-\left(\overline{\sim}\right) = \Pi_2^-\left(\overline{\ }{}_{1}^{-}\right)^{-2if_2} \tag{2.10}$$

Используя значения коэффициентов с учетом (2.3) при $\left|\overline{\sim}\right| = \infty$, можно показать, что матрица $G_3(\overline{\sim})$ непрерывна на всей оси $\overline{\sim}$, включая $\pm\infty$, где она постоянная. Решение задачи (2.8), ограниченное на бесконечности, дано в [2] в виде

$$\text{¡}\left(\overline{\sim}\right) = \frac{X\left(\overline{\sim}\right)}{2\text{®} i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(X^{+}(\text{¸})\right)^{-1} g_2(\text{¸})\, d\text{¸}}{\text{¸} - \overline{\sim}} \tag{2.11}$$

где матрицы-функции $X\left(\overline{\sim}\right) = X^{+}\left(\overline{\sim}\right) X^{-}\left(\overline{\sim}\right)$ удовлетворяют однородным уравнениям

$$X^{+}\left(\overline{\sim}\right) = G_3\left(\overline{\sim}\right) X^{-}\left(\overline{\sim}\right),\ G_3\left(\overline{\sim}\right) = X^{\pm}\left(\overline{\sim}\right) \tag{2.12}$$

Как показано в [2], уравнение для $X^{-}\left(\overline{\sim}\right)$ можно записать в виде системы Фредгольма

$$X^{-}(\sim) - \frac{1}{2\text{®}i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G_3^{-1}(\bar{\sim})G_3(\text{¸}) - \mathrm{E}}{\text{¸} - \bar{\sim}}X^{-}(\text{¸})\,d\text{¸} = \text{¥}(\bar{\sim}) \tag{2.13}$$

где $\text{¥}(\bar{\sim})$ есть асимптотическое поведение $X^{-}(\bar{\sim})$ при $\bar{\sim} \approx \infty$, E есть единичная матрица, причем, поскольку при $\bar{\sim} \approx \infty$, $G_3(\bar{\sim}) = \mathrm{const}$, можно считать $X^{-}(\bar{\sim}) = \mathrm{const}, \text{¥}(\bar{\sim}) = E.$

Из (2.10), осуществляя обратные преобразования Лапласа и Фурье, можно получить

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{\pm}}_{1xy} + \bar{\bar{\pm}}^{0}_{1xy} - \bar{\bar{\pm}}_{2xy} \\ \bar{\bar{\pm}}_{1yy} + \bar{\bar{\pm}}^{0}_{1yy} - \bar{\bar{\pm}}_{2yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\text{®}i}\int\limits_{\pm - i\infty}^{\pm + \infty} e^{st}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\sim}x}\begin{pmatrix} \Omega_1^{-} \\ \Omega_2^{-} \end{pmatrix} d\bar{\sim} \tag{2.14}$$

где

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^{-} \\ \Omega_2^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2i}\left(\ _1^{-}\right)^{2if_2+1} & -\dfrac{1}{2i}\left(\ _1^{-}\right)^{-2if_2+1} \\ \dfrac{1}{2}\left(\ _1^{-}\right)^{2if_2+1} & -\dfrac{1}{2}\left(\ _1^{-}\right)^{-2if_2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Pi_1^{-} \\ \Pi_2^{-} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\pm}}_{1xy} + \bar{\bar{\pm}}^{0}_{1xy} - \bar{\bar{\pm}}_{2xy} = \Omega_1^{-}, \bar{\bar{\pm}}_{1yy} + \bar{\bar{\pm}}^{0}_{1yy} - \bar{\bar{\pm}}_{2yy} = \Omega_2^{-}$$

Для $x \to 0$, $\bar{\sim} \to \infty$, $X^{-}(\bar{\sim}) \to 1$ можно получить

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{\pm}}_{1xy} + \bar{\bar{\pm}}^{0}_{1xy} - \bar{\bar{\pm}}_{2xy} \\ \bar{\bar{\pm}}_{1yy} + \bar{\bar{\pm}}^{0}_{1yy} - \bar{\bar{\pm}}_{2yy} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2\text{®}i}\int\limits_{\pm - i\infty}^{\pm + \infty} e^{st}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\sim}x}\frac{i}{2\sqrt{\bar{\sim}}}\begin{pmatrix} i^{1+2if_2}(\bar{\sim})^{if_2} & i^{1-2if_2}(\bar{\sim})^{-if_2} \\ i^{2if_2}(\bar{\sim})^{if_2} & -i^{-2if_2}(\bar{\sim})^{-if_2} \end{pmatrix}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(X^{+}(\text{¸})\right)^{-1}g_2(\text{¸})d\text{¸}}{2\text{®}i}d\bar{\sim} \tag{2.15}$$

Вводя

$$\mu = is\,, \quad \text{¸} = \frac{\mu}{a_1}\text{¸}_0 \tag{$*$}$$

и используя (2.9), (1.18) в безразмерных переменных $\text{¦}', \text{¸}_0$, получим

$$d_1(\text{¸}) = \sum_{k=0}^{2} d_{1k}(\text{¸}_0)\mu^{-5/2}e^{s\ddot{\ }_k^0}, d_2(\text{¸}) = \sum_{k=0}^{2} d_{2k}(\text{¸}_0)\mu^{-5/2}e^{s\ddot{\ }_k^0}$$

$$\ddot{\ }_k^0 = \text{¸}_0\frac{X_0}{a_1} + Y_0\ _k^0, \quad _0^0 = 0, \quad _1^0 = \frac{1}{a_1}\sqrt{1 - \text{¸}_0^2}, \quad _2^0 = \frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{a_1^2}{b_1^2} - \text{¸}_0^2}$$

$$g_2(\text{¸}) = -\mu^{-5/2}\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{2}\left(d_{1k}(\text{¸}_0)+id_{2k}(\text{¸}_0)\right)e^{s\,\ddot{}\,{}_k^0}\\ \sum\limits_{k=0}^{2}\left(d_{1k}(\text{¸}_0)-id_{2k}(\text{¸}_0)\right)e^{s\,\ddot{}\,{}_k^0}\end{pmatrix}$$

причем d_{1k}, d_{2k} находятся подстановкой $(*)$ в (1.9). Вычисляя в (2.15) первый интеграл по $\bar{\sim}$, а затем интеграл по s, можно привести решение к форме Смирнова-Соболева

$$\begin{pmatrix}\overline{\overline{\pm}}_{1xy}+\overline{\overline{\pm}}^{0}_{1xy}-\overline{\overline{\pm}}_{2xy}\\ \overline{\overline{\pm}}_{1yy}+\overline{\overline{\pm}}^{0}_{1yy}-\overline{\overline{\pm}}_{2yy}\end{pmatrix}=$$

$$=\mathrm{Re}\frac{q}{\sqrt{®}ia_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{X^{+}(\text{¸}_0)\right\}^{-1}\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{2}\left(d_{1k}(\text{¸}_0)+id_{2k}(\text{¸}_0)\right)\cdot(t+\ddot{}\,{}_k^0)^{1/2}H\left(t+\ddot{}\,{}_k^0\right)\\ \sum\limits_{k=0}^{2}\left(d_{1k}(\text{¸}_0)-id_{2k}(\text{¸}_0)\right)\cdot(t+\ddot{}\,{}_k^0)^{1/2}H\left(t+\ddot{}\,{}_k^0\right)\end{pmatrix}d\text{¸}_0 \qquad (2.16)$$

где

$$q=\begin{pmatrix}-i^{\frac{1}{2}+if_2}\dfrac{x^{-\frac{1}{2}-if_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-if_2\right)} & -i^{\frac{1}{2}-if_2}\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+if_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+if_2\right)}\\ i^{\frac{3}{2}+if_2}\dfrac{x^{-\frac{1}{2}-if_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-if_2\right)} & i^{\frac{3}{2}-if_2}\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+if_2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+if_2\right)}\end{pmatrix}$$

Таким образом, методом Винера-Хопфа для сложного случая особенности получено решение вблизи края $x=+0$, особенность которого совпадает с результатом [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Погосян С.М. Решение смешанной граничной задачи для упругого полупространства. //Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. N4.
2. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.

3. Rice J.R., Elastic fracture mechanics concepts for interfacial crakes. J. Appl. Mech. Asme. E. 1988. Vol. 55. PP. 98-103.
4. Hakobyan V.N., Sahakyan A. V. and Sargsyan A. H., The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. The problems of dynamics of interaction of deformable media. V international conference, October 1-7, Goris, 2005, p. 56-60.
5. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред. «Зангак-97», 2007, с.244.
6. Bagdoev A.G., Martirosyan A.N., Kostandyan K.S. Dinunts A.S. The analytical and numerical solution of second, third, fourth and sixth order Wienner-Hopf system in unsteady elasticity mixed boundary problems, «Актуальные проблемы механики сплошной среды» Ереван: 2007, с. 458-461.

Сведения об авторах:

Мартиросян А.Н.
Д. ф.-м. н., профессор, зав. каф. матем. в ГГУ
Адрес: Авангард 4, Горис, Армения
Тел.: (0284)23638, 22048, (093)192465
E-mail: dinunts2007@rambler.ru

Динунц А.С.
Преподавательница каф. матем. в ГГУ

АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ СТРИНГЕРОВ СО СЛОЕМ

Мирзоян С.Е., Акопян В.В., Мирзоян Е.С.
Ереван, Армения

Пусть упругий бесконечный слой толщины $2h$, отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, по двум своим плоскостям $y=-h$ и $y=h$ усилен симметрично расположенными одинаковыми накладками конечной длины $2a$ и малой толщины h_1, в направлении оси Oz находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига). Тогда отличной от нуля будет только компонента перемещений $u_z(x,y)$ в направлении оси Oz. В результате, имеет место контакт двух одинаковых симметрично расположенных стрингеров с полосой.

Предположим, что к стрингерам в направлении оси Oz приложены силы интенсивности $\tau_0(x)$ $\left(|x|\le a\right)$, под действием которых система стрингеры–полоса будет находиться в условиях антиплоской деформации. Стрингеры рассматриваются как одномерные упругие континуумы и, поэтому, на участках контакта $[-a,a]$ стрингеров с полосой будут действовать только тангенциальные контактные напряжения $\tau(x)$ [1].

При таких предположениях требуется определить контактные напряжения $\tau(x)$.

Условие контакта запишем в виде

$$\frac{\partial u_z^{(1)}(x,\pm h)}{\partial x}=\frac{\partial u_z^{(2)}(x,\pm h)}{\partial x},\qquad x\in\left[-a,a\right] \tag{1}$$

где $u_z^{(i)}(x,\pm h)$ $\left(i=1,2\right)$ – упругие перемещения, соответственно, стрингеров и полосы на линиях контакта в направлении оси Oz.

Для деформации граничных точек полосы при антиплоской деформации имеем [2]

$$\frac{\partial u_z^{(2)}(x)}{\partial x}=\frac{1}{4G_2h}\int_{-a}^{a}\left[cth\frac{\pi}{4h}\left(x-s\right)-th\frac{\pi}{4h}\left(x-s\right)\right]\tau\left(s\right)ds \tag{2}$$

а для стрингеров

$$\frac{\partial u_z^{(1)}(x)}{\partial x}=\frac{1}{G_1h_1}\int_{-a}^{x}\left[\tau_0\left(s\right)-\tau\left(s\right)\right], \tag{3}$$

где G_1 и G_2 – модули сдвига для стрингеров и полосы, соответственно.

Условие равновесия стрингеров имеет вид:

$$\int_{-a}^{a} \tau(s)ds = \int_{-a}^{a} \tau_0(s)ds \tag{4}$$

Далее, удовлетворяя условию контакта (1), после некоторых преобразований получим следующее уравнение для определения $\tau(x)$:

$$\int_{-a}^{a}\left[cth\frac{\pi}{4h}(s-x)-th\frac{\pi}{4h}(s-x)\right]\tau(s)ds = \lambda\int_{-a}^{a}\left[\tau(s)-\tau_0(s)\right]ds \tag{5}$$

где $\lambda = 4G_2h/G_1h_1$.

Переходя к безразмерным координатам ξ и η

$$\xi=\frac{\pi x}{4h},\ \eta=\frac{\pi s}{4h},\ \alpha=\frac{\pi a}{4h},\ \xi,\eta\in[-\alpha,\alpha]$$

и вводя обозначения

$$u = th\xi/th\alpha, v = th\eta/th\alpha,\quad u,v\in[-1,1]$$

после простых преобразований из (4) и (5) получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{v-u}+K(u,v)\right]\varphi(v)dv = \pi P(u),\quad (|u|<1) \tag{6}$$

при граничном условии

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(v)dv}{1-v^2th^2\alpha} = C \tag{7}$$

где введены следующие обозначения:

$$K(u,v)=\frac{u}{cth^2\alpha-uv}+\frac{\lambda th\alpha\,\mathrm{sgn}(v-u)}{2(1-v^2th^2\alpha)}$$

$$\varphi(u)=\tau\left(\frac{2h}{\pi}\ln\frac{1+uth\alpha}{1-uth\alpha}\right),\quad \varphi_0(u)=\tau_0\left(\frac{2h}{\pi}\ln\frac{1+uth\alpha}{1-uth\alpha}\right) \tag{8}$$

$$p(u)=-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{u}\tau_0\left(\frac{2h}{\pi}\ln\frac{1+vth\alpha}{1-vth\alpha}\right)\frac{th\alpha dv}{1\text{-}v^2th^2\alpha}=-\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{u}\varphi_0(v)\frac{th\alpha dv}{1-v^2th^2\alpha}$$

$$C=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(v)dv}{1-v^2th^2\alpha}$$

Решение уравнения (6) представим в виде

$$\varphi(u)=\frac{U(u)}{\sqrt{1-u^2}} \tag{9}$$

где $U(u)$ – гельдеровская функция на [-1;1].

Подставляя (9) в (6) и (7), получим

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{v-u}+K(u,v)\right]\frac{U(u)}{\sqrt{1-v^2}}dv=\pi P(u), \quad \left(|u|<1\right) \tag{10}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{U(v)dv}{\sqrt{1-v^2}\,(1-v^2 th^2\alpha)}=C \tag{11}$$

Используя метод механических квадратур для сингулярного интегрального уравнения [3], систему (10)-(11) заменим системой алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{M}a_m U(v_m)\left[\frac{1}{v_m-u_n}+K(u_n,v_m)\right]=\pi P(u_n)\ , \quad n=1,2,...M-1 \tag{12}$$

$$\sum_{m=1}^{M}a_m\,\frac{U(v_m)}{1-v_m^2 th^2\alpha}=C\ . \tag{13}$$

Исходя из представления (9), заключаем, что в этом случае ортогональной системой многочленов на [-1,1] с весом $(1-u^2)^{-1/2}$ будут многочлены Чебышева первого рода $T_n(v)=\cos(n\arccos v)$. Корни $T_M(v)$ являются узлами квадратурных формул и имеют значения

$$v_m=\cos\frac{2m-1}{2M}\pi, \quad (m=1,2,...,M) \tag{14}$$

а коэффициенты $a_m=\pi/M$.

На основании интегрального соотношения

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_M(v)dv}{(v-u)\sqrt{1-v^2}}=\begin{cases}0, & M=0\\ \pi U_{M-1}(u), & M>0\end{cases} \qquad (|u|<1) \tag{15}$$

точки u_n будут нулями функции $U_{M-1}(u)=0$, которые определяются формулой

$$u_n=\cos\pi n/M, \qquad (n=1,2,...M-1) \tag{16}$$

Отметим, что система алгебраических уравнений (12) –(13) является дискретным аналогом сингулярного интегрального уравнения (10) при граничном условии (11).

Проведен численный анализ задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. //В сб.:”Механика деформируемого твердого тела”. Ереван: Изд. АН Армении, 1993. С. 129-143.
2. Мирзоян С.Е., Акопян В.В. Антиплоская задача о контактном взаимодействии слоя с полупространством с учетом ползучести.//В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Тр. межд. Конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна. 25-28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. С.284–287.
3. Панасюк В.В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Изд. Наукова Думка, 1976. 442с.

Сведения об авторах:

Мирзоян Саак Езникович
К.ф-м.н., с. н. с. Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 568188
E-mail: mechins@sci.am

Акопян Вазгануш Велихановна
К.ф-м.н., н. с. Института механики НАН РА

Мирзоян Езник Саакович
К.ф-м.н., Ереванский госуниверситет
E-mail: mirzoyan@ysu.am

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО КЛИНА С ТРЕЩИНАМИ И ЖЕСТКИМИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Мкртчян М.С., Манукян Э.А.

Ереван, Армения

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния жестко закрепленного по граням кусочно-однородного упругого клина, содержащего на горизонтальной оси трещины и абсолютно жесткие тонкие включения при антиплоской деформации.

1. Пусть отнесенный к цилиндрической системе координат rgz кусочно-однородный упругий клин состоит из двух областей: $\Omega_{\sim} = \{-\infty < z < \infty, 0 \le r \le \infty, 0 \le g \le \sim\}$ с модулем сдвига G_+ и $\Omega \;\; = \{-\infty < z < \infty, 0 \le r \le \infty, - \;\; \le g \le 0\}$ с модулем сдвига G_-, и в плоскости $g = 0$ содержит систему сквозных трещин и тонких абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости rg составляют систему интервалов L_1 и L_2, соответственно,

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \;\; a_k < b_k \quad (k = 1,2,..., N_1); \;\; b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \;\; c_k < d_k \quad (k = 1,2,..., N_2); \;\; d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1})$$

$$L = L_1 \bigcup L_2$$

Пусть, далее, свободные грани клиньев жестко закреплены, и, кроме того, берега трещин нагружены силами произвольных интенсивностей $2_{gz}\big|_{g=\pm 0} = -2^{(1)}_{\pm}(r) \quad (r \in L_1)$, а на систему включений L_2 действуют силы с равнодействующими P_k, направленные вдоль оси Oz и вызывающие продольный сдвиг упругого клина в направлении оси Oz с базовой плоскостью rg .

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах трещин, скачков напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородный упругий клин разрежем на две части вдоль оси Or, а затем для действующих на их гранях $\mathrm{g} = \pm 0$ напряжений введем следующие обозначения $\left(L' = R_+ \setminus L; R_+ = (0,\infty)\right)$:

$$-2_{\mathrm{g}z}\Big|_{\mathrm{g}=+0} = T_+(r) = \begin{cases} 2_+^{(1)}(r) & (r \in L_1) \\ 2_+^{(2)}(r) & (r \in L_2) \\ 2(r) & (r \in L') \end{cases}$$
$$-2_{\mathrm{g}z}\Big|_{\mathrm{g}=-0} = T_-(r) = \begin{cases} 2_-^{(1)}(r) & (r \in L_1) \\ 2_-^{(2)}(r) & (r \in L_2) \\ 2(r) & (r \in L') \end{cases} \tag{1}$$

В системе включений L_2 смещения постоянны:

$$u_z^+(r,\mathrm{g})\Big|_{\mathrm{g}=+0} = u_z^-(r,\mathrm{g})\Big|_{\mathrm{g}=-0} = ¢_k = \mathrm{const}$$
$$r \in (c_k, d_k)\ (k = \overline{1, N_2}) \tag{2}$$

Запишем также граничные условия на $\mathrm{g} = \sim$, $\mathrm{g} = -$:

$$u_z^+(r,\mathrm{g})\Big|_{\mathrm{g}=\sim} = 0; \qquad u_z^-(r,\mathrm{g})\Big|_{\mathrm{g}=-} = 0 \tag{3}$$

где $u_z^\pm(r,\mathrm{g})$ – смещения точек, соответствующих клиньям $\Omega_\sim$ и Ω , которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{\partial^2 u_z^\pm(r,\mathrm{g})}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^\pm(r,\mathrm{g})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z^\pm(r,\mathrm{g})}{\partial \mathrm{g}^2} = 0 \tag{4}$$

Далее введем в рассмотрение следующие величины:

$$\Omega(r) = T_+(r) + T_-(r); \quad h(r) = \frac{du_z^+(r,+0)}{dr} + \frac{du_z^-(r,-0)}{dr}$$
$$¡\,(r) = T_+(r) - T_-(r) = \begin{cases} \cdot\,(r) & (r \in L_2) \\ 2_+^{(1)}(r) - 2_-^{(1)}(r) & (r \in L_1) \\ 0 & (r \in L') \end{cases} \tag{5}$$

а также плотность дислокаций смещений

$$w(r)=\frac{du_z^+(r,+0)}{dr}-\frac{du_z^-(r,-0)}{dr}=\begin{cases}\text{¨}(r) & (r\in L_1)\\ 0 & (r\in R_+/L_1)\end{cases}\tag{6}$$

Теперь с помощью прямого и обратного преобразования Меллина [1] по переменной r, из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) с учетом обозначений (5)-(6), аналогично [2], придем к системе ключевых уравнений задачи:

$$\begin{cases}\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_1}\frac{w(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_1}K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)w(r_0)dr_0-\\ -\frac{(G_+-G_-)r}{2G_+G_-}\text{¡}(r)-\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr_0-\\ -\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_2}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr=-\frac{(G_++G_-)r}{2G_+G_-}\Omega(r);\quad(r\in R_+)\\ -\frac{G_+-G_-}{2}w(r)-\frac{G_+G_-}{\text{®}}\int\limits_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)w(r_0)dr_0+\\ +\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_1}\frac{\text{¡}(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_2}\frac{\text{¡}(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_1}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr_0+\\ +\frac{1}{\text{®}}\int\limits_{L_2}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr_0=\frac{(G_++G_-)r}{2}h(r);\qquad(r\in R_+)\end{cases}\tag{7}$$

где

$$K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{G_+[1-\mathrm{th}(\ s)]+G_-[1-\mathrm{th}(\sim s)]}{G_+\mathrm{th}(\ s)+G_-\mathrm{th}(\sim s)}\sin\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds$$

$$M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{th}(\ s)-\mathrm{th}(\sim s)}{G_+\mathrm{th}(\ s)+G_-\mathrm{th}(\sim s)}\cos\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds$$

$$Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{G_+\mathrm{th}(\ s)[\mathrm{th}(\sim s)-1]+G_-\mathrm{th}(\sim s)[\mathrm{th}(\ s)-1]}{G_+\mathrm{th}(\ s)+G_-\mathrm{th}(\sim s)}\sin\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds$$

Рассматривая, теперь, первое уравнение системы (7) на L_1, а второе уравнение на L_2, придем к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}\dfrac{\ddot{}\,(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}K\left(\ln\dfrac{r_0}{r}\right)\ddot{}\,(r_0)dr_0- \\
-\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_2}M\left(\ln\dfrac{r_0}{r}\right)\cdot\,(r_0)dr_0=\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}M\left(\ln\dfrac{r_0}{r}\right)[\text{²}_+^{(1)}(r_0)-\text{²}_-^{(1)}(r_0)]dr_0- \\
\qquad -r\left[\dfrac{\text{²}_+^{(1)}(r)}{G_+}+\dfrac{\text{²}_-^{(1)}(r)}{G_-}\right]; \qquad\qquad (r\in L_1) \\
-\dfrac{G_+G_-}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}M\left(\ln\dfrac{r_0}{r}\right)\ddot{}\,(r_0)dr_0+\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_2}\dfrac{\cdot\,(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+ \\
+\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_2}Q\left(\ln\dfrac{r_0}{r}\right)\cdot\,(r_0)dr_0=-\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}\dfrac{[\text{²}_+^{(1)}(r_0)-\text{²}_-^{(1)}(r_0)]dr_0}{\ln r_0-\ln r}- \\
-\dfrac{1}{\text{®}}\displaystyle\int_{L_1}Q\left(\ln\dfrac{r_0}{r}\right)[\text{²}_+^{(1)}(r_0)-\text{²}_-^{(1)}(r_0)]dr_0; \qquad\qquad (r\in L_2)
\end{cases}
\tag{8}
$$

Первое уравнение системы (8) должно рассматриваться при условиях

$$
\int_{a_k}^{b_k}\ddot{}\,(r)dr=0, \qquad (k=\overline{1,N_1})
\tag{9}
$$

эквивалентных условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а второе уравнение должно рассматриваться при условиях равновесия включений:

$$
\int_{c_k}^{d_k}\cdot\,(r)dr=P_k, \qquad (k=\overline{1,N_2})
\tag{10}
$$

Рассматривая первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, имеем:

$$
\begin{aligned}
\text{²}(r)=&-\frac{G_+G_-}{\text{®}r(G_++G_-)}\int_{L_1}\frac{\ddot{}\,(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}-\frac{G_+G_-}{\text{®}(G_++G_-)}\int_{L_1}K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\ddot{}\,(r_0)dr_0+ \\
&+\frac{G_+G_-}{\text{®}r(G_++G_-)}\int_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)[\text{²}_+^{(1)}(r_0)-\text{²}_-^{(1)}(r_0)]dr_0+ \\
&+\frac{G_+G_-}{\text{®}r(G_++G_-)}\int_{L_2}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\cdot\,(r_0)dr_0; \qquad\qquad (r\in L')
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии кусочно-однородного упругого клина с трещинами и абсолютно жесткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)-(10). После решения (8)-(10) разрушающее напряжение определяется формулой (11).

2. Для решения определяющей СИУ (8)–(10) сначала в системе уравнений (8) переходим к новым переменным $(¶ = \ln r_0,\ ¦ = \ln r)$, далее интервалы $((e^{a_k}, e^{b_k}),\ (k = \overline{1, N_1}))$ и $((e^{c_k}, e^{d_k}),\ (k = \overline{1, N_2}))$ преобразуем в интервалы $(-1;1)$, а затем определяющее СИУ преобразуем в систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций, заданных на $(-1;1)$. Решение системы (8)–(10) строится численно-аналитическим методом [3,4,5] с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.: АН СССР, 1963.
2. Манукян Э.А., Мкртчян М.С. Об одной смешанной задаче для упругой полосы с трещиной конечной длины.//В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды.”- Тр. Международной конференции, посвященной 95-летию акад. АН РА Н.Х. Арутюняна, 25-28 сентября 2007. Цахкадзор.–Ереван, 2007. С.252-257.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
4. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
5. Theocaric P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations.//Quart. Appl. Math., vol XXXV, No1, pp. 173-185, 1977

Сведения об авторах

Мкртчян Мушег Сережаевич

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б
Институт механики НАН Армении
Тел: (37410)-43-16-52
E-mail: mechins@sci.am

Манукян Эмиль Абетович

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б
E-mail: mechins@sci.am

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ ПЛАСТИН ИЗ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА

Мовсисян Л.А.
Ереван, Армения

В ряде работ [1-3 и др.] рассматривались задачи приведения упругих и вязкоупругих систем с одного состояния в другое (статика и динамика) путем внешних воздействий. При этом относительно последних ставились требования удовлетворения некоторым условиям оптимальности. В случае пьезоэлектрической среды помимо кинематических величин несомненный интерес представляет также напряженность электрического поля. В настоящей работе для пластинки из пьезоэлектрика $2mm$ изучаются некоторые задачи оптимальности. Подобные задачи для материала $6mm$ рассматривались в [4].

1. Пусть имеется прямоугольная пластинка $(a \times b)$ из пьезоэлектрика $2mm$ [5, стр.225]. В основу исследования принимается классическая теория пластин и на основании ее уравнения состояния для данного случая будут

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = c_{11}e_x + c_{12}e_y - e_1E_3\ , \qquad && D_1 = \varepsilon_1 E_1 \\
&\sigma_y = c_{12}e_x + c_{22}e_y - e_2E_3\ , && D_2 = \varepsilon_2 E_2 \\
&\sigma_{xy} = c_{66}e_{xy}, && D_1 = e_1e_x + e_2e_y + \varepsilon_3 E_3
\end{aligned} \tag{1.1}$$

В предположении, что пластинка полностью покрыта металлическим слоем, электрический потенциал принимается в виде:

$$\Phi = F\left(x, y, z\right)\left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right) \tag{1.2}$$

согласно чему из уравнений напряженности электрического поля и электрической индукции

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0\ ,\ \mathrm{div}\bar{D} = 0 \tag{1.3}$$

имеем

$$\varepsilon_1\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + c^2\varepsilon_2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{h^2}{8}\left(e_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c^2e_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \varepsilon F = 0 \tag{1.4}$$

а уравнение изгиба выглядит как

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2c^2d_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + c^4d_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\
&+d_3\left(e_1\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + c^2e_2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = q\left(x, y, t\right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

В (1.4) и (1.5) x и y – безразмерные координаты $\left(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\right)$, τ – безразмерное время –

$$² = \frac{h^2 C_{11}}{12 ° a^4}\ , \ c = \frac{a}{b}\ ,\ \ d_1 = \frac{c_{12} + 2c_{66}}{c_{11}}\ ,\ d_2 = \frac{c_{22}}{c_{11}}$$

$$d_3 = \frac{8a^2}{h^2 c_{11}}\ ,\ q = \frac{12a^4}{h^3 c_{11}} Z \tag{1.6}$$

Изучим как задачи статики, так и динамики.

2. Первая задача ставится как задача оптимального управления движением: система (1.4) и (1.5) вследствие начальных условий находится в состоянии колебаний. Требуется в определенный момент $² = ²_1$ привести ее в заданное положение и иметь заданную скорость.

Пусть при $² = 0$ пластинке сообщается перемещение и скорость

$$w\big/_{² = 0} = f_1(x, y), \qquad \frac{\partial w}{\partial ²}\bigg/_{² = 0} = ¨_1(x, y) \tag{2.1}$$

и требуется, чтобы в момент $² = ²_1$ имели место

$$w\big/_{² = ²_1} = f_2(x, y), \qquad \frac{\partial w}{\partial ²}\bigg/_{² = ²_1} = ¨_2(x, y) \tag{2.2}$$

Рассмотрим случай, когда граничные условия пластинки типа свободного опирания.

Тогда, беря

$$(w, F) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (w_m, F_m) \sin m® x \sin n® yJ \tag{2.3}$$

будем иметь

$$\frac{d^2 w_{mn}}{d²^2} + µ_{mn}^2 w_{mn} = q_{mn}(²) = 4\int_0^1\int_0^1 q \sin m® x \sin n® y dx dy \tag{2.4}$$

Заметим, что здесь $q_{mn}(²)$ (т.е. q) – неизвестная нагрузка, которая подлежит определению.

$$µ_m^2 = \left(m^4 + 2c^2 d_1 m^2 n^2 + c^4 d_2 n^4\right)®^4 +$$
$$+ \frac{h^2 d_3 ®^4}{8} \frac{\left(e_1 m^2 + c^2 e_2 n^2\right)^2}{h^2 ®^2\left(£_1 m^2 + c^2 £_2 n^2\right) + 12a^2 £_3} \tag{2.5}$$

Решение (2.4) с условиями (2.1) будет

$$w_{mn}(\tau) = a_{mn}\cos\mu_{mn}\tau + \frac{b_{mn}}{\mu_{mn}}\sin\mu_{mn}\tau + \\ + \frac{1}{\mu_{mn}}\int_0^{\tau} q_{mn}(\xi)\sin\mu_{mn}(\tau-\xi)\,d\xi \tag{2.6}$$

где a_{mn} и b_{mn} – соответствующие разложения функций (2.1).

Ради краткости примем условия (2.2) нулевыми и опустим индексы в выражениях (2.6), там где не вызывается разночтение.

Итак, условия

$$w_{mn}(\tau_1) = \frac{dw_{mn}(\tau_1)}{d\tau} = 0 \tag{2.7}$$

для определения q_{mn} дают два уравнения относительно выражений

$$\int_0^{\tau_1} q_{mn}\cos\mu_{mn}\xi\,d\xi \quad \text{и} \quad \int_0^{\tau_1} q_{mn}\sin\mu_{mn}\xi\,d\xi \tag{2.8}$$

К условиям (2.8) должен быть добавлен критерий качества.

Как таковой, примем минимум функционала

$$I = \int_0^{\tau_1}\int_0^{1}\int_0^{1} q^2(x,y,\tau)\,dxdyd\tau \tag{2.9}$$

Условие (2.9) равносильно минимуму каждой гармоники q_{mn}. Таким образом имеется типичная изопериметрическая задача. Если составить функцию (для каждой гармоники)

$$\Phi = q^2 + \alpha q\cos\mu\tau + \beta q\sin\mu\tau \tag{2.10}$$

то оптимальная нагрузка будет

$$q = -\frac{1}{2}\left(\alpha\cos\mu\tau + \beta\sin\mu\tau\right) \tag{2.11}$$

где коэффициенты α и β определяются как

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta}\ , \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta}\ , \quad \Delta = \left(2\mu\tau_1\right)^2 + 2\left(\cos\mu\tau_1 - 1\right)$$

$$\Delta_1 = 8\mu\left(a\mu\gamma_1 - b\gamma_2\right),\ \ \Delta_2 = 8\mu\left(b\gamma_1 - a\mu\gamma_3\right)$$

$$\gamma_1 = 1-\cos 2\mu\tau_1\ ,\ \gamma_2 = 2\mu\tau_1 - \sin 2\mu\tau_1\ ,\ \gamma_3 = 2\mu\tau_1 + \sin 2\mu\tau_1$$

3. Задача статики ставится следующим образом: в определенных точках иметь заданные прогибы –

$$w_i = w(x_i, y_i)\ , \quad i = 1,2,\cdots,k \tag{3.1}$$

при условии, что минимальная нагрузка определяется по (2.9) (без времени).

Прогиб пластинки из (1.4) и (1.5) определится так:

$$w\left(x,y\right)=\int\int q(¶,¦)\,K\left(x,y,¶,¦\right)d¶\,d¦ \tag{3.2}$$

где

$$K=\frac{4}{µ_{mn}^{2}}\sin m®\,x\sin n®\,y\sin m®¶\,\sin n®¦$$

Минимальная нагрузка из (2.9) при условиях (3.1) определяется на основании проблемы моментов [6] и есть

$$q_0\left(x,y\right)=\frac{1}{°_0^{\,2}}\sum_{i=1}^{k}¥_i^0\,K\left(x_i,y_i,¶,¦\right) \tag{3.3}$$

где

$$°_0^{\,2}=\min_{\sum_{i=1}^{k}¥_i w_i=1}\int_0^1\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{k}¥_i\,K\left(x_i,y_i,¶,¦\right)\right]^2 d¶\,d¦ \tag{3.4}$$

а параметры $¥_i^0$ – значения $¥_i$, которые обеспечивают минимум (3.3).

4. Вопросы управления электрическим полем для краткости изучим в одномерной постановке: т.е. рассмотрим случай цилиндрического изгиба. В случае статики система (1.4) и (1.5) сводится к одному уравнению

$$\frac{d^6\Psi}{dx^6}-\Omega^2\frac{d^4\Psi}{dx^4}=\frac{1}{£_1}q\ ,\ \ \Omega^2=\frac{1}{£_1}\left(£+\frac{h^2}{8}d_3e_1^2\right) \tag{4.1}$$

При этом

$$w=£_1\frac{d^2\Psi}{dx^2}-£\Psi\ ,\ F=-\frac{h^2}{8}e_1\frac{d^2\Psi}{dx^2} \tag{4.2}$$

Общее решение (4.1) будет

$$\Psi=\sum_{i=1}^{4}C_i x^{i-1}+A\mathrm{ch}\Omega x+B\mathrm{sh}\Omega h+$$
$$+\frac{1}{£_1\Omega^4}\int_0^x q\left(¶\right)\left[\frac{1}{\Omega}\mathrm{sh}\Omega\left(x-¶\right)-\left(x-¶\right)-\Omega^2\frac{\left(x-¶\right)^3}{6}\right]d¶ \tag{4.3}$$

По (4.2) определится прогиб пластинки и электрическое поле в срединной плоскости

$$E_1=\frac{h^2}{8}e_1\frac{d^3\Psi}{dx^3} \tag{4.4}$$

$$w=\int_0^x q(z)W_1(x,\P)d\P+\int_0^1 q(\P)W_2(x,\P)d\P$$

$$E_1=\int_0^x q(\P)E_1^{(1)}(x,\P)d\P+\int_0^1 q(\P)E_1^{(2)}(x,\P)d\P \tag{4.5}$$

В (4.5) первые слагаемые одинаковы для всех граничных условий. В случае условий свободного опирания на сторонах пластинки $\left(\Psi=\Psi^{II}=\Psi^{IV}=0\right)$ для $E_1^{(i)}$ будем иметь

$$E_1^{(1)}=D\left[ch\Omega(x-\P)-1\right] \quad , \quad D=\frac{h^2e_1}{8\pounds_1\Omega^2}$$

$$E_1^{(2)}=D\left[(1-\P)-\frac{ch\Omega x}{sh\Omega}sh\Omega(1-\P)\right] \tag{4.6}$$

Оптимальная задача для электрического поля ставится, как и в (3.1)–(3.4), для прогиба.

Если требуется в точках $x=x_i\left(i=1,2,\cdots,k\right)$ иметь заданные значения электрического поля при минимальной нагрузке, то условия, аналогичные (3.1), запишутся следующим образом:

$$\int_0^1 q(\P)\mathrm{X}_i(x_i,\P)d\P=E_{1i,} \quad i=1,2,\cdots,k \tag{4.7}$$

где подынтегральная функция X_i определится

$$\mathrm{X}_i=\begin{cases} E_1^{(1)}(x_i,\P)+E_1^{(2)}(x_i,\P) & \text{при} \quad 0\le x\le x_i \\ E_1^{(2)}(x_i,\P) & \text{при} \quad x_i\le x\le 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

Минимальная нагрузка, обеспечивающая (4.7), определится как и в (3.3) и (3.4).

В частности, если требуется в середине $\left(x=0,5\right)$ пластинки иметь напряженность E_0, то минимальная нагрузка будет

$$q(x)=\frac{E_0}{D\Lambda}\mathrm{Z}(x) \tag{4.9}$$

$$\Lambda=\frac{1}{12}-\frac{3}{4\Omega}\mathrm{cth}\frac{1}{2}\Omega-\frac{2}{\Omega^2}-\frac{1}{8}\mathrm{csc}\,h^2\frac{1}{2}\Omega$$

$$
Z(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}\Omega x}{2\operatorname{sh}\frac{1}{2}\Omega}-x, & 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\[2ex] 1-x-\dfrac{\operatorname{sh}\Omega(1-x)}{2\operatorname{sh}\frac{1}{2}\Omega}, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases} \tag{4.10}
$$

Теперь рассмотрим задачу оптимального управления движением электрического поля. Для свободно опертой пластинки уравнение движения сводится к системе

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2 w_m}{d²^{\,2}}+\mu_m^2 w_m=q_m=2\int_0^1 q\sin m® x\,dx\\
\mu_m^2=(m®)^4\left(1+\frac{h^2 d_3 e_1^2}{8\left(£+£_1 m^2®^{\,2}\right)}\right)
\end{gathered} \tag{4.11}
$$

решение которой

$$
\begin{gathered}
w_m(²)=a_m\cos\mu_m² +\frac{b_m}{\mu_m}\sin\mu_m² +\\
+\frac{1}{\mu_m}\int_0^{²} q_m(¯)\sin\mu_m(²-¯)\,d¯
\end{gathered} \tag{4.12}
$$

Напряженность электрического поля определится

$$
E_1(x,²)=\sum_{m=1}^{\infty} D_m w_m\cos m® x\ ,\ D_m=\frac{h^2 e_1^2 m^3®^{\,3}}{8\left(£+£_1 m^2®^{\,2}\right)} \tag{4.13}
$$

В случае, когда требуется, чтобы в момент $²=²_1$ напряженность электрического поля была

$$
E_1(x,²_1)=E_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\cos m® x \tag{4.14}
$$

поступим так, как и в п.2.

Минимум функционала (2.9) равносилен минимуму,

$$
I_m=\int_0^{²_1} q_m^2\,d² \tag{4.15}
$$

что дает (по (2.10))

$$
q_m=-\frac{\tilde{}_m}{2}\sin\mu_m(²_1-²) \tag{4.16}
$$

и на основании (4.13), (4.14) и (4.17) множители Лагранжа будут

$$\sim_m\left({}^{2}{}_1-\frac{\sin 2\mu_m{}^{2}{}_1}{2\mu_1}\right)=4\mu_m\left(a_m\cos\mu_m{}^{2}{}_1+\frac{b_m}{\mu_m}\sin\mu_m{}^{2}{}_1+\frac{c_m}{D_m m\circledR}\right)\quad(4.17)$$

Необходимая оптимальная нагрузка будет

$$q\left(x,{}^{2}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_m\left({}^{2}\right)\sin m\circledR\, x\qquad(4.18)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А., Габриелян М.С. К оптимальному изгибу пластин. /Сб.науч.тр.конф., посвященный 90-летию со дня рожд. проф. Т.Т. Хачатряна и О.М. Сапонджяна./ Ереван. 1999. С.151-156.
2. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем. //Изв. РАН. МТТ. 1999. №6. С.146-153.
3. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К управлению движением вязкоупругой балки.// Изв.НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С.76-81.
4. Мовсисян Л.А.К оптималтьному изгибу и управлению движением пластин из пьезоэлектрика. Проблемы механики деформируемого тела. /(Тр., посвященные 85-летию академика С.А. Амбарцумяна). Ереван. 2007. С.135-140.
5. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
6. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: 1968. 475 с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович

Д. т.н., профессор, главный научный сотрудник
Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. М.Баграмяна 24[б]
Тел.: (+37410), 56-82-01
E-mail: mechins@sci.am

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМО-ЭДС И АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ НА ПРОЦЕССЫ РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Мотова Е.А.
Н.Новгород, Россия

К настоящему времени разработан и широко применяется ряд классических методов диагностики процессов изнашивания. Их основными недостатками является низкая повторяемость результатов исследований вследствие неоднородности материалов испытуемых образцов. В условиях действующего производства главный недостаток состоит в длительности проведения испытаний. Поэтому проблема создания методов экспресс-оценки и прогнозирование износа актуальны для многих предприятий машиностроения.

В основе исследований лежит представление о том, что протекание процесса изнашивания отражается в текущих характеристиках взаимодействия, таких как естественная термо-ЭДС E и акустическая эмиссия A, которые можно определить экспериментально. [1 и 2].

Вследствие микронеровностей поверхностей тел в зоне их контакта формируются области локального микровзаимодействия. При сближении участков поверхностей в зоне контакта преодолеваются межмолекулярные силы отталкивания между поверхностями, на что затрачивается определенная энергия активации. После преодоления контактирующими поверхностями энергетического барьера в зоне взаимодействия начинается интенсивное образование адгезионной связи с формированием двойного электрического слоя. Этот процесс приводит к уменьшению суммарной поверхностной энергии до минимального значения. При дальнейшем относительном движении тел в результате внешней работы адгезионные связи возникают и разрушаются.

Исследованиями установлено наличие корреляционной взаимосвязи между акустической эмиссией и электромагнитным излучением в зоне контакта и выявлены отдельные механизмы этой взаимосвязи, которые отражают особенности микроструктуры контактирующих тел и характеризуют их поведение в процессе изнашивания. В частности, показано, что все наблюдаемые в твердых телах и на их границах механоэлектрические явления (электризация, разрыв двойных электрических слоев) могут служить источниками акустической эмиссии, обусловленной релаксацией разделенных зарядов, например вследствие того, что в переменном электромагнитном поле заряженные дислокации излучают акустические колебания на частоте этого поля.

Предположительно сигналы E и A нестационарны, но состоят из отдельных микроучастков стационарности длительностью от десятков до сотен микросекунд. Для выявления подобных участков необходимо обработать сигналы с помощью дифференцирующей функции выделения их границ (граничного функционала). В качестве разделяющего критерия использовано относительное изменение спектра мощности сигнала.

Методика проведения ускоренных трибологических испытаний заключается в следующем. Вначале формируют контрольную группу плоских металлических образцов, обладающих определенным набором поверхностных свойств. Рассеяние этих свойств зависит от выбранного диапазона материалов образцов и диапазона изменения условий взаимодействия. Аналогично изготавливают инденторы с заданными поверхностными свойствами.

Ускоренные испытания велись по следующей схеме. Образец устанавливают в держателе на рабочем столе. Индентор, закрепленный в своем держателе, вводят в контакт с образцом и нагружают заданной силой F, которая поддерживается постоянной на протяжении всего эксперимента. Индентор перемещают по поверхности пластины с постоянной скоростью з, после чего его переводят на соседнюю трассу, и перемещение повторяется снова.

В процессе перемещения постоянно фиксируется переменная составляющая сигналов E и A и моменты начала и конца записи сигналов.

После эксперимента образец и индентор исследуют с помощью микроскопа. В соответствии с измеренными параметрами сигналов и свойствами поверхностного слоя образца, определенными классическими методами, анализируют их взаимную зависимость. На основе этой зависимости находят параметры математической модели для экспресс-оценки типа контактного взаимодействия по сигналам естественной термо-ЭДС и акустической эмиссии.

Для того чтобы доказать возможность выявления неоднородности поверхностного слоя тел в паре трения с помощью сигнала термо-ЭДС, был поставлен проверочный эксперимент. В его ходе необходимо было установить пространственное распределение сигнала переменной составляющей термо-ЭДС, генерируемой при сканировании индентором поверхности металлического образца, и сопоставить этот сигнал с распределением свойств поверхностного слоя.

Измеряемые сигналы E, «привязанные» к месту генерации, после выделения участков стационарности с помощью граничного функционала обрабатывали методами кластерного и нейросетевого анализа для выделения классов, характеризующих тип взаимодействия.

Полученное поле значений E описывают с помощью граничного функционала G_{ij}, представляющего собой модуль многомерного вектора разности между значениями плотности спектра мощности (ПСМ), характеризующими два соседних (по ходу перемещения индентора) участка поверхности.

$$G_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(f_i^k - f_j^k \right)^2}$$

где i, j – номера соседних участков; k – номер частотной полосы спектра; f – мощность сигнала в выделенной полосе; n – общее число учитываемых частот.

После вычисления G_{ij} для всех участков поверхности получаем массив значений граничного функционала. Участки стационарности сигнала E соответствуют временным интервалам, в которых граничный функционал не превышает порогового значения. Выделенные участки стационарности представляют собой объекты классификации.

Совокупность G-функций для ряда параллельных трасс представляет собой граничный функционал $G(x, y)$, где x, y – координаты в плоскости образца. Выделенные путем расчета функционала $G(x, y)$, участки на поверхности по предположению являются зонами с однородными фрикционными свойствами.

Согласно теории распознавания образцов далее необходимо сформировать рабочий словарь признаков. Для исследуемых зон однородности в качестве признаков использовали многомерные вектора ПМС сигнала E; при этом размерность пространства признаков определялось числом частотных полос, для которых осуществлялся расчет ПСМ.

После формирования словаря признаков можно классифицировать выделенные участки стационарности сигналов. Поскольку сигналы E, характеристики которых выступают в качестве признаков, «привязаны» к месту их генерации на линии контакта с помощью датчиков положения, то выявленные классы соответствуют конкретным участкам поверхности образца.

След индентора включает в себя участки, характеризуемые различными типами контактного взаимодействия. Для классификации используют геометрическую модель представления участков однородности фрикционных свойств. В пределах выделенного во временной области участка стационарности сигнала вычисляют спектр его мощности, который далее представляют в виде многомерного вектора T. В результате чего получают набор векторов T_l ($l = 1, ..., N,$, где N – число участков стационарности сигнала, соответствующих участкам однородности фрикционных свойств поверхности). Вектора, концы которых близки один к другому, соответствуют сигналам со схожими спектрами.

Задача классификации состоит в том, чтобы в некоторой области пространства Ω признаков определить скалярное поле R, характеризующего отношение векторов T_i к тому или иному классу контактного взаимодействия. Для этого был использован механизм самообучающихся нейронных сетей.

В поставленной задаче точки Ω (признаки) $X^{'}$, задаваемые группой однонаправленных входных связей $X^{'} = \left\{X_1^{'},..., X_m^{'}\right\}$ нейрона, соответствуют концам векторов T_i, которые, в свою очередь, характеризуют спектры участков стационарности сигнала. Каждый нейрон, характеризуемый своим текущим состоянием S, имеет выход $Y^{'} = \ddot{\ }\left(S\right)$, представляющий собой сигнал возбуждения или торможения, которой поступает на входы следующих нейронов сети. Уравнение внутренней функции нейрона соответствует гиперплоскости в m -мерном пространстве признаков, причем:

$$S = \sum_{p=1}^{N} X_p w_{pq}$$

где p и q – номера нейронов; w_{pq} – весовые коэффициенты связей этих нейронов.

Составляя из нейронов сеть, можно получить классификатор для различных видов пространства признаков и разделяющий классы поверхности (границы классов).

Основой классификатора, используемого для выделения микроучастков однородности свойств на поверхности трения, является однослойная нейронная сеть с алгоритмом обучения Кохонена. Процесс подстройки весовых коэффициентов носит итерационный характер: в каждой итерации на вход сети подается вектор T_i из последовательности участков стационарности сигнала, и затем производится подстройка весовых коэффициентов того нейрона, у которого значения весовых коэффициентов удовлетворяют условию $\sum\limits_{p=1}^{m} \left(T_p - w_p\right)^2 = \min$.

После просмотра сетью всей обучающей выборки (совокупности значений T_i) цикл повторяется до тех пор, пока состояние весовых коэффициентов нейронов сети не застабилизировано с заданной погрешностью.

В результате сопоставления полученных классов с реальными контактными процессами или свойствами поверхности образца можно в дальнейшем исключить из рассмотрения те классы, которые не соответствуют областям однородности эталонных признаков. Оставшиеся классы, сопоставленные с распределением макропризнаков, могут быть использованы в качестве библиотеки типов контактного взаимодействия и изнашивания, описанных на «языке» полей сигналов E и A. Таким образом, после эталонных испытаний появляется возможность экспресс-оценки и прогнозирования процессов, протекающих в области фрикционного контакта, а также изнашивания и свойств поверхностного слоя образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кретинин О.В., Кудрявцев С.А., Шемагин В.А. Способ экспрессной оценки контактных явлений при граничном трении// Физические технологии в машиноведении: Сб. науч. трудов.–Н Новгород: УНЦ ФЦП «Интеграция», 1998. С.117-123.
2. Кретинин О.В., Кудрявцев С.А., Мотова Е.А., Горбунов С.С. Методика диагностики контактных процессов при обработке на фрезерных станках с ЧПУ /Эффект безызносности и триботехнологии. – 2003. № 1. С.106-111.
3. Крылов А.Н., Кретинин О.В. Использование аппаратно-программного комплекса NI в системах стереоскопических измерений// Оборудование, научные и инженерные приложения в среде LabView и технологии National Instruments: Сб. трудов междунар. науч.-практич. конф. – М.: РУДН, 2003. С. 157-161.

Сведения об авторе:

Мотова Елена Алексеевна

К.т.н., доцент, старший научный сотрудник
Нижегородский филиал Института машиноведения РАН
Адрес: 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, д.85, Нф ИМАШ РАН
Тел: (8-831-4-32-23-87)
E-mail: apotapov@sandy.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМ БИОМЕХАНИКИ МЕНИСКОВ КОЛЕННОГО СУСТАВА С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Мусаелян С.Л., Ваграмян А.Г.

Ереван, Армения

Повреждения менисков являются самой частой патологией коленного сустава. В коленном суставе имеется два мениска: наружный (латеральный) и внутренний (медиальный). В силу анатомических особенностей латеральный мениск более подвижен, чем медиальный, поэтому его травматические повреждения происходят реже. Медиальный мениск менее подвижен, т. к. связан с медиальной коллатеральной связкой коленного сустава и его повреждения происходят намного чаще. При движениях в коленном суставе мениски совершают колебательные движения, сжимаются, деформируются с изменением их формы. После повреждения оторванная часть или фрагмент мениска, связанная с телом, может перемещаться в полости сустава, ущемляться между суставными поверхностями бедренной и большеберцовой костей и вызывать патологические движения, колебания и деформации как самого мениска, так и близлежащих анатомических структур коленного сустава.

Траектория движения точек мениска можно охарактеризовать уравнением лемнискаты, имеющей следующий вид:

$$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$$

Закон распределения внешней нагрузки принимается в виде

$$q = q_0 \frac{r}{r_0}$$

где q_0 – максимальное значение распределенной нагрузки, r_0 – радиус кривизны мениска, r – текущий радиус.

Целью данной работы является создание компьютерной модели менисков коленного сустава с использованием новейших компьютерных технологий с применением известной в программной иерархии программного комплекса PRO/ENGINEERNG и PRO/MECHANICA, исследование модели здорового мениска и его механического “поведения” с точки зрения деформаций при максимально приближенных к физиологическим статических и динамических нагрузках, нанесение на модель нескольких типичных повреждений, исследование “поведения” модели поврежденного мениска и проведение сравнительного анализа.

Начальный этап работы заключался в создании модели здорового медиального мениска коленного сустава с использованием программы PRO/ENGINEERNG. За основу моделирования были взяты приблизительные реальные размеры медиального мениска человека среднестатистических размеров – ростом 175 см и массой тела 75 кг. Максимальная длина полуовала мениска принята 60 мм, средняя ширина полулунной части 20 мм. Поперечное сечение мениска близка к неправильному прямоугольному треугольнику с закругленными углами с неправильно полувогнутой гипотенузой. Максимальная высота сечения была принята равной 6 мм. Хотя мениск имеет неправильную полулунную форму и на своем протяжении несколько отличается размерами, мы в некотором приближении решили также и осесимметричную задачу. При моделировании приближенно учитывали физико-механические свойства менисков (плотность, упругость, эластичность) и отмеченные незначительные изменения размеров мениска при аналогичных статических и динамических воздействиях на модель. Полученная компьютерная модель мениска с внешними нагрузками представлена на рис.1. Нагрузка принималась распределенной по всей поверхности мениска. В случае опирания человека на одну ногу интенсивность нагрузки составляет величину порядка $q=175$ кн/м^2. Равнодействующая сила, действующая на мениск, имеет направление, параллельное плоскости опирания.

На рис.1 схематично показаны векторы сил, действующих на мениск при статическом воздействии нагрузки.

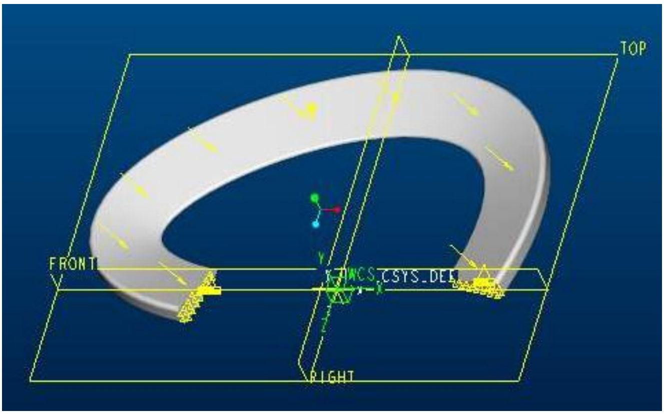


Рис. 1.
Модель мениска коленного сустава

Второй этап работы заключался в создании связей прикрепления, учитывая нормальную анатомию коленного сустава, в введение в программу физических и механических свойств данного тела (плотность, упругость и остальные необходимые данные для функционирования программы) Силы трения на этом этапе не учитывались, т.к. коэффициент трения в коленном суставе по данным О.Коннорс, равен 0,001. Затем исследуются колебательные движения, которые совершают коленный сустав при сгибании и разгибании на 110 градусов. После обработки данных программа выдавала движения и деформации мениска, отображенные разными цветами. На рис. 2 наглядно продемонстрированы 4 типа колебательных движений мениска. Зона наибольшей деформации перемещается по периметру мениска. Именно это перемещение дает возможности для проектирования нового измерительного прибора.

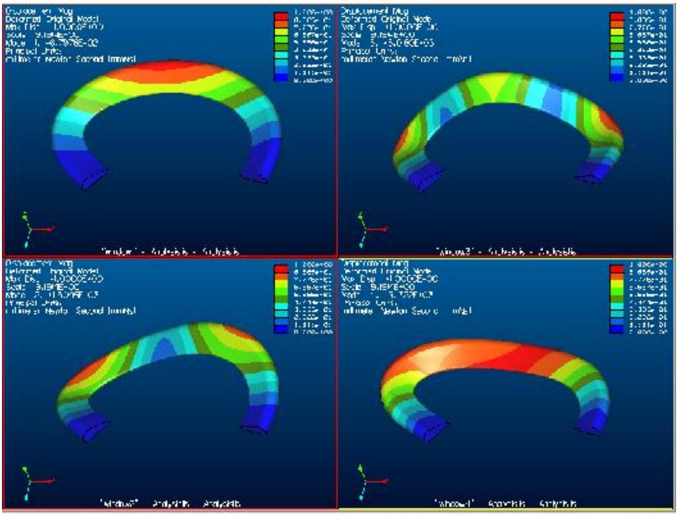


Рис.2.
Колебания модели “здорового” мениска

На следующем этапе на модель нанесен прототип одного из наиболее часто встречающихся повреждений (по типу ручки лейки). Затем программа последовательно описывала идентичные колебания нормальной и поврежденной модели мениска.

Сравнительный анализ этих двух процессов показал, что после нанесения повреждения происходили существенные изменения в траектории движения модели и в амплитуде колебаний.

Зоны наибольших деформаций перемещаются от центральной части в сторону. Особо выраженные изменения наблюдались по наружному периметру модели.

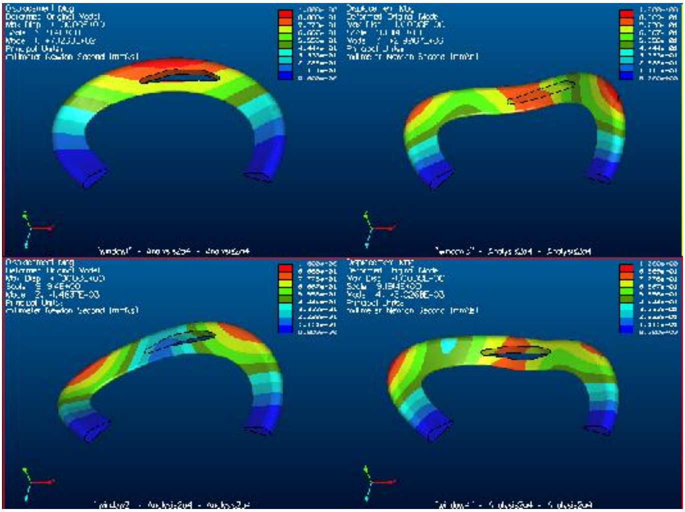


Рис.3.
Колебания модели мениска
с продольным повреждением

Результатом нашей работы стало создание экспериментальных копьютерных моделей менисков коленного сустава и изучение их поведения при статических и динамических воздействиях, максимально приближенных к физиологическим воздействиям, которым подвергаются мениски при работе коленного сустава.

Затем моделировались типичные повреждения менисков и эксперимент повторялся. Проводился сравнительный анализ поведения нормальной и поврежденной модели мениска при аналогичных динамических воздействиях, соответствующих сгибанию коленного сустава на 110 градусов.

Результаты анализа показали, что движения, колебания и зоны наибольших деформаций поврежденной модели существенно отличались от нормальной модели и эти изменения были особенно выражены на наружном периметре модели. Следует также отметить, при каждом типе повреждения эти изменения имели определенную системность.

Нами на этом этапе разрабатывается измерительный прибор с применением аналого-цифрового преобразователя. С помощью прибора возможно будет регистрировать движения и колебания менисков на поверхности суставной щели коленного сустава. По результатам измерений можно будет прогнозировать типы повреждений менисков коленного сустава.

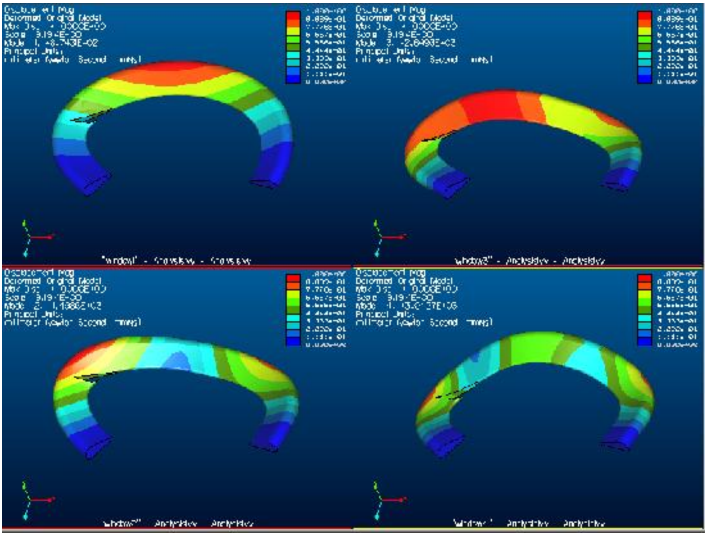


Рис.4.
Колебания модели мениска
с поперечным повреждением

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитр Шойлев. “Спортивная травматология”. София: “Медицина и физкультура”, 1986.
2. Коренев Г.В. Введение в механику человека. Гл.1, 3. Новосибирск: Наука, 1987. С. 12-14, 40-42.
3. Ремизов А.Н. Курс физики, электроники и кибернетики для медицинских институтов. Гл.12,15. М.: “Высшая школа”, 1987.
4. Richard L.O, Connor, M.D. “Arthroscopy”. J.B. Lippinicot Company 1987, “Meniscal tears”.

Институт механики НАН РА, МЦ “Наири”

ОБ УДАРЕ ШТАМПА ПО УПРУГОМУ ШЕРОХОВАТОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л.А.

Ереван, Армения

В рамках теории удара Г. Герца [1] рассмотрена осесимметричная контактная задача о центральном ударе штампа по упругому шероховатому полупространству, когда основание штампа имеет плоскую круглую форму, либо ограничено конической или шаровой поверхностью. Эта задача, когда поверхность полупространства абсолютно гладкая, исследована в известной монографии А.Н. Динника [2].

Предварительно приведены основные соотношения теории удара Г. Герца. Далее рассмотрена соответствующая вспомогательная статическая осесимметричная контактная задача о вдавливании такого штампа в упругое шероховатое полупространство и определена зависимость между жестким перемещением штампа и равнодействующим контактных давлений. Затем, используя эту зависимость, определены основные механические характеристики теории удара Г. Герца [1].

1. Пусть штамп, имеющий массу m, движется по оси Oz со скоростью V_0 и в момент времени $t=0$ ударяет по неподвижному упругому шероховатому полупространству $z \geq 0$. Требуется определить продолжительность удара T, максимальную прижимающую силу $F_{\max}$ и меру максимального погружения штампа $\text{¢}_{\max}$ в полупространство.

Дифференциальное уравнение движения штампа в проекции на ось Oz в процессе удара можно представить в виде

$$m\frac{d^2\text{¢}}{dt^2} = -F, \quad \left(t>0\right) \tag{1}$$

где ¢ – мера погружения штампа в полупространство, а F – равнодействующая контактных давлений в текущий момент времени t. К дифференциальному уравнению (1) следует присоединить начальные условия задачи

$$\left.\delta\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{d\text{¢}}{dt}\right|_{t=0} = V_0 \tag{2}$$

Решение поставленной задачи в рамках теории удара Г. Герца получается в результате интегрирования дифференциального уравнения (1) при начальных условиях (2), когда в качестве зависимости между ¢ и F принимается та зависимость, которая существует при статическом сжатии этих тел.

2. Для получения указанной выше зависимости между ¢ и F рассмотрим осесимметричную статическую контактную задачу о вдавливании штампа в упругое шероховатое полупространство, когда на штамп действует центральная сжимающая сила F.

Основными уравнениями соответствующей статической контактной задачи являются [3]

$$k[p(r)]^{\alpha} + \theta \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{p(\rho)\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi}} = \delta - f(r), \ (0 \le r \le a) \tag{3}$$

$$2\pi \int_0^a rp(r)dr = F, \ (\theta = \frac{1-\nu^2}{\pi E}) \tag{4}$$

где a – радиус круглой контактной области, E, ν – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала полупространства, $p(r)$ – закон распределения контактных давлений, действующих между штампом и полупространством, k и α – постоянные, характеризующие шероховатость поверхности полупространства, причем $0.3 \le \alpha \le 1$. Здесь $f(r)$ – неотрицательная функция, характеризующая форму основания штампа, причем:

A. Для штампа с плоским круглым основанием

$$f(r) = 0, \ (0 \le r \le a) \tag{5}$$

B. Для штампа с коническим основанием

$$f(r) = k_1 r, \ (r \ge 0) \tag{6}$$

где k_1 – угловой коэффициент уравнения поверхности конуса;

C. Для штампа, основание которого имеет форму шара

$$f(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx r^2 / 2R, \ (0 \le r << R) \tag{7}$$

где R – радиус шара.

В первом случае (случай A) зависимость между δ и F устанавливается в результате решения системы уравнений (3) и (4) относительно $p(r)$ и δ, а в остальных случаях (случаи B и C) зависимость δ от F устанавливается в результате определения неизвестных $p(r)$, a и δ из системы уравнений (3), (4) и из условия непрерывности контактных давлений на границе контактной области

$$p(a) = 0 \tag{8}$$

Наиболее удобным способом исследования этой вспомогательной контактной задачи является преобразование уравнения (3) к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [3] относительно новой неизвестной безразмерной функции $q(\xi)$:

$$q(\xi) = \frac{a\theta}{\delta}\left(\frac{\delta}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^1 K(\xi,\eta)\left[1 - \frac{f(a\eta)}{\delta} - q(\eta)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \eta d\eta \quad (0 \le \xi \le 1) \tag{9}$$

где введено обозначение

$$K(\P,\text{¦}) = \int\limits_0^{2\text{®}} \frac{d\ddot{}}{\sqrt{r^2 + \circ^2 - 2r\circ\cos\ddot{}}}, \quad q(\P) = 1 - \frac{f(a\P)}{\text{¢}} - \frac{k}{\text{¢}}[p(a\P)]^{\frac{1}{\sim}} \tag{10}$$

При этом, условие равновесия (4), согласно (10), принимает вид

$$F = 2\text{®}\left(\frac{\text{¢}}{k}\right)^{\frac{1}{\sim}} a^2 \int\limits_0^1 \left[1 - \frac{f(a\text{¦})}{\text{¢}} - q(\text{¦})\right]^{\frac{1}{\sim}} \text{¦}\, d\text{¦} \tag{11}$$

Известно [3], что существует область изменения характерных параметров задачи, при которой решение интегрального уравнения (9) можно получить методом последовательных приближений с достаточно быстрой сходимостью при малых значениях безразмерного параметра нагрузки $F_0 = (k/a)^{1/\sim} a^{-2} F$. Этот результат служит основой для установления приближенной аналитической зависимости между ¢ и F при малых нагрузках.

Принимая $q_0(\P) \equiv 0$ в качестве нулевого приближения, в первом приближении решение уравнения (9) будет

$$q(\P) = \frac{a\bar{}}{\text{¢}}\left(\frac{\text{¢}}{k}\right)^{\frac{1}{\sim}} \int\limits_0^1 K(\P,\text{¦})\left[1 - \frac{f(a\text{¦})}{\text{¢}}\right]^{\frac{1}{\sim}} \text{¦}\, d\text{¦} \quad (0 \le \P \le 1) \tag{12}$$

Когда штамп имеет плоское круглое основание (случай А), из (11) с учетом (5) и (12) получим зависимость между ¢ и F

$$F = \text{ª}_1 \text{¢}^{\frac{1}{\sim}} \left(1 - \text{ª}_2 \text{¢}^{\frac{1}{\sim} - 1}\right) \tag{13}$$

где

$$\text{ª}_1 = \text{®} a^2 k^{-\frac{1}{\sim}}, \quad \text{ª}_2 = \frac{2a\bar{}}{\sim} k^{-\frac{1}{\sim}} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(\P,\text{¦})\P\text{¦}\, d\P d\text{¦} \tag{14}$$

Когда штамп имеет коническое основание (случай В), то, принимая во втором соотношении (10) $\P = 1$ и учитывая (6), (8) и (12), получим соотношение

$$\frac{a\bar{}}{\text{¢}}\left(\frac{\text{¢}}{k}\right)^{\frac{1}{\sim}} \int\limits_0^1 K(\P,\text{¦})\left[1 - \frac{k_1 a\text{¦}}{\text{¢}}\right]^{\frac{1}{\sim}} \text{¦}\, d\text{¦} = 1 - \frac{k_1 a}{\text{¢}} \tag{15}$$

откуда можно определить радиус контактной области a в зависимости от ¢. В первом приближении имеем

$$a = \frac{\text{¢}}{k_1}\left(1 - \frac{}{k_1}\text{¢}^{\frac{1}{\sim}}\right), \qquad = \bar{} \cdot k^{-1/\sim} \int\limits_0^1 K(1,\text{¦})\text{¦}\, d\text{¦} \tag{16}$$

Далее, учитывая (12) и (16), из (11) получим приближенную зависимость между ¢ и F

$$F = ¥_1 ¢^{2+\frac{1}{\sim}} \left(1 - 2 \quad ¢^{\frac{1}{\sim}} \right), \quad ¥_1 = \frac{2®}{k_1^2} k^{-\frac{1}{\sim}} \int_0^1 (1 - ¶)^{\frac{1}{\sim}} ¶ d¶ \tag{17}$$

Если основание штампа имеет форму шара (случай С), то из (7), (8), (10) и (11) получим уравнение, аналогичное (15)

$$\frac{\bar{a}}{¢} \left(\frac{¢}{k} \right)^{\frac{1}{\sim}} \int_0^1 K(¶, ¦) \left[1 - \frac{a^2 ¦^2}{2R¢} \right]^{\frac{1}{\sim}} ¦ d¦ = 1 - \frac{a^2}{2R¢} \tag{18}$$

Отсюда получим зависимость a от ¢

$$a = \sqrt{2R¢} \left(1 - \quad R¢^{\frac{1}{\sim} - 1} \right) \tag{19}$$

Теперь учитывая (19), (7) и (12), из (11) получим

$$F = ¥_2 ¢^{1+\frac{1}{\sim}} \left(1 - 2 \quad ¢^{\frac{1}{\sim} - 1} \right), \quad \left(¥_2 = \frac{2®R\sim}{\sim + 1} k^{-\frac{1}{\sim}} ¢^{1+\frac{1}{\sim}} \right) \tag{20}$$

Таким образом, зависимость между ¢ и F для случаев А, В и С задается, соответственно, формулами (13), (17) и (20).

3. Для определения основных механических характеристик задачи об ударе штампа по шероховатому упругому полупространству уравнение (1) преобразуем к виду

$$m \frac{dV}{d¢} \frac{d¢}{dt} = -F, \quad (t > 0) \tag{21}$$

где $V = d¢ / dt$ – скорость штампа в текущий момент удара t. Далее, учитывая начальные условия (2), из (21) получим

$$m \frac{V_0^{\,2}}{2} - m \frac{V^2}{2} = \int_0^{¢} F d¢ \quad (22)$$

Отсюда получаются формулы для определения $¢_{\max}$ и T

$$m \frac{V_0^{\,2}}{2} = \int_0^{¢_{\max}} F d¢, \quad T = 2 \int_0^{¢_{\max}} \left[V_0^2 - \frac{2}{m} \int_0^{¢} F d¢ \right]^{-\frac{1}{2}} d¢ \tag{23}$$

Имея $¢_{\max}$, с помощью (13), (17) и (20) определяется максимальная прижимающая сила $F_{\max}$, соответственно, для случаев А, В и С.

На основании (13), (17) и (20), из (23) нетрудно убедиться в том, что в рассмотренных случаях А, В и С продолжительность удара T в первом приближении пропорциональна скорости удара V_0 с отрицательными степенями $-(1-\sim)/(1+\sim)$, $-(1+\sim)/(1+3\sim)$ и $-1/(1+2\sim)$, соответственно. Отсюда следует, что как в случаях В и С, так и в случае А при $0.3 \le \sim < 1$ с уменьшением скорости удара V_0 продолжительность удара T неограниченно возрастает, т.е. соблюдается основная закономерность теории удара Г. Герца [1].

Важно отметить, что эта закономерность нарушается как при ударе штампа с плоским круглым основанием по упругому шероховатому полупространству при $\sim = 1$, так и при ударе плоского штампа по абсолютно гладкому упругому полупространству [2]. В этих двух случаях продолжительность удара T не зависит от скорости удара V_0. Отметим также, что при ударе штампа с коническим или шаровым основанием по упругому абсолютно гладкому полупространству, как известно [2], продолжительность удара T пропорциональна скорости удара V_0 с соответственно отрицательными степенями –1/3 и –1/5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдсмит В. Удар. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
2. Динник А.Н. Избранные труды. Т.1. Киев: Изд. АН УкрССР, 1962. 151 с.
3. Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л.А. Вдавливание круглого штампа в упругое шероховатое полупространство. //Изв.РАН. МТТ (в печати).

Сведения об авторах:

Мхитарян Сурен Манукович
Д.ф.-м.н., профессор, гл. н. сотр. Института механики НАН РА
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^{б}
Тел.: (+374 10) 62 10 25
Email: mechins@sci.am

Шекян Артем Лаврентьевич
К.ф.-м.н., мл. н. сотр. Института механики НАН РА
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^{б}
Тел.: (+374 10) 39 89 01
E-mail: mrtiko@mail.ru

Шекян Лаврентий Арамович
К.ф.-м.н., доцент Гос. инженерного университета Армении
Адрес: Армения, 0009, Ереван, ул. Теряна, 105
Тел.: (+374 10) 39 89 01
E-mail: mrtiko@mail.ru

ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕУПРУГИХ СЛОИСТЫХ И БЛОЧНЫХ СРЕД

Никитин И.С.
Москва, Россия

Доклад посвящен построению континуальных динамических моделей деформирования слоистой и блочной сред с учетом проскальзывания, трения и отслоения на контактных границах слоев или блоков. Эти модели основаны на представлениях теории скольжения Батдорфа-Будянского в ее дискретном варианте.

Предполагается, что в слоистой среде упругие слои в прижатом состоянии могут проскальзывать относительно друг друга с трением, а растягивающих напряжений контактные границы не выдерживают – происходит отслоение.

Под блочной средой понимается регулярная структура, состоящая из равномерно уложенных упругих «кубиков» («параллелепипедов»), подверженных воздействию поверхностных или объемных нагрузок. На контактных границах также возможно проскальзывание с трением или отслоение. Таким образом, блочная среда трактуется как среда, обладающая тремя взаимно перпендикулярными плоскостями возможного скольжения-отслоения с заданными локальными контактными условиями на каждой из них.

Также рассматриваются структуры типа «кирпичной кладки» или «паркета». Их отличие от рассматриваемой регулярной блочной среды в том, что одна (или все три) из плоскостей скольжения-отслоения является плоскостью только возможного отслоения (скольжение на ней невозможно из-за структурного нахлеста «кубиков» - «кирпичей»).

Основное условие, которое позволяет построить континуальные модели рассматриваемых дискретных структур, состоит в том, что размер слоя или блока £ должен быть много меньше пространственного размера L рассматриваемого слоистого или блочного массива, $£ << L$.

Для построения континуальных моделей сформулируем локальные условия взаимодействия на контактных границах. В декартовой прямоугольной системе координат x_i, $i = 1, 2, 3$ рассмотрим безграничную упругую среду с ориентированной системой периодически повторяющихся параллельных плоскостей скольжения. Ориентацию этой системы зададим единичной нормалью $\mathbf{n}$. Расстояние между плоскостями скольжения постоянно и равно £ . Плотность материала °, а также модули упругости Ламе ª и « считаются заданными константами. Напряженное состояние описывается тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Вектор касательного напряжения на плоскости скольжения равен $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, нормальное напряжение равно $±_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Введем векторы скоростей сдвига $\boldsymbol{\gamma}$ и отрыва $\boldsymbol{\omega} = \mu \mathbf{n}$, определяемые скачками касательной $[\boldsymbol{V}_{2}]$ и нормальной $[V_n]$ скоростей на контактных границах: $\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{V}_{2}]/£$, $\mu = [V_n]/£$.

Условия контактного взаимодействия имеют следующий вид. Скольжение с трением имеет место при $\pm_n < 0$:

$$\boldsymbol{\tau} = q|\pm_n|\left(\boldsymbol{\gamma}/|\boldsymbol{\gamma}| + ¦\,\boldsymbol{\gamma}\right) \text{ при } |\boldsymbol{\tau}| \geq q|\pm_n|, \quad \mu = 0$$

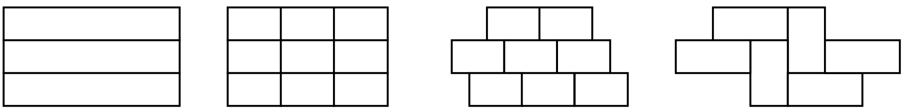
$$\boldsymbol{\gamma} = 0 \text{ при } |\boldsymbol{\tau}| < q|\pm_n|, \ \mu = 0$$

Отслоение происходит при $\Omega \geq 0$: $\boldsymbol{\tau} = \pm_n = 0$.

Здесь $\Omega = [u_n]/£$ – нормированный скачок нормальных смещений на контактной границе, $\dot{\Omega} = \mu$, q – коэффициент сухого трения, ¦ – коэффициент вязкого трения. В дальнейшем используется функция Хевисайда $H(x)$, а также обозначение $\langle F \rangle = F(x)H(F(x))$, принятое в теории упруговязкопластичности.

Контактную плоскость с указанными условиями взаимодействия будем называть плоскостью скольжения-отслоения.

Сформулируем модель слоистой среды. В среде, состоящей из упругих слоев, имеется единственная система плоскостей скольжения-отслоения с нормалью $\mathbf{n}$, ее структура схематически в двумерном варианте показана на фиг.1а. На границах слоев выполняются выбранные контактные условия.



Фиг.1a Фиг.1b Фиг.1c Фиг.1d

Для того чтобы перейти к континуальной модели слоистой среды, будем рассматривать $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\omega}$ как непрерывные функции координат и времени, имеющие смысл распределенных скоростей скольжений и отслоений, и воспользуемся соотношениями теории скольжения. Эти соотношения позволяют учитывать вклад скоростей скольжений $\boldsymbol{\gamma}$ и отслоений $\boldsymbol{\omega}$ в тензоры скоростей неупругой деформации $\mathbf{e}^{¥}$ и $\mathbf{e}^{\mu}$, соответственно:

$$\mathbf{e}^{¥} = (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n})/2, \quad \mathbf{e}^{\mu} = (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{n})/2 = \mu\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

Полный тензор скоростей деформации $\mathbf{e}$ получается сложением всех упругих и неупругих составляющих и равен:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{e} + \mathbf{e}^{¥} + \mathbf{e}^{\mu}, \quad \mathbf{e} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^{T})/2$$

Здесь $\mathbf{v}$ – «макроскопическая» скорость частиц среды, $\mathbf{e}^e$ – тензор скоростей упругой деформации, который связан с тензором напряжений законом Гука:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = ª(\mathbf{e}^e : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2«\mathbf{e}^e$$

Сквозные условия для $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\omega}$, соответствующие локальным контактным условиям, имеют вид:

$$\boldsymbol{\gamma} = \left\langle |\boldsymbol{\tau}|/(q|±_n|) - 1 \right\rangle \boldsymbol{\tau}/(¦\,|\boldsymbol{\tau}|),\ \mu = 0 \text{ при } ±_n < 0$$

$$\boldsymbol{\tau} = ±_n = 0 \text{ при } \Omega \geq 0$$

Система замыкается уравнениями движения: $°\,\dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

Полученную систему уравнений необходимо дополнить условиями на границе Γ области, занимаемой средой: $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{f}_\Gamma$ или $\mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{v}_\Gamma$, а также начальными условиями для искомых функций при $t = 0$: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v} = \Omega = 0$.

Эту систему можно написать в покомпонентном виде:

$$°\,\dot{v}_i = ±_{ij,j}$$

$$\dot{±}_{ij} = ª¢_{ij}(v_{k,k} - \mu) + «\left[v_{i,j} + v_{j,i} - 2\mu n_i n_j - (n_i¥_j + n_j¥_i)\right]$$

$$¥_i = \left\langle |\boldsymbol{\tau}|/(q|±_n|) - 1 \right\rangle ²_i/(¦\,|\boldsymbol{\tau}|),\ \ \mu = 0 \ \text{ при } ±_n < 0$$

$$±_n = \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{при } \Omega \geq 0$$

$$\dot{\Omega} = \mu,\ \ i, j = 1,2,3,\ \ |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\sum_{k\neq 2} ±_{2k}±_{2k}}$$

Здесь $±_n = ±_{kl}n_k n_l$, $²_i = ±_{ik}n_k - ±_{kl}n_k n_l n_i$, v_i и $±_{ij}$ – компоненты вектора скорости и тензора напряжений.

На основе аналогичных представлений формулируется модель блочной среды. Предполагается, что блочная среда образована равномерно уложенными упругими кубиками с тремя возможными плоскостями скольжения-отслоения, ориентированными взаимно-перпендикулярными единичными нормалями $\mathbf{n}^{(s)}$, $s = 1,2,3$. Схематически ее двумерный вариант показан на фиг.1b. Вектор скорости скольжения и отслоения на плоскости с нормалью $\mathbf{n}^{(s)}$ обозначим $\boldsymbol{\gamma}^{(s)}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(s)}$. Также обозначим компоненту $\boldsymbol{\gamma}^{(s)}$ в направлении $\mathbf{n}^{(i)}$, $s \neq i$ через $¥_i^{(s)}$. Будем также называть плоскость с нормалью $\mathbf{n}^{(s)}$ s-плоскостью. Картина возможных скольжений на контактных поверхностях описывается следующим образом.

Если происходит скольжение на s-плоскости и при этом $¥_i^{(s)} \neq 0$, $¥_j^{(s)} \neq 0$, $i \neq j$, то регулярность блочной структуры нарушается, из-за нахлестов i- и j-плоскости перестают быть плоскостями возможного скольжения, а становятся только плоскостями отслоения с контактными условиями следующего вида:

$$¥_i^{(s)} = 0, \quad \mu^{(s)} = 0 \ \text{ при } \pm_n^{(s)} < 0$$

$$\pm_n^{(s)} = 0 \ , \ ¥_i^{(s)} = 0 \ \text{ при } \Omega^{(s)} \geq 0$$

Единственной плоскостью скольжения-отслоения становится s-плоскость. Таким образом, предполагается, что из трех возможных плоскостей скольжения-отслоения в зависимости от типа напряженного состояния реализуется только одна. Остальные две становятся плоскостями отслоения. Соответствующие этим условиям континуальные уравнения блочной среды получаются суммированием скольжений $\boldsymbol{\gamma}^{(s)}$ и отслоений $\boldsymbol{\omega}^{(s)}$ по трем s-плоскостям, $s = 1, 2, 3$.

Используя введенные понятия плоскости скольжения-отслоения и плоскости отслоения, можно сформулировать специфическую модель блочной среды типа «кирпичной кладки». В этом случае предполагается, что изначально имеет место относительный сдвиг «кубиков»-«кирпичей» для определенности в 2-плоскости в направлении $\mathbf{n}^{(1)}$, так что 1-плоскость перестает быть плоскостью скольжения-отслоения и остается только плоскостью отслоения: $\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \equiv 0$. В двумерном случае структура такой среды показана на фиг. 1c.

На основании введенного понятия о плоскости отслоения можно также сформулировать определяющие соотношения для периодической структуры из упругих элементов, которую, в соответствии с ее плоским аналогом, можно назвать «паркетной укладкой» или, для краткости, просто «паркетом» (фиг.1d). В этом случае изначальные относительные смещения структурных элементов относительно трех взаимно-перпендикулярных плоскостей не оставляют возможности скольжения ни на одной из них. Все три плоскости исходно будут являться плоскостями отслоения, поведение среды будет описываться уравнениями блочной среды с условиями на дополнительные функции $¥_i^{(s)} = 0$ при $i \neq s$, $s = 1, 2, 3$.

Полученные реологические уравнения похожи на уравнения анизотропной теории упруговязкопластичности. Линейный дифференциальный оператор этих уравнений совпадает с оператором теории упругости, а нелинейные эффекты трения (сухого или вязкого) учтены в недифференциальных членах с малым параметром в знаменателе, аналогичных членам вязкопластической деформации. Для решения полученных систем уравнений предложен явно-неявный численный метод, основанный на методе конечных объемов и неявной аппроксимации полулинейных определяющих уравнений модели, содержащих малый параметр вязкости в знаменателе свободного члена. Нелинейная система разностных уравнений неявной аппроксимации решена аналитически и из нее получены формулы для корректировки компонент тензора напряжений в процессе расчета и вычисления распределенных скольжений и отслоений

Приведены примеры решения ряда динамических задач о взаимодействии волн с полостями и сооружениями в слоистой и блочной среде и развитии зон проскальзывания и отслоения в их окрестности. Также решен ряд квазистатических задач о развитии зон повреждений в слоистой среде и массивах кирпичной кладки при различных граничных нагрузках и смещениях, моделирующих сейсмические и техногенные воздействия на элементы зданий и сооружений.

Данные примеры иллюстрируют возможность континуального моделирования динамических и квазистатических процессов в периодических структурах из упругих элементов – слоев или блоков, различным образом уложенных и ориентированных, с учетом внутренних скольжений и отслоений.

Сведения об авторе:

Никитин Илья Степанович

К.ф.-м.н., доцент, МАТИ – Российский Государственный
Технологический Университет им. К.Э.Циолковского
Адрес: 127322, Москва, ул. Милашенкова 16-12
Тел.: (+7-916)-637-70-28 (моб.).(+7-495)-639-22-23 (дом.)
E-mail: i_nikitin@list.ru

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТРЁХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Оганесян Р.Ж.

Ереван, Армения

На основе полученного асимптотически точного решения пространственной смешанной задачи теории упругости о вынужденных колебаниях многослойных ортотропных пластин, показано, что наличие мягкого слоя приводит к уменьшению амплитуд тангенциальных колебаний в вышестоящем слое. Теоретически обосновано применение сейсмоизоляторов. Показано, что при построении сооружений, если между бетонным фундаментом и основанием вставить тонкий слой резиноподобного материала, это приведет к уменьшению опасных колебаний в фундаменте и, как следствие, к увеличению сейсмостойкости сооружения.

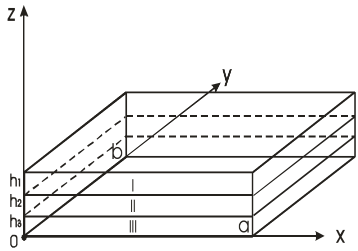


Рис.1

Рассмотрим вынужденные колебания трёхслойной ортотропной пластинки:

$$D=\{(x,y,z): x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ 0\le z\le h,\ h=h_1+h_2+h_3,\ h<<\min(a,b)\}$$

при условиях полного контакта между слоями, когда верхняя грань верхнего слоя свободна, а на лицевой поверхности нижнего слоя задан вектор перемещения, который во времени изменяется гармонически (рис.1).

Имеем граничные условия:

$$\pm^{I}_{xz}=\pm^{I}_{yz}=\pm^{I}_{zz}=0 \text{ при } z = h \tag{1}$$

$$u^{III}(z=0)=u^{-}(\P,¦)\exp(i\Omega t)$$

$$\mathrm{v}^{III}(z=0)=\mathrm{v}^{-}(\P,¦)\exp(i\Omega t) \tag{2}$$

$$w^{III}(z=0)=w^{-}(\P,¦)\exp(i\Omega t)\,,\ \P=x/l,\quad ¦=y/l\,,\ l=\min(a,b)$$

и условия полного контакта:

$$\pm^{I}_{xz}=\pm^{II}_{xz},\ \pm^{I}_{yz}=\pm^{II}_{yz},\ \pm^{I}_{zz}=\pm^{II}_{zz},\ u^{I}=u^{II},\ \mathrm{v}^{I}=\mathrm{v}^{II},\ w^{I}=w^{II} \text{ при } z=h_2+h_3$$

$$\pm^{II}_{xz}=\pm^{III}_{xz},\ \pm^{II}_{yz}=\pm^{III}_{yz},\ \pm^{II}_{zz}=\pm^{III}_{zz},\ u^{II}=u^{III},\mathrm{v}^{II}=\mathrm{v}^{III},w^{II}=w^{III} \text{ при } z=h_3 \tag{3}$$

Запишем систему динамических уравнений пространственной задачи теории упругости анизотропного тела, для ортотропных сред:

$$\frac{\partial\pm^{(k)}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\pm^{(k)}_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\pm^{(k)}_{xz}}{\partial z}=\circ_k\frac{\partial^2u^{(k)}}{\partial t^2}\qquad\left(x,y,z;u^{(k)},\mathrm{v}^{(k)},w^{(k)}\right)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} = a_{11}^{(k)}\pm_{xx}^{(k)} + a_{12}^{(k)}\pm_{yy}^{(k)} + a_{13}^{(k)}\pm_{zz}^{(k)}; \qquad \left(u^{(k)}, \mathrm{v}^{(k)}, w^{(k)}; x, y, z; 1,2,3\right)$$

$$\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}^{(k)}}{\partial x} = a_{66}^{(k)}\pm_{xy}^{(k)}, \qquad \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} = a_{55}^{(k)}\pm_{xz}^{(k)} \tag{4}$$

$$\frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}^{(k)}}{\partial z} = a_{44}^{(k)}\pm_{yz}^{(k)} \qquad k = I, II, III$$

Решение системы уравнений (4) при граничных условиях (1), (2) и условиях контакта (3) будем искать в виде [1,2]:

$$\pm_{\sim}^{(k)}(x, y, z, t) = \pm_{ij}^{(k)}(x, y, z)\exp(\mathbf{i}\Omega t)$$

$$(u^{(k)}, \mathrm{v}^{(k)}, w^{(k)}) = (u_x^{(k)}, u_y^{(k)}, u_z^{(k)})\exp(\mathbf{i}\Omega t) \tag{5}$$

$$\sim, \quad = x, y, z; \qquad i, j = 1,2,3; \qquad k = I, II, III$$

Подставив (5) в (4), затем перейдя к безразмерным координатам и безразмерным компонентам вектора перемещения:

$$¶ = x/l, \qquad ¦ = y/l, \qquad ¸ = z/h;$$

$$U^{(k)} = u_x^{(k)}/l, \qquad V^{(k)} = u_y^{(k)}/l, \quad W^{(k)} = u_z^{(k)}/l \tag{6}$$

где $h = h_1 + h_2 + h_3$, h_i – толщины слоёв, $l = \min(a, b)$ и $h << l$, k – номер слоя, получим сингулярно-возмущенную малым параметром $£ = h/l$ систему, решение которой будем искать в виде следующего асимптотического разложения [3]:

$$(U^{(k)}, V^{(k)}, W^{(k)}) = £^{s}(U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)})$$

$$\pm_{ij}^{(k)} = £^{-1+s}\pm_{ij}^{(k,s)} \qquad s = \overline{0, N}; \quad k = I, II, III \tag{7}$$

Обозначение $s = \overline{0, N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование от 0 до числа приближений *N*. Подставив (7) во вновь полученную систему уравнений, определив коэффициенты разложения (7) и удовлетворив условиям (1)-(3), получим решение:

$$U^{(k,s)} = \frac{f_{U1}^{(k,s)}}{\Delta_U}\cos\sqrt{a_{55}^{(k)}\circ_k}\,\Omega_*¸ + \frac{f_{U2}^{(k,s)}}{\Delta_U}\sin\sqrt{a_{55}^{(k)}\circ_k}\,\Omega_*¸ + U_{ч}^{(k,s)}$$

$$\left(U, V, W;\; a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, 1/A_{11}^{(k)};\; b_{13}^{(k,s)}, b_{23}^{(k,s)}, b_{33}^{(k,s)}\right) \quad k = I, II, III \tag{8}$$

При s = 0 имеем:

$$U^{(k,0)} = \frac{f_{U1}^{(k,0)}}{\Delta_U}\cos\sqrt{a_{55}^{(k)}\circ_k}\,\Omega_*¸ + \frac{f_{U2}^{(k,0)}}{\Delta_U}\sin\sqrt{a_{55}^{(k)}\circ_k}\,\Omega_*¸ \tag{9}$$

где

$$f_{U1}^{(I,0)} = \Omega_*^{\,2} U^{-(0)} \sqrt{\frac{\circ_{II}\,\circ_{III}}{a_{55}^{II} a_{55}^{III}}} \cos\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}}\,\Omega_*$$

$$f_{U2}^{(I,0)} = \Omega_*^{\,2} U^{-(0)} \sqrt{\frac{\circ_{II}\,\circ_{III}}{a_{55}^{II} a_{55}^{III}}} \sin\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}}\,\Omega_*$$

$$f_{U1}^{(II,0)} = \frac{\Omega_*^{\,2} U^{-(0)}}{2} \sqrt{\frac{\circ_{III}}{a_{55}^{III}}} \left[\left(\sqrt{\frac{\circ_{II}}{a_{55}^{II}}} - \sqrt{\frac{\circ_{I}}{a_{55}^{I}}} \right) \cos\left[\left(\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} - \left(\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} + \sqrt{a_{55}^{II}\circ_{II}} \right) \text{¸}_2 \right) \Omega_* \right] + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\frac{\circ_{I}}{a_{55}^{I}}} + \sqrt{\frac{\circ_{II}}{a_{55}^{II}}} \right) \cos\left[\left(\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} + \left(\sqrt{a_{55}^{II}\circ_{II}} - \sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} \right) \text{¸}_2 \right) \Omega_* \right] \right] \tag{10}$$

$$f_{U2}^{(II,0)} = \frac{\Omega_*^{\,2} U^{-(0)}}{2} \sqrt{\frac{\circ_{III}}{a_{55}^{III}}} \left[\left(\sqrt{\frac{\circ_{I}}{a_{55}^{I}}} - \sqrt{\frac{\circ_{II}}{a_{55}^{II}}} \right) \sin\left[\left(\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} - \left(\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} + \sqrt{a_{55}^{II}\circ_{II}} \right) \text{¸}_2 \right) \Omega_* \right] + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{\frac{\circ_{I}}{a_{55}^{I}}} + \sqrt{\frac{\circ_{II}}{a_{55}^{II}}} \right) \sin\left[\left(\sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} + \left(\sqrt{a_{55}^{II}\circ_{II}} - \sqrt{a_{55}^{I}\circ_{I}} \right) \text{¸}_2 \right) \Omega_* \right] \right]$$

$$\left(U, V, W;\ a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, 1 \big/ A_{11}^{(k)} \right)$$

Здесь

$$\text{¸}_1 = \left(h_1 + h_2 + h_3\right) \big/ h = 1, \quad \text{¸}_2 = \left(h_2 + h_3\right) \big/ h, \quad \text{¸}_3 = h_3 \big/ h;$$

$U^{-(0)} = u^{-}/l$, $V^{-(0)} = \mathrm{v}^{-}/l$, $W^{-(0)} = w^{-}/l$ и $U^{-(s)} = V^{-(s)} = W^{-(s)} = 0$ при $s > 0$.

Аналогично записываются выражения $f_{U1}^{(III,0)}$ и $f_{U2}^{(III,0)}$.

Считаем, что $\Delta_U, \Delta_V, \Delta_W \neq 0$. Если Ω такова, что хотя бы одна из этих величин равна нулю – произойдёт резонанс. Эти значения Ω совпадают со значениями частот собственных колебаний.

Особый интерес представляет случай:

$$u^{-} = \text{const}, \ \mathrm{v}^{-} = \text{const}, \ w^{-} = \text{const} \tag{11}$$

Уже приближению $s = 0$ соответствует точное решение:

$$u^{(k)} = \left(\frac{f_{U1}^{(k,0)}}{\Delta_U} \cos\sqrt{a_{55}^{(k)}\circ_{k}}\,\Omega_* \text{¸} + \frac{f_{U2}^{(k,0)}}{\Delta_U} \sin\sqrt{a_{55}^{(k)}\circ_{k}}\,\Omega_* \text{¸} \right) l \exp(i\Omega t) \tag{12}$$

$$\left(u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}; U, V, W;\ a_{55}^{(k)}, a_{44}^{(k)}, 1 \big/ A_{11}^{(k)} \right), \qquad k = I, II, III$$

Анализ этого решения при различных конфигурациях слоёв пакета позволяет сделать весьма важное для приложений, в частности, для сейсмостойкого строительства, заключение. Рассмотрим трёхслойный пакет, состоящий из слоёв СВАМ, стеклопластика СТЭТ и АСТТ, характеристики упругости которых приведены в [3], с толщинами, соответственно, h_1 =1.3м, h_2 =0.1м, h_3 =1.2м. Графики амплитуд колебаний по толщине пластинки приведены на рис. 2. А когда верхний и нижний слои пакета состоят из слоёв стеклопластика, а средний слой из резины (E =6.96*10^5 Па, G =2.4*10^5 Па, ° =1100 кг/м^3), этому соответствует график на рис.3.

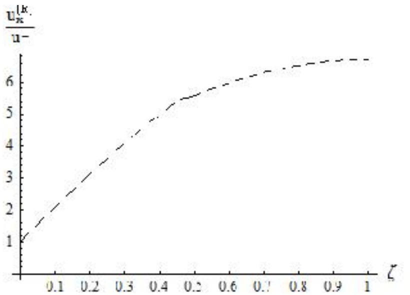


Рис. 2

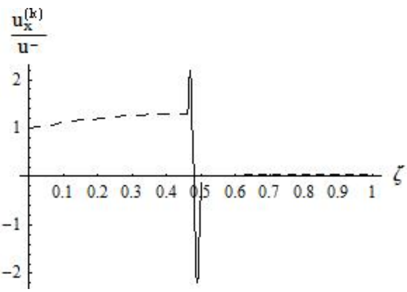


Рис. 3

Из приведённых графиков видно, что если все три слоя состоят из жестких схожих материалов, то амплитуды колебаний возрастают (хоть и незначительно) от слоя к слою. При наличии же среднего слоя из более мягкого материала (например, резины), амплитуды колебаний в верхнем слое резко уменьшаются. Этот результат сохраняет силу и при иных толщинах среднего мягкого слоя. Установленный выше факт можно использовать в сейсмостойком строительстве. При построении сооружений, если между бетонным фундаментом и основанием вставить тонкий слой резины, это приведёт к уменьшению опасных колебаний в фундаменте и, как следствие, к увеличению сейсмостойкости сооружения.

Рассмотрим ту же задачу, но с другими граничными условиями. Предполагается, что верхняя грань верхнего слоя жёстко закреплена, т. е. в условиях (1) вместо $\pm^{I}_{xz} = \pm^{I}_{yz} = \pm^{I}_{zz} = 0$ имеем $u^I = \mathrm{v}^I = w^I = 0$ при $z = h$. В этом случае, опять-таки решив уравнения (4) при изменённых граничных условиях, получим решение в виде (8) но с другими функциями $f_{P\,j}^{(k,s)}$ $\left(P = U, V, W;\ j = 1{,}2;\ k = I, II, III\right)$. В частности, условиям (11) будет соответствовать решение (8), (9), а в (10) необходимо заменить $\sin$ на $\cos$, а

$\cos$ на $(-\sin)$. В этом случае тоже амплитуды колебаний в верхнем слое уменьшаются при наличии среднего слоя из резины.

С помощью программного пакета Mathematica 5 написана программа, посредством которой удовлетворяются граничные и контактные условия и вычисляются амплитуды вынужденных колебаний нулевого приближения для n-слойной пластинки. Необходимо ввести в программу количество слоев, а также их толщины, упругие и физические характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во ”Гитутюн” НАН РА, 2002. С. 9-19.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи Анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван. Изд-во ”Гитутюн” НАН Армении, 2005. 468с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.
4. Оганесян Р.Ж. Асимптотика вынужденных колебаний трехслойной ортотропной пластинки при полном контакте между слоями. // Сб.: “Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести”. Ереван. Изд-во “Гитутюн” НАН Армении, 2006. С. 242-248.

Сведения об авторе:

Оганесян Рубен Жораевич

К.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24[б]
Институт механики НАН Армении
Тел: (+37410) 52-48-90
E-mail: ruben_hovh@yahoo.com

О НАЛИЧИИ КОРИОЛИСОВОЙ СИЛЫ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ШАРА (МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ) ПО ОКРУЖНОСТИ

Оганесян С.М.
Гюмри, Армения

В статье показано, что аналог вращательного движения неявным образом присутствует (используется) в рамках классической механики при решении следующей задачи.

Задача. Шар массы m равномерно движется со скоростью $\vec{v}$ по окружности радиуса R с центром в точке O в поле центральных сил $\vec{F}_{ц}$ при наличии связи. Определить силы, действующие на шар и связь. Трением пренебрегаем.

Анализ решения задачи. Обозначим через $\vec{R}$ радиус-вектор с началом в точке O и с модулем $|\vec{R}|=R$, $v=|\vec{v}|$. В классической механике принимается [1], что: 1) в системе шар-связь-центральная сила создается не $\vec{F}_{цб}=\frac{mv^2}{R^2}\vec{R}$, а антицентральная сила $\vec{F}_{ац}$; 2) $\vec{F}_{ац}$ приложена к связи и создает воздействие шара на связь $\vec{Q}=\vec{F}_{ац}$; 3) силы $\vec{F}_{ц}$ и $\vec{F}_{ац}$ не взаимодействуют (действуют независимо); 4) связь действует на шар силой $\vec{N}=-\vec{Q}$; 5) сумма сил, действующих на шар, равна $\vec{F}_{цс}=\vec{F}_{ц}+\vec{N}$, а уравнение движения записывается в виде

$$-\frac{mv^2}{R^2}\vec{R}=\vec{F}_{ц}+\vec{N} \qquad (1)$$

В монографиях и учебниках по классической механике умалчивается вопрос, как возникает сила $\vec{F}_{ац}=\vec{Q}$.

По мнению автора статьи, это сделано умышленно. Покажем, что детальное рассмотрение этой подзадачи приводит к вопросам, на которые классическая механика не может дать исчерпывающего ответа.

Замечание 1. Исключение составляет монография [2, с.14], в которой сделана попытка введения понятия ”новой” центробежной силы.

Пусть величина $v_1>0$ удовлетворяет равенству $|\vec{F}_{ц}|=\frac{mv_1^2}{R}$, а величину

v_2 определим из равенства

$$v = v_1 + v_2 \qquad (2)$$

Известно [2], что для модуля силы $\vec{Q}$ справедливы неравенства

$$\frac{mv_2^2}{R} < \left|\vec{Q}\right| < \frac{mv^2}{R} \qquad (3)$$

Представим формально скорость $\vec{v}$ и модуль центростремительной силы $F_{цс}$ соответственно в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{, где } |\vec{v}_1| = v_1, |\vec{v}_2| = v_2 \qquad (4)$$

$$F_{цс} = \frac{mv^2}{R} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{R} = \frac{mv_1^2}{R} + 2m\frac{v_1 v_2}{R} + \frac{mv_2^2}{R} \qquad (5)$$

Из равенств (2), (4) следует, что направление скоростей $\vec{v}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ совпадают.

Изменим скорость $\vec{v}$ на величину $\overrightarrow{\Delta v}$, $\tilde{\vec{v}} = \vec{v} + \overrightarrow{\Delta v}$, а силу $\vec{F}_ц = -\frac{mv_1^2}{R^2}\vec{R}$ заменим на $\tilde{\vec{F}}_ц = -\frac{m(v_1 + \Delta v)^2}{R^2}\vec{R}$, где Δv в зависимости от направления $\overrightarrow{\Delta v}$ равна $\pm \left|\overrightarrow{\Delta v}\right|$.

Запишем аналог равенства (5) для скорости $\tilde{\vec{v}}$ и центральной силы $\tilde{\vec{F}}_ц$, т.е.

$$\tilde{F}_{цс} = \frac{m(v + \Delta v)^2}{R} = \frac{m(v_1 + \Delta v)^2}{R} + 2m\frac{(v_1 + \Delta v)v_2}{R} + \frac{mv_2^2}{R} \qquad (6)$$

Сумма второго и третьего слагаемых в равенствах (5) и (6) численно совпадает с модулем сил $\vec{N}$ или $\vec{Q}$, соответственно, для скоростей $\vec{v}$ и $\tilde{\vec{v}}$. Поэтому воздействие шара на связь изменяется на

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q} - \tilde{\vec{Q}} \qquad (7)$$

Величина $\left|\Delta\vec{Q}\right| = \Delta Q$ всегда может быть измерена как разность двух физических сил. Из равенств (5) и (6) легко получить, что три независимо определяемые величины ΔQ, $|\Delta\vec{v}|$ и v_2 связаны равенством

$$\Delta Q = 2m\,\frac{v_2\left|\Delta \vec{v}\right|}{R} \tag{8}$$

Из равенства (8) видно, что сила $\overrightarrow{\Delta Q}$ выражается через кориолисовую силу

$$\overrightarrow{\Delta Q} = -\,2m\left(\vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{\Delta v}\right) \tag{9}$$

где $\cdot\, x \,\cdot$ – знак векторного произведения двух векторов; $\vec{\omega}_2$ – вектор угловой скорости с $\left|\vec{\omega}_2\right| = \omega_2 = \frac{v_2}{R}$, который перпендикулярен к плоскости окружности, а его направление выбрано таким образом, чтобы $\vec{\omega}_2 \times \vec{R} = \vec{v}_2$.

Если взять $\overrightarrow{\Delta v} = -\vec{v}_1$, то равенство (9) примет вид

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q} - \tilde{\vec{Q}} = 2m\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_1\right) = \vec{F}_{кор} \tag{10}$$

Известно, что кориолисовая сила возникает при относительном движении на вращающемся диске [1]. На основании работ [3,4] в формуле (10) вращательное движение приписано скорости $\vec{v}_2$, а относительное движение – $\vec{v}_1$, так как $\vec{v}_2$ создает центробежную силу, а $\vec{v}_1$ нет.

Поэтому в равенстве (5) второе слагаемое является модулем реальной физической кориолисовой силы.

Таким образом, в рамках классической механики формальные представления (4)-(6) приобретают физическое содержание, а именно: воздействие $\overleftarrow{Q} = \vec{F}_{ац}$ шара на связь представляется в виде равенства

$$\vec{Q} = \vec{F}_{цб2} + \vec{F}_{кор} = \frac{mv_2^2}{R^2}\vec{R} + 2m\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_1\right) \tag{11}$$

Хотим мы того или нет, сила $\vec{Q}$ вполне выражается через известные в классической механике силы. Этот парадоксальный результат требует серьезного осмысления и обсуждения, которые являются предметом дальнейших исследований в русле идей работ [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский Ю.Л. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320с.

2. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. М.: Изд. иност.литер., 1951. Т.2. Ч.1. 436с.
3. Оганесян С.М. О необходимости изменения расчетной схемы колебания линейного осциллятора при кинематическом возбуждении.// В кн.: Сб научных трудов конф., посв. 40-летию основания ИГИС им А.Назарова НАН РА. – Гюмри: Изд.”Гитутюн” НАН РА, 2002. С.368-380.
4. Оганесян С.М. О двух механизмах кругового движения шара (материальной точки).// В. кн.: Сб научных трудов конф., посв. 60-летию основания НАН РА. – Гюмри: Изд.”Гитутюн” НАН РА, 2004. С.277-290.

Сведения об авторе:

Оганесян Севада Мкртичевич

Д.ф.-м.н., чл.- корр. НАН РА, Директор Института геофизики и инженерной сейсмологии им. А.Г. Назарова НАН РА
Адрес: 3115, Армения, Гюмри-15, ул. В. Саргсяна 5, ИГИС
Тел.: 031231261
E-mail: mararm@bk.ru

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, СОЕДИНЕННЫХ ПО ТОРЦУ И НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Оганесян Э.К.
Ереван, Армения

Рассматривается деформация полого цилиндра конечной длины L, когда он состоит из двух соединенных по торцу цилиндров, физические характеристики которых различны. Предполагается, что цилиндры одинакового радиуса и один торец цилиндра полностью закреплены, боковая поверхность и другой торец составного цилиндра свободны от напряжений и цилиндр деформируется только под действием собственного веса, действующего перпендикулярно к оси цилиндра.

Для решения задачи методом конечных элементов достаточно воспользоваться только первыми гармониками [1], так как компоненты перемещения можно представить в виде

$$U_r(r,z,\text{¨}) = U(r,z)\cos\text{¨}$$
$$U_{\text{¨}}(r,z,\text{¨}) = W(r,z)\sin\text{¨}$$
$$U_z(r,z,\text{¨}) = V(r,z)\cos\text{¨}$$

а компоненты объемной силы $P(r,z,\text{¨})$ в данном случае представляются в виде

$$P_r = -\text{¥}_k \cos\text{¨}\ ,\ P_z = 0\ ,\ F_{\text{¨}} = \text{¥}_k \sin\text{¨}\ ,\ (\mathrm{k}=1{,}2)$$

В соответствии с процедурой приведения нагрузки k к узлам элемента, вектор сил элемента “Э” будет выражаться соотношением

$$\left\{F_p^{(n)}\right\} = \int\limits_{v^{э}} [N^{э}]^T (A^{(n)})^T A^{(n)} [\overline{P}^{(n)}] dv = \int\limits_0^{2\text{®}} (A^{(n)})^T A^{(n)} d\text{¨} \int\limits_{S^{э}} [N^{э}]^T [\overline{P}^{(n)}] ds \qquad (1)$$

Введем следующие векторы, которые по смыслу соответствуют узловым нагрузкам плоского треугольного элемента с площадью “ $S^{э}$ ”

$$\overline{F}_i^{(n)} = \begin{Bmatrix} \overline{R}_{ri}^{(n)} \\ \overline{R}_{zi}^{(n)} \\ \overline{R}_{\text{¨}i}^{(n)} \end{Bmatrix}$$

– это нагрузка в узле “i” треугольного элемента.

Тогда общая нагрузка треугольного элемента будет представлена

$$\left\{\overline{F}^{(n)}\right\}^{э} = \begin{Bmatrix} \overline{F}_I^{(n)} \\ \overline{F}_J^{(n)} \\ \overline{F}_m^{(n)} \end{Bmatrix} = \int\limits_{S^{Э}} \left[\mathrm{N}^{Э}\right]^T \left[\overline{\mathrm{P}}^{(n)}\right] ds \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2), получим

$$\overline{F}_i^{(n)} = \text{®} \cdot \overline{F}_i^{(n)} = \text{®} \begin{Bmatrix} \overline{R}_{ri}^{(n)} \\ \overline{R}_{zi}^{(n)} \\ \overline{R}_{\ddot{}i}^{(n)} \end{Bmatrix} \; (n = 1,2,3,\ldots) \qquad (3)$$

Заметим что, если $n = 0$, то все силы, а следовательно, и решение не зависят от угла ¨ , тогда будем иметь симметричную задачу с нагрузками по осям r, z.

Уравнения равновесия узловых окружностей для всего тела вращения приводятся к виду

$$\left[K^{(n)}\right]\left\{\text{¢}^{(n)}\right\} + \left\{F_p^{(n)}\right\} = 0 \qquad (4)$$

Здесь $[K^{(n)}]$ – матрица жесткости общей системы для n-ой гармоники, элементы которого являются суммами матриц жесткости всех тех треугольных элементов, которые содержат один и тот же узел.

Матрица жесткости элемента “Э” для n-ой гармоники имеет размеры 3х3 и каждый из элементов этой матрицы подсчитывается по формуле

$$K_{ij}^{(n)э} = \text{®}\int_{S^{э}} \left\{\left[\overline{B}_i^{(n)}\right]^T [D] \left[\overline{\overline{B}}_j^{(n)}\right] + \left[\overline{\overline{B}}_i^{(n)}\right] [D] \left[\overline{B}_j^{(n)}\right]\right\} rdrdz \qquad (5)$$

где $\left[\overline{B}_i^{(n)}\right]$ и $\left[\overline{\overline{B}}_i^{(n)}\right]$ определяются как в [3]

Из (2-3) получим

$$\overline{F}_i^{(1)} = \begin{Bmatrix} \overline{R}_{ri}^{(1)} \\ \overline{R}_{zi}^{(1)} \\ \overline{R}_{\ddot{}i}^{(1)} \end{Bmatrix} = \int_{S^{э}} \begin{pmatrix} -\text{¥}_k N_i \\ 0 \\ \text{¥}_k N_i \end{pmatrix} rdrdz$$

или

$$\overline{R}^{(1)}_{ri} = ¥_k \int_{S^э} Nirdrdz\,,\ \overline{R}^{(1)}_{zi} = 0\,,\ \overline{R}^{(1)}_{¨i} = ¥_k \int_{S^э} Nirdrdz$$

где $s^э$ – площадь треугольного элемента на плоскости $¨ = 0$, соответствующего кольцевому элементу “Э”.

Элементы типового блока матрицы жесткости $[K^{(1)}]^э$ для элемента “Э” определяются из (5), где значение интеграла находится численным интегрированием.

Численное решение задачи

В качестве примера рассмотрим деформацию полого цилиндра $L_t = 8R$, который состоит из цилиндров длины $L_{t1} = 2{,}4R$ и $L_{t2} = 5{,}6R$ и который изгибается только под действием собственного веса. Предполагаем, что внешний диаметр обоих цилиндров равен $3R$, внутренний диаметр равен $R/2$. Далее: предполагаем, что материалы цилиндров разные. Физико-механические параметры следующие: $E_1 = 0.51*10^6 \dfrac{кг}{см^2}$, $¬_1 = 0.2$,

$¥_1 = 2.5*10^{-3} \dfrac{кг}{см^3}$, $E_2 = 2.08*10^6 \dfrac{кг}{см^2}$, $¬_2 = 0.28$, $¥_2 = 8.9*10^{-3} \dfrac{кг}{см^3}$.

В одном варианте осевое сечение полого цилиндра содержит 80 элементов с 55 узловыми точками, во втором варианте сечение содержит 100 треугольных элементов с 66 узловыми точками, а в третьем варианте – 120 элементов с 77 узловыми точками.

С помощью ЭВМ типа IBM PC определены амплитудные значения смещений узловых окружностей, соответствующих узловым точкам в указанном разбиении осевого сечения. Вычисления показывают, что деформации поперечных сечений незначительны и формы этих сечений почти не отличаются от кругового кольца.

Распределение нормальных радиальных напряжений $\pm_r$ на участках $r = r_i$, $(i = 1,2,3)$ радиального сечения при $¨ = 0$ исследовано в трех вариантах. В первом варианте $r = r_1 = R$, во втором варианте $r = r_2 = 2R$, в третьем варианте $r = r_3 = 2{,}5R$.

Из результатов следует, что с увеличением радиуса осевого сечения в зоне, близкой к защемленному торцу при $r \geq 2{,}5R$, вдавление заменяется втягиванием.

В зоне контакта значение $\pm_r$ имеет скачок, при этом, когда $r > 2R$, нормальное напряжение меняет знак с отрицательного на положительный, а при $r < 2{,}5R$ она при переходе через зону контакта сохраняет знак минус, а разрыв (скачок) между значениями остается, то есть с обеих сторон идет вдавливание с различной силой. Отметим также, что при возрастании r величина скачка $\pm_r$ монотонно уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соляник-Красса К.В. К задаче об упругом равновесии тел вращения. //ДАН СССР. 1957. Т.114. №1. С. 49-52.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: 1970. 939с.
3. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике.

<u>Сведения об авторе:</u>

Оганесян Эмин Казарович

К.ф.-м.н., научный сотрудник
Института механики НАН Армении
Адрес: Ереван, 0019, пр. Маршала Баграмяна 24Б
Тел.: (+37410)22-00-48

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ-ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Петросян Г. А.
Степанакерт, НКР

В работе асимптотическим методом решена смешанная краевая задача для анизотропной полосы-прямоугольника по геометрически нелинейной теории упругости.

1. Классические статические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [1,2]. Неклассические задачи теории упругости рассмотрены в [3]. Для полос с общей анизотропией в своей плоскости вопрос определения напряженно-деформированного состояния (НДС) рассмотрен в [4]. Вопрос определения НДС в плоской задаче, для анизотропной полосы, на продольных сторонах которой заданы смешанные условия теории упругости, рассмотрены в [5,6]. Для такой же полосы на основе геометрически нелинейной теории упругости, первая краевая задача решена в [7]. На той же основе решены смешанные краевые задачи для анизотропной полосы-балки в [8].

Рассматривается плоская нелинейная задача для анизотропной полосы: $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le l, |y| \le h, h << l\}$, на нижней и верхней сторонах которой заданы следующие условия для напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} &\pm_{xy} = £^4 \pm^-_{xy}(x),\ v = £^3 v^-(x) \ \text{ при } \ y = -h \\ &u = £^3 u^+(x),\ \pm_y = £^3 \pm^+_y(x) \ \text{ при } \ y = h \end{aligned} \tag{1.1}$$

а на торцах $x = 0, l$ краевые условия могут быть произвольные.

Для решения поставленной задачи будем исходить из уравнений геометрически нелинейной теории упругости. Предполагается, что связь между напряжениями и деформациями соответствует закону Гука, а углы поворота настолько велики, что ими нельзя пренебрегать ни при определении деформаций, ни при написании уравнений равновесия [9,10].

Преобразовав геометрически нелинейные уравнения теории упругости анизотропного тела, вводя безразмерную координатную систему $¶ = x/l$, $¸ = y/h$, а также безразмерные перемещения $U = u/l$, $V = v/l$, получим систему, содержащую малый параметр $£ = h/l$. Эту систему удобно решить асимптотическим методом [1-6].

Решение этой системы ищем в виде ряда [1-8]

$$Q = \pounds^{q} \sum_{s=0}^{S} \pounds^{s} Q^{(s)} \tag{1.2}$$

где Q – любое из напряжений или безразмерных перемещений. Целое число q подбирается так, чтобы получилась непротиворечивая система для определения $Q^{(s)}$:

$$q = 3 \quad \text{для } \pm_{x}, \pm_{y}, U, V, \quad q = 4 \quad \text{для } \pm_{\text{xy}} \tag{1.3}$$

Эта асимптотика по сути не отличается от той, что применялась для решения той же задачи в линейной теории упругости [6]. Однако здесь, чтобы получить итерационный процесс, асимптотический ряд (1.2) необходимо начинать с положительных степеней малого параметра. Асимптотике (1.3) соответствует выбор представления (1.1).

Подставляя (1.2) в систему преобразованных нелинейных уравнений, с использованием (1.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\pounds$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \pm_{x}^{(s)}}{\partial \P} + \frac{\partial \pm_{xy}^{(s)}}{\partial \text{¸}} + \pm_{1}^{*(s)} = 0, \quad \frac{\partial \pm_{xy}^{(s-2)}}{\partial \P} + \frac{\partial \pm_{y}^{(s)}}{\partial \text{¸}} + \pm_{2}^{*(s)} = 0 \\
\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \P} = a_{11} \pm_{x}^{(s)} + a_{12} \pm_{y}^{(s)} + a_{16} \pm_{xy}^{(s-1)} - U_{\P}^{(s-3)} \\
\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \text{¸}} = a_{12} \pm_{x}^{(s-1)} + a_{22} \pm_{y}^{(s-1)} + a_{26} \pm_{xy}^{(s-2)} - U_{\text{¸}}^{(s-2)} \\
\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \P} = a_{16} \pm_{x}^{(s-1)} + a_{26} \pm_{y}^{(s-1)} + a_{66} \pm_{xy}^{(s-2)} - U_{\P\text{¸}}^{(s-3)}
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$\pm_{1}^{*(s)} = \pm_{11}^{(s-1)} + \pm_{12}^{(s-3)}, \quad \pm_{2}^{*(s)} = \pm_{22}^{(s-2)} + \pm_{21}^{(s-4)}, \quad \pm_{12}^{(s)} \neq \pm_{21}^{(s)}$$

$$\pm_{11}^{(s)} = \sum_{i=0}^{s} \left(\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \text{¸}} \cdot \frac{\partial \pm_{y}^{(i)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial^2 U^{(s-i)}}{\partial \text{¸}^2} \cdot \pm_{y}^{(i)} \right) (1,2; U, V)$$

$$\begin{gathered}
\pm_{12}^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial \pm_{xy}^{(i)}}{\partial \text{¸}} + \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \text{¸}} \frac{\partial \pm_{xy}^{(i)}}{\partial \P} + 2 \frac{\partial^2 U^{(s-i)}}{\partial \P \partial \text{¸}} \pm_{xy}^{(i)} + \right. \\
\left. + \frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial \P} \frac{\partial \pm_{x}^{(i)}}{\partial \P} + \frac{\partial^2 U^{(s-i)}}{\partial \P^2} \pm_{x}^{(i)} \right) (1,2; U, V)
\end{gathered} \tag{1.5}$$

$$U_{¶}^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s}\left(\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial ¶}\cdot\frac{\partial U^{(i)}}{\partial ¶}+\frac{\partial V^{(s-i)}}{\partial ¶}\cdot\frac{\partial V^{(i)}}{\partial ¶}\right)\qquad (¶,¸)$$

$$U_{¶¸}^{(s)}=\sum_{i=0}^{s}\left(\frac{\partial U^{(s-i)}}{\partial ¶}\cdot\frac{\partial U^{(i)}}{\partial ¸}+\frac{\partial V^{(s-i)}}{\partial ¶}\cdot\frac{\partial V^{(i)}}{\partial ¸}\right)$$

Система уравнений (1.4) в нулевом приближении совпадает с системой уравнений той же задачи в линейной постановке [6].

Члены, которые обусловлены нелинейностью исходных уравнений, входят в величины $\pm_1^{*(s)}, \pm_2^{*(s)}$ и $U_{¶}^{(s)}, U_{¸}^{(s)}, U_{¶¸}^{(s)}$.

Интегрируя систему (1.4) по $¸$, получим

$$U^{(s)}=u_0^{(s)}+u^{*(s)},\quad V^{(s)}=v_0^{(s)}+v^{*(s)}$$

$$\pm_y^{(s)}=\pm_{y0}^{(s)}+\pm_y^{*(s)},\ \pm_x^{(s)}=\frac{1}{a_{11}}\frac{du_0^{(s)}}{d¶}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\pm_{y0}^{(s)}+\pm_x^{*(s)} \tag{1.6}$$

$$\pm_{xy}^{(s)}=\pm_{xy0}^{(s)}+\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\pm_{y0}^{(s)}}{d¶}-\frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u_0^{(2)}}{d¶^2}\right)¸+\pm_{xy}^{*(s)}$$

Величины со звездочками известны для каждого приближения s, выражаются через предыдущие приближения и определяются по формулам:

$$v^{*(s)}=\int_0^{¸}\left(a_{12}\pm_x^{(s-1)}+a_{22}\pm_y^{(s-1)}+a_{26}\pm_{xy}^{(s-2)}-V_{¸}^{(s-2)}\right)d¸$$

$$u^{*(s)}=\int_0^{¸}\left(a_{16}\pm_x^{(s-1)}+a_{26}\pm_y^{(s-1)}+a_{66}\pm_{xy}^{(s-2)}-\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial ¶}-U_{¶¸}^{(s-3)}\right)d¸$$

$$\pm_y^{*(s)}=-\int_0^{¸}\left(\frac{\partial\pm_{xy}^{(s-2)}}{\partial ¶}+\pm_2^{*(s)}\right)d¸,\ \pm_{xy}^{*(s)}=-\int_0^{¸}\left(\frac{\partial\pm_x^{*(s)}}{\partial ¶}+\pm_1^{*(s)}\right)d¸ \tag{1.7}$$

$$\pm_x^{*(s)}=\frac{1}{a_{11}}\frac{du^{*(s)}}{d¶}-\frac{a_{12}}{a_{11}}\pm_y^{*(s)}-\frac{a_{16}}{a_{11}}\pm_{xy}^{(s-1)}+\frac{1}{a_{11}}U_{¶}^{(s-3)}$$

Отметим, что для каждого приближения s $Q^{(s-i)}\equiv 0$, при $s<i$.

$\pm_{y0}^{(s)}(¶), \pm_{xy0}^{(s)}(¶), u_0^{(s)}(¶), v_0^{(s)}(¶)$ – неизвестные функции интегрирования и они подлежат определению. Удовлетворив граничным условиям (1.1), для них получим

$$
\begin{aligned}
&\pm_{y0}^{(s)} = \pm_y^{+(s)} - \pm_y^{*(s)}(\P,1)\\
&\pm_{xy0}^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\pm_y^{+(s)}}{d\P} - \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{+(s)}}{d\P^2} + \pm_{xy}^{-(s)} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\pm_y^{*(s)}(\P,1)}{d\P} +\\
&\qquad + \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{*(s)}(\P,1)}{d\P^2} - \pm_{xy}^{*(s)}(\P,-1)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$
u_0^{(s)} = u^{+(s)} - u^{*(s)}(\P,1),\quad v_0^{(s)} = v^{+(s)} - v^{*(s)}(\P,-1)
\tag{1.9}
$$

Здесь

$$
\pm_y^{+(0)} = \pm_y^{+},\ u^{+(0)} = u^{+},\ \pm_{xy}^{-(0)} = \pm_{xy}^{-},\ v^{-(0)} = v^{-}
$$

$$
\pm_y^{+(s)} = \pm_{xy}^{-(s)} = 0,\ u^{+(s)} = v^{-(s)} = 0,\quad s > 0
$$

Подставляя значения неизвестных функций из (1.8) в (1.6), решение представим в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\pm_x^{(s)} = \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{+(s)}}{d\P} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\pm_y^{+(s)} - \frac{1}{a_{11}}\frac{du^{*(s)}(\P,1)}{d\P} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\pm_y^{*(s)}(\P,1) + \pm_x^{*(s)}\\
&\pm_{xy}^{(s)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\pm_y^{+(s)}}{d\P}(1+\text{¸}) - \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{+(s)}}{d\P^2}(1+\text{¸}) + \pm_{xy}^{-(s)} - \pm_{xy}^{*(s)}(\P,-1) -\\
&\qquad - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\pm_y^{*(s)}(\P,1)}{d\P}(1+\text{¸}) + \frac{1}{a_{11}}\frac{d^2u^{*(s)}(\P,1)}{d\P^2}(1+\text{¸}) + \pm_{xy}^{*(s)}(\P,\text{¸})\\
&\pm_y^{(s)} = \pm_y^{+(s)} + \pm_y^{*(s)}(\P,\text{¸}) - \pm_y^{*(s)}(\P,1) \qquad\qquad (1.9)\\
&U^{(s)} = u^{+(s)} + u^{*(s)}(\P,\text{¸}) - u^{*(s)}(\P,1)\\
&V^{(s)} = v^{-(s)} + v^{*(s)}(\P,\text{¸}) - v^{*(s)}(\P,-1)
\end{aligned}
$$

Решение внутренней задачи (1.9) не содержит произвольных постоянных, следовательно, этим решением невозможно удовлетворить краевым условиям при $x = 0, l$. Чтобы удовлетворить этим условиям, необходимо построить также решение типа пограничного слоя. Представляя общий интеграл задачи в виде суммы решений внутренней задачи и пограничных слоев, соответствующих краям $x = 0, l$, можно удовлетворить краевым условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голденвейзер А.Л. Теория тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.

3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН РА, 2005. 468с.
4. Хачатрян Ш. М. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1976. Т.29. №6. С.19-32.
5. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. //Докл. АН Армении. 1991. Т.92. №2. С. 76-81.
6. Петросян Г.А. //Уч. записки АрГУ. N1(14). 2007. С. 36-42.
7. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. //Изв. Вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2001. Спецвыпуск. С. 16-18.
8. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б. //Проблемы динамки взоимодействия деформируемых сред. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. Ереван: 2005. 350с.
9. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.–М.: 1948.
10. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Л.: 1988.

Сведения об авторе:

Петросян Гаянэ Альбертовна

Аспирант кафедры математики АрГУ
Адрес: НКР, г. Степанакерт, ул. Мхитара Гоша 5
Тел.: (097)23-83-10

ГИСТЕРЕЗИС ПРИ АСИММЕТРИЧЕСКОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ СО СЛОЖНОЙ ПРЕДЫСТОРИЕЙ

Петросян Т.Л.

Ереван, Армения

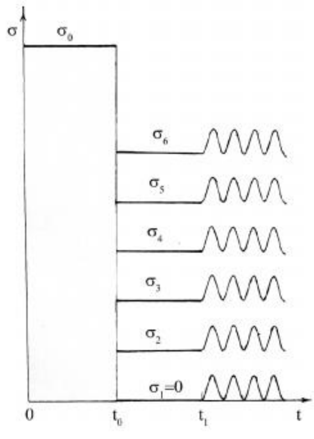
Описание деформации ползучести образцов, подвергнутых предварительному нагружению, согласно той или иной теории ползучести, естественно, необходимо для осуществления расчета коэффициента поглощения энергии при циклическом нагружении [2].

В настоящей работе исследуются диссипативные свойства материала при различных видах асимметрического периодического нагружения согласно следующей программе:

$$\pm(t) = \begin{cases} \pm_0 & 0 < t < t_0 \\ \pm_1(\text{ª} - 1) & t < t < t_1 \\ \pm_1[\text{ª} - \cos \mu (t - t_1)] & t_1 < t \end{cases} \qquad (1)$$

где $\pm_0$ – предварительное напряжение, $\pm_1$ – амплитуда изменения напряжения при циклическом нагружении, μ – циклическая частота, ª – некоторый параметр, $\pm_1(\text{ª} + 1) < \pm_0$.

Программа изменения напряжения (1) графически представлена на фиг.1.



Фиг.1 Программа изменений напряжения

Деформацию ползучести материала по нелинейной теории наследственности представим в виде [3]

$$\varepsilon(t) = B\sigma^m + \gamma \int_0^t \sigma^k(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \tag{2}$$

а также теории запаздывающей пластичности – в форме [4,5]

$$\varepsilon(t) = B\sigma^m + \beta_0 \gamma \int_0^t \sigma^k(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau + \\ + \beta_1 \gamma \int_0^{\bar{\tau}_1} \sigma^k(\tau + \bar{\tau}_2) e^{-\gamma(\bar{\tau}_1 - \tau)} d\tau \tag{3}$$

где $\beta_0 + \beta_1 = \beta$, $\bar{\tau}_1$ – сумма промежутков времени, в течение которых действующее напряжение $\sigma(t)$ не меньше максимально достигнутого за предшествующее время нахождения образца под нагрузкой, $\beta_0\sigma^n$ – обратимая деформация ползучести образца, нагруженного, соответственно, напряжению σ, $\bar{\tau}_2 = t - \bar{\tau}_1$, $\beta_1\sigma^n$ – необратимая деформация ползучести.

Для промежутка времени $t > t_1$, согласно, соотношению (2), будем иметь [3]:

$$\varepsilon(t) = B\sigma^m(\lambda - \cos\omega(t - t_1))^m + \beta\sigma_0^k\left(e^{-\gamma(t-\tau)} - e^{-\gamma t}\right) + \\ + \beta\sigma_1^k(\lambda - 1)^k\left(e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{-\gamma(t-t_0)}\right) + \\ + \beta\sigma_1^k \int_{t_1}^t (\lambda - \cos\omega(\tau - t_1))^k \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \tag{4}$$

Согласно же соотношению (3) для промежутка $t > t_1$, будем иметь [3]

$$\varepsilon(t) = B\sigma_1^m(\lambda - \cos\omega(t - t_1))^m + \beta_0\sigma_0^k\left(e^{-\gamma(t-t_0)} - e^{-\gamma t}\right) + \\ + \beta\sigma_1^k(\lambda - 1)^k\left(e^{-\gamma(t-t_1)} - e^{-\gamma(t-t_0)}\right) + \\ + \beta_0\sigma^k \int_{t_1}^t (\lambda - \cos\omega(\tau - t_1))^k \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau + \beta_1\sigma_0^k\left(1 - e^{-\gamma t_0}\right) \tag{5}$$

Для определения площади петли гистерезиса $\Delta w(n)$ используется формула (6)

$$\Delta w(n)=\int\limits_{t_1+T_n}^{t_1+²(n+1)} ±(t)\frac{\partial £(t)}{\partial t}dt \tag{6}$$

где T – период цикла, определяемый формулой

$$T=2® / µ \tag{7}$$

а n – номер цикла.

Формула (6), естественно, не предусматривает замкнутости кривой гистерезиса и фактически описывает площадь между кривыми нагружения, разгрузки и осью t.

Используя (1), (4), (6), и (7) для площади петли гистерезиса, согласно теории наследственности будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta w(n)= &\ ¥±_1^{\kappa+1}\int\limits_{t_1+T_n}^{t_1+T(n+1)}\left(ª-\cos µ\left(t-t_1\right)\right)^{k+1}dt- \\ &-\int\limits_{t_1+T_n}^{t_1+T(n+1)}±_1\left(ª-\cos µ\left(t-t_1\right)\right)\left\{ ±_1^k ¥^2\int\limits_{t_1}^{t}\left(ª-\cos µ\left(t-t_1\right)\right)^k e^{-¥(t-²)}d²\right\}dt+ \\ &+\ ±_1 e^{-¥(t_1+Tn)}\left(1-e^{-¥T}\right)\left[±_0^k\left(1-e^{-¥t_0}\right)+±_1^k\left(ª-1\right)^k\left(e^{¥t_0}-e^{¥t_1}\right)\right]\times \\ &\times\left(ª-\frac{¥^2}{¥^2+µ^2}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

При использовании (1), (5), (6), (7), получим следующее выражение для площади петли гистерезиса, согласно теории запаздывающей пластичности

$$\begin{aligned}\Delta w(n)= &\ {}_0¥±_1^{\kappa+1}\int\limits_{t_1+T_n}^{t_1+T(n+1)}\left(ª-\cos µ\left(t-t_1\right)\right)^{k+1}dt- \\ &-\int\limits_{t_1+T_n}^{t_1+T(n+1)}±_1\left(ª-\cos µ\left(t-t_1\right)\right)\left\{ {}_0±_1^k ¥^2\int\limits_{t_1}^{t}\left(ª-\cos µ\left(²-t_1\right)\right)^k e^{-¥(t-²)}d²\right\}dt+ \\ &+\ {}_0±_1 e^{-¥(t_1+Tn)}\left(1-e^{-¥T}\right)\left[±_0^k\left(1-e^{-¥t_0}\right)+±_1^k\left(ª-1\right)^k\left(e^{¥t_0}-e^{¥t_1}\right)\right]\times \\ &\times\left(ª-\frac{¥^2}{¥^2+µ^2}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Ниже рассмотрим определение коэффициента поглощения $·(n)$ в форме [3]

$$·(n)=\frac{\Delta W(n)}{W(n)} \tag{10}$$

где $W(n)$ – работа в процессе нагружения, определяемая так:

$$W(n)=\int\limits_{t_1+Tn}^{t_1+T\left(n+\frac{1}{2}\right)} \pm(t)\frac{\partial \pounds(t)}{\partial t}dt \qquad (11)$$

Для расчета $W(n)$, согласно теории наследственности, при использовании (1), (4) и (7) получим формулу

$$W(n)=B\pm_1^{m+1}m\frac{(\text{ª}+1)^{m+1}-(\text{ª}-1)^{m+1}}{m+1}+$$

$$+\int\limits_{t_1+Tn}^{t_1+T\left(n+\frac{1}{2}\right)} \yen\pm_1^{k+1}\left(\text{ª}-\cos\mu(t-t_1)\right)^{k+1}dt-$$

$$-\int\limits_{t_1+Tn}^{t_1+T\left(n+\frac{1}{2}\right)} \pm_1\left(\text{ª}-\cos\mu(t-t_1)\right)\left\{\pm_1^k\yen^2\int\limits_{t_1}^{t}\left(\text{ª}-\cos\mu(t-t_1)\right)^k e^{-\yen(t-\text{²})}d\text{²}\right\}dt+ \qquad (12)$$

$$+\pm_1 e^{-\yen(t_1+Tn)}\left[\pm_0^k\left(1-e^{\text{ª}t_0}\right)+\pm_1^k(\text{ª}-1)^k\left(e^{\yen t_0}-e^{\yen t_1}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\text{ª}\left(1-e^{-\yen\frac{T}{2}}\right)-\frac{\yen^2\left(1+e^{-\yen\frac{T}{2}}\right)}{\yen^2+\mu^2}\right]$$

Аналогично, для расчета $W(n)$, согласно теории запаздывающей пластичности, при использовании (1), (5) и (7) получим формулу

$$W(n)=B\pm_1^{m+1}m\frac{(\text{ª}+1)^{m+1}-(\text{ª}-1)^{m+1}}{m+1}-\int\limits_{t_1+Tn}^{t_1+T\left(n+\frac{1}{2}\right)} {}_0\yen\pm_1^{k+1}\left(\text{ª}-\cos\mu(t-t_1)\right)^{k+1}dt-$$

$$-\int\limits_{t_1+Tn}^{t_1+T\left(n+\frac{1}{2}\right)} \pm_1\left(\text{ª}-\cos\mu(t-t_1)\right)\left\{{}_0\pm_1^k\yen^2\int\limits_{t_1}^{t}\left(\text{ª}-\cos\mu(t-t_1)\right)^k e^{-\yen(t-\text{²})}d\text{²}\right\}dt+ \qquad (13)$$

$$+{}_0\pm_1 e^{-\yen(t_1+Tn)}\left[\pm_0^k\left(1-e^{\yen t_0}\right)+\pm_1^k(\text{ª}-1)^k\left(e^{\yen t_0}-e^{\yen t_1}\right)\right]$$

Формулы (8) и (12) или (9) и (13) могут быть использованы для практического расчета коэффициента поглощения по формуле (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Т.Л., Симонян А.М. Исследование гистерезиса при малоцикловой ползучести. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.114-121.

2. Петросян Т.Л., Симонян А.М. Исследование ползучести материалов при убывании напряжения. //Тр. международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. 25-28 сентября 2007. Цахкадзор. Армения. С. 326-330.
3. Петросян Т.Л. Исследование ползучести материалов при асимметрическом периодическом нагружении со сложной предысторией. //Вестник РАУ. Сер.физ-мат. и естест. наук. 2008. №1. С.10-15.
4. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 256 с.
5. Петросян Т. Л., Симонян А. М. Исследование ползучести материалов при многоступенчатом возрастании и убывании напряжения. //Информационные Технологии и Управление. 2007. №9. С. 9-18.

Сведения об авторе:

Петросян Тигран Людвикович

Научн. сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: Ереван, Джрвеж ул.10, дом 21
Тел.: (37410) 67 43 04 (дом.)
E-mail: TLPetrosyan@mail.ru

РАСЧЕТ ИЗНОСА ФРИКЦИОННЫХ НАКЛАДОК ПРИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ ТРЕНИИ

Погосян А.К., Меликсетян Н.Г.
Ереван, Армения

При оценке работоспособности и долговечности пары трения тормозных и других фрикционных устройств рекомендуется пользоваться критерием энергетической интенсивности изнашивания, который, согласно теории усталостного изнашивания, выражается соотношением [1]

$$I_w = hA_a / LF_f \tag{1}$$

где h – толщина изношенного слоя; A_a – номинальная площадь контакта; L – путь трения; F_f – сила трения.

На стадии проектирования тормозных устройств толщина изношенного слоя h является неизвестным параметром. Поэтому необходимо разработать методику его расчета, применительно к высокотемпературному (интенсивному) изнашиванию фрикционных накладок.

Как отмечено в работах [2,3], явление высокотемпературного изнашивания тормозных фрикционных накладок наиболее полно можно объяснить, основываясь на концепциях разрушения поверхностей трения посредством отслаивания, базирующихся на принципах многократности нагружения и аккумуляции повреждений в подповерхностном слое.

Согласно этой теории в работе [4] предложена зависимость для расчета толщины изношенного слоя, которая имеет вид:

$$h = GB \Big/ \left[4\pi (1 - \nu) \sigma_f \right] \tag{2}$$

Здесь G – модуль сдвига; B – вектор Бюргерса; ¬ – коэффициент Пуассона; $\pm_f$ – прочность.

Однако эта зависимость, полученная на основе анализа дислокационных процессов и напряженно-деформированного состояния поверхностных слоев, применяется для пар трения "металл–металл". Для пар трения тормозных устройств толщину изношенного слоя следует определять на основе анализа только напряженно-деформированного состояния поверхностных слоев, т.к. здесь процесс разрушения поверхности полимерных фрикционных материалов не сопровождается дислокационными процессами, а обусловлен напряженно-деформированным состоянием и механохимическими превращениями [2,3].

Основываясь на этих результатах, расчетную схему напряженного состояния рабочего слоя можно представить следующим образом (рис.1).

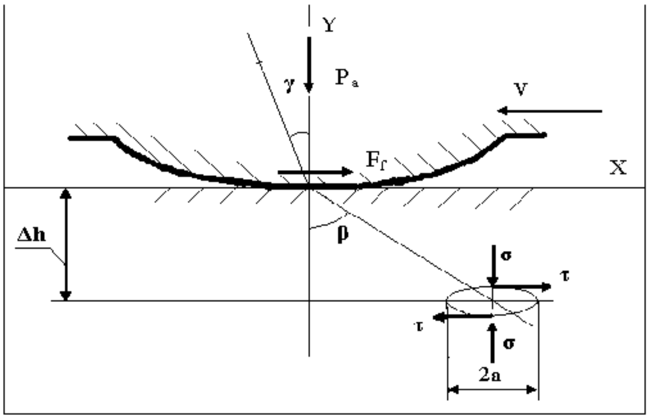


Рис. 1. Расчетная схема напряженного состояния рабочего слоя фрикционных материалов

Здесь под поверхностью трения фрикционных накладок на глубине Δh (толщина рабочего поверхностного слоя) под углом β по отношению к вектору нормального усилия рассматривается трещина длиной $2a$, у кромок которой действуют нормальные σ и касательные τ напряжения (принимаеется, что соседние выступы шероховатости контртела не влияют друг на друга при образовании напряженных зон под контактом). Исходя из концепции механизма разрушения поверхностей трения посредством отслаивания, эти напряжения определяют следующим образом [5,6]:

$$\sigma = -\frac{2P_a}{\pi \cdot \Delta h} \cdot \frac{\cos(\varphi - \beta)\cos^3\beta}{\cos\varphi}\,; \quad \tau = -\frac{2P_a}{\pi \cdot \Delta h} \cdot \frac{\cos(\varphi - \beta)\cdot\cos^3\beta\cdot\sin^2\beta}{\cos\varphi} \qquad (3)$$

где P_a – удельное давление; φ – угол трения; β – угол расположения подповерхностной трещины.

Задача определения толщины Δh сводится к следующему: определить законы распределения напряжений σ и τ под контактом на глубине Δh и выявить точки их максимальных значений; определить значения углов β_o, соответствующие максимальным значениям напряжений σ и τ; учитывая экспериментальные данные о минимальных и максимальных размерах продуктов интенсивного изнашивания вывести расчетную зависимость для оценки толщины Δh на стадии проектирования тормозных и других фрикционных устройств.

Выразив $\cos\varphi$ и $\cos\beta$, входящие в соотношение (3), через $\mathrm{tg}\varphi$ и $\mathrm{tg}\beta$ и, раскрыв скобки, преобразуем формулу (3) к виду:

$$\pm = -\frac{2P_a}{\text{®} \cdot \Delta h} \cdot \frac{1 + \mathrm{tg}\quad \cdot \mathrm{tg}\text{¥}}{(1 + \mathrm{tg}^2\quad)^2}\ ;\ \text{²} = -\frac{2P_a}{\text{®} \cdot \Delta h} \cdot \frac{1 + \mathrm{tg}\quad \cdot \mathrm{tg}\text{¥}}{(1 + \mathrm{tg}^2\quad)^2} \cdot \mathrm{tg} \qquad (4)$$

Здесь $\mathrm{tg}\quad = x / y$ характеризует относительное расстояние от контакта, а $\mathrm{tg}\text{¥}$ – коэффициент трения. Перепишем уравнение (4) следующим образом:

$$\frac{\text{®} \cdot \Delta h \cdot \pm}{2P_a} = -\frac{1 + \mathrm{tg}\quad \cdot \mathrm{tg}\text{¥}}{(1 + \mathrm{tg}^2\quad)^2}\ ;\ \frac{\text{®} \cdot \Delta h \cdot \text{²}}{2P_a} = -\frac{1 + \mathrm{tg}\quad \cdot \mathrm{tg}\text{¥}}{(1 + \mathrm{tg}^2\quad)^2} \cdot \mathrm{tg} \qquad (5)$$

Левая часть уравнения (5) определяет напряженность фрикционного контакта в зависимости от глубины, начиная с поверхности трения, а правая часть — геометрию расположения подповерхностной трещины.

Обозначим $t_1 = \text{®} \cdot \Delta h \cdot \pm / 2P_a$ и $t_2 = \text{®} \cdot \Delta h \cdot \text{²} / 2P_a$, которые при постоянных значениях Δh будут характеризовать зависимость комплексов $\pm / P_a$ и $\text{²} / P_a$ от геометрии расположения подповерхностной трещины. Исследуемые соотношения примут вид:

$$t_1 = -\frac{1 + \mathrm{tg}\quad \cdot \mathrm{tg}\text{¥}}{(1 + \mathrm{tg}^2\quad)^2}\ ; t_2 = -\frac{1 + \mathrm{tg}\quad \cdot \mathrm{tg}\text{¥}}{(1 + \mathrm{tg}^2\quad)^2} \cdot \mathrm{tg} \qquad (6)$$

При коэффициенте трения $\mathrm{tg}\text{¥}$, равном 0,2; 0,3 и 0,4 и $\mathrm{tg}\quad = -10 ... +10$ рассчитывались и исследовались функции t_1 и t_2. При этом выяснилось, что вне интервала -3...+3 функции t_1 и t_2 принимают значения, близкие к нулю, поэтому их следует анализировать только в интервале -3...+3.

Следует отметить, что экстремальное значение функция t_1 имеет при $\mathrm{tg}\quad = 0$, т.е. сжимающие напряжения σ наибольшие значения принимают в точках, находящихся на оси вектора P_a. Касательные напряжения ² принимают экстремальные значения приблизительно при $\mathrm{tg}\quad = |0.5|$, что соответствует $\quad = 26^0$. Растрескивание рабочего слоя при таком напряженном состоянии происходит при смыкании поверхностных трещин с подповерхностной трещиной в точках, где ² принимает максимальное значение. Это предположение согласуется с результатами, приведенными в работе [7], где, в частности, показано, что угол направления распространения вертикальной трещины (измеренный по отношению к вертикали) изменяется в пределах 0...20° и тенденция к пересечению вертикальной трещины с горизонтальной приводит к деламинационному разрушению материала поверхностного слоя.

Такая интерпретация напряженного состояния дает возможность определить расположение трещин в поверхностном слое фрикционных материалов и графически изобразить законы распределения напряжений ± и ² (функций t_1 и t_2, рис.2).

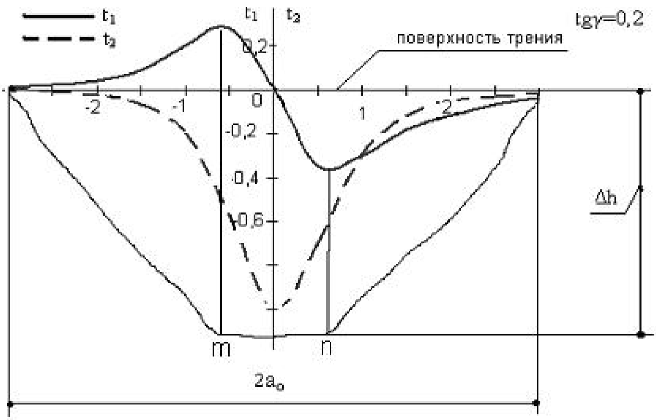


Рис.2. Законы распределения напряжений

Здесь на расстоянии Δh от поверхности трения показана подповерхностная трещина. В точках m и n, соответствующих экстремальным значениям напряжений ^{2} , происходит выход трещины на поверхность или ее смыкание с вертикальной поверхностной трещиной, в результате чего образуются лепестковые продукты износа фрикционных материалов. Исходя из этого, толщину Δh можно определить следующим образом:

$$\Delta h = mn / 2\operatorname{tg}\beta_o \tag{7}$$

Здесь $_0$ – угол расположения подповерхностной трещины, соответствующий максимальным значениям напряжений ^{2} .

В первом приближении можно принять $mn = a_0 / 3$, где a_0 — половина длины подповерхностной трещины в зоне контакта и, следовательно, лепестковых продуктов износа. Расчетная зависимость толщины изношенного слоя в этом случае примет вид:

$$\Delta h = a_o / 6\operatorname{tg}\beta_o \tag{8}$$

Величина Δh представляет собой толщину одного изношенного рабочего слоя на пути трения L_0, необходимого для удаления с поверхности трения фрикционной накладки одного слоя частиц износа. Подставив в формулу (1) вместо h толщину одного изношенного рабочего слоя Δh и предположив, что на общем пути трения L (ресурс работы пары трения тормозного или другого фрикционного устройства) K_0 слоев могут подвергнуться изнашиванию, для оценки долговечности фрикционных накладок на стадии проектирования тормозных устройств в окончательном виде получим:

$$I_w = \frac{K_o \cdot a_o \cdot A_a}{6LF_f \,\mathrm{tg}\; {}_o} = \frac{H \cdot a_o \cdot A_a}{6\mathrm{tg}\; {}_o \cdot \Delta h_{\text{ср}} \cdot L \cdot F_f} \qquad (9)$$

Величина K_0 для каждой фрикционной композиции зависит от конкретных значений эксплуатационных параметров пары трения и размеров накладки, предварительно ее можно определить по формуле

$$K_0 = H / \Delta h_{\text{ср}} \qquad (10)$$

где H – толщина фрикционной накладки; $\Delta h_{\text{ср}}$ – средняя величина изношенного рабочего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М., 1977.
2. Погосян А.К., Мелексетян Н.Г., Ламбарян Н.А. Высокотемпературное изнашивание фрикционных асбополимерных материалов // Трение и износ. 1983. Т.4. N6. С. 1090-1098.
3. Фрикционные композиты на основе полимеров/Погосян А.К.,Сысоев П.В., Мелексетян Н.Г и др.- Мн. Информтрибо, 1992.-218 с.
4. Suh N.P**.** The Delamination Theory of Wear // Wear. 1973. Vol. 25. 111-124.
5. Rosenfield A.R. A Fracture Mechanics Approach to Wear // Wear. 1980. Vol. 61. 125-132.
6. Hills D.A., Ashelby D.W. The Initiation of Wear Cracks // Wear. 1981. Vol. 70, N 3. 365-371.
7. Keer L.M., Bryant M.D., Haritos G.K. Subsurface Cracking and Delamination // Transactions of the ASME. AMD. 1980. Vol. 39. 79-95.

Сведения об авторах:

Погосян Альберт Князевич
чл-корр. НАН РА, д.т.н., проф., зав. аспир. отд. ГИУА
Государственного инженерного университета Армении
Адрес: Ереван, ул.Теряна 105
Тел.: (+37410)58-98-84
E-mail: pogosian@seua.am

Меликсетян Норик Галустович
К.т.н., доцент, Ванадзорский филиал
Государственного инженерного университета Армении
Адрес: г. Ванадзор ул. Шинарарнери 12
Тел.: 5-67-04
E-mail: n_meliksetyan@mail.ru

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Саакян А.В.

Ереван, Армения

В настоящей работе сингулярный интеграл с ядром Коши на отрезке от производной функции, представимой в виде произведения непрерывной ограниченной функции и весовой функции Якоби, аппроксимируется конечной суммой, в которую входят значения регулярной части функции в корнях соответствующих ортогональных многочленов, в общем случае – многочленов Якоби. Полученная квадратурная формула позволяет метод дискретных особенностей непосредственно использовать для решения сингулярных интегро-дифференциальных и гиперсингулярных уравнений.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$J(z)=\int_{-1}^{1}\frac{\Phi'(x)}{x-z}dx \qquad (z\in C,\ z\neq\pm 1) \tag{1}$$

где

$$\Phi(x)=\varphi(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad \left(\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)\geq 0\right) \tag{2}$$

$\varphi(x)$ – непрерывная ограниченная функция на замкнутом отрезке [-1,1].

Заменяя функцию $\varphi(x)$ интерполяционным многочленом

$$\varphi_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}$$

для производной функции $\Phi(x)$ будем иметь:

при $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$

$$\Phi'(x)=-\frac{2(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}}{n+\alpha+\beta+1}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)}{(x-\xi_j)}+(1-x^2)\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)^2}\right] \tag{3}$$

при $\alpha=0$

$$\Phi'(x)=\frac{2(1+x)^{\beta-1}}{n+\beta+1}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(1,\beta+1)}(\xi_j)}\left[\frac{(n+\beta)P_n^{(1,\beta-1)}(x)}{(x-\xi_j)}-(1+x)\frac{P_n^{(0,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)^2}\right] \tag{4}$$

при $\beta=0$

$$\Phi'(x)=-\frac{2(1-x)^{\alpha-1}}{n+\alpha+1}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,1)}(\xi_j)}\left[\frac{(n+\alpha)P_n^{(\alpha-1,1)}(x)}{(x-\xi_j)}+(1-x)\frac{P_n^{(\alpha,0)}(x)}{(x-\xi_j)^2}\right] \tag{5}$$

При выводе формул (3)-(5) использовано тождество

$$A_n^{(\alpha,\beta)}\left[B_n^{(\alpha,\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)-(\alpha-\beta)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-C_n^{(\alpha,\beta)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right]=$$
$$=-2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x) \tag{6}$$

где

$$A_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$$
$$B_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$$
$$C_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)}$$

Далее, подставляя выражения (3)-(5) в (1) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим:
при $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$

$$J(z)=-\frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_j)}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_j}Q_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)-Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2}\right] \tag{7}$$

при $\alpha = 0$

$$J(z) = \frac{2}{n+\beta+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(1,\beta+1)}(\xi_j)} \left\{ \frac{-2^{\beta}}{(1-\xi_j)(z-1)} - \right.$$
$$\left. -(n+\beta) \frac{Q_n^{(1,\beta-1)}(z)}{(z-\xi_j)(z-1)} - \frac{Q_n^{(0,\beta)}(z) - Q_n^{(0,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2} \right\} \tag{8}$$

при $\beta = 0$

$$J(z) = \frac{2}{n+\alpha+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,1)}(\xi_j)} \left\{ \frac{-2^{\alpha}}{(1+\xi_j)(z+1)} - \right.$$
$$\left. -(n+\alpha) \frac{Q_n^{(\alpha-1,1)}(z)}{(z-\xi_j)(z+1)} - \frac{Q_n^{(\alpha,0)}(z) - Q_n^{(\alpha,0)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2} \right\} \tag{9}$$

где $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ – функция Якоби второго рода, одним из многих ее представлений является следующее [1]:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) \times$$
$$\times F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-z}\right) \qquad z \notin [-1,1] \tag{10}$$

Здесь $B(a,b)$ – бета-функция, $F(a,b;c;x)$ – гипергеометрический ряд.

Отметим, что функция $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ принимает различные значения в зависимости от того, стремится ли точка z к точке ξ интервала $(-1,1)$ из верхней полуплоскости $(\xi + i0)$ или из нижней полуплоскости $(\xi - i0)$. В точках интервала $(-1,1)$ функция $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ определяется как полусумма этих значений:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{1}{2}\left[Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi+i0) + Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi-i0)\right] \qquad (-1<\xi<1)$$

При вычислении $J(z)$ в узловой точке $z = \xi_m$ $(m = \overline{1,n})$ следует в соответствующем слагаемом использовать предельные значения:

при $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$

$$\lim_{z\to\xi_m}\left[\frac{2(n+1)}{z-\xi_m}Q_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z)+\frac{Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)-Q_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{d^2Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{dz^2}\bigg|_{z=\xi_m}$$

при $\alpha=0$

$$\lim_{z\to\xi_m}\left[\frac{(n+\beta)Q_n^{(1,\beta-1)}(z)}{(z-\xi_m)(z-1)}+\frac{Q_n^{(0,\beta)}(z)-Q_n^{(0,\beta)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{d^2Q_n^{(0,\beta)}(z)}{dz^2}\bigg|_{z=\xi_m}$$

при $\beta=0$

$$\lim_{z\to\xi_m}\left[\frac{(n+\alpha)Q_n^{(\alpha-1,1)}(z)}{(z-\xi_m)(z+1)}+\frac{Q_n^{(\alpha,0)}(z)-Q_n^{(\alpha,0)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2}\right]=-\frac{1}{2}\frac{d^2Q_n^{(\alpha,0)}(z)}{dz^2}\bigg|_{z=\xi_m}$$

Квадратурные формулы (7)-(9) можно с успехом использовать для решения гиперсингулярных интегральных уравнений, содержащих слагаемое типа

$$J_0(z)=\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx\ . \tag{11}$$

Такого рода уравнения встречаются в аэродинамике [3,4] при исследовании дисперсии упругих волн [5], в задачах изгиба пластин с тонкими жесткими включениями [6] и др.

Интеграл $J_0(z)$ понимается в смысле конечного значения по Адамару [2]

$$J_0(z)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{-1}^{z-\varepsilon}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx+\int_{z+\varepsilon}^{1}\frac{\Phi(x)}{(x-z)^2}dx-\frac{2\Phi(z)}{\varepsilon}\right] \tag{12}$$

Из (12) нетрудно получить, что

$$J_0(z)=-\frac{\Phi(1)}{1-z}-\frac{\Phi(-1)}{1+z}+\int_{-1}^{1}\frac{\Phi'(x)}{x-z}dx\ , \tag{13}$$

то есть интеграл $J_0(z)$ можно понимать как результат формального интегрирования по частям.

Очевидно, что при условии (2), за исключением случая $\alpha=\beta=0$ и $\varphi(\pm1)\neq0$, функции $J(z)$ и $J_0(z)$ равны и для них обеих применимы квадратурные формулы (7)-(9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, СМБ. Т.2. М.: Наука, 1966. 296 с.

2. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995.
4. Смирнов В.Ю. Строгое определение несобственных интегралов по Адамару, встречающихся в математических моделях аэродинамики, для целых степеней особенности. // Тр. МАИ, Электронный журнал. 31 января 2007. № 26.
5. J.-F. Lu and A.Hanyga Scattering of SH Wave by a crack terminating at the interface of a bimaterial. Computational Mechanics, Springer-Verlag, 34 (2004), 74-85.
6. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями. //ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.293-302.

Сведения об авторе:

Саакян Аветик Вараздатович

К.ф.-м.н. зам.директора по научной части
Институт механики НАН РА
E-mail: avsah@mechins.sci.am

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН, ЗАКРЕПЛЁННЫХ ПО ДВУМ СМЕЖНЫМ СТОРОНАМ И СВОБОДНЫХ ПО ДВУМ ДРУГИМ

Саноян Ю.Г.
Ереван, Армения

Исследования изгиба прямоугольных пластин под действием поперечных нагрузок проведены, в основном, для пластин с симметричными граничными условиями и для очень ограниченного числа сочетаний условий закрепления границ [1]. Основные трудности состоят как в получении решения задачи, так и в исследовании поведения характеристик пластин в угловых точках. В задаче расчёта изгиба пластины с закреплёнными двумя смежными сторонами и двумя другими свободными фактически сконцентрированы трудности, которые встречаются при расчёте такого типа задач. В [2] рассмотрен вопрос изгиба пластин с закрепленными двумя смежными сторонами под воздействием изгибающих моментов и перерезывающих сил на двух других. Из последних работ отметим также [3,4,5]. Рассмотрим изгиб прямоугольной пластины поперечной, равномерной нагрузкой (рис. 1), две смежные стороны которой закреплены, а две другие свободны.

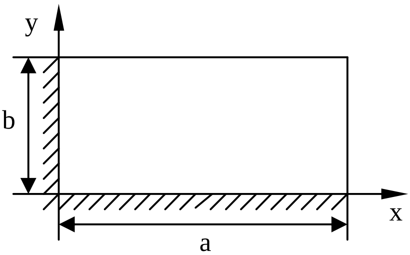


Рис.1

Задача решена по теории Кирхгофа [1], согласно которой прогиб прямоугольной пластины описывается бигармоническим уравнением

$$D\left(\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}\right)=q(x,y) \qquad (1)$$

где D – изгибная жёсткость пластины, $q(x,y)$ – нагрузка, приложенная по нормали к её поверхности (рис 1). Основная задача бигармонического уравнения состоит в нахождении в замкнутой области $S+C$ непрерывной вместе с первыми производными функции *w(x,y)*, которая имеет производные до 4-го порядка в открытой области S, удовлетворяет уравнению (1) в S и двум граничным условиям на каждой из сторон прямоугольника C. Для рассматриваемой задачи функции прогиба и её нормальные производные на закреплённых сторонах равны нулю:

$$w(0,y) = w(x,0) = 0 \tag{2}$$

$$\partial w(x,y)/\partial x\Big|_{x=0} = \partial w(x,y)/\partial y\Big|_{y=0} = 0 \tag{3}$$

На свободных сторонах равны нулю изгибающие моменты и обобщённые перерезывающие силы:

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=a} = 0, M_y = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{y=b} = 0 \tag{4}$$

$$\tilde{Q}_x = D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\Bigg|_{x=a} = 0, \tilde{Q}_y = D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)\Bigg|_{y=b} = 0 \tag{5}$$

где ν – коэффициент Пуассона. Учитывая, что в свободном углу появляется не скомпенсированный реакцией опоры сосредоточенный крутящий момент, к этим условиям необходимо также добавить ещё одно:

$$M_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2}\Bigg|_{x=a,y=b} = 0 \tag{6}$$

Задача решена методом суперпозиции, основанным на разложении решения уравнения (1) по полным системам тригонометрических функций

$$w(x,y) = \frac{qa^4}{D}\left(\tilde{w}(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\cos(\alpha_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)\cos(\beta_n x)\right) \tag{7}$$

Первое слагаемое в этом выражении является частным интегралом уравнения (1)

$$\tilde{w}(x,y) = \frac{x^2 y^2}{8a^4} + F\frac{xy}{a^2} \tag{8}$$

а второе и третье слагаемые – решениями однородного бигармонического уравнения, в которых

$$\begin{gathered} f_n(x) = A_n^1 \frac{(x-a)\mathrm{sh}(x\alpha_n) - x\mathrm{sh}((x-a)\alpha_n)}{a^4\alpha_n^3\mathrm{ch}(a\alpha_n)} + \\ + A_n^2 \frac{x\mathrm{sh}(x\alpha_n)}{a^4\alpha_n^3\mathrm{ch}(a\alpha_n)} + A_n^3\alpha_n \frac{x(\mathrm{ch}((x-a)\alpha_n) - \mathrm{ch}(x\alpha_n))}{a^4\alpha_n^3\mathrm{ch}(a\alpha_n)} \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \varphi_n(x) = A_n^4 \frac{(y-b)\mathrm{sh}(y\beta_n) - y\mathrm{sh}((y-b)\beta_n)}{a^4\beta_n^3\mathrm{ch}(a\beta_n)} + \\ + A_n^5 \frac{y\mathrm{sh}(y\beta_n)}{a^4\beta_n^3\mathrm{ch}(b\beta_n)} + A_n^6\alpha_n \frac{y(\mathrm{ch}((y-b)\beta_n) - \mathrm{ch}(y\beta_n))}{a^4\beta_n^3\mathrm{ch}(b\beta_n)} \end{gathered} \tag{10}$$

где $\alpha_n = \pi(2n-1)/2b,\ \beta_n = \pi(2n-1)/2a$. Частное решение $\widetilde{w}(x,y)$ и ряды в (7) удовлетворяют граничным условиям (2). Неизвестная постоянная F легко определяется из граничного условия для свободного угла (6): $F = -b/2$. После подстановки её в (7), а самого выражения изогнутой поверхности (7) в граничные условия (3-5), получим шесть последовательностей бесконечных систем уравнений с 6-ью последовательностями неизвестных коэффициентов $A_n^{(1)} - A_n^{(6)}$. Обычно используемый для решения бесконечных систем метод редукции, который состоит в ограничении тригонометрического ряда числом членов *N*, приводит задачу к решению алгебраической системы уравнений, которая в матричном виде имеет вид

$$DX = C \tag{11}$$

где D – клеточная матрица коэффициентов, равная

$$D = \begin{vmatrix} D_{11} ... D_{16} \\ ... \quad\quad ... \\ D_{61...} D_{61} \end{vmatrix} \tag{12}$$

X – клеточная матрица-столбец последовательностей неизвестных $\{A_1 ... A_6\}$, C – клеточная матрица-столбец последовательностей правых частей алгебраических уравнений $\{C_1 ... C_6\}$. Матрицы клетки D_{ij} размером $N \times N$ состоят из коэффициентов редуцированной бесконечной системы уравнений. Следовательно, размер матрицы D равен $6N \times 6N$. При решении задачи изгиба пластин возникают две проблемы. Первая проблема состоит в сходимости тригонометрических рядов в решении бигармонической задачи. Для симметричных задач с 2-мя, 3-мя последовательностями неизвестных эта задача, зачастую, решается аналитически. В задачах со смешанными граничными условиями и в несимметричных задачах с количеством неизвестных последовательностей более 3-4 тригонометрических рядов изгибающих моментов сходятся плохо, а ряды перерезывающих сил, зачастую, расходятся в угловых точках. Графики перерезывающих сил, построенные с помощью систем компьютерной математики, имеют переменную составляющую, которая с увеличением числа слагаемых ряда по амплитуде не уменьшается, а только уплотняется по частоте.

Вторая проблема состоит в том, что для отмеченных задач система алгебраических уравнений, зачастую, неустойчива. Если в (9) и (10) коэффициенты при неизвестных выразить через функции $\mathrm{sh}(x\alpha_n)(\mathrm{sh}(y\beta_n))$, $x\mathrm{sh}(x\alpha_n)(y\mathrm{sh}(\beta_n))$ и $x\mathrm{ch}(x\alpha_n)(y\mathrm{ch}(y\beta_n))$, то клеточная матрица (12) получается почти вырожденной уже при размерах 9×9 и её ранг перестаёт соответствовать количеству последовательностей неизвестных системы уравнений. Формулы (9,10) обеспечивают устойчивость решения системы уравнений с клеточными матрицами размером 200×200 и выше, что позволяет исследовать поведение перерезающих сил и моментов в угловых точках пластин. Для расчёта прогиба пластин и его первых производных с точностью до третьего знака достаточно N взять равным 10 и 20, соответственно, а для моментов и перерезывающих сил от 30 до 40 и то только для средних частей сторон.

На рис.2 представлены интенсивности крутящих моментов, изгибающих моментов, перерезывающих сил и обобщённых перерезывающих сил на сторонах равностороннего прямоугольника $x = 0, x = 1$ при $\neg = 1/6$, рассчитанные для числа слагаемых тригонометрического ряда N *=100*. Графики (d, h и b), показывают, что решение (7) удовлетворяет краевым условиям (4,5) и условию (6) на свободном угле. В угловых точках со смешанными граничными условиями (0,1) и (1,0) (см. рис.1а,1с) тригонометрические ряды в формулах для моментов сходятся плохо. Исследования их при больших значениях N (200 и выше) показали, что с увеличением N изгибающий момент M_x стремится к нулю.

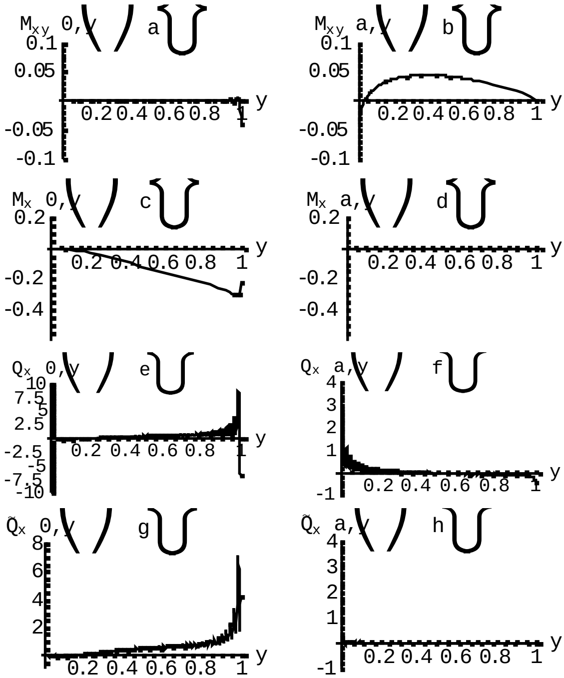


Рис.2.Графики крутящих моментов M_{xy}, изгибающих моментов M_x и перерезывающих сил $Q_x, \tilde{Q}_x$.

Наличие синусоиды на графиках перерезывающих сил (e, f, g),которая при увеличении числа слагаемых тригонометрического ряда только уплотняется, свидетельствует о расходимости описывающих их функций в угловых точках (0,1) и (1,0). Значения перерезывающих сил в этих точках с увеличением N линейно возрастают.

В табл. 1 приведены значения прогибов пластины для точек диагонали квадрата с шагом 0,25 вдоль осей X и Y, а в табл. 2 – значения моментов и перерезывающих сил вдоль стороны прямоугольника $x=0$ с шагом 0,25. Данные величин $\underline{w}$, $\underline{M}_x$, $\underline{Q}_x$ приведены из работы [6]. В некоторых точках значения соответствующих величин расходятся. Квадратная пластинка для численных расчётов в [6] разбита на 5×5 частей, что, возможно, недостаточно для получения правильных результатов в некоторых областях.

Таблица 1

(x,y)	(0.0)	(0.25,0.25)	(0.50,0.50)	(0.75,0.75)	(1.00,1.00)
w	0	0.00099	0.00826	0.02249	0.03983
$\underline{w}$	0	0.00118	0.00847	0.02235	0.03906

Таблица 2

(x,y)	(0.0)	(0,0.25)	(0,0.25)	(0,0.25)	(0,0.25)
M_x	0	-0.04287	-0.12610	-0.20778	-0.21624
$\underline{M}_x$	0	-0.04703	0.12811	-0.02079	-0.28399
Q_x	-0.0804	0.1377	0.4830	0.7249	6.5104
$\underline{Q}_x$	-	0.2074	0.4892	0.7191	0.9918

Для более полного и всестороннего исследования изгиба пластин, в особенности поведения моментов и перерезывающих сил в угловых точках, следует рассмотреть этот вопрос и с точки зрения уточнённой теории [7,8,9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
2. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Об одной задаче изгиба прямоугольных пластин. Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван. 2007.
3. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность. //Мат. методита физ.-мех. поля. 2004. Т. 47. №3. С. 4-63.

4. Белубекян М.В., Саноян Ю.Г. Расчёт изгиба пластин-консоли.// Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. № 3. С. 11-17.
5. Hutchinson J.R. On the Bending of Rectangular Plates With Two Opposite Edges Simply Supported. ASME J. Appl. Mech. 1992, v.59, pp. 679.
6. Варвак П.М., Губерман И.О., Мирошниченко М.М., Предтеченский Н.Д. Таблицы для расчёта прямоугольных плит. Киев: Изд. АН УССР, 1959.
7. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги.//В кн.:“Проблемы механики тонких деформируемых тел”, Ереван: 2002, с. 67-88.
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987.
9. Васильев В.В. О теории тонких пластин. //Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 26-47.

Сведения об авторе:

Саноян Ю.Г.

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Института механики НАН РА, г.Ереван
Тел.: 541319
E-mail: yusanoyan@mechins.sci.am

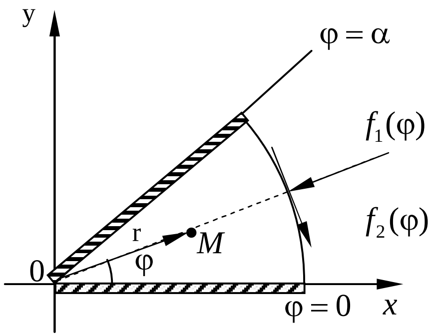
ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ КРУГОВОГО СЕКТОРА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ

Саргсян А.М.
Ереван, Армения

Рассматривается плоская задача теории упругости кругового сектора с единичным радиусом и углом раствора α, когда на границе $r=1$ заданы внешние нагрузки, а на радиальных сторонах осуществляются условия соприкасания с жестким штампом без трения.

Решение задачи строится с помощью метода Фурье. Исследуется особенность напряжений и коэффициентов при особенностях в окрестности вершины сектора в зависимости от угла α и направления подхода к вершине.

Пусть упругий сектор $\left\{ 0\le r \le 1,\ 0\le \varphi \le \alpha,\ 0\le \alpha \le 2\pi \right\}$ отнесен к полярной системе координат, начало которой помещено в угловой точке сектора (фиг.1) .



Фиг.1

Решение плоской задачи теории упругости кругового сектора приводится к интегрированию бигармонического уравнения для функции напряжений Эри

$$\Delta\,\Delta\,\Phi\left(r,\varphi\right)=0 \tag{1}$$

со следующими граничными условиями:

$$u_\varphi\left(r,0\right)=\tau_{r\varphi}\left(r,0\right)=0,\ u_\varphi\left(r,\alpha\right)=\tau_{r\varphi}\left(r,\alpha\right)=0 \tag{2}$$

$$\sigma_r\left(1,\varphi\right)=f_1\left(\varphi\right),\ \ \tau_{r\varphi}\left(1,\varphi\right)=f_2\left(\varphi\right) \tag{3}$$

где $f_1\left(\varphi\right)$ и $f_2\left(\varphi\right)$ – заданные функции.

Выражения компонентов напряжений через функцию Эри имеют вид

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2},\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},\ \tau_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tag{4}$$

Методом разделения переменных решение бигармонического уравнения (1) представляется в виде

$$\Phi = r^{\lambda+1}\left[A\sin\left(\lambda+1\right)\theta + B\cos\left(\lambda+1\right)\theta + C\sin\left(\lambda-1\right)\theta + D\cos\left(\lambda-1\right)\theta\right]$$

где A, B, C, D – постоянные интегрирования, λ – произвольный параметр.

Используя уравнения состояний, уравнения Коши, а также (4) и удовлетворяя граничным условиям (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно A, B, C, D [8]. Условие существования нетривиального решения этой системы дает $A = C = 0$ и

$$\sin\left(\lambda+1\right)\alpha\cdot\sin\left(\lambda-1\right)\alpha = 0 \tag{5}$$

Корни уравнения (5) действительные и простые [8]

$$\lambda_k = \alpha_0 k + 1,\ \lambda_n^* = \alpha_0 n - 1,\ \alpha_0 = \pi/\alpha,\quad \left(k, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right) \tag{6}$$

$$\lambda_k > 0,\quad \lambda_n^* > 0 \tag{7}$$

Условие (7) ограничивает пределы изменения k и n, а именно:

I. для $0 < \alpha < 2\pi$, $\left(k = 0, 1, 2, \ldots\right)$, $\left(n = 2, 3, 4, \ldots\right)$

II. для $0 < \alpha < \pi$, $\left(k = 0, 1, 2, \ldots\right)$, $\left(n = 1, 2, 3, \ldots\right)$

III. для $\pi < \alpha < 2\pi$, $\left(k = -1, 0, 1, \ldots\right)$, $\left(n = 2, 3, 4, \ldots\right)$

Первый случай рассмотрен в [5], где было показано, что $f_1\left(\theta\right)$ и $f_2\left(\theta\right)$, помимо требованиям статики, должны удовлетворять еще и ограничению

$$\alpha_0\tilde{f}_{11} = \left(2 - \alpha_0\right)\tilde{f}_{21} \tag{8}$$

$$\tilde{f}_{1m} = \int_0^{\alpha} f_1\left(\theta\right)\cos a_0 m\theta\, d\theta,\ \ \tilde{f}_{2m} = \int_0^{\alpha} f_2\left(\theta\right)\sin a_0 m\theta\, d\theta$$

В данной работе исследуется случай II. Учитывая, что функции

$$\Phi_{kn}\left(r, \theta\right) = D_k r^{\lambda_k+1}\cos\left(\lambda_k - 1\right)\theta + B_k r^{\lambda_n^*+1}\cos\left(\lambda_n^* + 1\right)\theta$$

$$\left(k = 0, 1, 2, \ldots\right),\quad \left(n = 1, 2, 3, \ldots\right)$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2), функция напряжений Эри ищется в виде следующего ряда:

$$\Phi\left(r, \theta\right) = D_0 r^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k r^{\lambda_k+1} + B_k r^{\lambda_k^*+1}\right]\cos\alpha_0 k\theta \tag{9}$$

Тогда из (4) следует

$$\begin{Bmatrix} \pm_r \\ ^{2}{}_{r^{\cdot\cdot}} \\ \pm_{\cdot\cdot} \end{Bmatrix} = D_0 \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \tag{10}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k \text{ª}_k \begin{Bmatrix} \left(3-\text{ª}_k\right) \\ \left(\text{ª}_k-1\right) \\ \left(\text{ª}_k+1\right) \end{Bmatrix} r^{a_0 k} + B_k \text{ª}_k^{*}\left(\text{ª}_k^{*}+1\right) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} r^{a_0 k-2} \right] \begin{Bmatrix} \cos\sim_0 k^{\cdot\cdot} \\ \sin\sim_0 k^{\cdot\cdot} \\ \cos\sim_0 k^{\cdot\cdot} \end{Bmatrix}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3), для D_k и B_k получим

$$2D_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k \text{ª}_k \left(3-\text{ª}_k\right) - B_k \text{ª}_k^{*}\left(\text{ª}_k^{*}+1\right)\right] \cos\sim_0 k^{\cdot\cdot} = f_1\left(^{\cdot\cdot}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k \text{ª}_k \left(\text{ª}_k+1\right) + B_k \text{ª}_k^{*}\left(\text{ª}_k^{*}+1\right)\right] \sin\sim_0 k^{\cdot\cdot} = f_2\left(^{\cdot\cdot}\right) \tag{11}$$

Умножая первое уравнение (13) на $\cos\sim_0 m^{\cdot\cdot}$ $\left(m=0,1,2,...\right)$, а второе – на $\sin\sim_0 m^{\cdot\cdot}$ $\left(m=1,2,3,...\right)$ и интегрируя по $^{\cdot\cdot}$ от 0 до $\sim$, будем иметь

$$D_0 = \frac{1}{2\sim}\int_0^{\sim} f_1\left(^{\cdot\cdot}\right) d^{\cdot\cdot}, \quad D_m \text{ª}_m \sim = \tilde{f}_{1m} + \tilde{f}_{2m},$$

$$B_m \text{ª}_m^{*}\left(\text{ª}_m^{*}+1\right)\sim = \left(\tilde{f}_{1m} + \tilde{f}_{2m}\right)\left(3-\text{ª}_m\right) - 2\tilde{f}_{1m} \tag{12}$$

Окончательно, формулы для напряжений примут вид

$$\begin{Bmatrix} \pm_r \\ ^{2}{}_{r^{\cdot\cdot}} \\ \pm_{\cdot\cdot} \end{Bmatrix} = D_0 \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{\sim}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k}\right) \begin{Bmatrix} \left(2-\sim_0 k\right) \\ \sim_0 k \\ \left(2+\sim_0 k\right) \end{Bmatrix} r^{\sim_0 k} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\tilde{f}_{1k} + \tilde{f}_{2k}\right)\left(2-\sim_0 k\right) - 2\tilde{f}_{1k}\right] \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} r^{\sim_0 k-2} \right] \begin{Bmatrix} \cos\sim_0 k^{\cdot\cdot} \\ \sin\sim_0 k^{\cdot\cdot} \\ \cos\sim_0 k^{\cdot\cdot} \end{Bmatrix} \tag{13}$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи представлено в виде сходящихся рядов (13), коэффициенты которых определяются в явном виде.

Как следует из (13), в условиях общего нагружения границы $r=1$, особенности напряжений возникают при $k=1$, когда

$$®/2 < \sim \le ® \tag{14}$$

Причем, порядок особенности $\left(\sim_0 - 2\right)$ меняется в пределах

$$-1 \le \sim_0 - 2 < 0 \tag{15}$$

Важно отметить, что коэффициенты при особенности r^{α_0-2} в общем случае отличны от нуля кроме трех частных случаев:

1. При подходе к вершине сектора по направлению $\theta = \alpha/2$ обращаются в нуль коэффициенты в нормальных напряжениях, а по направлениям $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ – при касательном напряжении.

2. Внешние нагрузки удовлетворяют условию (8). Тогда, при $k = 1$

$$\left(\tilde{f}_{11} + \tilde{f}_{21}\right)\left(2-\alpha_0\right) - 2\tilde{f}_{11} = -\alpha_0 \tilde{f}_{11} + \left(2-\alpha_0\right)\tilde{f}_{21} = 0$$

и члены со степенными особенностями в (13) исчезают. А это означает, что окрестность вершины сектора с углом раствора $\alpha < \beta$, нагруженный вышеуказанным способом, находится в малонапряженном состоянии [7]. Этот результат был получен ранее в работе [8], а еще раньше в работе [9], где на границе $r = 1$ сектора были заданы нормальные нагрузки в виде двух сосредоточенных сил, симметричные относительно линии $\theta = \alpha/2$ и нулевые касательные напряжения (также удовлетворяющие условию (8)).

3. $\alpha = \beta$. В этом случае, хотя порядок особенности напряжений равен –1, коэффициенты при этих особенностях

$$\left(\tilde{f}_{11} + \tilde{f}_{21}\right)\left(2-\alpha_0\right) - 2\tilde{f}_{11} = \tilde{f}_{21} - \tilde{f}_{11}$$

при условии (8) становятся равными нулю и приходим к задаче об упругом полукруге, прижатом по диаметру к гладкой жесткой опоре.

Интегрируя σ_θ по r в интервале (0,1) при $\theta = \alpha$ и $\theta = 0$, получим силы P_α и P_0, действующие на штампы со стороны сектора

$$P_\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\int_0^\alpha f_1(\theta)\cos\theta\, d\theta - \int_0^\alpha f_2(\theta)\sin\theta\, d\theta\right] \tag{16}$$

$$P_0 = P_a \cos a + \int_0^\alpha f_1(\theta)\sin\theta\, d\theta + \int_0^\alpha f_2(\theta)\cos\theta\, d\theta \tag{17}$$

Полученные соотношения представляют собою нечто иное, как первые два уравнения равновесия статики упругого кругового сектора (без штампов). Легко показать, что третье уравнение равновесия также удовлетворяется.

В частном случае, когда на дуге $r = 1$ заданы только нормальные нагрузки в виде двух симметричных сосредоточенных сил, из (16) следует, что

$$P_\alpha = P_0 = P_1 \cos\theta_1 \left(\sin\alpha/2\right)^{-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M.L.Stress Singularities Resulting from various boundary conditions in angular corners of plats in extention.//Journal of applied mechanics. 1952. Vol 19.N4. P. 526–528.
2. Каландия А. И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. //ПММ. 1969. Т. 33. N1. С. 132–135.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М. : Изд-во АН СССР. 1963. 567 с.
4. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической физики. М.: Наука. 1981. 688 с.
5. Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости.// ДАН АрмССР. 1961. Т. 32. №2. С. 69–77.
6. Аветисян А. Г. Особенности напряжений в составном теле при контурных условиях гладкого контакта. Исследование по теории пластин и оболочек. Изд-во Казан. ун-та. 1976. Вып. 12. С. 85-94.
7. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
8. Саргсян А. М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах. // Актуальные проблемы механики сплошной среды (Труды международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна). Ереван, 2007. с. 368–372.
9. Макарян В. С., Саркисян В. Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1999. Т.52. №2. С.3–11.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич

К.ф.-м. н., ведущий научный сотрудник
Института механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел.:(+37410) 52-48-90
E-mail:mechins@sci.am

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

Саргсян М.З.
Ереван, Армения

В работе рассмотрены вынужденные колебания свободно лежащей на жестком основании ортотропной пластины, вызванные гармонически изменяющейся во времени нормальной нагрузкой. Асимптотическим методом получены решение внутренней задачи и условия возникновения резонанса. Для частных видов нормальной нагрузки получены точные решения внутренней задачи.

1.Рассмотрим ортотропную пластину $D=\{(x,y,z):\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,$ $\left|z\right|\le h,\ \ h<<l,\ \ l=\min(a,b)\}$, на верхнюю лицевую плоскость которой действует нормальная нагрузка: $F\left(x,y,t\right)=P\left(x,y\right)\exp\left(i\Omega t\right)$, где Ω – частота вынуждающего воздействия, а на нижней лицевой плоскости заданы условия свободного опирания расположения пластины с учетом трения. Итак, при $z=h$ и $z=-h$ имеем граничные условия:

$$\begin{aligned}&\sigma_{zz}\left(h\right)=-P\left(x,y\right)\exp\left(i\Omega t\right),\qquad \pm_{xz}\left(h\right)=\pm_{yz}\left(h\right)=0\\&w\left(-h\right)=0,\qquad \pm_{xz}\left(-h\right)=f_1\pm_{zz}\left(-h\right),\qquad \pm_{yz}\left(-h\right)=f_2\pm_{zz}\left(-h\right)\end{aligned}\tag{1.1}$$

где f_1 и f_2 – коэффициенты трения, соответственно, по координатным направлениям x и y. Требуется найти решение уравнений динамики теории упругости при граничных условиях $\left(1.1\right)$. Условия на боковой поверхности, которыми обусловлено появление динамического пограничного слоя, мы не будем конкретизировать [1].

Решение поставленной задачи будем искать в виде [2,3]

$$\begin{aligned}&\pm_{\sim}\left(x,y,z,t\right)=\pm_{jk}\left(x,y,z\right)\exp\left(i\Omega t\right),\\&\left(u,\mathrm{v},w\right)=\left(u_x,u_y,u_z\right)\exp\left(i\Omega t\right),\qquad \sim,\quad =x,y,z;\quad j,k=1,2,3\end{aligned}\tag{1.2}$$

Затем введя безразмерные координаты и безразмерные компоненты вектора перемещения

$$\P=\frac{x}{l},\ \ ¦=\frac{y}{l},\ \ ¸=\frac{z}{l},\qquad U=\frac{u_x}{l},\ V=\frac{u_y}{l},\ W=\frac{u_z}{l}\tag{1.3}$$

получим следующую сингулярно возмущенную малым параметром £ систему:

$$\frac{\partial\pm_{11}}{\partial\P}+\frac{\partial\pm_{12}}{\partial ¦}+£^{-1}\frac{\partial\pm_{13}}{\partial ¸}+£^{-2}\Omega_*^2U=0\qquad\left(1,2,3;\ U,V,W\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\P}=a_{11}\pm_{11}+a_{12}\pm_{22}+a_{13}\pm_{33}\qquad\qquad\left(\P,¦;\ U,V;\ 1,2\right)$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial \zeta}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial V}{\partial \eta}=a_{66}\sigma_{12},\quad \frac{\partial W}{\partial \eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial \zeta}=a_{55}\sigma_{13} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial \zeta}=a_{44}\sigma_{23},\qquad \Omega_*^2=\rho h^2\Omega^2,\ \ \varepsilon=h/l$$

Решение этой системы состоит из решений внутренней задачи $\left(I^{\text{int}}\right)$ и пограничного слоя $\left(I_b\right)$:

$$I=I^{\text{int}}+I_b \tag{1.5}$$

Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\sigma_{ij}^{\text{int}}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{\text{int}(s)},\ U^{\text{int}}=\varepsilon^{s}U^{\text{int}(s)},\ \left(U,V,W\right),\ s=\overline{0,S};\ i,j=1,2,3 \tag{1.6}$$

Подставив (1.6) в (1.4), получим рекуррентную систему, из которого все напряжения можно выразить через перемещения:

$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}+\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}\right),\ \sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right)$$

$$\sigma_{11}^{(s)}=-A_{23}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}+A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}-A_{12}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

$$\sigma_{22}^{(s)}=-A_{13}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}-A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}+A_{33}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \tag{1.7}$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right)$$

$$\sigma_{33}^{(s)}=A_{11}\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta}-A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta}-A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

где

$$A_{11}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\Delta},\ A_{22}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{\Delta},\ A_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{\Delta}$$

$$A_{12}=\frac{a_{12}a_{33}-a_{13}a_{23}}{\Delta},\ A_{13}=\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\Delta},\ A_{23}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{\Delta}$$

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2$$

а для определения $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$ получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial \zeta^2}+a_{55}\Omega_*^2U^{(s)}=R_U^{(s)}\qquad \left(U,V,W;\ \ a_{55},a_{44},a_{66}\right) \tag{1.8}$$

где

$$R_U^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial ¶ \partial ¸} - a_{55}\left(\frac{\partial ±_{11}^{(s-1)}}{\partial ¶} + \frac{\partial ±_{12}^{(s-1)}}{\partial ¦}\right)$$

$$R_V^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial ¦ \partial ¸} - a_{44}\left(\frac{\partial ±_{12}^{(s-1)}}{\partial ¶} + \frac{\partial ±_{22}^{(s-1)}}{\partial ¦}\right)$$

$$R_W^{(s)} = A_{23}\frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial ¶ \partial ¸} + A_{13}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial ¦ \partial ¸} - a_{44}\left(\frac{\partial ±_{13}^{(s-1)}}{\partial ¶} + \frac{\partial ±_{23}^{(s-1)}}{\partial ¦}\right)$$

Решение этих уравнений имеют следуюший вид:

$$U^{(s)}(¶,¦,¸) = U_0^{(s)}(¶,¦,¸) + U_²^{(s)}(¶,¦,¸) \qquad (U,V,W) \tag{1.9}$$

где величины с индексом "0 – решения однородных, а с индексом "τ" – частные решения неоднородных уравнений (1.8). Решениями однородных уравнений будут

$$\begin{aligned} U_0^{(s)}(¶,¦,¸) &= C_{U1}^{(s)}(¶,¦)\sin\sqrt{a_{55}}\Omega_* ¸ + C_{U2}^{(s)}(¶,¦)\cos\sqrt{a_{55}}\Omega_* ¸ \\ V_0^{(s)}(¶,¦,¸) &= C_{V1}^{(s)}(¶,¦)\sin\sqrt{a_{44}}\Omega_* ¸ + C_{V2}^{(s)}(¶,¦)\cos\sqrt{a_{44}}\Omega_* ¸ \\ W_0^{(s)}(¶,¦,¸) &= C_{W1}^{(s)}(¶,¦)\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}¸ + C_{W2}^{(s)}(¶,¦)\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}¸ \end{aligned} \tag{1.10}$$

Определив по формулам (1.7) компоненты тензора напряжений, и, удовлетворив граничным условиям (1.1), найдем неизвестные коэффициенты $C^{(s)}$ и из (1.9) (1.10) получим следующее решение:

$$U^{(s)} = \frac{\sqrt{a_{55}}±_{13²}^{(s)}(¸=1)}{\Omega_* \sin 2\sqrt{a_{55}}\Omega_*}\cos\sqrt{a_{55}}\Omega_*(1+¸) +$$

$$+\frac{Q_U^{(s)}}{\sin 2\sqrt{a_{55}}\Omega_*}\cos\sqrt{a_{55}}\Omega_*(1-¸) + U_²^{(s)}, \qquad (U,V;\ a_{55},a_{44};\ 1,2)$$

$$W^{(s)} = \frac{1}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}}\left[\frac{p^{(s)}(¶,¦) - ±_{33}^{(s)}(¸=1)}{\Omega_*\sqrt{A_{11}}}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}(1+¸) -\right.$$

$$\left. - W_²^{(s)}(¸=-1)\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}(1-¸)\right] + W_²^{(s)} \tag{1.11}$$

где

$$Q_U^{(s)} = \frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*}\left[f_1\left(\frac{p^{(s)}(¶,¦) - ±_{33}^{(s)}(¸=1)}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}} - W_²^{(s)}(¸=-1)\Omega_*\sqrt{A_{11}}\,\mathrm{tg}\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} + \right.\right.$$

$$+\pm_{33}^{(s)}(¸=-1)\Big)-\pm_{13²}^{(s)}(¸=-1)\Big],\qquad (a_{55},a_{44};\ f_1,f_2;\ \pm_{13²},\pm_{23²})$$

$$\pm_{13²}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U_{²}^{(s)}}{\partial ¸}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial ¶}\right),\qquad (1,2;\ U,V;\ a_{55},a_{44})$$

$$\pm_{33²}^{(s)}=\frac{\partial W_{²}^{(s)}}{\partial ¸}-A_{23}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial ¶}-A_{13}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial ¦}$$

$$p^{(0)}(¶,¦)=-£\,p(¶,¦),\ p(¶,¦)=P(l¶,l¦);\quad p^{(s)}(¶,¦)=0, s\neq 0$$

Решения (1.11) будут конечными, если

$$\sin 2\sqrt{a_{55}}\Omega_*\neq 0,\quad \sin 2\sqrt{a_{44}}\Omega_*\neq 0,\quad \cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\neq 0 \tag{1.12}$$

В противном случае, Ω совпадает с частотой собственных колебаний и будет возникать резонанс.

Подставив (1.11) в формулы (1.7), определим все компоненты тензора напряжений. Построенное выше решение, как правило, не будет удовлетворять условиям на боковой поверхности пластины. Для удовлетворения этих условий необходимо построить пограничный слой, который требует отдельного рассмотрения.

2.а) Рассмотрим случай, когда нормальная нагрузка имеет постоянную интенсивность:

$$P(x,y)=\text{const}=p \tag{2.1}$$

В этом случае итерационный процесс обрывается при приближении $s=1$:

$$U^{(1)}=V^{(1)}=W^{(1)}=\pm_{ij}^{(1)}=0,\qquad i,j=1,2,3$$

и получаем следующее точное решение:

$$u=-phf_1\frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*}\frac{\cos\sqrt{a_{55}}\Omega_*(1-¸)}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\sin 2\sqrt{a_{55}}\Omega_*}\exp(i\Omega t) \tag{2.2}$$

$$(u,\mathrm{v};\quad f_1,f_2;\quad a_{55},a_{44})$$

$$w=-ph\frac{\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}(1+¸)}{\Omega_*\sqrt{A_{11}}\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}}\exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{xx} = p\frac{A_{23}}{A_{11}} \frac{\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}(1+\nu)}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}} \exp(i\Omega t),\ \sigma_{xy} = 0,\ (x,y;\ A_{23}, A_{13})$$

$$\sigma_{zz} = -p\frac{\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}(1+\nu)}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}} \exp(i\Omega t) \tag{2.3}$$

$$\sigma_{xz} = -pf_1 \frac{\sin\sqrt{a_{55}}\Omega_*(1-\nu)}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}\sin 2\sqrt{a_{55}}\Omega_*} \exp(i\Omega t),\quad (x,y;\ f_1, f_2;\ a_{55}, a_{44})$$

б) Когда нормальная нагрузка имеет линейную интенсивность:

$$P(x,y) = ax + by + c \tag{2.4}$$

итерационный процесс обрывается при приближении $s = 2$:

$$U^{(2)} = V^{(2)} = W^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} = 0,\qquad i, j = 1,2,3$$

и в этом случае тоже получается точное решение. Итак, можно утверждать, что если нормальная нагрузка имеет многочленный вид, то всегда получается точное решение внутренней задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
3. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Междунар. научн. журнал. Прикл. Механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саргсян Месроп Зографович
Аспирант Института механики НАН РА
Тел: (0224) 22335(дом.), (093) 069950(моб.)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИКЕ МЕТОДАМИ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

Сафарян Ю.С., Карапетян Д.Р.
Горис, Армения

Методами волновой динамики выводятся нелинейные уравнения для динамических процессов в экономике и дается их решение.

В настоящей статье изучаются на основе аналогии с газовой динамикой и теорией упругости [2], [3] нелинейные слабые волны, описывающие динамику в экономических процессах. Полученные результаты можно также применить в известной экономической задаче [11] о динамике ценных бумаг.

§1**. Детерминированные процессы**.

В работе [2] дается применение методов газовой динамики к рассматриваемой, как детерминированный поток, задаче о движении транспорта вдоль одной линии.

Вводится понятие плотности ρ, измеряемой как сглаженное значение количества частиц на единицу длины дороги, и потока $j = \circ \mathrm{v}$, значения количества частиц, проходящих через точку x в единицу времени t. Затем считается экспериментально определенной зависимость $j = j(\circ)$ и записывается уравнение сохранения числа частиц

$$\frac{\partial \circ}{\partial t} + j'(\circ)\frac{\partial \circ}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

При заданном начальном распределении $\circ = \circ_0(x)$, решая задачу Коши для (1.1), можно для любого момента времени t определить значения $\circ(x,t)$, которые в силу (1.1) постоянны на характеристиках

$$\frac{dx}{dt} = j'(\circ), \circ = c, x = x_0 + j'(c)t \tag{1.2}$$

Эти характеристики в зависимости от $\circ_0(x)$ могут сходиться и в точках их пересечения будет многозначность решения, которая устраняется введением [2] ударной волны AB. Для простоты и конкретности считаем, что в момент $t = 0$ плотность $\circ = const$, $\circ_1$, полагается $\circ' = \circ = \circ_1$, а в данном объекте $x = 0$ можно считать известным изменение $\circ$

$$\circ' = F(t) \tag{1.3}$$

причем следует определить $\circ(x,t)$ во всей плоскости x, t.

Для малых $\circ'$ можно полагать

$$j'(\circ) = a_0 + ¥\circ', ¥ = j''(\circ_1), \; j'(\circ_1) = a_0 \tag{1.4}$$

где a_0 есть невозмущенная скорость волн.

После введения эйконала [3]

$$\tau = t - \frac{x}{a_0} \tag{1.5}$$

примет вид

$$\frac{\partial °'}{\partial x} - \frac{¥}{a_0^2} °' \frac{\partial °'}{\partial ²} = 0 \tag{1.6}$$

где производная по x берется при постоянном τ. Общее решение (1.6) имеет вид [3]

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{¥x}{a_0^2} F(y_1) = y_1 \tag{1.7}$$

где $y_1 = const$ есть уравнение нелинейных характеристик.

После пересечения характеристик образуется ударная волна, на которой из (1.6) получается условие [3]

$$V = a_0 + \frac{¥}{2} °' \tag{1.8}$$

где V есть скорость ударной волны, впереди которой $° = °_1$. Подставляя (1.7) в (1.8), где $V = \frac{dx}{dt}$, дифференцируя (1.7) по t, причем $x = x(t)$ вдоль (1.8), можно получить [3]

$$F^2(y_1) = \frac{2a_0^2}{¥x} \int_0^{y_1} F(y_1') dy_1' \tag{1.9}$$

на ударной волне. Здесь вид зависимости $F(y_1)$ дается условием (1.3) на объекте $x = 0$. Полагая, что на первом объекте плотность меняется по формуле $x = 0$,

$$F(t) = °_2 - °_1 + A\sqrt{t} \tag{1.10}$$

т.е. при $t = 0$ скачком изменяется от начального $°_1$, $°_2 > °_1$, $A < 0$, можно из (1.9) получить, интегрируя,

$$\left(°_2 - °_1 + A\sqrt{y_1}\right)^2 = \frac{2a_0^2}{¥x} \left\{ (°_2 - °_1) y_1 + \frac{2}{3} A y_1^{\frac{3}{2}} \right\} \tag{1.11}$$

Отсюда, задавая числа $°_{1,2}, A, ¥, a_0^2$, можно решением кубичного уравнения для $y_1^{\frac{1}{2}}$ численно найти y_1 в функциях x, затем определить $°' = F(y_1)$ по (1.10), а по (1.7) найти уравнение ударной волны.В частном случае $\text{°}_2 = \text{°}_1$ из (1.9) получится

$$y_1^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4a_0^2}\,\text{А¥}x, \qquad \text{°}' = \frac{3A^2\text{¥}x}{4a_0^2} \tag{1.12}$$

а уравнение ударной волны ОС по (1.7) (1.12) будет

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{3A^2\text{¥}^2x^2}{16a_0^4} = 0 \tag{1.13}$$

Разумеется, можно в волновом уравнении (1.6) учесть и диффузионные члены с $\frac{\partial^2\text{°}'}{\partial^2{}^2}$ и найти соответствующие решения [5] со сглаженной ударной волной, что можно подробно сделать для стохастических процессов.

§2. **Стохастические процессы.**

Нами рассмотрены все указанные выше задачи в случае более реальных стохастических марковских процессов в приближении диффузионных малых возмущений для переходной плотности вероятности p(s,x/t,y) от значения случайной величины ξ=x в момент s к значению ξ=y в момент t, причем для p получены в [8] обратное и прямое линейное уравнение Колмогорова

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2}b\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial ap}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 bp}{\partial y^2} \tag{2.2}$$

где для (2.1) при промежуточном состоянии $u = s + \Delta t,\ z$ близком s, x

$$a(s,x) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\text{£}}(z-x)p(s,x,s+\Delta t,z)dz \tag{2.3}$$

$$b(s,x) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\text{£}}(z-x)^2\,p(s,x,s+\Delta t,z)dz \tag{2.4}$$

которые называются коэффициентами сноса и диффузии и по смыслу записи, a есть средняя скорость изменения величины x. Те же соотношения имеют место для (2.2) с заменой $s+\Delta t, x$ на $t+\Delta t, y$. Эти же уравнения получены в [9] и названы уравнениями Фоккера–Эйнштейна. Там же, полагая $s = t_0$, $x = x_0$, $y = x$ и считая, что при $t = t_0$ задано $p_0(t_0, x_0)$, вводится одномерная функция распределения

$$p(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_0(t_0,x_0)\,p(t_0,x_0,t,x)dx_0 \tag{2.5}$$

и умножив (2.2) на $p_0(t_0,x_0)$ и проинтегрировав, нетрудно убедиться, что вероятность состояния P(t,x) удовлетворяет тому же уравнению (2.2), где $y \to x$, с начальным условием $P_1(t_0, x) = P_0(t_0, x)$.

Таким образом, можно записать для вероятности осуществления в момент t состояния x линейное уравнение в предположении, что $a = const$, $a = a_0$, $b = \mathrm{const}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a_0 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \tag{2.6}$$

Это уравнение совпадает с линейным волновым уравнением с учетом малой диссипации, газовой, и вообще волновой, динамики, в котором a есть линейная скорость волны и по аналогии с механикой сплошных сред , можно считать задачу слабонелинейной и полагать

$$a = a_0 + \text{¥}P' \quad (2.7)$$

где a_0 дается правой частью (2.3), $P' = P - P_0$, P_0 есть вероятность основного невозмущенного процесса, а соответствуюшая переходная вероятность равна

$$p_0(t_0, x_0, t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\text{®}b(t - t_0)}} e^{-\frac{(x - x_0 - a_0 t + a_0 t_0)^2}{2b(t - t_0)}} \tag{2.8}$$

с математическим ожиданием $a_0(t - t_0)$, равным среднему значению переменной $x - x_0$, причем p_0 удовлетворяет (2.6), в случае $P_0(t_0, x) = \mathrm{const}$ из (2,5), (2.8) следует также, что всюду в линейной задаче $P_0(t, x) = \mathrm{const}$. Г – коэффициент, который должен определяться экспериментально. Вначале записывается линейное уравнение для $P' = P - P_0$ в виде (2.6), где стоит коэффициент a_0, затем a_0 заменяется на a по (2.7) и получается

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + a_0 \frac{\partial P'}{\partial x} + \text{¥}P' \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 P'}{\partial x^2} = 0 \tag{2.9}$$

В волновой области, переходя как и в §1, к переменной ², можно из (2.9) получить, обозначая

$$P'(t, x) = p'(t, x) \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial P'}{\partial x} - \frac{\text{¥}}{a_0{}^2} P' \frac{\partial P'}{\partial \text{²}} - \frac{1}{2} \frac{b}{a_0{}^3} \frac{\partial^2 P'}{\partial \text{²}^2} = 0 \tag{2.11}$$

Отбросив последний член в левой части, можно получить уравнение (1.6), где вместо $°'$ имеется p'. И все решения (1.7) - (1.13) сохраняются. Для них можно провести расчеты с вероятностной интерпретацией переменной $°'$.

§3.**Решение нелинейного уравнения.**

В §2 были получены нелинейные диффузионные уравнения для экономических случайных процессов (2.11). Поскольку $\frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_2 = -\frac{\partial p'}{\partial t}\frac{1}{a_0}$ их можно записать так:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\gamma}{a_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{b}{a_0^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} \qquad (3.1)$$

Следует заметить, что указанные ранее и приведенные в [1] кривые зависимости экономических случайных величин, таких как валовый национальный продукт x отдельных стран и т.д., позволяют оценить величину средней скорости $\frac{dx}{dt}$ изменения величины, x по наклону кривой для некоторого t. Например, для Великобритании за 1960-1994 гг. при использовании поквартальных значений колебания экономической активности вокруг тренда, они становятся более наглядными и даются фиг.4.

Определим постоянные a_0 ,¥ для задачи экономического роста, где валовой постоянный продукт ВНП = х Великобритании дается рис.1.2 [1] или фиг. 4.

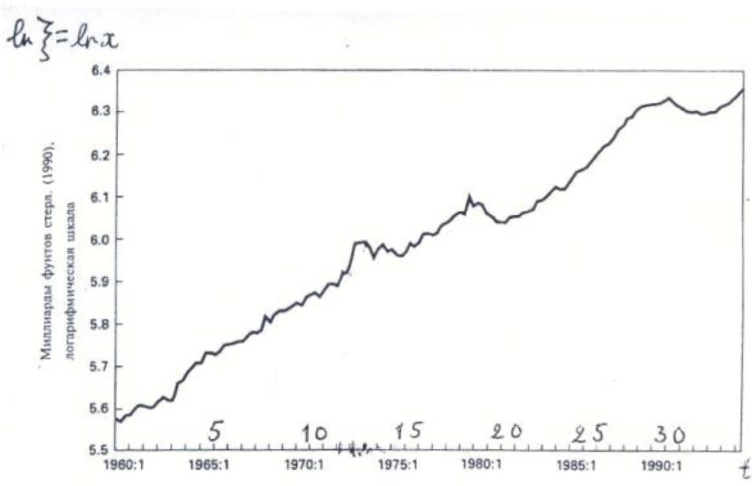


Рис. 1.2. Валовой национальный продукт Великобритании, квартальные данные 1960:1 — 1994:2

Фиг.4

Для того, чтобы конкретизировать коэффициенты a , в уравнений (2.1), (2.2) можно учесть то, что кривая [1] для указанного случайного процесса $x = x(t)$ представляет среднее изменение по времени. При этом, как показано в [9], можно ввести средние по переходной вероятности v= ° значения

$$\bar{x} = -\int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{v}\,(t,\, x;\, t_0\,,\, x_0\,)\;dx \tag{3.2}$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, \mathrm{v}\,(t, x; t_0\,, x_0\,) dx \tag{3.3}$$

причем $\bar{x}\,(t_0\,)= x_0$.Тогда из уравнения (2.2), с заменой y на x , которое имеет место и для введенных в (2.5) $P(t,x)$, можно получить [9]

$$\frac{\overline{dx}}{dt} = \overline{a(x,t)},\;\; \frac{\overline{dx^2}}{dt} = 2\overline{a(x,t)} + \overline{b(x,t)} \tag{3.4}$$

В частном случае $a(x,t) = a_0 + cx,\;\; a_0, c = \mathrm{const}$

$$x = \bar{x} + \Delta x, \quad \overline{a(x,t)} = a_0 + cx,\;\; \overline{b(x,t)} = \frac{\overline{(\Delta x)^2}}{2\Delta t} - 2c\overline{(\Delta x)^2} \tag{3.5}$$

Таким образом, имея средние кривые $x(t)$, можно по их наклону определять приближенно коэффициенты a, b в (2.2).

Эти соотошения можно применять к стохастической задаче экономики о валовом национальным продукте x, кривые которого даны [1] рис.1.1, рис.1.2, на рис.1.2 дается $\ln x$, большая часть кривой соответствует тренду, однако на небольших участках в окрестности $t_0 = 12$ лет; $t_0 = 20$ лет имеет место резкое изменение $\dfrac{dx(t)}{dt}$, которое нами связывается с нелинейностью. При этом на подходе к областям нелинейности, т.е. сильных изменений $\dfrac{dx(t)}{dt}$, малые участки кривых $x(t)$ заменяются на прямые с наклоном $\dfrac{dx}{dt} = a_0$, и из фиг. 4 получится $a_0 = 14\dfrac{\text{млрдф}}{\text{год}}$. На большой части аналогичных кривых в биологии [3], где уже c=0 и начальная часть $x(t) = a_0 t$, решение (2.2) дается для $p(t_0, x_0, t, x)$ гауссовой кривой, а для $p(t, x)$ можно взять постоянное условие $°\,(t, x) = °_0,\; p_0 = \mathrm{const}$

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{¥}{a_0{}^2} p' \frac{\partial p'}{\partial ²} + \frac{1}{2} \frac{b}{a_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial ²{}^2} = 0 \tag{3.6}$$

Отбросив последний член в левой части, можно получить уравнение (1.6), где вместо $°'$ стоит P'. И все решения 1 сохраняются с вероятностной интерпретацией.

В окрестности точек сильных изменений x берется решение на ударной волне (1.8), которое в данной задаче имеет вид $¥p' = \frac{3A^2 ¥^2 t}{4a_0}$, и поскольку для ударной волны добавок ее меньше чем для скорости a самой волны [3], можно считать $a = a_0 + \frac{3A^2 ¥^2 t}{2a_0}$ и по (2.5), отбросив слагаемое с b, получить $\frac{\Delta ¶}{\Delta t} - a_0 \approx \frac{3A^2 ¥^2 t}{2a_0}$, где $\frac{\Delta ¶}{\Delta t}$ есть тангенс наклона кривой $x(t)$ на нелинейном малом участке $\approx 43 \frac{млрдф}{год}$. Тогда получится $A¥ = 4.5 \frac{млрдф}{год^{\frac{3}{2}}}$.

Ориентировочно выбрав прогнозируемую избыточную граничную вероятность при $x = 0$, $P' = A\sqrt{t}$ на указанном отрезке $A = \frac{1}{6} \frac{1}{год^{\frac{1}{2}}}$,

получим нелинейный коэффициент $¥ = 27 \frac{млрдф}{год}$.

Уравнения диффузии с немалой нелинейностью в задачах о движении [14] и математических вопросов о финансах[13] исследовались с точки зрения существования решений.Для задач генетики имеют место сильные нелинейности, и применением теории [2] численно находится $P'(x,t)$ из алгебраического уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурда М., Виплош Ч., Макроэкономика. Европейский текст.Санкт–Петербург: 1998. 539с.
2. Lighthill M.J., Whitham G.B On kinematic waves on long crowded roads Pro. Roy Soc. A.1955,v. 229, p. N1178.

3. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Определение ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. //Изв АН АрмССР. Механика. 1968. Т.21. №3. С.19-24.
4. Керопян Х.В., Казарян Э.А. Стохастические модели компьютерных сетей и методы их исследования. Ереван , 1997. 138 с.
5. Хейз У.Д. Основы газодинамических разрывов.//В сб.:"Основы газовой динамики". 1968. 702с.
6. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1964.
7. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.
8. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1979. 183с.
9. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976. 494 с.
10. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики. М.: Мир, 1968. 403с.
11. Black Fisher, Scholes Myron. The pricing of options and corporative liabilities. //The journal of political Economy, 1973.u 81. №3.
12. Багдоев А.Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: 1981. 303с.
13. Antonelli F.,Barucci and Manchino M.E.Asset pricing with a forward backward stochastic differential utility" Econom. Let. 72(2001), pp. 151-157.
14. Escobedo M., Vazquez Y.L. and Zuazua E. Entropy solution for diffusion-convection equation with partial diffusivity //Trans. Amer. Math.Soc. 343 (1994), pp. 829-842.

Сведения об авторах:

Сафарян Ю.С.

Д.ф.-м.н., Ректор Горисского Государственного Университета
Тел.: 093432331
E-mail: safaryan@rambler.ru

Карапетян Д.Р.

Научный сотрудник
Руководитель центром международных
связей Горисского Университета, экономист
E-mail: karapetyandiana@rambler.ru

INSTABILITY AND PERIODIC MOTION OF A PHYSICAL PENDULUM WITH VIBRATING SUSPENSION POINT (THEORY AND EXPERIMENT)

Alexander P. Seyranian *(Moscow, Russia)****,***
Hiroshi Yabuno and Koji Tsumoto (Tsukuba, Japan)

Abstract. In the present paper nonlinear behavior of a physical pendulum with vibrating suspension point is studied both theoretically and experimentally. It is emphasized that previous experiments were mostly of qualitative nature. Instability conditions for lower vertical position of the pendulum are found. Periodic motions for various parameters, corresponding to swinging of the pendulum, are obtained and their stability depending on parameters is investigated. The frequency-response curve for periodic motion with small amplitude is obtained. A good agreement between theoretical and experimental results is reported.

1. Introduction. In nonlinear dynamics the motion of the pendulum represents a classical paradigm. Vibrations and stability of a pendulum with vibrating support have been studied by many authors, see e.g. [1-12]. In spite of many publications there are relatively few recorded experiments on stability analysis and nonlinear behavior of the pendulum. Among well known experimental studies we recall stabilization of an inverted pendulum by high frequency excitation of the support by Kapitza [1,2] and on stability of an inverted rod with a sliding washer under vibrating suspension point by Chelomei [3]. Experiments on stabilization of a pendulum about tilted axis with vibrating suspension point were described in [4,5]. Routes to chaotic motion of the parametrically excited pendulum from the lower vertical position were investigated experimentally in [6]. We note that those experiments were mostly of qualitative nature.

2. Basic relations. Plane oscillations of a physical pendulum about lower vertical position with periodically varying displacement of the suspension point and viscous damping, see Fig 1, are governed by the equation

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mr(g - \ddot{z})\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Here I and m are moment of inertia and mass of the pendulum, θ is the angle measured from the lower vertical position, c is the viscous friction coefficient, r is the distance between suspension point and the center of gravity of the pendulum, g is the acceleration due to gravity, z is the vertical displacement of the suspension point, and the dot stands for differentiation with respect to time t.

It is assumed that the displacement of the suspension point of the pendulum is governed by the law

$$z = a\varphi(\Omega t) \tag{2}$$

where a and Ω are the excitation amplitude and frequency, respectively, and $\varphi(\tau)$ is an arbitrary smooth periodic function with the period 2π. The amplitude

a and friction coefficient c are assumed to be small.

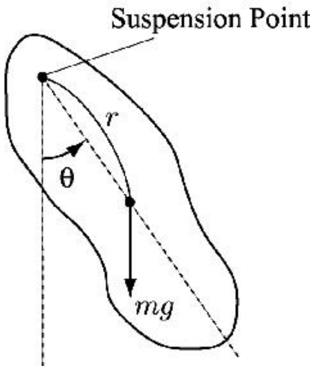


Fig 1. Physical pendulum.

For the sake of convenience we introduce the function ¨ $= -\ddot{¤}$. Then we get

$$\ddot{z} = -a\Omega^{2}¨(\Omega t) \tag{3}$$

It is assumed that the mean value of 2® -periodic function ¨(²) is zero $\int_0^{2®}$ ¨(²)d² $= 0$.

We introduce non-dimensional variables and parameters

$$² = \Omega t\,,\ £ = \frac{a\Omega_0^2}{g}\,,\ µ = \frac{\Omega_0}{\Omega}\,,\quad = \frac{c}{I\Omega_0}\,;\ \Omega_0 = \sqrt{\frac{mrg}{I}} \tag{4}$$

Note that Ω_0 is the eigenfrequency of the pendulum about immovable suspension point.

With this notation equation (1) takes the form

$$\ddot{¯} + \ µ\dot{¯} + [µ^2 + £¨(²)]\sin ¯ = 0 \tag{5}$$

Dots mean differentiation with respect to ² . The coefficients of equation (5) depend explicitly on the periodic function ¨(²) and three independent parameters £ , , µ with £ and being small.

3. Instability regions. According to Lyapunov's theorems the stability or instability of the trivial solution ¯$(t) = 0$ of nonlinear equation (5) with periodic coefficients is governed by the stability or instability of the linearized equation

$$\ddot{¯} + \ µ\dot{¯} + [µ^2 + £¨(²)]¯ = 0 \tag{6}$$

This is Hill's equation with damping. It is known that instability (parametric resonance) occurs near the values µ $= k/2$, $k = 1,2\ldots$. According to [11] the instability regions for equation (6) in three-parameter space are given by half of the cone

$$\frac{{}^2k^2}{4}+\left(2\mu-k\right)^2<\frac{(a_k^2+b_k^2)\pounds^2}{k^2}, \qquad \geq 0 \tag{7}$$

where

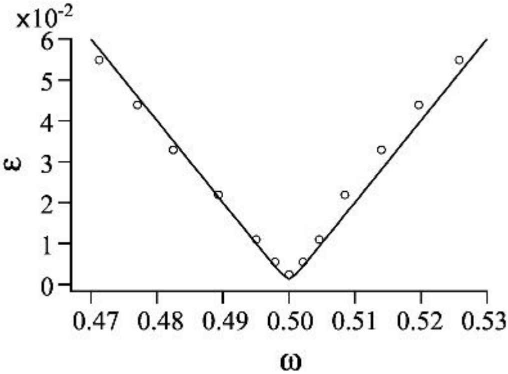


Fig 2. Instability region of the vertical position of the pendulum $\bar{\ } = 0$.

$$a_k=\frac{1}{\circledR}\int_0^{2\circledR}\ddot{\ }(^2)\cos k^2\, d^2, \quad b_k=\frac{1}{\circledR}\int_0^{2\circledR}\ddot{\ }(^2)\sin k^2\, d^2, \quad k=1,2\ldots \tag{8}$$

are Fourier coefficients of the function $\ddot{\ }(^2)$.

Formulae (7) describe first order approximations of instability regions showing that the κ-th resonance region depends only on the κ-th Fourier coefficients of the periodic function $\ddot{\ }(^2)$.

The cross section of the half-cone (7) by the plane $= const \geq 0$ gives the zones of parametric resonance limited by hyperbolae, see Fig 2. The asymptotes of these hyperbolae are found from (7) putting there $=0$. When damping is included (>0) the minimal excitation amplitude of the resonance according to (8) is equal to

$$\pounds_{\min}=\frac{k^2}{2\sqrt{a_k^2+b_k^2}} \tag{9}$$

With an increase of the resonance number k Fourier coefficients a_k, b_k tend to zero. This means that for a fixed damping coefficient with increasing k the minimal excitation amplitude tends to infinity. This explains why it is easier to observe the parametric resonance at small numbers $k=1,2,\ldots$ because at higher resonance numbers essential efforts and high excitation amplitudes are needed to set the system into unstable motion.

For the function $\ddot{}\,(^2) = \cos^2$ we have $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. Thus, first resonance region for this periodic function is given by the inequality

$$^2/4 + (2\mu - 1)^2 < £^2, \quad \geq 0 \tag{10}$$

In dimensional quantities we obtain from (4) that swinging of the pendulum occurs near excitation frequencies Ω close to the critical values

$$\Omega_k = \frac{2\Omega_0}{k}\ ,\ k = 1,2.... \tag{11}$$

Note that Ω_0 is the eigenfrequency of the pendulum. In dimensional quantities inequality (7) yields the instability regions as

$$\frac{c^2}{4I^2\Omega_0^2} + \left(\frac{\Omega}{\Omega_k} - 1\right)^2 < \frac{(a_k^2 + b_k^2)\, m^2 r^2 a^2}{k^4 I^2}, \quad \geq 0\ ,\ k = 1,2,\ldots \tag{12}$$

When problem parameters satisfy inequalities (12) the lower vertical position of equilibrium of the pendulum $\bar{}(t) = 0$ becomes unstable and the pendulum starts swinging. Then both regular and chaotic motions are possible.

Solid line in Fig 2 shows the boundary of the first resonance region $(\mu \approx 1/2)$ for the function $\ddot{}\,(^2) = \cos^2$ and damping coefficients $\ = 2.61 \cdot 10^{-3}$, given by formula (10), and experimental points are shown by circles.

4. Periodic solutions. Assuming in (5) the angle $\bar{}$ small and substituting $\sin\bar{}$ by the first two terms of a Taylor expansion, $\sin\bar{} = \bar{} - \bar{}^3/6$, and neglecting the higher order terms we get the equation with small nonlinearity

$$\ddot{\bar{}} + \ \mu\dot{\bar{}} + [\mu^2 + £\,\ddot{}\,(^2)]\bar{} - \frac{\mu^{2}\bar{}^{3}}{6} = 0 \tag{13}$$

Here it is assumed that $£$ and   are small quantities of order $o(1)$ [12].

We can estimate the amplitude of oscillations at which equation (13) is valid. The absolute value of the non-linear term $\mu^2\bar{}^3/6$ in equation (13) must be much less than the absolute value of the linear term $\mu^2\bar{}$. Thus we have the condition $\bar{}^2/6 \sim O(£)$. For example, if we take $£ \approx 0.1$ then $\left|\bar{}\right| < ®/4$. This is the estimate of validity of equation (13). Equation (13) with $\ddot{}\,(^2) = \cos^2$ sometimes is called a nonlinear Mathieu-Hill equation [8,12].

Let us study parametric excitation of nonlinear system (13) by periodic function ¨(²) = cos² near first resonance frequency $\mu \approx 1/2$, $(\Omega \approx 2\Omega_0)$. Using the method of averaging [7,8], we seek approximate solution of the system in the form ¯(²) = Θ cos(² / 2 + ·), where the amplitude Θ and phase · are slow variables. As a result, for these variables we get the system of differential equations

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d²} &= -\frac{\Theta\ \ \mu}{2} + \frac{\Theta£}{2}\sin 2· \\ \frac{d·}{d²} &= \mu - \frac{1}{2} - \frac{\Theta^2\mu^2}{8} + \frac{£}{2}\cos 2· \end{aligned} \tag{14}$$

For steady motion we have

$$\frac{d\Theta}{d²} = 0, \quad \frac{d·}{d²} = 0 \tag{15}$$

From equations (14), (15) besides the trivial solution $\Theta = 0$ we find a nontrivial amplitude

$$\Theta^2 = \frac{4}{\mu^2}\left(2\mu - 1 \mp \sqrt{£^2 - \ \ ^2\mu^2}\right) \tag{16}$$

and phase

$$· = \frac{1}{2} Arc\tan\left(\mp \frac{\mu}{\sqrt{£^2 - \ \ ^2\mu^2}}\right) + ® j,\ j = 0,1,2,\ldots \tag{17}$$

We insert the denominator of (16) inside the parentheses and express the amplitude as a function of $1/\mu = \Omega/\Omega_0$

$$\Theta^2 = 4\left(\frac{2\Omega}{\Omega_0} - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \mp \sqrt{\frac{£^2\Omega^4}{\Omega_0^4} - \frac{\ \ ^2\Omega^2}{\Omega_0^2}}\right) \tag{18}$$

The frequency-response curve under fixed damping parameter $= 2.61 \cdot 10^{-3}$ and amplitude $£ = 1.098 \cdot 10^{-2}$ ($a = 1mm$) is presented in Fig 3. The signs minus and plus in formula (18) correspond to lower (dashed line) and upper (solid line) branches of the curve, respectively, and experimental points are given by circles.

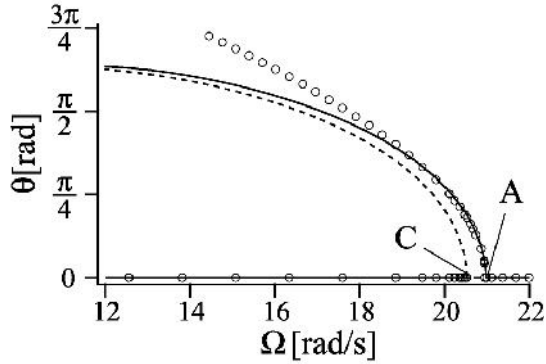


Fig 3. Frequency-response curve at $\pounds = 1.098\cdot 10^{-2}$, $\quad = 2.61\cdot 10^{-3}$.

To find the width of the resonance zone *AC*, see Fig 3, it is necessary to equate the right hand side of expression (18) to zero. Then we find that the width *AC* in the first approximation is determined by the inequality (10) in terms of the variable Ω/Ω_0. This is not surprising since *AC* specifies the instability zone of the trivial solution $\bar{\ } = 0$.

Lower and higher branches of the frequency-response curve (18) meet at the point *B* with vertical tangent at the frequency

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\ }{\pounds} \tag{19}$$

With increasing damping the frequency-response curve gets narrow and small and when $\ /\pounds \to 2$ the curve disappears tending to the point $\Omega/\Omega_0 = 2$, $\Theta = 0$. We note that the point *B* (with vertical tangent) according to (18) obeys parabolic law.

Thus, according to (10), (19) periodic solutions (16)-(18) exist on the interval of frequencies

$$\frac{\ }{\pounds} \le \frac{\Omega}{\Omega_0} \le 2 + \sqrt{4\pounds^2 - \ ^2} \tag{20}$$

It should be noted that the method of multiple scales [12] gives another form of frequency-response curve

$$\Theta^2 = 8\left(2 - \frac{\Omega}{\Omega_0} \mp \sqrt{\frac{\pounds^2\Omega^4}{4\Omega_0^4} - \ ^2}\right) \tag{21}$$

However, near the resonant frequency $\Omega \approx 2\Omega_0$ both formulas (18) and (21) yield close results.

5. Stability of periodic solutions. In this section we study stability of periodic solutions $¯_0(²) = \Theta\cos(²/2+·)$, the amplitude and phase of which are given by relations (16)-(18). We take a small increment to the periodic solution $¯(²) = ¯_0(²) + u(²)$ and substitute this function in equation (13) with $¨(²) = \cos ²$. Then in the first approximation we obtain a linear equation in $u(²)$

$$\ddot{u} + \quad µ\,\dot{u} + \left(µ^2 + £\cos ² - \frac{µ^2 ¯_0^2(²)}{2} \right) u = 0 \tag{22}$$

According to Lyapunov’s theorem on stability based on linear approximation the stability of periodic solutions is determined by stability or instability of solutions of the linearized equation (7) on increment function $u(²)$, i.e. equation (22). This is Hill’s equation with damping [11], the coefficients of which depend on three independent parameters $µ, £, \quad$ with $µ \approx 1/2$, $£, \quad << 1$, and the $2®$ -periodic function

$$\Phi(²) = (1-µ^2)\cos ² - \frac{\Theta^2 µ^2}{2£}\cos^2\left(\frac{²}{2} + ·\right) \tag{23}$$

The instability region for equation (22) near the values $µ = 1/2$, $£ = \quad = 0$ is given by [11]

$$^2/4 + (2µ - 1 + a_0 £)^2 < £^2(a_1^2 + b_1^2) \tag{24}$$

where a_0, a_1, b_1 are first Fourier coefficients of the function $\Phi(²)$. The asymptotic stability region, respectively, is given by the inequality (24) with the opposite sign.

For Fourier coefficients we find

$$a_0 = -\frac{\Theta^2 µ^2}{2£},\; a_1 = 1 - µ^2 - \frac{\Theta^2 µ^2 \cos 2·}{4£},\; b_1 = \frac{\Theta^2 µ^2 \sin 2·}{4£} \tag{25}$$

Since $µ \approx 1/2$ first term in inequality (24) can be replaced by $µ^2 \quad ^2$. Thus, near the values $£ = \quad = 0$, $µ = 1/2$ the following inequality is valid

$$µ^2 \quad ^2 + (2µ - 1 + a_0 £)^2 - £^2(a_1^2 + b_1^2) < 0 \tag{26}$$

Substituting coefficients (25) into (26) and using the expression for $\cos 2·$ from (14),(15), and relations (16), we obtain

$$\Theta^2 µ^2 \left(\frac{\Theta^2 µ^2}{4} - 2µ + 1 \right) = \mp \Theta^2 µ^2 \sqrt{£^2 - \quad ^2 µ^2} < 0 \tag{27}$$

From the last inequality follows that the periodic solution (16)-(18) with plus is stable, and with minus is unstable. These solutions are shown in Fig 3 by solid and dashed lines, respectively. Experimental points in Fig 3, shown by circles, correspond to stable periodic solutions while unstable solutions are not observed in the experiment. It is seen from Fig 3 that the results of the experiment are in a good agreement with theoretical results up to the amplitude of periodic motion

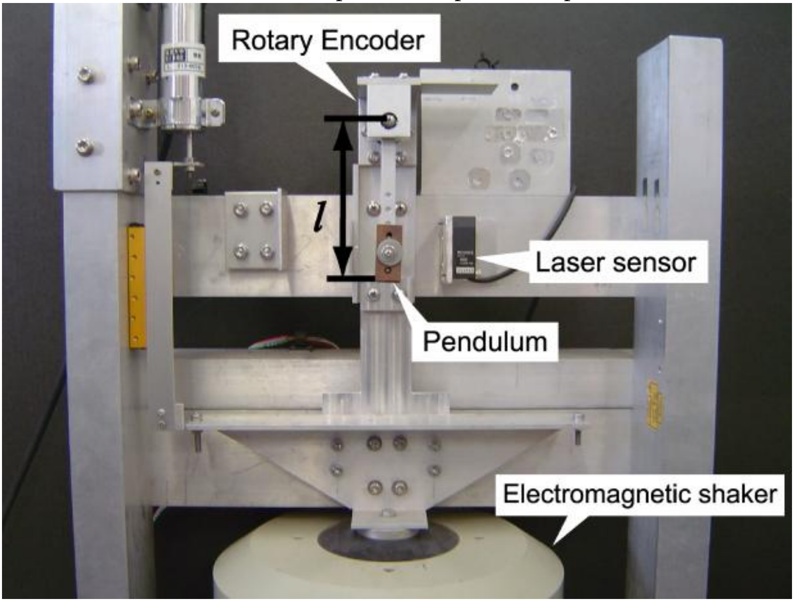


Fig 4. Experimental apparatus.

$\Theta \approx \text{®} / 4$. Note that for higher amplitudes the equation (13) and formulas (16)-(18) are not valid.

Thus, it follows from Fig 3 and previous derivations that under excitation of the suspension point with the frequency $\Omega \approx 2\Omega_0$ the pendulum oscillates according to the harmonic law $^{-}{}_0(t) = \Theta \cos(\ \Omega\, t / 2 + \cdot\ )$, and the frequency $\Omega/2$ can be higher or lower than the eigenfrequency Ω_0 of the pendulum with immovable suspension point. This conclusion contradicts to "the important result" by Kapitza [1,2] "that vibration of the support always decreases the period of the pendulum". This error is caused by oversimplification of the analysis.

6. Description of experiment. As shown in Fig. 4, the experimental setup consists of a pendulum with the length $l = 108\, mm$ whose pivot (radial bearing) is vertically excited by an electromagnetic shaker. The angle of the pendulum is measured with a rotary encoder and the vertical motion of the pivot is measured with a laser sensor KEYENCE Corp., LB-60 with a resolution of 40 «m . To generate unstable regions and frequency-response curves, we monitored the time traces and frequency components of the excitation and angle of the pendulum by using ONO SOKKI Corp., Multi-Channel Data Station DS-2100. The resolution of the frequency of excitation and response of the pendulum is 0.02 Hz, and the resolution of the angle of the pendulum in the experiment is 1.57· 10^{-3} rad. The eigenfrequency of the pendulum is equal $\Omega_0 = 10.374$ rad/sec, and the range of the excitation amplitude of the pivot lies within the limits $a = 0.5 - 5\ mm$. The damping coefficient was determined by decay of free vibrations of the pendulum with the immovable suspension point and is equal to $= 2.61 \cdot 10^{-3}$.

For fixed damping coefficient and excitation amplitude the instability range of the vertical position of the pendulum in Fig 2 is equal to the interval AC of the frequency-response curve. Experimental points on the upper part of the frequency-response curve in Fig 3, shown by circles, were obtained by excitation of the pivot of the pendulum with the given amplitude and near-critical frequency $\Omega \approx 2\Omega_0$ with the subsequent increase of frequency by small step up to getting the point A with the zero amplitude. That is how the points of the left boundary of the instability region in Fig 2 for different excitation amplitudes were obtained. Experimental points on the frequency axis in Fig 3 correspond to stability of the vertical position of the pendulum ¯ $= 0$. The right boundary of the instability region in Fig 2 was obtained by excitation of the pendulum from the equilibrium position ¯ $= 0$ at different amplitudes and frequencies with the Coulomb friction preventing the parametric resonance. That is why the left and right boundaries of the instability region in Fig 2 obtained experimentally by different methods differ by the accuracy of coincidence with the theoretical curves. Nevertheless, Fig 2 and 3 demonstrate rather good agreement between theoretical and experimental results.

REFERENCES

1. Kapitza P.L. Dinamic stability of a pendulum under vibrating support // Journal of experimental and theoretical physics, 1951. V. 21. No. 5. P. 588-597.
2. Kapitza P.L. A pendulum with vibrating support // Uspekhi physicheskikh nauk, 1951. V. 24. No. 1. P. 7-20.
3. Chelomei V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations // Doklady AN USSR. 1983. V. 270. No. 1. P. 62-67.
4. Strizhak T.G. Asymptotic normalization method. Kiev: Visha shkola, 1984. 280p.
5. Yabuno H., Miura M., Aoshima N. Bifurcation in an inverted pendulum with tilted high-frequency excitation: analytical and experimental investigations on

the symmetry-breaking of the bifurcation // Journal of Sound and Vibration. 2004. V. 273. P.493-513.
6. Leven R.W., Pompe B., Wilke C., and Koch B.P. Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum // Physica 16D. 1985. P. 371- 384.
7. Bogolyubov N.N., Mitropolskii Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear vibrations. Moscow: Nauka, 1974. 503p.
8. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. New York: Wiley, 1979. 506p.
9. Arnold V.I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer, 1989. 472p.
10. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics. New Jersey: World Scientific, 2001. 400p.
11. Seyranian A.P. Resonance domains for the Hill equation with damping // Doklady Physics, 2001. Vol. 46, No. 1, pp. 41-44.
12. Thomsen J.J. Vibrations and Stability. Advanced Theory, Analysis and Tools. Berlin: Springer, 2003. 404p.

Information about autors:

Seyranian Alexander P.

Institute of Mechanics, Moscow State Lomonosov University
Moscow, Russia
E-mail: seyran@imec.msu.ru

HiroshiYabuno and Koji Tsumoto

Institute of Engineering Mechanics and Systems, University of Tsukuba
Tsukuba, Japan
E-mail: yabuno@esys.tsukuba.ac.jp

РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Симонян А.М.

Ереван, Армения

Для описания деформаций ползучести материалов, как правило, соотношения между интенсивностями напряжений и деформаций, имеющие место при одноосном напряженном состоянии, оставляются в силе и добавляется условие пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций ([1-7] и др.).В некоторых случаях предлагалось это условие заменять условием пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций [1,3,7]. Однако, как показано в работе [8], условие пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций не находится в противоречии лишь с уравнением теории старения, а условие пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций – с уравнением теории течения, а, например, для теории упрочнения и теории наследственности ни одно из этих условий обобщения на случай сложного напряженного состояния не является приемлемым.

В настоящей работе предлагается реологическая модель в применении к поликристаллическим материалам, основанная на концепции скольжения в применении к любой теории ползучести. Для этого предварительно рассмотрим реологические свойства монокристаллов. Как известно [9,10], скольжение дислокаций у монокристаллов имеет место лишь в так называемых системах скольжения, то есть в определенных плоскостях и в определенных направлениях, что предопределяет анизотропию монокристалла. Обычно скольжение происходит по смежным атомным плоскостям, наиболее удаленным друг от друга, причем в направлениях с минимальным межатомным расстоянием. Например, для гранецентрированных кубических монокристаллов скольжение, как правило, имеет место в октаэдрических плоскостях {111} вдоль ребер октаэдра <110>. Правда, при высоких температурах скольжение наблюдалось и в других системах скольжения [11,12], однако скольжение во всех случаях имеет место лишь в определенных системах скольжения, причем оно может происходить одновременно в нескольких системах скольжения [10]. В работе [13] была построена модель ползучести для гранецентрированных кубических монокристаллов, в основе которой лежат следующие гипотезы:

1. Деформации ползучести имеют место лишь за счет скольжения в системе плоскостей {111} в системе направлений <110>.

2. Скольжение в некоторой системе определяется лишь историей изменения касательного напряжения, соответствующего этой системе скольжения.

3. Сопротивляемость кристалла скольжению одна и та же для всех систем скольжения.

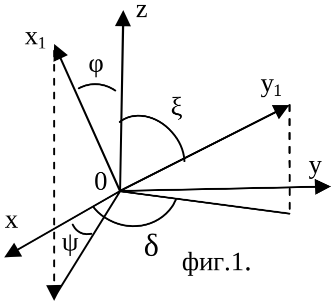
Фактически, у такого монокристалла всего 12 систем скольжения, причем общая деформация ползучести рассматривается как сумма вкладов от скольжений во всех системах скольжения, каждое из которых определяется лишь соответственным касательным напряжением. Согласно этой модели, если монокристалл нагружается напряжением $\sigma(t)$ в направлении [001], или, ([010] или [100]), то в этом же направлении осевые деформации $\varepsilon(t)$ выразятся так:

$$\pounds\left(t\right)=\frac{8}{\sqrt{6}}\Phi\left[\frac{\pm\left(t\right)}{\sqrt{6}}\right] \tag{1}$$

где Φ – некоторый оператор, определяющий скольжение в каждой системе скольжения для данного монокристалла. Если же монокристалл нагружается напряжением $\sigma(t)$ в направлении [110], то в том же направлении осевые деформации запишутся так:

$$\pounds\left(t\right)=\frac{4}{\sqrt{6}}\Phi\left[\frac{\pm\left(t\right)}{\sqrt{6}}\right] \tag{2}$$

Иначе говоря, реологическая податливость гранецентрированного монокристалла в направлении [100] должна быть ровно в два раза больше, чем в направлении [110], независимо от оператора Φ, вырождающегося в функцию при постоянном напряжении. В работе [14] дано экспериментальное подтверждение этого факта при постоянных и ступенчато-изменяющихся напряжениях, а также при переменных температурах. Это является подтверждением, что скольжение в кристаллах, действительно, определяется значением касательного напряжения, соответственного этой системе скольжения, причем скольжение в некоторой системе скольжения не влияет на скольжение в другой системе. Перейдем к рассмотрению поликристалла, представляемого составленным из неограниченного количества ориентированных монокристаллических зерен. Примем ортогональные оси координат x, y, z (фиг.1), связанные с рассматриваемым телом, и две взаимоперпендикулярные оси x_1, y_1, ориентация которых определяется углом ¨ между осями x_1 и z, углом ψ между проекцией оси x_1 на плоскость $x0y$ и осью x, а также углом ¶ между осями y_1 и z. Отметим, что задание ¨ , · и ¶ соответствует двум положениям оси y_1. Положим, что имеет место



фиг.1.

скольжение, соответственное осям x_1, y_1, определяемое касательным напряжением $\text{²}_{x_1 y_1}$. В условиях сложного напряженного состояния напряжение $\text{²}_{x_1 y_1}$ определится так:

$$\begin{aligned}
\text{²}_{x_1 y_1} &= \text{±}_x \sin\text{¨} \cos\text{·} \sin\text{¶} \cos\text{¢} + \text{±}_y \sin\text{¨} \sin\text{·} \sin\text{¶} \sin\text{¢} + +\text{±}_z \cos\text{¨} \cos\text{¶} + \\
&+\text{²}_{xy} \sin\text{¨} \sin\text{¶} \sin\left(\text{·} + \text{¢}\right) + \text{²}_{yz}\left(\sin\text{¨} \sin\text{·} \cos\text{¶} + \cos\text{¨} \sin\text{¶} \sin\text{¢}\right) + \\
&+\text{²}_{zx}\left(\sin\text{¨} \cos\text{·} \cos\text{¶} + \cos\text{¨} \sin\text{¶} \cos\text{¢}\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\cos\text{¢} &= -\frac{\cos\text{¨} \cos\text{·} \cos\text{¶}}{\sin\text{¨} \sin\text{¶}} \pm \sin\text{·} \sqrt{1 - \frac{\cos^2\text{¨} \cos^2\text{¶}}{\sin^2\text{¨} \sin^2\text{¶}}} \\
\sin\text{¢} &= -\frac{\cos\text{¨} \sin\text{·} \cos\text{¶}}{\sin\text{¨} \sin\text{¶}} \pm \cos\text{·} \sqrt{1 - \frac{\cos^2\text{¨} \cos^2\text{¶}}{\sin^2\text{¨} \sin^2\text{¶}}}
\end{aligned} \qquad (4)$$

Принимая, что деформации скольжения определяются некоторым временным оператором Π_t от $\text{²}_{x_1 y_1}$, рассмотрим вклад от этого скольжения в деформации:

$$\begin{aligned}
&\text{£}_z = \Pi_t\left(\text{²}_{x_1 y_1}\right)\cos\text{¨} \cos\text{¶},\ \text{£}_x = \Pi_t\left(\text{²}_{x_1 y_1}\right)\sin\text{¨} \cos\text{·} \sin\text{¶} \cos\text{¢} \\
&\text{£}_y = \Pi_t\left(\text{²}_{x_1 y_1}\right)\sin\text{¨} \sin\text{·} \sin\text{¶} \sin\text{¢}, \\
&\text{¥}_{xy} = \Pi_t\left(\text{²}_{x_1 y_1}\right)\left(\cos\text{·} \sin\text{¢} + \sin\text{·} \cos\text{¢}\right)\sin\text{¨} \sin\text{¶} \\
&\text{¥}_{yz} = \Pi_t\left(\text{²}_{x_1 y_1}\right)\left(\sin\text{¨} \sin\text{·} \cos\text{¶} + \cos\text{¨} \sin\text{¶} \sin\text{¢}\right) \\
&\text{¥}_{zx} = \Pi_t\left(\text{²}_{x_1 y_1}\right)\left(\sin\text{¨} \cos\text{·} \cos\text{¶} + \cos\text{¨} \sin\text{¶} \cos\text{¢}\right)
\end{aligned} \qquad (5)$$

Вследствие того, что у поликристалла зерна расположены хаотично, будем считать, что ориентация осей x, y является произвольной, и деформации поликристалла будем определять как сумму скольжений по всевозможным равноценным системам скольжения, то есть их будем определять путем интегрирования соотношений (4) с учетом (3) для всевозможных ориентаций x_1, y_1, причем оператор Π_t для всех систем скольжения, естественно, один и тот же. Пределы изменения углов φ, ψ и ¶ примем следующими: $0 \le \text{¨} \le \frac{\text{®}}{2}$, $0 < \text{·} < 2\text{®}$, $\frac{\text{®}}{2} - \text{¨} \le \text{¶} \le \frac{\text{®}}{2} + \text{¨}$. Как указывалось выше, каждой совокупности $\text{¨}, \text{·}$ и ¶ соответствуют по две ориентации x_1, y_1, доопределяемые выбором знака в соотношениях (4). Таким образом, для суммирования по всевозможным ориентациям осей x_1, y_1, необходимо интегрировать соотношения (5), принимая по два члена, соответственных разным знакам в формулах (4), если же в формулах (5) $\cos\delta$ или $\sin\delta$ отсутствует или же в формулах (4) члены, перед которыми имеется знак $(\pm)$, равны нулю, то, естественно, опять же следует взять по два одинаковых члена. Из (3) и (5) получим нижеследующие соотношения между деформацией ползучести и напряжением у изотропного поликристалла при осевом напряженном состоянии

$$\pm_x = \pm_y = ²_{xy} = ²_{yz} = ²_{zx} = 0: \tag{6}$$

$$£_z = 2\int_0^{\frac{®}{2}} \cos ¨ \, d¨ \int_0^{2®} d\cdot \int_{\frac{®}{2}-¨}^{\frac{®}{2}+¨} \cos ¶ \Pi_t \left(\pm_z \cos ¨ \cos ¶\right) d¶ =$$

$$= 4® \int_0^{\frac{®}{2}} \cos ¨ \, d¨ \int_{\frac{®}{2}-¨}^{\frac{®}{2}+¨} \cos ¶ \Pi_t \left(\pm_z \cos ¨ \cos ¶\right) d¶$$

Положим, что измеряемые деформации ползучести $£_z(t)$ у поликристалла при переменном напряжении $\pm_z(t)$ описываются линейным уравнением теории наследственности

$$£_z(t) = \int_0^t K(t,²)\pm_z(²)\,d² \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет место, если принять

$$\Pi_t(u) = \frac{4}{®\left(®^2 - 8\right)} \int_0^t K(t,²)u(²)\,d² \tag{8}$$

Оператор Π_t, определяющий скольжение, может быть определен из испытаний на ползучесть и при нелинейной степенной зависимости измеряемых деформаций от напряжения. Если деформации ползучести поликристалла описываются нелинейной теорией наследственности в форме

$$£_z(t) = a\int_0^t K(t,²)\left|\pm_z(²)\right|^{m-1} \pm_z(²)\,d² \tag{9}$$

то временной оператор $\Pi_t(u)$ определяется путем замены $\pm_z(t)$ аргументом $u(t)$ и замены параметра a параметром b, определяющимся по формуле

$$b = \frac{a}{8\text{®}\int\limits_{0}^{\frac{\text{®}}{2}} \cos^{m+1}\text{¨} \int\limits_{\frac{\text{®}}{2}-\text{¨}}^{\frac{\text{®}}{2}} \cos^{m+1}\text{¶}\, d\text{¶}\, d\text{¨}} \tag{10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 452с.
2. Джонсон А. Ползучесть металлов при сложном напряженном состоянии. Механика. М.: Изд. иностр. Литературы, 1962. №4. С.91-146.
3. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 263с.
4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1963. 400с.
5. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехтеориздат, 1952. 323с.
6. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова думка, 1969. 209с.
7. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455с.
8. Симонян А.А. О постановке задач нелинейной теории ползучести.//ДРАН (в печати).
9. Розенберг В.М. Ползучесть металлов. М.: Металлургия, 1967. 276с.
10. Ambrosi P., Schwink Ch. Plasticity of FCC single crystals observed by high voltage electron microscopy.Acta met. 1978. 26. №3.
11. Шмидт Е., Боас В. Пластичность кристаллов. ГОНТИ.1938.
12. Johnson R.D., Young A.P., Schwope A.D. Simposium on creep and Fracture of Metals at High Temperatures.NPL. 1954.p.25.
13. Симонян А.М, Симонян Н.М. К вопросу о реологии монокристаллов. //Изв. АН Арм ССР. Механика. 1985. Т.38. №4. С.38-48.
14. Симонян А.М. Исследование ползучести алюминиевых монокристаллов. //Изв. АН Арм ССР. Механика. 1979. Т.32. №6. С.27–40.

Сведения об авторе:

Симонян Арег Михайлович

Д.т.н., вед.н.с. Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр.Баграмяна, 24б
Тел.: (+37410)52-48-52
E-mail: Aregsimonyan@mechins.sci.am

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАБОТНОВА

Суворова Ю.В.
Москва, Россия

Вопросы прогнозирования характеристик материала на малые (включая ударные) и на длительные времена нагружения в настоящее время являются весьма актуальными. Проблема состоит в том, чтобы по кратковременным лабораторным экспериментам можно было бы определять параметры определяющего уравнения и далее пользоваться ими для оценки поведения материала при малых и при больших временах.

Наиболее перспективным подходом к анализу поведения вязкоупругих материалов является подход, основанный на представлениях о наследственном характере процесса деформирования (например, [1]).

Очень важным является вопрос о выборе ядра интегрального уравнения, которое могло бы описать поведение материала, как при малых, так и при больших временах.

Работами многих авторов установлено, что ядро интегрального уравнения должно содержать слабую особенность в нуле и вести себя как экспонента на бесконечности. Наиболее общим ядром такого типа является дробно-экспоненциальная функция Работнова

$$Э_{\alpha}\,(\beta,t)=t^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^{n}\,t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma\left[(1-\alpha)(n+1)\right]}\quad,\quad 0<\sim<1,\qquad \geq 0 \tag{1}$$

первый член которой представляет собой функцию Абеля с особенностью порядка α , а на бесконечности она дает логарифмический закон ползучести, хорошо подтвержденный многочисленными экспериментами. Трудности использования дробно-экспоненциальной функции начинаются с процедуры определения ее параметров. В работе [2] предложена процедура определения параметров, использующая интегральное преобразование Лапласа-Карсона. Однако фактически определялись лишь два параметра: λ и β, параметр сингулярности заранее задавался и для всех материалов имел одно и то же значение, равное 0,7. Кроме того, значение ε_0 (величина деформации, соответствующая времени t=0), имеющее в экспериментах весьма неопределенное значение, фиксировалось произвольно. Есть и другие работы [3,4], посвященные определению параметров, использующие приближенный графоаналитический метод и таблицы $Э_{\alpha}$ -функций.

Сейчас, в связи с развитием компьютерных технологий, появилась возможность построить процедуру построения параметров, свободную от недостатков предыдущих работ.

В настоящей работе, как и в [2], используется интегральное преобразование Лапласа-Карсона, а также использованы компьютерные программы Excel, Maple 6 и Curve Expert 1.

Для описания процедуры определения параметров были выбраны эксперименты на ползучесть материала Нейлон 6 и приведенные на рис.1. Для удобства расчетов построены изохронные кривые ползучести, рис.2. Определяющее уравнение выбиралось с учетом поведения нелинейности материала в виде, предложенным Работновым Ю.Н. [1]:

$$\varphi(\varepsilon)=\sigma+\lambda\int_0^t Э_\alpha(\beta,t-\tau)\sigma(\tau)d\tau$$

которое, с учетом (1) и того, что $\sigma = const$ в условиях ползучести, принимает вид

$$\varphi(\varepsilon)=\sigma\left[1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma\left[(1-\alpha)(n+1)+1\right]}\right] \tag{2}$$

При малых временах нагружения можно воспользоваться только первым членом суммы выражения (2). Тогда

$$\varphi(\varepsilon)=\sigma\left[1+\frac{\lambda}{\Gamma\left[(1-\alpha)+1\right]}t^{1-\alpha}\right] \tag{3}$$

Этот вид уравнения достаточно хорошо изучен, равно как и процедура определения его параметров [5,6]. В работе [6], в частности, разработана компьютерная программа определения параметров для случаев, когда экспериментальные кривые заданы в виде кривых ползучести либо диаграмм деформирования, полученных при нагружении с различными скоростями. Выражение (3) может быть использовано для определения параметра сингулярности α, что и было осуществлено в настоящей работе при помощи изохронных кривых ползучести рис.2: $\alpha = 0,85$. Далее это значение может быть принято и для уравнения (2).

Для определения остальных параметров использована следующая процедура. Сначала рассматривается кривая ползучести, полученная при низком уровне нагрузки, $\pm = 5$ МПа. Анализируя рис.2, можно заключить, что в этом случае можно воспользоваться линейным подходом и из (2) получить следующее выражение:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0\left[1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{(n+1)(1-\alpha)}}{\Gamma\left[(1-\alpha)(n+1)+1\right]}\right] \tag{4}$$

При помощи программы Curve Expert1 экспериментальная кривая ползучести при σ=5 МПа (рис.1) может быть с достаточной степенью точности аппроксимирована выражением $\varepsilon(t)=at^b$, где a=0,42, b=0,079. Применяя к обеим частям уравнения (4) преобразование Лапласа-Карсона, получим

$$a\frac{\Gamma(1+b)}{s^b}=\varepsilon_0\left[1+\frac{\lambda}{s^{1-\alpha}+\beta}\right] \tag{5}$$

Это выражение содержит три неизвестные величины: ε_0, λ и β. Для их определения необходимо составить три уравнения с различными значениями величины S. Для большей точности результатов брались различные тройки значений S, меньшие единицы, и из полученных решений было выбрано среднее. Следует подчеркнуть, что практически для всех выборок значения λ и β были практически одинаковыми: λ = 1,0475; β = 0,109. Значения ε_0 колебались в пределах от 0,2 до 0,5, но эти величины не оказывают влияния на дальнейшую процедуру расчетов.

Следующая задача состоит в построении кривой мгновенного деформирования $\varphi(\varepsilon)$. Для этой цели использовалась изохрона ползучести, соответствующая максимальному времени t=100 час. Зная все необходимые параметры α, β и λ, при помощи выражения (2) может быть построена кривая $\varphi(\varepsilon)$. Для осуществления дальнейших расчетов кривая $\varphi(\varepsilon)$ также аппроксимировалась степенной функцией $\varphi(\varepsilon)=20{,}37\varepsilon^{0{,}75}$. Таким образом, для расчета любой кривой ползучести материала Нейлон 6 можно теперь воспользоваться следующим уравнением:

$$20{,}37\varepsilon^{0{,}75}=\sigma\left[1+1{,}0475\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-0{,}109)^n t^{0{,}15(n+1)}}{\Gamma\left[0{,}15(n+1)+1\right]}\right]$$

На рис.1 приведены кривые ползучести, рассчитанные по этому уравнению при помощи программ Maple 6 и Excel и дано сопоставление их с экспериментальными результатами в случаях, когда σ=5, 10 и 15 МПа.

Выводы:

1. Сочетание математического анализа, основанного на использовании интегральных преобразований, с современными компьютерными технологиями позволяет получить результат (в данном случае, определение параметров ядра) достаточно ясными и простыми способами.

2. В случаях, когда кривая ползучести не может быть описана степенной функцией, следует выбирать такую, для которой преобразование Лапласа может быть осуществлено достаточно просто, например, экспоненту.

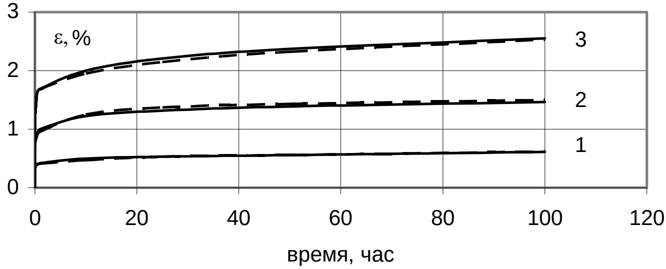


Рис.1. Кривые ползучести материала Нейлон 6.
Кривые 1, 2, 3 соответствуют нагрузкам в 5, 10 и 15 МПа

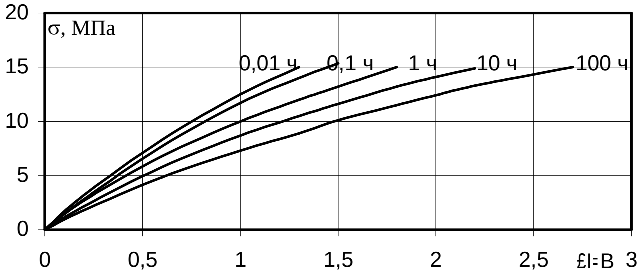


Рис.2. Изохронные кривые ползучести

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 373 с.
2. Звонов Е.Н., Малинин Н.И., Паперник Л.Х., Цейтлин Б.М. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ. //Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 5. С.72-76.
3. Ривкинд В.Н. Способ определения параметров дробно-экспоненциальной функции для описания кривой ползучести. // В кн.: Свойства

судостроительных стеклопластиков и методы их контроля. Ленинград, 1974, вып.3, с.111-114.
4. Гольдман Ф.Я., Щербак В.В., Кислов Е.Н., Дворский Е.И. Способ определения параметров для описания кривой ползучести упруго-наследственных материалов на основе таблиц $Э_{\sim}$ -функций Работнова. // Машиноведение. 1977. № 6. С.77-82.
5. Суворова Ю.В., Осокин А.Е. Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров. //ПММ. 1978. Т.42. Вып.6. С.1107-1114.
6. Мосин А.В. Вычисление параметров нелинейного определяющего уравнения наследственного типа. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 2. С.83-88.

<u>Сведения об авторе:</u>

Суворова Юлия Васильевна

Д.т.н., главный научный сотрудник лаборатории механики композиционных материалов, профессор
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,Москва, Россия
Адрес: Малый Харитоньевский пер., д.4
Москва РОССИЯ 101990
Тел.: (+7499) 135-78-30 (раб.), (+7-903)-684-75-68 (моб.)
E-mail: juliasuvorova@mail.ru

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Хачатрян А.М., Товмасян А.Б.

Степанакерт, НКР

Рассматривается вопрос определения напряженно-деформированного состояния анизотропной термоупругой пластинки, когда на одной из лицевых поверхностей заданы значения напряжений, а на другой – нормальная компонента вектора перемещения и тангенциальные напряжения. Исследование проводится методом асимптотического интегрирования нелинейных уравнений трехмерной задачи теории упругости. Найдена асимптотика и построено решение, соответствующее внутренней задаче. Получены рекуррентные формулы, позволяющие определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения внутренней задачи.

Классические краевые задачи полос, пластин и оболочек асимптотическим методом решены в [1,2]. Асимптотический метод использован для решения второй и смешанных краевых задач в линейной постановке в [2,3]. В работе [4] тем же методом решена смешанная трехмерная внутренняя задача для анизотропной термоупругой пластинки. Метод оказался эффективным также для решения задач для анизотропных полос и пластин по геометрически нелинейной теории упругости [5,6].

Требуется найти решение геометрически нелинейных уравнений пространственной задачи термоупругости анизотропного тела [7] в области $\Omega=\left\{(x,y,z);\ x,y\in\Omega_0,|z|\le h,\ h<<a\right\}$, где Ω_0 – область, занятая срединной поверхностью пластинки, a – характерный тангенциальный размер пластинки. Считается, что анизотропия – самая общая, на пластинку действуют заданные объемные силы с компонентами $F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$ и температурные воздействия. На лицевых поверхностях заданы условия

$$\begin{aligned} &\pm_{xz}=\pm_{xz}^{+}(x,y),\ \pm_{yz}=\pm_{yz}^{+}(x,y),\ \pm_{z}=\pm_{z}^{+}(x,y) \quad \text{при } z=h \\ &w=\pounds^{3}w^{-}(x,y),\ \pm_{xz}=\pm_{xz}^{+}(x,y),\ \pm_{yz}=\pm_{yz}^{+}(x,y) \ \text{при } z=-h \end{aligned} \tag{1}$$

Условия на боковой поверхности будем считать пока произвольными.

Чтобы решить поставленную краевую задачу в уравнениях и соотношениях термоупругости, перейдем к безразмерным координатам $\xi=x/a,\eta=y/a,\zeta=z/h$ и безразмерным перемещениям $U=u/a,V=v/a$,

$W = w/a$. В результате получим сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/a$ систему. Решение этой системы складывается из решения внутренней задачи и погранслоя [1-3]. Решение внутренней задачи ищем в виде

$$Q = \varepsilon^{q_i} \sum_{s=0}^{N} \varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \qquad (2)$$

где Q – любое из искомых величин, q_i – целые числа, которые должны быть такими, чтобы получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Эта цель достигается при

$$q_i = 3 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, U, V, W$$

$$q_i = 4 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \qquad (3)$$

Подставляя (2) в вышеуказанные уравнения, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, с учетом (3), получим новую систему уравнений относительно $Q^{(s)}$. Из этой системы определяются все неизвестные величины с точностью до некоторых произвольных функций, зависящих только от переменных ξ, η. Выведенные уравнения и соотношения в нулевом приближении совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями анизотропных пластин при линейной постановке задачи [4]. Для последующих приближений меняются лишь правые части уравнений, куда входят члены, обусловленные геометрически нелинейностью уравнений теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л.. Теория тонких оболочек. М.:Наука, 1976. 512 с.
2. Агаловян Л.А.. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек.Ереван:Изд. “Гитутюн” НАН РА, 2004. 468с.
4. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б.//Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. № 3-4. С.3-11.
5. Агаловян Л.А., Хачатрян А. М. // Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. естест. наук. 2001, Спецвыпуск, с. 16-18.

6. Хачатрян А.М., Товмасян А.Б.//Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. V Межд. конф. 1-7 октября, Горис, 2005г. Изд."Гитутюн" НАН РА. Ереван, 2005.
7. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948.

<u>Сведения об авторах:</u>

Хачатрян Александр Мовсесович

Д.ф.-м.н., профессор кафедры инженерии АрГУ
Ученый секретарь АрГУ
Адрес: . НКР, г. Степанакерт, Мхитара Гоша 5
Тел.: (097)201949
E-mail:alexkhach49@yandex.ru

Товмасян Артур Бабкенович

К.ф.-м.н., доцент кафедры инженерии АрГУ
Декан инженерного факультета АрГУ
Адрес: НКР, г.Степанакерт, Мхитара Гоша 5
Тел.: (097)203242

О КРИТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОТЛИЧНОМ ОТ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ПОКАЗАТЕЛЕ СИНГУЛЯРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ

Хачикян А.С.

Ереван, Армения

Предлагается способ определения критического значения коэффициента интенсивности напряжений (K_c) при отличном от ½ степени сингулярности напряжений.

1. По современным представлениям конструкционные материалы всегда обладают разными дефектами – возможными зародышами трещин: вырезы, инородные включения, острые углы, места резкого изменения физико-механических характеристик материала.

В окрестности этих образований возникают концентрационные или сингулярные распределения напряжений, ведущих к появлению и развитию трещин и приводящих конструкцию к разрушению. Основную часть срока службы конструкция работает при устойчивом росте трещин до образования магистральной трещины и внезапного разрушения конструкции. Эти процессы исследуются механикой упруго-пластического разрушения [1].

В механике разрушения исключительно важную роль играют коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), выступающие в качестве основной характеристики трещиностойкости материала.

В самом определении КИН содержится важное предположение: они определяются как предел коэффициента при сингулярности функции, выражающего величину напряжений в окрестности сингулярной точки (линии) в предположении, что материал ведет себя линейно упруго вплоть до сингулярной точки, где напряжения становятся бесконечными. Несмотря на такое нереалистическое предположение КИН реально описывают поведение материала конструкции в пределах процесса устойчивого роста трещин перед упруго-пластическим разрушением конструкции (детали). Это хорошо иллюстрируется известной формулой Париса [2] для определения скорости роста усталостной трещины.

$$\frac{dl}{dN} = A(\Delta K)^n, \qquad (1)$$

где $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ – перепад (размах) коэффициента интенсивности напряжений за один цикл нагружения, N – число циклов нагружения, l – длина трещины, A, n – эмпирические коэффициенты. Для многих материалов n находится в пределах от 2 до 7. Эта несложная формула описывает поведение очень разных материалов, что указывает на один и тот же, или близкий механизм процесса разрушения в интервале устойчивого роста трещины. В механике разрушения эти механизмы описываются образованием зон пластических деформаций впереди вершины растущей трещины. Хотя структура материалов в микромасштабе (субзерна, полосы скольжения, зерна, включения, пустоты) очень разные, в области больших пластических деформаций (до 10^{-2} см) и в упругопластической области (до 10^{-1} см) процессы имеют много общего, о чем свидетельствуют экспериментальные подтверждения формулы (1).

Поля напряжений в окрестности вершины трещины в упругом теле в общем случае описываются суперпозицией трех распределений вида

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f(\theta) \qquad (2)$$

где r – расстояние от вершины трещины, θ – угол направления подхода к вершине трещины, K – предельное значение коэффициента при стремлении r к нулю.

В соответствии с тремя типами напряженного состояния (отрыв, поперечный сдвиг, продольный сдвиг) различают коэффициенты интенсивности K_I, K_{II}, K_{III}.

Мы рассмотрим общий вид (2) и также не будем рассматривать влияние направления приближения к сингулярной точке и вместо (2) рассмотрим выражение

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \cdot r^{-\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

Таким образом, напряженное состояние около вершины трещины характеризуется в основном величиной коэффициента K и расстоянием до вершины трещины r. Критические значения этих величин и определяют условия распространения трещины.

2. Известно, что во многих случаях степень сингулярности отлична от 1/2 [3-5]. Такое напряженное состояние имеет место около вершины клиновидной области (однородной или кусочно-однородной), в окрестности трещины, находящейся на поверхности раздела двух сред (с разными упругими характеристиками) или выходящей на эту поверхность. В таких случаях имеем вместо (3)

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \cdot r^{-\alpha} \qquad (4)$$

где ª – корень определенного трансцендентного уравнения, который зависит от упругих свойств материалов, геометрии соединений, а также типа граничных условий. Соотношение (4) отличается от (3) появлением нового параметра ª. Традиционно критические значения коэффициентов K_c определяются эксперименально при ª $=1/2$ для вершины трещины.

Отметим, что ª меняется в пределах: $0<$ ª $<1/2$ для одномерных задач, $0<$ ª <1 для двухмерных, $0<$ ª $<3/2$ для трехмерных задач согласно энергетическому критерию. Отметим также, что и эти интервалы для ª получены в условиях предположения о линейной упругости материала вплоть до сингулярной точки.

Отличие коэффициентов K в (3) и (4) в дальнейшем отметим индексами 0.5 и ª, соответственно.

3. Схематически расчеты прочности в механике разрушения сводятся к экспериментальному определению критического значения коэффициента интенсивности $K_c = K_{c\,0.5}$ и сравнения с ним текущего значения $K_{0.5}$ при данной нагрузке, определенной по расчету, например, методом конечных элементов.

При этом используются разновидности формул (1), (2) и критические КИН в согласии с условиями работы конструкции (коррозия, высокие температуры) и типы нагрузки. Например, при циклической нагрузке вместо K_c используется пороговое значение КИН при усталостном разрушении K_{th} и вместо $\pm_T$ ставится предел усталости $\pm_0$.

Сравнение формул (3) и (4) показывает, что они отличаются только градиентом напряжений в окрестности сингулярной точки и физические процессы разрушения могут быть одинаковыми. Достижение критических значений величин в (3), возможно связано с достижением критического значения напряжений на критическом расстоянии $r_{кр}$. Вопрос существования определенного критического значения $r_{кр}$ обсужден в [6].

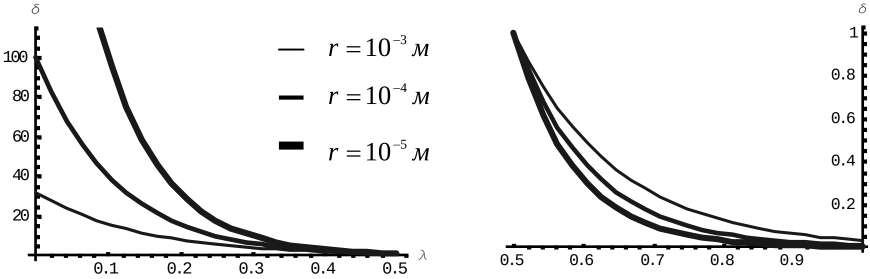
Полагая, что отношения КИН, определенные в случаях (3) и (4) не меняются, получим

$$K_{cª} = K_{c\,0.5} \cdot r_{kp}^{\,ª-0.5} \tag{5}$$

где

$$r_{kp} = \frac{K_{0.5}}{2®\pm_T^2} \tag{6}$$

Прямое использование формулы (4) потребует экспериментального определения $K_{ª}$ при каждом ª .



фиг. 1. Значения ¢ $= K_{c ª} / K_{c0.5}$ при $0 <$ ª < 1.

В приведенной в [7, стр. 432] формуле в задаче определения КИН около вершин трещины, перпендикулярной к границе и выходящей вершиной A на линию раздела изотропной и анизотропной пластин (полуплоскостей), КИН имеет вид

$$K_{1,A} = \lim \sqrt{2®}\,(-x)^{-ª} \cdot ±_{y}^{I}\Big|_{y=0} \tag{7}$$

Использование в этой ситуации K_c, определенной экспериментами в условиях (3), не может быть оправданным.

Зависимость (5) от ª при $r = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ показана на фиг. 1.

Учет влияния типа напряженного состояния в окрестности сингулярной точки (4), (7) на критическое состояние предлагается в виде (5). Почти все проведенные экспериментальные определения K_c относятся к виду (3). Некоторые вопросы прочности напряжений вида (4) рассмотрены в [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.
2. Paris P.C. Fracture Mechanics Approach to Fatigue, Sagamore Army Matls Research Conference, 10-th Fatague-Interdisciplinary Approach, Proc. Aug. 13-16, 1963, p. 107-132.
3. Williams M.L. Stress Singularities resulting from various Boundary Conditions in angular corners of plates in extention. J. of Appl. Mech., 19, 1952, p. 526-528.
4. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1987. 338 с.

5. Боджи Д.В. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из гранией упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. // Прикладная механика. Тр. Америк. о-ва инж.-механиков, се. Е, 1971. Т.38. №2. С.87-96.
6. Taylor D. The theory of distances, Engineering Fracture Mechanics 75 (2008), p.1696-1705.
7. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений под. ред. Мураками Ю., в двух томах. М.: Мир, 1990. Т. I. 448 с.
8. Давидян Д.Б., Домбаева И. А., Хачикян А.С., Ширинян Р.А. О влиянии напряженного состояния краев поверхности стыка на сопротивление усталости соединений из разнородных материалов. //Изв. АН Арм ССР. Сер.техн. наук. 1989. Т.XLII. №4. С. 195-198.
9. A.S. Khachikyan, K.H. Karapetyan, R.A. Shirinyan, V.V. Hakobyan Modeling of behaviour of the flat friction lining under the external thermal and mechanical action In the Lecture Notes in Applied and Computional Mechanics V-27, 2006 (3-540-31760-0), Springer, p. 373-374.

Сведения об авторе:

Хачикян Альберт Серобович

К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник
Института механики НАН РА
Пр. Маршала Баграмяна 24 Б, Ереван, Армения, 0019
Тел. (37410) 56-81-88 (раб.), 74-02-89 (дом.)
E-mail: albert@mechins.sci.am

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ МЫШЕЧНОГО СОКРАЩЕНИЯ

Цатурян А.К., Кубасова Н.А., Шестаков Д.А., Шворина Е.Н., Бершицкий С.Ю.

Москва, Екатеринбург– Россия

Основное механическое свойство мышцы – ее способность развивать активные напряжения и деформации за счет прямого преобразования химической энергии в механическую работу. Эта способность связана со специальными белками – молекулярными моторами. Собственно моторным белком мышц является миозин, который движется по «рельсам», а точнее – по спиральным нитям, сделанным из другого белка – актина. В поперечно-полосатых мышцах – сердечной и скелетной – актин и миозин образуют высокоупорядоченную структуру, благодаря чему нанометровые перемещения и пиконьютонные силы отдельных молекул складываются в макроскопические деформации до 50% и напряжения до 500 кПа. Горючим для этого мотора является аденозин-трифосфорная кислота, АТФ. Расщепление одной молекулы АТФ сопровождается выделением свободной энергии до 10^{-19} Дж, причем до 50% этой энергии может быть преобразовано в механическую работу мышцы.

Математические модели механики мышц можно условно разделить на две группы. К первой относятся континуальные феноменологические модели мышцы как сплошной среды. Такие модели учитывают упругие и вязко-упругие свойства мышцы, ее способность к развитию активных напряжений и деформаций, а в некоторых случаях и механохимические реакции, обеспечивающие механическую активность мышц. В рамках континуальных моделей можно учесть особенности регуляции сокращения скелетных, сердечной или гладких мышц, которая осуществляется изменением концентрации ионов кальция в мышечных клетках с участием различных белковых систем [1, 2]. Такие модели можно использовать для постановки и решения задач о сокращении мышц в различных экспериментальных условиях для изучения локомоций животных и человека, для моделирования сокращений сердца в норме и при патологиях, для исследования регуляции просвета кровеносных сосудов и др. [1, 2].

Мышечная ткань анизотропна, точнее, трансверсально изотропна. Однако практически все эксперименты с мышцами сводятся к изучению одноосного напряженно-деформированного состояния, что затрудняет разработку тензорно-инвариантных моделей, необходимых для рассмотрения ряда задач. Предположение о квазиодномерности активных напряжений, подтвержденное экспериментами с растяжением и кручением скелетной мышцы, позволяет обойти эту проблему и описать активные напряжения и деформации скалярными параметрами, которые можно определить по результатам одноосных экспериментов [3].

К недостаткам феноменологических моделей следует отнести недостаточно адекватное описание ряда нелинейных эффектов и тонких особенностей релаксационного поведения образцов мышцы в экспериментах со скачкообразными изменениями деформации, нагрузки или других физико-химических параметров. Кроме того, эти модели не описывают тонкие молекулярные структурные и биохимические процессы, лежащие в основе сокращений мышцы, которые удается проследить в рентгеноструктурных и спектроскопических экспериментах.

Модели второй группы направлены, главным образом, на исследование молекулярных механизмов мышечного сокращения. В них рассматривается кинетика механохимических реакций миозина с актином и с АТФ и влияние микро-, а точнее, наноскопических механических процессов на эту кинетику. Первая модель такого типа была предложена еще в 1957 году [4]. По мере углубления знаний о деталях работы миозинового мотора эти модели усложнялись и стали включать в себя все больше кинетически различных состояний, порождая все более сложные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Круг экспериментальных данных, описываемых такими моделями, также расширялся и стал включать в себя не только чисто механические испытания, но и влияние концентраций участников реакции гидролиза АТФ на механические свойства мышц [5-7].

До недавнего времени надмолекулярные структуры мышцы – толстые (миозиновые) и тонкие (актиновые) нити – считали нерастяжимыми, а единственной упругой структурой, которая определяет динамическую жесткость мышцы, считали миозиновые молекулы. Однако эксперименты показали, что растяжимость нитей примерно такая же, как и растяжимость миозиновых молекул [8-10]. Более того, оказалось, что присоединение молекул миозина к актину само по себе растягивает нити актина [11]. Учет этих факторов в кинетических моделях приводит к постановке краевых задач, в которых в граничные условия входит функционал от искомой функции [12, 13]. Эти модели позволили объяснить такие экспериментальные данные, как отставание временного хода развития напряжения в ответ на различные механические, химические и температурные воздействия от структурных наноскопических процессов, лежащих в основе сокращения мышцы [14].

Имеется еще один класс моделей, восходящих к работе [15] и развитых в статье [16], которые занимают промежуточное положение между феноменологическими и кинетическими моделями. В этих моделях вместо учета индивидуальных деформаций миозиновых молекул рассматривается лишь средняя по ансамблю деформация и предполагается, что скорости перехода из одного биохимического или механического состояния молекулярного мотора в другое зависят лишь от этой средней деформации. С математической точки зрения модель сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет ставить и решать достаточно сложные задачи, описывающие мышцы со сложной геометрией, например, камеры сердца или совокупность нескольких мышц конечности. Несмотря на свою простоту, такие модели адекватно описывают результаты широкого круга экспериментов, в том числе стационарную зависимость напряжения в мышце от скорости ее деформации, сложный временной ход релаксации напряжения в ответ на ступенчатую деформацию, включая сопутствующие этому явлению нелинейные эффекты, а также зависимости действительной и мнимой частей модуля упругости мышцы от частоты синусоидальной деформации малой амплитуды [15-16]. В последнем случае имеются в виду данные экспериментов, показавших, что в некотором диапазоне частот гармонических деформаций порядка 1-10 Гц мышца ведет себя как материал с отрицательной вязкостью, т.е. совершает положительную работу в цикле растяжение-укорочение [17].

Работа была поддержана грантами РФФИ и Совета по грантам при Президенте РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С.А., Цатурян А.К. Современные проблемы биомеханики. 1983, **1**, 17-43.
2. Tsaturyan A.K. Contemporary problems of biomechanics. 1990. Mir Pblr., Moscow, 127-41.
3. Бершицкий С.Ю., Цатурян А.К. ДАН СССР, 1981. **259**, 53-6.
4. Huxley A.F. Progr. Biophys. Biophys. Chem. 1957, **7**, 255-318.
5. Smith D., Geeves M.A. Biophys. J. 1995, **69**, 538-53.
6. Цатурян А.К. Биофизика, 1991, **36**, 660-7.
7. Цатурян А.К., Антипов Д.М. Биофизика, 1991, **36**, 668-75
8. Huxley E.H., Stewart A., Sosa H., Irving T. Biophys. *J.* 1994, **67**, 2111-21.
9. Wakabayashi K., Sugimoto Y., Tanaka H., Ueno Y., Takezawa Y., Amemiya Y. Biophys. *J.* 1994, **67**, 2422-35.
10. Linari M., Dobbie I., Reconditi M., Koubassova N., Irving M., Piazzesi G., Lombardi V. Biophys. *J.* 1998, **74**, 2459-73.
11. Tsaturyan A.K. Bershitsky S.Y., Koubassova N., Narayanan T., Roessle M., Ferenczi M.A. Biophys. *J.* 2005, **88**, 1902-10.
12. Шестаков Д.А., Цатурян А.К. Биофизика, 1998, **43**, 329-34.
13. Шворина Е.Н. Труды конференции-конкурса молодых ученых Института механики МГУ. 2004. 177-82.
14. Shestakov D.A., Tsaturyan A.K. J. Muscle Res. Cell Motil. 1999, **20**, 825-6.
15. Thorston J., White D. C. *J.* Physiol. 1984, **343**, 59-84.
16. Razumova M.V., Bukatina A.E., Campbell K.B. *J.* Appl. Physiol. 1999. **87**, 1861-76.
17. Kawai M. J. Muscle Res. Cell Motil. 1986, **7**, 412-34.

Сведения об авторах:

Цатурян А.К.
Д.ф.-м.н., в.н.с., Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
Адрес: Москва 119992, Мичуринский просп. д. 1
Тел./факс: +7 (495) 939 1252
E-mail: tsat@imec.msu.ru

Кубасова Н.А.
К.ф.-м.н., с.н.с., Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
Адрес: Москва 119992, Мичуринский просп. д. 1
Тел./факс: +7 (495) 939 1252
E-mail: natalia@imec.msu.ru

Шестаков Д.А.
К.ф.-м.н., с.н.с., Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
Адрес: Москва 119992, Мичуринский просп. д. 1
Тел./факс: +7 (495) 939 1252
E-mail: shestakov:imec.msu.ru

Шворина Е.Н.
М.н.с., Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
Адрес: Москва 119992, Мичуринский просп. д. 1
Тел./факс: +7 (495) 939 1252
E-mail: xelenka@imec.msu.ru

Бершицкий С.Ю.
Д.биол. н., заведующий лаборатории
Институт иммунологии и физиологии УрО РАН
Адрес: Екатеринбург 620219, ул. Первомайская, д. 91
Тел.:+7 (343)3741316
E-mail: s.bershitsky@iip.uran.ru

ABOUT DYNAMIC CONTACT PROBLEMS FOR BODIES WITH ELASTIC COVER PLATE

Nugzar Shavlakadze
Tbilisi, Georgia

The problems of the transfer of loads to elastic bodies from thin-shelled elements (cover plate) under action of harmonic forces belong to non-classical dynamic contact problems. Such type problems consist in determination of distribution laws for corresponding contact stresses along contact line, when on upper bound of cover plate act harmonic horizontal and vertical forces.

Differential equations of the oscillations of the cover plate have the form

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{°_1}{E_1}\frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{E_1 h_1}{}^{2}(x,t) - \frac{{}^{2}{}_0 ¢(x)e^{-i\mu t}}{E_1 h_1} \\ &D\frac{\partial^2 v^{(1)}(x,t)}{\partial x^2} - °_1 h_1 \frac{\partial^2 v^{(1)}(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) - p_0 ¢(x)e^{-i\mu t} \end{aligned} \qquad (1)$$

where $u^{(1)}(x,t)$ and $v^{(1)}(x,t)$ are respectively horizontal and vertical displacements of the points of the cover plate, $°_1$ - density of the material and E_1 – elasticity module for cover plate. ${}^{2}(x,t)$ and $p(x,t)$ are respectively unknown tangential and normal contact stresses in point x at time t , acting on the cover plate along its joint line with a body. D is the bending rigidity and h_1 - the thickness of the cover plate. ${}^{2}{}_0 ¢(x)e^{-i\mu t}$ and $p_0 ¢(x)e^{-i\mu t}$ are respectively horizontal and vertical harmonic forces with frequency μ concentrated in the origin of coordinates.

Depending on conditions of the problem the components of displacement of the points of elastic body are represented by amplitudes of unknown contact stresses. In the problem for half-plane, which bound is strengthened by infinite cover plate, by use of Lame's equations the amplitudes of horizontal and vertical displacements of boundary points of elastic half-plane are represented by the amplitudes of tangential and normal contact stresses with formulas

$$\begin{aligned} &u^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(|x-s|)^{2}(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(|x-s|)p(s)ds \\ &v^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_2(|x-s|)^{2}(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(|x-s|)p(s)ds, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \qquad (2)$$

$$K_1(x) = \frac{1}{2®}\int_{-\infty+i£}^{\infty+i£} \frac{¥_2 p_2^2 e^{-i\sim x} d\sim}{\Delta(\sim)}$$

$$K_2(x) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{\xi(2\xi^2 - p_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2)e^{-i\xi x} d\xi}{\Delta(\xi)}$$

$$K_3(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{\gamma_1 p_2^2 e^{-i\xi x} d\xi}{\Delta(\xi)}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\xi^2 - p_1^2}, \qquad \gamma_2 = \sqrt{\xi^2 - p_2^2}$$

$$p_1 = \frac{\omega}{c_1}, \qquad p_2 = \frac{\omega}{c_2}, \qquad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2}}, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}}$$

$$\Delta(\xi) = 4\mu_2\xi^2\gamma_1\gamma_2 - \mu_2(2\xi^2 - p_2^2)^2, \qquad \varepsilon > 0$$

λ_2, μ_2 - are Lame's parameters, ρ_2 - the density of half-plane material.

Due to the contact conditions of the cover plate with plate

$$u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x), \qquad v^{(1)}(x) = v^{(2)}(x)$$

By formulas (1-2) for determination of amplitudes of contact strains one may receive the system of integral differential equations. In different cases of the problem the received system of equations can be investigated by exact or approximate methods.

Information about autor:

Shavlakadze Nugzar

Senior Researcher, professor
A. Razmadze Mathematical Institute, Georgian Technical University
Adress:1, Aleksidze St., Tbilisi 0193
Tel.: (995 32) 942910, (995 32) 334951
E-mail: nusha@rmi.acnet.ge

КОЛЕБАНИЯ РОТОРА НА ШАРИКОПОДШИПНИКАХ С РАДИАЛЬНЫМ ЗАЗОРОМ

Шекян Г.Г., Захарянц В.В.
Ереван, Армения

Опыт эксплуатации высокоскоростных машин, а также результаты экспериментальных исследований указывают на то, что эксплуатационный зазор, нелинейный характер контактной жесткости и качество изготовления подшипников оказывают решающее влияние на динамику гибких роторов и машин в целом. Для исследования влияния указанных факторов рассмотрим ротор машины, покоящийся на подшипниках качения под действием силы тяжести (рис. 1). При наличии радиального зазора Δ внутреннее кольцо подшипника в некоторый момент времени "перекатывается" через шарики, а при дальнейшем вращении "приседает" между шариками на величину [1]

$$\Delta = e/2\left(1/\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right) \tag{1}$$

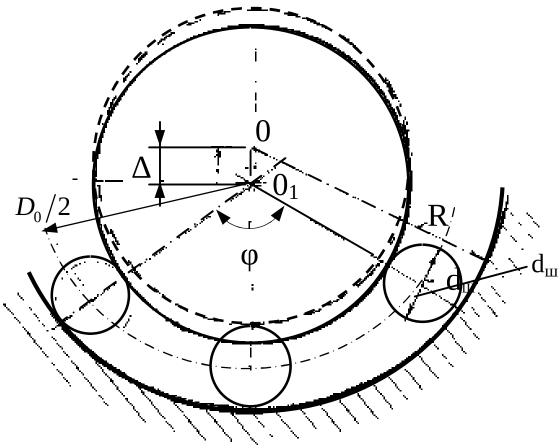


*Рис. 1 Схема перемещения ротора в подшипниках качения при эксплуатационном зазоре **е**.*

Траектория колебания центра тяжести ротора по оси y представляет собой обращенную синусоиду, описываемую уравнением $y = \Delta\left(\sin\frac{\pi x}{\lambda}\right)$, где $x = \frac{\omega_c D_0 t}{2}$ – путь шарика, ω_c, ω_0 – угловые скорости вала и сепаратора:

$\omega_c = \frac{\omega_0}{2} \times \left(1 - \frac{d_ш}{D_0}\right)$; $\lambda = \frac{\pi D_0}{z}$ z – число шариков и расстояние между ними, D_0 – диаметр средней окружности сепаратора.

При “перекатывании” ротора через шарики на статор действует периодическая возмущающая сила [1]

$$p(t) = \frac{m_p \Delta \omega_c^2 z^2}{4} \left| \sin \frac{\omega_c z t}{2} \right|$$

Разложив $p(t)$ в ряд Фурье, получим:

$$p(t) = \frac{m_p \Delta A^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos iAt$$

где i – номер соответствующей гармоники возмущающей силы: A и B_i – постоянные коэффициенты: $A = \frac{\omega_0}{2}\left(1 - \frac{d_ш}{D_0}\right) z$; $B_i = \frac{1}{4i^2 - 1}$.

Дифференциальное уравнение движения уравновешенного ротора с учетом нелинейной жесткости и радиального зазора подшипников будет [2]

$$\begin{cases} m_p \ddot{y}_1 = P_p - F_{y_1} + p(t) \\ F_{y_1} = F_{y_2} \end{cases} \tag{2}$$

где m_p, P_p – масса и вес ротора:

$$P_p = C_p \left(\lambda_{1ст} - \lambda_{2ст}\right) \tag{3}$$

C_p – жесткость ротора, $\lambda_{1ст}, \lambda_{2ст}$ – перемещение ротора и упругая деформация подшипника от статически приложенных сил по направлению оси y, F_{y_1} –восстанавливающая сила, обусловленная упругостью ротора [1]:

$$F_{y_1} = C_p \left(y_1 - y_2 + \lambda_{1ст} - \lambda_{2ст}\right) \tag{4}$$

y_1, y_2 – перемещение ротора и упругая деформация подшипника по оси y, F_{y_2} – восстанавливающая сила, обусловленная контактной упругостью подшипников

$$F_{y_2} = CB\left(y_2 - \lambda_{2ст}\right)^{3/2} \tag{5}$$

C –коэффициент Герца, B – периодическая функция времени:

$$B = B_0 - B_1 \cos \omega_0 t\,,\ B_0 = \cos^{5/2} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \cos^{5/2} \varphi\right) \tag{6}$$

$$B_1 = \cos^{5/2}\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \cos^{5/2}\varphi\right)$$

Подставляя (3)÷(6) в (2) и разлагая функцию $\left(y_2 + \lambda_{2\text{ст}}\right)^{3/2}$ в ряд Тейлора, получим:

$$\begin{cases} \ddot{y}_2 + \ddot{\xi} = \omega_1^2\xi + p'(t) \\ C_p\xi = \left(h^2 - q\cos\omega_0 t\right)y_2 - \vartheta\cos\omega_0 t \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$\xi = y_1 - y_2; \qquad 3/2\,CB_0\lambda_{2\text{ст}}^{1/2} = h^2; \qquad 3/2\,CB_1\lambda_{2\text{ст}}^{1/2} = q$$

$$CB_1\lambda_{2\text{ст}}^{3/2} = \vartheta; \qquad C_p/m_p = \omega_1^2; \qquad p'(t) = \frac{p(t)}{m_p}$$

Ограничимся нахождением периодического решения (7) методом малого параметра Пуанкаре [3]. Предполагая, что величина q мала по сравнению с h^2, представим ξ и y_2 в виде ряда

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \xi_n, \qquad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_{2n} \qquad (8)$$

Подставив (8) в (7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q, получим систему n линейных дифференциальных уравнений, решения которых подставим в (8). Опустив члены, не зависящие от времени, а в зависящих–сохранив только члены низшей степени по малому параметру q, получим:

$$y_1 = y_{10} + y_1'; \qquad y_2 = y_{10} + y_1' \qquad (9)$$

$$y_{10} = \frac{\vartheta\omega_1^2\cos\omega_0 t}{\left[h^2 - \omega_1^2 - \omega_0^2\left(h^2 + C_p\right)\right]} + \frac{A^2\Delta\left(h^2 + C_p\right)}{\pi} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i \cos iAt}{\left[h^2\omega_1^2 - i^2A^2\left(h^2 + C_p\right)\right]}$$

$$y_1' = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\left\{D_n'\cos n\omega_0 t + D_{ni}'\cos\left[(n-1)\omega_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + iA\right]t + D_{ni}'\cos\left[(n-1)\omega_0 - iA\right]t\right\}$$

$$D_n = \vartheta\omega_1^2 \prod_{n=2}^{n} \frac{\omega_1^2 - (n-1)^2 \omega_1^2}{2^{n-1}\left[n^2\omega_1^2 - \omega_0^2\left(h^2 + C_p\right)\right]} \times$$

$$\times \frac{\omega_1^2 - (n-1)^2 \omega_1^2}{\left[h^2\omega_1^2 - n\omega_0^2\left(h^2 + C_p\right)\right]}$$

$$D_n' = \frac{A^2 \Delta C_p \omega_1^2}{\pi} \prod_{n=2}^{n} \frac{B_i\left\{\omega_1^2 - \left[(n-2)\omega_0 + iA\right]^2\right\}}{2^{n-1}\left(\omega_1^2 - i^2A^2\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\left[h^2\omega_1^2 - i^2A^2\left(h^2 + C_p\right)\right]\left\{h^2\omega_1^2 - \left[(n-1)\omega_0 + iA\right]^2\left(h^2 + C_p\right)\right\}}$$

$$D_n'' = \frac{A^2 \Delta C_p \omega_1^2}{\pi} \prod_{n=2}^{n} \frac{B_i\left\{\omega_1^2 - \left[(n-2)\omega_0 - iA\right]^2\right\}}{2^{n-1}\left(\omega_1^2 - i^2A^2\right)\left[h^2\omega_1^2 - i^2A^2\left(h^2 + C_p\right)\right]} \times$$

$$\times \frac{1}{\left\{h^2\omega_1^2 - \left[(n-1)\omega_0 - iA\right]^2\left(h^2 + C_p\right)\right\}}$$

$$y_{20} = \frac{\vartheta\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)}{\left[h^2\omega_1^2 - \omega_0\left(h^2 + C_p\right)\right]} cos\omega_0 t +$$

$$+ \frac{A^2 \Delta C_p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_i \cos iAt}{\left[h^2\omega_1^2 - i^2A^2\left(h^2 + C_p\right)\right]}$$

$$y_2' = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-1}\left\{E_n \cos n\omega_0 t + E_{ni}' \cos\left[(n-1)\omega_0 + iA\right]t +\right.$$

$$\left. + E_{ni}'' \cos\left[(n-1)\omega_0 - iA\right]t\right.$$

$$E_n = \vartheta \prod_{n=1}^{n} \frac{\left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)\left(\omega_1^2 - n^2\omega_0^2\right)}{2^{n-1}\left[h^2\omega_1^2 - \omega_0^2\left(h^2 + C_p\right)\right]\left[h^2\omega_1^2 - n^2\omega_0^2\left(h^2 + C_p\right)\right]}$$

$$E'_{ni}=\frac{A^2\Delta C_p}{\pi}\prod_{n=1}^{n}\frac{B_{ki}\left\{\omega_1^2-\left[\left(n-1\right)\omega_0+iA\right]^2\right\}}{2^{n-1}\left[h^2\omega_1^2-i^2A^2\left(h^2+C_p\right)\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{h^2\omega_1^2-\left[\left(n-1\right)\omega_0+iA\right]^2\left(h^2+C_p\right)\right\}}$$

$$E''_{ni}=\frac{A^2\Delta C_p}{\pi}\prod_{n=2}^{n}\frac{B_{ki}\left\{\omega_1^2-\left[\left(n-1\right)\omega_0-iA\right]^2\right\}}{2^{n-1}\left[h^2\omega_1^2-i^2A^2\left(h^2+C_p\right)\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{\left\{h^2\omega_1^2-\left[\left(n-1\right)\omega_0-iA\right]^2\left(h^2+C_p\right)\right\}}$$

Решение (9) характеризует спектр вибрации ротора машины, обусловленной эксплуатационным зазором и нелинейной жесткостью подшипников. Как видно, при определенных значениях указанных факторов существуют многочисленные резонансные частоты, при совпадении которых с какой–либо из гармоник возмущений возникает резкое возрастание амплитуды отдельных составляющих спектра вибраций. Зависимость амплитуды колебания ротора от величины экплуатационного зазора с учетом податливости элементов подшипника при различных нагрузках и постоянстве всех остальных параметров показана на рис. 2.

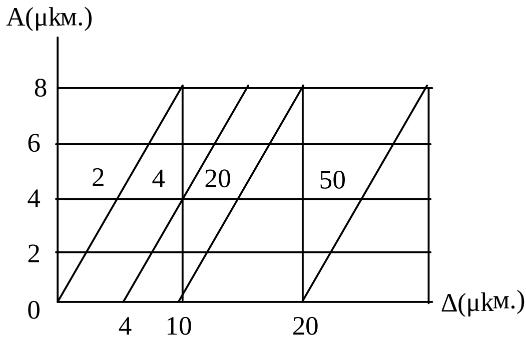


Рис. 2 Влияние величины зазора **Δ** *и нелинейной жесткости подшипника на уровень вибрации ротора при различных статических нагрузках.* $Q=2,4,20,50$*кг соответственно.*

Из графика видно, что существует оптимальное значение эксплуатационного зазора Δ, при котором его значение не влияет на вибрацию ротора. При увеличении зазора выше оптимального происходит резкое возрастание амплитуды колебания. С увеличением нагрузки на подшипник значение оптимального зазора увеличивается. Это свидетельствует о том, что податливость колец и тел качения приводит к уменьшению колебания ротора.

Из полученных выражений (9) и графика на рис. 2 видно, что снижение уровня вибрации ротора может быть достигнуто либо за счет уменьшения эксплуатационного зазора, либо за счет повышения податливости опор, введением в систему упругих элементов.

При использовании в конструкции машин подшипников определенного класса точности регулирование зазора в системе может быть достигнуто за счет изменения посадки сопрягаемых поверхностей. При этом следует учитывать, что для обеспечения нормальной работы подшипника эксплуатационный зазор должен быть не менее толщины граничного слоя масляной пленки и не более оптимального значения Δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шекян Г.Г. Динамика роторных машин. Ереван: Изд. „Гитутюн", 2004. 330с.
2. Шекян Г.Г., Захарянц В.В. Об асимптотической устойчивости ротора, вращающейся на нелинейных опорах. // Информ. техн. и управ. Энциклопедия Арменикума. Ереван, 2006. С. 32–36.
3. Проскуряков А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейная колебания. М.: Наука, 1977. 456с.

Сведения об авторах:

Шекян Гамлет Гургенович

Д.т.н., ведущий научный сотрудник
Института механики НАН РА, профессор
Тел.: (+37410) 35.11.35 (лаб.), (+37491) 49 38 40

Захарянц Вачик Ваганович

соискатель Института механики НАН РА
Тел.: (+37491) 40 41 86

СОДЕРЖАНИЕ