

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА 2009

труды международной школы-конференции молодых ученых
28 сентября –1 октября 2009, Агавнадзор, Армения

ЕРЕВАН – 2009

INSTITUTE OF MECHANICS
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS 2009

Proceedings of International School-Conference of Young Scientists
28 September – 1 October, 2009, Aghavnadzor, Armenia

YEREVAN – 2009

ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ 2009

Երիտասարդ գիտնականների միջազգային դպրոց - գիտաժողովի նյութեր

28 սեպտեմբեր – 1 հոկտեմբեր 2009, Աղավնաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2009

**Министерство науки и образования Армении
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Институт механики НАН РА
Институт проблем механики РАН
Ереванский государственный университет
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства
Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна
Ереванский государственный инженерный университет
Государственный аграрный университет Армении**

Сопредседатели: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян (Армения),
д.ф.-м.н. А.В.Манжиров (Россия)

Зам. председателя: к.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения),
д.ф.-м.н. Ю.Н.Радаев (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения),
д.ф.-м.н. В.А.Ковалев (Россия)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

В сборник включены доклады, представленные на международную школу-конференцию молодых ученых «Механика 2009».

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

Агаловян Л.А.

Изложена суть асимптотического метода решения сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений, какими являются уравнения математической теории упругости для тонких тел – балки, пластины, оболочки. Приведена методика применения этого метода для решения статических и динамических задач тонкостенных систем. Рассмотрены классические и неклассические краевые задачи. Полученные результаты проиллюстрированы решениями частных задач.

I. Асимптотическое решение первой статической краевой задачи термоупругости для балок, стержней, пластин и оболочек

Прежде чем изложить суть асимптотического метода решения плоских и пространственных задач теории упругости для тонких деформируемых тел (балки, пластины, оболочки), выясним какого рода возмущенные малым (большим) параметром дифференциальные уравнения соответствуют этим тонким телам.

1. Регулярно- и сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения и асимптотический метод их решения

Все дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр, делятся на регулярно возмущенные и сингулярно-возмущенные уравнения. Чтобы выявить их принципиальное различие и особенности использования асимптотического метода для их решения, рассмотрим следующие два модельных уравнения:

$$\text{а) } u'' + \varepsilon u' = 0, \quad u = u(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1.1)$$

$$\text{б) } \varepsilon u'' + u' = 0 \quad (1.2)$$

где ε – некий малый параметр. Требуется найти решения уравнений (1.1), (1.2) при краевых условиях

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \quad (1.3)$$

Решением уравнения (1.1) будет

$$u = C_1 + C_2 e^{-x\varepsilon} \quad (1.4)$$

которое является непрерывной функцией от малого параметра ε . Удовлетворив условиям (1.3), получим решение

$$u = \alpha + (\beta - \alpha)x \quad \text{при } \varepsilon = 0$$

$$u = \frac{1}{e^{\varepsilon(1+x)} - e^{\varepsilon x}} \left[\beta (e^{\varepsilon(1+x)} - e^{\varepsilon}) - \alpha (e^{\varepsilon x} - e^{\varepsilon}) \right] \quad \text{при } \varepsilon \neq 0 \quad (1.5)$$

легко проверить непрерывность решения при $\varepsilon = 0$.

Поскольку уравнение (1.1) содержит малый параметр, естественно, использовать асимптотический метод и решение отыскать в виде степенного ряда

$$u = \varepsilon^s u_s, \quad s = \overline{0, \infty} \quad (1.6)$$

где обозначение $s = \overline{0, \infty}$ означает суммирование по немому (повторяющемуся) индексу s от нуля до $(+\infty)$. Подставив (1.6) в (1.1) для определения коэффициентов u_s , получим итерационное уравнение

$$u_s'' + u_{s-1}' = 0, \quad u_m \equiv 0 \quad \text{при } m < 0 \quad (1.7)$$

Условия (1.3) примут вид

$$u_0(0) = \alpha, \quad u_0(1) = \beta, \quad u_s(0) = 0, \quad u_s(1) = 0, \quad s \geq 1 \quad (1.8)$$

При $s = 0$ уравнение (1.7) примет вид

$$u_0'' = 0 \quad (1.9)$$

т.е. в случае регулярно-возмущенного уравнения (малый параметр ε не является коэф-

фициентом старшей производной) укороченное (невозмущенное) уравнение, т.е. уравнение (1.1) при $\varepsilon = 0$, имеет тот же порядок, который имеет исходное уравнение (1.1). Это важное свойство позволяет удовлетворить заданным краевым условиям. В частности, при $s = 0$ будем иметь

$$u_0 = (\beta - \alpha)x + \alpha \quad (1.10)$$

а при $s = 1, 2$ – с учетом условий (1.8), решения

$$u_1 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)x(x-1), \quad u_2 = -\frac{1}{12}(\alpha - \beta)x(x-1)(2x-1) \quad (1.11)$$

Итерационный процесс можно продолжить и получить решение для любого приближения. Затем рассматривается вопрос сходимости ряда (1.6). Как правило, сходимость асимптотическая, т.е. погрешность порядка первого отброшенного члена ряда.

Проиллюстрированное на краевой задаче (1.1), (1.3) свойство является общим для всех регулярно возмущенных уравнений, в том числе, для уравнений в частных производных, следовательно, подобные уравнения можно решить, используя разложение типа (1.6).

Теперь рассмотрим сингулярно-возмущенное уравнение (1.2), т.е. когда малый параметр является коэффициентом старшего оператора (производной). Решением уравнения (1.2) является

$$u = A_1 + A_2 e^{-x/\varepsilon} \quad (1.12)$$

которое уже не является непрерывной функцией от ε . Удовлетворив условиям (1.3), получим

$$u = \frac{1}{1 - e^{-1/\varepsilon}} [\beta - \alpha e^{-1/\varepsilon} + (\alpha - \beta)e^{-x/\varepsilon}] \quad (1.13)$$

При $\varepsilon \ll 1$, $u \approx \beta$ вне зависимости от значений x , за исключением некоей малой области вблизи $x = 0$, которая называется пограничным слоем. Соответствующие графики приведены на рис.1 и 2.

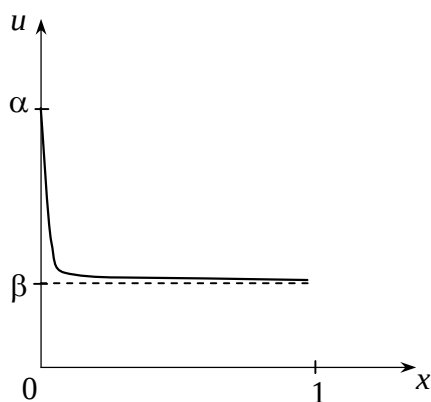


Рис. 1 ($\alpha > \beta$)

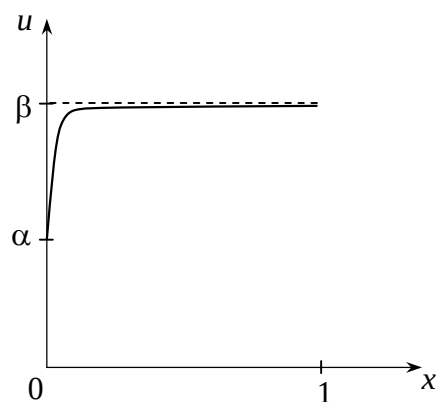


Рис. 2 ($\alpha < \beta$)

Рассмотрим возможность решения краевой задачи (1.2), (1.3) асимптотическим методом. Естественным, решение и в этом случае отыщем в виде (1.6). Для u_s получим уравнение

$$u_{s-1}'' + u_s' = 0 \quad (1.14)$$

При $s = 0$ имеем

$$u_0' = 0 \quad \text{или} \quad u_0 = C_1 = \text{const} \quad (1.15)$$

т.е. невозмущенное уравнение имеет меньший порядок, чем возмущенное (1.2). Поэтому решением (1.15) невозможно удовлетворить двум условиям (1.3). Встает вопрос – какому из этих условий следует удовлетворить. Из вышеприведенного анализа точного решения становится естественным удовлетворение второму из условий (1.3), т.е. условию, на краю вблизи которого нет пограничного слоя. Тогда $c_1 = \beta$ и $u_0 = \beta$. Оказывается, можно удовлетворить и первому условию (1.3), если построить решение пограничного слоя для края

$x = 0$. Для этого вводится замена переменной $t = -x/\varepsilon$ и отыскивается такое решение преобразованного уравнения (1.2), которое имеет затухающий характер и может устранить возникшую при $x = 0$ неувязку [1-4]. Этим решением будет

$$u_b = C_2 e^t = C_2 e^{-x/\varepsilon} \quad (1.16)$$

Потребовав, чтобы при $x = 0$ ($t = 0$)

$$u_0(x = 0) + u_b(t = 0) = \alpha \quad (1.17)$$

определим $C_2 = \alpha - \beta$. В результате исходному приближению будет соответствовать решение

$$u^{(0)} = u_0 + u_b = \beta + (\alpha - \beta)e^{-x/\varepsilon} \quad (1.18)$$

которое при малых ε практически совпадает с точным решением (1.13). Если при определении u_0 удовлетворить первому условию (1.3), получим $u_0 = \alpha$. Тогда невозможно удовлетворить условию при $x = 1$, поскольку там нет пограничного слоя, ибо введя замену переменной $\eta = (x - 1)/\varepsilon$, $-1/\varepsilon \leq \eta \leq 0$, уравнение (1.2) преобразуется в $u_{\eta\eta}'' + u_{\eta}^I = 0$, которое не имеет затухающего решения на интервале $-1/\varepsilon \leq \eta \leq 0$. Итерационный процесс можно продолжить. Таким образом, удастся математически обосновать процедуру нахождения асимптотического решения.

Из построенного выше асимптотического решения вытекают следующие, общие для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений, выводы: решение невозможно получить в виде одного разложения по малому параметру типа (1.6), оно складывается из основного решения (I^{int}) и решений для пограничных слоев (I_b); в зависимости от задачи и порядка возмущенного оператора могут существовать несколько пограничных слоев; эти решения можно строить в отдельности и произвести их сопряжение (сращивание) при помощи граничных условий.

В задачах теории упругости для тонких тел в уравнениях малый параметр является коэффициентом не всего старшего оператора, а его части, однако структура решения остается неизменной ($I = I^{\text{int}} + I_b$). Невозмущенное уравнение имеет меньшую пространственную размерность, а пограничные функции составляют счетное множество.

2. Асимптотика решений задач изгиба балок и растяжения-сжатия стержней

Классическая теория балок и стержней построена на основе гипотезы плоских сечений Бернулли-Кулона-Эйлера. Кирхгофф обобщил эту гипотезу (гипотеза недеформируемых нормалей) для вывода двумерных уравнений пластин и вариационным методом вывел известное граничное условие для свободного края. Ляв применил гипотезу недеформируемых нормалей для вывода уравнений оболочек. Классическая теория оболочек приняла законченный вид благодаря монографиям С.П.Тимошенко, В.Флюгге, В.З.Власова, А.Л.Гольденвейзера, А.И.Лурье, В.В.Новожилова. Классическая теория анизотропных пластин, в том числе слоистых, построена С.Г.Лехницким, а для анизотропных оболочек – С.А.Амбарцумяном. С этой же последовательностью обсудим проблему сведения соответствующих трехмерных и двумерных задач теории упругости к двумерным и одномерным задачам математической физики, выявив связь такого сведения с классической теорией балок, пластин и оболочек. Асимптотическим методом решим новые классы задач для тонких тел, которые невозможно решить на основе гипотез классической теории.

Поставим задачу: найти решение первой статической краевой задачи термоупругости в прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, h \leq l\}$ с учетом объемных сил и температуры по модели Дюамеля-Неймана. Необходимо найти решение: уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

уравнений состояния (обобщенный закон Гука):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \alpha_{11} \theta, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha_{22} \theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy} + \alpha_{12} \theta\end{aligned}\quad (2.2)$$

где α_{ik} – коэффициенты теплопроводности, E, G – модули Юнга и сдвига, ν – коэффициент Пуассона, $\theta = T(x, y) - T_0(x, y)$ – изменение температуры при краевых условиях на продольных краях $y = \pm h$

$$\sigma_{xy}(x, \pm h) = \pm X^\pm(x), \quad \sigma_{yy}(x, \pm h) = \pm Y^\pm(x) \quad (2.3)$$

и условиях при $x = 0, l$ (условия закрепления), которые пока считаются произвольными. В качестве массовых сил могут выступать, например, вес ($F_x = 0, F_y = -\rho(x, y)g$); приведенная сейсмическая сила по модели Мононобе ($F_x = \beta k_s \gamma, F_y \approx 0,75 F_x$), где ρ – плотность, β – коэффициент динамичности, k_s – коэффициент сейсмичности, γ – удельный вес прямоугольника.

Для решения поставленной задачи перейдем к безразмерным координатам и перемещениям

$$x = l\xi, \quad y = h\zeta, \quad U = u/l, \quad V = v/l \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1), (2.2) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \zeta} + l F_x(l\xi, h\zeta) &= 0, & \varepsilon &= h/l \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \zeta} + l F_y(l\xi, h\zeta) &= 0, & \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \alpha_{11} \theta \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) + \alpha_{22} \theta, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy} + \alpha_{12} \theta\end{aligned}\quad (2.5)$$

Система (2.5) сингулярно возмущена малым параметром ε , однако эта сингулярность отличается от классической сингулярности (1.2), ибо малый (большой) параметр является коэффициентом не всего старшего оператора (производной), а части. Структура же решения, как убедимся ниже, остается неизменной

$$I = I^{int} + I_b \quad (2.6)$$

т.е. решение складывается из решений внутренней (основной) задачи и задачи для пограничного слоя. В нашем случае $I_b = I_b^{(1)} + I_b^{(2)}$, где $I_b^{(1)}$ – решение пограничного слоя для края $x = 0$, а $I_b^{(2)}$ – для края $x = l$. Отметим, что подобная структура решения (2.6) имеет место в любой физической задаче, рассматриваемой в узкой области.

Известно, что не все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения имеют одинаковый вклад в общее напряженно-деформированное состояние. В силу этого при определении решения, в частности, внутренней задачи, весьма важным и сравнительно сложным является вопрос правильного определения асимптотических порядков искомых величин. Это имеет более глубокие корни, ибо, сформулировав любой физический закон или гипотезу, фактически задается некая асимптотика. Правильное определение асимптотики некоторые авторы склонны считать искусством [6].

Решение внутренней задачи I^{int} будем искать в виде

$$I^{int} = \varepsilon^{q_I+s} I^{(s)}(\xi, \zeta) \quad s = \overline{0, N} \quad (2.7)$$

где I – любое из напряжений и перемещений, обозначение $s = \overline{0, N}$ означает суммирование по

повторяющемся (немому) индексу s от нуля до числа приближений N . Установлено [5,7], что после подстановки (2.7) в систему (2.5) и приравнивания в каждом уравнении коэффициентов при одинаковых степенях ε , получим непротиворечивую систему для определения $I^{(s)}$, если

$$q_{\sigma_{xx}u} = -2, \quad q_{\sigma_{xy}} = -1, \quad q_{\sigma_{yy}} = 0, \quad q_v = -3 \quad (2.8)$$

Решив с учетом (2.7), (2.8) получаемую из (2.5) систему, получим

$$\begin{aligned} V^{(s)} &= v^{(s)}(\xi) + v_*^{(s)}(\xi, \zeta) \\ U^{(s)} &= -\frac{dv^{(s)}}{d\xi} \zeta + u^{(s)}(\xi) + u_*^{(s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_{xx}^{(s)} &= -E \frac{d^2 v^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + E \frac{du^{(s)}}{d\xi} + \sigma_{x*}^{(s)} \\ \sigma_{xy}^{(s)} &= \frac{1}{2} E \frac{d^3 v^{(s)}}{d\xi^3} \zeta^2 - E \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} \zeta + \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, \zeta) \\ \sigma_{yy}^{(s)} &= -\frac{1}{6} E \frac{d^4 v^{(s)}}{d\xi^4} \zeta^3 + \frac{1}{2} E \frac{d^3 u^{(s)}}{d\xi^3} \zeta^2 - \frac{d\sigma_{xy0}^{(s)}}{d\xi} + \sigma_{yy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{y*}^{(s)}(\xi, \zeta) \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} v_*^{(s)} &= \int_0^\zeta \left[\frac{1}{E} \left(\sigma_{yy}^{(s-4)} - v \sigma_{xx}^{(s-2)} \right) + \alpha_{22} \theta^{(s-2)} \right] d\zeta \\ u_*^{(s)} &= \int_0^\zeta \left[\frac{1}{G} \sigma_{xy}^{(s-2)} + \alpha_{12} \theta^{(s-1)} - \frac{\partial v_*^{(s)}}{\partial \xi} \right] d\zeta \\ \sigma_{x*}^{(s)} &= E \frac{\partial u_*^{(s)}}{\partial \xi} + v \sigma_{yy}^{(s-2)} - E \alpha_{11} \theta^{(s)} \\ \sigma_{xy*}^{(s)} &= -\int_0^\zeta \left(F_x^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{x*}^{(s)}}{\partial \xi} \right) d\zeta, \quad \sigma_{y*}^{(s)} = -\int_0^\zeta \left(F_y^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{xy*}^{(s)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$F_x^{(0)} = l \varepsilon^2 F_x(l\xi, h\zeta), \quad F_y^{(0)} = l \varepsilon F_y(l\xi, h\zeta), \quad F_x^{(s)} = F_y^{(s)} = 0, \quad s \neq 0$$

$$\theta^{(0)} = \varepsilon^2 \theta, \quad \theta^{(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad I^{(m)} \equiv 0 \quad \text{при } m < 0$$

Решение (2.9) содержит неизвестные функции $u^{(s)}, v^{(s)}, \sigma_{xy0}^{(s)}, \sigma_{yy0}^{(s)}$, которые должны быть определены из условий (2.3) и условий при $x=0, l$. Удовлетворив условиям (2.3), $\sigma_{xy0}^{(s)}, \sigma_{yy0}^{(s)}$ выразятся через $u^{(s)}, v^{(s)}$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy0}^{(s)} &= -\frac{1}{2} E \frac{d^3 v^{(s)}}{d\xi^3} + \frac{1}{2} (X^{+(s)} - X^{-(s)}) - \frac{1}{2} (\sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, 1) + \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, -1)) \\ \sigma_{yy0}^{(s)} &= \frac{1}{2} (Y^{+(s)} - Y^{-(s)}) - \frac{1}{2} \frac{dq_x^{(s)}}{d\xi} - \frac{1}{2} (\sigma_{y*}^{(s)}(\xi, 1) + \sigma_{y*}^{(s)}(\xi, -1)) \\ X^{\pm(0)} &= \varepsilon X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

для определения функций $u^{(s)}, v^{(s)}$ получаются уравнения

$$E \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} = q_x^{(s)}$$

$$\begin{aligned}
q_x^{(s)} &= -\frac{1}{2}(X^{+(s)} + X^{-(s)}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, 1) - \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, -1)) \\
\frac{1}{3}E \frac{d^4 v^{(s)}}{d\xi^4} &= q^{(s)} \\
q^{(s)} &= \frac{1}{2}(Y^{+(s)} + Y^{-(s)}) - \frac{1}{2}(\sigma_{y*}^{(s)}(\xi, 1) - \sigma_{y*}^{(s)}(\xi, -1)) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} [X^{+(s)} - X^{-(s)} - \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, 1) - \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, -1)]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Из (2.12) имеем

$$\begin{aligned}
Eu^{(s)} &= \int_0^\xi d\xi \int_0^\xi q_x^{(s)} d\xi + C_1^{(s)}\xi + C_2^{(s)} \\
\frac{1}{3}Ev^{(s)} &= \int_0^\xi d\xi \int_0^\xi d\xi \int_0^\xi q^{(s)} d\xi + C_3^{(s)} \frac{\xi^3}{3!} + C_4^{(s)} \frac{\xi^2}{2} + C_5^{(s)}\xi + C_6^{(s)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Сопоставляя решение (2.13) с (2.9), напряжения будут содержать постоянные $C_1^{(s)}, C_3^{(s)}, C_4^{(s)}$, постоянные $C_2^{(s)}, C_5^{(s)}, C_6^{(s)}$ будут характеризовать жесткое смещение, которое можно исключить, закрепив одну точку, например, начало координат, потребовав

$$U^{(s)}(0, 0) = 0, \quad V^{(s)}(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \xi} \right)_{\substack{\xi=0 \\ \zeta=0}} = 0 \tag{2.14}$$

Лишь решением (2.7)–(2.13) невозможно удовлетворить условиям при $x = 0, l$, например, условиям типа

$$\begin{aligned}
\text{а) } \sigma_{xx}(0, \zeta) &= \varphi(\zeta), \quad \sigma_{xy}(0, \zeta) = \psi(\zeta) \\
\text{б) } u(0, \zeta) &= \varphi_1(\zeta), \quad v(0, \zeta) = \psi_1(\zeta)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

В лучшем случае мы можем тремя неизвестными пока постоянными $C_1^{(s)}, C_3^{(s)}, C_4^{(s)}$ решения удовлетворить условиям (2.15) в одной-двух точках, но не во всех точках, что еще раз подтверждает сингулярную возмущенность исходной краевой задачи. Чтобы удовлетворить условиям (2.15), необходимо построить решение пограничного слоя при $x = 0$.

Поскольку неоднородные уравнения (2.5) и граничные условия (2.3) удовлетворены решением внутренней задачи, пограничный слой должен быть определен из однородных уравнений, соответствующих (2.5) с однородными (нулевыми) граничными условиями при $\zeta = \pm 1$. Введя в эти однородные уравнения замену переменной [2,5,7] $t = \xi/\varepsilon$ и приписав всем величинам индекс „b” (boundary), получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xxb}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{xyb}}{\partial \zeta} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xyb}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{yyb}}{\partial \zeta} = 0 \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial t} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xxb} - \nu \sigma_{yyb}), \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial \zeta} = \frac{1}{E} (\sigma_{yyb} - \nu \sigma_{xxb}) \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial t} &= \frac{1}{G} \sigma_{xyb}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Необходимо найти такое решение системы (2.16), которое удовлетворяет условиям

$$\sigma_{xyb}(t, \pm 1) = 0, \quad \sigma_{yyb}(t, \pm 1) = 0 \tag{2.17}$$

и имеет затухающий характер при удалении от $x = 0$ ($t = 0$) во внутрь прямоугольника-полосы. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ijb}(t, \zeta) &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ijb}^{(s)}(\zeta) \exp(-\lambda t), \quad s = \overline{0, N} \\ (U_b, V_b) &= \varepsilon^s (u_b^{(s)}(\zeta), v_b^{(s)}(\zeta)) \exp(-\lambda t)\end{aligned}\quad (2.18)$$

где λ – неизвестное пока число.

Подставив (2.18) в (2.16), все неизвестные можно выразить через $\sigma_{yyb}^{(s)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{xxb}^{(s)} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 \sigma_{yyb}^{(s)}}{d\zeta^2}, \quad \sigma_{xyb}^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \frac{d \sigma_{yyb}^{(s)}}{d\zeta} \\ u_b^{(s)} &= -\frac{1}{\lambda^3 E} \left(\frac{d^2 \sigma_{yyb}^{(s)}}{d\zeta^2} - \nu \lambda^2 \sigma_{yyb}^{(s)} \right) \\ v_b^{(s)} &= -\frac{1}{\lambda^4 E} \left(\frac{d^3 \sigma_{yyb}^{(s)}}{d\zeta^3} + (2 + \nu) \lambda^2 \frac{d \sigma_{yyb}^{(s)}}{d\zeta} \right)\end{aligned}\quad (2.19)$$

которая определяется из уравнения

$$\frac{d^4 \sigma_{yyb}^{(s)}}{d\zeta^4} + 2\lambda^2 \frac{d^2 \sigma_{yyb}^{(s)}}{d\zeta^2} + \lambda^4 \sigma_{yyb}^{(s)} = 0 \quad (2.20)$$

Из первых двух формул (2.19) и условий (2.17) вытекает весьма важное свойство – самоуравновешенность напряжений $\sigma_{xxb}, \sigma_{xyb}$ в произвольном поперечном сечении $t = t_k$

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{xxb}(t, \zeta) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{xxb} d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma_{xyb} d\zeta = 0, \quad \forall t = t_k \quad (2.21)$$

перемещения же свойством (2.21) не обладают, т.е.

$$\int_{-1}^{+1} U_b d\zeta \neq 0, \quad \int_{-1}^{+1} \zeta U_b d\zeta \neq 0, \quad \int_{-1}^{+1} V_b d\zeta \neq 0 \quad (2.22)$$

Решив уравнение (2.20), удовлетворив условиям (2.17), получим

$$\sigma_{yyb}^{(s)} = A_n^{(s)} F_n(\zeta), \quad n = \overline{0, N} \quad (2.23)$$

В симметричной задаче (растяжение сжатие) $\sigma_{xxb}, u_b, \sigma_{yyb}$ – четные, а v_b, σ_{xyb} – нечетные функции от ζ , в кососимметричной (изгиб) задаче – наоборот. Имеем:

симметричную задачу

$$F_n(\zeta) = \zeta \sin \lambda_n \zeta - t g \lambda_n \cos \lambda_n \zeta, \quad \sin 2\lambda_n + 2\lambda_n = 0 \quad (2.24)$$

кососимметричную задачу

$$F_n(\zeta) = \sin \lambda_n \zeta - \zeta t g \lambda_n \cos \lambda_n \zeta, \quad \sin 2\lambda_n - 2\lambda_n = 0 \quad (2.25)$$

Трансцендентные уравнения $\sin 2\lambda_n \pm 2\lambda_n = 0$ имеют комплексно-сопряженные корни (кроме тривиального $\lambda = 0$), расположенные симметрично относительно осей координат. Нас будут интересовать корни с $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, обеспечивающие затухающий характер решения. Значения первых пяти корней с $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$ приведены в табл.1.

Таблица 1

$2\lambda_n = X_n \pm iY_n$				
	$\sin 2\lambda + 2\lambda = 0$		$\sin 2\lambda - 2\lambda = 0$	
n	X_n	Y_n	X_n	Y_n
1.	4.2124	2.2507	7.4977	2.7687
2.	10.7125	3.1031	13.8999	3.3522
3.	17.0734	3.5511	20.2385	3.7168
4.	23.3984	3.8588	26.5545	3.9831
5.	29.7081	4.0937	32.8597	4.1933

Решение (2.18), (2.19), (2.23) можно преобразовать так, чтобы в нем выступали лишь вещественные величины. Для любого из напряжений и перемещений Q_b , приняв $Q_{nb}^{(s)} = A_n^{(s)} \tilde{Q}_{nb}(t, z)$, где $\tilde{Q}_{nb} = Q_{nb}(z) \exp(-l_n t)$, Q_{nb} – коэффициент при произвольной постоянной $A_n^{(s)}$ для данной величины, представив $A_n^{(s)} = \frac{1}{2} (A_{1n}^{(s)} - iA_{2n}^{(s)})$, будем иметь

$$Q_{nb}^{(s)} = \operatorname{Re} \tilde{Q}_{nb} A_{1n}^{(s)} + \operatorname{Im} \tilde{Q}_{nb} A_{2n}^{(s)} \quad (2.26)$$

Отметим, что решение (2.18), (2.26) является для произвольного s точным решением. Оно известно в теории упругости как однородное решение Шиффа-Папковича-Лурье. Решение пограничного слоя $I_b^{(2)}$ при $x = l$ можно получить от решения при $x = 0$ формальной заменой t на $t_1 = 1/\varepsilon - t$.

2.1. Связь с классической теорией балок и стержней

Решение внутренней задачи (2.7)–(2.13) имеет непосредственную связь с классической теорией изгиба балок и растяжения-сжатия стержней. Чтобы выявить эту связь, напомним уравнения (2.12) в размерных координатах и перемещениях. Согласно (2.7), (2.8)

$$\begin{aligned} u &= l\varepsilon^{-2+s} u^{(s)} = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^s u_s + \dots \\ v &= l\varepsilon^{-3+s} v^{(s)} = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^s v_s + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$u^{(s)} = \frac{1}{l} \varepsilon^2 u_s, \quad v^{(s)} = \frac{1}{l} \varepsilon^3 v_s$$

Подставив значения $u^{(s)}, v^{(s)}$ в уравнения (2.12), получим

$$EF \frac{d^2 u_s}{dx^2} = q_{x0}^{(s)}, \quad q_{x0}^{(s)} = 2\varepsilon^{-1} q_x^{(s)}, \quad F = 2h \cdot 1 \quad (2.28)$$

$$EJ \frac{d^4 v_s}{dx^4} = q_0^{(s)}, \quad q_0^{(s)} = 2q^{(s)}, \quad J = \frac{2}{3} h^3 \cdot 1 \quad (2.29)$$

где EF – жесткость стержня при растяжении-сжатии, EJ – жесткость балки при изгибе. При $s = 0$ $q_{x0}^{(0)} = -(X^+ + X^-)$, $q_0^{(0)} = (Y^+ + Y^-) + h \frac{d}{dx} (X^+ - X^-)$, уравнение (2.28) совпадает с классическим уравнением растяжения-сжатия стержней [8], а уравнение (2.29) с классическим уравнением изгиба балок [8,9]. Более того, исходное приближение асимптотического решения внутренней задачи содержит больше информации, ибо по формулам (2.9)–(2.11), (2.13) вычисляются также напряжения σ_{xy}, σ_{yy} , последним из которых в классической теории вообще пренебрегается. Приближения $s \geq 1$ уточняют результаты по классической теории, перемещения и напряжения, соответствующие им, изменяются по поперечной координате ζ нелинейно. Таким образом, принимая гипотезу плоских сечений, пренебрегаются приближения $s \geq 1$ внутренней задачи и пограничный слой, которому соответствует новое точное решение уравнений теории упругости (однородное решение), которое невозможно получить методом гипотез.

2.2. Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя

Пусть при $x = 0$ заданы условия (2.15)а. Согласно (2.6) $I = I^{iht} + I_\varepsilon^{(1)} + I_\varepsilon^{(2)}$. При удовлетворении условиям на торце $x = 0$ обычно пренебрегается влияние $I_\varepsilon^{(2)}$. Это равносильно $1 + \exp(-\operatorname{Re} \lambda_1 l/h) \approx 1$, которое для реальных балок и стержней ($l \geq 10h$), согласно табл.1, всегда имеет место. Имеем

$$\sigma_{xx} = \varepsilon^{-2+s} \sigma_{xx}^{(s)} + \varepsilon^{\chi-1+s} \sigma_{xxb}^{(s)}, \quad \sigma_{xy} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{xy}^{(s)} + \varepsilon^{\chi-1+s} \sigma_{xyb}^{(s)} \quad (2.30)$$

Множитель ε^x отражает факт, что решение пограничного слоя, как решение однородной краевой задачи, определяется с точностью постоянного множителя. χ должен быть определен так, чтобы при удовлетворении условиям (2.15)а не возникли противоречия. Это достигается при $\chi = -1$. В результате имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(s)}(x=0, \zeta) + \sigma_{xxb}^{(s)}(t=0, \zeta) &= \varphi^{(s-2)} \\ \sigma_{xy}^{(s-1)}(x=0, \zeta) + \sigma_{xyb}^{(s)}(t=0, \zeta) &= \psi^{(s-2)} \\ \varphi^{(0)} &= \varphi, \quad \varphi^{(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (\varphi, \psi)\end{aligned}\quad (2.31)$$

Функции $\sigma_{xxb}^{(s)}, \sigma_{xyb}^{(s)}$ удовлетворяют условиям (2.21). В результате имеем условия

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{xx}^{(s)}(0, \zeta) d\zeta = \int_{-1}^{+1} \varphi^{(s-2)} d\zeta, \quad \int_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{xx}^{(s)}(0, \zeta) d\zeta = \int_{-1}^{+1} \zeta \varphi^{(s-2)} d\zeta, \quad \int_{-1}^{+1} \sigma_{xy}^{(s)}(0, \zeta) d\zeta = \int_{-1}^{+1} \psi^{(s-1)} d\zeta \quad (2.32)$$

Из трех условий (2.32) определяются постоянные $C_1^{(s)}, C_3^{(s)}, C_4^{(s)}$ в решении внутренней задачи. Любопытно, что в (2.32) условий оказалось столько, сколько неизвестных постоянных в решении внутренней задачи, что свидетельствует о наличии внутренней гармонии в теории упругости. Вернувшись к (2.31), где $\sigma_{xx}^{(s)}, \sigma_{xy}^{(s)}$ – уже известные функции, для определения постоянных в решении пограничного слоя получим условия

$$\begin{aligned}\sigma_{xxb}^{(s)}(t=0, \zeta) &= \varphi^{(s-2)} - \sigma_{xx}^{(s)}(0, \zeta) \\ \sigma_{xyb}^{(s)}(t=0, \zeta) &= \psi^{(s-2)} - \sigma_{xy}^{(s-1)}(0, \zeta)\end{aligned}\quad (2.33)$$

или

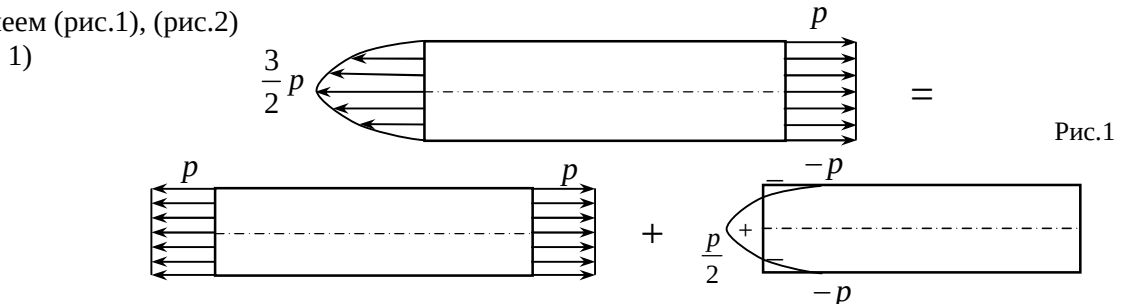
$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{xxb}(0, \zeta) A_{1n}^{(s)} + \operatorname{Im} \tilde{\sigma}_{xxb}(0, \zeta) A_{2n}^{(s)} &= \bar{\varphi}^{(s)} \\ \operatorname{Re} \tilde{\sigma}_{xyb}(0, \zeta) A_{1n}^{(s)} + \operatorname{Im} \tilde{\sigma}_{xyb}(0, \zeta) A_{2n}^{(s)} &= \bar{\psi}^{(s)}\end{aligned}\quad (2.34)$$

где $\bar{\varphi}^{(s)}, \bar{\psi}^{(s)}$ – правые части условий (2.33). Для вычисления значений $A_{1n}^{(s)}, A_{2n}^{(s)}$ из системы (2.34) можно использовать метод коллокаций, Фурье, наименьших квадратов и др.

2.3. Связь с принципом Сен-Венана

Из условий (2.32), (2.33) вытекает весьма важный факт – если при $x=0$ заданы условия (2.15)а относительно напряжений, решение внутренней задачи берет на себя самоуравновешенную часть нагрузки, а пограничный слой в силу (2.33) – самоуравновешенную часть торцевой нагрузки. Из этого чисто математического факта следует, что если балку (стержень) загрузить торцевой нагрузкой, то статически эквивалентным нагрузкам будет соответствовать одно и то же внутреннее напряженно-деформированное состояние. Это и есть принцип Сен-Венана. Таким образом, математически доказана справедливость этого принципа в случае первой краевой задачи теории упругости для прямоугольника-полосы.

Проиллюстрируем сказанное на некоторых примерах. Пусть в (2.15)а 1) $\varphi = \frac{3}{2} p(1 - \zeta^2), \psi = 0$, 2) $\varphi = 2p|\zeta|, \psi = 0$, а при $x=l$ $\sigma_{xx} = p, \sigma_{xy} = 0$. В обоих случаях решением внутренней задачи является $\sigma_{xx} = p, \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$. Разница будет в решениях для пограничного слоя. Имеем (рис.1), (рис.2)



Функциям $\bar{\varphi} = \frac{p}{2}(1-3\zeta^2)$, $\bar{\psi} = 0$ согласно (2.33) будет соответствовать затухающее решение при удалении от торца $x = 0$. Графики напряжений приведены в [5]

2)

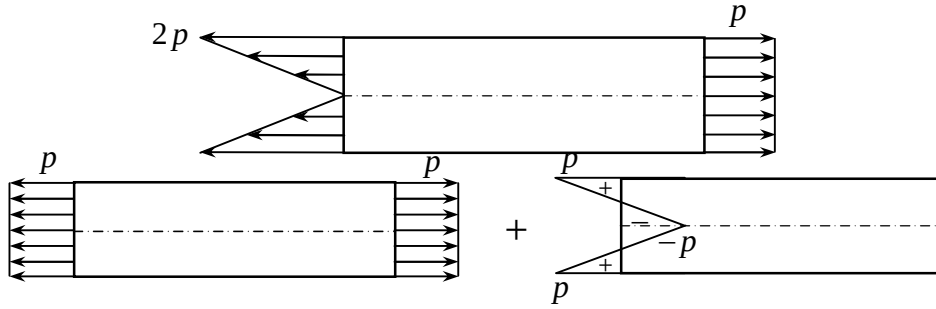


Рис.2

Затухающее решение соответствует функциям $\bar{\varphi} = -2p\left(\frac{1}{2} - |\zeta|\right)$, $\bar{\psi} = 0$.

Аналогичным образом условиям 1) $\varphi(\zeta) = \frac{5}{3}p\zeta^3$, $\psi(\zeta) = 0$, 2) $\varphi(\zeta) = \frac{\pi^2}{12}p\sin\frac{\pi}{2}\zeta$, $\psi(\zeta) = 0$ соответствует одно и то же решение задачи чистого изгиба балки ($\sigma_{xx} = -p\zeta$, $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$ при $x = l$). Уже исходное приближение дает точное решение внутренней задачи: $\sigma_{xx}^{\text{int}} = -\frac{M}{J}y$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$, где M – изгибающий момент, I – момент инерции поперечного сечения, которое совпадает с известным элементарным решением теории упругости.

Торцевым значениям напряжений 1) $\bar{\varphi}(\zeta) = \frac{p}{3}(5\zeta^3 - 3\zeta)$, $\bar{\psi} = 0$, 2) $\bar{\varphi} = \frac{p}{3}\left(\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}\zeta - 3\zeta\right)$, $\bar{\psi} = 0$ соответствуют затухающие решения, графики напряжений приведены в [5].

Если при $x = 0$ заданы условия относительно перемещений (2.15)б, в силу (2.22) сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя необходимо провести иным способом, например, методом наименьших квадратов. Является очевидным, что нельзя принцип Сен-Венана формально распространить на перемещения.

3. Асимптотические решения краевых задач для анизотропных балок и пластин

Асимптотический метод решения краевой задачи для изотропной полосы без особых затруднений распространяется для полосы-прямоугольника, обладающего в своей плоскости общей анизотропией, а также для слоистой полосы-балки. В первом случае имеем следующие соотношения состояния:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\sigma_{xy} + \alpha_{11}\theta \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\sigma_{xy} + \alpha_{22}\theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\sigma_{xy} + \alpha_{12}\theta\end{aligned}\quad (3.1)$$

Преобразуя согласно (2.4) уравнения равновесия (2.1) и соотношения (3.1), получим сингулярно-возмущенную малым параметром ε систему, решение которой будет иметь вид (2.6)–(2.8). Решение внутренней задачи опять выражается по аналогичным формулам через функции $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, которые определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a_{11}} \frac{d^2 u^{(s)}}{d\xi^2} &= q_x^{(s)}, \quad q_x^{(s)} = -\left[X^{+(s)} + X^{-(s)} - \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, 1) + \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, -1) \right] \\
\frac{2}{3a_{11}} \frac{d^4 v^{(s)}}{d\xi^4} &= q^{(s)}, \quad a_{11} = \frac{1}{E_1} \\
q^{(s)} &= Y^{+(s)} + Y^{-(s)} - \sigma_{yy*}^{(s)}(\xi, 1) + \sigma_{yy*}^{(s)}(\xi, -1) + \\
&+ \frac{d}{d\xi} \left[X^{+(s)} - X^{-(s)} - \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, 1) - \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, -1) \right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение пограничного слоя имеет вид (2.18) и определяется по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{yyb}^{(s)} &= A_n^{(s)} F_n(\zeta), \quad \sigma_{xyb}^{(s)} = A_n^{(s)} \lambda_n^{-1} F_n'(\zeta), \quad \sigma_{xxb}^{(s)} = A_n^{(s)} \lambda_n^{-2} F_n''(\zeta) \\
u_b^{(s)} &= -A_n^{(s)} \left(a_{11} \lambda_n^{-3} F_n'' + a_{16} \lambda_n^{-2} F_n' + a_{12} \lambda_n^{-1} F_n \right) \\
v_b^{(s)} &= -A_n^{(s)} \left(a_{11} \lambda_n^{-4} F_n''' + 2a_{16} \lambda_n^{-3} F_n'' + (a_{12} + a_{66}) \lambda_n^{-2} F_n' + a_{26} \lambda_n^{-1} F_n \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где функции F_n определяются из краевой задачи

$$\begin{aligned}
a_{11} F_n^{IV} + 2a_{16} \lambda_n F_n''' + (2a_{12} + a_{66}) \lambda_n^2 F_n'' + 2a_{26} \lambda_n^3 F_n' + a_{22} \lambda_n^4 F_n &= 0 \\
F_n(\zeta = \pm 1) &= 0, \quad F_n'(\zeta = \pm 1) = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.3), (3.4) снова следует самоуравновешенность напряжений σ_{xxb} , σ_{xyb} в произвольном поперечном сечении $t = t_k$, т.е. принцип Сен-Венана (Saint-Venant) имеет место и для полосы-балки, имеющей общую анизотропию в плоскости поперечного сечения. Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя осуществляется аналогичным образом.

В случае слоистой полосы-балки необходимо приписать всем величинам, входящим в уравнения равновесия (2.1) и соотношения упругости (3.1), индекс « k » (k – номер слоя) и решение преобразованной системы отыскать в виде (2.6)–(2.8). В результате, для величин « k »-того слоя будем иметь

$$\begin{aligned}
V^{(k,s)} &= v^{(k,s)}(\xi) + v_*^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
U^{(k,s)} &= -\frac{dv^{(k,s)}}{d\xi} \zeta + u^{(k,s)}(\xi) + u_*^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_{xx}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{du^{(k,s)}}{d\xi} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 v^{(k,s)}}{d\xi^2} + \sigma_{xx*}^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_{xy}^{(k,s)} &= \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^3 v^{(k,s)}}{d\xi^3} \frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^2 u^{(k,s)}}{d\xi^2} \zeta + \sigma_{xy0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_{xy*}^{(k,s)}(\xi, \zeta) \\
\sigma_{yy}^{(k,s)} &= -\frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^4 v^{(k,s)}}{d\xi^4} \frac{\zeta^3}{6} + \frac{1}{a_{11}^{(k)}} \frac{d^3 u^{(k,s)}}{d\xi^3} \frac{\zeta^2}{2} - \frac{d\sigma_{xy0}^{(k,s)}}{d\xi} \zeta + \sigma_{yy0}^{(k,s)}(\xi) + \sigma_{yy*}^{(k,s)}(\xi, \zeta)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Несложно выписать выражения $Q_*^{(k,s)}$, которые являются известными функциями. Если пакет состоит из $n + m$ слоев, где n – количество слоев, стоящих выше, а m – ниже оси $O\xi$, удовлетворив граничным условиям на лицевых поверхностях пакета и условиям полного контакта между слоями (непрерывность перемещений и напряжений σ_{xy} , σ_{yy}), все величины можно выразить через перемещения n -ого слоя, а для них получить уравнения [10]

$$C \frac{d^2 u^{(n,s)}}{d\xi^2} + K \frac{d^3 v^{(n,s)}}{d\xi^3} = p^{(s)}, \quad D \frac{d^4 v^{(n,s)}}{d\xi^4} + K \frac{d^3 u^{(n,s)}}{d\xi^3} = q^{(s)} \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k} - \zeta_{-k+1}) \\
D &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^3 - \zeta_{k-1}^3) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^3 - \zeta_{-k+1}^3) \\
K &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{11}^{(k)}} (\zeta_k^2 - \zeta_{k-1}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_{11}^{(-k)}} (\zeta_{-k}^2 - \zeta_{-k+1}^2) \\
z_k &= \frac{1}{h} \sum_{j=1}^k h_j \quad (k=1,2,\dots,n), \quad z_{-k} = -\frac{1}{h} \sum_{j=1}^k h_{-j} \quad (k=1,2,\dots,m) \\
h &= \sum_{j=1}^n h_j + \sum_{j=1}^m h_{-j}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Жесткости $C > 0, D > 0$, а положение оси $O\xi$ можно выбрать так, чтобы $K = 0$. Тогда первое уравнение (3.6) будет соответствовать растяжению-сжатию слоистого стержня, а второе – изгибу слоистой балки. При $s = 0$ система (3.6) совпадает с классической системой по гипотезе плоских сечений [11].

Чтобы решить пространственную задачу для пластин $D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq +h\}$, обладающих общей анизотропией (21 постоянных упругостей), вводим безразмерные координаты $x = l\xi, y = l\eta, z = h\zeta$, ($l = \min(a, b), h \ll l$) и безразмерные перемещения $U = u/l, V = v/l, W = w/l$. Соответствующая система уравнений термоупругости

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \zeta} + l F_x(\xi, \eta, \zeta) &= 0 \quad (x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \\
\frac{\partial U}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz} + a_{14} \sigma_{yz} + a_{15} \sigma_{xz} + a_{16} \sigma_{xy} + \alpha_{11} \theta \\
\frac{\partial V}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{23} \sigma_{zz} + a_{24} \sigma_{yz} + a_{25} \sigma_{xz} + a_{26} \sigma_{xy} + \alpha_{22} \theta \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{xx} + a_{23} \sigma_{yy} + a_{33} \sigma_{zz} + a_{34} \sigma_{yz} + a_{35} \sigma_{xz} + a_{36} \sigma_{xy} + \alpha_{33} \theta \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \eta} &= a_{14} \sigma_{xx} + a_{24} \sigma_{yy} + a_{34} \sigma_{zz} + a_{44} \sigma_{yz} + a_{45} \sigma_{xz} + a_{46} \sigma_{xy} + \alpha_{23} \theta \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \xi} &= a_{15} \sigma_{xx} + a_{25} \sigma_{yy} + a_{35} \sigma_{zz} + a_{45} \sigma_{yz} + a_{55} \sigma_{xz} + a_{56} \sigma_{xy} + \alpha_{13} \theta \\
\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} &= a_{16} \sigma_{xx} + a_{26} \sigma_{yy} + a_{36} \sigma_{zz} + a_{46} \sigma_{yz} + a_{56} \sigma_{xz} + a_{66} \sigma_{xy} + \alpha_{12} \theta
\end{aligned} \tag{3.8}$$

снова является сингулярно-возмущенной малым параметром $\varepsilon = h/l$. Решение системы (3.8) имеет вид (2.6), для внутренней задачи имеем

$$q = -2 \text{ для } \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, u, v; \quad q = -1 \text{ для } \sigma_{xz}, \sigma_{yz}; \quad q = 0 \text{ для } \sigma_{zz}; \quad q = -3 \text{ для } w \tag{3.9}$$

Подставив (3.9) в (3.8), получим систему, которая допускает интегрирование по ζ и удовлетворение условий при $\zeta = \pm 1$. В результате, имеем

$$W^{(s)} = w^{(s)}(\xi, \eta) + w_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= -\zeta \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} + u^{(s)}(\xi, \eta) + u_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v; \xi, \eta) \\
\sigma_{xx}^{(s)} &= \zeta \tau_{x1}^{(s)} + \tau_{x0}^{(s)} + \sigma_{x*}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (x, y) \\
\sigma_{xy}^{(s)} &= \zeta \tau_{xy1}^{(s)} + \tau_{xy0}^{(s)} + \sigma_{xy*}^{(s)} \\
\sigma_{xz}^{(s)} &= \frac{1}{2} \zeta^2 \tau_{xz2}^{(s)} + \zeta \tau_{xz1}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} + \sigma_{xz*}^{(s)}, \quad (x, y) \\
\sigma_z^{(s)} &= \frac{1}{6} \zeta^3 \tau_{z3}^{(s)} + \frac{1}{2} \zeta^2 \tau_{z2}^{(s)} + \zeta \tau_{z1}^{(s)} + \tau_{z0}^{(s)} + \sigma_{z*}^{(s)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

функции $\tau^{(s)}$ выражаются через $u^{(s)}, v^{(s)}, w^{(s)}$, которые определяются из уравнений [5]

$$l_{11}u^{(s)} + l_{12}v^{(s)} = p_1^{(s)}, \quad l_{12}u^{(s)} + l_{22}v^{(s)} = p_2^{(s)} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} \frac{\partial^4 w^{(s)}}{\partial \xi^4} + 4B_{16} \frac{\partial^4 w^{(s)}}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 w^{(s)}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \\
+ 4B_{26} \frac{\partial^4 w^{(s)}}{\partial \xi \partial \eta^3} + B_{22} \frac{\partial^4 w^{(s)}}{\partial \eta^4} = q^{(s)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}
l_{11} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (1, 2; \xi, \eta) \\
l_{12} &= B_{16} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
B_{11} &= (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Omega, \quad B_{22} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Omega \\
B_{12} &= (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Omega, \quad B_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Omega \\
B_{16} &= (a_{12}a_{26} - a_{22}a_{16})/\Omega, \quad B_{26} = (a_{12}a_{16} - a_{11}a_{26})/\Omega \\
\Omega &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66} + 2a_{12}a_{16}a_{26} - a_{11}a_{26}^2 - a_{22}a_{16}^2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Написанные в размерных координатах уравнения (3.11) совпадают при $s=0$ с классическими уравнениями обобщенной плоской задачи, а уравнение (3.12) – с классическим уравнением изгиба пластинки, которая имеет плоскость упругой симметрии [11]. При $s > 0$ меняются правые части этих уравнений (грузовые члены), куда входят также коэффициенты упругости взаимного влияния, характеризующие общую анизотропию. При общей анизотропии $p_1^{(1)} \neq 0$, $p_2^{(1)} \neq 0$, $q^{(s)} \neq 0$ и погрешность классической теории составляет $O(\varepsilon)$, в то время, как для изотропных, ортотропных и имеющих плоскость упругой симметрии пластинок при умеренной анизотропии – погрешность $O(\varepsilon^2)$, при сильной же анизотропии эти оценки резко изменяются в худшую сторону.

Классическая теория пластин не учитывает пограничный слой. Решение пограничного слоя локализованного вблизи края $\xi = 0$ ищется в виде

$$I_b = \varepsilon^{\chi+s} I_b^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda t), \quad t = \xi/\varepsilon \tag{3.14}$$

где $\chi = 0$ для u_b, v_b, w_b ; $\chi = -1$ для σ_{ijb} . В общем случае все величины пограничного слоя выражаются через функции $\sigma_{z zb}^{(s)}, \sigma_{y zb}^{(s)}$, которые определяются из уравнений [5]

$$\begin{aligned}
L_1 \sigma_{z zb}^{(s)} + L_2 \sigma_{y zb}^{(s)} &= R_1^{(s-1)} \\
L_2 \sigma_{z zb}^{(s)} + L_3 \sigma_{y zb}^{(s)} &= R_2^{(s-1)}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

при граничных условиях

$$\sigma_{zzb}^{(s)}(\zeta = \pm 1) = 0, \quad \sigma_{xzb}^{(s)}(\zeta = \pm 1) = 0, \quad \sigma_{yzb}^{(s)}(\zeta = \pm 1) = 0 \quad (3.16)$$

где $R_1^{(s-1)}$, $R_2^{(s-1)}$ – известные функции, $R_1 = R_2 = 0$ при $s = 0$, а

$$\begin{aligned} L_1 &= A_{11} \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + 2A_{15} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (2A_{13} + A_{35}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{45} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{43} \lambda^4 \\ L_2 &= A_{16} \lambda \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} + (A_{14} + A_{25}) \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + (A_{23} + A_{34}) \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{44} \lambda^4 \\ L_3 &= A_{26} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2A_{24} \lambda^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} + A_{41} \lambda^4 \end{aligned} \quad (3.17)$$

При $s = 0$, приняв $\sigma_{zzb}^{(0)} = L_3 \phi$, $\sigma_{yzb}^{(0)} = -L_2 \phi$, решение задачи (3.15), (3.16) сводится к краевой задаче

$$\begin{aligned} (L_1 L_3 - L_2^2) \phi &= 0 \\ (L_3 \phi)_{\zeta=\pm 1} &= 0, \quad (L_3 \phi')_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad (L_2 \phi)_{\zeta=\pm 1} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Оператор задачи (3.18) – обыкновенно дифференциальный шестого порядка. Краевой задаче (3.18) соответствует система из шести однородных алгебраических уравнений, приравняв к нулю определитель этой системы, получим уравнение для λ . $\text{Re} \lambda_n > 0$ этого уравнения будут характеризовать скорость убывания величин пограничного слоя. Для изотропных и ортотропных пластин $L_2 \equiv 0$ и краевая задача (3.15), (3.16) распадается при $s = 0$ на две независимые задачи

$$\begin{aligned} L_1 \sigma_{zzb}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{zzb}^{(0)}(\zeta = \pm 1) = 0, \quad (\sigma_{zzb}^{(0)})'_{\zeta=\pm 1} = 0 \\ L_3 \sigma_{yzb}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{yzb}^{(0)}(\zeta = \pm 1) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

которым соответствуют плоский и антиплоский пограничные слои. В первом случае λ_n – комплексно-сопряженные, во втором – вещественны, естественно, их значения зависят от значений постоянных упругости. Для пластин из композитных материалов значения λ_n приведены в [5]. Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя осуществляется аналогичным образом, описанным выше.

В случае оболочек структура решения (2.6) остается неизменной, однако во внутренней задаче асимптотика отличается от (3.9). Построены итерационные процессы, соответствующие безмоментным и моментным напряженно-деформированным состояниям оболочек, сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя осуществляется как для пластинок [5].

II. Неклассические краевые задачи балок, пластин и оболочек

Классическая и уточненные теории балок, пластин и оболочек рассматривают лишь один класс задач – на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, между тем, в фундаментостроении, сейсмостойком строительстве, авиа – судостроении и других областях возникают классы задач, когда на лицевых поверхностях тонкого тела заданы иные условия – вектор перемещения, смешанные условия. Этот класс задач принято называть неклассическим, чтобы отличить от второй и смешанных задач классической теории (подобные условия заданы на боковой поверхности), хотя с позиций теории упругости эти задачи вполне классические. Используя приводимые в п.2,3 соотношения или соотношения классической теории, непосредственной проверкой можно убедиться, что ими невозможно удовлетворить условиям второй и смешанной краевых задач теории упругости на лицевых поверхностях, что означает неприменимость гипотез Бернулли-Кирхгофа-Лява для решения этого класса задач. Асимптотический метод позволяет без использования каких-либо гипотез найти решения этих краевых задач для балок-полос, пластин и оболочек, в том числе,

анизотропных и слоистых [5, 13].

1. В случае анизотропных прямоугольных балок-полос требуется найти решение уравнений плоской задачи термоупругости в области $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq h, h \ll l\}$ при условиях

$$u(x, -h) = u^-(x), \quad v(x, -h) = v^-(x), \quad \text{в частности, } u^- = v^- = 0 \quad (1.1)$$

и одной из групп условий при $y = h$

$$u(x, h) = u^+(x), \quad v(x, h) = v^+(x) \quad (1.2)$$

$$s_{xy}(x, h) = s_{xy}^+(x), \quad s_{yy}(x, h) = s_{yy}^+(x) \quad (1.3)$$

$$v(x, h) = v^+(x), \quad s_{xy}(x, y) = s_{xy}^+(x) \quad (1.4)$$

$$u(x, h) = u^+(x), \quad s_{yy}(x, h) = s_{yy}^+(x) \quad (1.5)$$

и условиях при $x = 0, l$. Перейдя к безразмерным координатам $\xi = x/l, \zeta = y/h$ и безразмерным перемещениям $U = u/l, V = v/l$, уравнения теории упругости будут сингулярно возмущены малым параметром $\varepsilon = h/l$. Решение этой системы снова имеет вид (1.2.6), однако асимптотика внутренней задачи, позволяющая найти решения, соответствующие условиям (1.1)–(1.5), иная:

$$I^{\text{int}} = \varepsilon^{q+s} I^{(s)}(\xi, \zeta) \quad (1.6)$$

$$q = -1 \text{ для } \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}; \quad q = 0 \text{ для } U, V$$

которой соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{xx}^{(s-1)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}^{(s)}}{\partial z} + F_x^{(s)}(x, z) &= 0, \quad \frac{\partial s_{xy}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}^{(s)}}{\partial z} + F_y^{(s)}(x, z) = 0 \\ \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{12}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{16}\sigma_{xy}^{(s)} + \alpha_{11}\theta^{(s)}(\xi, \zeta) \\ \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{16}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{26}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{66}\sigma_{xy}^{(s)} + \alpha_{12}\theta^{(s)}(\xi, \zeta) \\ \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{12}\sigma_{xx}^{(s)} + a_{22}\sigma_{yy}^{(s)} + a_{26}\sigma_{xy}^{(s)} + \alpha_{22}\theta^{(s)}(\xi, \zeta) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$F_x^{(0)} = \varepsilon^2 \ell F_x, \quad F_x^{(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (x, y), \quad \theta^{(0)} = \varepsilon \theta, \quad \theta^{(s)} = 0, \quad s \neq 0$$

Система (1.7) допускает интегрирование по ζ .

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \sigma_{xy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, \zeta), \quad \sigma_{yy}^{(s)} = \sigma_{yy0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{y*}^{(s)}(\xi, \zeta) \quad (1.8)$$

$$\sigma_{xx}^{(s)} = -(a_{12}\sigma_{yy0}^{(s)} + a_{16}\sigma_{xy0}^{(s)})a_{11}^{-1} + \sigma_{x*}^{(s)}(\xi, \zeta)$$

$$U^{(s)} = (A_{16}\sigma_{yy0}^{(s)} + A_{66}\sigma_{xy0}^{(s)})\zeta + u^{(s)}(\xi) + u_*^{(s)}(\xi, \zeta)$$

$$V^{(s)} = (A_{11}\sigma_{yy0}^{(s)} + A_{16}\sigma_{xy0}^{(s)})\zeta + v^{(s)}(\xi) + v_*^{(s)}(\xi, \zeta)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xy*}^{(s)} &= -\int_0^\zeta \left[F_x^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta, \quad \sigma_{y*}^{(s)} = -\int_0^\zeta \left[F_y^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta \\ \sigma_{x*}^{(s)} &= -[a_{12}\sigma_{y*}^{(s)} + a_{16}\sigma_{xy*}^{(s)} + \alpha_{11}\theta^{(s)} - \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi}]a_{11}^{-1} \\ u_*^{(s)} &= \int_0^\zeta \left[a_{16}\sigma_{x*}^{(s)} + a_{26}\sigma_{y*}^{(s)} + a_{66}\sigma_{xy*}^{(s)} + \alpha_{12}\theta^{(s)} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right] d\zeta \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{v}_*^{(s)} = \int_0^\xi \left[a_{12} \sigma_{x*}^{(s)} + a_{22} \sigma_{y*}^{(s)} + a_{26} \sigma_{xy*}^{(s)} + \alpha_{22} \theta^{(s)} \right] d\xi$$

$$A_{11} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{11}^{-1}, \quad A_{16} = (a_{11}a_{26} - a_{12}a_{16})a_{11}^{-1}$$

$$A_{66} = (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)a_{11}^{-1}$$

В решение внутренней задачи (1.6), (1.8) входят неизвестные функции $\sigma_{xy0}^{(s)}, \sigma_{yy0}^{(s)}, u^{(s)}, v^{(s)}$, которые однозначно определяются из условий (1.1)–(1.5). Например, для условий (1.1), (1.2) имеем

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = (A_{11}\varphi^{(s)} - A_{16}f^{(s)})\Omega^{-1}, \quad \sigma_{yy0}^{(s)} = (A_{66}f^{(s)} - A_{16}\varphi^{(s)})\Omega^{-1}$$

$$u^{(s)}(\xi) = \frac{1}{2}(u^{+(s)} + u^{-(s)}) - \frac{1}{2}(u_*^{(s)}(\xi, 1) + u_*^{(s)}(\xi, -1)) \quad (1.10)$$

$$v^{(s)}(\xi) = \frac{1}{2}(v^{+(s)} + v^{-(s)}) - \frac{1}{2}(v_*^{(s)}(\xi, 1) + v_*^{(s)}(\xi, -1))$$

$$\varphi^{(s)}(\xi) = \frac{1}{2}(u^{+(s)} - u^{-(s)}) - \frac{1}{2}(u_*^{(s)}(\xi, 1) - u_*^{(s)}(\xi, -1))$$

$$f^{(s)}(\xi) = \frac{1}{2}(v^{+(s)} - v^{-(s)}) - \frac{1}{2}(v_*^{(s)}(\xi, 1) - v_*^{(s)}(\xi, -1))$$

$$\Omega = A_{11}A_{66} - A_{16}^2, \quad u^{\pm(0)} = u^\pm / \ell, \quad u^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v)$$

В задаче, соответствующей условиям (1.1), (1.3), имеем

$$\sigma_{xy0}^{(s)} = \sigma_{xy}^{+(s)} - \sigma_{xy*}^{(s)}(\xi, 1), \quad \sigma_{yy0}^{(s)} = \sigma_{yy}^{+(s)} - \sigma_{yy*}^{(s)}(\xi, 1)$$

$$u^{(s)}(\xi) = A_{16}\sigma_{yy0}^{(s)} + A_{66}\sigma_{xy0}^{(s)} + u^{-(s)} - u_*^{(s)}(\xi, -1)$$

$$v^{(s)} = A_{11}\sigma_{yy0}^{(s)} + A_{16}\sigma_{xy0}^{(s)} + v^{-(s)}(\xi) - v_*^{(s)}(\xi, -1) \quad (1.11)$$

$$\sigma_{xy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{xy}^+, \quad \sigma_{yy}^{+(0)} = \varepsilon\sigma_{yy}^+, \quad \sigma_{xy}^{+(s)} = \sigma_{yy}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0$$

Нетрудно выписать значения этих функций при условиях (1.1), (1.4); (1.1), (1.5). Таким образом, в отличие от первой краевой задачи, решение внутренней задачи при иных условиях на лицевых поверхностях $y = \pm h$ полностью определяется в результате удовлетворения этим условиям. Если граничные функции являются многочленами от переменной ξ , итерационный процесс обрывается и решение внутренней задачи становится математически точным. Например, при $u^+ = \text{const}$, $v^+ = \text{const}$ из (1.6), (1.10) следует

$$\sigma_{xy} = (A_{11}u^+ - A_{16}v^+) / 2h\Omega, \quad \sigma_{yy} = (A_{66}v^+ - A_{16}u^+) / 2h\Omega$$

$$\sigma_{xx} = -[(a_{16}A_{11} - a_{12}A_{16})u^+ + (a_{12}A_{66} - a_{16}A_{16})v^+] / (2ha_{11}\Omega) \quad (1.12)$$

$$u = \frac{u^+}{2h}(y + h), \quad v = \frac{v^+}{2h}(y + h)$$

Для ортотропной балки-полосы ($a_{16} = A_{16} = 0$)

$$\sigma_{xy} = G_{12} \frac{u^+}{2h}, \quad \sigma_{yy} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \frac{v^+}{2h}, \quad \sigma_{xx} = \frac{E_1\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \frac{v^+}{2h} \quad (1.13)$$

При $\sigma_{xy}^+ = \tau^+ = \text{const}$, $\sigma_{yy}^+ = -\sigma_2^+ = \text{const}$ из (1.6), (1.11) следует

$$\sigma_{xx} = (a_{12}\sigma_2^+ - a_{16}\tau^+)a_{11}^{-1}, \quad \sigma_{xy} = \tau^+, \quad \sigma_{yy} = -\sigma_2^+ \quad (1.14)$$

$$u = (A_{66}\tau^+ - A_{16}\sigma_2^+)(y + h), \quad v = (A_{16}\tau^+ - A_{11}\sigma_2^+)(y + h)$$

Решения (1.12)–(1.14), как правило, не будут удовлетворять граничным условиям при $x = 0, l$. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя, которое

строится как в случае первой краевой задачи. Таким образом, установленная впервые в [13] асимптотика (1.6) позволила решить новый класс задач, для которого гипотезы классической теории неприменимы. Асимптотика (1.6) верна для слоистых балок и стержней. Решив уравнения (1.7) для произвольного k -ого слоя и удовлетворив условиям контакта между слоями, несложно выписать решение внутренней задачи. Эту асимптотику можно обобщить и для нахождения решений соответствующих пространственных задач анизотропных пластин и оболочек, в том числе, слоистых. Проиллюстрируем сказанное на примерах двухслойных пластин и оболочек. В случае пластин требуется найти решение уравнений теории термоупругости в области $D = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta \in \Omega_0, -h_2 \leq \gamma \leq h_1, h = \max(h_1, h_2)\}$, $h \ll l$, l – харак-

терный тангенциальный размер пластинки в плоскости Ω_0 раздела слоев, когда на лицевой поверхности $\gamma = -h_2$ задан вектор перемещения, а на противоположной поверхности $\gamma = h_1$ – компоненты $\sigma_{j\gamma}^+$ тензора напряжений, вектора перемещения, или смешанные условия (рис.1). Перейдя в уравнениях и соотношениях упругости к безразмерным координатам $\xi = \alpha/l$, $\eta = \beta/l$, $\zeta = \gamma/h$ и перемещениям $u = u_\alpha/l$, $v = u_\beta/l$, $w = u_\gamma/l$ для i -ого слоя

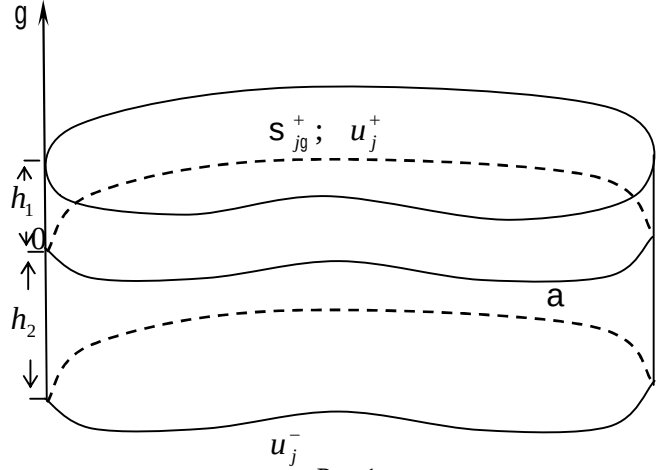


Рис.1

($i = 1, 2$), получим [5]

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^{(i)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}}{\partial \zeta} + \ell(\sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} - \sigma_{\beta\beta}^{(i)})k_\beta + 2\ell k_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \ell F_\alpha^{(i)} = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \xi} + \ell k_\alpha v^{(i)} = a_{11}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} + a_{12}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i)} + \dots + a_{16}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \alpha_{11}^{(i)} \theta^{(i)} \quad (1, 2; \alpha, \beta; \xi, \eta; u, v)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} + a_{23}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i)} + \dots + a_{36}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \alpha_{33}^{(i)} \theta^{(i)}$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \zeta} = a_{14}^{(i)} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} + a_{24}^{(i)} \sigma_{\beta\beta}^{(i)} + \dots + a_{46}^{(i)} \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} + \alpha_{23}^{(i)} \theta^{(i)}$$

где A, B – коэффициенты первой квадратичной формы, k_α, k_β – геодезические кривизны, a_{kj} – постоянные упругости при общей анизотропии, α_{kj} – коэффициенты теплового расширения, $\theta^{(i)} = T^{(i)} - T_0^{(i)}$ – приращение температуры.

Решение внутренней задачи снова ищется в виде (1.6), где $q = -1$ для всех напряжений и $q = 0$ для всех перемещений. Подставив (1.6) в (1.15) по изложенной выше процедуре, получается итерационный процесс для последовательного определения всех искомых величин и условий на лицевых поверхностях $\gamma = h_1, -h_2$. После удовлетворения этим условиям, решение для $\forall s$ становится известным. Приведем это решение для случая, когда поверхность $\gamma = -h_2$ двухслойной пластинки жестко закреплена, а на поверхность $\gamma = h_1$ действует нагрузка постоянной интенсивности:

$$u(-h_2) = v(-h_2) = w(-h_2) = 0$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(h_1) = \sigma_{\alpha\gamma}^+, \quad \sigma_{\beta\gamma}(h_1) = \sigma_{\beta\gamma}^+, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(h_1) = \sigma_{\gamma\gamma}^+ \quad (1.16)$$

$$\sigma_{j\gamma}^+(h_1) = \text{const}, \quad j = \alpha, \beta, \gamma$$

Итерационный процесс обрывается на исходном приближении и имеем точное решение:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} = A_{13}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^+ + A_{14}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^+ + A_{15}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^+, \quad \sigma_{\beta\beta}^{(i)} = A_{23}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^+ + A_{24}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^+ + A_{25}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^+ \quad (1.17)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = A_{63}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^+ + A_{64}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^+ + A_{65}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^+, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} = \sigma_{\alpha\gamma}^+, \quad \sigma_{\beta\gamma}^{(i)} = \sigma_{\beta\gamma}^+, \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = \sigma_{\gamma\gamma}^+$$

$$u_{\alpha}^{(i)} = h_2 (D_{53}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^+ + D_{54}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^+ + D_{55}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^+), \quad u_{\beta}^{(i)} = h_2 (D_{43}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^+ + D_{44}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^+ + D_{45}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^+)$$

$$u_{\gamma}^{(i)} = h_2 (D_{33}^{(i)} \sigma_{\gamma\gamma}^+ + D_{34}^{(i)} \sigma_{\beta\gamma}^+ + D_{35}^{(i)} \sigma_{\alpha\gamma}^+), \quad D_{kj}^{(i)} = \zeta A_{kj}^{(i)} + A_{kj}^{(2)}, \quad i = 1, 2; \quad \zeta = \gamma / h_2$$

$$A_{k\ell} = -a_{1\ell} B_{k1} - a_{2\ell} B_{k2} - a_{6\ell} B_{k6}, \quad \ell, m = 3, 4, 5$$

$$A_{m\ell} = a_{m1} A_{1\ell} + a_{m2} A_{2\ell} + a_{m6} A_{6\ell} + a_{m\ell}, \quad A_{m\ell} \neq A_{\ell m}$$

$$B_{ij} = (a_{ik} a_{jk} - a_{ij} a_{kk}) / \Delta, \quad B_{kk} = (a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2) / \Delta$$

$$i \neq j \neq k \neq i; \quad i, j, k = 1, 2, 6, \quad B_{ij} = B_{ji}$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{66} + 2a_{12} a_{26} a_{16} - a_{11} a_{26}^2 - a_{22} a_{16}^2 - a_{66} a_{12}^2$$

Математически точное решение (1.17) позволяет ответить на весьма важный вопрос – применима ли модель коэффициента постели Винклера-Фусса для анизотропных и слоистых оснований и как вычислить коэффициент постели. Для этого выпишем связь между перемещениями и напряжениями на поверхности контакта ($\gamma = 0$) между слоями, приписав им индекс „с”:

$$u_{\alpha}^{(c)} = h_2 (A_{53}^{(2)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(c)} + A_{54}^{(2)} \sigma_{\beta\gamma}^{(c)} + A_{55}^{(2)} \sigma_{\alpha\gamma}^{(c)}), \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(c)} = \sigma_{\gamma\gamma}^+$$

$$u_{\beta}^{(c)} = h_2 (A_{43}^{(2)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(c)} + A_{44}^{(2)} \sigma_{\beta\gamma}^{(c)} + A_{45}^{(2)} \sigma_{\alpha\gamma}^{(c)}), \quad \sigma_{\beta\gamma}^{(c)} = \sigma_{\beta\gamma}^+ \quad (1.18)$$

$$u_{\gamma}^{(c)} = h_2 (A_{33}^{(2)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(c)} + A_{34}^{(2)} \sigma_{\beta\gamma}^{(c)} + A_{35}^{(2)} \sigma_{\alpha\gamma}^{(c)}), \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(c)} = \sigma_{\alpha\gamma}^+$$

Если считать, что действует лишь нормальная нагрузка $\sigma_{\gamma\gamma}^+$, будем иметь

$$u_a^{(c)} = h_2 A_{53}^{(2)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(c)}, \quad u_b^{(c)} = h_2 A_{43}^{(2)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(c)}, \quad u_g^{(c)} = h_2 A_{33}^{(2)} \sigma_{\gamma\gamma}^{(c)} \quad (1.19)$$

т.е. под воздействием нормальной нагрузки на поверхности контакта возникают тангенциальные перемещения, что означает нарушение модели Винклера-Фусса в случае общей анизотропии, оно будет ощутимее при больших значениях $A_{53}^{(2)}, A_{43}^{(2)}$. Для ортотропных и изотропных оснований $A_{53}^{(2)} = A_{43}^{(2)} = 0$ и

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(c)} = K u_{\gamma}^{(c)}, \quad K = \frac{1}{h_2 A_{33}^{(2)}} \quad (1.20)$$

Для ортотропного основания согласно (1.17)

$$K = \frac{(1 - \nu_{\alpha\beta} \nu_{\beta\alpha}) E_{\gamma}}{h_2 (1 - \nu_{\beta\gamma} \nu_{\gamma\beta} - \nu_{\alpha\gamma} \nu_{\gamma\alpha} - \nu_{\alpha\beta} \nu_{\beta\alpha} - 2\nu_{\alpha\beta} \nu_{\beta\gamma} \nu_{\gamma\alpha})} \quad (1.21)$$

Для изотропного основания

$$K = \frac{(1 - \nu) E}{h_2 (1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (1.22)$$

Коэффициент K из (1.22) совпадает с известным коэффициентом постели, выведенным весьма сложным путем [14]. Рассматривая асимптотическим методом многослойные и неоднородные по толщине основания, получим [5]

$$K_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i A_{33}^{(i)}}, \quad K = \frac{1}{\int_0^h A_{33}(\gamma) d\gamma} \quad (1.23)$$

где h – общая толщина основания.

Комбинируя решение Фламана для полуплоскости и Буссинеска для полупространства с

асимптотическим решением для полосы и слоя, можно найти решения для слоистых оснований при сосредоточенных и кусочно-непрерывных силовых воздействиях [15].

Асимптотика (1.6), установленная для балок и пластин, справедлива также для оболочек, однако итерационный процесс уже в простейших случаях не обрывается на определенном приближении, в силу чего решение внутренней задачи является асимптотическим. В общем случае решение полностью определяется и выражается через граничные функции в ходе удовлетворения условий на лицевых поверхностях оболочки [5]. В качестве иллюстрации приведем решение для ортотропной цилиндрической оболочки, внешняя поверхность которой жестко закреплена, а внутри действует постоянное давление P (рис.2).

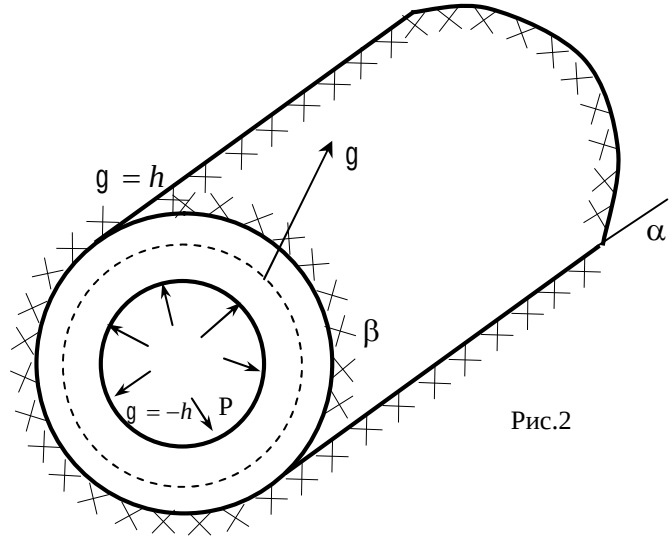


Рис.2

Пусть α – длина по образующей, а β – длина дуги направляющей цилиндра, тогда $A = B = 1$, $k_\alpha = k_\beta = 0$, $1/R_1 = 0$, $R_2 = R$, R – радиус срединной поверхности цилиндра. Считая, что объемные силы отсутствуют, а температурное поле не меняется и, ограничившись точностью $O(\varepsilon^2)$, получим решение:

$$\sigma_{\alpha\gamma} = \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad u_\alpha = u_\beta = 0,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma} = -\frac{R-h}{R+\gamma}P - A_{23}\frac{\gamma+h}{R+\gamma}P, \quad (1.24)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -[A_{13}(R-h) + A_{13}A_{23}(h+\gamma) - \frac{a_{12}}{\Delta}A_{33}(\gamma-h)]\frac{P}{R+\gamma}$$

$$\sigma_{\beta\beta} = -[A_{23}(R-h) + A_{23}^2(h+\gamma) + \frac{a_{11}}{\Delta}A_{33}(\gamma-h)]\frac{P}{R}$$

$$u_\gamma = -A_{33}(\gamma-h)(R-h+hA_{23})\frac{P}{R} + \frac{1}{2}A_{33}(\gamma^2-h^2)\frac{P}{R} - A_{23}A_{33}(\gamma-h)\frac{Ph}{R}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Общее асимптотическое решение можно выписать и для слоистых оболочек.

III. Асимптотические решения пространственных динамических задач для пластин и оболочек

1. Рассмотрим представляющие на наш взгляд наибольший интерес следующие два типа вынужденных колебаний ортотропных пластин $D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, \min(a, b) = l, l \gg h\}$:

а) колебания пластин, закрепленных с абсолютно жестким плоским основанием:

$$\sigma_{\alpha z}(x, y, h) = \sigma_{\alpha z}^+(x, y) \exp(i\Omega t), \quad \alpha = x, y, z \quad (1.1)$$

$$u(x, y, -h) = 0, \quad v(x, y, -h) = 0, \quad w(x, y, -h) = 0 \quad (1.2)$$

б) колебания, вызванные вектором перемещения, приложенным к лицевой поверхности $z = -h$ пластины

$$u(x, y, -h) = u^-(x, y) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w) \quad (1.3)$$

$$u(x, y, h) = 0, \quad (u, v, w) \quad (1.4)$$

или

$$s_{xz}(x, y, h) = s_{yz}(x, y, h) = s_{zz}(x, y, h) = 0 \quad (1.5)$$

где $\sigma_{\alpha z}^+, u^-, v^-, w^-$ – заданные функции, Ω – частота вынуждающего воздействия.

Условия (1.3), (1.4), в частности, моделируют сейсмические воздействия на подошву фундаментов сооружений, а (1.3), (1.5) – на взлетно-посадочные площадки.

Требуется найти решения динамических уравнений теории упругости ортотропного тела:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial s_{xz}}{\partial z} &= r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (x, y, z; u, v, w) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}s_{xx} + a_{12}s_{yy} + a_{13}s_{zz}, \quad (1,2,3; x, y, z; u, v, w) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{66}s_{xy}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = a_{55}s_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = a_{44}s_{yz} \end{aligned} \quad (1.6)$$

удовлетворяющие соответствующим группам условий (1.1)–(1.5), а также условиям на боковой поверхности пластины, которые не будем конкретизировать, ибо как и в статической задаче им соответствует появление пограничных слоев. Решения сформированных задач будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) &= \sigma_{jk}(x, y, z) \exp(i\Omega t) \\ (u, v, w) &= (u_x(x, y), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)) \exp(i\Omega t) \\ \alpha, \beta &= x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставив (1.7) в (1.6), затем перейдя к безразмерным координатам $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h$ и перемещениям $U = u_x/l, V = u_y/l, W = u_z/l$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 W &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= a_{11}s_{11} + a_{12}s_{22} + a_{13}s_{33}, \quad (1,2;x,h;U,V) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} &= a_{66}\sigma_{12}, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} = a_{55}\sigma_{13} \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= a_{44}\sigma_{23}, \quad \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2, \quad \varepsilon = h/l \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решение сингулярно-возмущенной системы (1.8) снова складывается из решения внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_ε) : $I = I^{\text{int}} + I_\varepsilon$. Решение внутренней задачи ищется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{\text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad j, k = 1, 2, 3; s = \overline{0, N} \\ (U^{\text{-int}}, V^{\text{int}}, W^{\text{int}}) &= \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставив (1.9) в (1.8), из новой системы все напряжения выразятся через перемещения по

формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(s)} &= -A_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{22}^{(s)} &= -A_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{33}^{(s)} &= A_{11} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \\
\sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
\sigma_{23}^{(s)} &= \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad Q^{(m)} \equiv 0, \quad m < 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) / \Delta, \quad A_{22} = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) / \Delta \\
A_{33} &= (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) / \Delta, \quad A_{12} = (a_{33}a_{12} - a_{13}a_{23}) / \Delta \\
A_{13} &= (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) / \Delta, \quad A_{23} = (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) / \Delta \\
\Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2
\end{aligned}$$

Подставив значения $\sigma_{13}^{(s)}$, $\sigma_{23}^{(s)}$, $\sigma_{33}^{(s)}$ в соответствующие первым трем уравнениям (1.8)

уравнения, получим уравнения для определения функций $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, $W^{(s)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 U^{(s)} &= R_u^{(s)}, \quad (U, V; a_{55}, a_{44}; R_u, R_v) \\
A_{11} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Omega_*^2 W^{(s)} &= R_w^{(s)}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\begin{aligned}
R_u^{(s)} &= -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (u, v; \xi, \zeta; a_{55}, a_{44}; 1, 2) \\
R_w^{(s)} &= A_{23} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Решением системы (1.11) является

$$U^{(s)} = U_0^{(s)} + u_t^{(s)}, \quad (U, V, W) \tag{1.13}$$

где первое слагаемое – решение однородных, второе – частное решение неоднородных уравнений (1.11). Удовлетворив каждой группе граничных условий (1.1)–(1.5), получим окончательное решение. Условиям (1.1), (1.2) соответствует решение

$$\begin{aligned}
U^{(s)} &= \frac{1}{\cos 2\Omega_* \sqrt{a_{55}}} [-u_t^{(s)}(x, h, -1) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 - z) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*} (s_{13}^{+(s)} - s_{13t}^{(s)}(x, h, 1)) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 + z)] + u_t^{(s)}(x, h, z) \\
s_{13}^{(s)} &= \frac{\Omega_*}{\sqrt{a_{55}} \cos 2\Omega_* \sqrt{a_{55}}} [-u_t^{(s)}(x, h, -1) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 - z) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*} (s_{13}^{+(s)} - s_{13t}^{(s)}(x, h, 1)) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 + z)] + s_{13t}^{(s)}(x, h, z)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

(U, V; a₅₅, a₄₄; 1, 2)

$$W^{(s)} = \frac{1}{\cos \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}} [-w_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \cos \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 - \zeta) + \\ + \frac{1}{\Omega_* \sqrt{A_{11}}} (\sigma_{33}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1)) \sin \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 + \zeta)] + w_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = \frac{\Omega_* \sqrt{A_{11}}}{\cos \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}} [-w_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, -1) \sin \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 - \zeta) + \\ + \frac{1}{\Omega_* \sqrt{A_{11}}} (\sigma_{33}^{+(s)} - \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, 1)) \cos \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 + \zeta)] + \sigma_{33\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{j3}^{+(0)} = \varepsilon \sigma_{j3}^+, \quad \sigma_{j3}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{13\tau}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[\frac{\partial u_{\tau}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad (1, 2; a_{55}, a_{44}; \xi, \eta)$$

$$\sigma_{33\tau}^{(s)} = A_{11} \frac{\partial w_{\tau}^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

Решение (1.7), (1.9), (1.14) будет конечным, если

$$\cos 2\Omega_* \sqrt{a_{55}} \neq 0, \quad (a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}) \quad (1.15)$$

Если Ω такова, что какое-либо из трех условий (1.15) не выполняется, произойдет резонанс, такие значения Ω совпадают с главными значениями частот собственных колебаний. Условиям (1.3), (1.4) соответствует решение

$$U^{(s)} = \frac{1}{\sin 2\Omega_* \sqrt{a_{55}}} [(u^{- (s)} - u_{\tau}^{(s)}(\zeta = -1)) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 - \zeta) - \\ - u_{\tau}^{(s)}(\zeta = 1) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 + \zeta)] + u_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta); \quad (U, V; a_{55}, a_{44}) \quad (1.16)$$

$$W^{(s)} = \frac{1}{\sin \frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}} [(w^{- (s)} - w_{\tau}^{(s)}(\zeta = -1)) \sin \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 - \zeta) - \\ - w_{\tau}^{(s)}(\zeta = 1) \sin \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 + \zeta)] + w_{\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$u^{-(0)} = u^- / \ell, \quad u^{-(s)} = 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w)$$

При условиях (1.3), (1.5) имеем

$$\begin{aligned}
U^{(s)} = & \frac{1}{\cos 2\Omega_* \sqrt{a_{55}}} [(u^{(-s)} - u_\tau^{(s)}(\zeta = -1)) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 - \zeta) - \\
& - \frac{\sqrt{a_{55}}}{\Omega_*} \sigma_{13\tau}^{(s)}(\zeta = 1) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}} (1 + \zeta)] + u_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta); \\
& (U, V; a_{55}, a_{44}; 1, 2)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
W^{(s)} = & \frac{1}{\cos \frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}}} [(w^{(-s)} - w_\tau^{(s)}(\zeta = -1)) \cos \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 - \zeta) - \\
& - \frac{1}{\Omega_* \sqrt{A_{11}}} \sigma_{33\tau}^{(s)}(\zeta = 1) \sin \frac{\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} (1 + \zeta)] + w_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)
\end{aligned}$$

Напряжения вычисляются по формулам (1.7), (1.9), (1.10), а $\sigma_{13\tau}^{(s)}$, $\sigma_{23\tau}^{(s)}$, $\sigma_{33\tau}^{(s)}$ – по формулам (1.14). Эти решения будут конечными, если, соответственно,

$$\sin 2\Omega_* \sqrt{a_{55}} \neq 0, \quad \sin 2\Omega_* \sqrt{a_{44}} \neq 0, \quad \sin \frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} \neq 0 \tag{1.18}$$

$$\cos 2\Omega_* \sqrt{a_{55}} \neq 0, \quad \cos 2\Omega_* \sqrt{a_{44}} \neq 0, \quad \cos \frac{2\Omega_*}{\sqrt{A_{11}}} \neq 0 \tag{1.19}$$

Значения Ω , при которых хотя бы одно из условий (1.18) или (1.19) не выполняется, соответствуют резонансу. Эти значения совпадают с главными значениями частот собственных колебаний пластинки при соответствующих однородных условиях на лицевых плоскостях $z = \pm h$. Отметим важный факт – если входящие в граничные условия функции $\sigma_{j\gamma}^+$, u^- , v^- , w^- являются полиномами от ξ , η , то итерационный процесс обрывается, в результате, во внутренней динамической задаче получаем точное решение (решение для слоя).

Изложенный выше подход можно использовать для решения задач о вынужденных колебаниях слоистых пластин. Для этого решаются уравнения (1.6) для произвольного слоя с номером „ k ”, структура решения (1.7), (1.9)–(1.13) остается неизменной, лишь всем величинам приписывается индекс „ k ”, затем удовлетворяются граничные условия на лицевых поверхностях и условия полного контакта между слоями. В качестве иллюстрации приведем решение для двухслойной ортотропной пластины $D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, \min(a, b) = l, h_1 + h_2 = h, h \leq l\}$, соответствующее условиям (1.3) при $z = -h_2$ и условиям (1.4) при $z = h_1$, когда $u^-, v^-, w^- = \text{const}$. Итерация обрывается на исходном приближении и получаем следующее точное решение:

$$u_k = \tilde{u}_k \exp i\Omega t, \quad (u, v, w), \quad \sigma_{jmk} = \tilde{\sigma}_{jmk} \exp i\Omega t, \quad k = I, II \tag{1.20}$$

для первого слоя ($0 \leq \zeta \leq \zeta_1$, $\zeta_1 = h_1/h$)

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_I &= u^- \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \frac{\Omega_*}{\Delta_1} \sin a_1^I \Omega_* (\zeta_1 - \zeta) \\
\tilde{v}_I &= v^- \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}} \frac{\Omega_*}{\Delta_2} \sin a_2^I \Omega_* (\zeta_1 - \zeta) \\
\tilde{w}_I &= w^- \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}} \frac{\Omega_*}{\Delta_3} \sin a_3^I \Omega_* (\zeta_1 - \zeta)
\end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\tilde{\sigma}_{13I} = \frac{1}{ha_{55}^I} \frac{\partial \tilde{u}_I}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{23I} = \frac{1}{ha_{44}^I} \frac{\partial \tilde{v}_I}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{33I} = \frac{A_{11}^I}{h} \frac{\partial \tilde{w}_I}{\partial \zeta}$$

$$\tilde{\sigma}_{12I} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{11I} = -\frac{A_{23}^I}{h} \frac{\partial \tilde{w}_I}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{22I} = -\frac{A_{13}^I}{h} \frac{\partial \tilde{w}_I}{\partial \zeta}$$

для второго слоя ($-\zeta_2 \leq \zeta \leq 0$, $\zeta_2 = h_2/h$)

$$\tilde{u}_{II} = \left[\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \sin a_1^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_1^{II} \Omega_* \zeta - \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos a_1^I \Omega_* \zeta_1 \sin a_1^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{\Omega_*}{\Delta_1} u^-$$

$$\tilde{v}_{II} = \left[\sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}} \sin a_2^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_2^{II} \Omega_* \zeta - \sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}} \cos a_2^I \Omega_* \zeta_1 \sin a_2^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{\Omega_*}{\Delta_2} v^- \quad (1.22)$$

$$\tilde{w}_{II} = \left[\sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}} \sin a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta - \sqrt{A_{11}^I \rho_I} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta \right] \frac{\Omega_*}{\Delta_3} w^-$$

$$\tilde{\sigma}_{13II} = \frac{1}{ha_{55}^{II}} \frac{\partial \tilde{u}_{II}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{23II} = \frac{1}{ha_{44}^{II}} \frac{\partial \tilde{v}_{II}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{33II} = \frac{A_{11}^{II}}{h} \frac{\partial \tilde{w}_{II}}{\partial \zeta}$$

$$\tilde{\sigma}_{12II} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{11II} = -\frac{A_{23}^{II}}{h} \frac{\partial \tilde{w}_{II}}{\partial \zeta}, \quad \tilde{\sigma}_{22II} = -\frac{A_{13}^{II}}{h} \frac{\partial \tilde{w}_{II}}{\partial \zeta}$$

$$a_1^k = \sqrt{a_{55}^k \rho_k}, \quad a_2^k = \sqrt{a_{44}^k \rho_k}, \quad a_3^k = \sqrt{\frac{\rho_k}{A_{11}^k}}, \quad k = I, II$$

$$\Delta_1 = \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{55}^I}} \cos a_1^I \Omega_* \zeta_1 \sin a_1^{II} \Omega_* \zeta_2 + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{55}^{II}}} \sin a_1^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_1^{II} \Omega_* \zeta_2 \right) \Omega_*$$

$$\Delta_2 = \left(\sqrt{\frac{\rho_I}{a_{44}^I}} \cos a_2^I \Omega_* \zeta_1 \sin a_2^{II} \Omega_* \zeta_2 + \sqrt{\frac{\rho_{II}}{a_{44}^{II}}} \sin a_2^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_2^{II} \Omega_* \zeta_2 \right) \Omega_*$$

$$\Delta_3 = \left(\sqrt{A_{11}^I \rho_I} \cos a_3^I \Omega_* \zeta_1 \sin a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 + \sqrt{A_{11}^{II} \rho_{II}} \sin a_3^I \Omega_* \zeta_1 \cos a_3^{II} \Omega_* \zeta_2 \right) \Omega_*$$

Решение (1.20)–(1.21) будет конечным, если

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \quad \Delta_3 \neq 0 \quad (1.23)$$

в противном случае возникнет резонанс и соответствующие значения Ω будут совпадать с главными значениями частот собственных колебаний двухслойной пластинки. Этот результат может иметь очевидное приложение в сейсмостойком строительстве. Двухслойная пластина моделирует пакет фундамент-основание сооружений. Обычно мощность (толщина) и упругие характеристики сжимаемого слоя (основания) известны, известна также область изменения частот Ω внешнего динамического (сейсмического) воздействия. Используя формулы (1.22) для $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, можно так подобрать параметры первого слоя (фундамента), чтобы выполнялись условия (1.23), т.е. сооружение с самого начала не попало в резонансное состояние.

По изложенной выше процедуре выписываются решения для трехслойных и многослойных пластин. Анализ асимптотического решения соответствующих трехмерных краевых задач для трехслойных пластин также приводит к важным заключениям. Установлено, что когда к лицевой поверхности нижнего-третьего слоя приложен вектор перемещения, который во времени меняется гармонически, а верхний слой жестко закреплен или свободен, то если все три слоя состоят из жестких схожих материалов, амплитуды колебаний вырастают, хоть и незначительно, от слоя к слою. При наличии же среднего слоя из более мягкого материала (например, резины) амплитуды колебаний в верхнем слое, в особенности тангенциальных колебаний, резко уменьшаются [16]. Установленный факт доказывает необходимость исполь-

зования сейсмоизоляторов в сейсмостойком строительстве, ибо при построении сооружений, если между бетонным фундаментом и основанием вставить тонкий слой резиноподобного мягкого материала, это приведет к уменьшению опасных колебаний в фундаменте при землетрясениях и, как следствие, к увеличению сейсмостойкости сооружения.

В случае первой динамической краевой задачи теории упругости для полос-балок, пластин и оболочек (на лицевых поверхностях заданы соответствующие компоненты тензора напряжений) асимптотика статической задачи: $q_{\sigma_{xx}} = q_{\sigma_{xy}} = q_{\sigma_{yy}} = -2$, $q_{\sigma_{xz}} = q_{\sigma_{yz}} = -1$, $q_{\sigma_{zz}} = 0$, $q_u = q_v = -2$, $q_w = -3$ приводит к противоречивым соотношениям, но проходит приводимая выше асимптотика (1.7), (1.9) смешанной задачи [17]. В этом смысле асимптотика (1.7), (1.9) является универсальной. Процедура нахождения общего решения неизменная [17].

IV. Асимптотика собственных колебаний пластин и оболочек

1. В предыдущей главе мы отметили особую роль частот собственных колебаний для возникновения резонансных состояний. Асимптотический метод позволяет определить значения частот и формы собственных колебаний изотропных и анизотропных пластин и оболочек на основе уравнений динамики трехмерной задачи теории упругости. Рассмотрим представляющие наибольший интерес варианты собственных колебаний пластин и оболочек. Поставим задачу: найти частоты собственных колебаний и собственных функций ортотропной пластинки $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, \min(a, b) = l, l \gg h\}$, соответствующие следующим условиям на лицевых поверхностях:

$$u(x, y, -h) = v(x, y, -h) = w(x, y, -h) = 0 \quad (1.1)$$

$$u(x, y, h) = v(x, y, h) = w(x, y, h) = 0 \quad (1.2)$$

или

$$\sigma_{xz}(x, y, h) = \sigma_{yz}(x, y, h) = \sigma_{zz}(x, y, h) = 0 \quad (1.3)$$

Для этого необходимо найти ненулевые решения динамических уравнений (III 1.6) при условиях (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3). Ниже убедимся, что условия на боковой поверхности не влияют на значения частот собственных колебаний, им соответствуют колебания в пограничном слое с той же частотой собственных колебаний во внутренней задаче. Решения поставленных задач поищем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) &= \sigma_{jk}(x, y, z) \exp(i\omega t) \\ (u, v, w) &= (u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)) \exp(i\omega t) \\ \alpha, \beta &= x, y, z; \quad j, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где ω – частота собственных колебаний. После перехода к безразмерным координатам $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и перемещениям $U = u_x/l$, $V = u_y/l$, $W = u_z/l$ динамические уравнения трехмерной задачи примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 U &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 V &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 W = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33}, \quad (1, 2; \xi, \eta; U, V) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{11} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{12}, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{13}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23}, \quad \omega_*^2 = \rho h^2 \omega^2, \quad \varepsilon = h / \ell$$

Решение сингулярно-возмущенной системы (1.5) имеет вид $I = I^{\text{int}} + I_\varepsilon$. Решение внутренней задачи I^{int} будем искать в виде [18]

$$\sigma_{jk}^{\text{int}} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$(U^{\text{int}}, V^{\text{int}}, W^{\text{int}}) = \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}) \quad (1.6)$$

$$\omega_*^2 = \varepsilon^s \omega_{*s}^2, \quad s = \overline{0, N}$$

Подставив (1.6) в (1.5) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему, откуда напряжения будут выражаться через перемещения по формулам (III 1.10), последние определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = R_u^{(s)}, \quad (U, V; a_{55}, a_{44}), \quad k = \overline{0, s} \quad (1.7)$$

$$R_u^{(s)} = -\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \left[\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad (U, V; \xi, \eta; a_{55}, a_{44}; 1, 2)$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \omega_{*k}^2 W^{(s-k)} = R_w^{(s)}, \quad k = \overline{0, s} \quad (1.8)$$

$$R_w^{(s)} = A_{23} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \left[\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right]$$

При $s = 0$ $R_u^{(0)} = R_v^{(0)} = R_w^{(0)} = 0$, уравнения (1.7), (1.8) становятся независимыми. Решив уравнение (1.7) и удовлетворив условиям (1.1), (1.2) для u , получим систему однородных алгебраических уравнений, для существования ненулевого решения которой необходимо выполнение уравнения

$$\sin 2\sqrt{a_{55}} w_{*0} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{откуда } \omega_{*0n} = \frac{\pi n}{2\sqrt{a_{55}}}, \quad n \in N$$

или

$$\omega_{0n}^{xz} = \frac{\pi n}{2h\sqrt{\rho a_{55}}} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}, \quad n \in N \quad (1.10)$$

Удовлетворив остальным условиям (1.1), (1.2), получим дисперсионные уравнения

$$\sin 2\sqrt{a_{44}} w_{*0} = 0, \quad \sin \frac{2}{\sqrt{A_{11}}} w_{*0} = 0 \quad (1.11)$$

которым соответствуют следующие значения частот:

$$w_{0n}^{yz} = \frac{\pi n}{2h\sqrt{\rho a_{44}}} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{G_{23}}{\rho}}, \quad n \in N \quad (1.12)$$

$$\omega_{0n}^p = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}} = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\frac{E_3}{\rho} \frac{1 - v_{12} v_{21}}{1 - v_{12} v_{21} - v_{31}(v_{12} v_{23} + v_{13}) - v_{32}(v_{21} v_{13} + v_{23})}} \quad (1.13)$$

где G_{13} , G_{23} – модули сдвига, $\sqrt{\frac{G_{13}}{S}} = v_s^{xz}$, $\sqrt{\frac{G_{23}}{S}} = v_s^{yz}$ – известные в сейсмологии скорости

распространения сдвиговых волн, а $V_p = \sqrt{\frac{A_{11}}{S}}$ – скорость продольных волн. Частотам (1.10)

соответствуют следующие собственные функции и решения:

$$U_{nI}^{(0)} = C_{un}^{(0)}(\xi, \eta) \sin \pi n \zeta \text{ или } U_{nI}^{(0)} = C_{un}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta \quad (1.14)$$

$$\sigma_{13I}^{(0)} = \frac{1}{a_{55}} \frac{\partial U_{nI}^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{23I}^{(0)} = 0, \quad V_{nI}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{11I}^{(0)} = \sigma_{22I}^{(0)} = \sigma_{33I}^{(0)} = \sigma_{12I}^{(0)} = 0, \quad W_{nI}^{(0)} = 0$$

Частотам (1.12) соответствуют

$$V_{nII}^{(0)} = C_{vn}^{(0)}(\xi, \eta) \sin \pi n \zeta \text{ или } V_{nII}^{(0)} = C_{vn}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta \quad (1.15)$$

$$\sigma_{23II}^{(0)} = \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial V_{nII}^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{13II}^{(0)} = 0, \quad U_{nII}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{12II}^{(0)} = 0, \quad W_{nII}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{11II}^{(0)} = \sigma_{22II}^{(0)} = 0$$

В случае частот (1.13) имеем

$$W_{nIII}^{(0)} = C_{wn}^{(0)}(\xi, \eta) \sin \pi n \zeta \text{ или } W_{nIII}^{(0)} = C_{wn}^{(0)}(\xi, \eta) \cos \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta \quad (1.16)$$

$$\sigma_{33III}^{(0)} = A_{11} \frac{\partial W_{nIII}^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{11III}^{(0)} = -A_{23} \frac{\partial W_{nIII}^{(0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{22III}^{(0)} = -A_{13} \frac{\partial W_{nIII}^{(0)}}{\partial \zeta}$$

$$U_{nIII}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{13III}^{(0)} = 0, \quad V_{nIII}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{23III}^{(0)} = \sigma_{12III}^{(0)} = 0$$

Собственные функции $\{\varphi_n\} = \{\sin \pi n \zeta\}$, $\{\psi_n\} = \left\{ \cos \frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta \right\}$ составляют ортонорми-

рованную систему на интервале $[-1, 1]$. Таким образом, в пластине возникают два типа сдвиговых ((1.14), (1.15)) и продольные ((1.16)) колебания. При $s \geq 1$ решение уравнений (1.10), (1.12) можно отыскать в виде ряда по собственным функциям $\{\varphi_n\}$ или $\{\psi_n\}$ исходного приближения для каждого варианта (1.10), (1.12), (1.13) значений частот. Вычисления показывают, что

$$u_{nI}^{(1)} = 0, \quad w_{*1nI} = 0, \quad V_{nI}^{(1)} \neq 0, \quad W_{nI}^{(1)} \neq 0 \quad (1.17)$$

$$u_{nI}^{(2)} \neq 0, \quad w_{*2nI} \neq 0, \quad V_{nI}^{(2)} \neq 0, \quad W_{nI}^{(2)} \neq 0$$

Если ограничиться приближениями $s = 0, 1, 2$, будем иметь

$$U_{nI} = U_{nI}^{(0)} + \varepsilon^2 U_{nI}^{(2)}, \quad \omega_{*nI}^2 = \omega_{*0nI}^2 + \varepsilon^2 \omega_{*2nI}^2 \quad (1.18)$$

$$V_{nI} = \varepsilon V_{nI}^{(1)} + \varepsilon^2 V_{nI}^{(2)}, \quad W_{nI} = \varepsilon W_{nI}^{(1)} + \varepsilon^2 W_{nI}^{(2)}$$

Из (1.18) следуют два важных свойства: 1) поправка к основному решению и частоте порядка $O(\varepsilon^2)$, поэтому при малых ε можно ограничиться исходным приближением; 2) сдвиговые колебания одного типа порождают сдвиговые колебания другого типа, а также продольные колебания и оба с той же основной частотой, однако амплитуды сопутствующих колебаний на порядок меньше основных. Аналогичная картина имеет место для частот (1.12), (1.13).

Рассмотрим граничные условия (1.1), (1.3). Им соответствуют уравнения частот

$$\cos 2\sqrt{a_{55}} \omega_{*0} = 0, \quad (a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}}) \quad (1.19)$$

которым соответствуют частоты

$$\omega_{0n}^I = \frac{\pi}{4h\sqrt{\rho a_{55}}}(2n+1) = \frac{\pi}{4h} \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho}}(2n+1), \quad n \in N \quad (1.20)$$

$$(I, II, III; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}; G_{13}, G_{23}, A_{11})$$

Несложно выписать и собственные функции. Рассмотрение собственных колебаний в зоне пограничного слоя приводит к заключению, что каждой частоте, определенной из решения внутренней задачи, соответствует семейство пограничных функций, которые при удалении от боковой поверхности во внутрь пластинки убывают экспоненциально, т.е. в зоне пограничного слоя при собственных колебаниях создается пестрая картина.

2. В случае слоистых пластинок основные уравнения и соотношения упругости те же, лишь всем величинам приписывается номер слоя „ k ”. Записывается решение для произвольного слоя „ k ”, которое по виду совпадает с решением внутренней задачи для однослойной пластинки [19], затем удовлетворяются условия (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3) на лицевых поверхностях слоистого пакета и условия полного контакта между всеми слоями. В результате получаем систему из однородных алгебраических уравнений. Условие существования ненулевого решения этой системы (определитель равен нулю) и есть уравнение частот собственных колебаний. Для двухслойных ортотропных пластин $D\{(x, y, z); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, \min(a, b) = l, h = h_1 + h_2, h \ll l\}$ получаются три варианта независимых уравнений при $s = 0$

$$\sqrt{\frac{a_{55}^{II} \rho_I}{a_{55}^I \rho_{II}}} \sin \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{*0} \zeta_1 \sin \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{*0} \zeta_2 - \cos \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{*0} \zeta_1 \cos \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{*0} \zeta_2 = 0 \quad (2.1)$$

$$(a_{55}^k, a_{44}^k, 1/A_{11}^k), \quad \zeta_1 = h_1/h, \quad \zeta_2 = h_2/h; \quad k = I, II$$

соответствующие граничным условиям

$$\sigma_{xz}^I = \sigma_{yz}^I = \sigma_{zz}^I = 0 \quad \text{для } z = h_1 \quad (2.2)$$

$$u^{II} = v^{II} = w^{II} = 0 \quad \text{для } z = -h_2 \quad (2.3)$$

собственными функциями являются

$$U^{(I,0)} = C_u^{(I,0)} \cos \sqrt{a_{55}^I \rho_I} \omega_{*0} (\zeta - \zeta_1)$$

$$U^{(II,0)} = C_u^{(II,0)} \sin \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \omega_{*0} (\zeta + \zeta_2) \quad (2.4)$$

$$(a_{55}^k, a_{44}^k, 1/A_{11}^k)$$

Уравнения (2.1) приводятся к стандартному виду

$$\cos p \omega_{*0} + r \cos q \omega_{*0} = 0 \quad (2.5)$$

где

$$p = \zeta_1 \sqrt{a_{55}^I \rho_I} + \zeta_2 \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}}, \quad q = \zeta_1 \sqrt{a_{55}^I \rho_I} - \zeta_2 \sqrt{a_{55}^{II} \rho_{II}} \quad (2.6)$$

$$r = \frac{\sqrt{a_{55}^I \rho_{II}} - \sqrt{a_{55}^{II} \rho_I}}{\sqrt{a_{55}^I \rho_{II}} + \sqrt{a_{55}^{II} \rho_I}}, \quad (a_{55}^k, a_{44}^k, 1/A_{11}^k), \quad k = I, II$$

корни которых нетрудно найти, если заданы упругие и геометрические параметры слоистого пакета. Можно получить дисперсионные уравнения и для трехслойных и многослойных пластин.

Если ввести функцию φ_m

$$\varphi_m = \begin{cases} \sqrt{\rho_I} U_m^{(I,0)}, & 0 \leq \zeta \leq \zeta_1 \\ \sqrt{\rho_{II}} U_m^{(II,0)}, & -\zeta_2 \leq \zeta \leq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

можно убедиться, что функции $\{\varphi_m\}$ ортогональны на интервале $[-\zeta_2, \zeta_1]$, т.е. собственные функции ортогональны с весом.

Изложенный подход определения частот и форм собственных колебаний распространяется и на оболочки [20], в частности, установлено, что $\omega_{*1n} \neq 0$, т.е. если ограничиться исходным приближением, погрешность будет порядка $O(\varepsilon)$.

V. Асимптотическое решение первой динамической краевой задачи

1. Мы выделили этот класс задач для отдельного рассмотрения, поскольку асимптотика напряжений и перемещений в динамической задаче оказалась принципиально отличной от асимптотики в соответствующей статической задаче.

Рассмотрим вынужденные колебания ортотропных балок-полос $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, |y| \leq h, h \ll l\}$ при граничных условиях первой краевой задачи теории упругости на лицевых поверхностях $y = \pm h$:

$$\begin{aligned} s_{xy}(x, \pm h) &= \pm X^\pm(x) \exp i\Omega t \\ s_{yy}(x, \pm h) &= \pm Y^\pm(x) \exp i\Omega t \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $X^\pm, Y^\pm$ – известные функции, Ω – частота вынуждающего воздействия. Считается, что балка находится в условиях плоской деформации. Условия на торцах $x = 0, l$ пока не будем конкретизировать.

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, t) &= \sigma_{jk}(x, y) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y; j, k = 1, 2 \\ u(x, y, t), v(x, y, t) &= (u_x(x, y), u_y(x, y)) \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Подставив (1.2) в уравнения динамической задачи, затем перейдя к безразмерным переменным $\xi = x/l, \zeta = y/h$ и перемещениям $U = u_x/l, V = u_y/l$, получим сингулярно возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \beta_{11} \sigma_{11} + \beta_{12} \sigma_{22}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \beta_{12} \sigma_{11} + \beta_{22} \sigma_{22} \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} &= a_{66} \sigma_{12}, \quad \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2 \\ \beta_{jk} &= \frac{1}{a_{33}} (a_{jk} a_{33} - a_{j3} a_{k3}), \quad j, k = 1, 2, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение системы (1.3) опять складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_ε): $I = I^{\text{int}} + I_\varepsilon$. Решение внутренней задачи, способное удовлетворять условиям (1.1), имеет вид

$$\sigma_{jk}^{\text{int}} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)}(\xi, \zeta), \quad (U, V) = \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}), \quad s = \overline{0, N} \quad (1.4)$$

Отметим весьма важный факт – асимптотика (1.4) решения динамической задачи принципиально отличается от асимптотики (I.2.7), (I.2.8) соответствующей статической задачи. Асимптотика (1.4) универсальна, поскольку она остается неизменной во всех динамических плоских и пространственных краевых задачах для тонких тел-балок, пластин и оболочек, а также во второй и смешанной статических краевых задачах.

Подставив (1.4) в (1.3), из полученной системы $\sigma_{jk}^{(s)}$ можно выразить через $U^{(s)}, V^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(-\beta_{12} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{22}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left(-\beta_{11} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \\ \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \Delta = \beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2, \quad Q^{(m)} \equiv 0 \quad \text{при} \quad m < 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Величины $U^{(s)}$, $V^{(s)}$ определяются из уравнений

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66} \Omega_*^2 U^{(s)} = f_u^{(s)}, \quad \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta}{\beta_{11}} \Omega_*^2 V^{(s)} = f_v^{(s)} \quad (1.6)$$

$$f_u^{(s)} = -a_{66} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \quad f_v^{(s)} = \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\Delta}{\beta_{11}} \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

Решениями уравнений (1.6) являются

$$U^{(s)} = C_1^{(s)}(\xi) \sin \sqrt{a_{66}} \Omega_* \zeta + C_2^{(s)}(\zeta) \cos \sqrt{a_{66}} \Omega_* \zeta + \bar{u}^{(s)}$$

$$V^{(s)} = C_3^{(s)}(\xi) \sin \sqrt{\frac{\Delta}{\beta_{11}}} \Omega_* \zeta + C_4^{(s)}(\zeta) \cos \sqrt{\frac{\Delta}{\beta_{11}}} \Omega_* \zeta + \bar{v}^{(s)} \quad (1.7)$$

где $\bar{u}^{(s)}$, $\bar{v}^{(s)}$ – частные решения уравнений (1.6). Четыре функции $C_j^{(s)}(\xi)$ однозначно определяются из четырех условий (1.1). Используя (1.2), (1.4), (1.5), (1.7), удовлетворив этим условиям и подставив найденные значения $C_j^{(s)}$ в (1.7), определим следующее решение внутренней задачи:

$$U^{(s)} = -\frac{\sqrt{a_{66}}}{\Omega_* \sin 2\sqrt{a_{66}} \Omega_*} [(X^{+(s)} - f_{\sigma_{12}}^{(s)}(\xi, 1)) \cos \sqrt{a_{66}} \Omega_* (1 + \zeta) +$$

$$+ (X^{-(s)} + f_{\sigma_{12}}^{(s)}(\xi, -1)) \cos \sqrt{a_{66}} \Omega_* (1 - \zeta)] + \bar{u}^{(s)}(\xi, \zeta)$$

$$V^{(s)} = -\frac{1}{\Omega_* \sin 2\sqrt{\frac{\Delta}{\beta_{11}}} \Omega_*} \sqrt{\frac{\Delta}{\beta_{11}}} [(Y^{+(s)} - f_{\sigma_{22}}^{(s)}(\xi, 1)) \cos \sqrt{\frac{\Delta}{\beta_{11}}} \Omega_* (1 + \zeta) +$$

$$+ (Y^{-(s)} + f_{\sigma_{22}}^{(s)}(\xi, -1)) \cos \sqrt{\frac{\Delta}{\beta_{11}}} \Omega_* (1 - \zeta)] + \bar{v}^{(s)}(\xi, \zeta)$$

$$f_{\sigma_{12}}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial \bar{u}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad f_{\sigma_{22}}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left(\beta_{11} \frac{\partial \bar{v}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \beta_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \right)$$

$$X^{\pm(0)} = \varepsilon X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = \varepsilon Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = Y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0$$

Из решения (1.8) следует, что в первой краевой динамической задаче решение внутренней задачи полностью определяется из условий на продольных краях $y = \pm h$, в отличие от первой статической краевой задачи (I.2.1) – (I.2.3), когда соответствующее решение содержит постоянные, которые должны определяться из условий на торцевых сечениях $x = 0, l$. Следовательно, динамический пограничный слой не будет влиять на решение внутренней задачи и будет устранять неувязку на поперечных кромках $x = 0, l$, т.е. на боковой поверхности.

Решение (1.8) будет конечным, если

$$\sin 2\sqrt{a_{66}} \Omega_* \neq 0, \quad \sin 2\sqrt{\Delta/\beta_{11}} \Omega_* \neq 0 \quad (1.9)$$

Как во второй и смешанной динамических задачах, условия (1.9) будут нарушены, когда частота Ω внешнего воздействия совпадет с главным значением частоты собственных (свободных) колебаний. Эти значения определяются аналогичным образом [21]. Тем же способом можно решить пространственную динамическую первую краевую задачу для пластин и оболочек. Асимптотика (1.4) сохраняется: для всех компонент тензора напряжений $O(\varepsilon^{-1+s})$, а для перемещений $O(\varepsilon^s)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vazov V. Asymptotic decompositions of solution of ordinary differential equations. M.: Mir. 1968. 464 p.
2. Nayfeh A.H. Perturbation methods. John Wiley and Sons. 1973. 455 p.
3. Lomov S.A. Introduction into the general theory of singular perturbation. M.: Nauka. 1981. 398 p.
4. Goldenveiser A.L. Construction of approximation theory of plate bending with the asymptotic integration method of equations of elasticity theory. Journal of Applied Math. and Mech. 1962. V.26. Edition 4. Pp.668-686.
5. Aghalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells. M.: Nauka. Fizmatlit. 1997. 414 p.
6. Бабиц В.М., Булдырев В.С. Искусство асимптотики // Вестник Ленинградского ун-та. 1977. №13. Вып.3. С.5-12.
7. Агаловян Л.А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1977. Т.30. №5. С.48-62.
8. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том I. М.: Наука. 1975. 832 с.
9. Timoshenko S. Strength of Materials. Part.I. D.Van Nistrand Company. INC. Princeton. 1955. 361p.
10. Aghalovyan L.A., Khachatryan A.M. Asymptotic analysis of stress-strain state of anisotropic layered beams//Proceedings of AS ARMSSR. Mechanics. 1986. V.39. №2, pp.3-14.
11. Lekhnitsky S.G. The anisotropic plates. M.:Gostekhizdat. 1957. 463 p.
12. Ambartsumyan S.A. Theory of anisotropic shells. M.: Phismathgiz. 1961. 344 p.
13. Aghalovyan L.A. On the structure of solution of one class of plane problems of elasticity theory of anisotropic body//Mechanics: Interuniversity transactions: Yerevan University Publishing House. 1982. Edit. 2. Pp. 7-12.
14. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз. 1960. 491 с.
15. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S. Nonclassical boundary-value problems of anisotropic layered beams, plates and shells. Yerevan. Publishing house of the National Academy of Sciences of Armenia. 2005. 468 p.
16. Aghalovyan L.A., Hovhannisyan R.Zh. Theoretical proof of seismoisolators application necessity. International Workshop on Base Isolated High-Rise Buildings. (Yerevan, Armenia. June 15-19. 2006). Proceedings, Yerevan: "Gasprint". 2008. pp.185-199.
17. Aghalovyan L.A., Zakaryan T.V. An asymptotic solution of dynamic first boundary problem of the theory of elasticity for orthotropic strip. Topical problems of continuum mechanics. Proceedings of International Conference. Yerevan, Armenia. 2007. Pp.21-27.
18. Aghalovyan L.A., Hovhannisyan R.Zh. Free vibrations of orthotropic plates under mixed-boundary conditions on face surfaces. Proc. of NAS of Armenia. Mechanics. 2003. Vol. 56. №4 pp. 18-28.
19. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Асимптотика собственных колебаний трехслойной ортотропной пластинки при смешанных краевых условиях. The problems of dynamics of interaction of deformable media. Yerevan. 2005. Pp.10-18.
20. Aghalovyan L.A., Gulgazaryan L.G. Asimptotic solutions of non-classical boundary-value problems of the natural vibrations of orthotropic shells. Journal of Applied mathematics and Mechanics. 70 (2006). Pp.102-115.
21. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О частотах и формах собственных колебаний ортотропной полосы со свободными продольными краями. //В сб.: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван. 2008. С. 36-42.

Сведения об авторе

Агаловян Ленсер Абгарович – Академик НАН РА, д.ф.-м.н., заведующий отделом механики тонкостенных систем Института механики НАН РА, советник директора Института, (374 10) 52 58 35

E-mail: aghal@mechins.sci.am

НОВЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

Григорян Э.Х., Агаян К.Л.

Строгие аналитические методы решения краевых задач занимают особое место в задачах математической физики. Из них, метод факторизации успешно используется для нахождения точных решений многочисленных важных и интересных задач электродинамики, акустики и теории упругих волн. Решения этих задач зачастую выражаются интегралами типа Фурье, которые за исключением немногих частных случаев, в конечном виде не вычисляются. Однако волновое поле в дальней зоне, которое, как правило, и представляет наибольший интерес, особенно в задачах дифракции со связанными полями, можно выразить в более простом виде, если применить для приближенного вычисления этих интегралов асимптотические методы.

В предлагаемой работе, на примере решения задачи о дифракции сдвиговой плоской волны на крае полубесконечной трещины в упругой плоскости, демонстрируется новый подход к определению этих асимптотических формул. В отличие от хорошо известных традиционных методов решения подобных задач [1–3], здесь решение задачи сводится к краевой задаче типа Римана на действительной оси [5–10]. Для исследования полученного в виде интеграла Фурье решения, разрезы в комплексной плоскости проводятся по координатным осям и, в итоге, решение задачи представляется при помощи регулярных интегралов на разрезах.

Далее, асимптотические формулы, в обход общепринятого метода перевала [1–4], определяются интегрированием по частям интегралов, представляющих волновое поле.

1. Рассмотрим упругую плоскость, содержащую полубесконечную трещину по отрицательной полуоси Ox декартовой системы координат Oxy .

Исследуем распределение волнового поля, предполагая, что из бесконечности падает сдвиговая плоская волна

$$u_z^{(\infty)}(x, y, t) = w_{\infty}(x, y) e^{-i\omega t} = e^{-ik(x \cos \beta + y \sin \beta + ct)} \quad (1.1)$$

где $w_{\infty}(x, y)$ – амплитуда, $\beta (0 < \beta < \pi/2)$ – угол скольжения падающей упругой волны с осью Ox , k – волновое число, $c = \omega/k = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговых упругих волн, μ – модуль сдвига, ρ – плотность среды, ω – частота колебаний, t – время.

Представляя единственное, отличное от нуля, упругое перемещение в виде

$$u_z(x, y, t) = w(x, y) e^{-i\omega t}, \quad (1.2)$$

решение задачи при помощи действительного преобразования Фурье можно свести к следующему функциональному уравнению (краевая задача типа Римана) на действительной оси

$$\mu^{-1} \bar{\phi}_+(\sigma) + (\sigma) \bar{\psi}_-(\sigma) = -2\pi i k \sin \beta \cdot \delta(\sigma - k \cos \beta) \quad (1.3)$$

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \quad (1.4)$$

где $\delta(x)$ – известная функция Дирака, $\bar{\phi}_+(\sigma)$ и $\bar{\psi}_-(\sigma)$ – трансформанты Фурье неизвестных функций $\phi_+(x)$ и $\psi_-(x)$, которые связаны с амплитудой $w(x, y)$ зависимостями

$$\begin{aligned} w(x_1 + 0) - w(x, -0) &= 2\psi_-(x), & -\infty < x < \infty \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=+0} &= \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-0} = \mu^{-1} \phi_+(x), & -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (1.5)$$

представляющими граничные и контактные условия на линии $y = 0$. При этом, $\phi_+(x) = 0$ при $x < 0$ и $\psi_-(x) = 0$ при $x > 0$.

Функция из (1.4) $\sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, и $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, т.е. действительная ось обходит точки ветвления функции $\sqrt{\alpha^2 - k^2}$ $\sigma = -k$ сверху, а $\sigma = k$ снизу, тем самым, обеспечивая выполнение условий уходящей волны [1].

Решение функционального уравнения (1.3) при помощи известного представления

$$2\pi i \delta(\sigma - k \cos \beta) = \frac{1}{\sigma - k \cos \beta - i0} - \frac{1}{\sigma - k \cos \beta + i0} \quad (1.6)$$

дается в следующем виде:

$$\bar{\Psi}_-(\sigma) = -\frac{D}{\sqrt{\sigma - k}(\sigma - k \cos \beta - i0)}; \quad D = \sqrt{2k} \sin \beta / 2, \quad (1.7)$$

а решение задачи – в виде

$$w(x, y) = \mp \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma|y|} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma - k}(\sigma - k \cos \beta - i0)} + w_{\infty}(x, y) \quad (1.8)$$

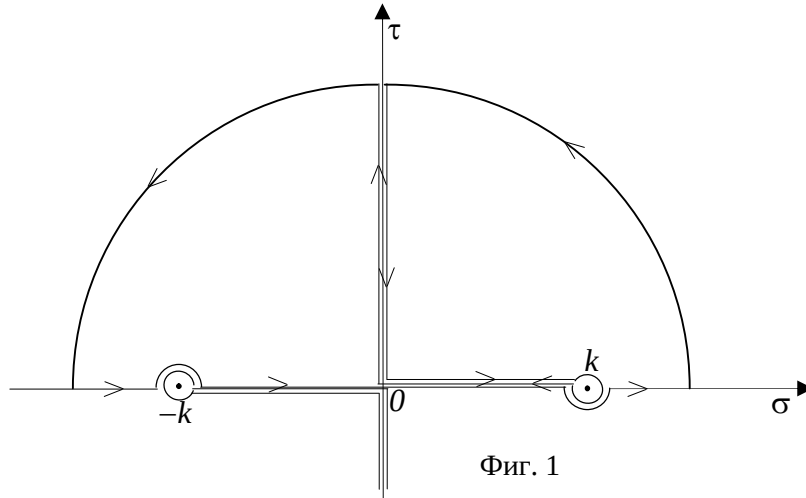
где $w_{\infty}(x, y)$ дается формулой (1.1).

Имея в виду (1.6), решение (1.8) можно представить еще и в виде

$$w(x, y) = \mp \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma + k} e^{-\gamma|y|} e^{-i\sigma x}}{\gamma(\sigma - k \cos \beta + i0)} d\sigma \pm e^{-ikx \cos \beta + ik|y| \sin \beta} + w_{\infty}(x, y) \quad (1.9)$$

Отметим, что в формулах (1.8) и (1.9) для $y \geq 0$ следует брать верхние знаки, а для $y \leq 0$ – нижние.

2 Перейдем к исследованию распределения волнового поля упругих перемещений. Для детального исследования интегральных составляющих, входящих в (1.8) и (1.9), переходим в комплексную плоскость, разрезанную указанным на фиг.1 образом, и преобразуем интегралы при помощи контурного интегрирования. В связи с особенностями аналитического продолжения подынтегральных функций в комплексную плоскость и последующего использования леммы Жордана, очевидно, что при $x < 0$ контур интегрирования следует замкнуть в верхней полуплоскости и пользоваться формулой (1.9), а при $x > 0$ – в нижней полуплоскости и использовать формулу (1.8).



Фиг. 1

Рассмотрим сначала область $\Omega_{21}(x < 0, y \geq 0)$. Тогда из (1.9) получим

$$w(x, y) = -\frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi_1(\tau) \left[e^{-i\sqrt{k^2 + \tau^2} y} + e^{i\sqrt{k^2 + \tau^2} y} \right] e^{-\tau|x|} d\tau - \frac{iD}{2\pi} \int_0^k \frac{e^{-i\sqrt{k^2 - \sigma^2} y} + e^{i\sqrt{k^2 - \sigma^2} y}}{\gamma(\sigma - k \cos \beta + i0)} e^{-i\sigma x} d\sigma + w_{\infty}(x, y) + w_{omp}(x, y) \quad (2.1)$$

$$\phi_1(\tau) = e^{i\varphi_1/2} / \sqrt[4]{k^2 + \tau^2} (i\tau - k \cos \beta), \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \tau/k, \quad w_{omp}(x, y) = e^{-ikx \cos \beta + ik|y| \sin \beta} \quad (2.2)$$

Здесь $w_{omp}(x, y)$ – амплитуда упругой волны, отраженной от свободной поверхности трещины.

Следует отметить, что в связи с наличием в интеграле с бесконечным пределом (2.1) экспоненциально убывающего множителя, с вычислительной точки зрения формула (2.1) более удобна для анализа ближнего поля, чем исходный интеграл (1.9) по вещественной оси [4].

Для определения дальнего поля в выражении (2.1) переходим к полярным координатам

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \pi/2 < \theta < \pi \quad (2.3)$$

и делаем замену переменных интегрирования [5–10]:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\sigma) &= \sigma |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta; \\ \lambda_2(\sigma) &= \sigma |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда, имея в виду, что $\lambda'_2(\sigma) > 0$ при $0 < \sigma < k|\cos \theta|$, $\lambda'_2(\sigma) < 0$ при $k|\cos \theta| < \sigma < k$, а $\lambda'_1(\sigma) > 0$ при $0 < \sigma < k$, для перемещения $w(x, y)$ будем иметь:

А) при $\pi - \beta < \theta < \pi$ ($\cos(\pi - \theta) > \cos \beta$)

$$w(r, \theta) = \sum_{j=1}^3 Q_j(r, \theta) + Q_4^{(+)}(r, \theta) + w_{omp}(r, \theta) + w_{\infty}(r, \theta) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} Q_1(r, \theta) &= -\frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi_1(\tau) [(\tau) e^{-m_1} + (\tau) e^{-m_2}] d\tau \\ Q_2(r, \theta) &= -\frac{iD}{2\pi} \int_{-k \sin \theta}^{k|\cos \theta|} \phi_{11}^{(+)}(\sigma_1(\lambda_1)) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} Q_3(r, \theta) &= -\frac{iD}{2\pi} \int_{k \sin \theta}^k \phi_{22}^{(+)}(\sigma_2(\lambda_2)) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \\ Q_4^{(\pm)}(r, \theta) &= \frac{iD}{2\pi} \int_{k|\cos \theta|}^k \phi_{12}^{(\pm)}(\sigma_1(\lambda_2)) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$w_{omp}(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta + \beta)}, \quad w_{\infty}(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} \quad (2.8)$$

$$\phi_{mn}^{(\pm)}(\sigma_m(\lambda_n)) = 1/\sqrt{k - \sigma_m(\lambda_n)} (\sigma_m(\lambda_n) - k \cos \beta \pm i0), \quad m, n = \overline{1, 2}$$

$$\sigma_1(\lambda_i) = \lambda_i |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \lambda_i^2} \sin \theta, \quad j = 1, 2,$$

$$\sigma_2(\lambda_2) = \lambda_2 |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \lambda_2^2} \sin \theta$$

$$n_1(\tau) = \tau |\cos \theta| + i\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta, \quad n_2 = \tau |\cos \theta| - i\sqrt{k^2 + \tau^2} \sin \theta \quad (2.9)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} = -\frac{\sqrt{k^2 - \sigma_1^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda_2^2}}, \quad \frac{d\sigma_j}{d\lambda_j} = \frac{\sqrt{k^2 - \sigma_j^2}}{\sqrt{k^2 - \lambda_j^2}}, \quad (j = 1, 2) \quad (2.10)$$

Отметим, что при $\pi - \beta < \theta < \pi$ уравнения

$$\sigma_1(\lambda_1) - k \cos \beta = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta = 0, \quad (2.11)$$

имеют, соответственно, корни $\lambda_{11} = -k \cos(\theta - \beta)$, $\lambda_{22} = -k \cos(\theta + \beta)$, принадлежащие соответственно интервалам $(-k \sin \theta, k|\cos \theta|)$ и $(k \sin \theta, k)$. При этом имеют место разложения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1(\lambda_1) - k \cos \beta + i0} &= \frac{C_{-1}^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_{11} + i0} + C_0^{(1)} + C_1^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_{11}) + \dots \\ \frac{1}{\sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta + i0} &= \frac{C_{-1}^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_{22} + i0} + C_0^{(2)} + C_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_{22}) + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, \dots, C_0^{(2)}, C_1^{(2)}, \dots$ – постоянные, а

$$\begin{aligned} C_{-1}^{(1)} &= \left((d\sigma_1/d\lambda_1) \Big|_{\lambda_1=\lambda_{11}} \right)^{-1} = \sin(\theta - \beta)/\sin \beta, \\ C_{-1}^{(2)} &= \left((d\sigma_2/d\lambda_2) \Big|_{\lambda_2=\lambda_{22}} \right)^{-1} = -\sin(\theta + \beta)/\sin \beta \end{aligned} \quad (2.13)$$

Б) при $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ ($\cos(\pi - \theta) < \cos \beta$)

$$w(r, \theta) = \sum_{j=1}^3 Q_j(r, \theta) + Q_4^{(-)}(r, \theta) + w_\infty(r, \theta) \quad (2.14)$$

где $Q_j(r, \theta)$ ($j=1, 2, 3$), и $Q_4^{(-)}(r, \theta)$ даются формулами (2.6) и (2.7).

Отметим, что при получении (2.14) было использовано представление (1.6). В этом случае в интервале $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$ уравнения

$$\sigma_1(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta = 0 \quad (2.15)$$

Имеют, соответственно, корни $\lambda_{12} = -k \cos(\theta + \beta)$ и $\lambda_{22} = -k \cos(\theta + \beta)$ в интервалах $(k|\cos \theta|, k)$ и $(k \sin \theta, k)$. При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_1(\lambda_2) - k \cos \beta - i0} &= \frac{B_{-1}^{(1)}}{\lambda_2 - \lambda_{12} + i0} + B_0^{(1)} + B_1^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_{12}) + \dots \\ \frac{1}{\sigma_2(\lambda_2) - k \cos \beta + i0} &= \frac{B_{-1}^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_{22} + i0} + B_0^{(2)} + B_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_{22}) + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \dots, B_0^{(2)}, B_1^{(2)}, \dots$ – постоянные, а

$$\begin{aligned} B_{-1}^{(1)} &= \left(|d\sigma_1/d\lambda_2| \Big|_{\lambda_2=\lambda_{12}} \right)^{-1} = \sin(\theta + \beta)/\sin \beta, \\ B_{-1}^{(2)} &= \left((d\sigma_2/d\lambda_2) \Big|_{\lambda_2=\lambda_{22}} \right)^{-1} = -\sin(\theta + \beta)/\sin(2\theta + \beta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

В) на луче $\theta = \pi - \beta$ ($\cos(\pi - \theta) = \cos \beta$) из (2.1) получим

$$w_{\pi-\beta}(r) \equiv w(r, \pi - \beta) = \sum_{j=1}^2 Q_j(r, \pi - \beta) + Q_5(r) + w_{omp}(r, \pi - \beta) + w_\infty(r, \pi - \beta) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} Q_5(r) &= \frac{iD_1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{k \sin \beta}^{k-\varepsilon} \phi_5^{(2)}(\sigma_2) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{k-\varepsilon}^{k \cos \beta} \phi_5^{(1)}(\sigma_1) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_\varepsilon''} \phi_5^{(2)}(\sigma_2(\varsigma)) e^{i\varsigma r} d\varsigma + \int_{C_\varepsilon'} \phi_5^{(1)}(\sigma_1(\varsigma)) e^{i\varsigma r} d\varsigma \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \phi_5^{(j)}(\sigma_j(\lambda_2)) &= \left[\phi_{j2}^+(\sigma_j(\lambda_2)) \right] \Big|_{\theta=\pi-\beta} = \\ &= \frac{\sqrt{k + \sigma_j(\lambda_2)}}{\left[(k + \lambda_2) \sin \beta + (-1)^j \sqrt{k^2 - \lambda_2^2 \cos \beta} \right] (k - \lambda_2)}, \quad j=1, 2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

где ϕ_{j2}^+ дается формулой (2.9), а C_ε' и C_ε'' – полуокружности радиуса ε с центром в точке $\alpha = k$, обходимые по часовой стрелке.

Отметим, что при получении (2.18)–(2.20) имелось в виду, что при $\theta = \pi - \beta$

$$\sigma_j(\lambda_2) - k \cos \theta = (-1)^{j+1} \sqrt{k - \lambda_2} \left[\sqrt{k + \lambda_2} \sin \beta + (-1)^j \sqrt{k - \lambda_2} \cos \beta \right] \quad j = 1, 2$$

Таким образом, дифрагированное поле упругого перемещения в области $\Omega_{21} (x < 0, y \geq 0)$ определяется формулами (2.5), (2.14) и (2.18) в зависимости от значения θ , которые, как было отмечено выше, удобны для вычисления ближнего поля.

Перейдем к определению асимптотических формул для $w(x, y)$ в рассматриваемой области $\Omega_{21} (x < 0, y \geq 0)$. Эти формулы будут получены из интегралов, входящих в (2.5), (2.14) и (2.18), интегрированием по частям [8,10].

Рассмотрим сначала сектор $\pi - \beta < \theta \leq \pi$, где перемещение дается (2.5), и введем обозначение

$$T_j^k(\sigma_j(\lambda_2)) = (-1)^j \frac{b_{-1}}{\sqrt{k - \lambda_2}} + b_0 + (-1)^j b_1 \sqrt{k - \lambda_2} + b_2 (k - \lambda_2), \quad j = 1, 2 \quad (2.21)$$

где b_0, b_1, b_2 – постоянные, а

$$b_{-1} = \frac{\sin(\theta/2)}{k(|\cos \theta| - \cos \beta)} \quad (2.22)$$

Тогда, имея в виду (2.8)–(2.10), нетрудно убедиться, что

$$\phi_{j2}^+(\sigma_j(\lambda_2)) - T_j^k(\sigma_j(\lambda_2)) = O((k - \lambda_2)^{3/2}) \quad (2.23)$$

Интегрируя по частям, из (2.6) получим

$$Q_1(r, \theta) = \frac{D}{2\pi r} \frac{e^{-ikr \sin \theta} + e^{ikr \sin \theta}}{k^{3/2} \cos \beta |\cos \theta|} - \frac{D}{2\pi r} \int_0^\infty \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\phi_1}{n'_1} \right] e^{-n_1 r} + \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\phi_1}{n'_2} \right] e^{-n_2 r} \right\} d\tau \quad (2.24)$$

$$Q_2(r, \theta) = -\frac{D}{2\pi r} \frac{e^{-ikr \sin \theta}}{k^{3/2} \cos \beta |\cos \theta|} + \frac{D}{2\pi r} \int_{-k \sin \theta}^{k|\cos \theta|} \frac{d}{d\lambda_1} \left[\phi_{21}^{(+)}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_1} \right] e^{i\lambda_1 r} d\lambda_1$$

Интегралы же из (2.7), как следует из (2.10), непосредственно интегрировать по частям невозможно.

Для этого, представим их в виде

$$Q_3(r, \theta) + Q_4^{(+)}(r, \theta) = -\frac{iD}{2\pi} \left\{ \int_{k \sin \theta}^k \left[\phi_{22}^{(+)}(\sigma_2(\lambda_2)) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} - T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \right. \\ \left. - \int_{k|\cos \theta|}^k \left[\phi_{12}^{(+)}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} - T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \int_{-\infty}^{k|\cos \theta|} T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{k \sin \theta} T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right\} - \frac{iD}{2\pi} q(r), \quad (2.25)$$

где $T_j^k(\sigma_j(\lambda_2))$ дается формулой (2.21), а

$$q(r) = 2\sqrt{\pi} e^{i(kr - \pi/4)} / r^{1/2} \quad (2.26)$$

Имея в виду (2.23), очевидно, что в (2.25) интегралы уже допускают двукратное интегрирование по частям.

Интегрируя по частям в (2.25) один раз, получим:

$$Q_3(r, \theta) + Q_4^{(+)}(r, \theta) = -\frac{D}{2\pi r} \frac{e^{-ikr \sin \theta}}{k^{3/2} \cos \beta |\cos \theta|} + \\ + \frac{D}{2\pi r} \int_{k \sin \theta}^k \frac{d}{d\lambda_2} \left[\phi_{22}^{(+)}(\sigma_2) \frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} - T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{D}{2\pi r} \int_{k|\cos\theta|}^k \frac{d}{d\lambda_2} \left[\phi_{12}^{(+)}(\sigma_1) \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} + T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \frac{D}{2\pi r} \int_{-\infty}^{k|\cos\theta|} \frac{d}{d\lambda_2} T_1^k(\sigma_1(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \\
& -\frac{D}{2\pi r} \int_{-\infty}^{k|\sin\theta|} \frac{d}{d\lambda_2} T_2^k(\sigma_2(\lambda_2)) e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \left\} - \frac{iD}{2\pi} q(r) \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Подставляя теперь (2.24) и (2.27) в (2.5), заметим, что внеинтегральные члены, появляющиеся в процессе интегрирования по частям, сокращаются. С другой стороны, имея в виду очевидное равенство

$$\int_a^b \frac{e^{i\lambda r} d\lambda}{\lambda - \lambda_0 + i0} = - \int_{-\infty}^a \frac{e^{i\lambda r} d\lambda}{\lambda - \lambda_0} - \int_b^{\infty} \frac{e^{i\lambda r} d\lambda}{\lambda - \lambda_0} = O(r^{-1}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.28)$$

где $a < \lambda_0 < b$, можно утверждать, что в полученном выражении интегральные составляющие будут иметь порядок $O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$, в чем нетрудно убедиться повторным интегрированием по частям. В итоге получим следующую асимптотическую формулу для волнового поля в секторе $\pi - \beta < \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned}
w(r, \theta) &= e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + e^{-ikr \cos(\theta + \beta)} + \\
&+ \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Таким образом, волновое поле в дальних зонах сектора $\pi - \beta < \theta \leq \pi$ дается формулой (2.29) и представляется в виде суммы падающей, отраженной и дифрагированных волн.

Отметим, что (2.29) точно совпадает с известным результатом из [1,3].

Для сектора $\pi/2 < \theta < \pi - \beta$, аналогичными рассуждениями, из (2.14) получим асимптотическую формулу в виде

$$w(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.30)$$

Перейдем к лучу $\theta = \pi - \beta$, определяющему границу тени отраженного поля. Из (2.29) и (2.30) видно, что эти простые формулы перестают выполняться при $\theta \approx \pi - \beta$. Для определения волнового поля в окрестности луча обратимся к (2.19) и представим ее в виде:

$$\begin{aligned}
Q_5(r) &= \frac{iD}{2\pi} \left\{ \int_{k \sin \beta}^k \left[\phi_5^{(2)}(\sigma_2 \lambda_2) - \frac{B_0}{k - \lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 + \right. \\
&+ \int_{-\infty}^{k \cos \beta} \left[\frac{B_0}{k - \lambda_2} + \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \\
&- \int_{k \cos \beta}^k \left[\phi_5^{(1)}(\sigma_1(\lambda_2)) - \frac{B_0}{k - \lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 - \\
&- \left. \int_{-\infty}^{k \sin \beta} \left[\frac{B_0}{k - \lambda_2} - \frac{B_1}{\sqrt{k - \lambda_2}} \right] e^{i\lambda_2 r} d\lambda_2 \right\} - \frac{iDB_1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{r^{1/2}} \quad (2.31)
\end{aligned}$$

где B_0 и B_1 – постоянные.

Отметим, что при выводе (2.28) имелось в виду, что

$$\frac{iD}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{C'_\varepsilon} \phi_5^{(2)}(\sigma_1(\varsigma)) e^{i\varsigma r} d\varsigma + \int_{C''_\varepsilon} \phi_5^{(1)}(\sigma_1(\varsigma)) e^{i\varsigma r} d\varsigma \right) = -\frac{1}{2} e^{ikr}$$

Подставляя (2.31) в (2.18) и учитывая сделанные выше замечания о порядке убывания соответствующих интегралов, получим асимптотическую формулу при $\theta = \pi - \beta$ в виде

$$w_{\pi-\beta}(r) = \frac{1}{2}e^{ikr} + e^{ikr \cos(2\beta)} + O((kr)^{-1/2}), \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

3. Распределение волнового поля в дальних зонах для остальных областей упругой плоскости определяются совершенно аналогичным пункту 2 способом.

В области $\Omega_{22} (x < 0, y \leq 0)$ из (1.9), имея в виду, что $y \leq 0$ и $|y| = -y$, получим

$$w(x, y) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{\sigma^2 - k^2}y} e^{-i\sigma x} d\sigma}{\sqrt{\sigma - k}(\sigma - k \cos \beta + i0)} \quad (3.1)$$

то есть в области Ω_{22} волновое поле представляется только дифрагированным полем (3.1)

Из (3.1) можно получить аналогичные формулам (2.5), (2.14) и (2.18) выражения, определяющие распределение волнового поля при соответствующих значениях θ , в области Ω_{22} . Из этих выражений получим следующие асимптотические формулы:

В секторе $-\pi \leq \theta < -(\pi - \beta)$, т.е. в тени

$$w(r, \theta) = \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}) \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

При $\theta = -(\pi - \beta)$, т.е. на границе тени падающего поля, получим асимптотическую формулу

$$w_{\beta-\pi}(r) = \frac{1}{2}e^{ikr} + O((kr)^{-1/2}) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

В секторе $-(\pi - \beta) < \theta \leq -\pi/2$ имеем

$$w(r, \theta) = e^{-ikr \cos(\theta - \beta)} + \frac{2i \sin(\beta/2) \sin(\theta/2)}{\cos \theta + \cos \beta} \cdot \frac{e^{i(kr - \pi/4)}}{(2\pi kr)^{1/2}} + O((kr)^{-3/2}) \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

Исходя из представления (1.8), нетрудно получить, что в области $x > 0$ распределение волнового поля в дальних зонах представляется формулой (3.4) при $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

В заключение следует еще раз отметить, что полученные здесь асимптотические формулы точно совпадают с известными результатами из [1,3], которые были получены традиционным путем – методом перевала [11]. Здесь, на наш взгляд, эти формулы получены более доступным путем – с помощью интегрирования по частям интегралов, представляющих волновое поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
2. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: «Советское радио», 1966. 432с.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 324с.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев.: „Наукова думка”, 1981. 284с.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением.// Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого слоя в составное упругое пространство // В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван. 2005. С. 19-23.

7. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве.// Изв. НАН РА. Механика. 2005. Т.58. №1. С.38–50.
8. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство.// Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т. 60. №3.
9. Восканян А.Р., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с кусочно–однородным бесконечным упругим включением.// Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т.60. №2. С.3–20.
10. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем.// Изв. НАН РА Механика. 2009. Т. 62. №1. С.40-51.
11. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967. 300с.

Сведения об авторах

Григорян Э.Х. – д.ф.-м.н., ЕГУ, факультет математики и механики

Агаян К.Л. – к.ф.-м.н., ведущий научн.сотр.

0019, Ереван, пр. Баграмяна 24^б

Институт механики НАН Армении

E-mail: karo-aga@mechins.sci.am

МЕХАНИКА ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Зимин В.Н.

Перспективы развития радиоастрономии, солнечной энергетики, космической связи, исследования земной поверхности и других планет из космоса в настоящее время непосредственно связаны с возможностью вывода в космос крупногабаритных конструкций. В настоящее время в России и за рубежом ведутся исследования, направленные на создание в космосе конструкций различного класса, которые имеют большие размеры в том или ином измерении: космические телескопы и антенны, энергетические и научные платформы, крупногабаритные солнечные батареи и т.д. (рис. 1, рис. 2).

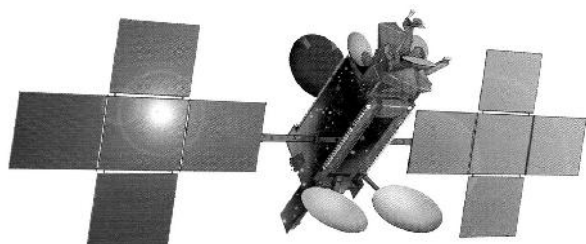


Рис. 1. Космический аппарат с трансформируемыми конструкциями

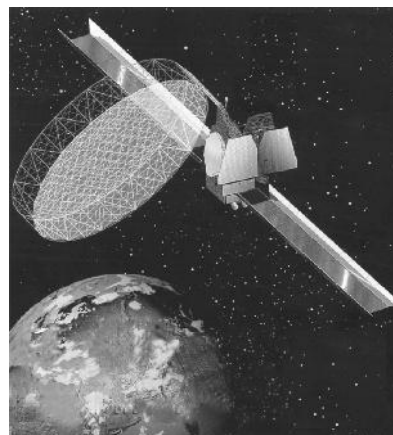


Рис. 2. Космический аппарат с крупногабаритной трансформируемой антенной

Одним из важных и бурно развивающихся направлений в области создания крупногабаритных космических конструкций является разработка раскрывающихся панелей солнечных батарей, а также антенн, устанавливаемых на космических аппаратах (КА) различного назначения. Проблема создания навесных систем специального функционального назначения с габаритами, превышающими размеры КА, сводится к разработке трансформируемых конструкций, удовлетворяющих таким противоречивым требованиям, как минимальные вес и объем в сложенном транспортном состоянии, высокая надежность раскрытия из транспортного состояния в рабочее положение и функционирования на орбите, максимальная площадь рабочей поверхности в раскрытом состоянии, стабильные эксплуатационные характеристики в условиях действия нагрузок. Работоспособность таких конструкций определяется, главным образом, тем, насколько велики возникающие в них усилия при разворачивании, поэтому обеспечение их надежного раскрытия связано с решением сложных задач механики. Несмотря на достигнутые значительные успехи в области проектирования таких конструкций, важной остается задача обеспечения плавного и надежного раскрытия крупногабаритных конструкций, состоящих из десятков, сотен и даже тысяч взаимосвязанных между собой элементов, при гарантированном обеспечении их последующего функционирования.

Классическая схема анализа крупногабаритных космических конструкций включает следующие основные этапы: выбор расчетной схемы, с той или иной степенью полноты отображающей свойства реальной конструкции, и формирование на ее основе соответствующей математической модели; проведение анализа влияния определяющих параметров; проверка адекватности характеристик модели и реальной конструкции на основе физического или численного эксперимента. При необходимости производится уточнение расчетной схемы, и процедура анализа повторяется. Критерием правильности выбора

расчетной схемы является достижение требуемой точности анализа исходной конструкции. При этом в процессе проектирования и создания крупногабаритных космических конструкций инженеру-разработчику всегда приходится искать компромисс между желаемой точностью результата и допустимыми экономическими и временными затратами, связанными с его получением.

При создании раскрывающихся трансформируемых крупногабаритных космических конструкций значительная роль отводится натурным экспериментам, результаты которых являются основным критерием надежности и функциональной пригодности разрабатываемых конструкций.

Эксперименты по раскрытию на орбите с целью проверки работоспособности конструкций в условиях функционирования связаны с большими материальными затратами и могут быть проведены лишь на заключительной стадии их создания. Существенные различия схем приведения космических систем из транспортного состояния в рабочее осложняют выполнение наземных испытаний, при которых осуществляется окончательная настройка и проверка их работоспособности. К тому же, полная экспериментальная отработка процесса раскрытия реальных конструкций и принятие ими необходимой формы в наземных условиях сопряжены с рядом принципиальных трудностей, связанных с невозможностью одновременно устранить влияние сил поля тяготения Земли и сил сопротивления среды.

Имитация пониженной гравитации в основном необходима при отработке раскрытия солнечных батарей, антенн и других элементов КА, так как устройства раскрытия этих элементов обычно проектируются с минимальными запасами мощности с целью уменьшения их массы и энергопотребления, а сами элементы конструкции рассчитываются с минимальными запасами прочности, обеспечивающими их надежную работоспособность только в условиях пониженной гравитации. При испытаниях таких конструкций создаются условия, близкие к эксплуатационным на орбите, посредством имитации пониженной гравитации либо внутри корпуса самолета, летящего по специальной параболической траектории, либо при свободном падении конструкции на поверхность Земли, либо в гидробассейнах, либо с помощью специальных стендов. Однако упомянутые способы имитации пониженной гравитации обладают значительными недостатками. Так, при испытаниях в летящем самолете время испытаний ограничивается несколькими десятками секунд, а размеры испытываемой конструкции – габаритами транспортного отсека самолета. К тому же, этот способ требует больших материальных затрат, обусловленных специальной подготовкой и использованием самолета.

Сбрасывание конструкции на поверхность Земли с некоторой высоты или в специальные глубокие шахты связано с необходимостью создания не только самих шахт достаточных размеров и глубины, но и систем спасения, обеспечивающих сохранность космических конструкций во время проведения испытаний. Для большинства конструкций такой способ и вовсе неприемлем из-за возникающих в процессе падения аэродинамических сил. При проведении раскрытия в гидробассейне возможно появление сил сопротивления, величины которых могут оказаться критическими для исследуемой конструкции.

Создание специальных стендов для имитации пониженной гравитации связано с большими материальными затратами и невозможностью их унификации из-за существенного различия кинематики раскрытия трансформируемых конструкций. Поэтому в наземных условиях с наименьшими материальными затратами можно проводить исследования лишь на моделях и отдельных элементах реальных конструкций. Это, в свою очередь, требует создания критериев по выбору таких моделей и оценки влияния имитационного стенда и сопротивления среды на процесс раскрытия. Проведение же полномасштабной экспериментальной отработки таких конструкций оказывается чрезвычайно дорогостоящим делом. Поэтому вычислительный эксперимент, использующий разрабатываемые математические модели крупногабаритных космических конструкций с идентифицированными параметрами, является важным этапом проверки и обоснования функциональной пригодности проектируемых систем.

Трансформируемые конструкции доставляются на космические орбиты в сложном (транспортном) плотноупакованном состоянии и приведение их в рабочее положение связано с реализацией процесса раскрытия. Процесс раскрытия таких конструкций представляется

чрезвычайно ответственным и определяется выполнением в заданной последовательности следующих его стадий:

- начальное трагивание элементов конструкции;
- перемещение и разворот элементов конструкции на соответствующие расстояния и углы до рабочего их положения (состояния);
- установка или фиксация в рабочем состоянии при определенной относительной ориентации смежных элементов конструкции.

При рассмотрении таких многоэлементных конструкций мы имеем дело с системой многих тел. Для полного описания динамики системы многих тел требуется большое количество параметров, которые характеризуют геометрию, распределение масс, природу внешних сил и сил, действующих в местах их соединений. Поэтому составить уравнения движения раскрывающейся конструкции с достаточно большим числом элементов и дать численное их решение при заданных начальных условиях и заданных возмущениях, которые могут иметь место в процессе раскрытия, весьма сложно. Во-первых, это связано с необходимостью получения системы дифференциальных уравнений достаточно большого порядка, описывающей непрерывное движение системы многих тел. Во-вторых, в процессе раскрытия при определенном относительном положении смежных элементов конструкции на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное перемещение. Техническое исполнение налагаемых связей может быть самым разнообразным: различного рода упоры (фиксаторы). Установка смежных элементов конструкции на упоры (фиксаторы) может происходить как поэтапно в процессе раскрытия трансформируемой конструкции, когда в некоторой последовательности происходит ограничение на относительное положение отдельных смежных элементов конструкции, так и одновременно (в один этап) всех элементов – в момент ее полного раскрытия. Таким образом, установка элементов конструкции на упоры (фиксаторы) эквивалентна наложению импульсных связей в произвольный момент времени. При наложении таких связей возникает явление удара, которое приводит к скачкообразному изменению скоростей элементов раскрывающейся конструкции. В-третьих, многие трансформируемые конструкции имеют структуру взаимосвязей с замкнутыми кинематическими цепями.

Сложная в прикладном плане задача математического моделирования динамики раскрывающихся трансформируемых конструкций как системы многих тел, очевидно, не может быть решена с помощью одной универсальной модели. Создание такой модели вызывает принципиальные затруднения, связанные с отсутствием полных исходных данных о геометрических и физических параметрах конструкции, а также с не всегда преодолимыми вычислительными трудностями и большими затратами машинного времени. Неполнота информации обусловлена неточностями в изготовлении конструкции, разбросом физико-механических характеристик применяемых материалов, несовершенствами соединительных узлов и многими другими факторами.

На практике, как правило, динамическое поведение конструкции анализируют с помощью совокупности моделей, каждая из которых нацелена на решение конкретной технической задачи: либо на определение динамических характеристик конструкции, либо на исследование динамики процесса раскрытия конструкции. Таким образом, говоря о модели динамики таких конструкций, мы имеем в виду не одну модель, а совокупность дополняющих и развивающих друг друга моделей – своего рода иерархию моделей. Можно ожидать, что темпы усложнения проектируемых трансформируемых конструкций и роста их размерности как динамических систем будут постоянно опережать развитие методов и технических средств математического моделирования подобных конструкций. Поэтому представляется целесообразным проводить анализ динамики раскрывающихся трансформируемых конструкций в том объеме, который необходим для решения частных технических задач их проектирования, создания и экспериментальной отработки на основе совокупности специализированных моделей. Такой подход необходимо рассматривать в качестве основного для анализа динамики конструкций данного класса.

Первым шагом формирования расчетной схемы конструкции, как правило, является принятие совокупности гипотез о характере деформирования элементов и условиях их совместной работы в конструкции, особенностях взаимодействия с внешней средой, характере

приложения нагрузок и т.п. Вторым, не менее важным шагом, является выбор метода анализа математической модели, соответствующей принятой расчетной схеме. В дальнейшей под математической моделью динамики раскрытия крупногабаритных конструкций будем иметь в виду систему дифференциальных уравнений, описывающих движение отдельных элементов этих конструкций, а под математическим моделированием понимать численное решение этих уравнений.

Наиболее простой расчетной схемой таких конструкций с точки зрения получения системы дифференциальных уравнений движения при раскрытии, но в то же время довольно хорошо учитывающей свойства большого класса космических конструкций, является система твердых тел, связанных между собой шарнирами, которые могут быть цилиндрическими, сферическими и т.п. Характеристики твердых тел принимаются такими, какие они были бы у реальных элементов конструкции без учета их упругих свойств. В математической модели необходимо учесть силы упругого и неупругого сопротивления, возникающие в процессе движения системы, а также возможность расположения в шарнирных узлах устройств раскрытия элементов конструкции. Шарнирный узел в данной расчетной модели имеет более широкий смысл, чем понятие "шарнир". В шарнирном узле объединены все силы взаимодействия между двумя смежными телами (элементами трансформируемых конструкций КА). Например, шарнирный узел может включать в себя как цилиндрическое шарнирное соединение, допускающее относительное вращательное движение смежных тел, так и устройства раскрытия элементов трансформируемых конструкций КА.

Расчетные схемы трансформируемых конструкций можно разбить на два класса. К первому классу отнесем схемы, в которых сочлененные тела образуют структуру в виде цепочки твердых тел или структуру дерева (такова, например, схема раскрытия панелей солнечных батарей КА, рис. 3), ко второму классу – все остальные схемы, в том числе те, в которых тела образуют кольцевую структуру или замкнутые кинематические цепи (например, такова схема ферменной раскрывающейся космической конструкции, рис. 4).

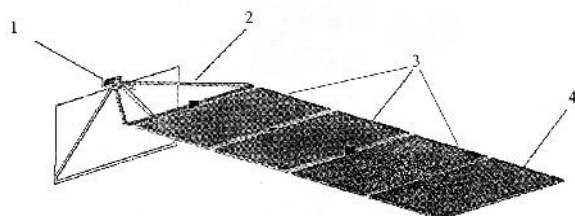


Рис. 3. Модель солнечной батареи (1 – кронштейн, 2 – рама, 3 – панели, 4 – концевая панель)

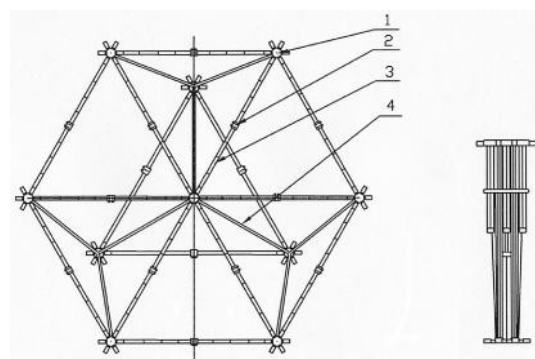


Рис. 4. Фрагмент ферменной конструкции в раскрытом и сложенном состояниях: 1 – узловые шарнирные соединения, 2 – шарниры с пружиной, 3 – складывающиеся стержни, 4 – диагональные стержни

Уравнения движения трансформируемой конструкции, образующие структуру в виде цепочки "n" твердых тел, наиболее просто могут быть получены на основе вариационного принципа Гаусса. Он является наиболее общим принципом механики и позволяет получить уравнения движения механической системы, когда на нее наложены как голономные связи, так и неголономные, но описываемые линейными соотношениями. В соответствии с этим принципом для механической системы с идеальными связями, находящейся под действием активных сил, истинное движение отличается от всех кинематически возможных тем, что истинное движение определяется минимумом меры принуждения, то есть суммы величин, пропорциональных квадратам отклонений истинного движения от свободного. Или другими словами, обобщенные

координаты и обобщенные скорости механической системы в данный момент времени однозначно определяют обобщенные ускорения этой системы. Запишем функцию меры принуждения в следующем виде:

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M m^k \left(\ddot{\mathbf{r}}^k - \frac{\mathbf{F}^k}{m^k} \right)^T \left(\ddot{\mathbf{r}}^k - \frac{\mathbf{F}^k}{m^k} \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}^k$ – радиус-вектор k -ой материальной точки системы; $\mathbf{F}^k$ – вектор сил, действующих на k -ую материальную точку системы; m^k – масса материальной точки k , $k = \overline{1, M}$.

Преобразуем меру принуждения к виду, наиболее удобному для ее анализа

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M m^k \operatorname{tr} \left\{ \left(\ddot{\mathbf{r}}^k - \frac{\mathbf{F}^k}{m^k} \right) \left(\ddot{\mathbf{r}}^k - \frac{\mathbf{F}^k}{m^k} \right)^T \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\sum_{k=1}^M m^k \ddot{\mathbf{r}}^k (\ddot{\mathbf{r}}^k)^T \right) - \operatorname{tr} \left(\sum_{k=1}^M \mathbf{F}^k (\ddot{\mathbf{r}}^k)^T \right) + \dots \quad (2)$$

В выражении (2) многоточием обозначены члены, не содержащие ускорений $\ddot{\mathbf{r}}_i$ и, следовательно, не влияющие на значение ускорений, доставляющих минимум функции принуждения. Будем считать, что $\mathbf{r}_i^k$ и $\mathbf{F}_i^k$ – однородные векторы 4×1 . Операция $\operatorname{tr}(A)$ означает вычисление следа матрицы.

Пусть T_i – однородная матрица, определяющая положение i -го тела относительно абсолютной системы координат, а $\mathbf{p}_i^k$ – однородный вектор, задающий положение k -ой точки в связанной системе координат, т.е.

$$\mathbf{r}_i^k = T_i \mathbf{p}_i^k.$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\dot{\mathbf{r}}_i^k = \dot{T}_i \mathbf{p}_i^k, \quad \ddot{\mathbf{r}}_i^k = \ddot{T}_i \mathbf{p}_i^k$$

Так как каждое тело представляет собой совокупность определенного количества материальных точек, то после преобразований мера принуждения для цепочки " n " твердых тел примет вид

$$Z = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\ddot{T}_i H_i \ddot{T}_i^T) - \operatorname{tr} (\Phi_i \ddot{T}_i^T), \quad (3)$$

где H_i – матрица инерции i -го тела, Φ_i – матрица активных сил. Положение i -го звена в системе координат $(i-1)$ -го звена определяется матрицей A_i .

Соотношения, определяющие положение i -го звена в абсолютной системе координат, записывается в рекуррентной форме

$$T_i = T_{i-1} A_i, \quad T_0 = E, \quad (4)$$

где E – единичная матрица. Продифференцировав (4), можно получить кинематические соотношения рекуррентного вида для $\dot{T}_i$ и $\ddot{T}_i$.

Для приведения задачи минимизации меры принуждения Z (3) с ограничениями в форме (4) к задаче определения минимума новой функции Z^* без ограничений необходимо воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа. Истинные ускорения минимизируют новую функцию. Поэтому из условия $dZ^* = 0$ можно получить соответствующую систему уравнений в связанных системах координат в удобной матричной форме записи в виде систем рекуррентных соотношений.

В процессе раскрытия при определенном относительном положении элементов трансформируемых конструкций на них накладываются связи, ограничивающие их взаимное перемещение. Простейшая расчетная схема таких устройств может быть представлена в виде упругого и демпфирующего элементов с соответствующими характеристиками.

Если характеристики упругого и вязкого (демпфер) элементов линейные, то возникающие моменты от ограничивающих устройств M_y и M_d определяются зависимостями

$$\begin{aligned} M_y &= k_y (\Delta\varphi_{\diamond} - \Delta\varphi), \\ M_d &= c_d \Delta\dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (5)$$

где k_y и c_d – коэффициенты жесткости и вязкого трения упругого и демпфирующего элементов;

$\Delta\varphi_k$ – относительный угол между смежными элементами конструкции, соответствующий моменту наложения связи на них; $\Delta\dot{\varphi}$ – относительная угловая скорость смежных элементов. Эти элементы вводятся в шарнирный узел в необходимые моменты времени с помощью ступенчатых функций, отражающих логику процесса раскрытия элементов трансформируемых конструкций.

Если установка элементов конструкции происходит на упоры, то на них накладываются ограничения типа неравенств

$$\Delta\varphi \geq \Delta\varphi_k. \quad (6)$$

Ограничение (6) выполняется за счет применения следующей логики построения расчетного алгоритма. Если ограничение не достигается, то уравнения движения интегрируются на следующем шаге по времени без учета ограничений. Если при этом выясняется, что будет скоро достигнуто ограничение по относительному углу смежных тел, то выбирается меньший шаг по времени, который используется до момента удара.

В момент удара

$$\Delta\varphi_{k\min} \leq \Delta\varphi_k \leq \Delta\varphi_{k\max}, \quad (7)$$

и в конкретный шарнирный узел, где достигнуто ограничение (7), вводятся упругий и демпфирующий элементы. Если на следующем шаге интегрирования выясняется, что снова выполняется ограничение (6), то упругий и демпфирующий элементы исключаются из шарнирного узла. Если установка элементов конструкции происходит на фиксаторы, то на них накладываются ограничения типа (7). Это ограничение выполняется за счет применения следующей логики построения расчетного алгоритма. Если ограничение не достигается, то уравнения движения интегрируются на следующем шаге по времени без учета ограничений. Если при этом выясняется, что скоро будет достигнуто ограничение по относительному углу смежных тел, то выбирается меньший шаг по времени, который используется до момента удара. Удар считается абсолютно неупругим, т.е. предполагается, что после удара

$$\Delta\dot{\varphi} = \Delta\ddot{\varphi} = 0. \quad (8)$$

Выполнение условия (8) обеспечивается с помощью демпфирующего элемента. Общие рекомендации по нахождению коэффициентов упругого и вязкого элементов состоят в следующем:

- необходимо провести статическое нагружение элементов трансформируемых конструкций и определить по экспериментальным данным коэффициент жесткости упругого элемента;
- для нахождения коэффициента демпфирования вязкого элемента необходимо провести серию тестовых расчетов; на основе их результатов и выбирается коэффициент демпфирования.

В большинстве практических случаев для определения характеристик упругого и вязкого элементов модели ударного взаимодействия проводят экспериментальные исследования раскрытия элементов трансформируемой конструкции. Упругая константа подбирается в процессе моделирования максимальных ускорений, полученных экспериментально, вязкая константа – на основании инженерного опыта и интуиции, приобретенных при проектировании подобных образцов трансформируемых конструкций КА.

На рис. 5 представлены результаты расчета раскрытия солнечной батареи (рис. 3). С ростом числа взаимосвязанных между собой элементов крупногабаритных трансформируемых конструкций существенно возрастают объемы вводимой исходной информации в виде параметров, характеризующих геометрию, распределение масс и сил, действующих в местах соединений. При этом актуальной задачей становится подготовка и контроль большого объема исходной информации. Ручной ввод исходных данных становится малоэффективным, поэтому для исключения ошибок необходимо создавать блоки автоматизированной подготовки исходной информации.

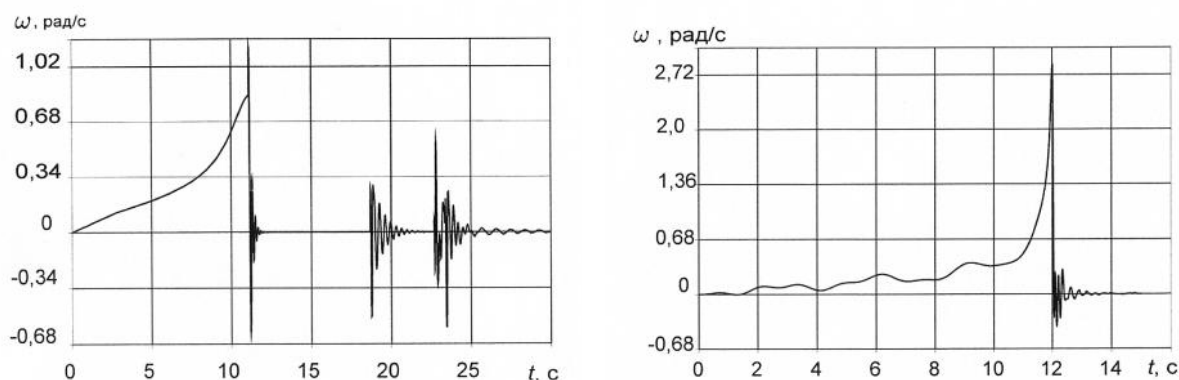


Рис. 5. Изменения угловой скорости ω концевой панели СБ в процессе ее раскрытия при различных значениях коэффициентов жесткости и демпфирования упругого и вязкого элементов, моделирующих узел фиксации панелей СБ

Для ферменных трансформируемых конструкций при построении модели использовать принцип Гаусса или составить функцию Лагранжа и ее производные не представляется возможным из-за громоздких аналитических выкладок. В этом случае не могут помочь даже такие мощные компьютерные системы символьной математики, как Maple и Mathematica. Целесообразно использовать возможности современных пакетов моделирования динамики механических систем.

Для решения задачи можно воспользоваться программным комплексом MSC.ADAMS (Automatic Dynamics Analysis of Mechanical Systems) или программным комплексом автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER. Программный комплекс EULER предназначен для математического моделирования поведения многокомпонентных механических систем в трехмерном пространстве. В данном программном комплексе построены модели и проведен численный анализ динамики раскрытия

плоской и параболической конструкций ферменного типа (рис. 6). Цифрами 1,2,...,8 на рисунке 6,а обозначены узлы ферменной конструкции, а на рисунке 6,с – соответствующие этим узлам скорости.

Заключительный процесс раскрытия ферменной конструкции характеризуется резкой остановкой складывающихся стержней и появлением колебаний около состояния равновесия, определяемого относительным углом между трубчатыми элементами складывающихся стержней $\Delta\varphi_k$, соответствующим моменту установки элементов конструкции на упоры или фиксаторы.

Амплитуда колебаний зависит от коэффициента жесткости упругого элемента после установки элементов конструкции на упоры или фиксаторы. При учете демпфирования в шарнирных соединениях конструкции процесс раскрытия заканчивается затухающими колебаниями относительно состояния, определяемого углом $\Delta\varphi_k$. При большом коэффициенте вязкого трения демпфирующего элемента процесс раскрытия конструкции заканчивается аperiodическим режимом движения трубчатых элементов складывающихся стержней.

Преимуществом модели установки элементов конструкции на упоры или фиксаторы в виде упругого и демпфирующего элементов является значительная простота, физическая наглядность и близость результатов расчета к экспериментальным данным для реальных конструкций.

Недостатком данной модели является большая трудоемкость в подборе коэффициентов жесткости и вязкого трения упругого и демпфирующего элементов из экспериментов для трансформируемых конструкций.

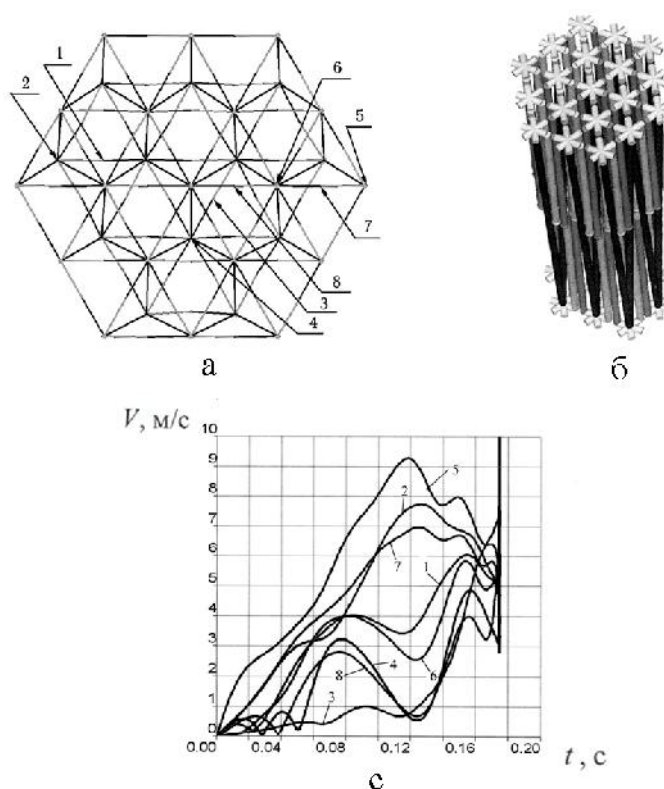


Рис. 6. Модель ферменной конструкции: а – раскрытое состояние; б – сложенное состояние; с – скорости узлов ферменной конструкции

Кроме того, в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процесс раскрытия ферменной конструкции, при некоторых коэффициентах модели установки элементов конструкции на упоры и фиксаторы может происходить резкое возрастание

"жесткости". Связано это с резко изменяющимися производными на конечном этапе процесса раскрытия. Численное интегрирование таких дифференциальных уравнений требует достаточно малого шага по времени и высокой точности представления чисел на ЭВМ для устойчивости процесса решения и применения специальных приемов численного интегрирования.

Проведенные исследования и расчеты показали, что для конструкций ферменного типа, отличных от плоских, начальные значения обобщенных координат для сложного транспортного состояния необходимо определять исходя из предположения, что центры узловых шарнирных элементов должны располагаться на поверхности (параболической, сферической, цилиндрической и т.д.), соответствующей раскрытому рабочему положению конструкции.

Одной из основных целей моделирования динамики раскрывающихся крупногабаритных ферменных космических конструкций является получение относительно простых и надежных моделей конструкции для использования как в процессе проектирования, так и при разработке систем управления. Эти модели предназначены для решения таких сложных проблем, как управление, ориентация и стабилизация космического аппарата с крупногабаритной трансформируемой конструкцией. Они необходимы для оценки динамического отклика конструкции на нестационарные воздействия, связанные с обеспечением переориентации конструкции из одного положения в другое или ее возможного программного углового движения. Например, частоты свободных колебаний крупногабаритных ферменных конструкций, как правило, располагаются очень плотно и концентрируются в нижней части спектра. Для моделирования низкочастотных форм движения конструкции в ряде случаев требуется определить достаточно большое число частот и форм колебаний. Это необходимо для решения задач отстройки от резонанса при адаптации систем управления, а также минимизации последствий внешних воздействий на конструкцию.

Помимо задачи анализа динамического поведения конструкции, на первый план выдвигаются вопросы коррекции параметров расчетной модели раскрывающейся крупногабаритной трансформируемой конструкции по результатам наземного эксперимента. Значительную роль при решении задачи коррекции математической модели играет планирование эксперимента. При проведении частотных испытаний конструкция нагружается разнообразными силовыми воздействиями, которые должны возбуждать все исследуемые частоты и формы колебаний конструкции. Таким образом, специальные целенаправленные эксперименты используются для получения полной и объективной информации о динамических характеристиках конструкции.

Сведения об авторе

Зимин Владимир Николаевич

Доктор технических наук, директор, научно-исследовательский институт специального машиностроения Московского гос. технического университета им. Н. Э. Баумана

Адрес: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская, МГТУ им. Н. Э. Баумана, директору НИИСМ

Тел.: 8 (499) 261-2188, факс: 8 (499) 261-3614,

E-mail: sm11@sm.bmstu.ru, niism@sm.bmstu.ru

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ ТОРЦЕВОЙ НАГРУЗКИ: АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Ковалев В.А.

В работе развивается асимптотический подход к решению задач о нестационарных волновых процессах в тонких оболочках. Рассматривается задача определения нестационарного напряженно-деформируемого состояния (НДС) упругой оболочки при ударном воздействии нагрузки на торец тонкой полубесконечной оболочки. Как показано в работах [1–3], в случае цилиндрической оболочки решение задачи о ударном торцевом воздействии нормального типа может быть расчленено на составляющие с различными показателями изменчивости. Для каждой из составляющих может быть построена приближенная асимптотическая модель, содержащая более простые уравнения, чем уравнения в точной постановке. Благодаря наличию областей согласования можно осуществить сращивание решений приближенных уравнений и получить, таким образом, приближенное решение, с достаточно малой погрешностью описывающее нестационарное НДС оболочки во всей области изменения пространственных и временных переменных.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире оболочечные конструкции широко применяются во многих отраслях производства, таких, как авиа- и ракетостроение, машиностроение, строительная индустрия. Знание закономерностей распространения нестационарных волн в оболочках является основой для анализа и систематизации данных, относящихся к практически используемым конструкциям. Непрерывное усложнение машин и механизмов, наращивание мощностей приводит к увеличению динамических нагрузок на их элементы. Вследствие этого появляются эффекты, для описания которых недостаточно имеющихся приближенных теорий. Поэтому так актуальны проблемы обоснования перехода от трехмерных краевых задач теории упругости к двумерным задачам и оценки возникающих при этом погрешностей. Особое место в теории оболочек занимают задачи нестационарной динамики, поскольку в таких задачах изменчивость искомого решения существенно неоднородна по координатам и по времени. Теоретический и прикладной интерес представляет изучение нестационарных волн при ударных нагрузках, моделируемых импульсными функциями.

Основополагающие понятия показателя изменчивости напряженно-деформированного состояния по пространственным координатам и операции растяжения масштаба в уравнениях теории упругости связаны в первую очередь с работами А.Л. Гольденвейзера [4–10]. При рассмотрении статических задач, посвященных построению двумерной теории оболочек, вводился малый безразмерный параметр, равный отношению толщины оболочки к характерному радиусу. Введение данных величин сделало возможным построение для статических задач основного итерационного процесса, который приводит в первых приближениях к двумерным теориям оболочек. Было показано, что дополнительный итерационный процесс приводит к принципиально новым теориям – теории плоского и антиплоского погранслоев. Одним из важных результатов, связанных с построением итерационного процесса, явилась возможность асимптотической оценки погрешности двумерных теорий, теорий пластин и оболочек, связанной со значениями показателей изменчивости НДС.

Особую сложность проблема обоснования перехода от трехмерных краевых задач теории упругости к двумерным краевым задачам математической физики имеет в динамических задачах. Переходные процессы деформации имеют место в течение промежутка времени, соизмеримого со временем пробега волнами деформаций пути, равного характерному размеру срединной поверхности оболочки. При этом, можно выделить возмущенные области, границы которых определяются фронтами волн. На фронте волны часть компонент НДС или их производные имеют разрыв. В случае, когда нагрузки задаются достаточно гладкими по времени функциями, влиянием этих разрывов на напряженное состояние можно пренебречь. Теоретический и прикладной интерес представляет изучение НДС в окрестностях фронтов волн для так называемых ударных нагрузок, моделируемых импульсными функциями.

Динамике тонких упругих оболочек посвящены работы А.Л. Гольденвейзера [6,8]. В работе [6] для интегралов двумерных динамических уравнений теории оболочек была введена классификация, аналогичная статическому случаю. Было показано, что в динамике при

построении классификации необходимо учитывать изменяемость напряженного состояния по времени. В работе [9] рассмотрены динамические трехмерные уравнения теории упругости и свойства их интегралов в случае, когда тело тонкое и его лицевые поверхности не закреплены. Получена связь данных интегралов и интегралов двумерных уравнений теории оболочек и теории погранслоя. В работе [10] сформулирован модифицированный принцип Сен-Венана, обуславливающий затухание асимптотически главной части НДС, вызванный системой сил, приложенной к торцу тонкого упругого тела. Получены условия выполнения модифицированного принципа Сен-Венана и изучена возможность их использования при построении итерационных процессов интегрирование общих уравнений теории упругости.

Асимптотический метод широко применялся для изучения свободных колебаний оболочек на основе двумерной классической теории оболочек. Им посвящены работы А.Л. Гольденвейзера, Ю.Д. Каплунова, Л.Ю. Коссовича, Е.П. Товстика [11] и др. Однако до недавнего времени асимптотические методы недостаточно полно использовались при решении задач нестационарной динамики оболочек. Это объясняется следующими фактами. На задачи нестационарной динамики оболочек нельзя формально перенести понятие показателя изменяемости искомого решения. Изменяемость решения оказывается неоднородной в различных частях области определения: если вдали от точки приложения нагрузки и фронта волны она невелика, то вблизи этих областей она, монотонно возрастая, становится большой. Таким образом, сами понятия показателей изменяемости НДС по времени и в пространстве требуют глубокого исследования. Кроме того, изменяемость НДС в окрестности точки приложения нагрузки и вблизи фронта волны заведомо выходит за рамки применимости двумерной теории оболочек. Следовательно, в задачах нестационарной динамики нельзя просто использовать асимптотический метод расчленения НДС в классической форме. При решении нестационарных задач необходимо проводить расчленение напряженного состояния на элементарные составляющие, имеющие в своих областях применимости однородные изменяемости по координатам и времени. Это позволяет построить для элементарных составляющих в рамках некоторой заданной погрешности асимптотически оптимальные уравнения, которые имеют более простой вид по сравнению с исходными уравнениями.

Работа У.К. Нигула [12] посвящена изучению начального этапа переходных процессов деформации упругих круговых цилиндрических оболочек, вызванных торцевой нагрузкой, которая действует или возрастает до максимального значения за время, которое соизмеримо со временем пробега волнами деформаций пути, равного характерному размеру срединной поверхности оболочки или меньше этого времени. На основании анализа переходных процессов деформации плит была получена следующая качественная картина деформации: в момент приложения ударной нагрузки к торцу в оболочке возникает сложная система первичных волн, как продольных, так и поперечных, которые начинают распространяться вглубь оболочки. При этом первичные волны, распространяющиеся в продольном направлении, взаимодействуя с лицевыми поверхностями, отражаются от них и, в свою очередь, порождают вторичные волны, причем каждая из волн порождает и продольную и поперечную отраженную волну. Таким образом, в оболочке возникает сложная система волн. Поскольку с течением времени количество волн катастрофически растет, отдельное построение и анализ числа элементарных волн практически неосуществимы. Поэтому при расчете тонкостенных конструкций следует изучать вклад не отдельно взятой волны, а суммировать вклад всех волн пакета. В данной работе выявлены области и условия применимости приближенных теорий для аппроксимации суммарного вклада отдельных волн, проведено численное сопоставление решений по теории упругости и по приближенным теориям.

Известно, что все случаи нестационарных волн в тонких оболочках при ударных торцевых воздействиях сводятся к трем основным схемам, а именно: продольное воздействие тангенциального типа (LT нагружение), продольное воздействие изгибающего типа (LM нагружение) и нормальное воздействие (NW нагружение) по классификации, предложенной У.К. Нигул [13] и используемой другими авторами.

При решении задач нестационарной динамики большинство используемых методов основывается на применении интегральных преобразований Лапласа и Фурье. В работах [14,15] Н.Д. Векслер для получения решения в начальные промежутки времени использовал метод

прифронтной асимптотики, основанный на разложении изображений по Лапласу в ряды по отрицательным степеням параметра преобразования. С удалением от фронтов использовались методы перевала и стационарной фазы. Разнообразные методы обращения решения двумерных задач для стержней и пластин и безмоментных задач для цилиндрических оболочек, основанные на аналитических свойствах интегральных преобразований, освящены в [16–20].

Значительный вклад в развитие асимптотических методов при изучении нестационарных задач теории оболочек внесли работы Л.Ю. Коссовича. Исследования нестационарного волнового НДС оболочек вращения проводилось в [18] с использованием понятия показателя изменчивости для задач о распространении волн деформаций под действием ударных нагрузок, приложенных к торцу оболочки. Для осесимметричных волновых процессов были выделены тангенциальная составляющая, описывающая распространение волны растяжения-сжатия, и нетангенциальная составляющая, описывающая распространение изгибной и сдвиговой волн. В случае неосесимметричных воздействий в [19] проведено исследование областей согласования интегралов теории Кирхгофа-Лява, описывающих НДС в областях оболочки, примыкающих к торцу и погранслою, описывающего напряженное состояние в прифронтных областях. Установление областей согласования динамического краевого эффекта, описываемого теорией Кирхгофа-Лява, и антисимметричной составляющей быстроизменяющегося прифронтного поля было проведено в [20]. Здесь же определены зоны действия приближенных теорий и расположения областей согласования этих теорий.

В монографии [21] были разработаны асимптотические подходы к нестационарным задачам для оболочки вращения с меридианом произвольной формы, основанные на расчленении НДС на безмоментную, моментную составляющие и погранслою с различными показателями изменчивости. В работе [22] проведено асимптотическое интегрирование трехмерных динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек. Были получены предельные двумерные системы. В [23] к построению двумерных уравнений теории оболочек описывающих высокочастотные НДС малой изменчивости, применялся метод асимптотического интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости. Были установлены области применимости и погрешность полученных уравнений. Исследования высокочастотных колебаний оболочки вращения проводились в работе [24].

Результаты исследований в области асимптотической теории тонких упругих тел обобщены в монографии [25]. На основе трехмерных уравнений теории упругости получены асимптотически оптимальные уравнения низкочастотных, высокочастотных и длинноволновых высокочастотных приближений, позволяющие в совокупности описать как стационарные, так и нестационарные динамические процессы. Разработаны двумерные теории высшего порядка пластин и оболочек, рассмотрены задачи колебания оболочек вращения, тонких тел в среде. Выведены асимптотически оптимальные уравнения динамических погранслоев в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига, в окрестности квазифронта. Окончательная форма расчленения нестационарного НДС оболочки вращения описана в [26] при торцевых ударных воздействиях видов LT и LM. Однако построение схемы расчленения для воздействий нормального типа (воздействий вида NW) долгое время не было завершено. Это было связано с тем, что в отличие от рассмотренных ранее воздействий тангенциального и изгибающего типов, нормальные воздействия приводят к принципиально новой схеме расчленения, в которой должен быть учтен условный фронт поверхностной волны Рэлея.

Существование нестационарной волны Рэлея, возникающей при силовом воздействии на свободную поверхность упругого полупространства, было впервые установлено в классической работе Лэмба [27]. В случае локализованного воздействия типа сосредоточенной силы данная волна выглядит как существенный всплеск НДС, быстро затухающий с глубиной и распространяющийся вдоль поверхности тела со скоростью стационарной волны Рэлея. В работе [28] для случая полупространства, находящегося в условиях плоской деформации была предложена асимптотическая модель, направленная непосредственно на описание поля волны Рэлея. Эта модель включает в себя одномерное волновое уравнение, содержащее в явном виде скорость волны Рэлея и описывающее распространение волны вдоль поверхности, и краевые задачи Неймана для потенциалов Ламе, описывающие затухание волнового поля вглубь полупространства. Построение аналогичной асимптотической модели для нахождения решения

в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея в упругой полуполосе при торцевом воздействии нормального вида было выполнено в работе [29]. Обобщение этой модели для случая торцевого воздействия нормального типа на торец полубесконечной оболочки получено в работе [2]. Исследование нестационарного волнового НДС в цилиндрических оболочках при поверхностных ударных воздействиях нормального типа и разработка асимптотической схемы расчленения НДС оболочки на составляющие выполнено в [30]. В работах [1,31] разработаны асимптотическая схема расчленения НДС оболочки на составляющие и методы аналитического решения задач для всех составляющих в случае торцевых воздействий нормального типа (воздействий вида NW).

1. ТОРЦЕВЫЕ УДАРНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ НОРМАЛЬНОГО ТИПА НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ. ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу о распространении осесимметричных упругих волн в цилиндрической оболочке в трехмерной постановке. Введем цилиндрическую систему координат (x, r, θ) , где x – осевая координата, r – радиальная координата (рис. 1), θ – окружная координата. Все искомые величины предполагаются постоянными по θ , крутильные волны не рассматриваются. Тогда трехмерные уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rx} - \rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (-\sigma_\theta + \sigma_r) - \rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

а уравнения обобщенного закона Гука – в виде

$$\sigma_x = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{v_r}{r} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{v_r}{r} \right), \quad \sigma_{rx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right). \quad (1.2)$$

В соотношениях (1.1) и (1.2) v_x, v_r – перемещения в осевом и радиальном направлениях, соответственно, $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_r, \sigma_{rx}$ – компоненты тензора напряжений, t – время, h и R – полутолщина и радиус оболочки, $\kappa = c_2/c_1$, c_1 и c_2 – скорости волн расширения и сдвига: $c_1 = \sqrt{E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)\rho]}$, $c_2 = \sqrt{E/[2(1+\nu)\rho]}$, E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала, соответственно. В данной работе изучаются волны, вызванные торцевыми воздействиями нормального типа.

Рассматривается полубесконечная оболочка ($0 \leq x < \infty$) со следующими граничными условиями на торце:

$$\sigma_{rx} = I_0 H(t), \quad v_x = 0 \text{ при } x = 0, \quad (1.3)$$

где $H(t)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда, I_0 – амплитуда нагрузки. Граничные условия (1.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} I_0 H(t), \quad v_x = 0 \text{ при } x = 0. \quad (1.4)$$

Будем рассматривать только начальные условия покоя при $t = 0$:

$$v_x = v_r = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получим уравнения движения в перемещениях:

$$\begin{aligned} \kappa^{-2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \kappa^{-2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\kappa^{-2}}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\kappa^{-2}}{r^2} v_r - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

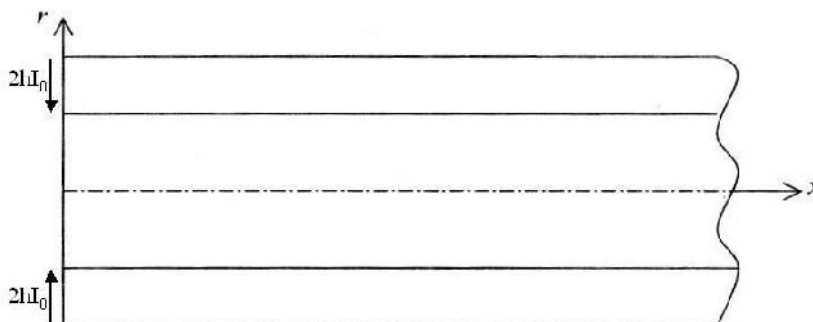


Рис. 1. Полубесконечная цилиндрическая оболочка под действием торцевой нагрузки нормального типа.

Приведенные уравнения позволяют описать нестационарное волновое НДС оболочки при воздействии указанных торцевых нагрузок. В момент приложения ударной нагрузки в оболочке возникает система первичных волн, как продольных, так и поперечных, которые начинают распространяться вглубь её. При этом первичные волны, распространяющиеся в продольном направлении, взаимодействуя с лицевыми поверхностями, отражаются от них и, в свою очередь, порождают вторичные волны. Таким образом, в оболочке возникает сложная система волн, распространение которых и описывается приведенными в данном параграфе уравнениями. При решении поставленной задачи используются методы, связанные с анализом суммарного вклада всех волн пакета, а не на изучении вклада отдельно взятой волны.

2. РАСЧЛЕНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО НДС НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ С РАЗЛИЧНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ИЗМЕНЯЕМОСТИ

Как показано в работах [1,21,25,26], в случае тонкой оболочки ($h = h/R \ll 1$) решение краевой задачи, поставленной в разделе 1, может быть расчленено на составляющие с различными показателями изменчивости. Для каждой из составляющих может быть построена приближенная асимптотическая модель, содержащая более простые уравнения, чем уравнения в точной постановке. Благодаря наличию областей согласования можно осуществить сращивание решений приближенных уравнений и получить таким образом «полное» решение, с достаточно малой погрешностью описывающее нестационарное НДС оболочки во всей области изменения пространственных и временных переменных.

В случае торцевых воздействий нормального типа следует использовать следующие приближенные теории:

1. Изгибная составляющая теории Кирхгофа – Лява (область R_4);
2. Квазиплоская квазиантисимметричная задача теории упругости (область R_1);
3. Погранслои в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея (область R_3);
4. Погранслои в окрестности фронта волны сдвига (область R_2);
5. Наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана (область R_5).

Далее мы будем рассматривать решение в моменты времени, большие времени пробега передним фронтом волны толщины оболочки. В случае нормального воздействия поперечного типа NW на торец полубесконечной оболочки схема расчленения для касательного напряжения

s_{gx} выглядит аналогично, как в цилиндрических оболочках при поверхностных ударных воздействиях нормального типа [30] (рис. 2). Решение для перерезывающего усилия в окрестности фронта волны Рэлея в данном случае малоамплитудное (рис. 3).

Охарактеризуем каждую из областей и выпишем приближенные разрешающие уравнения для данных областей. Главный разрыв для напряжений и деформаций имеет место на фронте волны сдвига (область R_2). НДС в малой окрестности этого фронта определяется уравнениями, построенными в [32] и содержащими систему для таких асимптотически главных компонент НДС, как нормальное перемещение и касательное напряжение. Асимптотически главные компоненты определяют антисимметричное по нормальной координате НДС.

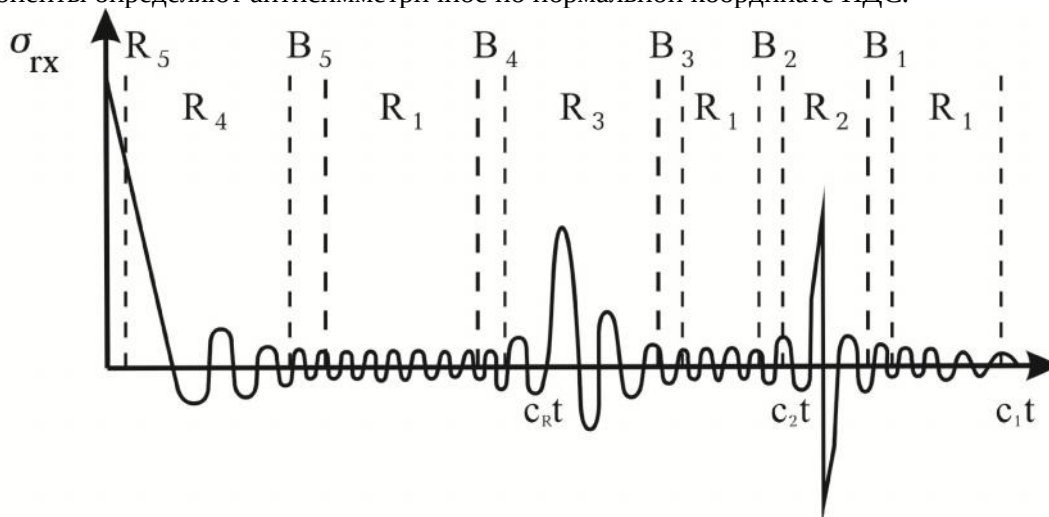


Рис. 2. Схема расчленения для касательного напряжения при торцевой нагрузке.

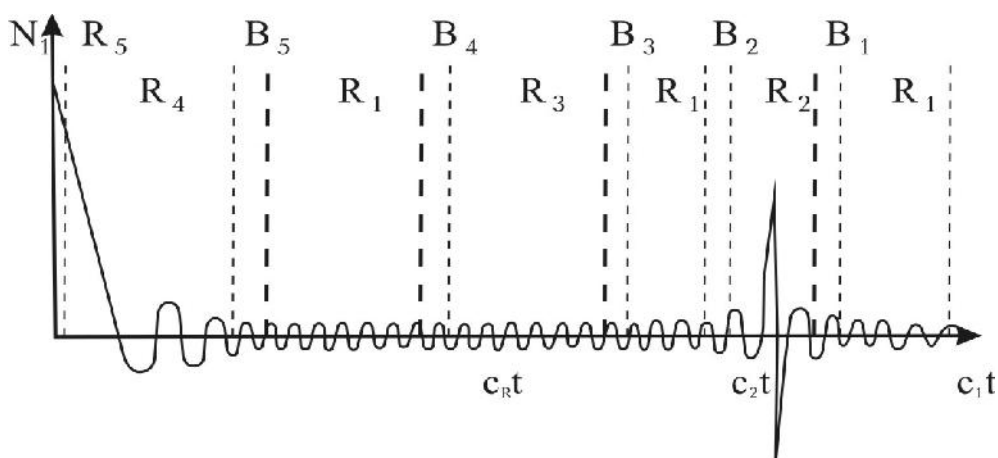


Рис. 3. Схема расчленения для перерезывающего усилия при торцевой нагрузке.

Квазиплоская квазиантисимметричная задача теории упругости (область R_1). Эта область описывается уравнениями коротковолнового высокочастотного приближения [25]. В первом приближении её уравнения совпадают с двумерными уравнениями теории упругости (плоская деформация), а граничные условия ставятся как для плоского слоя. При построении решения следует искать антисимметричное относительно срединной поверхности НДС слоя. Далее для краткости приближенная краевая задача в области R_1 будет иногда называться «плоской задачей теории упругости».

В области R_4 в рассматриваемом случае нормального воздействия следует применять изгибную (моментную) составляющую уравнений теории Кирхгофа-Лява [25,26]. В общем случае изгибная составляющая строится либо для удовлетворения нетангенциальной части заданных граничных условий, либо для снятия невязки, появившейся в этих условиях после

построения безмоментной составляющей, и должна описывать поперечную волну изгиба. Показатели изменяемости по продольной координате и времени выбираются так, чтобы асимптотически главная часть разрешающей системы содержала старшие производные от прогиба по этим переменным. Далее для краткости решение в области R_4 будет иногда называться «решением по теории Кирхгофа–Лява».

Квазистатический погранслои в малой окрестности торца, порядка толщины пластины, (область R_5) корректирует двумерное напряженное состояние, позволяя удовлетворить на торцах точным граничным условиям задачи в трехмерной форме. Описывается он коротковолновым низкочастотным приближением [25].

Область R_3 – это окрестность условного фронта волны Рэлея. Приближенные уравнения, позволяющие описать решение в этой области, приведены в работах [2, 29].

Как видно из рис. 2–3, в случае воздействий нормального типа асимптотически наибольшие значения напряжений имеют место в областях R_2, R_3, R_4, R_5 , т.е. решение на базе точных трехмерных уравнений теории упругости может быть с достаточной для практических целей точностью заменено решением уравнений погранслоев в окрестностях фронта волны сдвига и условного фронта волны Рэлея, уравнений изгибной составляющей теории Кирхгофа–Лява и уравнений статического погранслоя типа Сен-Венана.

2.1. В области R_4 применимы уравнения **изгибной длинноволновой составляющей** теории оболочек Кирхгофа–Лява [19,25]. Переходя к безразмерным переменным, сведем исходную систему уравнений (1.6) к разрешающему уравнению для прогиба:

$$\frac{1}{3}\eta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_0^4} + v_2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} = 0, \quad \xi_0 = \frac{x}{R}, \quad \tau_0 = \frac{tc_3}{R}, \quad c_3 = \sqrt{E/[\rho(1-v^2)]}. \quad (2.1)$$

Граничные условия для уравнения (1.5) записываются в виде

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \xi_0^3} = -\frac{3(1-v^2)R^3}{Eh^2} I_0 H(\tau_0), \quad \frac{\partial w}{\partial \xi_0} = 0 \quad \text{при} \quad \xi_0 = 0. \quad (2.2)$$

Применим к решению задачи (2.1), (2.2) преобразование Лапласа по переменной t_0 и преобразование Фурье

$$f^C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f \cos(\chi_0 \xi_0) d\xi_0, \quad f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f^C \cos(\chi_0 \xi_0) d\chi_0, \quad (2.3)$$

$$f^S = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f \sin(\chi_0 \xi_0) d\xi_0, \quad f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f^S \sin(\chi_0 \xi_0) d\chi_0.$$

К функции прогиба w следует применить косинус-преобразование Фурье, а к перерезывающей силе N_1 – синус-преобразование Фурье. Для изображения перерезывающей силы получаем выражение

$$N_1^{LS} = -\frac{2Eh^3}{3(1-v^2)R^3} \chi^3 w^{LC}. \quad (2.4)$$

Применим к уравнению (2.1) косинус-преобразование Фурье и преобразование Лапласа. Используя начальные условия $w = \partial w / \partial t = 0$ и граничные условия (2.2), получим следующее уравнение для изображения прогиба:

$$\frac{1}{3}\eta^2 \chi_0^4 w^{LC} + (s_0^2 + v_2) w^{LC} = -\frac{1}{3}\eta^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3(1-v^2)R^3}{Eh^2} \frac{I_0}{s}. \quad (2.5)$$

Разрешим это уравнение относительно w^{LC} :

$$w^{LC} = -\frac{1}{3}\eta^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3(1-v^2)R^3}{Eh^2} \frac{1}{s\left(\frac{1}{3}\eta^2 \chi_0^4 + s_0^2 + v_2\right)}, \quad v_2 = 1 - v^2.$$

Подставляя найденное изображение прогиба в формулу (2.4), получим выражение для изображения перерезывающей силы: $N_1^{LS} = \frac{1}{3} \eta^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2hI_0 \frac{\chi^3}{s(\eta^2 \chi_0^4 / 3 + s_0^2 + v_2)}$.

Обратим преобразование Лапласа по теореме о вычетах и получим:

$$N_1^S = -2hI_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3} \eta^2 \frac{\chi_0^3}{(\eta^2 \chi_0^4 / 3 + v_2)} (\cos(\omega_0 \tau_0) - 1). \quad (2.6)$$

Обращая затем синус-преобразование Фурье, получим решение для перерезывающей силы:

$$N_1 = -\frac{4hI_0}{\pi} \frac{1}{3} \eta^2 \int_0^\infty \frac{\chi_0^3}{\omega_0^2} ((\cos(\omega_0 \tau_0) - 1) \sin(\chi_0 \xi_0)) d\chi_0. \quad (2.7)$$

Представим решение (2.7) в виде

$$N_1 = N_{1,1} + N_{1,st}, \quad N_{1,st} = \frac{4hI_0}{\pi} \frac{1}{3} \eta^2 \int_0^\infty \frac{\chi_0^3}{\omega_0^2} \sin(\chi_0 \xi_0) d\chi_0, \quad (2.8)$$

$$N_{1,1} = -\frac{4hI_0}{\pi} \frac{1}{3} \eta^2 \int_0^\infty \frac{\chi_0^3}{\omega_0^2} (\cos(\omega_0 \tau_0) \sin(\chi_0 \xi_0)) d\chi_0.$$

Вычисляя второй интеграл в (2.8) с помощью теории вычетов [33], получим

$$N_{1,st} = 2hI_0 \exp(\eta_1^{-1/2} \xi_0 / \sqrt{2}) \cos(\eta_1^{-1/2} \xi_0 / \sqrt{2}), \quad (2.9)$$

где $\eta_1^2 = \eta^2 / (3v_2)$, что соответствует решению для статического краевого эффекта в цилиндрической оболочке. Третий интеграл в (9) можно оценить при $\tau_0 \gg 1$ методом стационарной фазы. Сопоставление полученной оценки с результатами решения плоской задачи теории упругости показывает, что для области согласования B_5 в данном случае также имеет место оценка $\eta^{1/2} \tau_0 \ll \xi_0 \ll \tau_0$.

2.2. Область R_1 – плоская задача теории упругости. Решение задачи в области R_1 по плоской теории упругости совпадает с решением аналогичной задачи для полуполосы. Обратим преобразование Лапласа, используя разложение по вычетах, а затем преобразование Фурье. В результате получим решение для перерезывающей силы в виде

$$N_1 = \frac{2hI_0}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\chi \alpha^2 \omega_n^2}{D_{ad}} \frac{\text{sh} \alpha}{\alpha} \frac{\text{sh} \beta}{\beta} \cos(\omega_n \tau) \sin(\chi \xi) d\chi. \quad (2.10)$$

Можно показать, что асимптотика подынтегральной функции для первой моды при $\chi \rightarrow \infty$ совпадает с решением приближенных уравнений для поля Рэлея. Это позволяет записать оценку для областей согласования B_3 и B_4 в виде $|k_R \tau - \xi| \ll \tau$.

2.3. Приближенная теория, описывающая дальнейшее поле волны Рэлея (область R_4) для цилиндрической оболочки, построена в [2,29]. Изображение касательного напряжения σ_{rx} можно записать в виде:

$$\sigma_{rx}^{LF} = -\frac{I_0 k_R B}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\chi^3}{\chi(s^2 + \chi^2)} \frac{1}{s^2 + \omega_R^2} \cdot \left[e^{-(1-\zeta)k_2|\chi|} - e^{-(1-\zeta)k_1|\chi|} + e^{-(1+\zeta)k_2|\chi|} - e^{-(1+\zeta)k_1|\chi|} \right].$$

Выделим в этом соотношении слагаемое, вносящий наибольший вклад в касательное напряжение в окрестности условного фронта волны Рэлея вблизи поверхности $\zeta = 1$:

$$\sigma_{rx}^{LF} = -I_0 \frac{k_R B}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\chi}{s} \frac{1}{s^2 + \omega_R^2} \left[e^{-(1-\zeta)k_2|\chi|} - e^{-(1-\zeta)k_1|\chi|} \right].$$

Выполняя обращение, получим решение для касательного напряжения:

$$\sigma_{rx} = \frac{-I_0 B k_R}{2\pi} \int_{\chi_c}^{\infty} \frac{\chi}{\omega_R^2} \sin(\omega_R \tau - \chi \xi) \left(e^{-(1-\zeta)k_2 \chi} - e^{-(1-\zeta)k_1 \chi} \right) d\chi. \quad (2.11)$$

В подынтегральном выражении в (2.11) имеются экспоненциальные множители. Вследствие этого, подынтегральная функция экспоненциально затухает при $\chi \rightarrow \infty$, что приводит к «сглаживанию» разрыва на фронте волны Рэлея.

2.4. Область R_2 – пограслой в окрестности фронта волны сдвига. При воздействии вида NW передний фронт волны сдвига несет главный разрыв напряжения σ_{rx} , отражающий скачок напряжения в начальный момент времени. В рассматриваемом случае оболочки вращения нулевой кривизны фронт волны образован нормальными к срединной поверхности и определяется уравнением $x = c_2 t$. Асимптотически оптимальные уравнения динамического погранслоя в окрестности волны сдвига построены в работе [19]. В данном случае асимптотически главными компонентами НДС являются касательное напряжение σ_{rx} и нормальное перемещение. Для нормального перемещения v_r и для напряжения σ_{rx} в [19] получено разрешающее уравнение

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial \tau^2} = 0, \quad \sigma_{rx} = \frac{E}{2(1+\nu)h} \frac{\partial v_r}{\partial \xi}. \quad (2.12)$$

Решение первого уравнения (2.12) должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях $\zeta = \pm 1$ $\partial v_r / \partial \xi = 0$, и граничному условию на торце $\xi = 0$:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \xi} = 2IH(\tau), \quad I = I_0(1+\nu)h/E.$$

Применим интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. К первому уравнению (2.12) применим косинус-преобразование Фурье. Для изображения нормального перемещения получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 v_r^{LC}}{d\zeta^2} - (\chi^2 + s^2) v_r^{LC} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{I}{s}, \quad (2.13)$$

решение которого следует подчинить граничным условиям $v_r^{LC} = 0$ при $\zeta = \pm 1$.

Решая данную краевую задачу, найдем изображение нормального перемещения. Используя вторую формулу (2.12), найдем изображение касательного напряжения. Интегрируя его по ζ ,

получим изображение перерезывающей силы $N_1^{LS} = -2hI_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\chi}{s\beta^2 \operatorname{ch} \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta}{\beta} - \operatorname{ch} \beta \right),$

$$\beta = \sqrt{\chi^2 + s^2}.$$

Продолжим N_1^{LS} нечетно на полуось $\chi < 0$ и запишем формулу обращения в виде

$$N_1^L = -i \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} N_1^{LS} \exp(i\chi \xi) d\chi. \quad (2.14)$$

Вычислим интеграл (2.14), используя теорему о вычетах. Подынтегральная функция является мероморфной и имеет полюсы в точках, определяемых уравнением $\operatorname{ch} \beta = 0$.

Корни этого уравнения определяются выражением

$$\chi_n = is \sqrt{1 + (n - 0,5)^2 \pi^2 / s^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вычисляя вычеты в точках χ_n , находим выражение для интеграла:

$$N_1^L = \frac{4hI_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-0,5)^2} \frac{1}{s} \exp \left\{ -\xi s \sqrt{1 + \frac{(n-0,5)^2 \pi^2}{s^2}} \right\}. \quad (2.15)$$

Разложим члены суммы (2.15) в ряд по отрицательным степеням параметра s . Каждый член получившихся разложений можно обратить, используя формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-s\tau} \left(\frac{\tau - c\xi}{g\xi} \right)^{k/2} J_k \left(2\sqrt{g\xi(\tau - c\xi)} \right) H(\tau - c\xi) d\tau = \frac{1}{s^{k+1}} \exp \left[- \left(sc + \frac{g}{s} \right) \xi \right],$$

где g и c – постоянные, J_k – функции Бесселя. Оставляя в разложении только функции Бесселя нулевого порядка, получим следующее выражение для перерезывающей силы в малой окрестности фронта волны сдвига:

$$N_1 = \frac{16hI_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} J_k \left((n-0,5)\pi\sqrt{2\xi(\tau - \xi)} \right) H(\tau - \xi). \quad (2.16)$$

Используя выражение для суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \pi^2/8$, нетрудно показать, что скачок перерезывающего усилия на фронте волны равен $2hI_0$, что соответствует его скачку в начальный момент времени. Отметим, что решение уравнений динамического погранслоя в окрестности волны сдвига согласуется с решением по плоской теории упругости в области $\tau - \xi = O(\eta^2)$.

3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЛЕНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО НДС НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Проведенное численное моделирование показало, что решение по методу расчленения напряженного состояния и по теории типа Тимошенко (линейная динамическая теории оболочек типа Тимошенко [34,35]) дают достаточно хорошую аппроксимацию точного решения в областях R_1 , R_3 , R_4 . В окрестности условного фронта волны Рэлея (область R_3) применение теории типа Тимошенко приводит к качественно неверным результатам, в то время как метод расчленения на составляющие с различными показателями изменчивости в области R_3 адекватно описывает нестационарное волновое НДС.

На рис. 4 изображено поведение касательного напряжения в окрестности условного фронта волны Рэлея, вычисленное по формуле (2.11) при $c_c = 3$, $n = 0,3$, $h = 0,01$, $2hI_0 = 1$, $t = 200$. На рис. 5 показано поведение перерезывающей силы по теории типа Тимошенко [34,35], вычисленное при тех же условиях, что и решение на рис. 4. В теории типа Тимошенко разрыв перерезывающей силы соответствует разрыву касательного напряжения, которого по точной теории нет. На рис. 6 представлено поведение перерезывающей силы в окрестности фронта волны сдвига по трехмерной теории, вычисленное при тех же параметрах задачи.

Сравнение рис. 6 и 5 показывает, что поведение перерезывающей силы в окрестности фронта волны сдвига по линейной динамической теории оболочек типа Тимошенко напоминает поведение перерезывающей силы в окрестности фронта волны сдвига по трехмерной теории. В частности, скачок на фронте волны и в том, и в другом случае равен $2hI_0$. Однако осцилляции в окрестности фронта по теории типа Тимошенко менее частые и располагаются впереди фронта, а не позади, как у фронта волны сдвига. Осцилляции впереди фронта характерны, напротив, для условного фронта волны Рэлея. Таким образом, фронт волны сдвига по теории типа Тимошенко представляет собой некую комбинацию фронта волны сдвига и условного фронта волны Рэлея, при этом и тот, и другой описываются неверно. Таким образом, в данной задаче при исследовании нестационарных волн предпочтительнее использовать предложенный метод расчленения НДС на составляющие с различными показателями изменчивости.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-08-01180а).

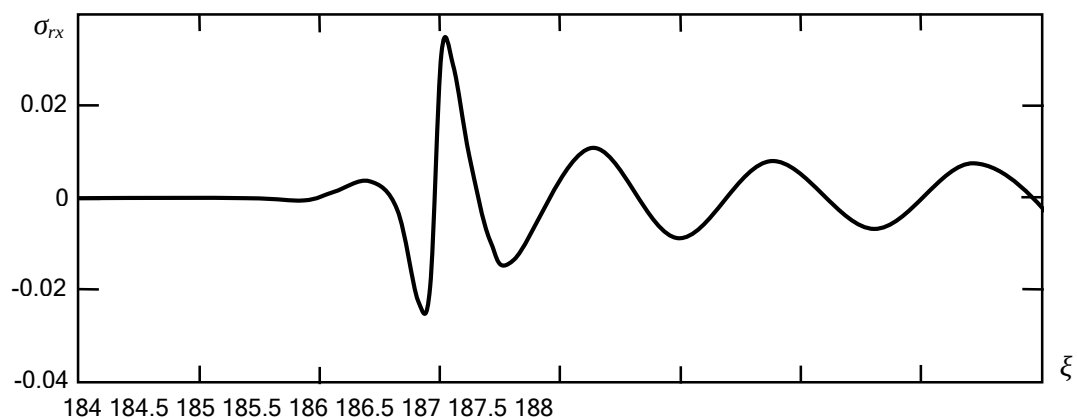


Рис. 4. Поведение касательного напряжения в окрестности условного фронта волны Рэлея.

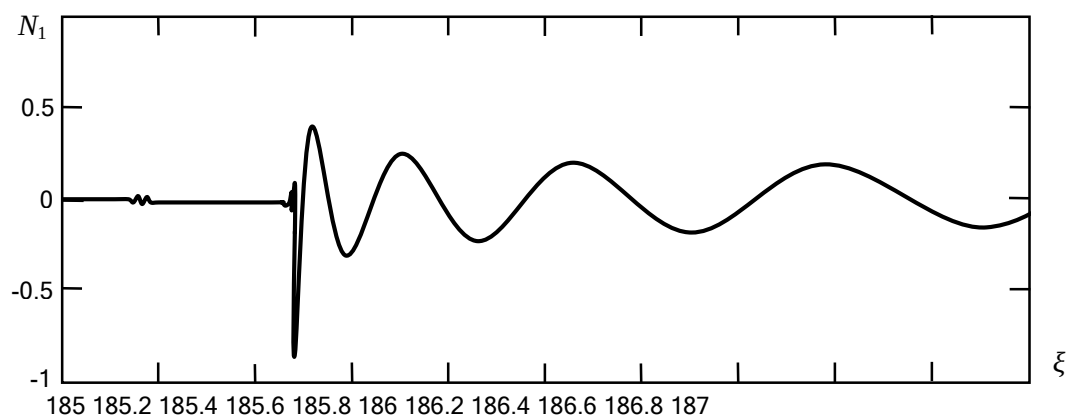


Рис. 5. Поведение перерезывающей силы в окрестности фронта волны сдвига по теории типа Тимошенко.

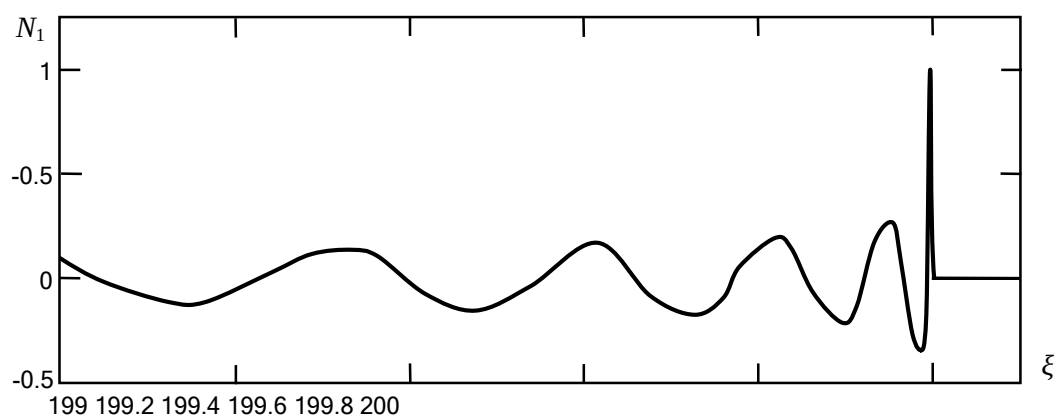


Рис. 6. Поведение перерезывающей силы в окрестности фронта волны сдвига по трехмерной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев В.А., Таранов О.В. Расчленение нестационарного НДС для цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Материалы V Российской конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела» под ред. акад. Н.Ф. Морозова. – Саратов: Изд-во СГУ. 2005. С. 191–193.
2. Ковалев В.А., Таранов О.В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой цилиндрической оболочки при действии торцевой нагрузки // Журнал Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 197–208.
3. Коссович Л.Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях // Журнал Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008, вып. 2. С. 14–35.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука. 1976. – 512 с.
5. Гольденвейзер А.Л., Лидский А.Л., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: 1979. – 384 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек // ПММ. 1973. Т.37. Вып. 4. С. 591–603.
7. Гольденвейзер А.Л. О вынужденных гармонических колебаниях оболочек // Изв. АН СССР МТТ. 1987. № 5. С. 168–177.
8. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек // Изв. АН СССР МТТ. 1988. № 4. С. 151–162.
9. Гольденвейзер А.Л. Некоторые вопросы общей линейной теории оболочек // Изв. АН СССР МТТ. 1990. № 5. С. 126–138.
10. Гольденвейзер А.Л. Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
11. Товстик П.Е. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. – С.-П.: Изд-во С.-П. ун-та, 1995. – 184 с.
12. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформаций круговых цилиндрических оболочек // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: 1966. С. 593–599.
13. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solids and Structures. Vol. 1. 1969. P. 607–627.
14. Векслер Н.Д., Мянниль А.Н., Нигул У.К. Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных волновых процессов деформации плит конечных размеров // Прикладная механика. 1965. Т.1. Вып.12. С. 38–49.
15. Векслер Н.Д. Исследование фронтовых разрывов при осесимметричной деформации оболочек вращения и круглой плиты // Переходные процессы деформации оболочек и пластин. Материалы Всесоюз. Симпозиума. Тарту. 1967. С. 41–49.
16. Слепян Л.И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 343 с.
17. Федорюк М.В. Метод перевала. – М.: 1977. – 468 с.
18. Коссович Л.Ю. Метод асимптотического интегрирования в задачах о распространении волн в оболочках вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 143–148.
19. Коссович Л.Ю. Области согласования интегралов Кирхгофа-Лява и динамического нерегулярного погранслоя в задачах о распространении волн в оболочках вращения // Тр.13-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Таллин. Т.3. 1983. С. 90–95.
20. Коссович Л.Ю. Исследование волнового процесса в оболочках вращения методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 142–146.
21. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. – Саратов: Издательство Саратовского университета. 1986. 176 с.

22. Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // ПММ. 1993. Т.57. Вып.1. С. 83–91.
23. Каплунов Ю.Д. Интегрирование уравнений динамического погранслоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148–160.
24. Каплунов Ю.Д. Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 147–157.
25. Kaplunov Ju.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. – London: Academic Press. 1998. – 226 p.
26. Коссович Л.Ю. Метод расчленения нестационарного напряженного состояния в оболочках вращения // Тр. 14-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Кутаиси. Т.2. 1987. С. 98–103.
27. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. Phil. Trans. R. Soc. A203, 1–42 (1904).
28. Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // Докл. РАН, 2004. Т. 395, № 4. С. 482–484.
29. Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 89–96.
30. Видье М.В., Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Применение метода расчленения НДС в задаче об ударном поверхностном воздействии нормального типа на цилиндрическую оболочку // Журнал Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2008. № 8/1 (674). С. 254–268.
31. Ковалев В.А., Таранов О.В. Задача о действии нагрузки нормального типа на торец полубесконечной оболочки // Сб. тр. XII Всероссийской научно-техн. конф. Новые информ. технологии. М.: Изд. МГУПИ. 2009. С. 53–59.
32. Kirillova I.V., Kossovich L.Yu. Dynamic boundary layer at elastic wave propagation in thin shells of revolution. ZAMM76, S5, 1996. P. 249–250.
33. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
34. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т.5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: 1973. – 272 с.
35. Cooper R. M., Naghdi P. M. Propagation of nonaxially symmetric waves in elastic cylindrical shells. // J. Acoust. Soc. Amer, 1957, 29, № 12, 1365– 1373 — РЖМех, 1958, № 11, 13052.

Сведения об авторе

Ковалев Владимир Александрович

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика», Московский городской университет управления Правительства Москвы, Россия
Тел. : 975-91-13, E-mail: kovalev@migm.ru

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

Введение. Интенсификация рабочих и технологических процессов приводит к большим плотностям потоков энергии и к значительной скорости их изменения. Эти процессы сопровождаются преобразованием видов энергии, а нередко – и фазовыми переходами в материале, причем реакция материала на высокоинтенсивное быстро меняющееся внешнее воздействие может запаздывать во времени.

Используемые обычно в прикладных исследованиях классические модели термомеханики, как правило, не учитывают скоростных эффектов и эффектов запаздывания. Известные эмпирические приемы учета таких эффектов не решают проблемы создания адекватных математических моделей высокоинтенсивных термомеханических процессов.

В зависимости от структуры материала рассматриваемого тела (например, кристаллической, аморфной, высокомолекулярной и т.д.) приложенные внешние механические и тепловые нагрузки вызывают определенные структурные изменения.

Для поликристаллических материалов внешние термомеханические воздействия вызывают появление в кристаллографических плоскостях касательных напряжений, которые являются причиной движения линейных дефектов (дислокаций). На макроуровне движение дислокаций приводит к возникновению неупругих деформаций. У материалов с высокомолекулярной структурой приложение внешней нагрузки вызывает раскручивание и переориентацию молекулярных цепей, происходит перераспределение молекулярных сегментов между упорядоченной и неупорядоченной частями полимера.

В том случае, когда характерное время изменения внешней нагрузки играет существенную роль, при разработке математических моделей в термомеханике необходимо учитывать скоростные эффекты, как при описании деформации, так и при описании процесса распространения теплоты. Так как при любом внешнем воздействии изменяется внутренняя энергия тела, то для реальных материалов этот процесс обусловлен изменением структуры, т.е. происходит переход от одного термодинамического состояния к другому. Если характерное время изменения внешней нагрузки близко ко времени перехода термодинамической системы в новое состояние, то учет изменений структуры необходим.

Процессы, происходящие в сплошной среде на микроуровне, проявляются на макроуровне. Однако зачастую необходимо учитывать только некоторые аспекты этих процессов. В таких случаях целесообразно использовать упрощенные модели, отражающие только те свойства реальных тел, которые представляются особо значимыми. При других условиях могут быть интересными другие аспекты взаимодействия тел и возможно использовать другие модели. Таким образом, реальному телу можно сопоставить совокупность моделей, которые описывают отдельные стороны его сложного поведения. В дальнейшем основное внимание уделим моделям, учитывающим релаксационные эффекты при деформировании, распространении и аккумуляции теплоты в твердом теле при высокоинтенсивных воздействиях.

Основные термодинамические соотношения. Предположим, что состояние рассматриваемой сплошной среды в окрестности любой материальной точки определяется четырьмя термодинамическими функциями, являющимися активными переменными: массовыми плотностями свободной энергии A и энтропии h , тензором напряжений с компонентами $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и вектором плотности теплового потока с компонентами q_i , $i, j = 1, 2, 3$. Аргументами этих функций примем следующие реактивные переменные: тензор малой деформации с компонентами $\epsilon_{kl} = (\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k) / 2$, где $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$ – компоненты вектора перемещения; x_k – декартовы прямоугольные координаты, $k, l = 1, 2, 3$; t – время; абсолютную температуру $T(x_1, x_2, x_3, t)$; градиент температуры, компоненты которого $\vartheta_k = \partial T / \partial x_k$; внутренние параметры состояния: два скалярных $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$, $\chi(x_1, x_2, x_3, t)$ и два векторных с составляющими $\chi_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $\kappa_i(x_1, x_2, x_3, t)$ [1-4].

Скалярный параметр $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ имеет смысл температуры и характеризует средний уровень кинетической энергии в неравновесном термодинамическом процессе. Параметр Φ называют термодинамической температурой.

Второй скалярный параметр называют параметром порядка. Этот параметр в данном случае характеризует фазовый переход без изменения агрегатного состояния вещества.

Микромеханизм переноса теплоты в твердом теле характеризуется двумя векторными параметрами с компонентами χ_i и κ_i , соответственно. Например, в поликристаллическом материале эти параметры имеют смысл векторов плотности тепловых потоков, передаваемых за счет переноса фоонов и электронов, а композитном материале, состоящем из матрицы и наполнителя, отражают вклад в процесс переноса теплоты этих двух компонентов материала.

Обоснованный учет отмеченных особенностей возможен с привлечением соотношений термодинамики необратимых процессов. Используем первый закон термодинамики (закон сохранения энергии) в виде

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v, \quad (1)$$

где ρ , u – плотность и массовая плотность внутренней энергии; q_v – объемная плотность мощности источников тепловыделения; $(\dot{}) = \partial()/\partial t$. Здесь и далее принято соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам. Из (1) с помощью преобразования Лежандра $u = A + Th$ получим

$$\begin{aligned} & \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\epsilon}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial T} + h \right) \dot{T} + \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i + \rho \frac{\partial A}{\partial \Phi} \dot{\Phi} + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi} \dot{\chi} + \\ & + \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i + \rho \frac{\partial A}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i + \rho T \dot{h} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - q_v = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Локальная форма второго закона термодинамики (неравенства Клазиуса-Дюгема) имеет вид

$$\rho T \dot{h} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - T^{-1} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - q_v \geq 0. \quad (3)$$

Вычитая далее из левой части неравенства (3) левую часть равенства (2), получим

$$\begin{aligned} & - \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \left(\frac{\partial A}{\partial T} + h \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} \dot{\vartheta}_i - \rho \frac{\partial A}{\partial \Phi} \dot{\Phi} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi} \dot{\chi} - \\ & - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i - \rho \frac{\partial A}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i - T^{-1} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Это неравенство линейно по отношению к скоростям изменения реактивных переменных, которые или не являются определяющими переменными $(\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{T}, \dot{\vartheta}_i)$, или заданы соответствующими кинетическими уравнениями. Так как второй закон термодинамики справедлив для произвольных скоростей процессов, достаточным условием справедливости неравенства (4) являются равенства

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial A}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad h = - \frac{\partial A}{\partial T}, \quad \frac{\partial A}{\partial \vartheta_i} = 0 \quad (5)$$

и неравенство

$$- \rho \frac{\partial A}{\partial \Phi} \dot{\Phi} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi} \dot{\chi} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i - \rho \frac{\partial A}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i - T^{-1} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0. \quad (6)$$

Из неравенства (6) следует, что кинетические уравнения для определяющих внутренних параметров Φ , χ , χ_i и κ_i не могут быть произвольными, конкретная их форма должна выбираться с учетом неравенства (6). Отметим, что диссипативная функция в неравенстве (6) имеет вид

$$\delta = -\rho \frac{\partial A}{\partial \Phi} \dot{\Phi} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi} \dot{\chi} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i - \rho \frac{\partial A}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i.$$

Если записать закон сохранения энергии (2) с учетом равенств (5), то получим

$$\rho T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \dot{T} = \rho T \left(-\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial h}{\partial \Phi} \dot{\Phi} - \frac{\partial h}{\partial \chi} \dot{\chi} - \frac{\partial h}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i - \frac{\partial h}{\partial \kappa_i} \dot{\kappa}_i \right) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v + \delta. \quad (7)$$

Слагаемые, заключенные в скобках в правой части (7), характеризуют термодинамическую связанность процессов теплопроводности и деформации, а также изменение внутренних параметров состояния.

Линейная термомеханическая модель сплошной среды с фазовыми переходами. Для многих металлов и сплавов в некотором, сравнительно узком диапазоне температур, характерны фазовые превращения, не сопровождающиеся изменением состава и агрегатного состояния. К числу простейших фазовых превращений такого типа относят полиморфные превращения, упорядоченные и мартенситные реакции.

Полиморфные превращения, сопровождающиеся смещением атомов, происходит при "распрямлении связей", когда атомы остаются окруженными теми же соседями. Так как при таком превращении не происходит разрыва связей, то оно может идти с большой скоростью, что может привести к растрескиванию хрупких материалов.

Упорядочение состоит в том, что сплав с хаотично распределенными атомами в узлах кристаллической решетки превращается в сплав с упорядоченной структурой. При этом не происходит изменение координационного числа (числа, находящегося в контакте с рассматриваемым ионом), но требуется диффузионное перемещение атомов.

Некоторые фазовые превращения происходят путем коллективного смещения атомов, напоминающего процесс сдвига. Гранецентрированная кубическая решетка в результате сдвигового смещения для одних сплавов может превратиться в объемноцентрированную, а для других – в гексагональную плотноупакованную. Фазовые превращения такого типа называют мартенситными (мартенситными реакциями). Они характерны, например, для сплавов с эффектом памяти формы. Мартенситные превращения характеризуются зависимостью температур начала и окончания превращения от скорости изменения температуры, обратимым характером превращения, заметным несовпадением температур начала и окончания прямой и обратной реакции (гистерезис), зависимостью температур начала и окончания фазового превращения от механических напряжений и т.п. Низкотемпературную модификацию сплава называют мартенситом, высокотемпературную – аустенитом. Переход сплава из аустенитного состояния в мартенситное происходит при понижении температуры на отрезке $[M_s, M_f]$, где M_s, M_f – температуры начала (s – "start") и окончания (f – "finish") перехода. Обратный переход из мартенситной фазы в аустенитную называют аустенитным превращением. Этот переход происходит при повышении температуры на отрезке $[A_s, A_f]$, где A_s, A_f – температуры начала и окончания перехода мартенсита в аустенит. В общем случае $A_f > M_s > A_s > M_f$ и $M_s - M_f \neq A_f - A_s$. В связи с трудностями при определении последних небольших количеств остаточного мартенсита температуру A_f принимают соответствующей объемной доле мартенсита в сплаве, равной 0,01, а температуру M_f – объемной доле аустенита в сплаве, равной 0,01 [4-5].

Рассмотрим простейший фазовый переход аустенит – мартенсит и обратный переход – мартенсит – аустенит, происходящие без изменения состава рассматриваемого сплава. Положим, что в исходном состоянии сплав находится в аустенитной (высокотемпературной) фазе при температуре T . При понижении температуры T в отсутствие внешних механических

воздействий мартенситный переход инициируется при температуре M_s в момент времени t_{M_s} и в идеальном случае при $\chi = 0$. Завершается этот переход при температуре M_f в момент времени t_{M_f} . Отметим, что в реальном сплаве в аустенитной фазе может существовать мартенсит и при $t = t_{M_s}$ возможно $\chi = \chi^* \ll 1$, а обратный переход может начаться в момент времени t_{A_s} при $(1 - \chi^{**}) \ll 1$, т.е. в мартенситной фазе могут существовать зародыши аустенита. Из этих рассуждений очевидно, что внутренний параметр $\chi \in [0, 1]$ представляет собой массовую долю мартенсита в сплаве и при переходе аустенит – мартенсит

$$\chi = 1 - \left(1 - \chi^*\right) \exp\left(-\frac{t - t_{M_s}}{\tau}\right), \quad (8)$$

а при обратном

$$\chi = \chi^{**} \exp\left(-\frac{t - t_{A_s}}{\tau}\right).$$

Далее будем рассматривать достаточно медленные термомеханические процессы, такие, когда можно пренебречь внутренними параметрами Φ , χ_i и κ_i .

Примем, что малы как полная деформация ($|\varepsilon_{ij}| \ll 1$), так и температурная и фазовая деформации, определенные тензорами с компонентами $\varepsilon_{ij}^{(T)} = \varepsilon_{ji}^{(T)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(\chi)} = \varepsilon_{ji}^{(\chi)}$, соответственно. Отметим, что $\varepsilon_{ij}^{(T)} = 0$ при температуре T_0 естественного состояния, а $\partial \varepsilon_{ij}^{(\chi)} / \partial t = 0$ при $\dot{\chi} = 0$. В линейном приближении $\varepsilon_{ij}^{(\chi)} = \alpha_{ij}^{(\chi)} \chi$, где $\alpha_{ij}^{(\chi)}$ – компоненты тензора коэффициентов фазовой деформации.

Представим объемную плотность свободной энергии в виде

$$\begin{aligned} \rho A(\varepsilon_{kl}, T, \vartheta_k, \chi) = & \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(\chi)} \right) \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(T)} - \varepsilon_{ij}^{(\chi)} \right) + \rho B(T, \chi) - \\ & - \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(-\varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(\chi)} \right) \left(-\varepsilon_{ij}^{(T)} - \varepsilon_{ij}^{(\chi)} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ – компоненты тензора коэффициентов упругости; $B(T, \chi)$ – часть свободной энергии единицы массы тела, зависящая от T и χ , причем $B(T_0, 0) = 0$. Отметим, что при $\varepsilon_{ij} = 0$ из (9) следует $A = B$, т.е. при отсутствии полной деформации свободная энергия тела зависит лишь от T и χ .

Из (9) и первого и второго равенств (5) следует

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} - \varepsilon_{kl}^{(\chi)} \right), \quad h = \frac{1}{\rho} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \alpha_{ij}^{(T)} - \frac{\partial B}{\partial T}, \quad (10)$$

где $\alpha_{ij}^{(T)} = \partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T$ – компоненты тензора температурных коэффициентов линейного расширения. Объединив второе равенство из (10) и уравнение (7) и отбросив слагаемые, содержащие линейную и квадратичную зависимости h и $\dot{h}$ от ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ и $\varepsilon_{ij}^{(\chi)}$ и имеющие более высокий порядок малости, получим

$$-\rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \dot{T} - \rho T \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \chi} \dot{\chi} + T C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v + \delta.$$

Если принять, что $q_i = -\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j}$, где $\lambda_{ij}^{(T)} = \lambda_{ij}^{(T)}(T, \chi)$ – компоненты тензора теплопроводности, придем к уравнению теплопроводности в виде

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} - \rho m_\varepsilon \dot{\chi} + T C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + q_v + \delta, \quad (11)$$

где $c_\varepsilon = -T \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}$ – удельная массовая теплоемкость при постоянной деформации;

$m_\varepsilon = T \frac{\partial^2 B}{\partial T \partial \chi}$ – удельная массовая конфигурационная теплоемкость при постоянной деформации (количество энергии, затрачиваемой на фазовый переход единицы массы в единицу времени при постоянной деформации). Отметим, что в (11) второе слагаемое в левой части и последнее слагаемое в правой части отличны от нуля при $t \in [t_{M_s}, t_{M_f}]$ или $t \in [t_{A_s}, t_{A_f}]$.

Рассмотренная простейшая модель позволяет сделать вывод о необходимости совместного рассмотрения процессов теплопроводности и деформирования. Действительно, если температура в окрестности произвольной точки рассматриваемого тела изменяется достаточно медленно, $(t_{M_f} - t_{M_s})/\tau \gg 1$ и $(t_{A_f} - t_{A_s})/\tau \gg 1$, то и прямой и обратный фазовые переходы практически полностью завершаются. В противном случае этого не происходит и, следовательно, напряженно-деформируемое состояние в окрестности рассматриваемой точки существенным образом, как следует из первого равенства (10) и соотношений (8), зависит от степени завершенности фазового перехода, т.е. от скорости изменения абсолютной температуры.

Линейная термоупругая модель сплошной среды с внутренними параметрами состояния. Рассмотрим сплошную среду, для которой существенны внутренние параметры состояния Φ и χ_i . Кинетические уравнения, описывающие изменения во времени внутренних параметров, примем в линейном приближении в виде обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tau_T \dot{\Phi} = \bar{\Phi} - \Phi, \quad \tau_q \dot{\chi}_i = \bar{\chi}_i - \chi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где τ_T и τ_q – времена релаксации внутренних параметров состояния, обратно пропорциональные частотам собственных колебаний молекул в неравновесном процессе и частотам взаимодействия фононов соответственно; $\bar{\Phi}$ и $\bar{\chi}_i$ – значения Φ и χ_i в равновесном термодинамическом процессе. Поскольку уравнения (12) линейны, их решения имеют вид

$$\Phi = \bar{\Phi} - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T}\right) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t'} dt', \quad \chi_i = \bar{\chi}_i - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_q}\right) \frac{\partial \bar{\chi}_i}{\partial t'} dt'. \quad (13)$$

Как и ранее, полагаем малыми не только полные и температурные деформации, но и температурную деформацию, определяемую параметром Φ с компонентами $\varepsilon_{ij}^{(\Phi)}$. Объемную плотность свободной энергии в этом случае представим в виде

$$\rho A(\varepsilon_{kl}, T, \Phi, \chi_k) = \frac{1}{2} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + H_{ijkl} \beta_{kl} \beta_{ij} + F_{ij} \chi_j \chi_i) - C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{(T)} + \rho B(T) + \rho B_1(\Phi, T) - \quad (14)$$

$$- D_{ijkl} \beta_{kl} \varepsilon_{ij} - K_{ijk} \chi_k \varepsilon_{ij}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

причем $A(0, T_0, T_0, 0) = 0$, $\beta_{kl} = \varepsilon_{kl}^{(\Phi)} - \varepsilon_{kl}^{(T)}$. Функции $B(T)$ и $B_1(\Phi, T)$ в формуле (14) определяют изменение свободной энергии только за счет изменения T и Φ , причем $B(T_0) = 0$, $B_1(T_0, T_0) = 0$, а тензоры с компонентами C_{ijkl} , H_{ijkl} и F_{ij} характеризуют

термомеханические свойства твердого тела. Ясно, что $\beta_{kl} \rightarrow 0$ при $\Phi \rightarrow T$. В дальнейшем будем предполагать линейную зависимость $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ от T и $\varepsilon_{ij}^{(\Phi)}$ от Φ , причем $\partial \varepsilon_{ij}^{(T)} / \partial T = \partial \varepsilon_{ij}^{(\Phi)} / \partial T = \alpha_{ij}$.

Учитывая первое и второе равенства из (5), получаем

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) - D_{ijkl} \beta_{kl} - K_{ijk} \chi_k, \quad (15)$$

$$h = \frac{1}{\rho} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \alpha_{ij} - \frac{dB}{dT} - \frac{\partial B_1}{\partial T}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (7), придем к закону сохранения энергии в виде уравнения теплопроводности

$$-\rho T \left(\frac{d^2 B}{dT^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial T^2} \right) \dot{T} - \rho T \frac{\partial^2 B_1}{\partial T \partial \Phi} \dot{\Phi} + T C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(T)}}{\partial T} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_v + \delta. \quad (17)$$

По смыслу $-T \left(d^2 B / dT^2 + \partial^2 B_1 / \partial T^2 \right)$ и $-T \partial^2 B_1 / (\partial T \partial \Phi)$ являются, соответственно, удельными массовыми теплоемкостями c_ε и c'_ε при постоянной деформации, определяющими изменение свободной энергии пропорционально $\dot{T}$ и $\dot{\Phi}$. Так как при $\dot{\Phi} \rightarrow 0$ имеем $c_\varepsilon = -T d^2 B / dT^2$, то $B_1(\Phi, T) = B_0(\Phi)T$ и $\partial^2 B_1 / \partial T^2 = 0$.

Дальнейшая конкретизация связана с выбором вида функций для равновесных значений внутренних параметров состояния и вектора плотности теплового потока. В данном случае примем их в простейшем виде, не противоречащем принципам рациональной термодинамики

$$\bar{\Phi} = T, \quad \bar{\chi}_i = -Z_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad q_i = \Phi_{ij} \chi_j. \quad (18)$$

Таким образом, уравнение теплопроводности (17) с учетом (13) и (18) примет вид

$$\begin{aligned} \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c'_\varepsilon \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \int_0^t \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_T} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial t'^2} dt' \right) = -T C_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + q_v + \\ + \delta + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}^{(T)} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} - \int_0^t \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_q} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial T}{\partial x_j} dt' \right) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\lambda_{ij}^{(T)} = \Phi_{ik} Z_{kj}$ – компоненты тензора теплопроводности $\hat{\lambda}$.

Задав выражение для $\bar{\chi}_i$ в виде второго равенства (18), с учетом третьего условия (5) независимости A от $\partial T / \partial x_i$ имеем $F_{kj} \equiv 0$ и $K_{ijk} \equiv 0$. Поэтому, подставляя первую формулу (13) в уравнение (15), получаем

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)} \right) + D_{ijkl} \alpha_{kl}^{(T)} \int_0^t \exp \left(-\frac{t-t'}{\tau_T} \right) \frac{\partial T}{\partial t'} dt'. \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) описывают релаксационные эффекты в твердом теле применительно к достаточно широкому классу термомеханических процессов. Второй член в левой части уравнения (19) и второй член в правой части уравнения (20) отражают запаздывание процесса аккумуляции теплоты при быстром нагреве или охлаждении. Первый член в правой части уравнения (19) учитывает эффекты связанности полей температуры и деформации, а последнее слагаемое в (19) характеризует влияние неравновесности процесса аккумуляции теплоты на ее перенос путем теплопроводности.

В частных случаях построенный вариант термомеханической модели твердого тела переходит в известные модели сплошной среды. При $\tau_T \rightarrow 0$ и $\tau_q \rightarrow 0$ уравнения (19), (20) описывают поведение термоупругой линейной среды, причем уравнение (19) переходит в

параболическое уравнение теплопроводности, учитывающее эффекты термомеханической связанности. Если $\tau_T \neq 0$ и $\tau_q \rightarrow 0$, то процесс переноса теплоты происходит с бесконечной скоростью и присутствует аккумуляция теплоты с запаздыванием, зависящим от значения τ_T . При $\tau_T \rightarrow 0$ и $\tau_q \neq 0$ аккумуляция теплоты происходит без запаздывания, но процесс переноса теплоты имеет волновой характер. При этом микромеханизму теплопроводности соответствует конечная скорость переноса теплоты $D_q = \sqrt{\lambda^{(T)} / (\rho c_\varepsilon \tau_q)}$, определяемая при $c_\varepsilon = c'_\varepsilon$.

Модель сплошной среды с учетом особенностей строения материала. В последние годы в технике все более популярными становятся объекты нанометрового масштаба. Это фуллерены, углеродные нанотрубки, наноккомпозиты, тонкопленочные многослойные наноконструкции и т.д. Подобные системы интересны сочетанием ряда параметров, недостижимых для традиционных моно- и поликристаллических структур; не менее важно, что в них начинают работать новые физические явления. Сформированные из таких частиц или кластеров наноструктурированные материалы (наноматериалы) привлекательны как для изучения фундаментальных свойств, так и для использования в новых технологиях. Однако построение математических моделей поведения таких материалов далеко от завершения. Это утверждение относится и к моделям нестационарной теплопроводности наноструктурных материалов, которые должны учитывать известную из экспериментов информацию о более высокой теплоемкости и более низкой теплопроводности этих материалов по сравнению с соответствующими значениями массивных материалов. Однако если материал модифицирован углеродными нанотрубками, то его теплопроводность существенно выше теплопроводности массивного материала [6, 7].

Один из возможных вариантов соотношений математической модели теплопроводности наноструктурных элементов может быть построен с использованием модели сплошной среды с внутренними параметрами состояния. Рассмотрим сплошную среду, для которой существенны внутренние параметры состояния Φ и χ_i . Кинетические уравнения, описывающие изменение χ_i и Φ во времени, в линейном приближении примем в виде

$$\tau_T \dot{\Phi} + A_{4i} \chi_i + A_{44} \Phi = \bar{\Phi}, \quad \tau_{ij}^{(q)} \dot{\chi}_j + A_{ij} \chi_j + A_{i4} \Phi = \bar{\chi}_i, \quad (21)$$

где $\tau_{ij}^{(q)} = \tau_q \tau_{ij}^0$, τ_{ij}^0 – компоненты симметрической матрицы, $i, j = 1, 2, 3$, $A_{ij} = A_{ji}$, $\det(A_{ij}) > 0$. Обратим внимание на то, что такие кинетические уравнения позволяют учитывать взаимосвязанность процессов передачи теплоты и аккумуляции теплоты.

Решение системы (21) имеет следующий вид:

$$\chi_k = \sum_{\mu=1,4} a_{k\mu} \int_0^t \left(\frac{b_{\mu j}}{\tau_q} \bar{\chi}_j + \frac{b_{\mu 4}}{\tau_T} \bar{\Phi} \right) \exp(-(t-t')\lambda_\mu) dt',$$

$$\Phi = \sum_{\mu=1,4} a_{4\mu} \int_0^t \left(\frac{b_{\mu j}}{\tau_q} \bar{\chi}_j + \frac{b_{\mu 4}}{\tau_T} \bar{\Phi} \right) \exp(-(t-t')\lambda_\mu) dt'. \quad (22)$$

где λ_μ – собственные значения однородной системы, соответствующей (21),

$(a_{1\mu} \ a_{2\mu} \ a_{3\mu} \ a_{4\mu})^T$ – собственные векторы, $b_{\mu j}$ – некоторые коэффициенты.

Зададим выражение для объемной плотности свободной энергии в виде

$$\rho A(T, \Phi, \chi_k) = \rho B(T) + \rho B_0(\Phi) T. \quad (23)$$

Объединив равенство (23), второе выражение (5) и уравнение (7) (без учета эффектов термомеханической связанности), получим

$$-\rho T \frac{d^2 B}{dT^2} \dot{T} - \rho T \frac{dB_0}{d\Phi} \dot{\Phi} = -\frac{\partial q_i}{\partial \chi_i} + q_v \quad (24)$$

Положим $c = -Td^2B/dT^2$ и $c' = -TdB_0/d\Phi$ и выберем функции для равновесных значений внутренних параметров состояния и вектора плотности теплового потока в виде

$$\bar{\Phi} = T, \quad \bar{\chi}_i = -Z_{ij}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x_j} - Z_{ij}^{(2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad q_i = \varphi_{ij} \chi_j. \quad (25)$$

Тогда, принимая во внимание (22), уравнение теплопроводности (24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{\mu=1,4} \rho c a_{4\mu} \int_0^t \left(-\frac{b_{\mu j}}{\tau_q} Z_{jm} \frac{\partial^2 T}{\partial t' \partial x_m} + \frac{b_{\mu 4}}{\tau_T} \frac{\partial T}{\partial t'} \right) \exp(-(t-t')\lambda_\mu) dt' = \\ = - \sum_{\mu=1,4} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_{ij} a_{j\mu} \int_0^t \left(-\frac{b_{\mu l}}{\tau_q} Z_{lm} \frac{\partial T}{\partial x_m} + \frac{b_{\mu 4}}{\tau_T} T \right) \exp(-\lambda_\mu(t-t')) dt' + q_V. \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что предложенные соотношения совпадают с рассмотренными ранее при $A_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера), $A_{4j} = 0$, $A_{44} = 1$. Скорость распространения теплоты D_q для предложенной модели совпадает с известным значением $D_q = \sqrt{\lambda^{(T)} / (\rho c_\varepsilon \tau_q)}$.

При $0 < A_{44} < 1$ компоненты тензора напряжений можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(T)}) - D_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{(\Phi)} - \varepsilon_{kl}^{(T)}),$$

и в этом случае $\varepsilon_{kl}^{(\Phi)} \neq \varepsilon_{kl}^{(T)}$, т.е. возможен учет известного эффекта: температурная деформация наноструктурного материала больше соответствующей температурной деформации массивного материала.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть происходит медленное нагревание тела объемом V и ограниченного поверхностью S . Этот случай соответствует стандартным методам измерения теплоемкости материала. Тогда, полагая $\chi_i \equiv 0$ и $q_V \equiv 0$, из (21) и (25) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{A_{44}} \left(T(x_1, x_2, x_3, t) - (1 - A_{44}) T_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_T / A_{44}}\right) - \right. \\ \left. - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T / A_{44}}\right) \frac{\partial T(x_1, x_2, x_3, t')}{\partial t'} dt' \right) \end{aligned} \quad (27)$$

и при однородной по объему тела температуре из (24) получим

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c' \left((1 - A_{44}) \frac{T_0}{\tau_T} \exp\left(-\frac{t}{\tau_T / A_{44}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{A_{44}} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_T / A_{44}}\right) - \int_0^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_T / A_{44}}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial t'^2} dt' \right) \right) = \frac{\tilde{q}(t) S}{V}, \end{aligned}$$

где $\tilde{q}(t)$ – плотность подводимого к телу теплового потока.

При $\tau_T \rightarrow 0$ $\rho(c + c' / A_{44}) \dot{T} = \tilde{q}(t) S / V$, т.е. удельная массовая теплоемкость в предположенной модели может отличаться от соответствующей величины для массивных материалов на c' / A_{44} . Этот эффект в [6, 7] объясняют изменением вида и границ фононного спектра, т.е. изменением функции распределения частот колебаний атомов. При этом в случае малых частиц в теплоемкости присутствует вклад, обусловленный их большой поверхностью, и поэтому можно ожидать увеличения теплоемкости в несколько раз.

Для оценки теплопроводности наноструктурных материалов положим $Z_{ij}^{(2)} \equiv 0$, $A_{i4} = 0$ и $\tau_q \dot{\chi}_i \approx 0$. Тогда из (21) $\chi_i = B_{ji} \bar{\chi}_i$, $B_{ji} = A_{ij}^{-1}$ и в соответствии с (25) имеем

$$q_i = \varphi_{ik} B_{kj} \bar{\chi}_j = -\varphi_{ik} B_{km} Z_{mj}^{(1)} \partial T / \partial x_j = -\Lambda_{ij} \partial T / \partial x_j,$$

где $\Lambda_{ij} = \varphi_{ik} B_{km} Z_{mj}^{(1)}$ – компоненты тензора теплопроводности наноструктурных материалов. Необходимо отметить, что параметры $B_{ij} = B_{ji}$ позволяют учесть локальную анизотропию теплопроводности наноструктурных материалов при изотропии материалов в макромасштабе. Для массивных материалов $B_{km} = \delta_{km}$ и компоненты тензора теплопроводности $\lambda_{ij} = \varphi_{ik} \delta_{km} Z_{mj}^{(1)} = \varphi_{ik} Z_{kj}^{(1)}$ и $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$, $Z_{kj}^{(1)} = Z_{jk}^{(1)}$ [5]. Так как теплопроводность наноструктурных материалов складывается из электронной и решетчатой составляющих (для металлов преобладающей является первая, для полупроводников и диэлектриков – вторая), то снижение теплопроводности наноматериалов обусловлено рассеянием электронов на межзеренных границах, а для диэлектриков и полупроводников – рассеянием фононов на поверхностях раздела элементов наноструктуры [6]. Введение в определяющие уравнения параметров B_{ij} позволяет учесть эти процессы при построении феноменологической модели.

Действительно, для изотропных массивных материалов возможны только два варианта получения выражения для λ . В первом варианте $\varphi_{ik} = \varphi_0 \delta_{ik}$ и $Z_{kj}^{(1)} = Z_0 \delta_{kj}$, тогда $\lambda_{ij} = \varphi_0 Z_0 \delta_{ik} \delta_{kj} = \lambda \delta_{ij}$. Во втором варианте $\varphi_{ik} = \varphi_0 \varphi_{ik}^{(0)}$, $Z_{kj}^{(1)} = Z_0 Z_{kj}^{(0)}$ и $Z_{kj}^{(0)} = \left(\varphi_{kj}^{(0)} \right)^{-1}$ (или $\varphi_{kj}^{(0)} = \left(Z_{kj}^{(0)} \right)^{-1}$), тогда $\lambda_{ij} = \varphi_0 Z_0 \varphi_{ik}^{(0)} Z_{kj}^{(0)} = \varphi_0 Z_0 \varphi_{ik}^{(0)} \left(\varphi_{kj}^{(0)} \right)^{-1} = \varphi_0 Z_0 \delta_{ij} = \lambda \delta_{ij}$. Следовательно, для анизотропных на микроуровне материалов во втором варианте также возможна изотропия теплопроводности на макроуровне. Для наноструктурных материалов анизотропия теплопроводности на наноуровне существует всегда, а именно: $\Lambda_{ij} = \varphi_0 Z_0 \varphi_{ik}^{(0)} B_{km} \left(\varphi_{mj}^{(0)} \right)^{-1} = \lambda \Lambda_{ij}^{(0)}$, где $\Lambda_{ij}^{(0)} = \varphi_{ik}^{(0)} B_{km} \left(\varphi_{mj}^{(0)} \right)^{-1}$. Получить значение теплопроводности изотропного на макроуровне наноструктурного материала можно следующим образом [8]. Выделим в наноструктурном материале объем с достаточно большим числом произвольно ориентированных относительно глобальной системы координат Ox_i элементов структуры. При случайной ориентации любое расположение «наноосей» равновероятно и относительная плотность распределения нанообъемов материала $\eta = 1/(8\pi^2)$ [8]. Тогда операцию осреднения тензоров с компонентами B_{ij} или $\Lambda_{ij}^{(0)}$ можно представить в виде

$$B_{ij} \left(\text{осредн} \Lambda_{ij}^{(0)} \right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \eta_0 B_{ij}(\theta, \psi, \varphi) \sin \theta d\theta,$$

где θ, ψ, φ – углы Эйлера. Заменяя далее B_{ij} или $\Lambda_{ij}^{(0)}$ их средними значениями $\bar{B}_{ij} = B_0 \delta_{ij}$ или $\bar{\Lambda}_{ij}^{(0)} = \Lambda_0 \delta_{ij}$, имеем два варианта выражения для теплопроводности изотропного наноструктурного материала $\Lambda_{ij} = \lambda B_0 \delta_{ij}$ или $\Lambda_{ij} = \lambda \Lambda_0 \delta_{ij}$. Так как теплопроводность наноструктурного материала меньше теплопроводности массивного материала [6], то $0 < B_0 < 1$ или $0 < \Lambda_0 < 1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 08-08-00615а, 09-08-00669а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 142 с.
2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Термомеханическая модель релаксирующего твердого тела при нестационарном нагружении // Докл. РАН. 1995. Т. 354. № 2. С. 193.
3. Кувыркин Г.Н. Термодинамическая модель процесса теплопроводности в твердом теле // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 614.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. – 2003. – Т. 41, № 2. – С. 300-309.
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
6. Андриевский Р.А., Рагуля А.В. Наноструктурные материалы: Учеб. пособие для студ. Высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр "Академия", 2005. – 192 с.
7. Гусев А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. – М.: Физматлит, 2005. 416 с.
8. Зарубин В.С. Прикладные задачи термopрочности элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.

Сведения об авторах

Кувыркин Георгий Николаевич

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана

Адрес: 119454, Москва, ул. Коштаянца, д.35, кв.35.

Тел.: +7(495)432-34-83, E-mail: iliamarchevsky@mail.ru , fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна

Аспирантка кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Мхитарян С.М.

Область смешанных задач – один из важных и обширных разделов механики сплошной среды. Сюда включаются имеющие большую теоретическую и практическую значимость контактные задачи теории упругости и, вообще, механики деформируемых твердых тел, многочисленные задачи о напряженном состоянии твердых тел с трещинами в механике разрушения, проблемы механики контактного разрушения, представляющей собой симбиоз фундаментальных идей и методов первых двух научных направлений и окончательно сформировавшейся в последние десятилетия, большой класс задач гидродинамики, теорий теплопроводности, диффузии и др.

Вследствие ведущихся в мире громадного числа теоретических и экспериментальных исследований эта область непрерывно обогащается новыми фундаментальными идеями и результатами, интенсивно продвигается и развивается, что обусловлено, с одной стороны, ее внутренней логикой развития, а с другой стороны, растущими запросами техники, новых технологий, инженерной практики и прикладной механики. Смешанные задачи тесно связаны с вопросами концентрации напряжений и других физических величин в телах, когда в них возникают локальные поля, характеризующиеся большими и интенсивно изменяющимся градиентами. Концентрация напряжений существенно влияет на прочности и долговечности конструкций и их деталей. Поэтому их качественное и количественное исследование, разработка методов их снижения представляет собой актуальную научно-техническую проблематику.

Основные достижения по указанным направлениям в области смешанных и контактных задач механики сплошной среды с достаточной полнотой отражены в известных монографиях [1-9], в справочных пособиях [10,11], а также в коллективных монографиях [12-14].

Существует широкий спектр математических методов решения смешанных и контактных задач. Среди них один из известных – это метод ортогональных функций в сочетании с методом интегральных уравнений. Сущность этого метода, например, в теории упругости заключается в том, что сначала при помощи интегральных преобразований строится матрица функций влияний в смещениях от сосредоточенных единичных сил, направленных по координатным осям системы координат, к которой отнесено рассматриваемое упругое тело, и приложенных в произвольной точке поверхности тела [15]. Или этими же методами строится матрица функций влияний в напряжениях от единичных сосредоточенных плотностей дислокаций смещений на берегах трещины [16]. Затем на основании принципа суперпозиции обсуждаемая смешанная задача или задача о трещинах сводится к интегральному уравнению или к системе интегральных уравнений или же к парным интегральным или парным рядам уравнениям. Эти уравнения – обычно интегральные уравнения Фредгольма первого рода или сингулярные интегральные уравнения. Далее, решения определяющих интегральных уравнений представляются в виде интегралов или бесконечных рядов с неизвестными коэффициентами по полным ортогональным системам функций, являющихся обычными или обобщенными собственными функциями соответствующих интегральных операторов. При этом существенно используются спектральные или родственные интегральные соотношения, в которых соответствующий интегральный оператор одну полную ортогональную систему функций переводит в ту же самую систему или в другую полную ортогональную систему функций. В результате, решение исходного интегрального уравнения Фредгольма первого рода сводится или к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода или к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений [17] или же это решение получается в замкнутой форме.

Аналогичная процедура применяется при решении парных уравнений.

Отметим еще, что при помощи квадратурных формул Гаусса для обычных и сингулярных интегралов решения исходных определяющих интегральных уравнений можно свести к конечным системам линейных уравнений.

В настоящем докладе вкратце обсуждаются три аспекта метода ортогональных функций. Первый аспект связан с методом М.Г. Крейна решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода, первоначально основанным на обратных задачах спектральной теории дифференциальных операторов. Вторым аспектом связан со спектральными соотношениями для основных интегральных операторов теории смешанных и контактных задач, получаемыми методами теории обычного и обобщенного потенциала в различных ортогональных криволинейных системах координат. Наконец, третий аспект связан с методами вычисления сингулярных интегралов с ядрами Коши, Гильберта и с другими родственными ядрами при помощи квадратурных формул Гаусса с применением классических ортогональных многочленов и с использованием этих методов в решении сингулярных интегральных уравнений.

§1. О методе М.Г. Крейна решения интегральных уравнений

В своих исследованиях [18-21] по обратным задачам спектральной теории дифференциальных операторов М.Г. Крейн, в частности, разработал теорию, в которой выясняется связь между интегральными уравнениями с ядрами, зависящими от разности аргументов, и дифференциальными операторами Штурма–Лиувилля. Эта теория позволила обнаружить целые классы дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля, интегрируемых в конечном виде для любого значения спектрального параметра, и тем самым, получить новые формулы обобщенного преобразования Фурье. Одновременно на ее основе и на основе обобщенного преобразования Фурье им был предложен новый метод решения интегральных уравнений с вещественными симметрическими ядрами, зависящими от разности аргументов. Этот метод позволяет при определенных условиях получить решение такого интегрального уравнения для любой правой части, если известно решение этого уравнения при правой части, тождественно равной единице. Впоследствии [22,23] М.Г. Крейн свой метод решения интегральных уравнений с ядрами указанного типа распространил на общие интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода.

Теперь кратко изложим сущность метода М.Г. Крейна – решения интегральных уравнений, ограничиваясь при этом лишь случаем интегральных уравнений первого рода с вещественными симметрическими ядрами, зависящими от разности аргументов.

Итак, рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-a}^a K(|t-s|)\varphi(s)ds = f(t) \quad (-a < t < a; a < T) \quad (1.1)$$

с ядром $K(|t-s|)$ ($-T < t, s < T$), удовлетворяющим условию: при любом r ($0 \leq r < T$) интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-r}^r K(|t-s|)q(s,r)ds = 1 \quad (1.2)$$

имеет единственное интегрируемое решение $q(t,r)$. Так как при вещественных $K(t)$ имеет место представление [18,21]

$$\int_0^t (t-s)K(s)ds = \int_0^\infty \frac{1-\cos |t|s}{s^2}ds - \frac{t}{2}\operatorname{sign} t, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{1+s^2} < \infty, \quad (1.3)$$

где $s(|t|)$ ($s(|t|) = s(|t|-0)$, $s(0) = 0$, $-\infty < |t| < \infty$) – неубывающая функция, то двукратным почленным дифференцированием, законность которого предполагается, получим

$$K(t) + d(t) = \int_0^\infty \cos |t|s ds(|t|).$$

Отметим, что здесь $S(l)$ – ортогональная спектральная функция соответствующей граничной задачи Штурма–Лиувилля [18], а интегралы с $S(l)$ следует понимать в смысле Римана–Стилтьеса или Лебега–Стилтьеса. Если $T = \infty$, то функция $S(l)$ единственным образом определяется из представления (1.3). А если $T < \infty$, то, вообще говоря, для определения $S(l)$ (спектра задачи Штурма–Лиувилля) следует добавить граничное условие на конце $r = T$ [18].

Далее учитывая, что в случае интегральных уравнений первого рода вместо $K(t)$ в интегральных уравнениях Фредгольма второго рода следует брать $K(t) - d(t)$, где $d(t)$ – известная функция Дирака, придем к представлению

$$K(t) = \int_0^{\infty} \cos lt \, dS(l). \quad (1.4)$$

Теперь решение уравнения (1.1) представим в виде суммы четной и нечетной функций, т.е. решение (1.1) разобьем на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\int_0^a [K(|t-s|) \pm K(t+s)] j_{\pm}(s) ds = f_{\pm}(t) \quad (0 < t < a) \quad (1.5)$$

В симметрическом случае из (1.4) будем иметь

$$K(|t-s|) + K(t+s) = 2 \int_0^{\infty} \cos lt \cos ls \, dS(l). \quad (1.6)$$

Если бы функции $\{\cos lt\}_{l=0}^{l=\infty}$ были ортогональными со спектральной функцией $S(l)$, т.е. если бы

$$\int_0^{\infty} \cos lt \cos ls \, dS(l) = d(t-s),$$

то при помощи (1.6) решение интегрального уравнения (1.5) в симметрическом случае сразу можно было бы получить. Но посредством интегральных операторов вольтерровского типа, называемых операторами преобразования, можно провести процесс ортогонализации функций $\{\cos lt\}$ ($0 < l < \infty$), представляющий собой континуальный аналог известного дискретного процесса Шмидта ортогонализации системы линейно независимых функций на некотором интервале с соответствующей весовой функцией.

Этого можно достичь решением обратной задачи спектральной теории дифференциальных операторов, в результате которого по спектральной функции $S(l)$ восстанавливается дифференциальный оператор Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(p(r) \frac{dj}{dr} \right) + l^2 p j = 0, \quad j(0, l) = 1; \quad \lim_{r \downarrow 0} \left(p \frac{dj}{dr} \right) = 0 \\ p(r) = M'(r), \quad M(r) = \frac{1}{2} \int_{-r}^r q(s, r) ds. \end{cases} \quad (1.7)$$

При этом, фундаментальная функция дифференциальной системы (1.7) выражается формулой

$$j(r, l^2) = \frac{1}{p(r)} \frac{d}{dr} \int_0^r q(s, r) \cos ls \, ds \quad (1.8)$$

и имеют место следующие формулы обобщенного преобразования Фурье:

$$F(l) = \int_0^T f(r) j(r, l^2) p(r) dr, \quad f(r) = 2 \int_0^\infty F(l) j(r, l^2) dl. \quad (1.9)$$

Здесь $f(r)$ – любая функция, квадратично суммируемая на $[0, T]$ с весовой функцией $p(r)$.

Далее, при помощи оператора преобразования (1.8) и формул (1.6), (1.9) решение интегрального уравнения (1.5) в симметрическом случае получим в виде:

$$j_+(t) = \left[\frac{1}{M'(a)} \frac{d}{da} \int_0^a q(s, a) f_+(s) ds \right] q(t, a) - \int_t^a q(t, u) \frac{d}{du} \left[\frac{1}{M'(u)} \frac{d}{du} \int_0^u q(s, u) f_+(s) ds \right] du. \quad (1.10)$$

Аналогичный вид имеет решение уравнения (1.5) в кососимметрическом случае.

Следует отметить, что формула М.Г. Крейна (1.10) свободна от сингулярных интегралов, берущих в смысле главного значения по Коши. Кроме того, в этой формуле явно выделена характерная особенность решения на концах интервала интегрирования, которая играет важную роль в приложениях интегральных уравнений к смешанным и контактными задачам, а также к задачам математической физики.

Метод М.Г. Крейна нашел широкое применение в контактных задачах теории упругости, теории пластичности и нелинейной теории ползучести. Он применялся в работах [24-28].

Метод М.Г. Крейна применялся также автором в контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления в контактной зоне, которые описываются интегральными уравнениями первого рода с эрмитовыми ядрами. Кроме того, автором на примерах интегрального уравнения со симметрическим разностным логарифмическим ядром и уравнения Карлемана показано, что формулы их решения методом М.Г. Крейна – методом сингулярных интегральных уравнений и методом ортогональных многочленов – переходят одна в другую и, следовательно, идентичны, хотя эти формулы решения для одного и того же интегрального уравнения имеют различные аналитические структуры. Результаты этих исследований подытожены в работах [29,30].

§2. О методе спектральных и родственных интегральных соотношений

Применение методов теории потенциала к решению определяющих интегральных уравнений контактных и смешанных задач теории упругости хорошо известны [1-3]. Эти методы широко применяются также во многих других краевых задачах механики сплошных сред и математической физики.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\iint_{\omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = f(x, y) \quad (2.1)$$

при условии

$$\iint_{\omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta = P < \infty, \quad (2.2)$$

где ω – область в плоскости $z = 0$ обычного трехмерного пространства, отнесенного к правой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$. Этим уравнением описывается контактная задача о вдавлении штампа, имеющего в плане форму области ω , в упругое полупространство, причем штамп прижимается к основанию вертикальной силой P .

Если ввести в рассмотрение потенциал простого слоя

$$U(x, y, z) = \iint_{\omega} \frac{p(x, h) dx dh}{\sqrt{(x - x)^2 + (y - h)^2 + z^2}},$$

то, как хорошо известно [1-3], интегральное уравнение (2.1) при условии (2.2) эквивалентно следующей внешней задаче Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 & ((x, y, z) \in R \setminus W) \\ U(x, y, z)|_{z=0} = f(x, y) & ((x, y) \in W) \\ U(x, y, z) \approx P/r & r \rightarrow \infty, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \end{cases} \quad (2.3)$$

здесь $R = \{r \geq 0\}$ – все пространство. После того, как построено решение краевой задачи (2.3), плотность источников – решение интегрального уравнения (2.1), может определяться по формуле

$$-2\pi p(x, y) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\operatorname{sign} z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad ((x, y) \in W). \quad (2.4)$$

Теперь рассмотрим интегральное уравнение

$$\iint_W \frac{p(x, h) dx dh}{[(x-x)^2 + (y-h)^2]^{m+1/2}} = f(x, y) \quad (|m| < 1/2). \quad (2.5)$$

опять при условии (2.2) и введем в рассмотрение обобщенный потенциал простого слоя

$$U(x, y, z) = \iint_W \frac{p(x, h) dx dh}{[(x-x)^2 + (y-h)^2 + z^2]^{m+1/2}} \quad (|m| < 1/2). \quad (2.6)$$

Как показано в работе [31], функция (2.6) везде, кроме точек области ω , удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$\Delta U + \frac{2\mu}{z} \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

переходящему при $\mu = 0$ в обычное уравнение Лапласа.

Интегральное уравнение (2.5) при условии (2.1) эквивалентно следующей внешней краевой задаче:

$$\begin{cases} \Delta U + \frac{2m}{z} \frac{\partial U}{\partial z} = 0 & ((x, y, z) \in R \setminus W) \\ U(x, y, z)|_{z=0} = f(x, y) & ((x, y) \in W) \\ U(x, y, z) \approx Pr^{-1-2m} & (r \rightarrow \infty, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \end{cases} \quad (2.7)$$

После того, как построено решение краевой задачи (2.7), плотность источников – решение уравнения (2.5) вместо (2.4) будет определяться формулой [31]

$$-2\pi p(x, y) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\operatorname{sign} z |z|^{2m} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad ((x, y) \in W).$$

Далее рассмотрим интегральное уравнение плоской контактной задачи теории упругости [1]

$$\int_L \ln \frac{1}{|x-t|} p(t) dt = f(x) \quad (2.8)$$

при условии

$$\int_L p(t) dt = P < \infty, \quad (2.9)$$

где L – отрезок или совокупность отрезков горизонтальной оси Ox плоскости, отнесенной к правой прямоугольной декартовой системе координат Oxy . При помощи логарифмического потенциала простого слоя

$$U(x, y) = \int_L \ln \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2 + y^2}} p(t) dt \quad (2.8a)$$

решение уравнения (2.8) при условии (2.9) можно свести к решению следующей внешней краевой задачи [1]:

$$\begin{cases} \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 & ((x, y) \in \Pi \setminus L, \Pi = \{r \geq 0\}) \\ U(x, y)|_{y=0} = f(x) & (x \in L) \\ U(x, y) \approx P \ln \frac{1}{r} & (r \rightarrow \infty, r = \sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases} \quad (2.10)$$

После решения краевой задачи (2.10) плотность источников–решение уравнения (1.14) определится по известной формуле

$$-p(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\operatorname{sign} y \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (x \in L). \quad (2.11)$$

Наконец, рассмотрим интегральное уравнение Карлемана

$$\int_L \frac{p(t) dt}{|x-t|^\mu} = f(x) \quad (0 < \mu < 1) \quad (2.12)$$

опять при условии (2.9). Введя в рассмотрение обобщенный потенциал простого слоя

$$U(x, y) = \int_L \frac{p(t) dt}{[(x-t)^2 + y^2]^{m/2}}, \quad (2.12a)$$

можно показать, как в [31], что уравнение (2.12) эквивалентно следующей внешней краевой задаче ($\Pi = \{r \geq 0\}$ – вся плоскость Oxy):

$$\begin{cases} \Delta U + \frac{m}{y} \frac{\partial U}{\partial y} = 0 & ((x, y) \in \Pi \setminus L) \\ U(x, y)|_{y=0} = f(x) & (x \in L) \\ U(x, y) \approx Pr^{-m} & (r \rightarrow \infty, r = \sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases} \quad (2.13)$$

При этом, плотность источников–решение уравнения (2.12) после решения краевой задачи (2.13) определится по формуле

$$-2\sqrt{p} \Gamma\left(\frac{1+m}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \right]^{-1} p(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\operatorname{sign} y |y|^m \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (x \in L), \quad (2.14)$$

где $\Gamma(x)$ –гамма-функция Эйлера.

Отметим, что дифференциальное уравнение из (2.13) при $\mu = 1/3$ в связи с известной задачей Трикоми встречается также в вопросах газовой динамики и аэродинамике больших скоростей [32,33].

Отметим еще, что если ввести в рассмотрение систему эллиптических уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y^m} \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{y^m} \frac{\partial V}{\partial x}; \quad (2.15)$$

переходящих в частном случае $m = 0$ в обычные условия Коши-Римана, то исключение из них функции $V(x, y)$ приводит к дифференциальному уравнению из (2.13). Системой уравнений (2.15) порождается обобщенная аналитическая функция. Тем самым, этим путем решение интегрального уравнения (2.12) можно связать с краевыми задачами теории обобщенных аналитических функции [34].

Изложенными методами теории потенциала можно эффективно в явном виде построить решения указанных интегральных уравнений, если возможно в пространстве ввести систему ортогональных криволинейных координат, в которой одна из координатных поверхностей или координатных линий представляет собой плоскую дважды покрываемую область ω или дважды покрываемый отрезок L . Тогда решения краевых задач, эквивалентных интегральным уравнениям, обычно можно найти известным методом разделения переменных. При этом, достаточно рассматривать одну гармонику решений краевых задач, позволяющую вывести спектральные соотношения для соответствующих интегральных операторов. Эти соотношения одну систему полных ортогональных функций переводят в ту же самую систему. Наряду с ними можно вывести родственные интегральные соотношения, дающие выражения интегралов по области ω или по отрезку L вне ω или L , или же переводящие одну систему полных ортогональных функций в другую систему опять полных ортогональных функций. При наличии таких соотношений решения интегральных уравнений и другие характеристики, связанные с обсуждаемыми физическими задачами, можно получить элементарным путем при помощи теории интегральных преобразований.

В качестве примера применения изложенных результатов построим решение уравнения (2.8) при условии (2.9), когда $L = \{y = 0; -a \leq x \leq a\}$. С этой целью, согласно изложенному, введем подходящую ортогональную систему координат, в которой одно из координатных линий представляет собой дважды покрываемый отрезок L . Этого можно достичь при помощи конформного отображения комплексной плоскости $z = x + iy$ с разрезом вдоль L на единичный круг $r < 1$ плоскости $Z = X + iH$ посредством функции Жуковского [1]

$$z = \frac{a}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right), \quad z = z + i\hbar = r e^{iJ} \quad (-\pi < J \leq \pi).$$

Тогда

$$x = \frac{aX}{2} \left(1 + \frac{1}{X^2 + H^2} \right) = \frac{a}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos J, \quad y = \frac{aH}{2} \left(1 - \frac{1}{X^2 + H^2} \right) = \frac{a}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin J. \quad (2.16)$$

и, следовательно, при этом отображении верхний и нижний берега разреза L переходят, соответственно, в нижнюю и верхнюю полуокружности окружности $\rho = 1$, а точка $z = \infty$ переходит в точку $\zeta = 0$. Исходя из последнего, при помощи (2.16) находим

$$\frac{1}{r} = \frac{2\rho}{a} (\rho^4 + 2\rho^2 \cos 2\vartheta + 1)^{-1/2},$$

откуда вытекает, что $1/r \simeq 2r/a$ ($r \rightarrow 0$). Поэтому, предполагая, что, как обычно, плотность источников логарифмического потенциала обладает конечной мощностью, т.е. имеет место условие (2.9), введем в рассмотрение функцию

$$W(r, J) = U_0(r, J) - P \ln \left(\frac{2r}{a} \right), \quad U_0(r, J) = U \left(\frac{a}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos J, \frac{a}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin J \right).$$

Тогда краевая задача (2.10) преобразуется в следующую задачу Дирихле для единичного круга:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial J^2} = 0 & (r < 1) \\ W(0, J) = 0 \quad (-p < J \leq p), W(1, J) = f_0(J) - P \ln \frac{2}{a}, f_0(J) = f(a \cos J). \end{cases} \quad (2.17)$$

а соотношение (2.11) – в следующую формулу:

$$p(x) = (\pi a |\sin \vartheta|)^{-1} \left[P + \frac{\partial W(\rho, \vartheta)}{\partial \rho} \right]_{\rho=1} \quad (x = a \cos \vartheta, \quad -\pi < \vartheta \leq \pi). \quad (2.18)$$

Решение краевой задачи (2.17), построенное в [1] методом разделения переменных, имеет вид ($n = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} W(r, J) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos nJ \quad (-p < J \leq p), \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f_0(J) \cos nJ dJ, \quad P = \left(2p \ln \frac{2}{a} \right)^{-1} \int_{-p}^p f_0(J) dJ. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Далее рассмотрим одну гармонику $W_n(\rho, \vartheta) = \rho^n \cos n\vartheta$ ($n = 1, 2, \dots$) полученного потенциала из (2.19), а также его нулевую гармонику $W_0(\rho, \vartheta) \equiv 0$ и по формуле (2.18) вычислим соответствующую плотность источников. В результате, находим

$$p(a \cos J) = \begin{cases} n \cos nJ (p a \sin J)^{-1}, & (n = 1, 2, \dots), \\ P(p a \sin J)^{-1} & (n = 0, \quad 0 < J < p). \end{cases} \quad (2.20)$$

Теперь, перейдя обратно к исходному потенциалу $U(x, y)$, выражения указанной гармоники при $\rho = 1$ и соответствующей ей плотности источников (2.20) подставим в (2.8а). В результате, придем к следующим спектральным соотношениям ($T_n(x)$ – многочлены Чебышева первого рода):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-t|} \frac{T_n(t/a) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} &= \frac{1}{n} T_n(x/a), \quad (n = 1, 2, \dots), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-t|} \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} &= \ln(2/a), \quad (|x| < a) \end{aligned} \quad (2.21)$$

и к родственным с ними соотношениям ($H(x)$ – функция Хевисайда, $n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-t|} \frac{T_n(t/a) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} &= \frac{1}{n} [H(x) + (-1)^n H(-x)] \left[\left(|x| - \sqrt{x^2 - a^2} \right) / a \right]^n, \\ \frac{1}{p} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-t|} \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} &= \ln \left[2 \left(|x| - \sqrt{x^2 - a^2} \right) / a^2 \right] \quad (|x| > a). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Далее, при определенных условиях на функцию $f(x)$ решения уравнения (2.8) представим в форме бесконечного ряда

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n T_n(x/a) \quad (|x| < a)$$

с неизвестными коэффициентами x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и этот ряд подставим в уравнение (2.8). Затем поменяем порядок интеграла и ряда и воспользуемся спектральными соотношениями (2.21), а также условиями ортогональности многочленов Чебышева первого рода. В результате,

находим коэффициенты χ_n в явном виде и, тем самым, построим замкнутое решение интегрального уравнения (2.8).

При помощи соотношения (2.22) легко определяются вертикальные смещения граничных точек упругого основания вне штампа, а также разрушающее напряжение вне трещины на ее линии расположения в механике разрушения.

Вполне аналогичным методом исходя из функции Жуковского, обобщенного потенциала (2.12а) и краевой задачи (2.13), для интегрального уравнения (2.12) получим следующие спектральные соотношения ($a=1$) ($n=0,1,2,\dots, -1 < x < 1$) :

$$\int_{-1}^1 \frac{C_n^{m/2}(t) dt}{|x-t|^m (1-t^2)^{(1-m)/2}} = m_n C_n^{m/2}(x), \quad m_n = p \Gamma(n+m) [n! \Gamma(m) \cos(pm/2)]^{-1}$$

и родственные с ними соотношения ($|x| > 1$)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{C_n^{m/2}(t) dt}{|x-t|^m (1-t^2)^{(1-m)/2}} &= n_n [H(x) + (-1)^n H(-x)] \left(|x| - \sqrt{x^2 - 1} \right)^{n+m} \times \\ &\times F\left(m/2, n+m; n+1+m/2; 2x^2 - 2|x|\sqrt{x^2 - 1} - 1\right), \\ n_n &= \frac{\sqrt{p} 2^m \Gamma[(1+m)/2] \Gamma^2(n+m)}{\Gamma^2(m) n! \Gamma(n+1+m/2)}. \end{aligned}$$

Здесь $C_n^{m/2}(x)$ – многочлены Гегенбауэра, а $F(a, b; g; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Теперь, как показано выше, легко построить замкнутое решение интегрального уравнения (2.12).

Изложенными методами получены спектральные и родственные с ними соотношения также для интегральных операторов, порожденных интегралами Вебера-Сонина, функцией Макдональда и других интегральных операторов, часто встречающихся в теории смешанных и контактных задач. Получение довольно широкого класса таких соотношений унифицировано единым методом теории обычных и обобщенных потенциалов. Одновременно известным методом Вейла-Титчмарша [35] в ряде случаев установлены новые формулы разложения произвольной функции по полученным полным ортогональным системам функций. Результаты этих исследований подытожены в работах [36-42].

Отметим, что ранее, другими разными методами, в основном, Г.Я.Поповым [5,43,44] получено большое число спектральных и иных интегральных соотношений, лежащих в основу разработанного им эффективного метода ортогональных многочленов, широко применяемого при решении интегральных уравнений. Основная часть этих соотношений в работах [36-42] получена указанным выше единым методом теории потенциала.

В заключение параграфа остановимся еще на одном аспекте ортогональных интегральных соотношений. Хорошо известно [45,46], что если $\varphi_k(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ ($k=1,2$), а функции $\Phi_k(x)$ – их преобразования Гильберта:

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k(t) dt}{t-x},$$

где интеграл при $t=x$ понимается в смысле главного значения по Коши, а на бесконечности – в смысле средней квадратичной сходимости, то $\Phi_k(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ и имеет место изометрическое равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx.$$

Кроме того, преобразование Гильберта однозначно обратимо в $L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, преобразование Гильберта в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ является унитарным оператором [46].

Преобразование Гильберта можно рассматривать в классе различных полных ортогональных функций. Рассмотрим, в частности, систему функций Эрмита

$$He_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где $H_n(x)$ – многочлены Чебышева–Эрмита. Согласно только что сказанному, система функций $G_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), причем

$$G_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{He_n(t) dt}{t - x} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.23)$$

в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ образуют полную ортогональную систему функций и имеют место следующие условия ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) G_m(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} He_n(x) He_m(x) dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & (n = m). \end{cases}$$

Далее, приняв во внимание известные соотношения [47] ($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$H_{2m}(x) = (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{-1/2}(x^2), \quad H_{2m+1}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m! x L_m^{1/2}(x^2),$$

из (2.23) получим следующие ортогональные интегральные соотношения:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\eta/2} L_m^{-1/2}(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{\eta}} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!} \frac{G_{2m}(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \xi > 0), \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-h/2} L_m^{1/2}(h) \sqrt{h} dh}{h - x} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1} m!} G_{2m+1}(\sqrt{x}), \quad (2.25)$$

где $L_m^a(x)$ – многочлены Чебышева–Лагерра, а ($m = 0, 1, 2, \dots, -\infty < x < \infty$)

$$G_{2m}(x) = -2\sqrt{2} m \Gamma(2m) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k 2^k}{(m-k)! \Gamma(k+1/2)} \Phi\left(k+1, \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{2}\right), \quad (2.26)$$

$$G_{2m+1}(x) = \sqrt{2} \Gamma(2m+2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{(m-k)! \Gamma(k+3/2)} \Phi\left(k+1, \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{2}\right), \quad (2.27)$$

где $\Phi(a, c; x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Интегральные соотношения (2.24)–(2.27) могут иметь разнообразные применения в смешанных и контактных задачах, а также в методах вычисления сингулярных интегралов типа Коши на полубесконечном интервале.

§3. О вычислении сингулярных интегралов типа Коши и решении сингулярных интегральных уравнений

В методе ортогональных функций особое место занимают классические ортогональные многочлены, которые широко применяются в методах вычисления обычных и сингулярных интегралов типа Коши, основанных на квадратурных формулах Гаусса. А на этих методах основываются многие численно-аналитические методы решения фредгольмовских и сингулярных интегральных уравнений (СИУ) или систем таких уравнений, к решению которых

сводятся обширные классы механики сплошной среды и математической физики. В этом направлении укажем на работы [48-57].

Здесь вкратце остановимся на вопросе вычисления сингулярного интеграла типа Коши с плотностью, представляемую в виде произведения весовой функции многочленов Якоби с комплексными показателями и некоторой функции из гильбертовского класса, а также на вопросе применения этих результатов к численно-аналитическому решению сингулярного интегрального уравнения второго рода с ядром Коши.

Итак, рассмотрим сингулярный интеграл типа Коши

$$I(x) = \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{c(s) ds}{s-x} \quad (-1 < x < 1). \quad (3.1)$$

плотность которого представляется в виде $(a_1, b_1 > -1; -1 < x < 1)$

$$c(x) = (1-x)^a (1+x)^b j(x), \quad a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad (3.2)$$

где $j(x)$ – функция из гильбертовского класса $H[-1;1]$. Очевидно, что при $x \rightarrow \pm 1$ весовая функция $r(x) = (1-x)^a (1+x)^b$ бесконечное число раз меняет свой знак и если $j(\pm 1) \neq 0$, функция $c(x)$, сильно осциллируясь в окрестностях концевых точек интервала $(-1;1)$, обычно при $-1 < a_1, b_1 < 0$ стремится к бесконечности. Это обстоятельство значительно усложняет и затрудняет вычисление интеграла (3.1) с достаточно большей точностью.

Чтобы преодолеть эту трудность, функцию $c(x)$ из (3.2) преобразуем к виду

$$c(x) = (1-x)^{a_1} (1+x)^{b_1} h(x) + (Ax+B)(1-x)^a (1+x)^b; \quad (3.3)$$

$$h(x) = (1-x)^{ia_2} (1+x)^{ib_2} y(x); \quad y(x) = j(x) - Ax - B.$$

Постоянные A и B определим из условий $y(\pm 1) = 0$, откуда находим

$$A = \frac{1}{2} [j(1) - j(-1)]; \quad B = \frac{1}{2} [j(1) + j(-1)]. \quad (3.3a)$$

Теперь (3.3) подставляем в (3.1) $(-1 < x < 1)$:

$$I(x) = \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^{a_1} (1+s)^{b_1} h(s) ds}{s-x} + \frac{A}{p} \int_{-1}^1 \frac{s(1-s)^a (1+s)^b ds}{s-x} + \frac{B}{p} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^a (1+s)^b ds}{s-x} \quad (3.4)$$

Элементарное преобразование второго интеграла из (3.4) и последующее вычисление полученного простого интеграла [58] позволяет (3.4) записать так:

$$I(x) = \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^{a_1} (1+s)^{b_1} h(s) ds}{s-x} + \frac{Ax+B}{p} L^{(a,b)}(x) + A \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{p \Gamma(a+b+2)}$$

$$L^{(a,b)}(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^a (1+s)^b ds}{s-x} \quad (-1 < x < 1). \quad (3.5a)$$

Далее для вычисления интеграла $L^{(a,b)}(x)$ воспользуемся известным интегральным представлением функций Якоби второго рода через многочлены Якоби в комплексной плоскости ([47] стр. 172, ф-ла (20)):

$$Q_n^{(a,b)}(z) = -\frac{1}{2(z-1)^a (z+1)^b} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^a (1+s)^b P_n^{(a,b)}(s) ds}{s-z} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.56)$$

Здесь $P_n^{(a,b)}(x)$ – многочлены Якоби на отрезке $[-1;1]$, $Q_n^{(a,b)}(z)$ – функции Якоби в комплексной плоскости $z = x + iy$, разрезанной вдоль отрезка $[-1;1]$ вещественной оси, причем ветви функций берутся таким образом, что $(-1 < x < 1)$

$$z + 1 \rightarrow x + 1 \quad (z \rightarrow x \pm i0), \quad z - 1 \rightarrow (1 - x)^{\pm ip} \quad (z \rightarrow x \pm i0).$$

Теперь приняв во внимание эти соображения, известные формулы Племель–Сохоцкого, определение и выражение функций $Q_n^{(a,b)}(x)$ на отрезке $[-1;1]$ ([47] стр. 173, ф-ла (23)), из (3.5б) придем к известному интегральному соотношению Трикоми [59]

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^a (1+s)^b P_n^{(a,b)}(s) ds}{s-x} &= \operatorname{ctg}(pa) (1-x)^a (1+x)^b P_n^{(a,b)}(x) - \\ - 2^{a+b} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{p\Gamma(a+b+1)} F\left(n+1, -n-a-b; 1-a; \frac{1-x}{2}\right) & \quad (3.6) \\ (n=0,1,2,\dots, -1 < x < 1; \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > -1), \end{aligned}$$

где $F(a,b;c;x)$ – известная гипергеометрическая функция Гаусса.

Отсюда, в частности, при $n=0$ получим $(-1 < x < 1)$

$$L^{(a,b)}(x) = p \operatorname{ctg}(pa) (1-x)^a (1+x)^b - 2^{a+b} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} F\left(1, -a-b; 1-a; \frac{1-x}{2}\right). \quad (3.7)$$

Далее подставляя (3.7) в (3.5а), окончательно находим

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^{a_1} (1+s)^{b_1} h(s) ds}{s-x} + A \frac{2^{a+b+1} \Gamma(a+1) \Gamma(b+1)}{p \Gamma(a+b+2)} + \\ &+ (Ax+B) \left[\operatorname{ctg}(pa) (1-x)^a (1+x)^b - 2^{a+b} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{p \Gamma(a+b+1)} \times \right. \\ &\times F\left(1, -a-b; 1-a; \frac{1-x}{2}\right) \left. \right] \quad (-1 < x < 1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, в результате вычисления исходного интеграла (3.1) свелось к вычислению интеграла типа Коши из (3.8), плотность которого представлена произведением весовой функции Якоби с уже вещественными показателями a_1, b_1 и гильдеровской функции $h(x)$, причем, важно подчеркнуть, что $h(\pm 1) = 0$. При этом, влияние осцилляции представлено вычисленными в явном виде неинтегральными членами в (3.8). Интеграл же в (3.8) вычисляется по квадратурной формуле Гаусса по корням многочленов Якоби и функций Якоби второго рода [48].

Отметим, что формулой (3.6) удобно вычислить интеграл типа Коши в ее левой части вблизи точки $x=1$, откуда при помощи гипергеометрического ряда можно получить соответствующую астиптотическую формулу при $x \rightarrow 1-0$. Однако, эту формулу можно дополнить другой формулой, удобной для асимптотического представления интеграла типа Коши при $x \rightarrow -1+0$. А именно, произведя в (3.6) замены

$$x \rightarrow -x, \quad s \rightarrow -s; \quad a \rightarrow b,$$

получим $(n=0,1,2,\dots, \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > -1; -1 < x < 1)$

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^a (1+s)^b P_n^{(a,b)}(s) ds}{s-x} = -\operatorname{ctg}(pb) (1-x)^a (1+x)^b P_n^{(a,b)}(x) +$$

$$+ (-1)^n 2^{a+b} \frac{\Gamma(b) \Gamma(n+a+1)}{p \Gamma(n+a+b+1)} F\left(n+1, -n-a-b; 1-b; \frac{1+x}{2}\right). \quad (3.9)$$

Формулы (3.6) и (3.9) вместе обеспечивают эффективное вычисление интеграла типа Коши от многочленов Якоби с соответствующей весовой функцией.

Теперь рассмотрим СИУ

$$-i \operatorname{th}(p\mu) w(x) + \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{w(s) ds}{s-x} + \frac{1}{p} \int_{-1}^1 K(x, s) w(s) ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 L(x, s) \overline{w(s)} ds = g(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (3.10)$$

при условии

$$\int_{-1}^1 w(s) ds = p. \quad (3.11)$$

При помощи СИУ (3.10)–(3.11), где можно считать $-\infty < \mu < \infty$, а $K(x, s)$ и $L(x, s)$ – регулярные в квадрате $-1 < x, s < 1$ ядра-функции, описывается обширный класс смешанных задач механики сплошной среды.

Далее, для простоты рассмотрим лишь характеристическое СИУ (3.10):

$$-i \operatorname{th}(\pi\mu) w(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(s) ds}{s-x} = g(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (3.12)$$

при условии (3.11). Это уравнение также часто встречается в контактных и смешанных задачах [60]. Теперь, как указано выше, положим

$$w(x) = \chi(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (1+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \varphi(x), \quad (3.13a)$$

где $\varphi(x) \in H[-1; 1]$, и произведем указанные выше элементарные преобразования. В результате, $((-1 \leq x \leq 1), \quad \psi(\pm 1) = 0)$,

$$w(x) = [\psi(x) + Ax + B] (1-x)^{-i\mu} (1+x)^{i\mu} / \sqrt{1-x^2}, \quad \psi(x) = \varphi(x) - Ax - B, \quad (3.13)$$

причем постоянные A и B определяются соотношениями (3.3a).

Теперь (3.13) подставим в СИУ (3.12) и в условие (3.11). После простых преобразований СИУ (3.12) примет вид:

$$-i \operatorname{th}(\pi\mu) \omega(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{1-x^2} f(x) + h(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (3.14)$$

$$f(x) = g(x) - \frac{A}{\pi} I_{\mu}^{(1)}(x) - \frac{B}{\pi} I_{\mu}^{(0)}(x); \quad h(x) = i \operatorname{th}(\pi\mu) (Ax + B) \times$$

$$\times (1-x)^{-i\mu} (1+x)^{i\mu}; \quad I_{\mu}^{(k)} = \int_{-1}^1 \frac{s^k (1-s)^{-i\mu} (1+s)^{i\mu} ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} \quad (-1 < x < 1; k = 0, 1),$$

причем

$$\omega(x) = (1-x)^{-i\mu} (1+x)^{i\mu} \psi(x); \quad \omega(\pm 1) = 0; \quad (3.15)$$

а условие (3.11) – вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = C \quad (3.16)$$

$$C = p - D_1 A - D_0 B; \quad D_k = \int_{-1}^1 \frac{s^k (1-s)^{-i\mu} (1+s)^{i\mu} ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad (k = 0, 1).$$

Входящие в (3.14) и (3.16) интегралы легко вычисляются. А именно, по известным формулам из [61] (стр. 299. ф-ла 3.196.3 и стр.951 ф-ла 8.332.2)

$$D_0 = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\mu)}; \quad D_1 = \frac{2\pi i\mu}{\operatorname{ch}(\pi\mu)};$$

а при помощи известной формулы из [61] (стр.304, ф-ла 3.228.2) $(-1 < x < 1)$

$$I_{\mu}^{(0)}(x) = i\pi \operatorname{th}(\pi\mu)(1-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(1+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}; \quad I_{\mu}^{(1)}(x) = \pi/\operatorname{ch}(\pi\mu) + I_{\mu}^{(0)}(x).$$

Приняв во внимание выражения вычисленных интегралов, окончательно определяющее СИУ (3.14) представим в виде $(-1 < x < 1)$

$$-i \operatorname{th}(\pi\mu)\omega(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = \sqrt{1-x^2} [g(x) - A/\operatorname{ch}(\pi\mu)]. \quad (3.17)$$

причем имеют место соотношения (3.15), а для постоянной C из (3.18) будем иметь

$$C = p - [\pi/\operatorname{ch}(\pi\mu)](B + 2i\mu A). \quad (3.18)$$

Далее, в соответствии с (3.18) решение СИУ (3.17) при

- 1) правой части $\sqrt{1-x^2}g(x)$ и при $C = 0$ в (3.16) обозначим через $\omega_0(x)$;
- 2) правой части 0 и при $C = 1$ в (3.16) обозначим через $\omega_1(x)$;
- 3) правой части 0 и при $C = \pi/\operatorname{ch}(\pi\mu)$ в (3.16) обозначим через $\omega_2(x)$;
- 4) правой части $\sqrt{1-x^2}/\operatorname{ch}(\pi\mu)$ и при $C = 2\pi i\mu/\operatorname{ch}(\pi\mu)$ в (3.16) обозначим через $\omega_3(x)$. Тогда $(-1 \leq x \leq 1)$

$$\omega(x) = \omega_0(x) + p\omega_1(x) - B\omega_2(x) - A\omega_3(x). \quad (3.19)$$

Так как $\omega(\pm 1) = 0$, то из (3.19) получим следующую систему линейных уравнений относительно постоянных A и B :

$$\begin{cases} \omega_3(1)A + \omega_2(1)B = \omega_0(1) + p\omega_1(1) \\ \omega_3(-1)A + \omega_2(-1)B = \omega_0(-1) + p\omega_1(-1) \end{cases} \quad (3.20)$$

Очевидно, что имеет место соотношение

$$\omega_2(x) = \pi B \omega_1(x) / \operatorname{ch}(\pi\mu) \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Отметим, что значения $\omega_j(\pm 1)$ ($j = \overline{0, 3}$), входящие в систему (3.20), можно вычислить при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по значениям функций $\omega_j(x)$ ($j = \overline{0, 3}$) в чебышевских узлах [62], которые определяются из приводимой далее системы уравнений.

Отметим еще, что постоянные A и B играют важную роль в теории трещин, т.к. ими определяются коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений.

Теперь, исходя из СИУ (3.17) для функций $\omega_j(x)$ ($j = \overline{0, 3}$), запишем соответствующие СИУ и условия (3.16), которые, соответственно, будут $(-1 < x < 1, \quad j = \overline{0, 3})$

$$-i \operatorname{th}(\pi\mu) \omega_j(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega_j(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = f_j(x) \quad (3.21)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega_j(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = C_j. \quad (3.22)$$

Здесь в соответствии с введенными выше функциями

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sqrt{1-x^2} g(x), \quad f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(x) = \sqrt{1-x^2} / \operatorname{ch}(\pi\mu), \\ C_0 &= 0, \quad C_1 = 1, C_2 = \pi / \operatorname{ch}(\pi\mu), \quad C_3 = 2\pi i \mu / \operatorname{ch}(\pi\mu). \end{aligned} \quad (3.23)$$

СИУ (3.21)–(3.23) решим известным численно-аналитическим методом [49,62], основанным на квадратурных формулах Гаусса для обычных и сингулярных интегралов, взяв $M = n+1$. В результате, придем к следующей системе линейных уравнений ($j = \overline{0,3}$):

$$\begin{cases} -i \operatorname{th}(\pi\mu) \omega_j(x_r) + \frac{\sqrt{1-x_r^2}}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\omega_j(s_m)}{s_m - x_r} = f_j(x_r) & (r = \overline{1, n}) \\ \frac{\pi}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} \omega_j(s_m) = C_j. \end{cases} \quad (3.24)$$

В системе (3.24)

$$s_m = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2(n+1)} \quad (m = \overline{1, n+1}), \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{n+1} \quad (r = \overline{1, n})$$

–чебышевские узлы, представляющие собой, соответственно, корни многочленов Чебышева первого рода $T_{n+1}(x)$ и многочленов Чебышева второго рода $U_n(x)$.

Далее, значения $\omega_j(x_r)$ в (3.24) вычислим по интерполяционному многочлену Лагранжа для функций $\omega_j(x)$ по чебышевским узлам, который имеет вид [62]

$$P_n(t) = \frac{2}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} \omega_j(s_m) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n T_k(t) T_k(s_m) \right],$$

откуда

$$\omega_j(x_r) = P_n(x_r) = \frac{2}{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} \omega_j(s_m) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi k r}{n+1}\right) \cos\left[\frac{\pi(2m-1)k}{2(n+1)}\right] \right\}.$$

Подставляя это выражение $\omega_j(x_r)$ в систему (3.24), окончательно относительно $\omega_j(s_m)$ ($j = \overline{0,3}$) придем к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n+1} L_{rm}^{(n)} \omega_j(s_m) &= a_r^{(j)} \quad (j = \overline{0,3}; r = \overline{1, n+1}) \\ L_{rm}^{(n)} &= \begin{cases} \frac{-2i \operatorname{th} \pi\mu}{n+1} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi k r}{n+1}\right) \cos\left[\frac{\pi(2m-1)k}{2(n+1)}\right] \right\} + \\ + \frac{\sqrt{1-x_r^2}}{(n+1)(s_m - s_r)} & (r = \overline{1, n}; m = \overline{1, n+1}); \\ \frac{\pi}{n+1} & (r = n+1, m = \overline{1, n+1}); \end{cases} \quad a_r^{(j)} = \begin{cases} f_j(x_r) & (r = \overline{1, n}); \\ C_j & (r = n+1). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Числовые результаты, полученные в ходе численной реализации системы уравнений (3.25), обладают довольно высокой степенью точности. В частности, сравнительный анализ числовых результатов, полученных в результате решения системы уравнений (3.25) при нескольких правых частях, при которых СИУ (3.12)–(3.11) допускает элементарное точное решение, и этих самых точных решений показывает их совпадение с большой степенью точности.

В заключение отметим, что в некоторых частных случаях, например, когда $\mu = 0$, аппроксимация функции $\varphi(x)$ из (3.13а) многочленами Бернштейна или сплайн-функциями, образованными при помощи этих многочленов, обеспечивает очень высокую степень эффективности и точности численной реализации СИУ (3.10)–(3.11) или (3.12)–(3.11) указанным численно-аналитическим методом их сведения к системам линейных уравнений.

Эти многочлены для функции $\varphi(x)$ имеют вид [63]

$$B_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \varphi\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k} \quad (-1 < x < 1).$$

В этом случае, значения $\varphi(\pm 1)$ сразу определяются из соответствующих систем линейных уравнений с довольно высокой точностью и не возникает необходимости получить эти значения при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа. Однако, на этих вопросах здесь останавливаться не будем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеориздат, 1955.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
4. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М: Наука, 1974.
5. Попов Г.Я. Избранные труды. Т.1,2. Одесса: Изд.-во Одесского национального университета им. И.И. Мечникова. 2007.
6. Александров В.М., Сметанин Б.М., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993.
7. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
8. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: 1990.
9. Колесников Ю.В., Морозов Е.М. Механика контактного разрушения. М.: Наука, 1989.
10. Механика разрушения и прочность материалов. /Справочное пособие. Т. 1,2,3. Киев: Наукова думка, 1988.
11. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. /Под редакцией Ю. Мураками. Т. 1,2. М.: Мир, 1990.
12. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
13. Механика контактных взаимодействий. /Под редакцией И.И. Ворovichа и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001.
14. Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975.
15. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Вища школа, 1982.
16. Dundurs J. Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities.-Mathematical Theory of Dislocations, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1969, pp. 7-115.
17. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983.
18. Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. //Докл. АН СССР. 1954.Т.94. № 6. С.987-990.
19. Крейн М.Г. Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения второго порядка. //Докл. АН СССР. 1954. Т.97. № 1. С.21-24.

20. Крейн М.Г. Об определении потенциала частицы по ее S-функции. //Докл. АН СССР. 1955. Т.105. № 3. С.433-436.
21. Крейн М.Г. Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности. // Докл. АН СССР. 1955. Т.105. № 4. С.637-640.
22. Крейн М.Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. //Докл. АН СССР. 1955. Т.100. № 3. С.413-416.
23. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
24. Арутюнян Н.Х. Плоская контактная задача теории ползучести. //ПММ. 1959. Т.23. № 5. С.901-924.
25. Арутюнян Н.Х., Манукян М.М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. //ПММ. 1963. Т.27. № 5. С.813-820.
26. Попов Г.Я. Об одном способе решения осесимметрической контактной задачи теории упругости. //ПММ. 1961. Т.25. № 1. С.76-85.
27. Прокопович И.Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. //ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.680-687.
28. Александров В.М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. //ПММ. 1963. Т.27. № 5. С.970-974.
29. Мхитарян С.М. Некоторые классы эффективно решаемых линейных интегральных уравнений первого рода и связанные с ними дифференциальные уравнения. Приложения к контактными задачам теории упругости. /Кандидатская диссертация, Ереван, 1968.
30. Mkhitarian S.M. On the Application of the M.G. Krein Method for the Solution of Integral Equations in Contact Problems in Elastisiti Theory.- Advances and Applications, Vol. 191, 2009, pp. 155-171; Birkhauser Verlag Basel Switzerland.
31. Раков А.Ф., Рвачев В.Л. Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины. //Докл. УССР. 1961. № 3. С.286-290.
32. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961.
33. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947.
34. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
35. Титчмарш Е.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т I. М.: ИЛ, 1960.
36. Мхитарян С.М. О двух типах ортогональных интегральных соотношений для бесселевых функций и их приложениях к смешанным задачам. //Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т.74. № 4. С.175-182.
37. Мхитарян С.М. О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложениях к контактными задачам. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1982. Т.35. № 6. С.3-18.
38. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов на полубесконечном интервале и их приложениях к смешанным задачам. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С.63-72.
39. Мхитарян С.М. О некоторых спектральных соотношениях, связанных с интегральным уравнением Карлемана, и их приложениях к контактными задачам. // ПММ. 1983. Т.47. № 2. С.219-227.
40. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов, порожденных ядром в виде интеграла Вебера-Сонина, и их приложениях к контактными задачам. // ПММ. 1984. Т.48. № 1. С.105-113.
41. Мхитарян С.М. Об одном спектральном соотношении в сфероидальных волновых функциях и его приложении к контактными задачам.// ПММ. 1984. Т.48. № 5. С.845-853.

42. Мхитарян С.М. Смешанные задачи, связанные с вопросами взаимодействия массивных деформируемых тел с концентраторами напряжений типа стрингеров, тонкостенных включений, штампов и трещин. // Докторская диссертация, Ереван, 1990.
43. Попов Г.Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактнм задачам. // ПММ. Т.27. № 5. 1963.
44. Попов Г.Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. // ПММ. 1969. Т.33. № 3. С.518-531.
45. Титчмарш Е.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948.
46. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд.-во ИЛ, 1960.
47. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1974.
48. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. //В сб.: "Вычислительная математика и математическая физика." М.: Наука, 1964. С.64-74.
49. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems.- Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973, pp. 368-425.
50. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations.- Quart. Appl. Math., vol XXXV, № 1, 1977, pp. 173-185.
51. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
52. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учетом тепловыделения. //ПММ. 1982. Т.46. № 3. С.494-501.
53. Акопян В. Н., Саакян А.В. Напряженное состояние однородной упругой плоскости, содержащей накрест лежащие трещины, при смешанных граничных условиях на берегах трещин.// Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С.106-113.
54. Акопян В. Н., Саакян А.В. Об одной смешанной задаче для упругого клина, ослабленного трещиной. // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С.66-78.
55. Акопян В. Н., Саакян А. В. Напряженное состояние упругой полуплоскости, содержащей тонкое жесткое включение.// Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С.76-82.
56. Саакян А.В., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для упругого пространства с Т-образной трещиной при антиплоской деформации. //В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды." Труды международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН РА Н.Х. Арутюняна, 25-28 сентября 2007, Цахкадзор.- Ереван, 2007, с. 351-354.
57. Саакян А.В. Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом. //Докл. НАН РА. 1997. Т.97. № 4. С.32-36.
58. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973.
59. Tricomi F.G. On the finite Hilbert transformation.- Quart. J. Math. Oxford(2), 2, 1951, pp. 199-211.
60. Мкртчян М.С. Напряженное состояние упругого кусочно-однородного пространства с трещинами или абсолютно жесткими включениями при антиплоской и плоской деформациях. /Кандидатская диссертация. Ереван, 2001.
61. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
62. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.
63. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Сведения об авторе:

Мхитарян Сурен Манукович,

Доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник,
Институт механики НАН РА.

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24⁶, ИМех. НАН

Тел: (37410)-62-10-252, E-mail: mechins@sci.am

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Сумбатян М.А.

Для больших чисел Рейнольдса любое течение вязкой жидкости является турбулентным, и точный расчет потока, обеспечивающий корректное вычисление осциллирующих турбулентных составляющих скорости, становится затруднительным. Между тем информация об осциллирующих компонентах скорости является ключевой, например, в таких областях как аэроакустика. В связи с этим, к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса применялись различные прямые численные методы, эффективные как в ламинарной, так и в турбулентной области. Целью данной работы является построение полуаналитического метода, который основан на классических итерациях по времени. При этом, на каждом шаге итерации задача сводится к некоторой линейной эллиптической проблеме, решение которой с использованием предложенной функции Грина строится в замкнутом виде. Сама функция Грина также выписывается явно в квадратурах.

1. Постановка задачи. Продемонстрируем предлагаемый подход на двумерной задаче о течении однородного потока жидкости в канале постоянной ширины $2h$, как показано на рис. 1, где выделенная в канале расчетная область покрыта плотной сеткой узлов (x_i, y_j) .

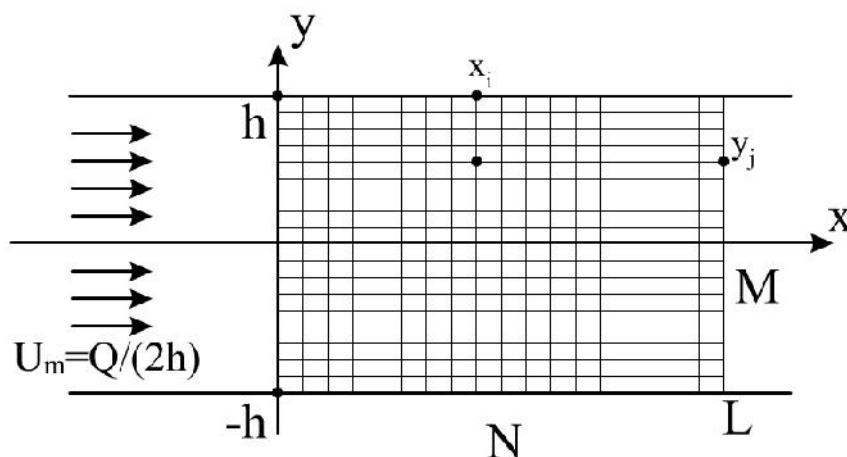


Рис.1. Турбулентный поток в канале постоянной ширины

Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости могут быть записаны в терминах функции тока ψ и завихренности ζ [1,2]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu \Delta \zeta, \quad \zeta = \Delta \psi. \quad (1)$$

При этом компоненты вектора скорости $\{u, v\}$ выражаются через функцию тока:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2)$$

а расход жидкости через сечение канала, средняя скорость потока по сечению и число Рейнольдса имеют следующий вид:

$$Q = \int_{-h}^h u dy = \psi|_{y=h} - \psi|_{y=-h}, \quad U_m = \frac{Q}{2h}, \quad Re = \frac{h U_m}{\nu} \gg 1. \quad (3)$$

Будем считать известным расход Q , что эквивалентно заданию средней скорости U_m .

Высокоскоростной поток (большие числа Рейнольдса $Re \gg 1$) является турбулентным, и при решении уравнений (1)-(2) возникают два фундаментальных вопроса:

- (i) Содержится ли турбулентный режим течения в уравнениях Навье-Стокса или он может быть получен только с использованием более сложных моделей?
- (ii) Если уравнения (1)-(2) адекватно описывают турбулентный режим для больших чисел Re , то можно ли его получить прямым численным расчетом этих уравнений?

Заметим, что окончательного ответа на поставленные вопросы на сегодня не существует, однако прямые численные эксперименты, проводимые в последние 20 лет с использованием современных компьютеров, показывают, что, по-видимому, гипотезы (i)-(ii) являются верными. В любом случае современная трактовка турбулентных явлений, в основном, связана с численным расчетом нелинейных уравнений Навье-Стокса [2]. Поскольку для корректного моделирования турбулентных вихрей самого мелкого масштаба необходимо брать очень малый шаг расчетной сетки (рис. 1), это приводит к запредельно большому числу узлов на сетке. Как следствие, численные расчеты требуют огромных затрат машинного времени и оперативной памяти. В результате вопрос об успешном расчете турбулентных течений оказывается эквивалентным вопросу о построении быстрых алгоритмов для соответствующих параболических и эллиптических краевых задач. Одним из методов, ускоряющих расчеты, является игнорирование вихрей мелкого масштаба путем специальной фильтрации уравнений Н-С, метод LES (Large Eddy Simulation) [3]. Однако в последние годы прямой численный анализ, или DNS (Direct Numerical Simulation) [4], становится все более популярным. Данная работа посвящена одному из подходов DNS.

2. Быстрый алгоритм для функций ψ и ζ . Уравнение переноса вихря (1), если в нем последний член перенести в левую часть, превращается в неоднородное уравнение параболического типа для функции ζ . Известно, что неявная конечно-разностная схема по времени (производная «назад» по времени) является устойчивой при решении таких уравнений. Если для простоты ограничиться простейшей схемой Эйлера, имеющей линейный порядок погрешности, как по временному шагу дискретизации τ , так и по пространственным переменным, то на каждом шаге итерации по времени приходим к паре эллиптических краевых задач, в первой из которых нелинейные члены берутся из значений на предыдущем шаге итерации [1]:

$$\zeta^{(n)} - \varepsilon \Delta \zeta^{(n)} = g^{(n-1)}, \quad \varepsilon = \nu \tau, \quad g^{(n-1)} = \zeta^{(n-1)} - \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{n-1},$$

$$\Delta \psi^{(n)} = \zeta^{(n)}, \quad \left. \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = 0, \quad \psi^{(n)}|_{y=-h} = 0, \quad \psi^{(n)}|_{y=h} = Q. \quad (4)$$

Заметим, что использование вместо схемы Эйлера схемы Кранка-Николсона дает линейную погрешность по временному шагу и квадратичную по пространственным координатам, а схема Адамса-Бэшфорда дает квадратично-малую погрешность как по времени, так и по координатам [1]. При этом, уравнения (4) сохраняют вид, но выражения для малого параметра ε и правой части $g^{(n-1)}$ будут несколько иными. Однако это не меняет сути алгоритма.

Основной сложностью в численной трактовке через функции ψ – ζ является подбор граничного условия для функции ζ . Считается, что корректным является формулирование некоторого условия Дирихле, которое можно осуществить тем или иным способом. Один из первых надежных подходов был предложен Томом [1]:

$\zeta^{(n)}|_{y=\pm h} = 2[\psi^{(n-1)}|_{y=\pm(h-\Delta y)} - \psi^{(n-1)}|_{y=\pm h}]/(\Delta y)^2$, где Δy – шаг сетки по вертикальной координате. Тогда для обоих эллиптических уравнений в (4) имеем краевую задачу Дирихле, причем для функции ψ граничные условия даются последними равенствами в (4).

Предлагаемый полуаналитический метод основан на построении функции Грина в рассматриваемой области. Приведем соответствующие формулы в более простом случае уравнения Пуассона для функции ψ в (4). В выбранной прямоугольной области расчета конечной длины L необходимо поставить граничные условия на левой и правой сторонах этой области. Для однородного потока, если длина расчетной области, по крайней мере, в несколько раз больше ширины канала, считается, что условия периодичности вдоль потока можно считать достаточно корректными граничными условиями [1,2]. Тогда функция Грина определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 G_\psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G_\psi}{\partial \eta^2} = \delta(\xi - x)\delta(\bar{\eta} - \bar{y}), \quad G_\psi|_{\bar{\eta}=0} = G_\psi|_{\bar{\eta}=b} = 0,$$

$$G_\psi|_{\xi=0} = G_\psi|_{\xi=L}, \quad \left. \frac{\partial G_\psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial G_\psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=L}, \quad (b = 2h, \quad \bar{y} = y + h, \quad \bar{\eta} = \eta + h) \quad (5)$$

и имеет следующий вид:

$$G_\psi(\xi, \bar{\eta}, x, \bar{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(b_k \bar{\eta}) \sin(b_k \bar{y})}{\pi k} \frac{e^{b_k |\xi - x|} + e^{b_k (L - |\xi - x|)}}{1 - e^{b_k L}}, \quad b_k = \frac{\pi k}{b}, \quad (6)$$

При этом, точное решение уравнения Пуассона в (4) для функции $\psi^{(n)}$ выражается формулой

$$\psi^{(n)}(x, \bar{y}) = \frac{Q\bar{y}}{b} + \int_0^L \int_0^b G_\psi(\xi, \bar{\eta}, x, \bar{y}) \zeta^{(n)}(\xi, \bar{\eta}) d\xi d\bar{\eta}. \quad (7)$$

Количество членов ряда (6), которое необходимо сохранить при расчетах, определяется скоростью сходимости после подстановки (6) в (7). Классическая схема интегрирования по частям показывает, что интегралы по ξ и η убывают с ростом k как $O(1/k)$. Таким образом, убывание общего члена ряда в (7): $O(1/k^3)$. То есть, для корректного вычисления достаточно оставить порядка $K \sim 100$ членов в бесконечном ряде по k . Заметим, что число K не зависит от числа узлов в сетке – чисел N , M и может считаться фиксированным.

Очевидно, расчет по явному точному выражению (7) для каждой точки $(x_i, \bar{y}_j)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ требует суммирования по всем точкам $(\xi_i, \bar{\eta}_j)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, т.е., полный расчет в данной области требует $O(M^2 N^2)$ арифметических операций. Уже для значений $M \sim N \sim 10^3$ имеем порядка 10^{12} арифметических операций, что превышает возможности даже современных суперкомпьютеров.

С целью построения алгоритма, работающего в реальном масштабе времени, заметим, что соотношения (6) и (7) означают, что

$$\psi^{(n)}(x, \bar{y}) - \frac{Q\bar{y}}{b} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^{(n)}(x) \sin(b_k \bar{y}), \quad \zeta_k^{(n)}(\xi) = \frac{2}{b} \int_0^b \sin(b_k \bar{\eta}) \zeta^{(n)}(\xi, \bar{\eta}) d\bar{\eta}. \quad (7a)$$

При этом

$$\psi_k^{(n)}(x) = -\frac{1}{2b_k(1 - e^{-b_k L})} \int_0^L [e^{b_k(|\xi - x| - L)} + e^{-b_k|\xi - x|}] \zeta_k^{(n)}(\xi) d\xi. \quad (7b)$$

Таким образом, задача нахождения функций $\psi^{(n)}(x, y)$ и $\zeta^{(n)}(x, y)$ на каждом шаге временных итераций может быть заменена задачей нахождения K одномерных функций $\psi_k^{(n)}(x)$ и $\zeta_k^{(n)}(x)$. Если при решении уравнения Пуассона на n -м шаге итерации правая часть уже известна, то в терминах функций $\psi_k^{(n)}(x)$ и $\zeta_k^{(n)}(x)$ это означает, что функции $\zeta_k^{(n)}(x)$ уже известны. Тогда нахождение K функций $\psi_k^{(n)}(x)$ требует вычислений по формуле (7b), в которой все интегралы можно представить в виде комбинаций интегралов вида

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^x e^{c\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \sim \quad \frac{dI_1(x)}{dx} = e^{cx} \varphi(x), \quad I_1(0) = 0, \\ I_2(x) &= \int_x^L e^{c\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \sim \quad \frac{dI_2(x)}{dx} = -e^{cx} \varphi(x), \quad I_2(L) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Расчет этих интегралов сразу для всех x_i требует $O(N)$ операций, что достигается пошаговым итерационным процессом по x для задач Коши вида (8). Таким образом, вычисление K функций $\psi_k^{(n)}(x)$ по функциям $\zeta_k^{(n)}(x)$ требует $O(N)$ операций.

Аналогичную оценку имеем при решении уравнения Гельмгольца в (4), которое строится на основе функции Грина, аналогичной (6) и имеющей вид

$$G_\zeta(\xi, \bar{\eta}, x, \bar{y}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(b_k \bar{\eta}) \sin(b_k \bar{y})}{b \varepsilon \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k |\xi - x|} + e^{\lambda_k (L - |\xi - x|)}}{1 - e^{\lambda_k L}}, \quad \lambda_k = \sqrt{b_k^2 + \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (9)$$

В итоге связь коэффициентов Фурье $\zeta_k^{(n)}(x)$ с коэффициентами Фурье правой части (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \zeta_k^{(n)}(x) &= \frac{1}{2\varepsilon \lambda_k (1 - e^{-\lambda_k L})} \int_0^L \left[e^{\lambda_k (|\xi - x| - L)} + e^{-\lambda_k |\xi - x|} \right] g_k^{(n-1)}(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{b_k}{b \lambda_k (1 - e^{-\lambda_k L})} \int_0^L \left[\zeta(\xi, 0) - (-1)^k \zeta(\xi, b) \right] \left[e^{\lambda_k (|\xi - x| - L)} + e^{-\lambda_k |\xi - x|} \right] d\xi; \\ g^{(n-1)}(x, \bar{y}) &= \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(n-1)}(x) \sin(b_k \bar{y}), \end{aligned} \quad (10)$$

Если коэффициенты Фурье $g_k^{(n-1)}(x)$ известны на предыдущем $(n-1)$ -м временном слое, то численная реализация этих соотношений по аналогии с (7b) опять-таки требует $O(N)$ арифметических операций для K функций $\zeta_k^{(n)}(x)$.

При таком подходе наибольшие вычислительные ресурсы требуются при определении правой части в уравнении Гельмгольца (4), содержащей нелинейные члены. Заметим, что перемножение двух рядов Фурье в выражении для функции $g^{(n-1)}(x)$ в правой части (4) сводится к ряду Фурье с коэффициентами, представляющими собой свертку по индексам двух перемножаемых рядов. Тогда для каждого из $O(N)$ значений x необходимо вычислить такую свертку, что при фиксированном числе членов K требует конечного числа арифметических операций. На практике, если число K берется достаточно большим, то такая свертка может вычисляться с использованием БПФ [5] и известной теоремы о свертке для дискретного случая. Такой алгоритм потребует $O(K \log K)$ операций вместо $O(K^2)$ операций.

Описанный алгоритм сводится к последовательному вычислению коэффициентов Фурье, и на каждом шаге итераций по времени требует $O(NK \log K)$ арифметических операций. Если

число удерживаемых членов ряда фиксировано, то на каждом шаге имеем линейный по числу N процесс. Если же число удерживаемых членов бесконечных рядов увеличивается пропорционально числу узлов поперек потока: $K = O(M)$, то затраты машинного времени имеют порядок $O(MN \log M)$ на каждом временном шаге.

2. Быстрый алгоритм для функции тока ψ . Описанный выше алгоритм оказывается на удивление быстрым, а при фиксированном числе членов в бесконечных рядах – линейным по числу узлов вдоль потока. Однако, в нем есть одно слабое место – использование граничного условия на стенках канала для функции ζ , которое заранее не определено. Всякое приближенное условие (типа условия Тома и т.п.) будет приводить к снижению точности вычислений. В связи с этим возникает вопрос о построении быстрого полуаналитического метода, использующего только функцию тока, для которой и формулируются все граничные условия в (4).

Подстановка завихренности из второй строки (4) в уравнение Гельмгольца в первой строке (4) приводит к краевой задаче для уравнения 4-го порядка. Сформулируем задачу для функции тока в виде, симметричном относительно вертикальной переменной в бесконечной полосе $|y| \leq h$:

$$\Delta \psi^{(n)} - \varepsilon \Delta^2 \psi^{(n)} = g^{(n-1)}, \quad \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = 0, \quad \psi^{(n)} \Big|_{y=\pm h} = \pm \frac{Q}{2}. \quad (11)$$

Тогда подходящая функция Грина $G(\xi, \eta, x, y)$ должна находиться из уравнения

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) - \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] G = \delta(\xi - x) \delta(\eta - y), \quad G \Big|_{\eta=\pm h} = \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\pm h} = 0. \quad (12)$$

Преобразование Фурье по переменной $\xi: \xi \rightarrow \alpha$, $G \rightarrow \tilde{G}$ сводит уравнение (12) к некоторому ОДУ 4-го порядка по переменной η , решение которого после некоторых громоздких преобразований может быть выписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\alpha, \eta, x, y) &= e^{i\alpha x} H; \quad G_0(\alpha, y) = \frac{\text{sh}[(h+y)\alpha_1]}{\text{sh}(2h\alpha_1)} - \frac{\text{sh}[(h+y)\alpha_2]}{\text{sh}(2h\alpha_2)}, \\ H(\alpha, \eta, y) &= \frac{\text{ch}[(2h-|\eta-y|)\alpha_1] - \text{ch}[(\eta+y)\alpha_1]}{2\alpha_1 \text{sh}(2h\alpha_1)} - \frac{\text{ch}[(2h-|\eta-y|)\alpha_2] - \text{ch}[(\eta+y)\alpha_2]}{2\alpha_2 \text{sh}(2h\alpha_2)} + \\ &+ \frac{1}{D_0} \{ [\alpha_2 \text{sh}(2h\alpha_1) - \alpha_1 \text{sh}(2h\alpha_2)] [G_0(\alpha, y)G_0(\alpha, -\eta) + G_0(\alpha, -y)G_0(\alpha, \eta)] + \\ &+ [\alpha_2 \text{sh}(2h\alpha_1) \text{ch}(2h\alpha_2) - \alpha_1 \text{sh}(2h\alpha_2) \text{ch}(2h\alpha_1)] [G_0(\alpha, y)G_0(\alpha, \eta) + G_0(\alpha, -y)G_0(\alpha, -\eta)] \}, \\ D_0 &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \text{sh}(2h\alpha_1) \text{sh}(2h\alpha_2) + 2\alpha_1 \alpha_2 [1 - \text{ch}(2h\alpha_1) \text{ch}(2h\alpha_2)], \\ G(\xi, \eta, x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos[\alpha(x-\xi)] H(\alpha, \eta, y) d\alpha, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом, сама функция тока выражается через функцию Грина в следующем виде:

$$\psi^{(n)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-h}^h G(\xi, \eta, x, y) g^{(n-1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{3}{4} Q \left(\frac{y}{h} - \frac{y^3}{3h^3} \right) \quad (14)$$

Очевидно, что в функциях $G_0(\alpha, \pm \eta)$ для любого фиксированного α интегрирование по η в (14) можно выполнить один раз для всех значений y . Т.е., для каждого фиксированного α число таких операций равно числу узлов y_j , именно: $O(M)$. Интегрирование по n функций, содержащих $|\eta - y|$, требует $O(M \log M)$ операций на основе свертки и БПФ. Далее, повторное интегрирование по ξ и α означает обратное преобразование Фурье по α от функции $\tilde{G}(\alpha, \eta, x, y) \tilde{g}^{(n-1)}(\alpha, \eta)$. На основе БПФ это требует $O(N \log N)$ арифметических операций сразу для всех значений x_i [5]. Таким образом, полное число операций для вычислений по формулам (13), (14) на каждом временном слое равно $O(M N \log M \log N)$.

Заметим, что стандартный МКЭ требует $O(M^2 N^2)$ числа операций на каждом временном слое.

Работа поддержана ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы, Госконтракт № П 238.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
2. Белоцерковский О.М., Опарин А.М. Численный эксперимент в турбулентности. М.: Наука, 2000.
3. Laval J.-P., Dubrulle B., Nazarenko S.V. Fast numerical simulations of 2D turbulence using a dynamic model for subfilter motions // J. Comp. Phys., 2004, **196**, 184 – 207.
4. Friedrich R. et al. DNS of incompressible turbulent flows // Computers & Fluids, 2001, **30**, 555 – 579.
5. Солонина А.И. и др. Основы цифровой обработки сигналов. Санкт-Петербург: БХВ – Петербург, 2005.

Сведения об авторе

Сумбатян Межлум Альбертович,
д.ф.м.н., профессор,
Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет,
факультет математики, механики и компьютерных наук
Телефоны: 007-863-2476756; 007-928-1397067
E-mail: sumbat@math.rsu.ru

THERMODYNAMIC AND MECHANIC FORMULATION OF FRACTURE CRITERION FOR HETEROGENEOUS MATERIALS

Arutyunyan Robert A.

To describe the mechanical behavior of heterogeneous (composite, ceramic) materials, formed of linear elastic and nonlinear viscous components, the modified Maxwell equation is introduced. The energy conservation law is applied to formulate the fracture criterions for heterogeneous materials and common metallic alloys. As an example, the fracture criterion for the ceramic composite is formulated. The energy approach to the fatigue fracture problem is also discussed.

Acknowledgement. Financial support of the Russian Foundation for Basic Research (Grant № 09-01-00513) is gratefully acknowledged.

The modified nonlinear Maxwell equation. Introducing the current coefficient of lateral deformation ν ($\nu = -\varepsilon_y / \varepsilon_x = -\varepsilon_z / \varepsilon_x$, ε_x is longitudinal, $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ are lateral strains of a bar in tension) and applying relation $F_0 / F = (l / l_0)^{2\nu}$ (F, F_0 and l, l_0 are current and initial cross section area and length of the specimen, $\varepsilon_x = \varepsilon = \ln l / l_0$, is true or logarithmic strain) into the nonlinear Maxwell law

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^n, \quad (1)$$

the following equation will be received [1]

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dt} = \frac{2\nu\sigma_0}{E} z^{2\nu-1} \frac{dz}{dt} + \left(\frac{\sigma_0}{\eta} \right)^n z^{2\nu n}, \quad (2)$$

where $z = l / l_0$, $\sigma_0 = P / F_0$ is nominal stress.

With the account of initial conditions $t = 0$, $l = l_0$ ($z = 1$), and $\nu = \nu(\sigma_0)$, $\sigma_0 = \text{const}$ the solution of equation (2) can be given in the form

$$t = \left(\frac{\eta}{\sigma_0} \right)^n \left[\frac{1 - e^{-2\nu n \varepsilon}}{2\nu n} - \frac{\sigma_0}{E(n-1)} (1 - e^{-2\nu(n-1)\varepsilon}) \right]. \quad (3)$$

Expanding the exponential functions in (3) in series and taking into account the linear terms, we will receive the approximate relation for creep deformation. From the received relation the deformation $\varepsilon = \varepsilon_*$ at the time to fracture $t = t_p$ will be expressed as

$$\varepsilon_* = \frac{t_p}{\left(\frac{\eta}{\sigma_0} \right)^n \left(1 - \frac{2\nu\sigma_0}{E} \right)} \quad (4)$$

In order to evaluate the value of energy consumed for the creep fracture [2] the energy conservation law will be used to formulate the thermodynamic fracture criterion for heterogeneous materials. Applied to the problem of creep deformation and fracture of a specimen, this law can be formulated in the following manner. When an element of a system (specimen) goes from the initial state (initial loading) to the final state (fracture) a small increment of internal energy du is equal to the sum of increments of strain energy δw and the heat δq , removed from the element of the system

$$du = \delta w - \delta q, \quad (5)$$

where $\delta w = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ($d\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} dt$), σ_{ij} are components of stress tensor, $d\varepsilon_{ij}$ are components of strain increment tensor.

Integrating (5) from initial (marked 0) to the fractured state (marked *), we will receive

$$\Delta u_* = w_* - \Delta q_*, \quad (6)$$

where

$$\Delta u_* = \int_{u_0}^{u_*} du = u_* - u_0, \quad w_* = \int_0^{w_*} \delta w, \quad \Delta q_* = \int_{q_0}^{q_*} \delta q. \quad (7)$$

Introducing notations $\Delta q_* = w_{*1}$, $\Delta u_* = w_{*2}$, the energy conservation law (6) can be rewritten as $w_* = w_{*1} + w_{*2}$. So the deformation energy w_* is the summary of the heat energy w_{*1} and the latent or stored energy w_{*2} [3, 4], which represents the change in internal energy and is consumed for the fracture of material.

For the case of pure tension $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$, $\sigma_{ij} = \sigma$, where $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, the deformation energy can be calculated as $w_* = \sigma_0 \varepsilon_*$, from which follows

$$\varepsilon_* = \frac{w_{*1} + w_{*2}}{\sigma_0} \quad (8)$$

Comparing relations (4) and (8), we will receive the following creep fracture law

$$t_* = \frac{(w_{*1} + w_{*2})}{\sigma_0} \left(\frac{\eta}{\sigma_0} \right)^n \left(1 - \frac{2\nu\sigma_0}{E} \right) \quad (9)$$

Thermodynamic creep fracture criterion for metallic materials. To formulate the thermodynamic creep fracture criterion for metallic materials we will use the modified Norton's creep theory developed in [1].

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = B\sigma_0^m \left(\frac{l}{l_0} \right)^{2mv} \quad (10)$$

If at the fracture point $t = t_p$ the value of deformation $\varepsilon = \varepsilon_*$, then from the solution of equation (10) we can have

$$\varepsilon_* = \frac{1}{2mv_*} \ln \left(1 - 2mv_* B\sigma_0^m t_p \right)^{-1} \quad (11)$$

For the deformation energy we will receive the following relation

$$w_* = \frac{\sigma_0}{2\nu_*} (e^{2\nu_*\varepsilon_*} - 1) \quad (12)$$

Comparing (11) and (12) the creep fracture criterion can be derived as

$$t_p = \frac{1}{2mv_* B\sigma_0^m} \left[1 - \left(1 + \frac{2\nu_*(w_{*1} + w_{*2})}{\sigma_0} \right)^{-m} \right]. \quad (13)$$

For the incompressible material $\nu_* = 0,5$, the creep fracture law (13) coincides with the Hoff's criterion [5]

$$t_f = \frac{1}{mB\sigma_0^m}, \quad (14)$$

when $\left(1 + \frac{w_{*1} + w_{*2}}{\sigma_0} \right)^{-m} \rightarrow 0$, or $w_* = w_{*1} + w_{*2} \rightarrow \infty$.

So according to Hoff's approach, to fracture a specimen under creep condition an unlimited value of energy must be consumed. In accordance with the proposed criterion (13) the energy consumption for high temperature creep fracture of metallic materials is limited and its value is in agreement with the corresponding experimental values and depends on the rheology of materials.

Some authors [6] consider the creep fracture criterion in the form

$$w_* = w_{*1} + w_{*2} = \text{const}. \quad (15)$$

In contrast, from our consideration follows that the experimental creep fracture curves are best fitted by the criterion

$$t_f = \frac{1}{m B \sigma_0^m} \left[1 - \left(1 + \frac{w_{*2}}{\sigma_0} \right)^{-m} \right] \quad (16)$$

For the incompressible material the criterion (16) follows from (13) by assuming, that the heat energy w_{*1} is given out during the creep experiment so it has no effect on the fracture process. The part of the total energy w_{*2} is consumed to increase the latent energy or stored energy. The latent energy is supplied for the generation of different types of defects which evaluate the damage state of the material. When the damage state achieves the critical value, the specimen is fractured.

To test the creep fracture criterion (16), let's consider the results of creep and fracture experiments [7]. Using these results, coefficients in (16) were calculated as $m = 8$, $B = 1,9 \cdot 10^{-21} [MPa]^{-8} h^{-1}$.

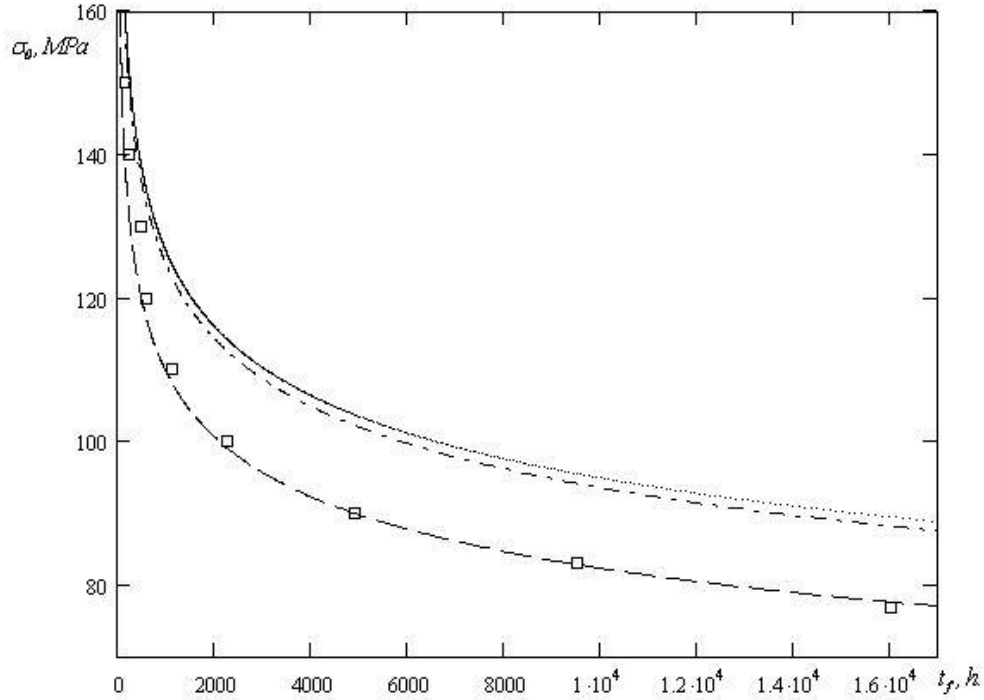


Figure 1. Creep fracture curves (Hoff's law (14) solid line, the dash-dot line (15), the dash line corresponds to the criterion (16)) and experimental points [7].

In Fig.1 the solid line corresponds to Hoff's law (14). Criterion (15) is shown by dash-dot line and the dash line corresponds to the criterion (16). As it follows from Fig.1, the criterion (16) based on the value of latent energy gives the best fit to the experimental creep fracture curve.

Model of a composite material. For a comparison with experiments, one needs a procedure of identifying v based on experimental data. The existing data are not sufficient, so we use an approximate approach, by introducing a model of heterogeneous material consisting of elastic and viscous components. It utilizes an interpolation formula relating longitudinal elastic e_x^y , viscous e_x^b and lateral ε_y , ε_z strains of a bar subjected to a constant force P .

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -v_e \varepsilon_x^y - v_b \varepsilon_x^b, \quad (17)$$

where v_e is the elastic and v_b , is the viscous coefficient of lateral strain. Relation (17) can be written in differential form:

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_z = -v_e \dot{\varepsilon}_x^y - v_b \dot{\varepsilon}_x^b = \frac{v_e P}{E} \frac{\dot{F}}{F^2} - \frac{v_b P^n}{\eta F^n} \quad (18)$$

where F is the current cross section area of the circular specimen.

For the function $F(t)$ the following differential equation is valid

$$\frac{\dot{F}}{2F} = \frac{v_e P}{E} \frac{\dot{F}}{F^2} - \frac{v_b}{\eta} \frac{P^n}{F^n} \quad (19)$$

To solve the equation (19) we will introduce the following assumptions. Let's the coefficients E, v_e, v_b are constants and the viscosity coefficient is an exponential function of time: $\eta = \eta_0(T) \cdot e^{-kt}$ [8], where T is temperature, k is constant.

The solution of equation (19) with the initial conditions $t = 0$, $F = F_0$, $\eta = \eta_0(T)$, $T = \text{const}$ has the form

$$\left(\frac{F}{F_0}\right)^n - 1 = \frac{2nv_e\sigma_0}{E(n-1)} \left[\left(\frac{F}{F_0}\right)^{(n-1)} - 1\right] + \frac{2nv_b\sigma_0^n}{\eta_0(T)k} (1 - e^{kt}) \quad (20)$$

In calculations we will use a power law for the viscosity coefficient $\eta_0(T) = \eta_1 (1 - T/T_*)^m$, where η_1, m are constants, T_* is a characteristic temperature

To formulate the failure criterion we will assume that at the moment of fracture $t = t_p$, $F = F_*$, or $F_*/F_0 = 1 - \psi_*$. Applying the mass conservation law $\rho_0 l_0 F_0 = \rho_* l_* F_*$ and using some approximations, from (20) we will receive the following fracture criterion

$$t_p = \frac{(1 - (\rho_0/\rho_*) \exp(-\varepsilon_*)) \eta_1 (1 - T/T_*)^m}{2v_b \sigma_0^n} \quad (21)$$

To describe the temperature dependence of strength stress we will apply the criterion (21). Taking the time to fracture fixed, so $t_p = t_p^*$, from (21) we will have

$$\sigma_0 = \left(\frac{\eta_1 (1 - T/T_*)^m (1 - (\rho_0/\rho_*) \exp(-\varepsilon_*))}{2v_b t_p^*} \right)^{1/n} \quad (22)$$

The temperature dependence of strength stress (22) and experimental points [9] for the specimens made of Si_3N_4 of different composition are shown in Fig. 2.

As it seen from the Fig. 2, the suggested theoretical model for ceramic materials is capable to describe the mechanical behavior of ceramics.

The energy approach to the fatigue fracture problem. The results of experiments on latent energy carried out in recent years [10-14] show that the relation of the latent energy or the stored energy is expressed in the form of logistics function. Experiments [16] conducted on cyclic bending of specimens made of construction materials show that the relations of different physical and mechanical characteristics from number of cycles has two precisely expressed regions. Similarly to the logistics function these relations have the precisely expressed point of inflection. These results are the additional confirmation for the introduction of the logistics function to formulate the fatigue strength criterion.

Let us introduce the parameter γ , which characterizes the relative changes of latent energy $\gamma = W/W_*$, where W is the current and W_* is the limiting values of latent energy, $\gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_*$, γ_0, γ_* are initial and limiting values of parameter γ consequently, $\gamma_0 < \gamma_* \leq 1$.

To describe the evolution of latent energy we will use the results of the tensile tests for different metals [12] (duraluminium [10], austenitic stainless steel [12]). In these experiments a saturation of the stored energy at a certain plastic strain has been observed. So these observations and the results of experiments [12] allow us to introduce kinetic equation of the form

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = A \gamma (\gamma_* - \gamma), \quad (23)$$

where A and γ_* are constants. In the common case A and γ_* can be considered as functions of stress.

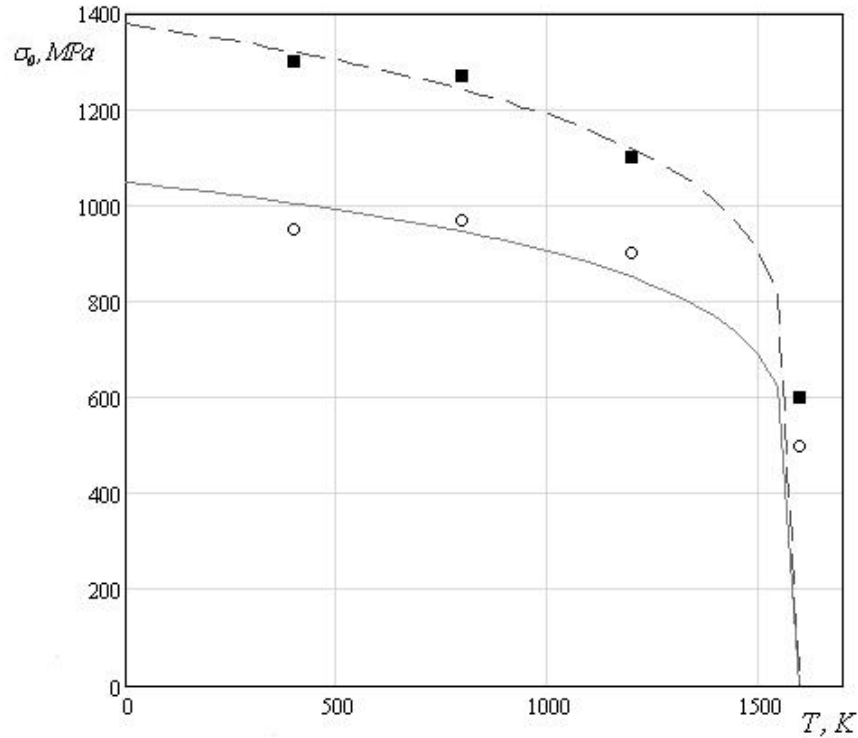


Figure 2. The temperature dependence of strength stress and experimental points for the specimens made of Si_3N_4 of different composition [9].

The solution of equation (23) is the well known logistic function. This function describes the different processes which lead to saturation [16-17]. Solving equation (23) with the initial conditions: $\varepsilon = 0$, $\gamma = \gamma_0$, we will have the following relation, expressed in the form of logistic function

$$\gamma = \frac{\gamma_*}{1 + (\gamma_* / \gamma_0 - 1) \cdot e^{-A \varepsilon \gamma_*}} \quad (24)$$

The theoretical curve (24) of latent energy accumulation is shown in Fig. 3 (solid line). The results of experiments on specimens made of aluminium alloy 2024-T351 [10] are shown in this figure by cross points. In calculations the following values of constants were used: $A = 26,852$, $\gamma_0 = 0,02$ and $\gamma_* = 0,94$.

Introducing the fracture condition in the form: $\gamma = a \cdot \gamma_*$, where a is a constant, $0,5 \leq a \leq 1$, from (24) we will receive the following relation

$$\varepsilon = \frac{1}{A \gamma_*} \ln \left(\frac{a}{1-a} \left(\frac{\gamma_*}{\gamma_0} - 1 \right) \right) \quad (25)$$

In the process of cyclic loadings, in particular, in cyclic tension regime, the accumulation of plastic deformation from cycle to cycle is occurred [1]. The character of the plastic deformation accumulation is similar to those of the creep curves. So to describe such curves the Norton's power law can be used. This law, expressed through the number of cycles, can be expressed in the following form

$$\frac{d\varepsilon}{dN} = B \sigma^m \quad (26)$$

Let's assume that the stress in a cycle is constant and is equal to the amplitude of stress σ . Using the initial condition: $N = 0$, $\varepsilon = 0$, the solution of equation (26) will be found as

$$\varepsilon = B\sigma^m N$$

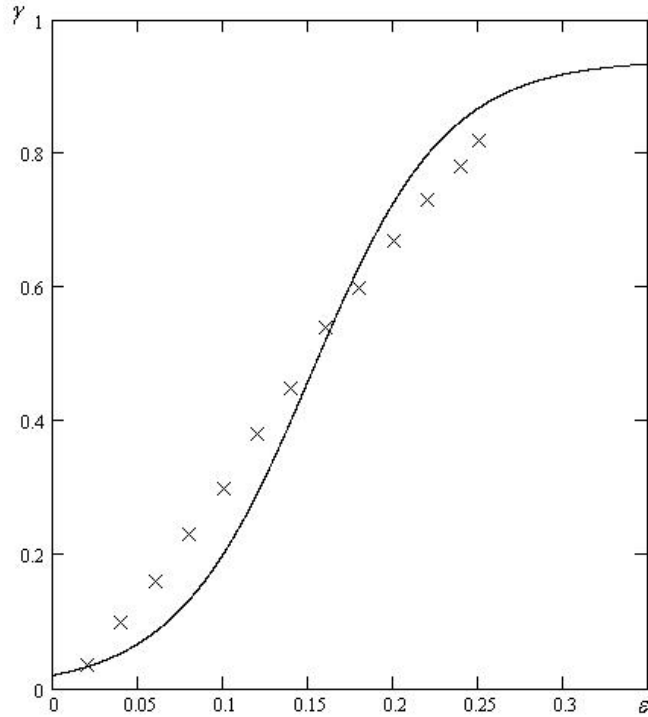


Figure 3. Solid line – the theoretical curve (24), cross points – experimental results [10].

(27)

From relations (25) and (27) follows the fatigue fracture criterion [18]

$$N = \frac{1}{AB\sigma^m \gamma_*} \ln \left(\frac{a}{1-a} \left(\frac{\gamma_*}{\gamma_0} - 1 \right) \right) \quad (28)$$

Experiments show that the latent energy decreases when stress is increased. So this relation can be expressed by the decreasing power or exponential functions of stress

$$\gamma_* = (1 + c \cdot \sigma)^{-\beta}, \quad (29)$$

$$\gamma_* = e^{-\alpha \sigma}, \quad (30)$$

where α , β , c are constants.

In view (29) and (30) the fracture criterion (28) will be written as

$$N = \frac{(1 + c\sigma)^\beta}{AB\sigma^m} \ln \left(\frac{a}{1-a} \left(\frac{(1 + c\sigma)^\beta}{\gamma_0} - 1 \right) \right), \quad (31)$$

$$N = \frac{1}{AB\sigma^m \cdot e^{-\alpha \sigma}} \ln \left(\frac{a}{a-1} \left(\frac{e^{-\alpha \sigma}}{\gamma_0} - 1 \right) \right) \quad (32)$$

The theoretical fatigue curves (31) and (32) were compared with the experimental results received in axial cyclic tensile tests on sheet specimens made of aluminium alloy 2024-T3 [19]. The mechanical properties of this alloy are more similar to the consequent properties of aluminium alloy used in the paper [10].

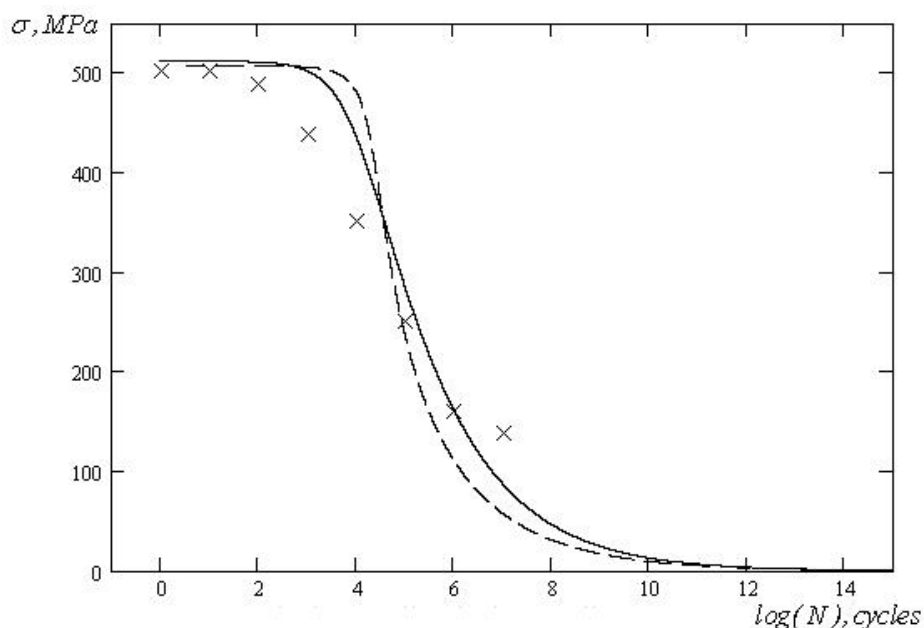


Figure 4. The theoretical fatigue curves (31) – solid line and (32) – dash line. Cross points – experimental results [19].

The theoretical fatigue curves (31) and (32) are shown in Fig. 4 by solid and dash lines, consequently. The following values of constants were accepted: $A = 26,852$, $m = 4$, $B = 3 \cdot 10^{-15} [MPa]^{-4} [cycles]^{-1}$, $a = 0,9$, $\alpha = 7,5 \cdot 10^{-3} [MPa]^{-1}$, $c = [MPa]^{-1}$, $\beta = 0,61$. The experimental results are marked by cross points. It is seen, that these curves are well describe the experimental points on the whole range of fatigue curves.

References

1. Arutyunyan R.A. The problem of deformation aging and prolonged fracture in material sciences. S.-Petersburg University Press. S.-Petersburg. 2004. 252p. (in Russian).
2. Robert A. Arutyunyan. Energy consumption for creep fracture of metallic materials // Acta Mechanica Sinica, 2008. vol. 24. N 4. P. 469-472.
3. Taylor G.I., Qunney H. The latent energy remaining in a metal after cold working // Proc. Roy. Soc. (London). 1934. Ser. A. 143. P. 307-326.
4. Bever M.B., Holt D.L., Titchener A.L. The stored energy of cold work // Progress in materials science. 1973. vol. 17. P. 5-177.
5. Hoff N.J. The necking and rupture of rods subjected to constante tensile loads // Jour. Appl. Mech, 1953. vol. 20. P. 105-108.
6. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. The energy version of the creep and creep fracture theory. Siberian branch of the USSR Academy of Science. Novosibirsk. 1986. 96p. (in Russian).
7. Katz Sh. N. Creep fracture investigations of carbon steel tubes. Teploenergetika. 1955. N 11. P. 37-40. (in Russian).
8. Robert A. Arutyunyan, Creep fracture of nonlinear viscoelastic media undergoing UV radiation // International Journal of Fracture. 2005. vol. 132. N 1. P. L3-L8.
9. G.N. Maslennikova, R.A. Mamaladse, S. Midsuta, K. Koumoto, Ceramic materials. Strojizdat Press. Moscow. 1991. 320p. (in Russian).
10. Rosakis P, Rosakis A.J., Ravichandran G., Hodowany J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. vol. 48. P. 581-607.
11. Hodowany J., Ravichandran G., Rosakis A.J., Rosakis P. Partition of plastic work into heat and stored energy in metals // Experimental Mechanics. 2000. vol. 40. N 2. P. 113-123.

12. Oliferuk W., Maj M., Raniecki B. Experimental analysis of energy storage rate components during tensile deformation of polycrystals // *Materials science and engineering A*. 2004. vol. 374. P. 77-81.
13. Plekhov O., Palin-Luc T., Naimark O., Uvarov S., Saintier N. Fatigue crack initiation and growth in 35CrMo4 steel investigated by infrared thermography // *Fatigue and fracture of engineering materials and structures*. 2005. vol. 28. Issue 1. P. 169-178.
14. Plekhov O., Saintier N., Naimark O. Experimental investigation of the processes of energy storage and dissipation in iron during the elastic plastic deformation // *Journal of technical physics*. 2007. N 9. P. 135-137. (in Russian).
15. Arutyunyan A.R., Zimin B.A., Sud'enkov Yu.V. The application of optics-spectroscopy method to investigate fatigue of construction materials // *Proceedings of International conference "Topical problems of Continuum Mechanics"*, 24-28 September 2007, Tsakhadzor, Armenia. Erevan. Institute of mechanics NAS of Armenia. 2007. P. 63-68. (in Russian).
16. Murray J.D. Some simple mathematical models in ecology // *Math. Spectrum*. 1983-1984. vol. 16. N 2, P. 48-54.
17. Orlov A.N. The long-time strength and physics of fracture // *Trudy ZKTI*. 1986. vol. 230. P. 42-46. (in Russian).
18. Alexander R. Arutyunyan. The energy approach to formulate the criterion of fatigue strength // *Proceedings of XXXVI School-conference "Advanced problems in mechanics"*. 06-10 July. 2008. St.-Petersburg. Repino. St.-Petersburg: IPME RAS. 2008. P. 67-71.
19. Forrest P.G. *Fatigue of metals*. Moscow: Mashinostroenie. 1968. 352p. (in Russian).

Information about author

Robert A. Arutyunyan

Sankt-Petersburg State University

Universitetskii pr.28, Institute of Mathematics and Mechanics Saint-Petersburg State University, Petrodvoretz, Sankt-Petersburg, Russia, 198504

Tel.: (812) 5266591, Fax: (812) 4286998, E-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИНЫ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СЛОИСТОМУ ПАКЕТУ ИЗ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Оганесян Р.Ж.

Используя асимптотический метод, для слоистых тонких тел выведены формулы для определения интегральных характеристик упругости слоистого пакета, состоящего из ортотропных или изотропных слоёв.

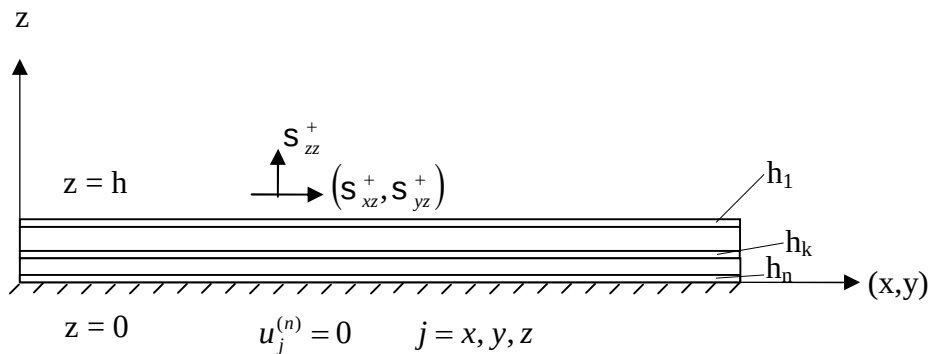
Сопоставляя выведенные асимптотическим интегрированием трехмерных уравнений теории упругости решения одних и тех же краевых задач пластины и слоистого пакета из пластин, определяются упругие характеристики пластины из условия равенства ее тангенциальных и нормального перемещений соответствующим перемещениям пакета. Рассмотрены различные комбинации расположения одинаковых слоев в пакете. Приведены примеры.

Задача, в частности, моделирует замену одной плитой слоистую кору определенного сейсмоопасного региона земного шара при теоретических выкладках.

1. Постановка задачи и общий интеграл.

Имеем слоистый пакет из ортотропных пластин, занимающий область (фиг. 1)

$$D = \{x, y, z : x \in [0, a], y \in [0, b], 0 \leq z \leq h, h = \sum_{k=1}^n h_k, h \ll l, l = \min(a, b)\}$$



Фиг. 1.

Пусть одна лицевая поверхность пакета жестко закреплена, а к противоположной лицевой поверхности приложены постоянные тангенциальные и нормальные нагрузки.

$$u_j(x, y, 0) = 0, \quad s_{jz}(x, y, h) = s_{jz}^+ \quad j = x, y, z \quad (1.1)$$

и между слоями пакета выполняются условия полного контакта

$$u_j^{(k)}(z = z_k) = u_j^{(k+1)}(z = z_k), \quad s_{jz}^{(k)}(z = z_k) = s_{jz}^{(k+1)}(z = z_k) \quad (1.2)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1 \quad j = x, y, z$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пакета из пластин.

Граничные условия на торцах $x=0; a$ и $y=0; b$ не ставятся, поскольку решается внутренняя задача. Для решения поставленной задачи, в уравнениях равновесия и соотношениях упругости ортотропного тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial s_{xz}}{\partial z} &= 0 \quad (x, y, z) \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= a_{11}s_{xx} + a_{12}s_{xy} + a_{13}s_{zz} \quad (x, y, z; 1, 2, 3) \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} &= a_{66}s_{xy} \quad (x, y, z; 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам:

$$\begin{aligned} x &= x/l, h = y/l, z = z/h = e^{-1} z/l \quad e = h/l \\ U &= u_x/l, V = u_y/l, W = u_z/l \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вследствие чего получаем систему сингулярно возмущенных уравнений для каждого слоя пакета

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{jx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{jy}^{(k)}}{\partial h} + e^{-1} \frac{\partial s_{jz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \quad j = x, y, z \\ \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x} &= a_{11} s_{xx}^{(k)} + a_{12} s_{yy}^{(k)} + a_{13} s_{zz}^{(k)} \quad (x, h; U, V; 1, 2) \\ e^{-1} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial z} &= a_{13} s_{xx}^{(k)} + a_{23} s_{yy}^{(k)} + a_{33} s_{zz}^{(k)} \\ e^{-1} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial W^{(k)}}{\partial x} &= a_{44} s_{yz}^{(k)} \quad (x, h; U, V; 4, 5) \\ \frac{\partial U^{(k)}}{\partial h} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} &= a_{66} s_{xy}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решение системы (1.5) складывается из решения внутренней задачи Γ^{int} , доминирующего всюду внутри пластины и решения задачи пограничного слоя Γ^b , действие которого ограничивается вблизи краев и быстро затухает при удалении во внутрь пластины. Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического разложения [1-3]

$$\begin{aligned} s_{ij}^{\text{int}(k)} &= e^{-1+s} s_{ij}^{(k,s)} \\ (U^{\text{int}(k)}, V^{\text{int}(k)}, W^{\text{int}(k)}) &= e^s (U^{(k,s)}, V^{(k,s)}, W^{(k,s)}) \\ s &= \overline{0, S} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставив (1.6) в (1.5) и приравняв коэффициенты e^s в левых и правых частях получим непротиворечивую систему уравнений, общее решение которой представляется рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} s_{jz}^{(k,s)} &= s_{jzo}^{(k,s)} + s_{jz*}^{(k,s)}(x, h, z) \quad j = x, y, z \\ s_{xx}^{(k,s)} &= A_{13}^{(k)} s_{zzo}^{(k,s)} + s_{xx*}^{(k,s)}(x, h, z) \quad (x, y; 1, 2) \\ s_{xy}^{(k,s)} &= s_{xy*}^{(k,s)}(x, h, z) \\ U^{(k,s)} &= U_o^{(k,s)} + z A_{55}^{(k)} s_{zzo}^{(k,s)} + U_*^{(k,s)}(x, h, z) \quad (U, V, W; x, y, z; 5, 4, 3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где обозначены

$$\begin{aligned} s_{jz*}^{(k,s)} &= - \int_0^z \left(\frac{\partial s_{jx}^{(k,s)}}{\partial x} + \frac{\partial s_{jy}^{(k,s)}}{\partial h} \right) dz \quad j = x, y, z \\ s_{xx*}^{(k,s)} &= B_{11}^{(k)} R_1^{(k,s)} + B_{12}^{(k)} R_2^{(k,s)} \quad (x, y; 1, 2) \\ s_{xy}^{(k,s)} &= B_{66}^{(k)} \left(\frac{\partial U^{(k,s-1)}}{\partial h} + \frac{\partial V^{(k,s-1)}}{\partial x} \right) \\ U_*^{(k,s)} &= \int_0^z \left(a_{55}^{(k)} - \frac{\partial W^{(k,s-1)}}{\partial x} \right) dz \quad (U, V; x, h; 5, 4) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$W_*^{(k,s)} = \int_0^z \left(a_{13}^{(k)} s_{xx}^{(k,s)} + a_{23}^{(k)} s_{yy}^{(k,s)} + a_{33}^{(k)} s_{zz}^{(k,s)} \right) dz$$

$$R_1^{(k,s)} = \frac{\partial u^{(k,s-1)}}{\partial x} - a_{13}^{(k)} s_{zz}^{(k,s)} \quad (U, V; x, h; 1, 2)$$

$$A_{13} = -\frac{a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad A_{23} = -\frac{a_{23}a_{11} - a_{13}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

$$A_{33} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}, \quad A_{44} = a_{44}, \quad A_{55} = a_{55}$$

$$B_{66} = \frac{1}{a_{66}}, \quad B_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (1, 2), \quad B_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

Общее решение, выраженное рекуррентными формулами (1.7), (1.8), содержит неопределенные функции интегрирования $s_{jzo}^{(k,s)}$ $j = x, y, z$; $U_o^{(k,s)}, V_o^{(k,s)}, W_o^{(k,s)}$ – которые однозначно определяются из граничных условий (1.1) и условий контакта слоев (1.2).

2. Решение поставленной задачи.

Удовлетворив граничным условиям (1.1) и условиям контакта слоев (1.2), считая, что $s_{jz}^+ = \text{const}$, после первого шага итерации получим замкнутое решение внутренней задачи (поскольку функции, заданные на лицевых поверхностях, тождественно постоянны).

Для слоя под номером “ k ” пакета из пластин компоненты тензора напряжений и вектора перемещения будут

$$s_{xz}^{(k)} = s_{xz}^+, \quad s_{yz}^{(k)} = s_{yz}^+, \quad s_{zz}^{(k)} = s_{zz}^+, \quad s_{xy}^{(k)} = 0$$

$$s_{xx}^{(k)} = A_{13}^{(k)} s_{zz}^+, \quad s_{yy}^{(k)} = A_{23}^{(k)} s_{zz}^+$$

$$u_x^{(k)} = (z - z_{k-1}) a_{55}^{(k)} s_{xz}^+ + \sum_{i=1}^k h_i a_{55}^{(i)} s_{xz}^+ \quad (x, y; 5, 4) \quad (2.1)$$

$$u_z^{(k)} = (z - z_{k-1}) A_{33}^{(k)} s_{zz}^+ + \sum_{i=1}^k h_i A_{33}^{(i)} s_{zz}^+, \quad z_{k-1} = \sum_{i=k}^n h_i$$

$$z_0 = h, \quad z_n = 0, \quad z_k \leq z \leq z_{k-1}$$

Для пакета из n слоев при $z = h = h_1 + h_2 + \dots + h_n$ тангенциальные и нормальное перемещения будут

$$u_x^{(I)}(z = h) = \sum_{i=1}^n h_i a_{55}^{(i)} s_{xz}^+ \quad (x, y; 5, 4) \quad (2.2)$$

$$u_z^{(I)}(z = h) = \sum_{i=1}^n h_i A_{33}^{(i)} s_{zz}^+$$

Если же пакет состоит из одного слоя толщины h , получаем

$$u_x(z = h) = h a_{55} s_{xz}^+ \quad (x, y; 5, 4) \quad (2.3)$$

$$u_z(z = h) = h A_{33} s_{zz}^+$$

Потребуем, чтобы тангенциальные и нормальное перемещения пакета при $z = h$ по (2.2), были равны соответствующим перемещениям однослойной пластины толщины h по (2.3), получим

$$a_{55}^* = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n h_k a_{55}^{(k)}, \quad a_{44}^* = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n h_k a_{44}^{(k)}, \quad A_{33}^* = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n h_k A_{33}^{(k)} \quad (2.4)$$

Таким образом, физико-механические характеристики ортотропной пластины по своим качествам эквивалентной пакету из n ортотропных пластин, определяются по формулам (2.4).

Если пакет состоит из одной пластины толщины h , упругие характеристики которой меняются по толщине

$$a_{55} = a_{55}(z), \quad a_{44} = a_{44}(z), \quad A_{33} = A_{33}(z) \quad (2.5)$$

то, обозначив

$$a_{55}^{(k)} = a_{55}(z_k), \quad a_{44}^{(k)} = a_{44}(z_k), \quad A_{33}^{(k)} = A_{33}(z_k), \quad h_k = \Delta z_k \quad (2.6)$$

в формулах (2.4) суммы превращаются в интегральные суммы, которые в пределе при $n \rightarrow \infty$, $\max \Delta z_k \rightarrow 0$ дают

$$a_{55}^* = \frac{1}{h} \int_0^h a_{55}(z) dz, \quad a_{44}^* = \frac{1}{h} \int_0^h a_{44}(z) dz \quad (2.7)$$

$$A_{33}^* = \frac{1}{h} \int_0^h A_{33}(z) dz$$

В частном случае, когда пластины изотропные

$$a_{44}^{(k)} = a_{55}^{(k)} = \frac{1}{G_k}, \quad A_{33}^{(k)} = \frac{1 - 2\nu_k}{2G_k(1 - \nu_k)} \quad (2.8)$$

Подставив (2.8) в (2.4), определяем модуль сдвига и коэффициент Пуассона эквивалентной пластины

$$G^* = \frac{h}{a}, \quad \nu^* = \frac{a - 2g}{2(a - g)} \quad (2.9)$$

$$a = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{G_k}, \quad g = \sum_{k=1}^n \frac{1 - 2\nu_k}{2G_k(1 - \nu_k)} h_k$$

А интегральные формулы (2.7) дают

$$G^* = \frac{h}{a^*}, \quad \nu^* = \frac{a^* - 2g^*}{2(a^* - g^*)} \quad (2.10)$$

$$a^* = \int_0^h \frac{dz}{G(z)}, \quad g^* = \int_0^h \frac{1 - 2\nu(z)}{2G(z)(1 - \nu(z))} dz$$

Таким образом, упругие характеристики пластины, эквивалентной слоистому пакету или пакету из неоднородных пластин, соответственно, определяются одной из формул (2.4), (2.7), (2.9), (2.10).

3. Если имеем n -слойный пакет, состоящий из двух материалов, соотношение толщин слоев $h_{i+1} = b h_i$, $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$, тогда при $n = 2k$ имеем:

$$G^* = \frac{1}{\tilde{a}}(1 + b), \quad \nu^* = \frac{\tilde{a} - 2\tilde{g}}{2(\tilde{a} - \tilde{g})} \quad (3.1)$$

$$\tilde{a} = \frac{bG_1 + G_2}{G_1G_2}, \quad \tilde{g} = \frac{1 - 2\nu_1}{G_1(1 - \nu_1)} + b \frac{1 - 2\nu_2}{G_2(1 - \nu_2)}$$

А при $n = 2k+1$:

$$G^* = \frac{1}{\tilde{a}}(1 + k(1 + b)), \quad \nu^* = \frac{\tilde{a} - 2\tilde{g}}{2(\tilde{a} - \tilde{g})} \quad (3.2)$$

$$\tilde{a} = \frac{kbG_1 + (1 + k)G_2}{G_1G_2}, \quad \tilde{g} = \frac{(1 - 2\nu_1)(k + 1)}{G_1(1 - \nu_1)} + kb \frac{1 - 2\nu_2}{G_2(1 - \nu_2)}$$

Допустим, верхний слой состоит из гранита ($G_1 = 53 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.25$), второй слой из базальта ($G_2 = 79 \text{ ГПа}, \nu_2 = 0.27$) и так поочередно 5 раз (т.е. $n = 10$), и соотношение слоев $b = 5$. Тогда будем иметь следующие интегральные значения:

$$G^* = 73 \text{ ГПа}, \quad n^* = 0.2655 \quad (3.3)$$

А если $n = 11$ и нижний слой из гранита, то будем иметь:

$$G^* = 72 \text{ ГПа}, \quad n^* = 0.2648 \quad (3.4)$$

Приведенные исследования позволяют заменить однородной пластиной при моделировании и исследовании работы слоистых или неоднородных пластин, поскольку точные значения их физико-механических характеристик определить практически невозможно. В частности, при моделировании напряженно-деформированного состояния зоны коллизии Аравийской и Евразийской тектонических плит на основе данных GPS (Система Глобального Местоположения) [5] могут быть использованы усредненные по выведенным выше формулам коэффициенты упругости, определенные методами геофизических исследований в Армянском Нагорье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб. н. тр. Механика. Ереван: Изд. ЕГУ. 1982. С.7-12.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414 с.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. "Титутюн" НАН РА, 2008. 468с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: ГИФМЛ. 1961. 384с.
5. Lenser A. Aghalovyan, Ruben S. Gevorgyan, Avetik V. Sahakyan. Mathematical Simulation of Collision of Arabian and Euroasian on the Base of GPS Data. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. № 4. С. 3-9.

Сведения об авторах:

Агаловян Ленсер Абгарович

Академик НАН РА, д.ф.-м.н.

заведующий отделом механики тонкостенных систем

Института механики НАН РА, советник директора Института

адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^б, 0019, Ереван, Армения

тел.: (+37410) 52 58 35

e-mail: aghal@mechins.am

Геворкян Рубен Степанович

Д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник

Института механики НАН РА

адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^б, 0019, Ереван, Армения

тел: (+37410) 27 08 28

e-mail: gevorgyanrs@mail.ru

Оганесян Рубен Жораевич

научный сотрудник Института механики НАН РА

адрес: пр. Маршала Баграмяна 24^б, 0019, Ереван, Армения

тел: (+37491) 33 72 84

e-mail: ruben_hovh@yahoo.com

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ БАЛОК-ПОЛОС

Агаловян М.Л.

Решен класс задач о вынужденных колебаниях полос, материал которых в плоскости полосы обладает общей анизотропией. Считается, что на одном из продольных краев задан вектор перемещения, который меняется во времени гармонически, а на противоположном краю заданы однородные смешанные условия. Найдено общее асимптотическое решение внутренней задачи. Показано, что оно полностью определяется после удовлетворения условий на продольных краях. Установлено, что колебания не являются чисто сдвиговыми и чисто продольными.

Определены амплитуды колебаний, выведены условия возникновения резонанса.

Вынужденные колебания ортотропной полосы при различных краевых условиях асимптотическим методом исследованы в [1,2]. Собственные колебания ортотропной полосы исследованы в [3]. Вынужденные колебания полосы-балки, когда на одном продольном крае задан вектор перемещения, а противоположный продольный край свободен или жестко закреплен, рассмотрены в [4].

Требуется найти решения динамических уравнений плоской задачи математической теории упругости:

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{16} \sigma_{xy}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{26} \sigma_{xy} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{16} \sigma_{xx} + a_{26} \sigma_{yy} + a_{66} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

в области $D = \{(x, y) : x \in [0; l], |y| \leq h, h \ll l\}$ занятой полосой, при граничных условиях

$$u(y = -h) = u^-(\xi) \exp(i\Omega t), \quad v(y = -h) = v^-(\xi) \exp(i\Omega t), \quad \xi = x/l \quad (3)$$

$$\sigma_{xy}(y = h) = 0, \quad v(y = h) = 0 \quad (4)$$

или

$$u(y = h) = 0, \quad \sigma_{yy}(y = h) = 0 \quad (5)$$

и условиях на торцах $x = 0, l$, которые пока будем считать произвольными.

Чтобы решить поставленную задачу, перейдем в уравнениях (1), (2) к безразмерным переменным и перемещениям $\xi = x/l$, $\zeta = y/h$, $u_1 = u/l$, $v_1 = v/l$.

Решения поставленных задач будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\xi; \zeta; t) &= \sigma_{11}(\xi; \zeta) \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{22} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{12} \exp(i\Omega t) \\ u_1(\xi, \zeta, t) &= U(\xi, \zeta) \exp(i\Omega t), \quad v_1(\xi, \zeta, t) = V(\xi, \zeta) \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив (6) в преобразованные уравнения (1), (2), получим сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{16} \sigma_{12}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} = a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{26} \sigma_{12} \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} &= a_{16} \sigma_{11} + a_{26} \sigma_{22} + a_{66} \sigma_{12}, \quad \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2
\end{aligned} \tag{7}$$

Решение этой системы I складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b) [5–8]

$$I = I^{\text{int}} + I_b \tag{8}$$

Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{jk}^{\text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)}(\xi, \zeta) \quad j, k = 1, 2 \\
U^{\text{int}}, V^{\text{int}} &= \varepsilon^s (U^{(s)}(\xi, \zeta), V^{(s)}(\xi, \zeta)) \quad s = \overline{0, N}
\end{aligned} \tag{9}$$

Подставив (9) в (7), получим систему уравнений относительно $\sigma_{jk}^{(s)}, U^{(s)}, V^{(s)}$. Из этой системы напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(s)} &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_{22}^{(s)} - \frac{a_{16}}{a_{11}} \sigma_{12}^{(s)} + \frac{1}{a_{11}} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} \\
\sigma_{12}^{(s)} &= \frac{A_{11}}{\Delta} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{16}}{\Delta} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \tilde{\sigma}_{12}^{(s)} \\
\sigma_{22}^{(s)} &= \frac{A_{66}}{\Delta} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{A_{16}}{\Delta} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \tilde{\sigma}_{22}^{(s)} \\
\tilde{\sigma}_{12}^{(s)} &= -\frac{A_{16}}{\Delta} \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{A_{11}}{\Delta} \left(\frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
\tilde{\sigma}_{22}^{(s)} &= -\frac{A_{66}}{\Delta} \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{A_{16}}{\Delta} \left(\frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
A_{11} &= \frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}, \quad A_{66} = \frac{a_{11} a_{66} - a_{16}^2}{a_{11}}, \\
A_{16} &= \frac{a_{11} a_{26} - a_{12} a_{16}}{a_{11}}, \quad \Delta = A_{11} A_{66} - A_{16}^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

а для перемещений $U^{(s)}, V^{(s)}$ получаются уравнения

$$\begin{aligned}
\left(A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 \right) U^{(s)} - A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} V^{(s)} &= f_1^{(s-1)} \\
\left(A_{66} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 \right) V^{(s)} - A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} U^{(s)} &= f_2^{(s-1)}
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$f_1^{(s-1)} = A_{11} \left(\frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) - A_{16} \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \Delta \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

$$f_2^{(s-1)} = A_{66} \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - A_{16} \left(\frac{a_{16}}{a_{11}} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) - \Delta \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} \quad (12)$$

$f_{jm} = 0$ при $m < 0$, f_{js} – известные функции.

Считаем, что $A_{16} \neq 0$. Случай $A_{16} = 0$ соответствует случаю ортотропной полосы и рассмотрен в [1,2]. Решение системы (11) будем искать в виде

$$V^{(s)} = \left(A_{11} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 \right) \Phi_s, \quad U^{(s)} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \Phi_s + \tilde{U}^{(s)}(\xi, \zeta) \quad (13)$$

где $\tilde{U}^{(s)}(\xi, \zeta)$ – частное решение уравнения

$$A_{11} \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 \tilde{U}^{(s)} = f_1^{(s-1)} \quad (14)$$

В результате первое уравнение (11) удовлетворяется тождественно, а для Φ_s получается уравнение

$$\frac{\partial^4 \Phi_s}{\partial \zeta^4} + \Omega_*^2 (A_{11} + A_{66}) \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^4 \Phi_s = \frac{1}{\Delta} \left(A_{66} \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + f_2^{(s-1)} \right) \quad (15)$$

Решением уравнения (15) является

$$\Phi_s = C_{1,s}(\xi) \sin \beta_1 \Omega_* \zeta + C_{2,s}(\xi) \cos \beta_1 \Omega_* \zeta + C_{3,s} \sin \beta_2 \Omega_* \zeta + C_{4,s}(\xi) \cos \beta_2 \Omega_* \zeta + \tilde{\Phi}_s \quad (16)$$

где $\tilde{\Phi}_s$ – является частным решением уравнения (15), а

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{11} + A_{66} - \sqrt{(A_{11} - A_{66})^2 + 4A_{16}^2}}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{11} + A_{66} + \sqrt{(A_{11} - A_{66})^2 + 4A_{16}^2}} \quad (17)$$

$$\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

Определив Φ_s по формулам (10), (13), вычисляются напряжения и перемещения, затем удовлетворяются граничные условия (3), (4); (3), (5). Удовлетворив граничным условиям (3), (4), получим

$$C_{1,s} = \frac{K_{55}}{\delta_{11}}, \quad C_{2,s} = \frac{K_{66}}{\delta_{11}}$$

$$C_{3,s} = \frac{1}{2\beta_2 (\Delta - A_{11}\beta_2^2)} \left[2K_{22} - (l_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \Omega_* + \right.$$

$$\left. + l_1 \cos(\beta_1 + \beta_2) \Omega_*) C_{1s} + (l_1 \sin(\beta_1 + \beta_2) \Omega_* + l_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) \Omega_*) C_{2,s} \right] \quad (18)$$

$$C_{4,s} = \frac{1}{2\beta_2 (\Delta - A_{11}\beta_2^2)} \left[(l_1 \sin(\beta_1 + \beta_2) \Omega_* - l_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) \Omega_*) C_{1s} - \right.$$

$$\left. - (l_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \Omega_* - l_1 \cos(\beta_1 + \beta_2) \Omega_*) C_{2,s} - 2K_{11} \right]$$

где $l_1 = (\Delta + A_{11}\beta_1\beta_2)(\beta_1 - \beta_2)$

$$l_2 = (\Delta - A_{11}\beta_1\beta_2)(\beta_1 + \beta_2)$$

$$K_{11} = (\Delta - A_{11}\beta_2^2) \sin \beta_2 \Omega_* \phi_{12}^{(s)} + \frac{\beta_2}{\Omega_*^2} \cos \beta_2 \Omega_* \bar{V}_s(\zeta = 1)$$

$$\begin{aligned}
K_{22} &= (\Delta - A_{11}\beta_2^2) \cos \beta_2 \Omega_* \varphi_{12}^{(s)} - \frac{\beta_2}{\Omega_*^2} \sin \beta_2 \Omega_* \bar{V}_s \quad (\zeta = 1) \\
K_{33} &= 2K_{11} \cos \beta_2 \Omega_* + 2K_{22} \sin \beta_2 \Omega_* + \\
&\quad + \frac{2\beta_2 (\Delta - A_{11}\beta_2^2)}{\Delta(\beta_1^2 - \beta_2^2)} \left[(\Delta - A_{11}\beta_1^2) \varphi_u^{(s)} + \beta_1^2 \Psi_v^{(s)} \right] \\
K_{44} &= \frac{1}{\Delta(\beta_1^2 - \beta_2^2)} \left[(\Delta - A_{11}\beta_2^2) \varphi_u^{(s)} + \beta_2^2 \Psi_v^{(s)} \right] \\
K_{55} &= K_{44} \left[l_1 \cos(\beta_1 + 2\beta_2) \Omega_* - l_2 \cos(\beta_1 - 2\beta_2) \Omega_* \right] + K_{33} \cos \beta_1 \Omega_* \\
K_{66} &= -K_{44} \left[l_1 \sin(\beta_1 + 2\beta_2) \Omega_* - l_2 \sin(\beta_1 - 2\beta_2) \Omega_* \right] + K_{33} \sin \beta_1 \Omega_* \\
\delta_{11} &= l_1 \sin 2(\beta_1 + \beta_2) \Omega_* - l_2 \sin 2(\beta_1 - \beta_2) \Omega_* \\
\bar{U}_s &= A_{16} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_s}{\partial \zeta^2} + \tilde{U}^{(s)}(\xi, \zeta) \\
\bar{V}_s &= A_{11} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_s}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 \tilde{\Phi}_s \\
\bar{\sigma}_{12,s} &= \frac{A_{11}}{\Delta} \frac{\partial \tilde{U}^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \tilde{\Phi}_s}{\partial \zeta} A_{16} \Omega_*^2 + \tilde{\sigma}_{12}^{(s)} \\
\bar{\sigma}_{22,s} &= \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_s}{\partial \zeta^3} - \frac{A_{16}}{\Delta} \frac{\partial \tilde{U}^{(s)}}{\partial \zeta} + \tilde{\sigma}_{22}^{(s)} + A_{66} \Omega_*^2 \frac{\partial \tilde{\Phi}_s}{\partial \zeta} \\
\varphi_{12}^{(s)} &= \frac{1}{A_{16} \Omega_*^3} \bar{\sigma}_{12,s} \quad (\zeta = 1) \\
\varphi_u^{(s)} &= \frac{1}{A_{16} \Omega_*^2} \left[u_s^- - \bar{U}_s(\xi, -1) \right], \quad \Psi_v^{(s)} = \frac{1}{\Omega_*^2} \left[v_s^- - \bar{V}_s(\xi, -1) \right] \\
u_0^- &= u^- / l, \quad v_0^- = v^- / l, \quad u_s^- = v_0^- = 0 \quad s \neq 0
\end{aligned}
\tag{19}$$

Решение будет конечным, если $\delta_{11} \neq 0$. Те значения Ω , при которых $\delta_{11} = 0$, совпадают с частотами собственных (свободных) колебаний. При таких значениях Ω будет возникать резонанс. Граничным условиям (3), (5) соответствует решение

$$\begin{aligned}
C_{1,s} &= \frac{M_{55}}{\delta_{22}}, \quad C_{2,s} = \frac{M_{66}}{\delta_{22}}, \\
C_{3,s} &= \frac{1}{2\beta_2^2 (A_{66} - \beta_2^2)} \left[2M_{22} - (h_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \Omega_* - h_1 \cos(\beta_1 + \beta_2) \Omega_*) C_{1,s} - \right. \\
&\quad \left. - (h_1 \sin(\beta_1 + \beta_2) \Omega_* - h_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) \Omega_*) C_{2,s} \right] \\
C_{4,s} &= \frac{1}{2\beta_2^2 (A_{66} - \beta_2^2)} \left[2M_{11} - (h_1 \sin(\beta_1 + \beta_2) \Omega_* + h_2 \sin(\beta_1 - \beta_2) \Omega_*) C_{1,s} - \right. \\
&\quad \left. - (h_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \Omega_* + h_1 \cos(\beta_1 + \beta_2) \Omega_*) C_{2,s} \right]
\end{aligned}
\tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
h_1 &= \beta_1 (\beta_1 - \beta_2) (A_{66} + \beta_1 \beta_2) \\
h_2 &= \beta_1 (\beta_1 + \beta_2) (A_{66} - \beta_1 \beta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{A_{66} - \beta_2^2}{A_{16}\Omega_*^2} \bar{U}_s(\xi, 1) \cos \beta_2 \Omega_* - \beta_2 \psi_{22}^{(s)} \sin \beta_2 \Omega_* \\
M_{22} &= \frac{A_{66} - \beta_2^2}{A_{16}\Omega_*^2} \bar{U}_s(\xi, 1) \sin \beta_2 \Omega_* + \beta_2 \psi_{22}^{(s)} \cos \beta_2 \Omega_* \\
M_{33} &= 2M_{22} \sin \beta_2 \Omega_* - 2M_{11} \cos \beta_2 \Omega_* + \\
&\quad + \frac{2\beta_2^2 (A_{66} - \beta_2^2)}{\Delta(\beta_1^2 - \beta_2^2)} \left((\Delta - A_{11}\beta_1^2) \varphi_u^{(s)} + \beta_1^2 \psi_v^{(s)} \right) \\
M_{44} &= \frac{1}{\Delta(\beta_1^2 - \beta_2^2)} \left[(\Delta - A_{11}\beta_2^2) \varphi_u^{(s)} + \beta_2^2 \psi_v^{(s)} \right] \\
M_{55} &= M_{44} (h_1 \cos(2\beta_2 + \beta_1) \Omega_* + h_2 \cos(\beta_1 - 2\beta_2) \Omega_*) - M_{33} \cos \beta_1 \Omega_* \\
M_{66} &= -M_{33} \sin \beta_1 \Omega_* - M_{44} (h_2 \sin(\beta_1 - 2\beta_2) \Omega_* + h_1 \sin(\beta_1 + 2\beta_2) \Omega_*) \\
\delta_{22} &= h_1 \sin 2(\beta_1 + \beta_2) \Omega_* + h_2 \sin 2(\beta_1 - \beta_2) \Omega_* \\
\psi_{22}^{(s)} &= -\frac{1}{\Omega_*^3} \bar{\sigma}_{22,s}(\xi, 1)
\end{aligned} \tag{21}$$

Решение будет конечным, если $\delta_{22} \neq 0$. Те значения Ω , при которых $\delta_{22} = 0$, совпадают с частотами собственных колебаний. При таких значениях Ω будет возникать резонанс.

Если функции u^- , v^- являются полиномами, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение для анизотропной полосы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. О вынужденных колебаниях ортотропной полосы. //В сб.: „Механика”, Материалы Респ. конф. молодых ученых. Ереван. 1999. С.3-7.
2. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях. // Докл. НАН РА. 1999. Т.99. №4. С.315-321.
3. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. //Докл. НАН РА. 2003. Т.103. №4. С.296-301.
4. Агаловян М.Л. К решению задач о вынужденных колебаниях полос при общей анизотропии. //В сб.: „Механика”, Материалы XII респ. конф. молодых ученых. Агавнадзор. 2001.С.3-9.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464с.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
7. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
8. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Сведения об авторе

Агаловян Мгер Ленсерович

кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики НАН РА

Адрес: 0019 Ереван, пр.Баграмяна 24Б

Тел.: (+37410) 52-48-90, E-mail: mheraghalovyan@rambler.ru

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ВЫХОДЯЩИМ НА ТРЕЩИНУ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

Рассмотрено плоское деформированное состояние однородной упругой плоскости, ослабленной полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на середину трещины конечной длины, препятствующим ее продвижению.

Выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений относительно производных функций разностей смещений точек берегов конечной трещины. Решение задачи построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей.

1. Пусть упругая плоскость, отнесенная к полярной системе координат $O r \varphi$, на линии $\varphi = 0, 5\pi$ ослаблена полубесконечным разрезом ($0 \leq r < \infty$), а на отрезках ($0 \leq r < a$) линий $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ – конечной трещиной длины $2a$, и деформируется под воздействием одинаковых нагрузок $P(r)$, действующих на симметрично расположенных участках берегов полубесконечного разреза. Учитывая симметричность задачи относительно оси Oy , математически ее можно представить в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_{\varphi}^{+}\left(\frac{\pi}{2}, r\right) = -P(r), \quad \tau_{r\varphi}^{+}\left(\frac{\pi}{2}, r\right) = 0 \\ U_{\varphi}^{-}\left(-\frac{\pi}{2}, r\right) = 0, \quad \tau_{r\varphi}^{-}\left(-\frac{\pi}{2}, r\right) = 0 \\ \sigma_{\varphi}^{+}(0, r) - \sigma_{\varphi}^{-}(0, r) = 0, \quad \tau_{r\varphi}^{+}(0, r) - \tau_{r\varphi}^{-}(0, r) = 0 \end{cases} \quad (0 < r < \infty) \quad (1.1a)$$

$$\begin{cases} U_{\varphi}^{+}(0, r) = U_{\varphi}^{-}(0, r) \\ U_r^{+}(0, r) = U_r^{-}(0, r) \end{cases} \quad (a < r < \infty) \quad (1.1b)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\varphi}^{+}(0, r) + \sigma_{\varphi}^{-}(0, r) = 0 \\ \tau_{r\varphi}^{+}(0, r) + \tau_{r\varphi}^{-}(0, r) = 0 \end{cases} \quad (0 < r < a) \quad (1.1в)$$

Здесь $U_{\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$ и $U_r^{\pm}(\varphi, r)$ – угловые и радиальные компоненты смещений точек верхней и нижней четверть-плоскостей, удовлетворяющие в областях определения уравнениям Ламэ, а $\sigma_{\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$ и $\tau_{r\varphi}^{\pm}(\varphi, r)$ – компоненты напряжений, действующие в этих четверть-плоскостях.

Для получения определяющих уравнений поставленной задачи введем в рассмотрение разность смещений точек берегов конечной трещины:

$$\begin{cases} U_j^{+}(0, r) - U_j^{-}(0, r) = U(r) \\ U_r^{+}(0, r) - U_r^{-}(0, r) = V(r) \end{cases} \quad (0 < r < a) \quad (1.2)$$

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу, состоящую из условий (1.1a), (1.1б) и (1.2). С этой целью решение уравнений Ламэ в полярной системе координат для обеих четверть-плоскостей представим в виде интегралов Меллина [1]:

$$U_r^\pm(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ -\alpha_1^* \left[A_1^\pm \sin(p+1)\varphi + A_2^\pm \cos(p+1)\varphi \right] + \right. \\ \left. + A_3^\pm \sin(p-1)\varphi + A_4^\pm \cos(p-1)\varphi \right\} r^{-p} dp \quad (1.3)$$

$$U_\varphi^\pm(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ \beta_1^* \left[A_1^\pm \cos(p+1)\varphi - A_2^\pm \sin(p+1)\varphi \right] - \right. \\ \left. - A_3^\pm \cos(p-1)\varphi + A_4^\pm \sin(p-1)\varphi \right\} r^{-p} dp$$

Здесь

$$\alpha_1^* = \frac{1}{4\pi p} [(\lambda + \mu)(p+1) + 2\mu]; \quad \beta_1^* = \frac{1}{4\pi p} [(\lambda + \mu)(p-1) - 2\mu],$$

l и m – коэффициенты Ламэ, а $A_j^\pm (j = \overline{1, 4})$ – постоянные, подлежащие определению.

При этом напряжения даются формулами:

$$\sigma_\varphi^\pm(\varphi, r) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ -\frac{(\lambda + \mu)(p-1)}{4\mu} \left[A_1^\pm \sin(p+1)\varphi + A_2^\pm \cos(p+1)\varphi \right] + \right. \\ \left. + p \left[A_3^\pm \sin(p-1)\varphi + A_4^\pm \cos(p-1)\varphi \right] \right\} r^{-1-p} dp \quad (1.4)$$

$$\tau_{r\varphi}^\pm(\varphi, r) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ -\frac{(\lambda + \mu)(p+1)}{4\mu} \left[A_1^\pm \cos(p+1)\varphi - A_2^\pm \sin(p+1)\varphi \right] + \right. \\ \left. + p \left[A_3^\pm \cos(p-1)\varphi - A_4^\pm \sin(p-1)\varphi \right] \right\} r^{-1-p} dp$$

Используя представления (1.3) и (1.4), удовлетворим условиям (1.1а), (1.1б), (1.2) и выразим неизвестные коэффициенты $A_j^\pm (j = \overline{1, 4})$ через трансформанты Меллина скачков напряжений $\bar{S}(p)$ и $\bar{t}(p)$. Получим

$$A_1^-(p) = -\frac{\cos \frac{p}{2}}{(l+m)\cos p} \bar{P}(p) - \frac{mp\bar{U}(p)}{(l+m)} \frac{1-\cos p}{\cos p} + \\ + \frac{mp\bar{U}(p)}{(l+m)} [(p-1)\operatorname{tg} p + p \operatorname{ctg}(p/2)]; \\ A_2^-(p) = A_1^-(p) \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}; \quad A_4^-(p) = A_3^-(p) \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}; \\ A_3^-(p) = -\frac{(\lambda + \mu)(p+1)}{4\mu p} A_1^-(p) + \frac{(\lambda + \mu)(p+1)}{2(\lambda + 2\mu)} \bar{U}(p) + \frac{(\lambda + \mu)p}{2(\lambda + 2\mu)} \operatorname{ctg} \frac{\pi p}{2} \bar{V}(p) \\ A_1^+(p) = A_1^-(p) - \frac{2\mu p \bar{U}(p)}{\lambda + 2\mu}; \quad A_3^+(p) = A_3^-(p) - \frac{(\lambda + \mu)(p+1)}{\lambda + 2\mu} \bar{U}(p); \\ A_2^+(p) = A_2^-(p) - \frac{2\mu p \bar{V}(p)}{\lambda + 2\mu}; \quad A_4^+(p) = A_4^-(p) + \frac{(\lambda + \mu)(p-1)}{\lambda + 2\mu} \bar{V}(p) \quad (1.5)$$

$$\text{где } \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(r_0) r_0^p dr_0$$

Далее, чтобы удовлетворить условиям (1.1в), вычислим компоненты напряжений $\sigma_{\varphi}^{+}(0, r)$ и $\tau_{r\varphi}^{+}(0, r)$ при помощи производных функций $U(r)$ и $V(r)$. После некоторых несложных преобразований, а также учитывая значения интегралов приведенных в [2], получим

$$\sigma_{\varphi}^{+}(0, r) = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^a K_{11}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_{12}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 \right\} + f_1(r) \quad (1.6)$$

$$\tau_{r\varphi}^{+}(0, r) = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^a K_{21}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_{22}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 \right\} + f_2(r) \quad (1.7)$$

Здесь введены обозначения

$$K_{11}(r, r_0) = \frac{2r_0}{r_0^2 - r^2} - \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \left(\frac{2rr_0}{r_0^2 - r^2} - \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 - r} \right); \quad K_{12}(r, r_0) = \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 + r} \right) + \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 + r} \right\};$$

$$K_{21}(r, r_0) = -\frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 + r} \right) - \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 + r} \right\}; \quad K_{22}(r, r_0) = \frac{\sqrt{rr_0}}{r(r_0 - r)} + \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \left(\frac{2r_0^2}{r_0^2 - r^2} - \frac{\sqrt{rr_0}}{r_0 - r} \right);$$

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi i r} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin(\pi p / 2)}{\cos \pi p} p \bar{P}(p) r^{-p} dp;$$

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi i r} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\cos(\pi p / 2)}{\cos \pi p} (p+1) \bar{P}(p) r^{-p} dp \quad (-1 < \operatorname{Re} c < 0).$$

Учитывая, что $\sigma_{\varphi}^{+}(0, r) = \sigma_{\varphi}^{-}(0, r)$ и $\tau_{r\varphi}^{+}(0, r) = \tau_{r\varphi}^{-}(0, r)$, удовлетворим условиям (1.1в). В итоге, для определения функций $U'(r)$ и $V'(r)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a k_{i1}(r, r_0) U'(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^a k_{i2}(r, r_0) V'(r_0) dr_0 = F_i(r) \quad (1.8)$$

$$(i=1, 2; \quad 0 < r < a)$$

$$F_1(r) = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} f_1(r); \quad F_2(r) = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} f_2(r).$$

которую нужно рассматривать при условиях

$$U(a) = V(a) = 0; \quad U(0) = u_0 < \infty; \quad V(0) = v_0 < \infty, \quad (1.9)$$

где u_0, v_0 – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

2. Приступим к решению системы интегральных уравнений (1.9). Заметим, что в точке $r = a$ искомые функции имеют обычную корневую особенность. Для того, чтобы определить порядок особенности искомых функций в точке $r = 0$, вблизи этой точки представим функции в следующем виде:

$$U'(r) = c_0 r^{\beta-1}; \quad V'(r) = c_1 r^{\beta-1} \quad (0 < \operatorname{Re} \beta < 1) \quad (2.1)$$

Подставляя эти выражения в (1.8) и используя результаты работы [2], по обычной процедуре для определения постоянных c_0 и c_1 получим систему однородных алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиальных решений этой системы для определения показателя β придем к следующему трансцендентному уравнению:

$$\sin(\pi\beta/2) = \pm\beta \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) полностью совпадает с трансцендентным уравнением для определения особенности напряжений в вершине клина при граничных условиях I - I, когда угол раствора клина равен $\pi/2$ и не имеет корней, удовлетворяющих условию $0 < \operatorname{Re}\beta < 1$ [3]. Следовательно, функции $U'(r)$ и $V'(r)$ в точке $r = 0$ ограничены. Для построения решения системы (1.8) методом дискретных особенностей [4] сформулируем ее на интервале $(-1, 1)$, вводя следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{2r}{a} - 1; \quad s = \frac{2r_0}{a} - 1; \quad \varphi_1(x) = U'\left(\frac{x+1}{2}a\right); \quad \varphi_2(x) = V'\left(\frac{x+1}{2}a\right)$$

$$K_{ij}^*(x, s) = K_{ij}\left(\frac{x+1}{2}a, \frac{s+1}{2}a\right), \quad F_j^*(x) = F_j\left(\frac{x+1}{2}a\right).$$

Здесь

$$K_{11}^*(x, s) = \frac{d}{dx}(x+1) \frac{d}{dx} \frac{(\sqrt{(s+1)} - \sqrt{(x+1)})\sqrt{(x+1)(s+1)}}{(x+s+2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1})} + \frac{1}{s+x+2};$$

$$K_{12}^*(x, s) = \frac{d}{dx} \left\{ (x+1) \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2} \right) + \frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2} \right\};$$

$$K_{21}^*(x, s) = -\frac{d}{dx} \left\{ (x+1) \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2} \right) - \frac{\sqrt{(x+1)(s+1)}}{s+x+2} \right\};$$

$$K_{22}^*(x, s) = \frac{d}{dx}(x+1) \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{s+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{s+1})} + \frac{s+1}{s+x+2} \right) + \frac{1}{(\sqrt{(s+1)} + \sqrt{(x+1)})\sqrt{(x+1)}}.$$

В итоге система уравнений (1.8) запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} \delta_{ij} + K_{ij}^*(x, s) \right] \varphi_i(s) ds = \pi F_j^*(x) \quad (-1 < x < 1; j = 1, 2) \quad (2.3)$$

Приведем также выражения правых частей в случае, когда на берега трещины, на расстоянии r_* от вершины трещины, действуют сосредоточенные силы величины P_0 .

$$F_1^*(x) = -\frac{4(1-\nu)P_0^*}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\sqrt{b(x+1)}(2b-x-1)}{4b^2 + (x+1)^2} \right\}; \quad \left(P_0^* = \frac{P_0}{a\mu}; \quad b = r_*/a \right);$$

$$F_2^*(x) = \frac{4(1-\nu)P_0^*(x+1)}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\sqrt{b}(2b+x+1)}{\sqrt{x+1}(4b^2 + (x+1)^2)} \right\}.$$

Используя условия (1.9), для определения приведенной разности смещений берегов трещины при помощи функции $j_j(x)$ ($j = 1, 2$) можем записать формулы

$$U^*(x) = -\int_x^1 \varphi_1(x) dx, \quad V^*(x) = -\int_x^1 \varphi_2(x) dx \quad (2.4)$$

При этом, последние два соотношения (1.9) примут следующий вид:

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = u_0^*; \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(x) dx = v_0^*; \quad (2.5)$$

$$U^*(x) = 2U(a(x+1)/2)/a; \quad V^*(x) = 2V(a(x+1)/2)/a;$$

$$u_0^* = 2u_0/a; \quad v_0^* = 2v_0/a.$$

Запишем также формулу для определения безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, действующих на линии $j = 0$:

$$K_I^*(1) + iK_{II}^*(1) = \frac{K_I(1) - iK_{II}(1)}{\mu\sqrt{a}} = \sqrt{\pi} \lim_{x \rightarrow 1+0} \sqrt{x-1} (\sigma_\varphi^*(x) - i\tau_{r\varphi}^*(x)) \quad (2.6)$$

Здесь

$$\sigma_\varphi^*(x) = \frac{\sigma_\varphi(a(x+1)/2)}{\mu} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} \delta_{i1} + K_{i1}^*(x, s) \right] \varphi_i(s) ds - F_1^*(x) \right\}; \quad (2.7)$$

$$\tau_{r\varphi}^*(x) = \frac{\tau_{r\varphi}(a(x+1)/2)}{\mu} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-x} \delta_{i2} + K_{i2}^*(x, s) \right] \varphi_i(s) ds - F_2^*(x) \right\} \quad (2.8)$$

Представим искомые функции $j_1(x)$ и $j_2(x)$ в виде

$$\varphi_j(x) = \frac{\varphi_j^*(x)}{\sqrt{1-x}} \quad (i=1, 2), \quad (2.9)$$

где $\varphi_i^*(x)$ ($i=1, 2$) – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $(-1, 1)$.

Используя формулы (2.7) и (2.8) из (2.6) для безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений, получим:

$$K_I^*(1) - iK_{II}^*(1) = -\frac{\varphi_1^*(1) - i\varphi_2^*(1)}{2(1-\nu)} \quad (2.10)$$

Далее, методом дискретных особенностей [4] проведён численный анализ поставленной задачи и изучены закономерности изменения раскрытия трещины и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в зависимости от приведенного расстояния b сосредоточенной нагрузки P_0^* от начала координат. Результаты вычислительных работ приведены в виде таблицы и рисунков. В табл. 1 приведены значения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке трещины в случае, когда $P_0^* = 0, 1$ и $\nu = 0, 3$.

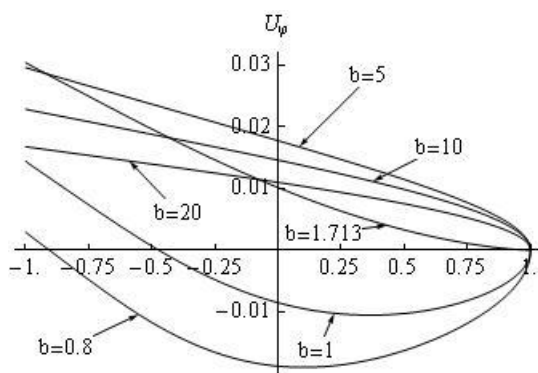


Рис.1

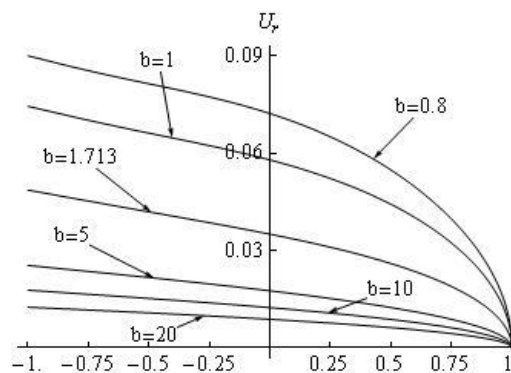


Рис.2

Таблица 1

b	0.8	1.	1.713	2.	3.	5.	8.	12.	20.
$10^2 K_I^*(1)$	-0.85	-0.627	0	0.151	0.417	0.525	0.503	0.448	0.37
$10^2 K_{II}^*(1)$	-2.888	-2.377	-1.395	-1.206	-0.868	-0.632	-0.496	-0.407	-0.317

Как видно из табл.1, при приближении нагрузки к началу координат, т.е. к свободному концу конечной трещины, КИН в концевой точке $r = a$ уменьшается и меняет знак. При удалении же нагрузки КИН возрастает до определенного значения $b = 5,55$, а затем уменьшается, стремясь к нулю. На рис. 1 и 2, соответственно, приведены графики нормальных и радиальных составляющих раскрытия трещины. Из них явствует, что когда $b < 1,713$, нормальная составляющая раскрытия отрицательна в некоторой области вблизи точки $r = a$. Это обстоятельство позволяет утверждать, что для таких значений параметра b вблизи точки $r = a$ берега трещины соприкасаются и, следовательно, постановку задачи нужно поменять.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311с.
4. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью.// Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3, С.12-19.

Сведения об авторах

Акопян Ваграм Наслетникович

Доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН РА

Адрес: 0019 Ереван, пр.Баграмяна 24Б

Тел: (+37410)52-48-90; E-mail: vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна

Кандидат физ.-мат. наук, ученый секретарь Института механики НАН РА

Тел: (+37410)56-81-89; E-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Акопян Лусине Ваграмовна

Младший научный сотрудник Института механики НАН РА

О ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ И ВКЛЮЧЕНИЕМ

Акопян Л.В., Амирджанян А.А.

Рассмотрено плоское деформированное состояние однородной упругой плоскости, усиленной конечным, абсолютно жестким включением и ослабленной двумя конечными, перпендикулярными к включению и симметрично расположенными относительно срединной точки включения разрезами.

Выведена ключевая система сингулярных интегральных уравнений относительно производных функций разностей смещений точек берегов трещин и касательных напряжений, действующих на краях включения. Решение задачи построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей.

1. Пусть упругая плоскость, отнесенная к декартовой системе координат Oxy , на интервале $(-a, a)$ оси Oy усилена абсолютно жестким включением, а на интервалах $(-b, -c)$ и (c, b) оси Ox ослаблена разрезами и деформируется под воздействием одинаковых нормальных нагрузок, действующих на берегах трещин.

Ставится задача: определить контактные напряжения под включением, раскрытия трещин и выявить закономерности изменения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещин в зависимости от геометрических и механических параметров.

Используя симметричность поставленной задачи относительно обеих координатных осей, математически ее можно сформулировать как граничную задачу для квадранта. В полярной системе координат $O\rho\varphi$, центр которой совпадает с начальной точкой декартовой системы координат, она будет даваться следующими условиями:

$$\begin{cases} \tau_{r\varphi}(r, 0) = 0, & (0 < r < \infty); \\ U_{\varphi}(r, 0) = 0, & (r \notin (c, b)); \\ \sigma_{\varphi}(r, 0) = -P_0(r), & (c < r < b); \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} U_{\varphi}(r, \pi/2) = 0, & (0 < r < \infty); \\ \tau_{r\varphi}(r, \pi/2) = 0, & (a < r < \infty); \\ U_r(r, \pi/2) = 0, & (0 < r < a). \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $U_{\varphi}(r, \varphi)$ и $U_r(r, \varphi)$ – угловые и радиальные компоненты смещений точек четверть-плоскостей, удовлетворяющие уравнениям Ламэ и связанные с компонентами напряжений, действующих в этой четверть-плоскости $\sigma_{\varphi}(r, \varphi)$ и $\tau_{r\varphi}(r, \varphi)$ по известным соотношениям [1].

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{cases} U_{\varphi}(r, 0) = U(r), & (c < r < b); \\ \tau_{r\varphi}(r, 0) = \tau(r), & (0 < r < a). \end{cases} \quad (1.3)$$

Сначала методом интегрального преобразования Меллина [2] решим вспомогательную граничную задачу, состоящую из первых двух условий (1.1), (1.2) и условий (1.3), и определим нормальную компоненту напряжений, действующих на линии $\varphi = 0$, а также радиальную компоненту смещений на линии $\varphi = \pi/2$ при помощи неизвестных функции $U(r)$ и $t(r)$.

Получим

$$\sigma_{\varphi}(r, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^a K_{11}(r, y) y \tau(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_c^b K_{12}(r, x) x U'(x) dx \quad (1.4)$$

$$U'_r(r, \pi/2) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a K_{21}(r, y) y \tau(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_c^b K_{22}(r, x) x U'(x) dx \quad (1.5)$$

Здесь

$$K_{11}(r, y) = \frac{2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{y^2 - r^2}{(y^2 + r^2)^2} + \frac{2}{y^2 + r^2}; \quad K_{22}(r, y) = \frac{2(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{x^2 - r^2}{(x^2 + r^2)^2} - \frac{2}{x^2 + r^2};$$

$$K_{21}(r, y) = \frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{y^2 - r^2}; \quad K_{12}(r, x) = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{x^2 - r^2};$$

а λ и μ – коэффициенты Ламэ.

Далее, используя соотношения (1.4) и (1.5), удовлетворим последним условиям (1.4) и (1.5). В итоге для определения неизвестных функций $U'(r)$ и $t(r)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с обобщенным ядром Коши:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^a K_{11}(r, y) y \tau(y) dy + \frac{1}{\pi} \int_c^b K_{12}(r, x) x U'(x) dx = -P_0(r) & (c < r < b) \\ \frac{1}{\pi} \int_0^a K_{21}(r, y) y \tau(y) dy - \frac{1}{\pi} \int_c^b K_{22}(r, x) x U'(x) dx = 0 & (0 < r < a) \end{cases} \quad (1.6)$$

При этом, функция $U'(x)$ должна удовлетворять условию

$$\int_c^b U'(x) dx = 0. \quad (1.7)$$

Чтобы построить решения системы (1.6) при условиях (1.7) методом дискретных особенностей заметим, что в случае $c > 0$, который рассмотрим далее, функция $U'(x)$ в концевых точках интервала (c, b) и функция $t(y)$ в точке $r = a$ имеют обычную корневую особенность, а в точке $r = 0$ функция $t(y)$ равна нулю. В случае же $c = 0$, когда концевые точки трещин выходят на жесткое включение, искомые функции в точке $r = 0$ имеют особенность типа $r^{\beta-1}$, где β первое из решений трансцендентного уравнения

$$\sin^2 \frac{\beta\pi}{2} = \frac{(1+H)^2}{4H} - \frac{\beta^2}{H}$$

действительная часть которого меньше единицы [3].

Здесь $H = 3 - 4\nu$ – известная постоянная Мусхелишвили, а ν – коэффициент Пуассона.

Введем безразмерные функции и сформулируем систему (1.6) на интервале $(-1, 1)$. Для этого, перейдем к новым переменным по формулам

$$y = a\sqrt{\frac{\xi+1}{2}}; \quad x = a\sqrt{\frac{p\xi+q}{2}}; \quad r = a\sqrt{\frac{p\xi+q}{2}}$$

в первом уравнении (1.6) и

$$y = a\sqrt{\frac{\xi+1}{2}}; \quad x = a\sqrt{\frac{p\xi+q}{2}}; \quad r = a\sqrt{\frac{\xi+1}{2}}$$

во втором уравнении (1.6). Тогда, обозначив

$$\varphi_1(\xi) = \tau \left(a \sqrt{\frac{\xi+1}{2}} \right) / \mu, \quad \varphi_2(\xi) = U' \left(a \sqrt{\frac{p\xi+q}{2}} \right);$$

$$P_0(\eta) = P_0 \left(a \sqrt{\frac{p\eta+q}{2}} \right) / \mu, \quad p = \frac{b^2 - c^2}{a^2}; \quad q = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

систему (1.6) запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 R_{12}(\eta, \xi) \varphi_2(\xi) d\xi = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\xi)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 R_{21}(\eta, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi = -(1-\nu) P_0^*(\eta) \end{cases} \quad (-1 < \eta < 1) \quad (1.8)$$

где

$$R_{12}(\eta, \xi) = -\frac{2p}{H} \left[\frac{p\xi - \eta - 1 + q}{(p\xi + \eta + 1 + q)^2} - \frac{2(1-\nu)}{p\xi + \eta + 1 + q} \right];$$

$$R_{21}(\eta, \xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{\xi - p\eta + 1 - q}{(\xi + p\eta + 1 + q)^2} + \frac{2(1-\nu)}{\xi + p\eta + 1 + q} \right].$$

Условие (1.7) примет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\xi) d\xi}{\sqrt{p\xi+q}} = 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.8) при условии (1.9). После нахождения функций $\varphi_i(x)$ ($i=1, 2$) нетрудно найти приведенное раскрытие трещины и безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины по формулам

$$U^*(x) = \frac{\sqrt{2}p}{4} \int_{-1}^x \frac{\varphi_2(\xi) d\xi}{\sqrt{p\xi+q}}; \quad U^*(\xi) = U \left(a \sqrt{\frac{p\xi+q}{2}} \right) / a; \quad (1.10)$$

$$K_I^*(b) = \frac{K_I^*(b)}{\mu\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ap}{b}} K_I(1); \quad K_I^*(c) = \frac{K_I^*(b)}{\mu\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ap}{b}} K_I(-1) \quad (1.11)$$

$$\left(K_I(\pm 1) = \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm(1+0)} \sqrt{\pm(x \mp 1)} \sigma_\varphi^*(x) \right)$$

Здесь

$$\sigma_\varphi^*(x) = \sigma_\varphi \left(a \sqrt{\frac{p\xi+q}{2}} \right) / \mu$$

приведенные нормальные напряжения, которые при помощи функции $\varphi_i(x)$ ($i=1, 2$) даются формулой:

$$s_j^*(x) = \frac{1}{p(1-u)} \int_{-1}^1 \frac{j_2(x)}{x-h} dx + \frac{1}{p(1-u)} \int_{-1}^1 R_{21}(h, x) j_1(x) dx. \quad (1.12)$$

2. Приступим к решению системы интегральных уравнений (1.8). С этой целью, используя вышесказанное о поведении функций $U'(x)$ и $t(y)$, представим искомые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в виде

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \varphi_1^*(x); \quad \varphi_2(x) = \frac{\varphi_2^*(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (2.1)$$

где $\varphi_i^*(x)$ ($i=1,2$) – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $(-1,1)$. Тогда, используя (1.12), по формуле (1.11) найдем

$$K_1^*(b) = \frac{\sqrt{\pi p a / b}}{2(1-\nu)} \varphi_2^*(1); \quad K_1^*(c) = -\frac{\sqrt{\pi p a / b}}{2(1-\nu)} \varphi_2^*(-1). \quad (2.2)$$

Далее, используя метод дискретных особенностей [4], проведен численный расчет поставленной задачи в случае, когда

$$\frac{b-c}{a} = p_0 = 0.6; \quad \nu = 0.3; \quad P_0^*(\eta) = 0.6 \cos \left(\frac{\pi a}{b-c} \left(\sqrt{\frac{p\eta+q}{2}} - \frac{b+c}{2a} \right) \right),$$

т.е. когда длина трещины и включения постоянны.

Изучены закономерности изменения раскрытия трещины контактных напряжений, действующих под включением, и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в зависимости от расстояния трещины от включения. Результаты расчетов приведены в виде табл. 1 и рис. 1-2.

Таблица 1

c/a	0.1	0.15	0.25	0.4	0.8	1.	2.
$K_I[1]$	0.245	0.252	0.261	0.269	0.275	0.276	0.276
$K_I[-1]$	0.197	0.219	0.244	0.261	0.274	0.276	0.276

Из табл. 1 видно, что когда трещина отходит от включения в обоих концах трещины, коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений возрастают, стремясь к определенной величине. При приближении же к включению коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в точке c уменьшается гораздо быстрее, чем коэффициент интенсивности напряжений в точке b .

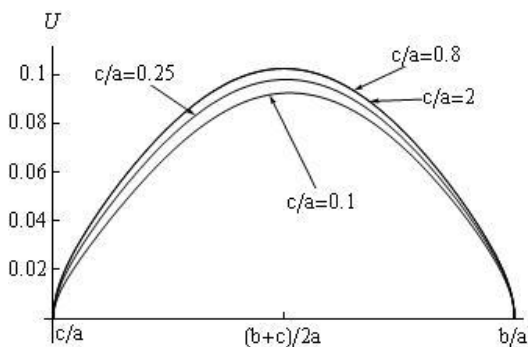


Рис.1

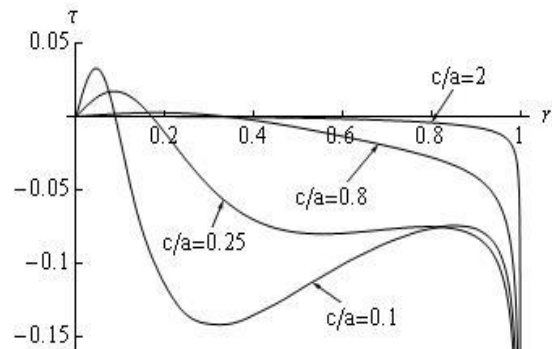


Рис.2

На рис. 1 приведены графики безразмерной функции раскрытия трещины. Из них явствует, что при приближении трещины к включению раскрытие трещины уменьшается. Из вышеупомянутых двух закономерностей можно заключить, что жесткое включение уменьшает

поле напряжений вокруг трещины, тем самым препятствуя ее распространению. На рис. 2 приведены графики безразмерной функции контактных напряжений, действующих под включением. Как и следовало ожидать, при приближении трещины к включению контактные напряжения возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311с.
4. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью.//Изв. НАН Армении. Механика. 2000, Т.53. №3. С.12-19.

Сведения об авторах

Акопян Лусине Ваграмовна

Младший научный сотрудник Института механики НАН РА

Адрес: 0019, Ереван, пр.Баграмяна 24^б

Тел: (+37410)52-48-90;

Амирджаниян Арутюн Арменович

аспирант Института механики НАН РА

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ БАЛОК

Алваджян Ш. И.

Микрополярная, несимметричная, моментная теория упругости или иначе континуум Коссера в настоящее время трактуется как модель упругих деформируемых тел с внутренней структурой.

Направление исследований задач тонких балок, пластин и оболочек на основе микрополярной теории упругости поставлено С. А. Амбарцумяном [1].

С. О. Саркисяном [2-4] построены асимптотически точные общие математические модели статических задач микрополярных изотропных упругих тонких балок, пластин и оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением, “с малой сдвиговой жесткостью”. В работах [2,5] изучены конкретные задачи изгиба микрополярных изотропных упругих балок и пластин.

В данной работе в тонкой прямоугольной области изучается плоская краевая задача микрополярной теории упругости для ортотропного материала. На основе асимптотического подхода работы [2] построена одномерная математическая модель статической задачи микрополярных ортотропных упругих тонких балок. В зависимости от значений безразмерных физических параметров ортотропного тела построены одномерные модели статической задачи микрополярных ортотропных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”.

1. Постановка задачи плоского напряженного состояния несимметричной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений

Рассмотрим прямоугольник $(0 \leq x_1 \leq a, -h \leq x_2 \leq h)$, в котором имеет место уравнения и граничные условия плоской задачи несимметричной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений [6]:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \quad (1.1)$$

Физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22}, & \varepsilon_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22} \\ \sigma_{22} &= A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22}, & \varepsilon_{22} &= -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11} + \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22} \\ \sigma_{12} &= A_{77}\varepsilon_{12} + A_{78}\varepsilon_{21}, & \varepsilon_{12} &= \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21} \\ \sigma_{21} &= A_{78}\varepsilon_{12} + A_{88}\varepsilon_{21}, & \varepsilon_{21} &= -\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12} + \frac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21} \\ \mu_{13} &= B_{66}\chi_{13}, \mu_{23} = B_{44}\chi_{23}. & \chi_{13} &= \frac{1}{B_{66}}\mu_{13}, \chi_{23} = \frac{1}{B_{44}}\mu_{23} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ – силовые напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения; u_1, u_2 – линейные перемещения; ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_3 ;

$A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$ – упругие константы материала рассматриваемого тела.

На лицевых сторонах прямоугольника $x_2 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{21} = \pm X^\pm, \sigma_{22} = \pm Y^\pm, \mu_{23} = \pm M^\pm. \quad (1.4)$$

На боковых кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ примем следующие варианты граничных условий несимметричной теории упругости:

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \quad (\text{задача 1}), \quad (1.5)$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), u_2 = 0, \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \quad (\text{задача 2}), \quad (1.6)$$

$$u_1 = 0, u_2 = 0, \omega_3 = 0 \quad (\text{задача 3}). \quad (1.7)$$

Легко убедиться, что в случае ортотропного тела решение поставленной краевой задачи в прямоугольной области складывается из суммы решений симметричной по x_2 (растяжение-сжатие) и обратно-симметричной задач (изгиб). В симметричной задаче четными по x_2 величинами будут $s_{11}, s_{22}, m_{23}, u_1$, нечетными – $s_{12}, s_{21}, m_{13}, u_2, v_3$, в обратно-симметричной задаче, наоборот. В дальнейшем, будем рассматривать задачу изгиба.

2. Асимптотический метод. Предполагается, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной, т. е. $2h \ll a, d = h/a \ll 1$ – основной малый геометрический параметр задачи.

Исходные уравнения и граничные условия (1.1)-(1.7) плоской несимметричной теории упругости не содержат малого параметра d , но при введении надлежащих масштабов для координат эти уравнения принимают форму, в которых малый параметр будет стоять перед некоторыми производными. Поэтому излагаемый метод решения статической задачи микрополярного упругого тонкого прямоугольника будет относиться к категории методов сингулярных возмущений.

Придерживаясь основополагающего принципа асимптотического метода интегрирования сингулярно-вырождающихся систем дифференциальных уравнений, в основу рассуждений будет положено свойство напряженно-деформированного состояния, испытывающего статические воздействия, выражаемые структурной формулой

$$(\text{НДС})_{\text{полное}} = (\text{НДС})_{\text{внутреннее}} + (\text{НДС})_{\text{краевое}} \quad (2.1)$$

В этом равенстве краевое напряженно-деформированное состояние (НДС) прямоугольника возникает вблизи боковых граней прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a$ и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от них в глубь двумерной области прямоугольника. Что касается внутреннего напряженно-деформированного состояния, то оно в каждом асимптотическом приближении будет описываться дифференциальными уравнениями меньшей размерности (в данном случае, обыкновенными дифференциальными уравнениями).

Для построения внутреннего итерационного процесса в двумерных уравнениях (1.1)-(1.3) плоской задачи несимметричной теории упругости ортотропного тела перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных:

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \zeta = \frac{x_2}{h} \quad (2.2)$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}. \quad (2.3)$$

В итоге получим сингулярно-возмущенную с малым параметром δ краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial \xi} + \delta^{-1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial \zeta} &= 0, \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \xi} + \delta^{-1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial \zeta} = 0, \frac{\partial \bar{\mu}_{13}}{\partial \xi} + \delta^{-1} \frac{\partial \bar{\mu}_{23}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12} - \bar{\sigma}_{21} = 0. \text{ и} \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} &= \frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11} - \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}, \quad \delta^{-1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \zeta} = -\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11} + \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}, \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} - \omega_3 &= \frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12} - \frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}, \\ \delta^{-1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \zeta} + \omega_3 &= -\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12} + \frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \bar{\mu}_{13}, \quad \delta^{-1} \frac{\partial \omega_3}{\partial \zeta} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \bar{\mu}_{23}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение (2.4) складывается из суммы внутренней задачи (прикладной-одномерной теории) и задач пограничного слоя (около боковых граней прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a$).

Вводим также следующие безразмерные физические параметры:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{22}}, \quad \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{12}}, \quad \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}^2}, \quad \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{88} - A_{78})}, \quad \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{77} - A_{78})} \\ & \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{88} + A_{78})}, \quad \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{77} + A_{78})}, \quad \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}}, \quad \frac{B_{44}}{a^2 A_{11}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение внутренней задачи представим в форме:

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^S \delta^s Q^{(s)} \quad (2.6)$$

где s – номер асимптотического приближения, Q – любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и независимого поворота, q – натуральное число, разное для разных величин, которое определяется из условия непротиворечивости рекуррентной системы уравнений после подстановки разложения (2.6) в преобразованную систему (1.1)-(1.3) и приравнивания в каждом уравнении к нулю коэффициентов при всех степенях d .

3. Одномерные математические модели изгиба микрополярной упругой ортотропной тонкой балки

В зависимости от значений физических безразмерных параметров (2.5) рассмотрим три разных случая.

А) Для безразмерных физических параметров (2.5) примем значения:

$$\begin{aligned} & \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{22}} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{12}} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{88} - A_{78})} \sim 1, \quad \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{77} - A_{78})} \sim 1 \\ & \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{88} + A_{78})} \sim 1, \quad \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{77} + A_{78})} \sim 1, \quad \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}} \sim 1, \quad \frac{B_{44}}{a^2 A_{11}} \sim 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для значений q в разложении (2.6) будем иметь:

$$q = \begin{cases} 0, & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23}, \\ 1, & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3. \end{cases} \quad (3.2)$$

На уровне исходного приближения асимптотического метода в случае (3.1), (3.2) приходим к одномерной статической теории микрополярных ортотропных балок с независимыми полями перемещений и вращений:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \quad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-), \quad \text{где } N_{21} = h(X^+ - X^-) \quad (3.3)$$

Физические соотношения

$$N_{12} = \frac{2h(A_{77}A_{88} - A_{78}^2)}{A_{88}} \Gamma_{12} + \frac{A_{78}}{A_{88}} N_{21}, \quad L_{13} = 2hB_{66}k_{13}. \quad (3.4)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{dW}{dx_1} - \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (3.5)$$

Систему уравнений (3.3)-(3.5) можно привести к одному разрешающему уравнению относительно прогиба W :

$$2hB_{66} \frac{d^4 W}{dx_1^4} = (Y^+ + Y^-) + h \frac{d(X^+ - X^-)}{dx_1} - \frac{d(M^+ + M^-)}{dx_1} - \frac{B_{66} A_{88}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} \left[\frac{d^2(Y^+ + Y^-)}{dx_1^2} + h \frac{A_{78}}{A_{88}} \frac{d^3(X^+ - X^-)}{dx_1^3} \right], \quad (3.6)$$

где $2hB_{66}$ – жесткость ортотропной балки по теории с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что

$$\Omega_3 = \frac{dW}{dx_1} + \frac{A_{88}}{A_{77} A_{88} - A_{78}^2} F(x_1), \quad (3.7)$$

где

$$F(x_1) = B_{66} \frac{d^3 W}{dx_1^3} + \frac{M^+ + M^-}{2h} + \frac{A_{78} - A_{88}}{2A_{88}} (X^+ - X^-) + \frac{B_{66} A_{88}}{2h(A_{77} A_{88} - A_{78}^2)} \left(\frac{d(Y^+ + Y^-)}{dx_1} + h \frac{A_{78}}{A_{88}} \frac{d^2(X^+ - X^-)}{dx_1^2} \right). \quad (3.8)$$

Б) Для безразмерных физических параметров (2.5) примем значения:

$$\frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{11} A_{22}} \sim 1, \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{11} A_{12}} \sim 1, \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}^2} \sim 1, \frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{11} (A_{88} - A_{78})} \sim 1, \frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{11} (A_{77} - A_{78})} \sim 1, \quad (3.9)$$

$$\frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{11} (A_{88} + A_{78})} \sim 1, \frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{11} (A_{77} + A_{78})} \sim 1, \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}} \sim B_{66}^* \delta^2 (B_{66}^* \sim 1), \frac{B_{44}}{a^2 A_{11}} \sim B_{44}^* \delta^2 (B_{44}^* \sim 1).$$

Для значений q в разложении (2.6) будем иметь:

$$q = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}_{22}, \bar{\mu}_{23}, \\ 1 & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\mu}_{13}, \\ 2 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{u}_1, \\ 3 & \bar{u}_2, \omega_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

На уровне исходного приближения асимптотического метода в случае (3.9), (3.10) приходим к одномерной статической теории микрополярных ортотропных балок со стесненными вращениями:

Уравнения равновесия

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - N_{21} = -h(X^+ - X^-), \frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-), \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-). \quad (3.11)$$

Физические соотношения

$$M_{11} = \frac{2h^2}{3} \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, L_{13} = 2hB_{66} k_{13}. \quad (3.12)$$

Геометрические соотношения

$$K_{11} = \frac{d\beta}{dx_1}, k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \Omega_3 = -\frac{\beta}{h} = \frac{dW}{dx_1}. \quad (3.13)$$

Систему уравнений (3.11)-(3.13) можно привести к следующему разрешающему уравнению относительно прогиба $W(x_1)$:

$$\left(2hB_{66} + \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \right) \frac{d^4W}{dx_1^4} = (Y^+ + Y^-) - \frac{d}{dx_1} \left[M^+ + M^- - h(X^+ - X^-) \right]. \quad (3.14)$$

Величина $2hB_{66} + \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}$ представляет жесткость микрополярной балки по теории со стесненным вращением.

В) Когда безразмерные физические параметры (2.5) имеют значения:

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{22}} \sim 1, \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}A_{12}} \sim 1, \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}^2} \sim 1, \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{88} - A_{78})} \sim 1, \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{77} - A_{78})} \sim 1 \\ \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{88} + A_{78})} \sim A_{88}^* \delta^2 (A_{88}^* \sim 1), \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{11}(A_{77} + A_{78})} \sim A_{77}^* \delta^2 (A_{77}^* \sim 1), \frac{B_{66}}{a^2 A_{11}} \sim 1, \frac{B_{44}}{a^2 A_{11}} \sim 1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\text{для } q \text{ получим: } q = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}_{22}, \\ 1 & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \\ 2 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23}, \\ 3 & \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3. \end{cases} \quad (3.16)$$

При этой асимптотике в одномерных уравнениях микрополярных ортотропных упругих тонких балок <<с малой сдвиговой жесткостью>> величины чисто <<моментного>> происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений.

Уравнение <<моментной части>> задачи:

Уравнение равновесия, физическое соотношение, геометрическое соотношение:

$$\frac{dL_{13}}{dx_1} = -(M^+ + M^-), L_{13} = 2hB_{66}k_{13}, k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (3.17)$$

Определяющая система (3.17) <<моментной>> одномерной части задачи может быть сведена к одному разрешающему уравнению относительно Ω_3 :

$$2hB_{66} \frac{d^2\Omega_3}{dx_1^2} = -(M^+ + M^-). \quad (3.18)$$

Уравнение <<силовой части>> задачи:

Уравнения равновесия

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - N_{21} = -h(X^+ - X^-), \frac{dN_{12}}{dx_1} = -(Y^+ + Y^-) \quad (3.19)$$

Физические соотношения

$$M_{11} = -\frac{2h^2}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, N_{12} = \frac{4(A_{77}A_{88} - A_{78}^2)}{A_{88} + A_{78}} h\Gamma_{12} + \frac{A_{77} + A_{78}}{A_{88} + A_{78}} N_{21}. \quad (3.20)$$

Геометрические соотношения

$$K_{11} = h \frac{d^2W}{dx_1^2}, \Gamma_{12} = \frac{dW}{dx_1} - \Omega_3. \quad (3.21)$$

Определяющую систему (3.19)-(3.21) «силовой» части задачи также можно свести к одному разрешающему уравнению относительно перемещения $W(x_1)$, куда будет входить уже известный из решения уравнения (3.18) поворот Ω_3 :

$$\frac{2h^3 (A_{77} + A_{78})(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{3 (A_{88} + A_{78}) A_{22}} \frac{d^4 W}{dx_1^4} = Y^+ + Y^- + \frac{4(A_{77}A_{88} - A_{78}^2)}{A_{88} + A_{78}} h \left(\frac{d^2 W}{dx_1^2} - \frac{d\Omega_3}{dx_1} \right) + \frac{A_{77} + A_{78}}{A_{88} + A_{78}} h \frac{d(X^+ - X^-)}{dx_1}. \quad (3.22)$$

Здесь $\frac{2h^3 (A_{77} + A_{78})(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{3 (A_{88} + A_{78}) A_{22}}$ – жесткость микрополярной балки по теории «с малой сдвиговой жесткостью».

В дальнейшем, будем рассматривать задачу погранслоя для поставленной задачи и задачу сращивания внутренней и погранслойной задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
2. Саркисян С. О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. № 5. С. 41-54.
3. Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // ПММ. 2008. Т. 72. № 1. С. 129-147.
4. Саркисян С. О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309-319.
5. Саркисян С. О. Особенности напряженно-деформированного состояния тонких пластин в рамках теории микрополярной упругости // Вычислительная механика сплошных сред, 2009. Т 2. № 1. С. 81-95.
6. Iesan D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids // Archives of Mechanics. 1973. Vol.5. № 3. P.547-561.

Сведения об авторе

Алваджян Шушаник

Аспирант Гюмрийского гос. педагогического института им. М. Налбандяна,

Адрес: 377526 г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, д. 4

Тел.: (093) 325-609, E-mail: armenuhis@mail.ru

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Амирбекян А. Н.

Расчет на прочность многих инженерных конструкций и их деталей, широко применяемых в машиностроении, строительстве и в других областях техники, существенно опирается на результаты исследований задач об изгибе балок, плит и оболочек на упругом основании. При этом упругие основания могут иметь различные геометрические формы и описаться в рамках разнообразных физических моделей. Круг этих задач и вопросов тесно связан с вопросами контактного взаимодействия деформируемых твердых тел и относится к хорошо известной области контактных и смешанных задач математической теории упругости.

Рассматриваемые в теории изгиба балок и плит упругие основания характеризуются определенными механическими и математическими свойствами и в научной литературе известны как линейно-деформируемые основания. Начало исследований контактных задач для таких оснований положено известными монографиями [1-3]. Основные результаты и работы по этому направлению на уровне семидесяти годов прошлого века подытожены в [4]. В последние десятилетия также ведутся исследования по указанным вопросам [5].

В настоящей работе рассматривается задача о контактном взаимодействии между изгибаемой балкой конечной длины и упругим основанием. При этом напряженно-деформированное состояние балки описывается классической теорией изгиба, а упругое основание берется в виде упругой однородной изотропной полуплоскости, для которой имеют место уравнения линейной теории упругости.

В рамках принятых моделей решение поставленной задачи сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром, представленным в виде суммы ядра Коши и регулярного ядра.

Решение этого уравнения строится известным численно-аналитическим методом [6,7,8], основанным на квадратурных формулах Гаусса для интегралов типа Коши и обычных интегралов с привлечением математического аппарата многочленов Чебышева. Указанный метод решения поставленной задачи проще и, в общем, эффективнее других методов.

§ 1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть на упругое полупространство $y < 0$, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ , изгибается тонкая упругая бесконечная в направлении оси Oz полоса

$$\omega = \{0 < y < h, -a < x < a, -\infty < z < \infty\}$$

высоты h и длины $2a$, причем $h \ll a$. При этом изгиб полосы происходит под действием вертикальных распределенных сил заданной интенсивности $q(x)$ в отрицательном направлении оси Oy и не зависящих от координаты z , т.е.

$$\sigma_y \Big|_{y=h} = -q(x) \quad (-a < x < a, -\infty < z < \infty),$$

где S_y – компонента нормального напряжения.

При такой нагрузке упругое полупространство и полоса будут находиться в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxy . В результате будем иметь изгибающую на нижней упругой полуплоскости $y < 0$ балку длиной $2a$ и высотой h , причем на верхней грани балки в отрицательном направлении оси Oy действуют нормальные силы интенсивности $q(x)$.

Предположим далее, что в интервале контакта балки и упругой полуплоскости $(-a; a)$ действуют только нормальные силы, закон распределения которых описывается функцией $p(x)$. Эта функция неизвестна и основной целью данного исследования является ее определение.

Отдельно рассматривая равновесие балки, по классической теории запишем ее дифференциальное уравнение изгиба [9]

$$D \frac{d^4 v_1}{dx^4} = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a), \quad (1.1)$$

где $v_1 = v_1(x)$ – вертикальные смещения точек балки, а D – жесткость балки на изгиб. В данном случае

$$D = E_1 J_z = E_1 h^3 / 12,$$

где E_1 – модуль упругости материала балки, а J_z – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Oz .

Так как в данном случае концевые сечения балки свободны от силовых факторов, то уравнение (1.1) должно рассматриваться при следующих условиях:

$$Q(x) \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^3 v_1}{dx^3} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad M(x) \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^2 v_1}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $Q(x)$ и $M(x)$ – соответственно, функции перерезывающих сил и изгибающих моментов в сечении балки с координатой x .

Дважды интегрируя обе части уравнения (1.1) и принимая во внимание условия (1.2), получим

$$D \frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2} \int_{-a}^x (x-s)^2 [p(s) - q(s)] ds + g \quad (-a \leq x \leq a), \quad (1.3)$$

где g – так называемый приведенный угол поворота крайнего сечения балки $x = -a$, определяемый далее. При этом имеют место условия равновесия балки

$$\int_{-a}^a p(s) ds = \int_{-a}^a q(s) ds = P; \quad (1.4)$$

$$\int_{-a}^a s p(s) ds = \int_{-a}^a s q(s) ds = M; \quad (1.5)$$

причем P и M – известные величины.

С другой стороны, вертикальные смещения граничных точек нижней упругой полуплоскости $v(x, 0)$ от распределенных по ее границе вертикальных сил интенсивности $p(x)$ выражаются формулой [10]

$$v(x, 0) = -J \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} ds + C, \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.6)$$

$$J = \frac{2(1-\nu^2)}{\rho E}$$

Теперь приняв во внимание условие контакта [10]

$$v_1(x) = v(x, 0) + \text{const}, \quad (-a \leq x \leq a)$$

при помощи (1.3) и (1.6) относительно неизвестных нормальных контактных напряжений $p(x)$ получим следующее сингулярное интегродифференциальное уравнение (СИУ):

$$DJ \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{s-x} = \frac{1}{2} \int_{-a}^x (x-s)^2 [p(s) - q(s)] ds + g \quad (-a < x < a), \quad (1.7)$$

Отметим, что интеграл слева в (1.7) при $x = s$ следует понимать в смысле главного значения по Коши и решение этого уравнения должно удовлетворять условиям (1.4), (1.5), откуда и определяется параметр g .

Далее в уравнении (1.7) и в условиях (1.4), (1.5) перейдем к безразмерным величинам, положив

$$x = \frac{x}{a}; \quad h = \frac{s}{a}; \quad j(x) = \frac{p(ax)}{E}, \quad g(x) = \frac{q(ax)}{E}, \quad P_0 = \frac{P}{aE}, \quad M_0 = \frac{M}{a^2 E},$$

$$g_0 = \frac{6g}{(1-u^2)E_1 h^2}; \quad l = \frac{3E}{2(1-u^2)E_1} \leq \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad (-1 < x, h < 1).$$

Тогда уравнение (1.7) перейдет в следующее СИУ:

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{h-x} + K(x-h) \right] j(h) dh = l f(x) + g_0 \quad (1.8)$$

$$K(x) = p l x^2 (1 + \operatorname{sign} x); \quad f(x) = \int_{-1}^1 (x-h)^2 [1 + \operatorname{sign}(x-h)] g(h) dh;$$

а условия (1.4) и (1.5) – в условия, соответственно,

$$\int_{-1}^1 j(x) dx = P_0; \quad \int_{-1}^1 x j(x) dx = M_0; \quad (1.9a,b)$$

Таким образом, окончательно решение поставленной задачи сводится к решению определяющего СИУ (1.8) при условиях (1.9a,b).

§ 2. Решение определяющего СИУ

Решение определяющего СИУ (1.8) при условиях (1.9a,b) указанным выше численно-аналитическим методом [6,7,8] сведем к системе линейных алгебраических уравнений. С этой целью решение СИУ (1.8) представим в виде

$$j(x) = c(x) / \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1), \quad (2.1)$$

где функция $c(x)$ при $-1 \leq x \leq 1$ принадлежит гильбертовскому классу функций и воспользуемся квадратурной формулой Гаусса для интеграла типа Коши [8]

$$\int_{-1}^1 \frac{w(t)u(t)dt}{t-x_r} = \sum_{m=1}^M \frac{a_m u(t_m)}{t_m - x_r}, \quad (M=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

Здесь $u(t)$ – регулярная (непрерывная) функция на отрезке $[-1, 1]$, $w(t)$ – весовая неотрицательная функция в интервале $(-1; 1)$, точки $t = t_m$, $(m = \overline{1, M})$ – корни многочленов $P_m(t)$, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(t)$, а точки $x = x_r$ $(r = \overline{1, R})$ – корни функции

$$Q_M(x) = - \int_{-1}^1 \frac{w(t)P_M(t)dt}{t-x}, \quad (2.3)$$

а коэффициенты a_m определяются равенством

$$a_m = -2 \frac{Q_M(t_m)}{P'_M(t_m)}. \quad (2.4)$$

В данном случае $w(t) \rightarrow w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ и, следовательно, система многочленов, ортогональных с таким весом, будут системой многочленов Чебышева первого рода $T_M(x) = \cos(M \arccos x)$, корни которых будут $t_m = h_m = \cos[(2m-1)\pi/2M]$, $(m = \overline{1, M})$.

Далее имеет место известное интегральное соотношение [8]

$$\frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{T_M(h)dh}{(h-x)\sqrt{1-h^2}} = \begin{cases} 0, & M=0 \\ U_{M-1}(x), & M=1, 2, \dots \end{cases} \quad (|x| < 1),$$

где $U_{M-1}(x)$ – многочлены Чебышева второго рода, выражающиеся формулой.

$$U_{M-1}(x) = \frac{\sin(M \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1).$$

Поэтому в данном случае для функции $Q_M(x)$ из (2.3) будем иметь $Q_M(x) = U_{M-1}(x)$, а корни уравнения $U_{M-1}(x) = 0$ даются формулой $x_r = \cos(\pi r/M)$ ($r = \overline{1, M-1}$). При этом, для a_m из (2.4) находим, что $a_m = \pi/M$.

Далее следуя известной процедуре [8], СИУ при условиях (1.9a,b) с помощью (2.1) и (2.2) сведем к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c(h_m)$ и g_0 :

$$\sum_{m=1}^{M+1} K_{rm} X_m = C_r, \quad (r = \overline{1, M+1}), \quad (2.5)$$

где введены обозначения

$$K_{rm} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{1}{h_m - x_r} + l(x_r - h_m)^2 [1 + \text{sign}(x_r - h_m)] \right\}, \quad (m = \overline{1, M}, r = \overline{1, M-1})$$

$$K_{rM+1} = \begin{cases} -1, & r = 1; \\ 0, & r = \overline{2, M+1}; \end{cases} \quad K_{Mm} = \begin{cases} \frac{\pi}{M}, & m = \overline{1, M}; \\ 0, & m = M+1; \end{cases} \quad K_{M+1m} = \begin{cases} \pi \frac{h_m}{M}, & m = \overline{1, M}; \\ 0, & m = M+1; \end{cases}$$

$$c_m = \begin{cases} c(h_m), & m = \overline{1, M}; \\ g_0, & m = M+1; \end{cases}; \quad C_r = \begin{cases} l f(x_r), & r = \overline{1, M-1} \\ P_0, & r = M \\ M_0, & r = M+1 \end{cases} \quad (M = 1, 2, \dots)$$

Теперь решение системы (2.5) при правой части, равной

$$1) C_r = \begin{cases} l f(x_r), & r = \overline{1, M-1}, \\ 0, & r = M, \\ 0, & r = M+1 \end{cases} \quad 2) C_r = \begin{cases} 0, & r = \overline{1, M-1} \\ 1, & r = M \\ 0, & r = M+1 \end{cases} \quad 3) C_r = \begin{cases} 0, & r = \overline{1, M-1} \\ 0, & r = M \\ 1, & r = M+1 \end{cases} \quad (M = 1, 2, \dots) \quad (2.6a, c)$$

обозначим, соответственно, через $X_m^{(1)}$, $X_m^{(2)}$ и $X_m^{(3)}$, ($m = \overline{1, M+1}$). Тогда решение системы (2.5) представится в форме

$$X_m = X_m^{(1)} + P_0 X_m^{(2)} + M_0 X_m^{(3)}, \quad (m = \overline{1, M+1}). \quad (2.7)$$

Система (2.5) при правых частях (2.6 a,c) и при помощи программы "Mathematica – 6" решена методом Гаусса. При этом в (1.8) положено $g(h) = C_0 = 0, 1$, т.е. взято $q(x) = \text{const}$. Решения системы (2.5) при указанных правых частях, когда $M=10$, а $l=0,1$ или $l=0,5$ приведены в таблице 1 и таблице 2.

$M=10, l=0,1$ Таблица 1

$X_m^{(1)}$	-0.0783	0.0462	0.0834	-0.1734	0.4916	-0.9882	1.6059	-1.7573	1.0909	-0.2086
$X_m^{(2)}$	0.5955	0.0811	0.2582	0.3043	0.3234	0.3280	0.3260	0.3233	0.3217	0.3211
$X_m^{(3)}$	8.5233	-5.1568	-1.2697	-0.6331	-0.4041	-0.2931	-0.230	-0.1948	-0.174	-0.1658

$X_m^{(1)}$	-0.3181	0.0580	0.3588	-0.8792	2.4672	-4.9020	7.9716	-8.6095	5.3048	-0.9929
$X_m^{(2)}$	1.7841	-0.9362	0.0004	0.2455	0.3461	0.3696	0.3593	0.3446	0.3363	0.3334
$X_m^{(3)}$	7.8132	-4.5418	-1.1192	-0.6021	-0.4194	-0.3176	-0.249	-0.2069	-0.183	-0.1728

Отметим, что формулой (2.1) при $c(x) = \text{const}$ дается известное решение Садовского классической контактной задачи [10,11]. В данном случае функцией $c(x)$, значения которой на дискретном множестве чебышевских узлов h_m ($m = \overline{1, M+1}$) выражаются формулой (2.7), даются необходимые отклонения от постоянной (когда имеем штамп с плоским основанием), учитывающие влияния изгиба балки конечной длины на упругом основании.

Отметим еще, что определяющее СИУ (1.8) – (1.9a,b) при помощи математического аппарата многочленов Чебышева можно также свести к регулярной бесконечной системе линейных уравнений [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1954. 232 с.
2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
3. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Вища школа, 1982.168с.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493с.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К. Г. Изгиб балки на границе упругой полуплоскости. //В сб.: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящ. 95-летию акад. Н. Х. Арутюняна, Ереван 2007, с.32-36.
6. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973. pp 368-425.
7. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations.- Quart. Appl. Math., vol.XXXV, No 1, 1977, pp173-185.
8. Панасюк В. В, Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
9. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1972, 544с.
10. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.– Л.: Госмехтеориздат, 1949. 270с.
11. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304с.
12. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.

Сведения об авторе

Амирбемян Аревик Норайровна

магистрантка Института механики НАН РА

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б, Институт механики НАН

Тел: (37410) 52-48-90; E-mail: mechins@sci.am

РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИЛОВЫХ НАГРУЗОК ПО ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Амирджанян А.А.

Исследованию напряженно-деформированного состояния упругих однородных и составных тел, по границе которых с постоянной скоростью движутся силовые нагрузки или абсолютно жесткий штамп, посвящено много работ отечественных и зарубежных ученых [1-3].

В настоящей работе исследовано осесимметричное напряженное состояние бесконечного полого цилиндра, когда по внутренней поверхности этого цилиндра равномерно движутся сосредоточенные, равномерно распределенные нормальные и касательные нагрузки, а внешняя поверхность цилиндра свободна от нагрузок или жестко закреплена.

Пусть по внутренней поверхности упругого, бесконечного полого цилиндра с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом R_0 , с постоянной скоростью v_0 движутся осесимметрично распределенные нормальные и касательные нагрузки с интенсивностями P и Q , соответственно. При этом будем считать, что внешняя поверхность полого цилиндра свободна от нагрузок или жестко закреплена.

Ставится задача: определить условия распространения поверхностных волн в бесконечном полом упругом цилиндре в зависимости от механических и геометрических характеристик, а также написать явные выражения для перемещения точек внутренней поверхности цилиндра.

В цилиндрической системе координат $r\varphi z$, ось Oz которой направлена по главной оси цилиндра, поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующих граничных задач:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r_0, z) &= -P_0 \delta(z - v_0 t); \quad \sigma_{rr}(R_0, z) = 0, \\ \tau_{rz}(r_0, z) &= Q_0 \delta(z - v_0 t); \quad \tau_{rz}(R_0, z) = 0.\end{aligned}\tag{1.1a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r_0, z) &= -P_0 \delta(z - v_0 t); \quad u_r(R_0, z) = 0, \\ \tau_{rz}(r_0, z) &= Q_0 \delta(z - v_0 t); \quad u_z(R_0, z) = 0.\end{aligned}\tag{1.1б}$$

Здесь $\delta(z)$ – известная функция Дирака, $u_r(r, z)$ и $u_z(r, z)$ – компоненты смещений точек полого цилиндра, удовлетворяющие уравнениям движения, а $\sigma_{rr}(r_0, z)$ и $\tau_{rz}(r, z)$ – компоненты напряжений, связанные с компонентами смещений по известным формулам Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2\mu \partial_r u_r + \lambda (\partial_r u_r + u_r/r + \partial_z u_z); \\ \sigma_{rz} &= \mu (\partial_z u_r + \partial_r u_z).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Так как граничные условия зависят от времени только через комбинацию $z - v_0 t$, рассматриваемые задачи являются квазистатическими. С помощью замены переменных $z \rightarrow z + v_0 t$ можно перейти к движущейся системе координат, связанных с нагрузками, в которой граничные задачи (1.1a) и (1.1б), соответственно, запишутся в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r_0, z) &= -P_0 \delta(z); \quad \sigma_{rr}(R_0, z) = 0; \\ \tau_{rz}(r_0, z) &= Q_0 \delta(z); \quad \tau_{rz}(R_0, z) = 0.\end{aligned}\tag{1.3a}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r_0, z) &= -P_0 \delta(z); \quad u_r(R_0, z) = 0; \\ \tau_{rz}(r_0, z) &= Q_0 \delta(z); \quad u_z(R_0, z) = 0.\end{aligned}\tag{1.3б}$$

Для построения решения задач (1.3a) и (1.3б) рассмотрим упругие потенциалы $\Phi(r, z)$ и $\Psi(r, z)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \alpha_1^2 \partial_z^2 \right) \Phi = 0; \quad \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} + \alpha_2^2 \partial_z^2 \right) \Psi = 0\tag{1.4}$$

и с помощью которых компоненты смещений записываются по следующим формулам [1]:

$$u_r = \partial_r \Phi - \partial_z \Psi, \quad u_z = \partial_z \Phi + \partial_r \Psi + \Psi/r \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha_1 = \sqrt{1-\theta\eta}; \quad \alpha_2 = \sqrt{1-\eta}; \quad \beta = \frac{1+\alpha_2^2}{2} = 1 - \frac{\eta}{2}; \quad \eta = \left(\frac{v_0}{c_2}\right)^2;$$

$$\theta = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}; \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

c_1 и c_2 – скорости движения упругих волн в полом цилиндре, μ и λ – коэффициенты Лямэ, ρ – плотность, а ν – коэффициент Пуассона материала полого цилиндра. В дальнейшем будем считать, что скорость движения нагрузок меньше скорости упругих волн в материале полого цилиндра и сначала построим общее решение дифференциальных уравнений (1.4). С этой целью применим к этим уравнениям и соотношениям (1.2) и (1.5) преобразование Фурье по переменной z . В итоге получим

$$d_r^2 \bar{\Phi} + \frac{1}{r} d_r \bar{\Phi} - (\alpha_1 k)^2 \bar{\Phi} = 0; \quad d_r^2 \bar{\Psi} + \frac{1}{r} d_r \bar{\Psi} - \left((\alpha_2 k)^2 + \frac{1}{r^2} \right) \bar{\Psi} = 0 \quad (1.6)$$

$$\bar{u}_r = d_r \bar{\Phi} + ik \bar{\Psi}; \quad \bar{u}_z = -ik \bar{\Phi} + d_r \bar{\Psi} + \bar{\Psi}/r \quad (1.7)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = 2\mu d_r \bar{u}_r + \lambda(d_r \bar{u}_r + \bar{u}_r/r - ik \bar{u}_z); \quad \bar{\tau}_{rz} = \mu(-ik \bar{u}_r + d_r \bar{u}_z) \quad (1.8)$$

Общее решение уравнений (1.6) даётся формулами

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{|k|} (c I_0(\alpha_1 |k| r) + d K_0(\alpha_1 |k| r)); \quad \bar{\Psi} = \frac{1}{ik} (a I_1(\alpha_2 |k| r) - b K_1(\alpha_2 |k| r)); \quad (1.9)$$

где $I_m(r)$ и $K_m(r)$ ($m=0,1$) – модифицированные функции Бесселя, a, b, c и d – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Пользуясь формулами (1.7)-(1.9), для трансформант Фурье перемещений и напряжений получим следующие выражения:

$$\bar{u}_r = a I_1(\alpha_2 |k| r) - b K_1(\alpha_2 |k| r) + \alpha_1 (c I_1(\alpha_1 |k| r) - d K_1(\alpha_1 |k| r))$$

$$\bar{u}_z = -i \operatorname{sgn} k (\alpha_2 (a I_0(\alpha_2 |k| r) + b K_0(\alpha_2 |k| r)) + c I_0(\alpha_1 |k| r) + d K_0(\alpha_1 |k| r))$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = 2|k|\mu (\alpha_2 (a I_0(\alpha_2 |k| r) + b K_0(\alpha_2 |k| r)) + \beta (c I_0(\alpha_1 |k| r) + d K_0(\alpha_1 |k| r))) - 2\mu \frac{\bar{u}_r}{r}$$

$$\bar{\tau}_{rz} = -2ik\mu (\beta (a I_1(\alpha_2 |k| r) - b K_1(\alpha_2 |k| r)) + \alpha_1 (c I_1(\alpha_1 |k| r) - d K_1(\alpha_1 |k| r)))$$

Для краткости удобнее пользоваться матричной формой записи этих уравнений [4]

$$\begin{pmatrix} S(r) \\ U(r) \end{pmatrix} = M(|k|r) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (r_0 \leq r \leq R_0) \quad (1.10)$$

$$S(r) = \frac{1}{2\mu k} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{rr} \operatorname{sgn} k \\ i \bar{\tau}_{rz} \end{pmatrix}; \quad U(r) = \begin{pmatrix} i \bar{u}_z \operatorname{sgn} k \\ \bar{u}_r \end{pmatrix}; \quad A(x) = \begin{pmatrix} I_0(x) & K_0(x) \\ I_1(x) & -K_1(x) \end{pmatrix}$$

$$D(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M(x) = D(x) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A(\alpha_2 x) & 0 \\ 0 & A(\alpha_1 x) \end{pmatrix}.$$

Записывая соотношения (1.10) для $r = r_1$ и $r = r_2$ ($r_0 \leq r_1, r_2 \leq R_0$), исключим постоянные a, b, c, d и выразим S и U при $r = r_1$ через их значения при $r = r_2$. Получим

$$\begin{pmatrix} S(r_1) \\ U(r_1) \end{pmatrix} = M(r_1, r_2) \begin{pmatrix} S(r_2) \\ U(r_2) \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

где

$$M(r_1, r_2) = M(r_1)M(r_2)^{-1} = \tilde{M}(r_2 / r_1, |k| r_1)$$

$$\tilde{M}(l, x) = D(x) \cdot \begin{pmatrix} J_{0,1}(l, x) & J_{1,1}(l, x) \\ J_{0,0}(l, x) & J_{1,0}(l, x) \end{pmatrix} \cdot D(lx)^{-1} = \begin{pmatrix} M_1(l, x) & M_2(l, x) \\ M_3(l, x) & M_4(l, x) \end{pmatrix}$$

$$J_{i,j}(l, r) = \frac{(-1)^i}{1-\beta} \begin{pmatrix} \beta^i a(l, \alpha_2 r) - \beta^j a(l, \alpha_1 r) & \frac{\beta^{i+j} b(l, \alpha_1 r) - \alpha_1 \alpha_2 b(l, \alpha_2 r)}{\alpha_1} \\ \frac{\beta^{i+j} c(l, \alpha_2 r) - \alpha_1 \alpha_2 c(l, \alpha_1 r)}{\alpha_2} & \beta^j d(l, \alpha_1 r) - \beta^i d(l, \alpha_2 r) \end{pmatrix}$$

$$F(l, r) = A(r)A(lr)^{-1} = \begin{pmatrix} a(l, r) & b(l, r) \\ c(l, r) & d(l, r) \end{pmatrix} =$$

$$= lr \begin{pmatrix} I_0(r)K_1(lr) + K_0(r)I_1(lr) & I_0(r)K_0(lr) - K_0(r)I_0(lr) \\ I_1(r)K_1(lr) - K_1(r)I_1(lr) & I_1(r)K_0(lr) + K_1(r)I_0(lr) \end{pmatrix}$$

Отметим, что использованные здесь функции $a(l, r)$, $b(l, r)$, $c(l, r)$, $d(l, r)$, которые являются комбинациями модифицированных функций Бесселя, позволяют значительно сократить формулы, а также более удобны в расчётах. Причем

$$\det A(r) = -(I_0(r)K_1(r) + I_1(r)K_0(r)) = -1/r; \det F(l, r) = l.$$

Теперь обратимся к поставленным задачам. Сначала рассмотрим случай, когда внешняя поверхность полого цилиндра жестко закреплена. В этом случае $U(R_0) = 0$ и (1.11) примет вид

$$\begin{pmatrix} S(r_0) \\ U(r_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1(l_0, |k| r_0) & M_2(l_0, |k| r_0) \\ M_3(l_0, |k| r_0) & M_4(l_0, |k| r_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(R_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

откуда

$$S(R_0) = M_1(l_0, |k| r_0)^{-1} S(r_0);$$

$$U(r_0) = M_3(l_0, |k| r_0) S(R_0) = M_3(l_0, |k| r_0) M_1(l_0, |k| r_0)^{-1} S(r_0).$$

В случае, когда внешняя поверхность полого цилиндра свободна от нагрузок, т.е. $S(R_0) = 0$, уравнение (1.11) примет вид

$$\begin{pmatrix} S(r_0) \\ U(r_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1(l_0, |k| r_0) & M_2(l_0, |k| r_0) \\ M_3(l_0, |k| r_0) & M_4(l_0, |k| r_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ U(R_0) \end{pmatrix}$$

откуда

$$U(R_0) = M_2(l_0, |k| r_0)^{-1} S(r_0);$$

$$U(r_0) = M_4(l_0, |k| r_0) U(R_0) = M_4(l_0, |k| r_0) M_2(l_0, |k| r_0)^{-1} S(r_0).$$

Таким образом, в обоих случаях имеем

$$U(r_0) = K(|k| r_0) S(r_0), \quad (1.12)$$

а трансформанта радиального перемещения внутренней границы полого цилиндра имеет вид

$$\bar{u}_r(r_0) = K_{21}(|k|r_0) \frac{-P_0}{2\mu|k|} + K_{22}(|k|r_0) \frac{iQ_0}{2\mu k} \quad (1.13)$$

Здесь

$$K(x) = M_3(l_0, x) M_1(l_0, x)^{-1} = \frac{M_3(l_0, x) \text{adj}(M_1(l_0, x))}{\Delta(x)}, \quad \Delta(x) = \det(M_1(l_0, x)) \quad (1.14)$$

когда внешняя поверхность цилиндра жестко закреплена, и

$$K(x) = M_4(l_0, x) M_2(l_0, x)^{-1} = \frac{M_4(l_0, x) \text{adj}(M_2(l_0, x))}{\Delta(x)}, \quad \Delta(x) = \det(M_2(l_0, x)) \quad (1.15)$$

когда внешняя поверхность цилиндра свободна.

Переходя в (1.14) или (1.15) к пределу при $l_0 \rightarrow \infty$ и учитывая

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a(l, r)}{d(l, r)} = -\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{b(l, r)}{d(l, r)} = \frac{K_0(r)}{K_1(r)} = \kappa(r); \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{c(l, r)}{d(l, r)} = -1$$

получим известные выражения для пространства с отверстием

$$K(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \begin{pmatrix} \beta \kappa(x\alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 \kappa(x\alpha_2) & (1-\beta) \alpha_2 \kappa(x\alpha_1) \kappa(x\alpha_2) + \frac{\kappa(x\alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 \kappa(x\alpha_2)}{x} \\ (1-\beta) \alpha_1 & \beta \kappa(x\alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 \kappa(x\alpha_2) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$\Delta(x) = \beta^2 \kappa(x\alpha_1) - \alpha_1 \alpha_2 \kappa(x\alpha_2) - (1-\beta) \alpha_1 / x$$

Отметим также, что в обеих задачах обозначив

$$R^0 = \frac{1}{\beta^2 - \alpha_1 \alpha_2} \begin{pmatrix} \beta - \alpha_1 \alpha_2 & (1-\beta) \alpha_2 \\ (1-\beta) \alpha_1 & \beta - \alpha_1 \alpha_2 \end{pmatrix};$$

$$R^1 = \frac{1-\beta}{2(\beta^2 - \alpha_1 \alpha_2)^2} \begin{pmatrix} \beta(\alpha_1 + \alpha_2) - 2\alpha_1^2 \alpha_2 & \frac{\beta^2(1+\beta) - 4\beta\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_1^2 \alpha_2^2}{(1-\beta)} + \alpha_2^2 \\ \beta^2 + (1-2\beta) \alpha_1^2 & \beta(\alpha_1 + \alpha_2) - 2\alpha_1^2 \alpha_2 \end{pmatrix},$$

для больших значений аргумента функцию $K(x)$ можно представить в виде

$$K(x) = R^0 + R^1 \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (1.17)$$

Заметим, что как и в случае плоской задачи при $z = 0$ $u_r(r_0, z)$ имеет сингулярность типа $\ln z$, однако, в отличие от плоского случая, наличие в трансформанте членов порядка $1/k$ приводит к появлению слабых сингулярностей типа $z \ln|z|$, которые следует учитывать при решении контактных задач методом дискретных особенностей. Используя представление (1.17) и обратное преобразование Фурье, производную от радиального перемещения внутренней границы полого цилиндра представим в виде:

$$\frac{d}{dz} u_r(r_0, z) = \frac{-P_0}{2\pi\mu} \left(R_{21}^0 \frac{1}{z} + \int_0^\infty \tilde{K}_{21}(kr_0) \sin(kz) dk \right) + \frac{Q_0}{2\pi\mu} \left(R_{22}^0 \pi \delta(z) + \int_0^\infty \tilde{K}_{22}(kr_0) \cos(kz) dk \right),$$

$$(\tilde{K}(x) = K(x) - R^0).$$

Условием распространения поверхностных волн является равенство нулю детерминанта $\Delta(|k|r_0)$. В случае, когда скорость движения нагрузок совпадает со скоростью распространения поверхностных волн, вычисление интегралов в (1.17) затрудняется, так как имеется полюс в интервале интегрирования.

Численные расчеты, результаты которых приведены на рис. 1 и 2, показывают, что в случае, когда внешняя поверхность цилиндра жестко закреплена, фазовая скорость поверхностных

волн всегда больше скорости волн Рэлея.

В случае же, когда внешняя поверхность цилиндра свободна от нагрузок, существуют волны со скоростями меньшими скорости волн Рэлея.

Исследуем скорость поверхностных волн для первой формы колебаний. Если полагать, что длина волны очень велика по сравнению с внутренним радиусом цилиндра $kr_0 \ll 1$ то, разлагая $\Delta(|k|r_0)$ в ряд, получим для фазовой скорости следующую формулу:

$$v_\phi = \sqrt{2(v+1)} + \frac{1}{4}(l^2 + 1)v^2 \sqrt{2(v+1)}(kr_0)^2 + O(k^4)$$

Если длина волны очень мала по сравнению с толщиной и внутренним радиусом цилиндра, то скорость поверхностных волн совпадает со скоростью волн Рэлея

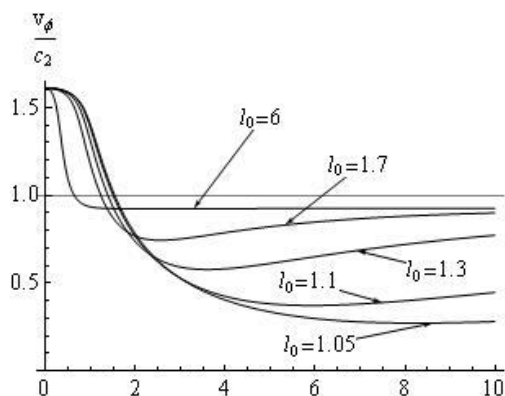


Рис.1

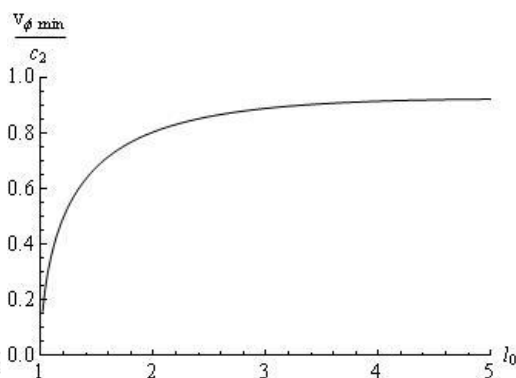


Рис.2

На рис.1 приведены графики фазовой скорости в зависимости от kr_0 для первой формы колебаний при различных значениях толщины полого цилиндра. На рис. 2 приведен график минимального значения фазовой скорости поверхностных волн в зависимости от толщины полого цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Саакян А.В. Построение функций влияния для упругой полосы от движущихся по её краям с постоянной скоростью сосредоточенных сил и тепловых источников.// ДАН Арм. ССР. 1978. Т.67. №2. С.78-85.
3. Амирджанян А.А. О равномерном движении силовых нагрузок по границе кусочно-однородной полуплоскости. В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды" Ереван 2007.
4. A.L. Shvalov A sextic formalism for three-dimensional elastodynamics of cylindrically anisotropic radially inhomogeneous materials Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 459, No. 2035, (Jul.8, 2003), pp. 1611-1639.

Сведения об авторе

Амирджанян Арутюн Арменович – аспирант, Институт механики НАН РА

Тел.: (3741 0) 27-62-23

E-mail: amirjanyan@gmail.com

ДВУХФАЗНЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ КОМПОЗИТЫ МИНИМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Антимонов М.А., Черкаев А.В.

Введение

Энергия материалов, претерпевающих фазовое превращение, зависит от внутренней структуры материала. При фазовом превращении мартенситного типа, вызванного деформированием материала, организуется такая внутренняя структура материала, энергия которой минимальна при заданных внешних деформациях. Полученная структура имеет минимальную жесткость по сравнению с другими возможными вариантами. Рассмотрев каждую точку пространства внешних деформаций и определив структуры, дающие минимум энергии деформирования, мы сможем решить задачу о нахождении внутренней структуры при фазовом превращении мартенситного типа в материалах. Эта задача важна, например, при разработке элементов конструкций из метриалов с памятью формы.

Для определения структур с минимальной энергией деформирования построим нижнюю оценку энергии и предъявим структуру, энергия которой при заданных внешних деформациях равна энергии предсказанной оценкой. Такая задача ранее рассматривалась рядом авторов. В работе [1] рассмотрены асимптотические случаи пористого материала и абсолютно жесткого включения. В работах [3,4] рассмотрены двумерные постановки задачи об оптимальных композитах минимальной жесткости. Трехмерная постановка задачи о поиске композита минимальной жесткости была решена в работе [3] для случая кубических и изотропных материалов. В ней авторы построили нижнюю оценку энергии деформирования и указали типы слоистых композитов, на которых достигается предсказанная оценкой энергия. В представленной работе будет рассмотрен только случай изотропных материалов. Будут показаны не только тип, но и конкретные геометрические характеристики оптимальных структур минимальной жесткости.

Нижняя оценка энергии упругого деформирования

Рассмотрим периодический двухфазный материал с заданными концентрациями фаз (рис.1.). Каждая ячейка периодичности имеет единичный объем. Каждая фаза моделируется линейным изотропным материалом. Первая фаза мягче второй, т.е. $C_1 < C_2$. Средняя плотность энергии упругого деформирования материала в ячейке периодичности имеет вид

$$f = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon : ((1-\chi(\mathbf{x}))C_1 + \chi(\mathbf{x})C_2) : \varepsilon dV, \quad (1)$$

где $\chi(\mathbf{x})$ – характеристическая функция, которая равна единице, если $\mathbf{x} \in V_2$, и нулю в случае, если рассматриваемая точка принадлежит первому материалу, C_1 и C_2 – тензоры модулей упругости фаз, ε – тензор деформаций точек материала.

Энергию материала можно оценить снизу, осреднив поля деформаций по фазам. Получим следующее выражение для плотности энергии:

$$f \geq f_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \varepsilon : C_i : \varepsilon, \quad (2)$$

где $\varepsilon_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \varepsilon dV$, m_i – концентрация фазы “i” в материале. После минимизации оценки по средним полям деформаций в фазах получаем

$$f_s \geq f_c = \frac{1}{2} \varepsilon_0 : (m_1 C_1^{-1} + m_2 C_2^{-1})^{-1} : \varepsilon_0, \quad (3)$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV = m_1 \varepsilon_1 + m_2 \varepsilon_2$ – средняя деформация в ячейке периодичности. Эффективный

тензор модулей упругости $C_{eff} = (m_1 C_1^{-1} + m_2 C_2^{-1})^{-1}$ в этом случае равен среднему гармоническому тензоров модулей упругости фаз. Знак равенства выполняется только для

случая одноосного растяжения. В приведенной процедуре минимизации энергии никак не учитывались условия совместности деформаций на межфазной границе. Уточним эту оценку, учтем дифференциальные связи тензора деформаций

$$\varepsilon = (\nabla \mathbf{u})^s \quad (4)$$

где $\mathbf{u}$ – перемещение точек тела. Получаем выражение для плотности энергии упругого деформирования

$$f = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon : ((1 - \chi(\mathbf{x}))\mathbf{C}_1 + \chi(\mathbf{x})\mathbf{C}_2 - \mathbf{T}) : \varepsilon dV + \frac{1}{2} \int_V \varepsilon : \mathbf{T} : \varepsilon dV, \quad (5)$$

где тензор $\mathbf{T}$ имеет такую структуру, что

$$\varepsilon : \mathbf{T} : \varepsilon = 2t_1(\varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2) + 2t_2(\varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3) + 2t_3(\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_2\varepsilon_3).$$

Каждое из этих слагаемых квазивыпукло [1].

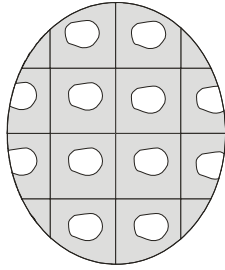


Рис.1. Периодическая структура материала.

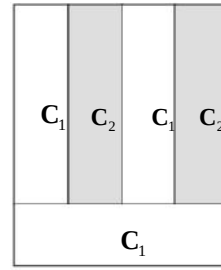


Рис.2. Построение слоистой структуры высокого ранга.

Используя теорему о среднем и осреднив поля деформаций по фазам и по ячейке периодичности, получим следующее выражение для плотности энергии деформирования:

$$f_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \varepsilon_i : (\mathbf{C}_i - \mathbf{T}) : \varepsilon_i + \frac{1}{2} \varepsilon_0 : \mathbf{T} : \varepsilon_0. \quad (6)$$

Полученная форма зависит от трех параметров t_i . На параметры накладываются ограничения $0 \leq t_i \leq 2\mu_1$. Это связано с тем, что параметры должны быть неотрицательными, чтобы форма $\varepsilon : \mathbf{T} : \varepsilon$ оставалась квазивыпуклой. Верхнее ограничение связано с тем, что разница тензоров $\mathbf{C}_i - \mathbf{T}$ должна оставаться неотрицательно определенным тензором. Иначе также нарушается условие кавзивыпуклости всей квадратичной формы плотности энергии деформаций.

После минимизации (6) по полям деформаций получаем

$$f_p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 : (m_1(\mathbf{C}_1 - \mathbf{T})^{-1} + m_2(\mathbf{C}_2 - \mathbf{T})^{-1}) : \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 : \mathbf{T} : \varepsilon_0. \quad (7)$$

Средние поля деформаций по фазам при этом равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (m_2\mathbf{C}_1 + m_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{T})^{-1} : (\mathbf{C}_2 - \mathbf{T}) : \varepsilon_0, \\ \varepsilon_2 &= (m_2\mathbf{C}_1 + m_1\mathbf{C}_2 - \mathbf{T})^{-1} : (\mathbf{C}_1 - \mathbf{T}) : \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученная оценка учитывает дифференциальные связи компонент тензора деформаций. В нее входят три параметра t_i , максимизировав по которым мы сможем уточнить нижнюю оценку энергии при заданных полях внешних деформаций.

Можно прямо максимизировать форму по параметрам транслятора. Но так как мы будем искать структуры, энергия которых совпадает с энергией оценки на классе слоев различного ранга, то альтернативой поиска максимума будет выполнение условия совместности деформаций на межфазной границе. А именно:

- 1) простые слои или слои первого ранга: $[\varepsilon]_1^2 : \mathbf{t} \mathbf{t} = 0$, $[\varepsilon]_1^2 : \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau} = 0$, где $\mathbf{t}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – взаимноортогональные векторы, лежащие в плоскости межфазной границы;

2) слои второго ранга: $[\varepsilon]_1^2 : \mathbf{k}\mathbf{k} = 0$, где $\mathbf{k}$ – вектор, перпендикулярный к нормальям к межфазным границам.

Для слоев третьего ранга условие непрерывности деформаций не выполняется ни в одном из направлений. Этот подход к рассмотрению задачи был отмечен в [2].

Будем подбирать параметры транслятора таким образом, чтобы было выполнено одно из условий совместности деформаций.

Построение верхней оценки

Для построения верхней оценки f_l рассмотрим энергию, запасенную в композитном материале, имеющем слоистую структуру. Микроструктура такого композита получается в результате многошагового процесса, каждый шаг которого заключается в составлении слоев материала, полученного на предыдущем шаге, и одного из исходных материалов. Число шагов называется рангом слоистой структуры. Нормали $\mathbf{n}_i$ к слоям на каждом шаге считаются различными.

Для получения выражения энергии слоистого композита представим тензорные величины в виде матриц и векторов.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (9)$$

Будем считать, что при построении слоистого композитного материала первый материал «обволакивает» второй материал. Тензор эффективных модулей упругости по ячейке периодичности в этом случае равен [1, 2]

$$\mathbf{C}_{eff} = \mathbf{C}_1 + m_2[(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1)^{-1} + m_1 \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{p}_i(\mathbf{n}_i) \{\mathbf{p}_i^T(\mathbf{n}_i) \mathbf{C}_1 \mathbf{p}_i(\mathbf{n}_i)\}^{-1} \mathbf{p}_i^T(\mathbf{n}_i)]^{-1}, \quad \sum_{i=1}^d \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad (10)$$

где $\mathbf{p}_i(\mathbf{n}_i)$ – проектор тензора деформаций на подпространство его разрывных вдоль нормали $\mathbf{n}_i$ компонент (для тензора деформаций такими компонентами являются $\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{nt}, \varepsilon_{tt}$), d – ранг слоистой структуры, α_i – параметры, определяющие концентрацию первого материала на i -том шаге.

Предлагаемая оценка f_l представляет собой минимальную по параметрам структуры α_i и $\mathbf{n}_i$ плотность энергии, запасаемую в слоистом композите

$$f_l = \frac{1}{2} \min_{\alpha_i, \mathbf{n}_i} \varepsilon_0 \mathbf{C}_{eff}(\alpha_i, \mathbf{n}_i) \varepsilon_0. \quad (11)$$

Мы построили вторую верхнюю оценку плотности энергии, запасаемой в двухфазном материале, получив неравенство

$$f_p \leq f \leq f_l \quad (12)$$

Оптимальный двухфазный композит

Для наглядности представления областей в пространстве деформаций, в которых оптимальными являются те или иные слоистые структуры, упорядочим компоненты тензора внешних деформаций $|\varepsilon_3| \geq |\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_3| \geq |\varepsilon_2|$ и представим трёхмерное пространство деформаций

на плоскости $\delta_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}$, $\delta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$, причем $\delta_1, \delta_2 \in [-1; 1]$.

Теорема.

Для любых внешних деформаций неравенство (12) выполняется со знаком равенства

$$f_p(\varepsilon_0) = f(\varepsilon_0) = f_l(\varepsilon_0) \quad (13)$$

Минимальные значения запасаемой энергии в разных областях пространства деформаций равны:

$$1) \quad \varepsilon_0 \in \{\varepsilon_0 : \delta_1 \leq 1, \delta_2 \leq 1, \delta_1 \leq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2 + 1)\delta_2 - 1, \delta_2 \leq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2 + 1)\delta_1 - 1\},$$

параметры трансляторов при этом равны $t_1 = t_2 = t_3 = 2\mu_1$, оптимальными структурами являются слои третьего ранга с нормальными, сонаправленными с главными направлениями тензора внешних деформаций.

Структурные параметры

$$\alpha_1 = \frac{((1+m_2)\mu_1 + m_1\mu_2)\varepsilon_1 - \mu_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{m_1(\mu_2 - \mu_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{((1+m_2)\mu_1 + m_1\mu_2)\varepsilon_2 - \mu_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{m_1(\mu_2 - \mu_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)},$$

$$\alpha_3 = \frac{((1+m_2)\mu_1 + m_1\mu_2)\varepsilon_3 - \mu_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{m_1(\mu_2 - \mu_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)},$$

Плотность энергии двухфазной структуры в этом случае рассчитывается по формуле

$$f = \frac{\mu_1(2\mu_1 + \mu_2)}{(2+m_2)\mu_1 + m_1\mu_2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 - 2\mu_1(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3)$$

$$2) \quad \varepsilon_0 \in \{\varepsilon_0 : \delta_1 \geq 0, \delta_2 \leq 1, \delta_2 \geq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2 + 1)\delta_1 - 1, \delta_2 \geq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2)^{-1}\},$$

$$\text{параметры трансляторов при этом равны } t_1 = t_2 = \frac{2((m_2+1)\mu_1 + m_1\mu_2)\delta_2}{1 + \delta_1}, t_3 = 2\mu_1,$$

оптимальными структурами являются слои второго ранга с нормальными, сонаправленными со вторым и третьим главными направлениями тензора внешних деформаций. Структурные параметры

$$\alpha_1 = \frac{(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)\varepsilon_2 - \mu_1\varepsilon_3}{m_1(\mu_2 - \mu_1)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)\varepsilon_3 - \mu_1\varepsilon_2}{m_1(\mu_2 - \mu_1)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}.$$

Плотность энергии двухфазной структуры в этом случае рассчитывается по формуле

$$f = \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}{(1+m_2)\mu_1 + m_1\mu_2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 - 2\mu_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + (m_1\mu_1 + \mu_2)\varepsilon_1^2$$

$$3) \quad \varepsilon_0 \in \{\varepsilon_0 : \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0, \delta_1 \leq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2)^{-1}, \delta_2 \leq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2)^{-1}\},$$

параметры трансляторов при этом равны

$$t_1 = t_2 = 2(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)\delta_1, \quad t_3 = 2(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)\delta_2,$$

оптимальными структурами являются слои первого ранга с нормалью, сонаправленной с третьим главным направлением тензора внешних деформаций, с максимальным растяжением, энергия который вычисляется

$$f = \frac{1}{m_2\mu_1 + m_1\mu_2}(\mu_1\mu_2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + m_1m_2(\mu_1 + \mu_2)^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2))$$

$$4) \quad \varepsilon_0 \in \{\varepsilon_0 : \delta_1 \leq 0, \delta_1 \geq -1, \delta_2 \leq 1, \delta_2 \geq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2)^{-1}\},$$

$$\text{параметры трансляторов при этом равны } t_1 = t_2 = 0, \quad t_3 = 2\mu_1,$$

оптимальными структурами являются наклонные слои второго ранга с нормальными, которые строятся следующим с помощью двух поворотов единичного вектора, сонаправленного с первым главным вектором тензора внешних деформаций. Первый поворот осуществляется в плоскости первого и третьего главных векторов тензора внешних деформаций

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{m_1(\mu_2 - \mu_1)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)\delta_1}{m_1(\mu_2 - \mu_1)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)\delta_1 + \mu_1(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)\delta_2 - (m_2\mu_1 + m_1\mu_2)^2},$$

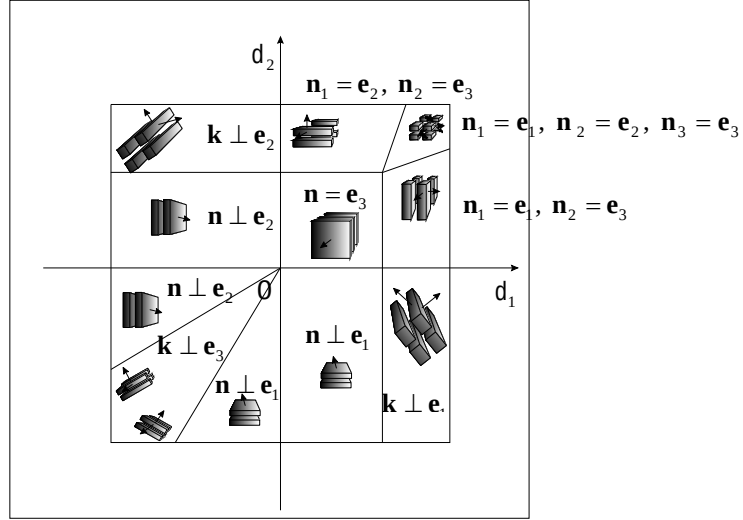


Рис. 3. Оптимальные структуры в пространстве деформаций.

Второй поворот осуществляется в повернутой плоскости 1-2

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{m_1(\mu_2 - \mu_1)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)\delta_1 + \mu_1(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)\delta_2 - (m_2\mu_1 + m_1\mu_2)^2}{m_1(\mu_1 - \mu_2)(\delta_2(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1) - (\delta_2 + 1)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2))},$$

причем, нормали отличаются направлением второго поворота. Структурные параметры

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

Плотность энергии двухфазной структуры в этом случае рассчитывается по формуле

$$f = \frac{\mu_2(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)\varepsilon_1^2 + (\mu_1 + \mu_2)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2}{(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)} - \mu_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

$$5) \varepsilon_0 \in \{\varepsilon_0 : \delta_1 \leq 0, \delta_1 \geq -1, \delta_2 \geq 0, \delta_2 \leq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2)^{-1}\},$$

параметры трансляторов при этом равны $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 2\delta_2(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)$, оптимальными структурами являются наклонные слои первого ранга с нормалью, лежащей в плоскости первого и третьего главных направлений тензора внешних деформаций. Ее проекция на первое

главное направление равна $\cos^2 \varphi = \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1}$.

Плотность энергии двухфазной структуры в этом случае рассчитывается по формуле

$$f = \frac{2\mu_1\mu_2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2)}{m_2\mu_1 + m_1\mu_2} + (m_1\mu_1 + m_2\mu_2)\varepsilon_2^2.$$

$$6) \varepsilon_0 \in \{\varepsilon_0 : \delta_1 \geq -1, \delta_2 \leq 0, \delta_2 \geq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2)^{-1}\delta_1\},$$

параметры трансляторов при этом равны $t_1 = 2(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)\frac{\delta_2}{\delta_1}$, $t_2 = t_3 = 0$, оптимальными структурами являются наклонные слои первого ранга с нормалью, лежащей в плоскости первого и третьего главных направлений тензора внешних деформаций. Ее проекция на первое главное направление равна $\cos^2 \varphi = \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1}$.

Плотность энергии двухфазной структуры в этом случае рассчитывается по формуле

$$f = \frac{2\mu_1\mu_2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2)}{m_2\mu_1 + m_1\mu_2} + (m_1\mu_1 + m_2\mu_2)\varepsilon_2^2.$$

$$7) \quad \varepsilon_0 \in \{\varepsilon_0 : \delta_1 \geq -1, \delta_2 \leq (m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + m_2)^{-1}\delta_1, \delta_2 \geq \delta_1\},$$

параметры трансляторов при этом равны $t_1 = 2\mu_1$, $t_2 = t_3 = 0$, оптимальными структурами являются наклонные слои второго ранга с нормальными, которые строятся следующим с помощью двух поворотов единичного вектора, сонаправленного с первым главным вектором тензора внешних деформаций. Первый поворот осуществляется в плоскости первого и третьего главных векторов тензора внешних деформаций

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{m_1(\mu_2 - \mu_1)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)}{m_1(\mu_2 - \mu_1)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1) + \mu_1(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)\delta_2 - (m_2\mu_1 + m_1\mu_2)^2\delta_1},$$

Второй поворот осуществляется в повернутой плоскости 1-2

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{m_1(\mu_2 - \mu_1)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1) + \mu_1(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)\delta_2 - (m_2\mu_1 + m_1\mu_2)^2\delta_1}{m_1(\mu_1 - \mu_2)((m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1) - (\delta_1 + \delta_2)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2))},$$

причем, нормали отличаются направлением второго поворота. Структурные параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Плотность энергии двухфазной структуры в этом случае рассчитывается по формуле

$$f = \frac{\mu_2(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)\varepsilon_3^2 + (\mu_1 + \mu_2)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{(m_2\mu_1 + m_1\mu_2)(m_2\mu_1 + m_1\mu_2 + \mu_1)} - \mu_1\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Симметричные относительно прямой $\delta_1 = \delta_2$ области строятся аналогично рассмотренным с помощью замены индексов 1 и 2.

На рис.3 отмечены рассмотренные области оптимальности двухфазных структур.

Заключение

В работе была построена нижняя оценка энергии деформирования при заданных полях внешних деформаций периодического двухфазного композитного материала с заданными концентрациями фаз. Была рассмотрена трехмерная постановка задачи. Показана достижимость нижней оценки плотности энергии деформирования на классе слоев не выше третьего ранга. Получены оптимальные значения параметров трансляторов и параметры структур минимальной жесткости. В пространстве деформаций построены области оптимальности различных типов структур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00525а), научной программы Российской Академии Наук и Национального Научного Фонда, Отделение Математических Наук (NSF through DMS) (грант 0707974).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гибянский Л.В., Черкаев А.В. Микроструктуры упругих композитов экстремальной жесткости и точные оценки запасаемой ими жесткости. Ленинград: Изд-во ФТИ им. Иоффе, 1987. С.52.
2. Cherkayev, A.V. 2000. Variational Methods for Structural Optimization. Berlin / Heidelberg / London / etc.: Springer-Verlag.
3. Isaac V. Chenchiah, Kaushik Battacharya. The relaxation of two-well energies with possibility unequal moduli. (2008) Archive for Rational Mechanics and Analysis. vol. 187. Issue 3, pp. 409-479.
4. Yuri Grabovsky. Bounds and extremal microstructures for two-components composites: a unified treatment based on the translation method. Proc. R. Soc. Lond. A (1996) 452, pp. 919-944.

Сведения об авторах

Михаил Антимонов. Аспирант, лаборатория
математических методов механики материалов,
Институт проблем машиноведения РАН, 61 Большой пр.,
В.О., Санкт-Петербург, Россия, 199178.
Тел. +7(812)3214780. e-mail: mike.antimonov@gmail.com.

Andrej V. Cherkayev, Professor of Department of Mathematics,
155 S 1400 E, University of Utah, Salt Lake City, 84108, USA.
Тел. +1 801-581 6822. e-mail: cherk@math.utah.edu.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАКРЕПЛЕННОГО КРАЯ

Антонян С.С., Белубекян М.В., Василян Н.Г.

Известно, что двум вариантам закрепления стороны прямоугольной пластинки в трехмерной постановке соответствует один вариант по теории Кирхгоффа. Теории, учитывающие поперечные сдвиги, приводят для указанных вариантов к различным граничным условиям. В настоящей работе на основе теории С.А. Амбарцумяна определяются прогиб, изгибающий и крутящий моменты и перерезывающие усилия в окрестности закрепленного края пластинки. Для перерезывающих усилий устанавливается наличие существенных отличий в зависимости от вида закрепления пластинки.

1. В последнее время много внимания уделяется исследованиям по обоснованию и применению теорий, учитывающих поперечные сдвиги [1-3]. Известно, что два варианта граничных условий задачи изгиба прямоугольной пластинки в трехмерной постановке: а) все три перемещения равны нулю (жесткое закрепление), б) равны нулю перемещения в направлении толщины координаты и координаты, перпендикулярной к плоской кромке пластинки, а также планарное касательное напряжение (облегченная заделка) [4]. Оба указанных варианта в теории Кирхгоффа приводят к одинаковым граничным условиям жесткого закрепления. Теория С.А. Амбарцумяна [5], учитывающая поперечные сдвиговые деформации, позволяет выявить различие граничных условий жесткой и облегченной заделки. Для исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности закрепленной кромки пластинки применяется подход Надаи, согласно которому, для достаточно удлиненных пластин можно пренебречь влиянием граничных условий противоположной кромки. Решение Надаи [6] – задача изгиба пластинки на основе теории Кирхгоффа приводится в монографии [7]. Изучение поведения упругих перемещений в окрестности жесткой облегченной заделки на основе асимптотического метода интегрирования приводится в монографиях [8,9].

2. В прямоугольной декартовой системе координат полубесконечная пластинка-полоса постоянной толщины $2h$ занимает область $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. На пластинку действует распределенная нагрузка интенсивностью $q(y)$. Уравнения задачи изгиба пластинки с учетом поперечных сдвигов, согласно теории С.А. Амбарцумяна, имеют вид [4,5]:

$$\begin{aligned} \frac{4h}{3} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + q(y) &= 0, \\ D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_1 &= 0, \\ D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь w – функция прогиба, φ_1, φ_2 – функции, определяющие перерезывающие усилия,

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (2.2)$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Как и в задаче Надаи, предполагается, что края пластинки $y=0, b$ шарнирно закреплены, что позволяет решение системы уравнений (2.1) представить следующим образом:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \sin \lambda_n y \\ \varphi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \cos \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Следуя подходу Надаи, потребуем, чтобы решения (2.3) при удалении от кромки $x = 0$ стремились к решению задачи цилиндрического изгиба. Согласно (2.1) и (2.3) указанные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) &= \frac{q_n}{D\lambda_n^4} \left[1 + \frac{4h^2\lambda_n^2}{5(1-\nu)} \right], \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_n(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x) &= \frac{3q_n}{4h\lambda_n}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

где q_n являются коэффициентами ряда Фурье

$$q(y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \lambda_n y \quad (2.5)$$

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к последующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомых функций $f_n(x)$, $\Phi_n(x)$, $F_n(x)$. Решением этих уравнений, удовлетворяющих условиям (2.3), будет:

$$\begin{aligned}f_n &= A_n e^{-\lambda_n x} + B_n x e^{-\lambda_n x} + \frac{q_n}{D\lambda_n^4} (1 + \zeta_n), \\ \Phi_n &= D_n e^{-\eta_n x} - \frac{5E}{4(1+\nu)} \zeta_n B_n e^{-\lambda_n x}, \\ F_n &= -\frac{\eta_n}{\lambda_n} D_n e^{-\eta_n x} + \frac{5E}{4(1+\nu)} \zeta_n B_n e^{-\lambda_n x} + \frac{3q_n}{4h\lambda_n}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

В (2.6) приняты следующие обозначения:

$$\zeta_n = \frac{4\lambda_n^2 h^2}{5(1-\nu)}, \quad \eta_n = h^{-1} \sqrt{2.5 + \lambda_n^2 h^2}. \quad (2.7)$$

Произвольные постоянные A_n , B_n и D_n должны определяться удовлетворением граничными условиями на кромке $x = 0$.

3. В трехмерной постановке на кромке пластинки $x = 0$ рассматриваются два варианта граничных условий:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad (3.1)$$

$$u_1 = u_3 = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (3.2)$$

Условия (3.1) принято называть жесткой заделкой, а условия (3.2) – облегченной заделкой. Для обоих вариантов теория Кирхгоффа приводит к одинаковым условиям для задачи изгиба – $w = 0$, $\partial w / \partial x = 0$ (условия для обобщенного плоского напряженного состояния отличаются). В теории С.А.Амбарцумяна условиям (3.1) и (3.2) соответствуют [4]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{5G} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \quad (3.1^*)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{4}{5G} \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0. \quad (3.2^*)$$

Для сравнения результатов решения по вариантам (3.1*) и (3.2*) достаточно рассматривать частный случай задания нагрузки

$$q(y) = q_0 \sin \lambda_1 y. \quad (3.3)$$

Подстановкой (2.3) в граничные условия (3.1*) с учетом (2.6) и (3.3) определяются произвольные постоянные:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{q_0}{D\lambda_1^4}(1 + \zeta_1), \\ B_1 &= -\frac{q_0}{D\lambda_1^3}R_1, \\ D_1 &= -\frac{3q_0}{4h\eta_1}[1 + 2(1 - \lambda_1\eta_1^{-1})\zeta_1] \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$R_1 = [1 + (1 - \lambda_1\eta_1^{-1})\zeta_1][1 + 2(1 - \lambda_1\eta_1^{-1})\zeta_1]^{-1}.$$

Таким образом, искомое решение задачи при граничных условиях (3.1*) имеет вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{q_0}{D\lambda_1^4} \left[(1 + \zeta_1)(1 - e^{\lambda_1 x}) - R_1 \lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} \right] \sin \lambda_1 y, \\ \varphi_1 &= \frac{3q_0}{2\lambda_1 h} \left\{ R_1 e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1}{2\eta_1} \left[1 + 2 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\eta_1} \right) \zeta_1 \right]^{-1} e^{-\eta_1 x} \right\} \sin \lambda_1 y, \\ \varphi_2 &= \frac{3q_0}{4\lambda_1 h} \left\{ 1 + \left[1 + 2 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\eta_1} \right) \zeta_1 \right]^{-1} e^{-\eta_1 x} - 2R_1 e^{-\lambda_1 x} \right\} \cos \lambda_1 y. \end{aligned} \quad (3.5)$$

С помощью (3.5) можно определить все характерные величины задачи. Выражение для прогиба w будет совпадать с теорией Кирхгофа, если принять $\zeta_1 \ll 1$. С этой же точностью совпадают также выражения для изгибающего момента. Для максимального значения перерезывающей силы с точностью $\zeta_1 \ll 1$ получается

$$\max N_1 = N_1(0, b/2) \approx \frac{2q_0}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_1 h}{\sqrt{10}} \right), \quad (3.6)$$

что дает уже отличие порядка h/b . Наконец, для опорных реакций в угловых точках получается

$$N_2(0, 0) = N_2(0, b) = 0, \quad (3.7)$$

что дает существенное отличие по сравнению с соответствующими выражениями по теории Кирхгофа [5].

Пусть на краю $x = 0$ имеют место граничные условия облегченной заделки (3.2*). В этом случае решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} w &= \frac{q_0}{D\lambda_1^4}(1 + \zeta_1) \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda_1 x}{1 + 2\zeta_1} \right) e^{-\lambda_1 x} \right] \sin \lambda_1 y, \\ \varphi_1 &= \frac{3q_0}{2\lambda_1 h} \frac{1 + \zeta_1}{1 + 2\zeta_1} e^{-\lambda_1 x} \sin \lambda_1 y, \\ \varphi_2 &= \frac{3q_0}{4\lambda_1 h} \left(1 - 2 \frac{1 + \zeta_1}{1 + 2\zeta_1} e^{-\lambda_1 x} \right) \cos \lambda_1 y. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражение для прогиба с точностью $\zeta_1 \ll 1$ совпадает с выражением, полученным по теории Кирхгофа. Изгибающий момент на кромке $x = 0$ определяется следующим образом:

$$M_1(0, y) = -\frac{q_0 b^2}{\pi^2 (1 + 2\zeta_1)} \left[1 + \zeta_1 - 2(1 - \nu)\zeta_1^2 \right] \sin \lambda_1 y \quad (3.9)$$

что также с точностью $\zeta_1 \ll 1$ совпадает с теорией Кирхгоффа. Нетрудно получить также выражения

$$\max N_1 = N_1(0, b/2) = \frac{2q_0 b}{\pi} \frac{1 + \zeta_1}{1 + 2\zeta_1}, \quad (3.10)$$

$$N_2(0, b) = -N_2(0, 0) = \frac{q_0 b}{\pi(1 + 2\zeta_1)} \quad (3.11)$$

Выражения (3.10), (3.11) также с точностью $\zeta_1 \ll 1$ совпадают с результатами Надаи [5].

Таким образом, приведенные сравнения показывают, что результаты классической теории совпадают с результатами уточненной теории при граничных условиях облегченной заделки с точностью пренебрежения квадратом относительной толщины. В случае жесткой заделки различие существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Costanda C. A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation. Longman Scientific Technical. 1990, 170p.
2. Karama M., Afag K.S., Mistou S. A refinement of Ambartsumian multi-layer beam theory. Computers&Structures. 2008, №86, p 839-849.
3. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Смешанная задача изгиба пластины с учетом поперечных сдвигов. //Изн. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С. 44-51.
4. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел". Ереван: Изд. НАН Армении, 2002, с.67-88.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
6. Nadai A., Elastische Platten, Берлин, 1925.с 72.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636с.
8. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
9. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415с.

Сведения об авторе

Белубекян Мелс Вагаршакович

Профессор, кандидат физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр.Баграмяна 24Б

Тел.: (+37410) 52-15-03, E-mail: mbelubekyan@sci.am

Василян Нарине

Аспирант Института механики НАН РА

Тел.: (+374 99)707939, E-mail: narine@mechins.sci.am

Антонян Саят

Соискатель Института механики НАН РА

E-mail: sayatantonyan@rambler.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБРАБОТАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЕТАЛИ С РАБОЧИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РЕЖУЩЕЙ ПЛАСТИНЫ

Арзумян А. М., Акопян С. А.

Свойства поверхности и тонких поверхностных слоев оказывают существенное влияние на процессы трения и изнашивания в подвижных сопряжениях.

Исследование процесса трения между рабочими поверхностями режущей пластины и обрабатываемого материала является актуальной задачей в машиностроении, поскольку от этого процесса зависит износ и стойкость режущего инструмента, качество обработанной поверхности, производительность и т.д.[1].

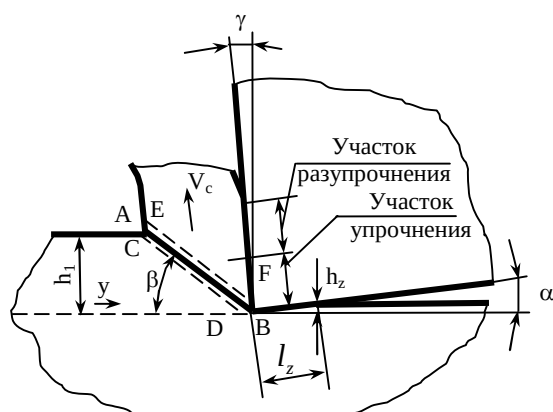


Рис.1. Зона пластического деформирования при резании

В результате силового воздействия резца с обрабатываемым материалом происходит скалывание элемента снимаемого слоя. Скольжение стружки по передней поверхности происходит в условиях граничного трения с незначительной пластической деформацией контактного слоя стружки. Зона контакта стружки с передней поверхностью режущей пластины делится на два участка: прилегающий к режущей кромке участок пластического контакта, на котором наблюдаются схватывание и застойные явления, и участок упругого контакта, где имеет место внешнее скольжение по передней поверхности [2].

Длина контакта зависит от усадки

стружки, толщины среза и от переднего угла.

На рис.1 показана модель стружкообразования, где для упрощения задачи в первом приближении предполагается, что стружкообразование происходит вдоль одной плоскости сдвига.

Согласно этой схеме, материал приближается к плоскости сдвига АВ со скоростью резания v , которая мгновенно меняется у АВ на скорость схода стружки v_0 . Предполагаем, что завивание стружки отсутствует. Это мгновенное изменение скорости у АВ образует скачок касательной скорости вдоль АВ. Скачки подобного рода не нарушают сплошности, то есть постоянства, и модель резания совпадает с $H - s t v$ (модель Гука – Сен-Венана). При этом имеем идеально-пластичный твердый материал с постоянным напряжением текучести. Это ограничение присуще аналитическим исследованиям на модели стружкообразования с одной единственной плоскостью сдвига. Учтено, что модель стружкообразования с единственной плоскостью сдвига не позволяет учесть влияния характеристик обрабатываемого материала, в частности, напряжений текучести, деформированного упрочнения, а также влияния скорости деформации, скорости резания на эти характеристики. Предложена схема стружкообразования с зоной сдвига приблизительно прямоугольной формы, в которой скорость резания переходит в скорость стружки через конечную зону CDEF без скачков преодолевает этот недостаток, а скорость деформации внутри зоны является конечной и подлежащей расчету. Обрабатываемый материал остается прежним, как отмечалось выше. Плоскости CD, АВ и EF рассматриваются как направления максимальной скорости деформации сдвига и максимального касательного напряжения.

От механизма контактного взаимодействия между обработанной поверхностью изделия и задней поверхностью инструмента зависят качество обработанной поверхности и интенсивность износа задней поверхности инструмента. В свою очередь, от качества обработанной поверхности и ее характеристик – шероховатости, наклепа, внутренних напряжений поверхностного слоя зависят качество изделий, их надежность и долговечность.

В работе рассматривается процесс трения между материалами медных и алюминиевых сплавов (соответственно латуни ЛС59-1) и режущей пластины из синтетического корунда и

вопросы разработки математической модели, предназначенной для исследования длины поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца при фрезеровании материалов режущими пластинами из синтетического корунда.

В качестве режущего инструмента была выбрана однозубая торцевая фреза. Геометрические параметры режущей части пластины составляют: $\alpha = \alpha_1 = 6^\circ, \varphi = \varphi_1 = 45^\circ, \gamma = -6^\circ, R = 0,5 \text{ мм}, \lambda = 0^\circ$ [3].

Исследование показало, что режущие инструменты из синтетического корунда подвергаются выкрашиванию, причем интенсивность выкрашивания усиливается при форсировании режимов резания и несмотря на специфические особенности синтетического корунда, контактные процессы, протекающие на передней и задней поверхностях режущего кристалла, схожи с контактными явлениями, происходящими на поверхностях резцов и фрез, оснащенных алмазами, композитами и другими инструментальными материалами.

Длина поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца определяется выражением:

$$l_z = \frac{h_z}{\sin \alpha}, \quad (1)$$

где h_z – высота поднятия материала за острием резца, α – задний угол резца.

Высота поднятия материала определяется выражением:

$$h_z = \frac{|\sigma_c|}{E} \cdot H, \quad (2)$$

где σ_c – сжимающее напряжение, E – модуль упругости материала обрабатываемой заготовки, H – расстояние от острия до нижней опорной поверхности заготовки.

Сжимающее напряжение можно определить выражением [4]:

$$\sigma_c = -1.155 \cdot \sigma_{st} \cdot \left(\sin^2 \gamma + \mu_1 \cdot (1 - \operatorname{tg} \gamma) + \frac{(0.5 + \mu) \cdot u}{K_c} - \mu \cdot \sin 2\gamma \right), \quad (3)$$

где σ_{st} – среднее по очагу пластической деформации напряжение текучести обрабатываемого материала, γ – передний угол режущей части инструмента, μ_1 – коэффициент трения обрабатываемого материала с задней поверхностью режущего инструмента, μ – коэффициент трения режущего инструмента с обрабатываемого материала, K_c – коэффициент утолщения стружки, u – коэффициент, который имеет в виду удельную энергию деформации.

Так как при температуре плавления металла его напряжение текучести становится равным нулю и, имея в виду экспериментальные данные измерения напряжения текучести в зависимости от температуры, для напряжения текучести будем иметь:

$$\sigma_{st} = \sigma_s \cdot \left[A \cdot \left(1 - \frac{T}{2 \cdot T_h} \right) + B \cdot \left(1 - \frac{T}{2 \cdot T_h} \right)^{k_1} - \left(1 - \frac{T}{2 \cdot T_h} \right)^{k_2} \right], \quad (4)$$

где σ_s – напряжение текучести при нормальной температуре, A, B, k_1, k_2 – поправочные коэффициенты, T – температура резания, T_h – температура плавления обрабатываемого материала.

В табл.1 приведены значения коэффициентов и показателей степеней в формуле (4) для латуни ЛС59-1 и бронзы БрО10-1 при использовании режущих пластин из синтетического корунда.

Коэффициент u определяется формулой [4]:

$$u = 1 - \sin \gamma \quad (5)$$

Коэффициент утолщения стружки определяется выражением:

$$K_c = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \beta} - \sin \gamma, \quad (6)$$

где h_2 – толщина стружки, h_1 – толщина срезаемого слоя, β – угол сдвига.

Таблица 1

Значения коэффициентов и показателей степеней в формуле (4)

Обрабатываемый материал	Показатели и коэффициенты			
	A	B	k_1	k_2 K
Латунь ЛС59-1	1.06	0.93	39	28
Бронза БрО10-1	1.08	0.98	33	29

Подставляя выражения (2), (3), (4), (5), (6) в (1), для l_z получим:

$$l_z = 1.155 \cdot \sigma_s \cdot \left[A \cdot \left(1 - \frac{T}{2T_h} \right) + B \cdot \left(1 - \frac{T}{2T_h} \right)^{k_1} - \left(1 - \frac{T}{2T_h} \right)^{k_2} \right] \cdot \frac{H}{E \cdot \sin \alpha} \times$$

$$\times \left[\sin^2 \gamma + \mu_1 \cdot (1 - \operatorname{tg} \gamma) + \frac{(0.5 + \mu) \cdot (1 - \sin \gamma) \cdot \sin \beta}{(\cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma)} - \mu \cdot \sin 2\gamma \right] \quad (7)$$

При обработке латуни ЛС59-1 режущими инструментами из синтетического корунда, которые имели следующую геометрию $\alpha = 6^\circ$, $\gamma = -6^\circ$, $\varphi = \varphi_1 = 45^\circ$, $r = 0,3\text{мм}$, $\lambda = 6^\circ$, выражение (7) принимает следующий вид:

$$l_z = 0.061 \cdot H \cdot \left[1.06 \cdot \left(1 - \frac{T}{2000} \right) + 0.93 \cdot \left(1 - \frac{T}{2000} \right)^{39} - \left(1 - \frac{T}{2000} \right)^{28} \right] \times$$

$$\times \left[0.65 + \frac{1.094 \cdot \sin \beta}{(0.995 \cdot \cos \beta + 0.094 \cdot \sin \beta)} \right] \quad (8)$$

Имея в виду, что при оптимальном режиме резания $\beta \approx 38$ (град.) и $H = 20 \cdot 10^{-3}$ (м), получим зависимость длины поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца от температуры резания.

На рис. 2. показана зависимость длины поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца от температуры резания при фрезеровании латуни ЛС 59-1 однозубной фрезой режущими пластинами из синтетического корунда.

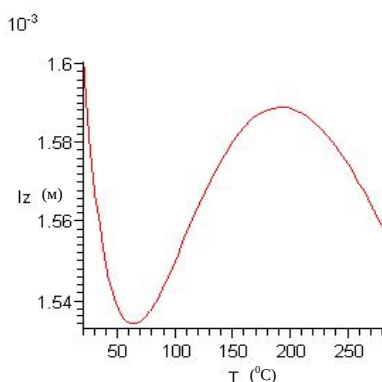


Рис.2. Зависимость длины поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца от температуры резания при фрезеровании латуни ЛС 59-1 режущими пластинами из синтетического корунда .

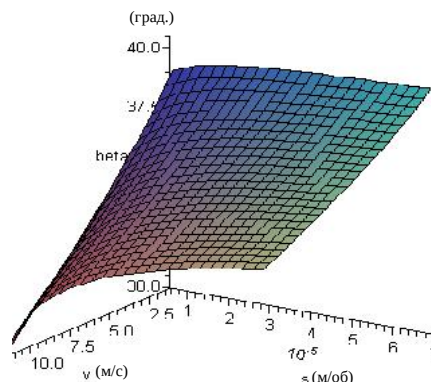


Рис.3. Зависимость угла сдвига от режимов резания при фрезеровании латуни ЛС 59-1 режущими пластинами из синтетического корунда .

Из графика видно, что при увеличении температуры резания до 60-70 $^\circ\text{C}$ величина l_z уменьшается, что свидетельствует о том, что при увеличении температуры резания прочность материала заготовки снижается. Потом материал заготовки начинает восстанавливать

прочность и l_z увеличивается до интервала температур резания 180-190 °С. При последующем увеличении температуры резания материал заготовки не может полностью восстановить прочность и l_z начинает уменьшаться.

Угол сдвига определяется по формулам:

$$\cos \beta = C_b \cdot v^{z_1} \cdot s^{z_2} \cdot t^{z_3} + K, \quad (9)$$

где t , s , v – соответственно, глубина резания, подача и скорость движения режущего инструмента, C_b , K – поправочные коэффициенты. Проведенные исследования позволяют получить все неизвестные коэффициенты и показатели степеней этого уравнения.

В табл.2 приведены эти значения для латуни ЛС59-1 при использовании режущих пластин из синтетического корунда.

Таблица 2
Значения коэффициентов и показателей степеней в формуле (9)

Обрабатываемый материал	Показатели и коэффициенты				
	C_b	z_1	z_2	z_3	K
Латунь ЛС59-1	$16.35 \cdot 10^{-5}$	0.65	-0.25	-0.2	0.76
Бронза БрО10-1	$12.42 \cdot 10^{-5}$	0.71	-0.31	-0.28	0.71

При фрезеровании латуни ЛС 59-1 однозубной фрезой режущими пластинами из синтетического корунда угол сдвига определяется выражением:

$$\beta = \arccos(16.35 \cdot 10^{-5} \cdot v^{0.65} \cdot s^{-0.25} \cdot t^{-0.2} + 0.76) \quad (10)$$

Зависимость угла сдвига от режимов резания, при фрезеровании латуни ЛС 59-1 однозубной фрезой режущими пластинами из синтетического корунда показана на рис.3.

Из графика видно, что при увеличении скорости резания угол сдвига уменьшается, а при увеличении подачи увеличивается.

Подставляя выражение (9) в выражение (1) и имея в виду, что $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$, для l_z получим:

$$l_z = 0.061 \cdot H \cdot \left[1.06 \cdot \left(1 - \frac{T}{2000} \right) + 0.93 \cdot \left(1 - \frac{T}{2000} \right)^{39} - \left(1 - \frac{T}{2000} \right)^{28} \right] \times \\ \times \left[0.65 + \frac{1.094 \cdot \sqrt{1 - (16.35 \cdot 10^{-5} \cdot v^{0.65} \cdot s^{-0.25} \cdot t^{-0.2} + 0.76)^2}}{0.995 \cdot (16.35 \cdot 10^{-5} \cdot v^{0.65} \cdot s^{-0.25} \cdot t^{-0.2} + 0.76) + 0.094 \cdot \sqrt{1 - (16.35 \cdot 10^{-5} \cdot v^{0.65} \cdot s^{-0.25} \cdot t^{-0.2} + 0.76)^2}} \right] \quad (11)$$

На рис. 4. показана зависимость длины поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца от температуры и режимов резания при фрезеровании латуни ЛС 59-1 однозубной фрезой режущими пластинами из синтетического корунда.

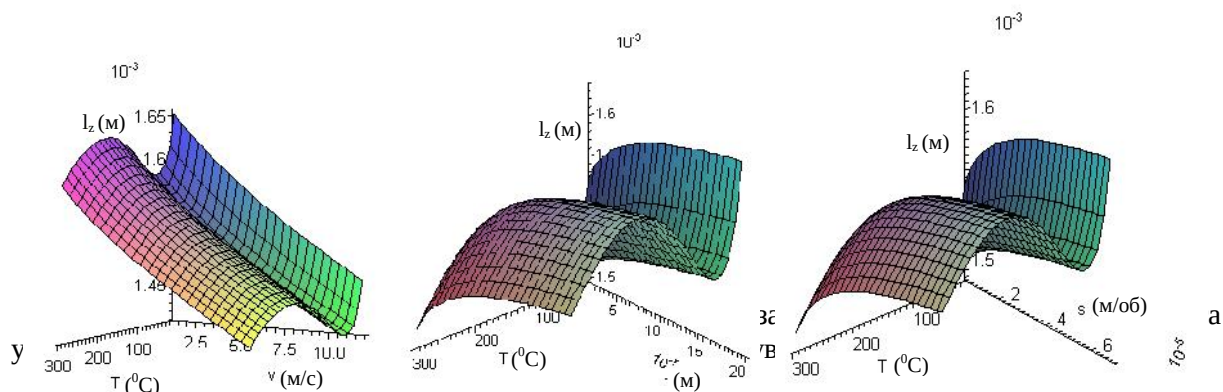


Рис. 4. Зависимость длины поверхности контакта обработанной части заготовки с задней поверхностью резца от температуры и режимов резания при фрезеровании латуни ЛС 59-1 однозубной фрезой режущими пластинами из синтетического корунда.

Из графика видно, что при увеличении скорости резания длина поверхности контакта уменьшается, а при увеличении подачи и глубины резания увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арзуманян А.А., Акопян С.А., Манукян О.С. Контактное взаимодействие поверхностных слоев режущей пластины и обрабатываемой детали. Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии. //VII Международная научно-техническая конференция, Пенза, 2007. С. 12-16.
2. Арзуманян А.А., Хачатрян Г. Г. Контактные явления при тонкой обработке цветных металлов инструментами из синтетического корунда. // Изв. НАН Армении. Сер. техн. н. 1992. Т.45. № 1–2. С. 8-11.
3. Арзуманян А.М. Деформация стружки при параметруправляемых процессах механической обработки цветных металлов и сплавов. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //V Международная конференция, Горис. 1-7 ноября 2005. Ереван: Изд. “Гитутюн” НАН РА, 2005. С. 44-48.
4. Воронцов А.Л., Султан-Заде Н. М., Албагачиев А.Ю. Математическое описание образования стружки разных видов, пульсации силы резания и параметров контакта обработанной поверхности заготовки с задней поверхностью резца. // Вестник машиностроения. 2008. №7. С.56-66.

Сведения об авторах

Арзуманян Алексан Мкртычевич

доцент, канд.техн.наук, Гюмрийский филиал Гос. инженерного университета Армении

Адрес: Республика Армения, Гюмри, ул. Севяна 47, кв. 5

Тел.: 094 11 00 98, E-mail: arzal@yandex.ru

Акопян Сережа Амаякович

младший научный сотрудник

магистр инженерии, Гюмрийский филиал Гос. инженерного университета Армении

Адрес: Республика Армения, Ширакский марз, Ахурян, Ахурянское шоссе, ул.10, кв.3

Тел.: 077 73 74 24, факс: 0312 4 35 28, E-mail: serghakob@mail.ru

О ЗАДАЧЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ УПРУГИМ СЛОЕМ И УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ПРИ КРУЧЕНИИ

Асатрян В. М.

В расчетах на прочность и долговечность многих инженерных конструкций и их деталей широко используются результаты по исследованию задач о кручении упругих тел. Основные достижения в этой области теории упругости с достаточной полнотой отражены в известных монографиях [1-3]. Для оценки контактной прочности конструкций особую важность представляют задачи контактного взаимодействия деформируемых тел при кручении. Довольно обстоятельный обзор основных работ и результатов по этому направлению теории упругости содержится в [4].

В настоящей работе рассматривается задача контактного взаимодействия между упругим слоем и упругим полупространством, обладающими различными упругими свойствами, при кручении. Сначала на основании идей из [5] при помощи интегрального преобразования Ханкеля из точного дифференциального уравнения теории упругости кручения слоя в различных точностях выводятся определяющие дифференциальные уравнения деформирования тонкого упругого слоя, т.е. строятся различные математические модели кручения тонкого упругого слоя. В частности, по этому пути получены известные модели Мелана и Винклера кручения упругих тонких тел.

Далее обсуждается указанная выше контактная задача о напряженном состоянии композита в виде упругого слоя и упругого полупространства в точной постановке и в постановках выведенных различных моделей упругого тонкого слоя. Во всех постановках решение задачи сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода, допускающих замкнутые решения. Указывается на необходимость проведения сравнительного анализа этих решений.

§ 1. Математические модели деформирования упругого тонкого слоя при кручении

Пусть упругий слой высоты h и модуля сдвига G_0 в цилиндрической системе координат r, θ, z занимает область $\Omega_0 = \{0 < r < \infty; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq z \leq h\}$. Пусть далее на граничных плоскостях слоя $z = 0$ и $z = h$ действуют осесимметричные скручивающие касательные силы заданных интенсивностей $\tau(r)$ и $\tau_0(r)$, соответственно. Тогда определение напряженно-деформированного состояния упругого слоя можно свести к решению следующей краевой задачи [6].

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} = 0 & (0 < r < \infty, 0 < z < h) \\ \tau_{z\theta}|_{z=0} = \tau(r), \quad \tau_{z\theta}|_{z=h} = \tau_0(r) & (0 < r < \infty) \\ \tau_{z\theta}^2 + \tau_{r\theta}^2 \rightarrow 0 & \text{при } r^2 + z^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1a, c)$$

Здесь $v_0 = v_0(r, z)$ – компонента смещений точек слоя Ω_0 в окружном направлении при кручении, а $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ – касательные скручивающие напряжения. Запишем также закон Гука и соотношения Коши:

$$\tau_{z\theta} = G_0 e_{z\theta}, \quad \tau_{r\theta} = G_0 e_{r\theta},$$

$$e_{z0} = \frac{\partial v_0}{\partial z}, \quad e_{r0} = \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \quad (2a, b)$$

Решение краевой задачи (1a, c) построим методом интегрального преобразования Ханкеля, для чего введем в рассмотрение трансформанты Ханкеля компонент смещений и напряжений

$$\left\{ \overline{v_0} = \overline{v_0}(\lambda, z); \quad \overline{\tau_0} = \overline{\tau_0}(\lambda); \quad \overline{\tau} = \overline{\tau}(\lambda) \right\} = \int_0^\infty \{v_0(r, z); \quad \tau_0(r); \quad \tau(r)\} r J_1(\lambda r) dr.$$

Здесь $J_1(x)$ – бесселева функция первого рода индекса 1, а λ – спектральный параметр Ханкеля, причем $(0 < \lambda < \infty)$.

Далее обе части дифференциального уравнения (1a) и граничных условий (1b, c) умножим на $r J_1(\lambda r)$ и проинтегрируем по r на интервале $(0; \infty)$. В результате, при помощи (2a, b) и известного соотношения [7]

$$\int_0^\infty \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) J_1(\lambda r) dr = -\lambda^2 \overline{f}(\lambda) \quad (3)$$

вместо краевой задачи (1a, c) в частных производных придем к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \overline{v_0}}{dz^2} - \lambda^2 \overline{v_0} = 0 & (0 < z < h) \\ \left. \frac{d \overline{v_0}}{dz} \right|_{z=0} = \frac{\overline{\tau}}{G_0}, \quad \left. \frac{d \overline{v_0}}{dz} \right|_{z=h} = \frac{\overline{\tau_0}}{G_0} \end{cases} \quad (4a, c)$$

Общее решение уравнения (4a) имеет вид

$$\overline{v_0} = \overline{v_0}(\lambda, z) = A e^{\lambda z} + B e^{-\lambda z}, \quad (0 < \lambda < \infty; 0 < z < h), \quad (5)$$

где A и B – пока произвольные постоянные. Эти постоянные определяются из граничных условий (4b, c) и выражаются формулами

$$A = \frac{1}{2\lambda G_0 \text{sh}(\lambda h)} (\overline{\tau_0} - \overline{\tau} e^{-\lambda h});$$

$$B = \frac{1}{2\lambda G_0 \text{sh}(\lambda h)} (\overline{\tau_0} - \overline{\tau} e^{\lambda h}).$$

Подставляя эти выражения A и B в (5), получим

$$\overline{v_0} = \overline{v_0}(\lambda, z) = \frac{1}{\lambda G_0 \text{sh}(\lambda h)} [\text{ch}(\lambda z) - \text{ch}\lambda(z-h)\overline{\tau}], \quad (0 \leq z \leq h). \quad (6)$$

Теперь функцию смещений $v_0 = v_0(r, z)$ можно найти из (6) при помощи обратного преобразования Ханкеля.

Далее равенство (6) запишем в виде

$$G_0 \lambda h(\lambda h) \overline{v_0} = \text{ch}(\lambda z) \overline{\tau_0} - \text{ch}\lambda(z-h)\overline{\tau}$$

и воспользуемся известными разложениями целых функций $\text{ch } z$ и $\text{sh } z$:

$$\text{ch } z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots, \quad \text{sh } z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

В этих разложениях для $\text{ch}(\lambda z)$ и $\text{ch}\lambda(\lambda - h)$, ограничиваясь членами порядка λ^2 , получим

$$G_0 h \lambda^2 \overline{v_0} = G_0 h \lambda^2 \overline{v_0}(\lambda, z) = \overline{\tau_0} - \overline{\tau} + \frac{\lambda^2 z^2}{2} \overline{\tau_0} - \frac{\lambda^2}{2} (z-h) \overline{\tau} \quad (7)$$

Рассмотрим два случая.

1) $z = 0$. Тогда из (7) будем иметь

$$G_0 h \lambda^2 \overline{v_0}(\lambda, 0) = \overline{\tau_0} - \overline{\tau} \frac{\lambda^2 z^2}{2} \overline{\tau_0} - \frac{\lambda^2}{2} (z-h) \overline{\tau}, \quad (0 < \lambda < \infty) \quad (8)$$

В этом равенстве совершив обратное преобразование Ханкеля и приняв во внимание (3), придем к уравнению

$$G_0 h \left(\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} - \frac{v_0}{r^2} \right) = \tau - \tau_0 - \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2 \tau}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau}{dr} - \frac{\tau}{r^2} \right), \quad (z = 0, \quad 0 < r < \infty) \quad (9)$$

Таким образом, механическое поведение упругого тонкого материального волокна-слоя $z = 0$ в рамках принятой точности описывается дифференциальным уравнением (9).

Теперь в (9) перейдем к пределу $G_0 \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$ таким образом, чтобы $G_0 h$ – жесткость материального тонкого слоя, оставалась постоянной: $G_0 h = \text{const}$. В результате, по аналогии с известными результатами из [8, 9], придем к модели Мелана при кручении тонкого упругого слоя:

$$G_0 h \left(\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} - \frac{v_0}{r^2} \right) = \tau(r) - \tau_0(r), \quad (0 < r < \infty) \quad (10)$$

Если же, в частности, положить $\tau_0(r) = \tau(r)$, $(0 < r < \infty)$, то из (8) или из (9) легко получить известную модель Винклера

$$v_0 = -\frac{h}{2G_0} \tau, \quad (0 < r < \infty)$$

с коэффициентом постели $h/2G_0$.

2) $z = h$. Тогда из (7) будем иметь

$$G_0 h \lambda^2 \overline{v_0}(\lambda, h) = \overline{\tau_0} - \overline{\tau} + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \overline{\tau_0}, \quad (0 < \lambda < \infty), \quad (11)$$

откуда при помощи обратного преобразования Ханкеля находим

$$G_0 h \left(\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_0}{dr} - \frac{v_0}{r^2} \right) = \tau - \tau_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2 \tau_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_0}{dr} - \frac{\tau_0}{r^2} \right), \quad (z = h, \quad 0 < r < \infty), \quad (12)$$

Дифференциальным уравнением (11) описывается, в рамках принятой точности, деформированное состояние упругого тонкого волокна-слоя $z = h$.

В данном случае из (11) или из (12), как выше, можно для материального волокна-слоя $z = h$ получить модель Мелана (10) и модель Винклера

$$v_0 = \frac{h}{2G_0} \tau, \quad (0 < r < \infty) \quad (13)$$

с коэффициентом постели $h/2G_0$.

Таким образом, из точных уравнений теории упругости с точностью до различных степеней высоты h выведены математические модели деформирования тонкого упругого слоя при кручении, которые описываются дифференциальными уравнениями (9)-(10) и (12)-(13).

§ 2. Решение задачи о контактном взаимодействии между упругим слоем и упругим полупространством при кручении

Пусть композит состоит из упругого слоя Ω_0 высоты h , модуля сдвига G_0 и нижнего упругого полупространства $z < 0$ с модулем сдвига G . Пусть далее на верхней плоскости $z = h$ слоя Ω_0 действуют скручивающие касательные силы интенсивности $\tau_0(r)$. Требуется определить касательные контактные напряжения в плоскости $z = 0$, по которой стыкуются упругий слой и нижнее упругое полупространство. Эти напряжения обозначим через $\tau(r)$, т. е. $\tau_{z\theta}|_{z=0} = \tau(r)$, $(0 < r < \infty)$.

Чтобы вывести определяющее интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\tau(r)$, композит разрежем по плоскости стыка $z = 0$ и отдельно рассмотрим упругое равновесие слоя Ω_0 и нижнего упругого полупространства $z < 0$.

Обращаясь к упругому слою Ω_0 , по формуле (6)

$$\bar{v}_0(\lambda, z) = \frac{\bar{\tau}_0(\lambda)}{\lambda G_0 \operatorname{sh}(\lambda h)} - \frac{\operatorname{cth}(\lambda h)}{\lambda G_0} \tau(\lambda), \quad (0 < \lambda < \infty). \quad (14)$$

Отсюда по формуле обратного преобразования Ханкеля получим

$$v_0(r, 0) = -\frac{1}{G_0} \int_0^\infty K_0(r, \rho) \tau(\rho) \rho d\rho + \frac{1}{G_0} \int_0^\infty M_0(r, \rho) \tau_0(\rho) \rho d\rho, \quad (0 < r < \infty),$$

$$K_0(r, \rho) = \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) \operatorname{cth}(\lambda h) d\lambda,$$

$$M_0(r, \rho) = \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda h)}. \quad (15a, c)$$

С другой стороны, для определения компоненты смещений точек нижнего упругого полупространства $z < 0$ в окружном направлении $v = v(r, z)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, & (0 < r < \infty, -\infty < z < 0), \\ \tau_{z\theta}|_{z=0} = \tau(r), & (0 < r < \infty), \\ \tau_{z\theta}^2 + \tau_{r\theta}^2 \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \partial \partial \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (16a, c)$$

Положив

$$\bar{v} = \bar{v}(\lambda, z) = \int_0^\infty r v(r, z) J_1(\lambda r) dr$$

двумерную краевую задачу (16a, c) сведем к одномерной:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{v}_0}{dz^2} - \lambda^2 \bar{v}_0 = 0 & (0 < z < h) \\ \frac{d \bar{v}_0}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{\bar{\tau}}{G_0}, \quad \frac{d \bar{v}_0}{dz} \Big|_{z=h} = \frac{\bar{\tau}_0}{G_0}. \end{cases} \quad (17a, b)$$

Решение краевой задачи (17а, б) с учетом условия исчезания напряжений на бесконечности имеет вид

$$\bar{v}(\lambda, z) = \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\lambda G} e^{\lambda z}, \quad (0 < \lambda < \infty; \quad -\infty < z < 0),$$

откуда

$$\bar{v}(\lambda, 0) = \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\lambda G} e^{\lambda z}, \quad (0 < \lambda < \infty). \quad (18)$$

Далее применив к (18) обратное преобразование Ханкеля, находим

$$v(r, 0) = \frac{1}{G} \int_0^\infty K(r, \rho) \tau(\rho) \rho d\rho, \quad (0 < r < \infty),$$

$$K(r, \rho) = \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) d\lambda. \quad (19a, b),$$

Отметим, что ядро $K(r, \rho)$ можно выразить через гипергеометрическую функцию [10].

Теперь запишем условие контакта упругого слоя Ω_0 и нижнего упругого полупространства $z < 0$:

$$v(r, 0) = v_0(r, 0), \quad (0 < r < \infty).$$

Подставляя сюда выражения $v_0(r, 0)$ и $v(r, 0)$ из (15а, с) и (19а, б), относительно искомого касательных контактных напряжений $\tau(r)$ получим следующее определяющее интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\int_0^\infty M(r, \rho) \tau(\rho) \rho d\rho = f(r), \quad (0 < r < \infty),$$

$$M(r, \rho) = K(r, \rho) + kK_0(r, \rho),$$

$$f(r) = k \int_0^\infty M_0(r, \rho) \tau_0(\rho) \rho d\rho, \quad (k = G/G_0). \quad (20a, c)$$

Для решения интегрального уравнения (20а, с) к его обеим частям применим преобразование Ханкеля с $J_1(\lambda r)$. Но проще условие контакта записать в трансформантах Ханкеля:

$$\bar{v}(\lambda, 0) = \bar{v}_0(\lambda, 0), \quad (0 < \lambda < \infty),$$

а затем воспользоваться соотношениями (14) и (18). В результате, интегральное уравнение (20а,с) в трансформантах Ханкеля примет вид

$$\frac{\bar{\tau}_0(\lambda)}{\lambda G_0 \text{sh}(\lambda h)} - \frac{\text{cth}(\lambda h)}{\lambda G_0} \bar{\tau}(\lambda) = \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\lambda G}.$$

Отсюда

$$\bar{\tau}(\lambda) = \frac{k \bar{\tau}_0(\lambda)}{[1 + k \text{cth}(\lambda h)] \text{sh}(\lambda h)}, \quad (0 < \lambda < \infty)$$

и, следовательно, по формуле обратного преобразования Ханкеля

$$\tau(r) = \int_0^\infty R(r, \rho) \tau_0(\rho) \rho d\rho,$$

$$R(r, \rho) = k \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) \frac{\lambda d\lambda}{\text{sh}(\lambda h) + k \text{ch}(\lambda h)}, \quad (k = G/G_0), \quad (0 \leq r \leq \infty). \quad (21a, b)$$

Таким образом, точное решение поставленной контактной задачи выражается формулами (21а, б).

Построим также решения рассматриваемой контактной задачи по указанным в предыдущем параграфе математическим моделям упругого слоя в соответствии с уравнениями (10).

Исходя из уравнения (9) или из того же самого уравнения в трансформантах Ханкеля (8), при помощи (18) условие контакта $\bar{v}(\lambda, 0) = \bar{v}_0(\lambda, 0)$ запишем в виде

$$G_0 h \lambda^2 \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\lambda G} = \bar{\tau}_0(\lambda) - \bar{\tau}(\lambda) - \frac{\lambda^2 h^2}{2} \bar{\tau}(\lambda), \quad (0 < \lambda < \infty).$$

Отсюда

$$\bar{\tau}(\lambda) = \frac{2k \bar{\tau}_0(\lambda)}{2k + h(2 + \lambda k h)\lambda}, \quad (0 < \lambda < \infty)$$

и, следовательно, по формуле обратного преобразования Ханкеля

$$\begin{aligned} \tau(r) &= \int_0^\infty R_1(r, \rho) \tau_0(\rho) \rho d\rho, \\ R_1(r, \rho) &= 2k \int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) d\lambda}{2k + h(2 + \lambda k h)\lambda}, \quad (k = G/G_0), \quad (0 < r < \infty). \end{aligned} \quad (22a, b)$$

Наконец, в рамках модели Мелана для тонкого упругого слоя (10) решение разбираемой контактной задачи представим в форме

$$\begin{aligned} \tau(r) &= \int_0^\infty R_2(r, \rho) \tau_0(\rho) \rho d\rho, \\ R_2(r, \rho) &= k \int_0^\infty \frac{\lambda J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho)}{k + h\lambda} d\lambda, \quad (0 \leq r \leq \infty). \end{aligned} \quad (23a, b)$$

Далее рассмотрим частный случай нагружения композита, когда на верхней граничной плоскости $z = h$ упругого слоя Ω_0 действуют сосредоточенные вдоль окружности радиуса a равномерно распределенные скручивающие касательные силы величины T , т. е. когда

$$\bar{\tau}_0(r) = \frac{T}{2\pi r} \delta(r - a), \quad (0 < r, a < \infty),$$

где $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака. Тогда по (21a, b)

$$\tau(r) = \frac{T}{2\pi} R(r, a) = \frac{kT}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda a) \frac{\lambda d\lambda}{\text{sh}(\lambda h) + k \text{ch}(\lambda h)}, \quad (0 < r < \infty).$$

В этой формуле перейдем к безразмерным величинам, положим

$$\alpha = \lambda a; \quad \chi = r/a; \quad h_0 = h/a; \quad \tilde{\tau}(\chi) = \frac{a^2 \tau(a\chi)}{T}.$$

В результате, для безразмерных касательных контактных напряжений получим

$$\tilde{\tau}(\chi) = \frac{k}{2\pi} \int_0^\infty J_1(\alpha \chi) J_1(\alpha) \frac{\alpha d\alpha}{\text{sh}(\alpha h_0) + k \text{ch}(\alpha h_0)}, \quad (0 < \chi < \infty), \quad (k = G/G_0) \quad (24)$$

Аналогичным образом из (22a, b) получим

$$\tilde{\tau}(\chi) = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha J_1(\alpha \chi) J_1(\alpha) d\alpha}{2k + 2\alpha h_0 + k\alpha^2 h_0^2}, \quad (25)$$

а из (23a, b)

$$\tilde{\tau}(\chi) = \frac{k}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha J_1(\alpha \chi) J_1(\alpha) d\alpha}{k + \alpha h_0}, \quad (26)$$

где обозначения прежние.

Таким образом, при указанной частной нагрузке точное решение поставленной контактной задачи дается формулой (24), а приближенные решения в соответствии с приведенными выше моделями упругого тонкого слоя – формулами (25) и (26). Численный анализ этих формул в довольно широком диапазоне изменения характерных параметров χ , k и h_0 позволит выявить закономерности изменения контактных напряжений и близость приближенных решений к точному решению.

Автор благодарит проф. С. М. Мхитаряна за предложенную тематику и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
2. Спляник-Красса К. В. Кручение валов переменного диаметра. М.: Гостехтеориздат, 1949.
3. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
5. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983.
6. Новожилов В. В. Теория упругости. Ленинград: Судпромгиз, 1958.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: ИЛ., 1955.
8. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweissten Verbindungen. –Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, No 2, 123-129 p.
9. Bufrer H. Zur Krafteinleitung in Scheiben uber geschweisste oder geklebte Verbindungen. – Osterr. Ingenieur-Archiv, 1964, Bd. 18, No3-4, S. 284-292.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Сведения об авторе

Асатрян Вреж Мгеревич – канд. техн. наук, зам. декана Транспортного факультета, преподаватель Ереванского Государственного Университета Архитектуры и Строительства, 0009, Ереван, ул. Теряна 105. Тел.: (374 10) 54 02 40, (374 93) 53 48 01

E-mail: ma_vrezh@yahoo.com

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СДВИГОВЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДЛОЖКОЙ И ДВУМЯ ИЗОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ ИЗ ПЛАТИНЫ И АЛЮМИНИЯ

Берберян А.Х.

В данной работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява [1,2] в трехслойной системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm и прикрепленных к ней двух изотропных проводящих слоев [3-5] Pt и Al произвольной толщины h_1 и h_2 . В частности, показано существование волны Лява щелевого типа, обусловленной исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Изучены дисперсионное уравнение, структура и поведение мод волны Лява. Приведены качественные графики дисперсионных кривых.

Упругие и электрические поля в пьезоэлектрической подложке (область $x_1 > 0$) взаимосвязаны и описываются квазистатическими уравнениями линейной теории электроупругости [1,4]:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} \gamma_{lm} - e_{lik} E_l, \quad D_i = e_{ikj} \gamma_{kj} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad (2)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{D} = 0, \quad \gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Здесь u_i – составляющая упругого перемещения, σ_{ik} – составляющая тензора напряжений, $\vec{E}(E_k)$ – напряженность электрического поля, $\vec{D}(D_k)$ – электрическая индукция, γ_{lm} – составляющая тензора деформаций, φ – потенциал электрического поля, c_{iklm} – составляющая тензора упругих постоянных, e_{lik} – составляющая тензора пьезоэлектрических постоянных, ε_{ik} – составляющая тензора диэлектрических постоянных, x_k – координаты, t – время, ρ – плотность пьезоэлектрика.

1. Постановка задачи. В квазистатической постановке электрическое поле не проникает в проводящую среду, т.е. в слоях упругое поле описывается уравнениями (1), (2), где $E_l \equiv 0$. Главная ось пьезоэлектрика (L_6 или L_4) направлена по оси Ox_3 , ось Ox_1 перпендикулярна к поверхности границы и направлена в глубь полупространства. Верхний край системы $x_1 = -(h_1 + h_2)$ механически свободен.

Рассмотрим антиплоское деформационное состояние

$$u_1 \equiv 0, \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2, t), \quad -(h_1 + h_2) < x_1 < +\infty, \quad (3)$$

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, t), \quad 0 < x_1 < +\infty,$$

для нашего случая получим следующие дифференциальные уравнения:

1. В подложке ($0 < x_1 < +\infty$):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_{44} \nabla^2 u + e_{15} \nabla^2 \varphi \quad (4)$$

$$\varepsilon_{11} \nabla^2 \varphi - e_{15} \nabla^2 u = 0$$

2. В основном слое ($-h_1 < x_1 < 0$)

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{44}^{(1)} \nabla^2 u_1 \quad (5)$$

3. В дополнительном слое ($-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1$)

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{44}^{(2)} \nabla^2 u_2 \quad (6)$$

Упругие и электрические характеристики должны удовлетворять условиям $x_1 \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow 0$ и граничным условиям на границах слоистой системы, а также условиям непрерывности подложки и основного слоя:

На границе $x_1 = -h_1$

$$\sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, u_1 = u_2 \quad (7)$$

На границе $x_1 = 0$

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}, u = u_1, \varphi = 0 \quad (8)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{44} = c, c_{44}^{(1)} = c_1, c_{44}^{(2)} = c_2, e_{15} = e, e_{14} = d, \varepsilon_{11} = \varepsilon, \\ \bar{c} = c(1 + \chi^2), \chi^2 = e^2 / \varepsilon c, \bar{e} = e / \varepsilon, S = \sqrt{\bar{c} / \rho}, S_1 = \sqrt{c_1 / \rho_1}, \\ S_2 = \sqrt{c_2 / \rho_2}, \varphi' = \varphi - \bar{e} u, S = S_0 \sqrt{1 + \chi^2}, S_0 = \sqrt{c / \rho} \end{aligned} \quad (9)$$

где χ^2 – коэффициент электромеханической связи, S_0 – скорость распространения упругих сдвиговых объемных волн, S, S_1, S_2 – скорости распространения упругих сдвиговых объемных волн в подложке и в слоях, φ' – новая неизвестная функция, связанная с перемещением u и потенциалом φ подложки.

Из уравнений (1)-(8) получим модель для получения волн Лява.

1. Уравнения в подложке ($0 < x_1 < +\infty$)

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \varphi' &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

2. В основном слое ($-h_1 < x_1 < 0$)

$$\nabla^2 u_1 = \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (11)$$

3. В дополнительном слое

$$\nabla^2 u_2 = \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (12)$$

4. Граничные условия при $x_1 = -(h_1 + h_2)$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (13)$$

5. Граничные условия при $x_1 = -h_1$

$$u_1 = u_2, c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = c_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (14)$$

6. Граничные условия при $x_1 = 0$

$$u = u_1, \bar{e} u + \varphi' = 0, \bar{c} \frac{\partial u}{\partial x_1} + e \frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} - d \frac{\partial \varphi'}{\partial x_2} - d e' \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (15)$$

7. Условия затухания при $x_1 \rightarrow +\infty$

$$u \rightarrow 0, \varphi' \rightarrow 0 \quad (16)$$

2. Решение задачи. Решение уравнений будем искать в виде плоской гармонической волны, которая распространяется в направлении оси Ox_2 и затухает вдоль оси Ox_1 , когда $x_1 \rightarrow +\infty$

$$u = U(x_1)e^{i(\rho x_2 - \omega t)}, \quad -(h_1 + h_2) < x_1 < +\infty$$

$$\varphi = \Phi(x_1)e^{i(\rho x_2 - \omega t)}, \quad 0 < x_1 < +\infty$$
(17)

где $U(x_1)$ и $\Phi(x_1)$ – неизвестные, зависящие от координаты x_1 и должны удовлетворять условиям затухания (16), ω – частота волны, p – волновое число, в предположении, что

$$\omega > 0, \quad p > 0, \quad V = \omega / p > 0$$
(18)

V – фазовая скорость распространения разыскиваемой волны.

Подставляя выражения (17) в уравнения (10)-(12) и удовлетворяя условиям затухания (16), получим систему однородных алгебраических уравнений, приравняв к нулю детерминант которой, получим дисперсионное уравнение

$$\beta(V) = \tilde{c}_1 \beta_1(V) \frac{\tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 K_1) + \tilde{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 K_2)}{\tilde{c}_1 \beta_1(V) - \tilde{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_1 K_1) \operatorname{tg}(\beta_2 K_2)} + R$$
(19)

И, соответственно, для платины и алюминия получим

$$\beta(V) = \tilde{c}_1 \beta_1(V) \frac{\tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 K_1) - \tilde{c}_2 \gamma_2(V) \operatorname{th}(\gamma_2 K_2)}{\tilde{c}_1 \beta_1(V) + \tilde{c}_2 \gamma_2(V) \operatorname{tg}(\beta_1 K_1) \operatorname{th}(\gamma_2 K_2)} + R,$$
(20)

$$\text{где } \beta_1(V) = \sqrt{1 - V^2 / S}, \quad \beta_2(V) = i\gamma_2(V), \quad \gamma_2(V) = \sqrt{\frac{V^2}{S_2^2} - 1} > 0, \quad K_{1,2} = p h_{1,2}$$
(21)

Здесь K_1, K_2 – приведенные (относительные) постоянные.

Приведем в таблице некоторые величины данных сред.

	C_{44} N/m ²	ρ kg/m ³	e_{15} C/m ²	ε_{11} F/m	V_{BG} m/s	S m/s
1 PZT-4	$2,56 \cdot 10^{10}$	$7,5 \cdot 10^3$	12,7	$65 \cdot 10^{-10}$	2256,86	2592,65
3 Al	$2,83 \cdot 10^{10}$	$2,702 \cdot 10^3$	–	–	–	3236,31
2 Zn	$4,5 \cdot 10^{10}$	$7,14 \cdot 10^3$	–	–	–	2510,48

Мы здесь рассмотрим первую моду волны Лява. Предположим, что первый слой отсутствует, т.е. $K_1 = 0$. В случае системы подложка-слой-2 получим следующее дисперсионное уравнение [4,5]:

$$\beta(V) = -\tilde{c}_2 \gamma_2(V) \operatorname{th}[\gamma_2(V) K_2] + R,$$
(22)

здесь учтено, что в случае $V < S < S_2$ имеем $\beta_2 = i\gamma_2$. Так как имеем случай жесткого слоя ($S < S_2$), $0 < R = \operatorname{const} < 1$, то будем иметь одно решение, которое опишется одной дисперсионной кривой, приведенной на фиг.1.

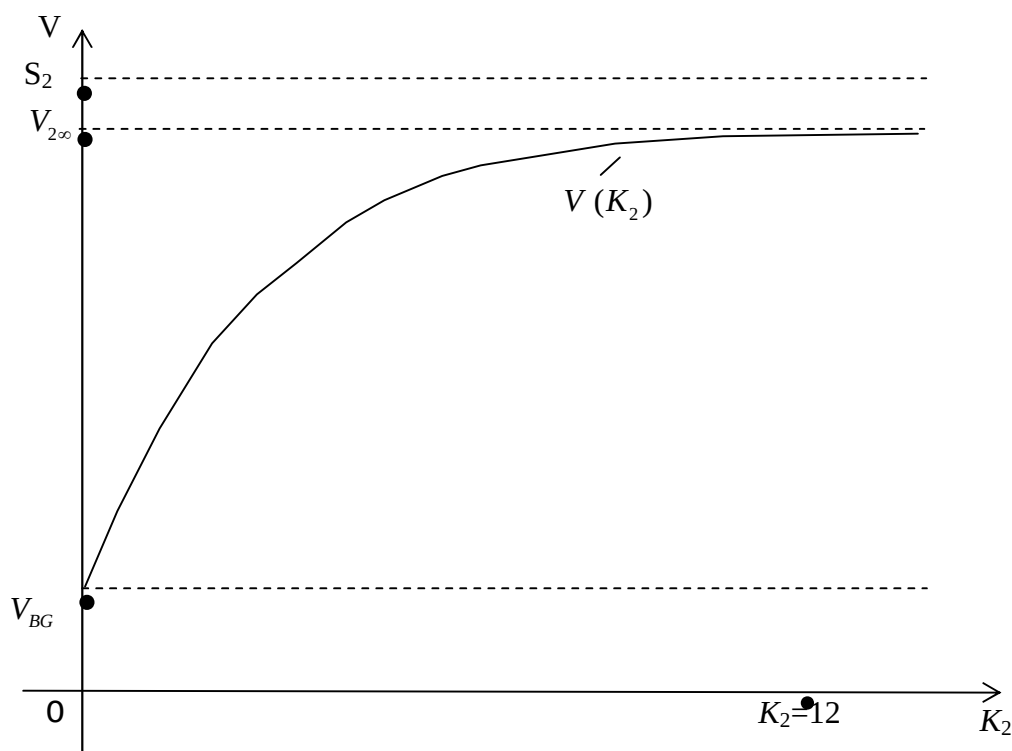
Как видно из фиг.1, скорость волны Лява начинается со скорости волны Гуляева-Блюстейна V_{GB} (когда $K_1 = 0$) и при возрастании K_2 монотонно возрастает. Но ни при каком значении K_{20} не достигает величины $S = 2592,65$ м/с (которая равна скорости распространения объемной сдвиговой волны в пьезоэлектрике), так как возрастая в бесконечность, стремится к значению $V_{2\infty} = 2563,49$ м/с (практически, когда $K \geq 12$).

При $K_2 = 0$ уже имеем новую систему PZT-4–Pt-2 (подложка-слой-1), в котором слой мягче подложки. В этом случае из уравнения (17) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\beta(V) = -\tilde{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}[\beta_2(V) K_2] + R$$
(23)

которое мы должны исследовать в интервале $K_2 \in [0, \infty]$, $V \in [0, S]$. Так как $S_2 < S$, то в интервале $V \in [0, S_2]$ уравнение (23) можем заменить уравнением (22). Воспользуемся результатами работы [3].

Поскольку здесь $R = \operatorname{const} > 0$ и $S_1 < V_{BG} < S$, поведение волны Лява описывают дисперсионные кривые фиг. 2.

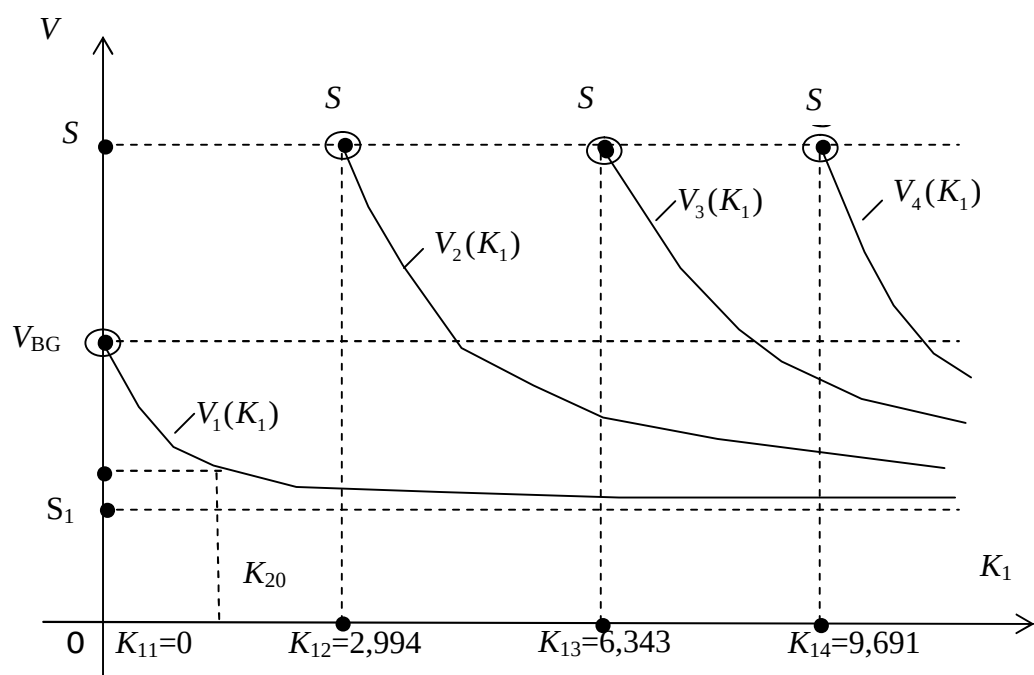


Фиг.1

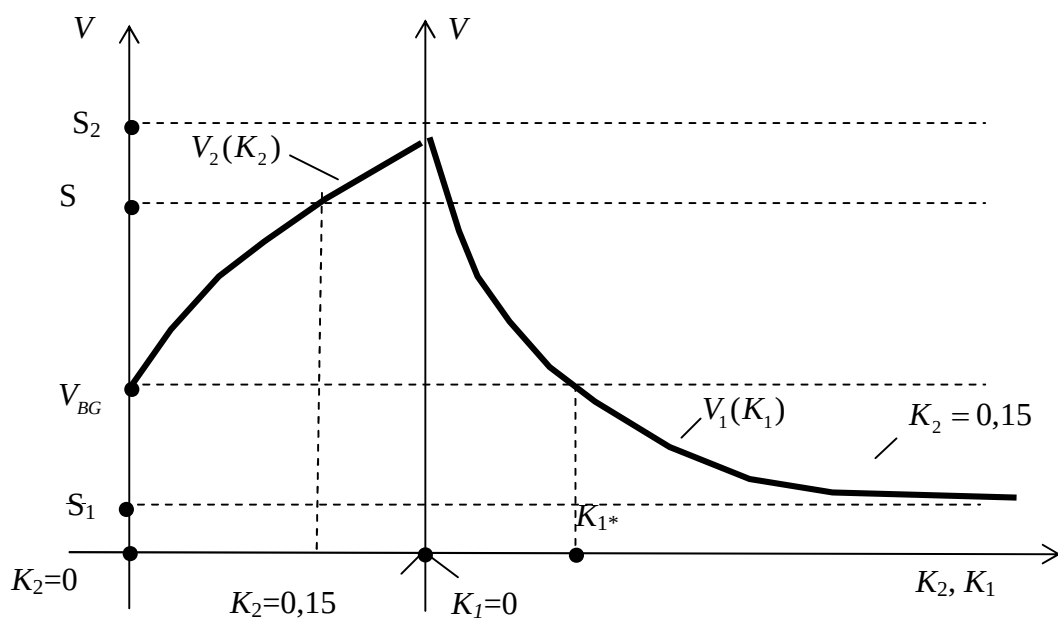
Как видно из фигуры, высокие моды волны Лява начинаются с критических значений K_{12} , K_{13} , K_{14} и т.д., как основные объемные волны распространяются со скоростью S , затем, при возрастании K_1 становятся поверхностными, и с убыванием скорости приближаются к волне, распространяющейся в слое со скоростью S_1 . Первая мода $K_{11} = 0$ начинается с поверхностной волны Гуляева-Блюстейна, которая имеет скорость V_{BG} и распространяется с убывающей скоростью $V_1(K_1)$ и при $K_1 \rightarrow \infty$ стремится к значению S_1 .

Перейдем к общему случаю. Возьмем для второго слоя определенную фиксированную толщину K_2 (например, $K_{20} = 0,15$), а K_1 будем изменять в интервале $[0, \infty]$. Если $K_1 = 0$, то в системе подложка-слой будет распространяться волна Лява со скоростью $V_{20} < V_{2\infty}$ (фиг.3).

Теперь добавим 1-ый слой толщиной K_1 . В полученной двухслойной системе распространится первая мода волны Лява со скоростью меньшей V_{20} , которая при определенном значении K_{1*} приравняется к скорости волны Гуляева-Блюстейна и затем, при возрастании значения K_1 , убывая, будет стремиться к скорости объемных волн первого слоя S_1 . Затем, при возрастании параметра K_2 скорость $V_{20}(K_2)$ также возрастёт, стремясь к значению $V_{2\infty}$ и скорость $V_1(K_1)$ изменится подобно предыдущему случаю – убывает от $V_{20}(K_2)$ до S_1 . Дисперсионная кривая подобна кривой фиг.3. Высокие моды возникают подобным образом. Например, приведем значение критических точек $K_{12} = 2.989$, $K_{13} = 6.338$, $K_{14} = 9678$ при $K_1 = 0.1$.



Фиг. 2.



Фиг.3

Заключение. Таким образом, мы видим, что в данной трехслойной системе скорость волны Лява уменьшается, стремясь к скорости объемных волн, распространяющихся в платине, при этом, систему возможно обезопасить от механических повреждений, что положительно скажется на работе устройств, применяющих данный принцип.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
2. Кесенних Г.Г. Поверхностные волны Лява для двух изотропных слоев на изотропной подложке. // Акуст. журнал. 1984. Т.30. Вып.1. С.74-78.
3. Danoyan Z.N., Pilliposyan G. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer.–International Jornal Solids and Structures, V.12 , 2007
4. Даноян З.Н., Манукян Г.А., Берберян А.Х., Даноян Н.З. Поверхностные сдвиговые электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и двумя изотропными слоями произвольной толщины.// Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №3. С. 44-64.
5. Берберян А.Х. Некоторые вопросы распространения сдвиговых волн в пьезокристаллах. / Канд.дис. Ереван, 2008. 119 с. (Институт механики НАН Армении).

Сведения об авторе

Берберян Армен Хачатурович –кандидат физ.-мат. наук, науч. сотрудник Института механики НАН Армении.

Армения, Ереван, ул. Ширака, дом 7/1 кв.10.

Тел: (37410) 46-20-96, (094) 19-19-86

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ФЛАТТЕРА ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Ваян Л.А., Минасян Д.М.

Рассматривается задача об изгибных колебаниях пластины переменной толщины, односторонне обтекаемой трехмерным нестационарным сверхзвуковым потоком идеального газа. Поперечное движение пластинки описывается следующим уравнением [1]:

$$L[w(x, t)] + P[w(x, t)] = 0 \quad (1)$$

где L – дифференциальный оператор по x, t и описывает движение пластинки в вакууме, P – оператор давления газа на пластинку, определяемый из решения внешней задачи и граничных условий на поверхности раздела сред, $w(x, t)$ – прогиб пластинки. В работах [2, 3] для избыточного давления выведено следующее уравнение:

$$\frac{D_1}{Dt}[P] = \rho_0 a_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right] w + \chi \rho_0 a_0^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{D_1}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (U - a_0) \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

где

U – невозмущенная скорость потока;

ρ_0, a_0 – невозмущенные параметры газа (плотность и скорость звука в газе, соответственно);

C – некоторый поправочный коэффициент.

В работах [2, 3] показано, что уравнение (2) для бесконечной пластинки при малых или умеренных числах Маха как качественно, так и количественно (путем подбора C) почти идеально совпадает с точным, в то время как известная «поршневая» теория в указанном диапазоне изменения числа Маха неверна.

Пусть линейный дифференциальный оператор L имеет вид:

$$L \equiv D \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \nabla^2 D \nabla^2 w + r h(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

где

D – изгибная жесткость,

ρ – плотность материала пластинки.

а функция $h(x)$, характеризующая толщину пластинки, имеет вид:

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{l^2} \right), \quad h_0 = \text{const}$$

Рассмотрим бесконечную по направлению y пластинку, шарнирно опертую по краям. Исключив из системы уравнений (1) и (2) избыточное давление P и введя следующие безразмерные величины:

$$x = l \xi, \quad t = \frac{\tau}{\omega_0}, \quad \lambda_0 = \frac{\rho_0 a_0}{\rho h \omega_0}, \quad M_0 = \frac{a_0}{l \omega_0}, \quad M_1 = \frac{U}{l \omega_0} = M M_0, \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h l^4} \quad (4)$$

где ω_0 и D_0 – соответственно, частота собственных колебаний системы и изгибная жесткость пластинки при толщине h_0 . Для функции изгиба w получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^5}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \frac{12}{\pi^4 (1 + \xi^2)^3} (\xi + 2\xi^3 + \xi^5) \frac{\partial^4}{\partial \xi^3 \partial \tau} + \frac{6\pi^{-4}}{(1 + \xi^2)^3} (1 + 6\xi^3 + 5\xi^4) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \tau} + (1 + \xi^2) \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{18M_0(M-1)}{\pi^4(1+\xi^2)^3}(\xi+2\xi^3+\xi^5)\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{M_0(M-1)}{\pi^4}\frac{\partial^5 W}{\partial \xi^5} + \frac{18M_0(M-1)}{\pi^4(1+\xi^2)^3}(1+6\xi^2+5\xi^4)\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \\
& + \frac{18M_0(M-1)}{\pi^4(1+\xi^2)^3}(1+6\xi^2+5\xi^4)\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (2\xi M_0(M-1)+\lambda_0)\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \lambda_0 M_0(2M-1)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \tau} + \quad (5) \\
& + \left[\frac{36M_0(M-1)}{\pi^4(1+\xi^2)^3}(2\xi+5\xi^3)+\lambda_0 M_0^2(M^2-M+\chi) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + M_0(M-1)(1+\xi^2)\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \tau^2} = 0
\end{aligned}$$

Представим решение (5) в виде

$$W(\xi, \tau) = f(\tau)v(\xi).$$

При шарнирном опирании имеем условия

$$\xi = 0; 1: \quad v(\xi) = v''(\xi) = 0 \quad (6)$$

Пятое необходимое граничное условие получим из точного уравнения, приведенного в [1], положив $x = 0$ [4] и используя безразмерные величины:

$$v^{(4)}(\xi) + \pi^4 \chi \lambda_0 M_0 M v'(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi = 0$$

Отметим, что это граничное условие учитывает аэродинамическое условие передней сверхзвуковой кромки по формуле Аккеретта-Буземанна [1].

Итак, мы получили задачу о собственных колебаниях одномерной системы. Будем исследовать только главную форму колебаний. Представим функцию $v(\xi)$ в следующем виде:

$$v(\xi) = \sin \pi \xi p(\xi), \quad p(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k$$

Поскольку два из пяти граничных условий выполняются с учётом множителя $\sin \pi \xi$, то для выполнения трех оставшихся условий примем

$$p(\xi) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3$$

Удовлетворив этим условиям, окончательно для функции прогиба $v(x)$ получим (с точностью до постоянного множителя)

$$v(\xi) = \left(\gamma(M) + \frac{3}{2} \xi^2 - \xi^3 \right) \sin \pi \xi, \quad \text{где } \gamma(M) = \frac{24}{\chi \lambda_0 M_0 \pi^4} M^{-1}$$

К уравнению (5) применим проекционный метод Бубнова-Петрова [5].

Для амплитудной функции получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\ddot{f} + A\dot{f} + Bf + Cf = 0$$

здесь коэффициенты A, B, C имеют следующий вид:

$$A(l_0, M_0, M) = I_1 + I_2, \quad B(l_0, M_0, M) = I_3 + I_4 + I_5 + I_6, \quad C(l_0, M_0, M) = I_7 + I_8 + I_9 + I_{10}$$

где I_n зависят от параметров l_0, M_0 , от числа Маха M и имеют вид:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\int_0^1 [2\xi M_0(M-1)] v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\int_0^1 (1+\xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_2 &= \frac{M_0(M-1) \int_0^1 (1+\xi^2) v'(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\int_0^1 (1+\xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{\int_0^1 v^{(4)}(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\pi^4 \int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_4 &= \frac{12 \int_0^1 (\xi + 2\xi^3 + \xi^5) (1 + \xi^2)^{-3} v'''(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\pi^4 \int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_5 &= \frac{6 \int_0^1 (1 + 6\xi^2 + 5\xi^4) (1 + \xi^2)^{-3} v''(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\pi^4 \int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_6 &= \frac{\lambda_0 M_0 (2M - 1) \int_0^1 v'(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_7 &= \frac{18M_0 (M - 1) \int_0^1 (\xi + 2\xi^3 + \xi^5) (1 + \xi^2)^{-3} v^{(4)}(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\pi^4 \int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_8 &= \frac{M_0 (M - 1) \int_0^1 v^{(5)}(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\pi^4 \int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_9 &= \frac{18M_0 (M - 1) \int_0^1 (1 + 6\xi^2 + 5\xi^4) (1 + \xi^2)^{-3} v'''(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\pi^4 \int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}, \\
I_{10} &= \frac{\int_0^1 \left[36\pi^{-4} M_0 (M - 1) (1 + \xi^2)^{-3} (2\xi + 5\xi^3) + \lambda_0 M_0^2 (M^2 - M + \chi) \right] v''(\xi) \sin \pi \xi d\xi}{\int_0^1 (1 + \xi^2) v(\xi) \sin \pi \xi d\xi}
\end{aligned}$$

Для исследования характеристического уравнения

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (10)$$

и определения границ области устойчивости в пространстве параметров задачи применяем критерий Раунса-Гурвица [6]. В итоге получаем, что область устойчивости определяется решением системы неравенств

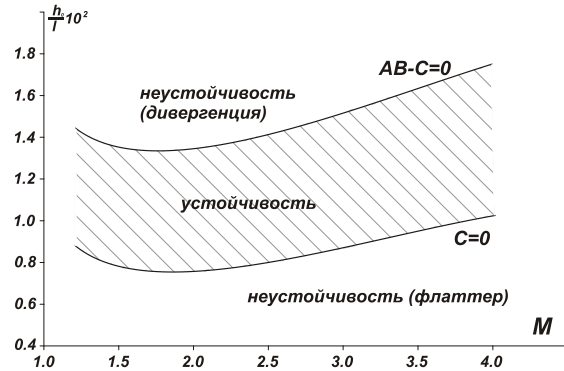
$$\begin{cases} A > 0 \\ AB - C > 0 \\ C(AB - C) > 0 \end{cases}.$$

Для конкретности, рассмотрим численный пример для алюминиевой пластинки, обтекаемой воздухом:

$$E = 7.1 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad \rho = 2.71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$n = 0.34, \quad a_0 = 320 \text{ м/с}, \quad \rho_0 = 1.08 \text{ кг/м}^3$$

Область устойчивости в плоскости параметров h_0/l и числа Маха M представлено на



вышеприведенном рисунке (заштрихованная область).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В.В.** Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. М.: ФМ, 1961.
2. **Минасян М.М., Минасян Д.М.** Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Докл. НАН РА. 2001. Т. 1. №1.
3. **Минасян М.М.** Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ереван: Изд.ЕГУ, 2007. 254с.
4. **Минасян Д.М.** Об одном приближенном методе определения главных частот одномерных колебаний. //Механика. Материалы респуб. конф. молодых ученых НАН РА и ЕГУ. Ереван: 1999. С.59-62.
5. **Miles J.W.** The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. Cambridge Univ. Press, 1959.
6. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Сведения об авторах

Минасян Давид Мелсович

зав. учебной лабораторией кафедры механики факультета математики и механики ЕГУ, кандидат физ.-мат. наук, Ереванский государственный университет,
Тел.: (094) 561176, E-mail: minasyan@ysu.am

Ванян Лилит Альфонсовна

младший научный сотрудник, Ереванский государственный университет

ПОПУСК ПАВОДКОВЫХ РАСХОДОВ ПО ВОДОСБРОСУ ПЛОТИНЫ ИМ. 17-ГО АПРЕЛЯ В РЕСПУБЛИКЕ СИРИЯ

Габаян Г.С., Мхитарян Л.С.

Плотина 17-го Апреля (Сирийская Арабская республика) является каменно-набросной плотиной с наклонным суглинистым ядром. Высота плотины составляет 68м, длина по гребню - 1050м. В центральном сечении ширина плотины по основанию составляет 330м. Низовой откос плотины имеет наклон 1:2, а верховой переменный, в верхней части 1:2, а ниже 1:2.25.

Крепление верхового откоса выполнено в виде каменной наброски. Поверхность гладкая, с выдержанным откосом по всей верховой грани.

Катастрофический водосброс Мексиканского типа длиной водосбросного фронта 100м.

Плотина построена в 2002 году. В 2008-2009 гг. велись исследования по оценке безопасности плотины в свете современных требований сооружений такого класса. Среди прочих исследований была проверена достаточность отметки гребня плотины для безаварийного пуска паводковых расходов.

Проектное расчетное обоснование отметки гребня плотины приведено в [5]. Для определения отметки гребня плотины использована методика расчета, приведенная в [6] и [7].

Как выяснилось из [5], при расчетах отметки гребня плотины обеспеченность скорости ветра при расчете по второму случаю (расчет от ФПУ) принималась равной 50%. Согласно СНиП [9] эта обеспеченность равна 20%. Более того, в проектных расчетах размеры камней крепления откоса верховой грани плотины принимались равными 0,78м. Путем фактических замеров размеров камней крепления откоса плотины было обнаружено, что она составляет 0,2-0,4м. Это приведет к существенному увеличению высоты наката ветровых волн на верховой откос плотины, а следовательно, и к увеличению требуемой отметки гребня плотины.

Для проверки этого нами были выполнены расчеты отметки гребня плотины при проектных параметрах, для ветра 20% обеспеченности и при замене крупности камней наброски с проектного на фактически исполненный 0.3м. Результаты расчетов отметки гребня и проверки его фактического исполнения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Расчетный случай	Отметка гребня, м	Отметка верха парапета, м	Недостаточность отметки гребня, м
Фактическое исполнение	339	340.2	-
Проектные отметки	339	340.2	-
Контрольный расчет по проектным параметрам	340.2	341.4	1.2
Контрольный расчет по фактическим параметрам	340.65	341.83	1.63

Как видно из таблицы, при проверке проектного расчета отметки гребня плотины было найдено, что недостаточность проектной отметки составляет 1.2м. Исходя из фактического исполнения крепления верхового откоса плотины, величина наката волн на откос возрастает, что приводит к увеличению недостаточности отметки гребня плотины до величины 1.63м.

При традиционном подходе к проблеме существуют два метода реконструкции плотины с целью обеспечения достаточного запаса по отметке гребня плотины:

1. Подъем гребня плотины на 1.63м выше фактически исполненного
2. Понижение отметки порога водосбросного фронта на соответствующую величину, обеспечивающую достаточность отметки гребня как от НПУ, так и от ФПУ.

Однако оба эти варианта весьма дорогостоящие и связаны с существенной реконструкцией сооружений. В первом варианте придется разобрать и заново построить весь гребень плотины с изменением заложений откосов, что, в свою очередь, негативно повлияет на устойчивость откосов. Во втором случае придется переделать весь начальный участок водосброса, что также связано с весьма серьезными затратами и дополнительными гидравлическими исследованиями

водосброса. Одновременно этот вариант приведет к уменьшению объема воды водохранилища. Следовательно, оба варианта практически трудно исполнимы.

Для решения задачи нами были изучен современный мировой опыт при решении подобных проблем. Как показали проведенные исследования, наиболее приемлемым решением в создавшейся ситуации является установка на водосбросном фронте плавких затворов разработанных Французской компанией Hydroplus International. Особенностью затворов "Гидроплюс" является полное отсутствие осевых и опорных конструкций. По существу затворы системы "Гидроплюс" являются коробами специальной конфигурации, свободно стоящие на гребне плотины, описание которых дано в [5].

Исследования разработки показали, что желательно понизить гребень водослива на 1.65м.

Использование плавких затворов Системы Hydroplus считается самым эффективным и самым надежным решением.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

- ФПУ: 338.50 м.
- Гребень Плотины: 339.00 м.
- Возвышение Гребня Парапета: 340.20 м.
- НПУ: 335.00 м.
- Тип водослива: незатопленный водослив.
- Длина водослива: 100.00 м.
- Объем на отметке 335.0: $189.296 \times 10^6 \text{ м}^3$.

Плавкие затворы проектировались для следующих исходных условий:

- Паводок 0.01% обеспеченности проходит при отметке уровня воды в водохранилище равной ФПУ =336.5 м
- Первая сработка плавких затворов должна происходить при расходе не с повторяемостью на 100 лет,
- Максимально увеличивается полезный объем водохранилища без применения гидро-механического оборудования.

Реконструкция порога водослива включает следующие работы:

- Существующий порог водослива должен быть понижен на 1.65 м вниз до отметки 333.35м.
- Должна быть построена платформа водослива для размещения плавких затворов.
- Необходимо понизить порог подводящего канала примерно на 2м ниже платформы водослива.

Расположение плавких затворов.

Объем водохранилища увеличивается за счет установки плавких затворов лабиринтного типа за счет подъёма ФПУ на 1,5м (336,5м) выше существующего.

Число плавких затворов	19
Высота /ширина затворов	3.20/5.26
Уровень верхней кромки затворов	336.50

Очередность опрокидывания.

Затворы опрокинутся группами (3 или 4 элемента в группе), когда уровень воды в водохранилище достигнет predetermined уровня (табл. 2).

Таблица 2

Очередность опрокидывания	1	2	3	4	5	6
Число единиц	3	3	3	3	3	4
Уровень опрокидывания	338.11	338.20	338.29	338.38	338.47	338.56

Такая последовательность опрокидывания позволит пропустить сработанные элементы затворов без образования заторов в быстротечной части.

На рис. 1 приведена схема установки затворов на водосливном фронте водосброса.

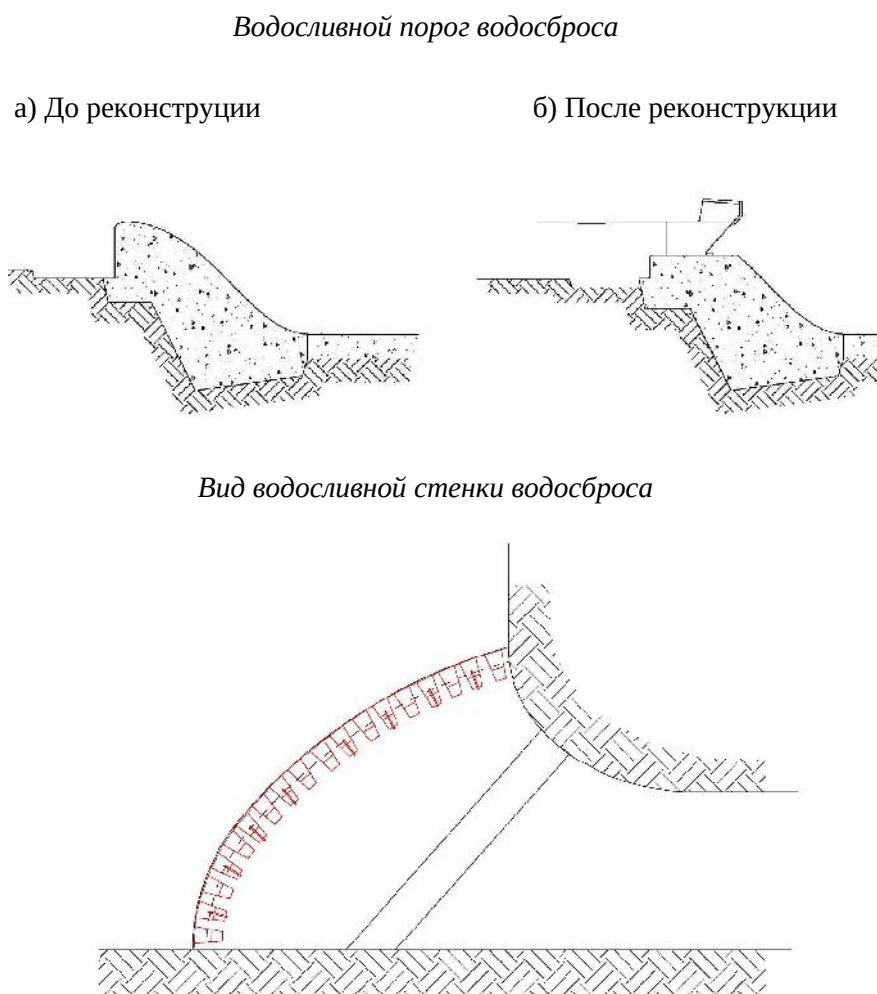


Рис.1 Схема установки затворов на водосливном фронте водосброса.

Таким образом, мы увеличиваем объем водохранилища почти до 15 млн. м³, а при катастрофических расходах высокой обеспеченности затворы срабатываются и обеспечивают безопасный пропуск паводка. С применением такой конструкции, одновременно можно увеличить полезный объем водохранилища с затратами на приведенный единичный дополнительный объем значительно ниже, чем фактическая приведенная стоимость 1м³ существующего водохранилища.

ЛИТЕРАТУРА

1. 17TH APRIL DAM PROJECT. DAM CROWN. Stage: Working Drawings. Branch of Aleppo. Aleppo, May, 1990.
2. NORMI ZA PROEKTIRANE NA NASIPNI IAZOVIRNI STENI, BULETIN ZA STROITELSTVO Y ARHITEKTURA, _ SOFIA, 1986 (in Bulgarien); English Version – NORMS FOR DESIGNING OF FILLING DAMS, BULLETIN FOR CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE, SOFIA, 1986.
3. СНиП 2.06.04-82. Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения (волновые, ледовые и от судов). М.: Стройиздат, 1983. –39с.
4. СНиП 2.06.05-84*. Плотины из грунтовых материалов. 1989. –50с.
5. Website: <http://hydroplus.com>

Сведения об авторе

Мхитарян Левон Суменович

аспирант, Ереванский гос. университет архитектуры и строительства

Адрес: Ереван, ул Теряна 105

Тел.: (093) 399-177, E-mail: levon-mxitaryan@yandex.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПАРАМЕТРА УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Галечян А.С.

В [3] приводится классификация моделей эффективности метода “оптимума номинала” [2] по количеству варьируемых моментов закона распределения вероятностей параметров управления. В настоящее время хорошо изучены и практически широко применяются задачи с вариацией математического ожидания, а остальные модели, представляющие большой теоретический и практический интерес, изучены недостаточно. Из указанных в [3] 16-ти типов моделей особый интерес представляют те, в которых предлагается достичь оптимальной эффективности вариацией дисперсии параметра управления. Решение указанного класса задач позволит при обработке металлов выбрать станки, точность которых наилучшим образом соответствует максимальной эффективности металлообработки.

Этот класс моделей в общем случае представляется интегралом

$$I(m, \sigma) = \int_a^b c(x) \cdot f(x, m, \sigma) dx, \quad (1)$$

где I – эффективность исследуемой системы; σ – среднее квадратическое отклонение закона распределения параметра управления x , $m = \text{const}$ – математическое ожидание параметра управления; $c(x)$ – заданная функция, характеризующая технико-экономические показатели исследуемого процесса; a, b – величины, характеризующие область, внутри которой нахождение параметра управления желательно, причем степень желательности задается функцией цены $c(x)$.

Отметим, что изменение численного значения S математически эквивалентно рассмотрению семейства однотипных законов распределения, а задача выбора оптимального значения дисперсии означает выбор конкретного закона из семейства $f(x, \sigma)$.

Указанная задача в каждом конкретном сочетании функций $c(x)$ и $f(x)$ может выявить скрытые возможности исследуемых процессов и без значительных затрат и капиталовложений достичь повышения эффективности их функционирования.

Рассмотрим следующую задачу, где случайный параметр управления подчиняется нормальному закону распределения, а функция $c(x)$ имеет следующую дискретную форму:

$$c(x) = \begin{cases} c_0, & \text{если } a_0 \leq x < a_1, \\ c_1, & \text{если } a_1 \leq x < a_2, \\ \vdots & \\ c_{N-1}, & \text{если } a_{N-1} \leq x < a_N, \end{cases}$$

где N – количество рассматриваемых областей параметра управления, а $\{[a_0, a_1), [a_1, a_2), \dots, [a_{N-1}, a_N)\}$ – те области рассмотрения, где $c(x)$ имеет постоянное значение c_i ($i = 0, \dots, N-1$).

Если параметр управления подчиняется нормальному закону распределения [1]:

$$f(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

тогда функция эффективности (1) имеет вид

$$I(\sigma) = \sum_{i=1}^N c_{i-1} \cdot \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

$I(\sigma)$ по σ достигает своего максимального значения при условии

$$\frac{\partial I(\sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad (2)$$

После необходимых преобразований выражение (2) имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N c_{i-1} \cdot ((a_{i-1} - m) \cdot e^{-\frac{(a_{i-1}-m)^2}{2\sigma^2}} - (a_i - m) \cdot e^{-\frac{(a_i-m)^2}{2\sigma^2}}) = 0 \quad (3)$$

Решая уравнение (3), получим оптимальное значение среднеквадратического отклонения $\sigma^* > 0$, при котором $I(\sigma^*) = \max_{\sigma} I(\sigma)$.

В частном случае, когда

$$c(x) = \begin{cases} c, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \end{cases}$$

условие оптимальности (3) принимает следующий вид:

$$c \cdot ((a - m) \cdot e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b - m) \cdot e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}}) = 0$$

или

$$(a - m) \cdot e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - (b - m) \cdot e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

откуда следует:

а) если $a \leq m \leq b$, то $\sigma^* = 0$;

$$\text{б) если } \begin{cases} a > m, \\ b > m \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < m, \\ b < m, \end{cases} \text{ то } \sigma^* = \sqrt{\frac{(b-m)^2 - (a-m)^2}{2 \cdot \ln\left(\frac{b-m}{a-m}\right)}}. \quad (4)$$

Из условия оптимальности (4) следует, что в этом случае σ^* не зависит от функции $c(x)$.

В общем случае от (3) следует также, что оптимальное значение дисперсии зависит как от рассматриваемых областей параметра управления и математического ожидания, так и от значения c_i ($i = 0, \dots, N-1$):

$$\sigma^* = \varphi(a_0, \dots, a_N, c_0, \dots, c_{N-1}, m).$$

Рассмотрим частный случай, когда $m = 1$ и

$$c(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } 1 \leq x < 2, \\ 2, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ 3, & \text{если } 3 \leq x < 6, \\ 5, & \text{если } 6 \leq x < 8, \\ 0, & \text{если } x > 8 \text{ или } x < 1. \end{cases}$$

Тогда условие оптимальности (3) имеет следующий вид:

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} + 2 \cdot (e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} - 2 \cdot e^{-\frac{2}{\sigma^2}}) + 3 \cdot (2 \cdot e^{-\frac{2}{\sigma^2}} - 5 \cdot e^{-\frac{25}{2\sigma^2}}) + 5 \cdot (5 \cdot e^{-\frac{25}{2\sigma^2}} - 7 \cdot e^{-\frac{49}{2\sigma^2}}) = 0,$$

где после необходимых преобразований получим

$$-35 \cdot e^{-\frac{49}{2\sigma^2}} + 10 \cdot e^{-\frac{25}{2\sigma^2}} + 2 \cdot e^{-\frac{2}{\sigma^2}} + 3 \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} = 0.$$

Решая это уравнение в среде программы Матрикс, получим

$$\sigma^* = 4,42409, \quad I(\sigma^*) = \max_{\sigma} I(\sigma) = 1,03178,$$

то есть существует числовое значение дисперсии σ^{*2} , которое обеспечивает возможную максимальную эффективность.

Начальные условия этой задачи графически представлены на рис. 1 и 2, а решение задачи – на рис. 3.

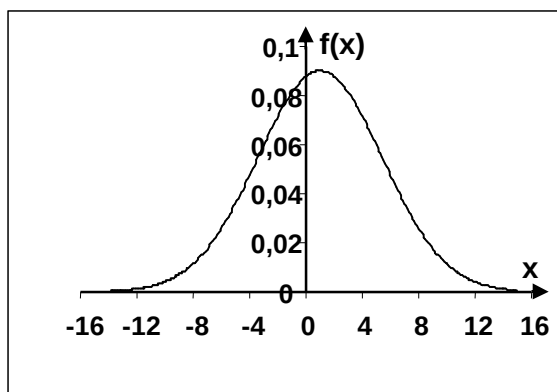


Рис. 1. Функция распределения параметра управления

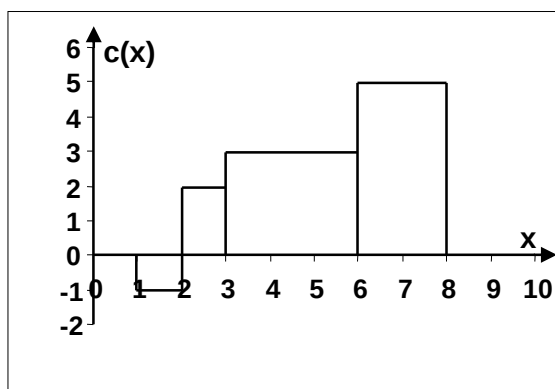


Рис. 2. Функция цены

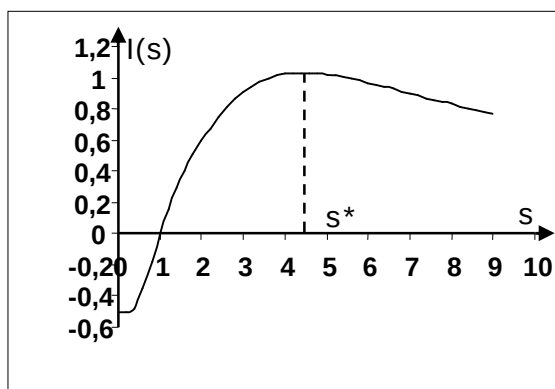


Рис. 3. График функции эффективности

В общем случае, когда функция $c(x)$ непрерывна в области $[a, b]$ и является линейной функцией :

$$c(x) = p \cdot x + q,$$

а параметр управления x подчиняется нормальному закону распределения, функция эффективности (1) будет:

$$I(\sigma) = \int_a^b (p \cdot x + q) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Условие оптимальности (2) в этом случае принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & p \cdot \sigma^2 \cdot e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} + p \cdot a^2 \cdot e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - p \cdot m \cdot a \cdot e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} + q \cdot a \cdot e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - \\ & - q \cdot m \cdot e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} - p \cdot \sigma^2 \cdot e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} - p \cdot b^2 \cdot e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} + p \cdot m \cdot b \cdot e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} - \\ & - q \cdot b \cdot e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} + q \cdot m \cdot e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что оптимальное значение дисперсии зависит как от рассматриваемой области параметра управления и математического ожидания, так и от коэффициентов p и q :

$$\sigma^* = \varphi(a, b, m, p, q).$$

Выводы. Обычно обширный класс задач решается с целью минимизации дисперсии. Показано, что существует специальный класс задач, в которых возможно достижение максимальной эффективности путем не минимизации дисперсии, а выбором ее оптимального значения, что в частном случае эквивалентно выбору оптимальной точности управления. Часто при обработке размеров деталей без обоснования используются станки и инструменты высокой точности, что экономически невыгодно. Разработанный метод позволяет осуществить процесс обработки станками и инструментами с менее высокой точностью с обеспечением максимальной экономической эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1964. - 576 с.
2. Горелова Г.В., Здор В.В., Свечарник Д.В. Метод оптимума номинала и его применение.//М.: Энергия, 1970. – 200с.
3. Налчаджян Т.А. Моделирование и оптимизация эффективности вероятностных технологических процессов обогащения руд цветных металлов: Дис. докт. техн. наук.// М.:1984, 437с.

Сведения об авторе

Галечян Айк Самвелович

аспирант, государственный инженерный университет Армении

Тел.: (010) 36-17-86, (093) 74-04-55, E-mail: ghayks@mail.ru

КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Гаспарян А. В., Давтян З. А.

Среди многочисленных научно-технических задач, возникающих при конструировании машин и проектировании инженерных сооружений, важное место занимают расчеты их элементов на прочность при кручении. Особое значение имеет исследование напряженного состояния однородных и неоднородных круглых цилиндров, работающих на кручение [1].

В настоящей работе рассматривается задача о стесненном кручении составного круглого цилиндра конечной длины, на крайних торцах которого приложены крутящие касательные нагрузки произвольной интенсивности, а боковая поверхность жестко закреплена.

Предполагается, что конечный круглый цилиндр состоит из произвольного конечного числа различных цилиндров с разными упругими и геометрическими характеристиками, спаянных между собой торцами. Требуется определить контактные напряжения на торцах соединения цилиндров.

Решение указанной задачи при помощи конечного преобразования Ханкеля сводится к решению разностного неоднородного уравнения, решение которого, в свою очередь, можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

Полученные простые формулы позволяют определить требуемые контактные напряжения и другие физико-механические характеристики задачи.

1. Пусть круглый цилиндр конечной длины l и радиуса a представляет собой пакет из n цилиндров различных длин $l_{k-1} \leq z \leq l_k$ ($k = \overline{1, n}$) с модулями сдвига G_k , спаянных торцами между собою. Пусть далее такой композит скручивается произвольными нагрузками интенсивностей $\tau_0(z)$ и $\tau_1(z)$, приложенными к крайним торцам составного цилиндра, т. е.

$$\tau_{z=0}(r, z)|_{z=l_0} = \tau_0(r), \quad \tau_{z=l_n}(r, z)|_{z=l_n} = \tau_n(r) \quad (0 < r < a) \quad (1.1)$$

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи рассмотрим k -ый элемент пакета. Тогда придем к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_k}{\partial r} - \frac{V_k}{r^2} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial z^2} = 0 \\ G_k \frac{\partial V_k}{\partial z} \Big|_{z=l_{k-1}} = \tau_{k-1}(r), \quad G_k \frac{\partial V_k}{\partial z} \Big|_{z=l_k} = \tau_k(r) \\ V_k(a, z) = 0 \\ (0 < r < a, \quad l_{k-1} < z < l_k, \quad k = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (1.2)$$

где $V_k = V_k(r, z)$ – единственная компонента смещения в окружном направлении при кручении, а $\tau_{k-1}(r)$ и $\tau_k(r)$ – неизвестные касательные контактные напряжения на торцах $z = l_{k-1}$ и $z = l_k$, ($k = \overline{1, n}$) цилиндра.

Для решения граничной задачи (1.2) введем в рассмотрение трансформанты Фурье-Ханкеля

$$\{\bar{V}_k(z, \lambda_i), \bar{\tau}_k(\lambda_i)\} = \int_0^a \{V_k(r, z); \tau_k(r)\} r J_1(r \lambda_i) dr, \quad (1.3)$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя первого рода индекса 1, а λ_i – корни уравнения $J_1(a \lambda_i) = 0$ [2].

При помощи (1.3) в трансформантах Фурье-Ханкеля граничная задача (1.2) примет вид

$$\frac{d^2 \bar{V}_k}{dz^2} - \lambda_i^2 \bar{V}_k = 0 \quad (l_{k-1} < z < l_k, \quad k = \overline{1, n}) \quad (1.4)$$

$$G_k \frac{d\bar{V}_k}{dz} \Big|_{z=l_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}, \quad G_k \frac{d\bar{V}_k}{dz} \Big|_{z=l_k} = \bar{\tau}_k,$$

где $\bar{V}_k = \bar{V}_k(z, \lambda_i)$, $\bar{\tau}_k = \tau_k(\lambda_i)$.

При этом, здесь использованы известные соотношения [3]

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_k}{\partial r} - \frac{V_k}{r^2} \right) r J_1(r \lambda_i) dr = -\lambda_i^2 \bar{V}_k.$$

Решение краевой задачи (1.4) имеет вид

$$\bar{V}_k = V_k(z, \lambda_i) = A_k \operatorname{ch}(\lambda_i z) + B_k \operatorname{sh}(\lambda_i z) \quad (l_{k-1} \leq z \leq l_k), \quad (1.5)$$

где коэффициенты A_k и B_k определяются из граничных условий (1.4), которые при помощи (1.5) представим в виде

$$\begin{cases} \lambda_i G_k A_k \operatorname{sh}(\lambda_i l_{k-1}) + \lambda_i G_k B_k \operatorname{ch}(\lambda_i l_{k-1}) = \bar{\tau}_{k-1} \\ \lambda_i G_k A_k \operatorname{sh}(\lambda_i l_k) + \lambda_i G_k B_k \operatorname{ch}(\lambda_i l_k) = \bar{\tau}_k \end{cases} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1.6)$$

Из систем уравнений (1.6) легко находим

$$A_k = \frac{\bar{\tau}_k \operatorname{ch}(\lambda_i l_{k-1}) - \bar{\tau}_{k-1} \operatorname{ch}(\lambda_i l_k)}{\lambda_i G_k \operatorname{sh}(\lambda_i d_k)}, \quad B_k = \frac{\bar{\tau}_{k-1} \operatorname{sh}(\lambda_i l_k) - \bar{\tau}_k \operatorname{sh}(\lambda_i l_{k-1})}{\lambda_i G_k \operatorname{sh}(\lambda_i d_k)} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (1.7)$$

где $d_k = l_k - l_{k-1}$ – высота k -ого цилиндра.

Условия непрерывности смещений на линии контакта ($z = l_k$) двух цилиндров

$$\bar{V}_k \Big|_{a=l_k} = \bar{V}_{k+1} \Big|_{a=l_k}, \quad (k = \overline{1, n-1})$$

при помощи (1.5) запишутся в виде

$$A_k \operatorname{ch}(\lambda_i l_k) + B_k \operatorname{sh}(\lambda_i l_k) = A_{k+1} \operatorname{ch}(\lambda_i l_k) + B_{k+1} \operatorname{sh}(\lambda_i l_k) \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.8)$$

Теперь приняв во внимание (1.7) и (1.8), после элементарных преобразований относительно трансформантов Фурье-Ханкеля неизвестных контактных напряжений $\bar{t}_k$ получим следующие уравнения:

$$\frac{\bar{\tau}_{k-1} - \bar{\tau}_k \operatorname{ch}(\lambda_i d_k)}{\lambda_i G_k \operatorname{sh}(\lambda_i d_k)} = \frac{\bar{\tau}_k \operatorname{ch}(\lambda_i d_{k+1}) - \bar{\tau}_{k+1}}{\lambda_i G_{k+1} \operatorname{sh}(\lambda_i d_{k+1})} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.9)$$

Далее, вводя обозначение

$$a_k = \frac{1}{G_k \operatorname{sh}(\lambda_i d_k)} \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}(\lambda_i d_k)}{G_k} \quad k = \overline{1, n}$$

уравнения (1.9) можно представить в виде конечно-разностных уравнений второго порядка [4]

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n-1}). \quad (1.10)$$

Уравнения (1.10) можно свести к конечно-разностным уравнениям первого порядка, положив

$$a_k \bar{t}_{k-1} - b_k \bar{t}_k = f_k \quad (1.11)$$

$$a_k \bar{t}_k - b_k \bar{t}_{k-1} = g_k \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (1.12)$$

Тогда система (1.10) перейдет в равенство

$$f_k + g_{k+1} = 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (1.13)$$

Таким образом, решение поставленной здесь задачи сводится к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.11) и (1.12).

После того, как построены решения этих уравнений, по формуле (1.7) определяются коэффициенты A_k и B_k , а затем по формуле (1.5) – функции $\bar{V}_k(l_i, z)$. Затем, при помощи

обратного преобразования Фурье-Ханкеля определяются функции $V_k(z, r)$, $k = (\overline{1, n})$, а при помощи последних – контактные напряжения в композите.

2. Решение конечно-разностных уравнений первого порядка (1.11) и (1.12) построим известным методом [4].

Далее рассмотрим уравнения (1.11), которые представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_k &= [1 - P(k)]\bar{\tau}_{k-1} + Q(k) \\ P(k) &= \frac{b_k - a_k}{b_k}, \quad Q(k) = -\frac{f_k}{b_k} \quad k = (\overline{1, n-1}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Сначала построим решение однородного уравнения (2.1)

$$\bar{\tau}_k = [1 - P(k)]\bar{\tau}_{k-1} \quad k = (\overline{1, n-1}). \quad (2.2)$$

Решение (2.2), согласно [4], можно представить в виде

$$\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_0 \prod_{j=1}^k [1 - P(j)] \quad k = (\overline{1, n-1}). \quad (2.3)$$

Далее методом вариаций находим решение неоднородного уравнения (2.1). В итоге, общее решение (2.1) имеет вид

$$\bar{\tau}_k = -\prod_{j=1}^k [1 - P(j)] \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{b_i \prod_{r=1}^i [1 - P(r)]} - \bar{\tau}_0 \right\} \quad k = (\overline{1, n-1}). \quad (2.4)$$

Совершенно аналогичным способом решение уравнения (1.12) представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_k &= -\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{1 - \tilde{P}(j)} \left\{ \sum_{i=k}^{n-1} \frac{g_{i+1}}{a_{i+1}} \prod_{r=i+1}^{n-1} [1 - \tilde{P}(r)] + \bar{\tau}_n \right\} \\ \tilde{P}(k) &= \frac{(a_{k+1} - b_{k+1})}{a_{k+1}} \quad k = (\overline{1, n-1}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теперь, приравнявая выражения (2.4) и (2.5) и учитывая (1.13) относительно неизвестных f_i , $i = (\overline{1, n-1})$, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{n-1} G_{i+1} \operatorname{sh}(\lambda d_{i+1}) \frac{\prod_{r=i+1}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{r+1})}{\prod_{j=k}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{j+1})} f_i + \frac{\bar{\tau}_n}{\prod_{j=k}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{j+1})} = \\ = -\sum_{i=1}^k G_i \operatorname{th}(\lambda d_i) \frac{\prod_{r=1}^i \operatorname{ch}(\lambda d_r)}{\prod_{j=1}^k \operatorname{ch}(\lambda d_j)} f_i + \frac{\bar{\tau}_0}{\prod_{j=1}^k \operatorname{ch}(\lambda d_j)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(\lambda = \lambda_i, \quad k = \overline{1, n-1})$$

или вводя обозначения

$$\begin{aligned} A_i &= G_i \operatorname{th}(\lambda d_i), \quad (i = \overline{1, k}), & B_i &= G_{i+1} \operatorname{sh}(\lambda d_{i+1}), \quad (i = \overline{k, n-1}) \\ C_i &= \prod_{r=1}^i \operatorname{ch}(\lambda d_r), \quad (i = \overline{1, k}), & D_i &= \prod_{r=1}^{n-1} \operatorname{ch}(\lambda d_{r+1}), \quad (i = \overline{k, n-1}) \end{aligned}$$

систему (2.6) запишем в виде

$$A_k f_k + \sum_{i=1}^{k-1} A_i \frac{C_i}{C_k} f_i + \sum_{i=k}^{n-1} B_i \frac{D_{i+1}}{D_k} f_i = \frac{\bar{\tau}_0}{C_k} - \frac{\bar{\tau}_n}{D_k}, \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (2.7)$$

Теперь преобразуем (2.7), положив

$$K_n = \prod_{r=1}^n \text{ch}(\lambda d_r).$$

Тогда

$$D_{i+1} = \prod_{r=i+1}^{n-1} \text{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{\text{ch}(\lambda d_{r+1}) C_i}$$

$$D_k = \prod_{j=k+1}^{n-1} \text{ch}(\lambda d_{r+1}) = \frac{K_n}{C_k} \quad (i = \overline{k, n-1}, \quad k = \overline{1, n-1}).$$

Окончательно (2.7) преобразуется в следующую систему линейных уравнений с левой треугольной матрицей:

$$\sum_{i=1}^k L_{ki} f_i = h_k, \quad (k = \overline{1, n-1})$$

$$L_{ki} = \begin{cases} A_i C_i - \frac{C_k^2}{C_i} A_{i+1}, & (i = \overline{1, k-1}) \\ A_k C_k, & (i = k) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$h_k = \bar{\tau}_n - C_k^2 \left(X_n + \frac{\bar{t}_n}{K_n} \right), \quad X_n = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}}{C_i} f_i.$$

После решения определяющей системы уравнений (2.8) контактные касательные напряжения по формуле обратного преобразования Фурье-Ханкеля будут

$$\tau_k(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(r\lambda_i) \bar{\tau}_k(\lambda_i)}{[J'_1(a\lambda_i)]^2} \quad (k = \overline{1, n-1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Госиноиздат, 1949. 655с.
3. Снеддон И., Преобразования Фурье. М.: Госиноиздат, 1955. 667с.
4. Гельфонд Н. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.

Сведения об авторах:

Гаспарян Ануш Вараздатовна

Младший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б

Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

Давтян Завен Азибекович

Кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б

Тел. (+37410) 52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДВУХСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Гулгазрян Л.Г.

Рассматриваются собственные колебания двухслойной ортотропной оболочки при полном контакте между слоями в зоне пограничного слоя. Выведены характеристические уравнения для определения скоростей убывания функций плоского и антиплоского пограничных слоев при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки. При собственных колебаниях оболочки каждой собственной частоте соответствует свой пограничный слой. Приведены первые некоторые численные значения для скорости затухания функций погранслоя.

В неклассической постановке задач о собственных колебаниях оболочек полное решение представляет из себя сумму решений внутренней задачи и решений в зоне пограничных слоев, локализованных у торцов $\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ [1,2]. При асимптотическом методе решения принимается, что влияние пограничного слоя, построенного вблизи одной кромки, не ощущается на другой. Несмотря на то, что пограничный слой локализован вблизи торцов, в общем случае, пограничный слой через граничные условия при $\alpha = \alpha_0, \alpha_1$ влияет на решение внутренней задачи [2,3].

Собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при полном контакте между слоями рассмотрены в работе [4].

Рассмотрим собственные колебания двухслойной ортотропной оболочки, $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta \in \Omega_0, -h_2 \leq \gamma \leq h_1\}$, где Ω_0 – поверхность контакта слоев, α – длина образующей, β – длина дуги направляющей оболочки, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к поверхности контакта слоев. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [1,2].

Имеем:

уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \tau_{\alpha\alpha}^{(j)}) - k_\beta \tau_{\beta\beta}^{(j)} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} (A \tau_{\beta\alpha}^{(j)}) + k_\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial \gamma} + \frac{2\tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{R_1} = \\ & = \rho^{(j)} \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \frac{\partial^2 U^{(j)}}{\partial t^2}, \quad (A \leftrightarrow B; \alpha \leftrightarrow \beta; R_1, R_2; U, V), j = I, II \\ & \frac{\partial \tau_{\gamma\gamma}^{(j)}}{\partial \gamma} - \left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}^{(j)}}{R_1} + \frac{\tau_{\beta\beta}^{(j)}}{R_2}\right) + \frac{1}{A} \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}^{(j)}}{\partial \beta} + k_\beta \tau_{\alpha\gamma}^{(j)} + k_\alpha \tau_{\beta\gamma}^{(j)} = \rho^{(j)} \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \frac{\partial^2 W^{(j)}}{\partial t^2} \quad (1) \\ & \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \tau_{\alpha\beta}^{(j)} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \tau_{\beta\alpha}^{(j)} \quad (\text{условие симметрии}) \end{aligned}$$

уравнения состояния (соотношения упругости)

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \alpha} + k_\alpha V^{(j)} + \frac{W^{(j)}}{R_1}\right) = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) a_{11}^{(j)} \tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) a_{12}^{(j)} \tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \tau_{\gamma\gamma}^{(j)} \\ & (A, B; \alpha \leftrightarrow \beta; R_1 \leftrightarrow R_2; U \leftrightarrow V; a_{11}, a_{22}; a_{13}, a_{23}) \\ & \left[1 + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\gamma^2}{R_1 R_2}\right] \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \gamma} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) a_{13}^{(j)} \tau_{\alpha\alpha}^{(j)} + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) a_{23}^{(j)} \tau_{\beta\beta}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \tau_{\gamma\gamma}^{(j)} \quad (2) \\ & \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) \left(\frac{1}{B} \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \beta} - k_\beta V^{(j)}\right) + \left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \left(\frac{1}{A} \frac{\partial V^{(j)}}{\partial \alpha} - k_\alpha U^{(j)}\right) = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) a_{66}^{(j)} \tau_{\alpha\beta}^{(j)} \end{aligned}$$

$$\left[1 + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\gamma^2}{R_1 R_2} \right] \frac{\partial U^{(j)}}{\partial \gamma} - \left(1 + \frac{\gamma}{R_2} \right) \frac{U^{(j)}}{R_1} + \frac{1}{A} \left(1 + \frac{\gamma}{R_2} \right) \frac{\partial W^{(j)}}{\partial \alpha} = \left(1 + \frac{\gamma}{R_1} \right) a_{55}^{(j)} \tau_{\alpha\gamma}^{(j)}$$

(A, B; α, β ; $R_1 \leftrightarrow R_2$; U, V; a_{55}, a_{44})

где k_α, k_β – геодезические кривизны поверхности контакта, A, B – коэффициенты первой квадратичной формы, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны поверхности контакта, $\rho^{(j)}$ – плотности слоев, $a_{ik}^{(j)}$ – постоянные упругости ($a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$), j – номер слоя.

На лицевой поверхности $\gamma = h_1$ заданы следующие условия:

$$\tau_{\alpha\gamma}^I(h_1) = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}^I(h_1) = 0, \quad \tau_{\gamma\gamma}^I(h_1) = 0 \quad (3)$$

а на поверхности $\gamma = -h_2$ – условия

$$U^H(-h_2) = 0, \quad V^H(-h_2) = 0, \quad W^H(-h_2) = 0 \quad (4)$$

На поверхности контакта слоев заданы условия полного контакта

$$\tau_{\alpha\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\alpha\gamma}^H(\gamma=0), \quad \tau_{\beta\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\beta\gamma}^H(\gamma=0), \quad \tau_{\gamma\gamma}^I(\gamma=0) = \tau_{\gamma\gamma}^H(\gamma=0) \quad (5)$$

$$U^I(\gamma=0) = U^H(\gamma=0), \quad V^I(\gamma=0) = V^H(\gamma=0), \quad W^I(\gamma=0) = W^H(\gamma=0) \quad (6)$$

Перейдем к безразмерным компонентам вектора перемещения $U = Ru$, $V = Rv$, $W = Rw$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров поверхности контакта), $\varepsilon = h/R$ – малый параметр, и введем новые независимые переменные по формулам $\alpha - \alpha_0 = h\xi$, $\beta = R\eta$, $\gamma = h\zeta$, $h = \max\{h_1, h_2\}$. Разложим величины

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, k_\alpha = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad k_\beta = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \quad 2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad K = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (7)$$

в ряд Тейлора вблизи $\alpha = \alpha_0$, предполагая, что они удовлетворяют условиям разложения. Если Q – любое из этих величин, то

$$Q = Q_n (\alpha - \alpha_0)^n = Q_n R^n \varepsilon^n \xi^n \quad (8)$$

Q_n – коэффициент тейлоровского разложения, по немоу индексу “n” происходит суммирование в пределах $[0, +\infty)$. Примем также обозначения: $R^n (1/R_1)_n \xi^n = R_{1n}$, $R^n (1/R_2)_n \xi^n = R_{2n}$, $n = \overline{0, +\infty}$. Имеют место представления:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\varepsilon^{n-1}}{R} \xi^n d_{1n}, \quad d_{1n} = \left(\frac{1}{A} \right)_n R^n \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\varepsilon^n}{R} \xi^n d_{2n}, \quad d_{2n} = \left(\frac{1}{B} \right)_n R^n \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (9)$$

Решение преобразованной системы уравнений будем искать в виде

$$Q_{\alpha\beta}^{(j)} = Q_{pk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\omega t) \quad (\alpha, \beta, \gamma); \quad p, k = 1, 2, 3; \quad j = I, II \quad (10)$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему относительно $Q_{pk}^{(j)}$, решение которой ищем в виде асимптотического представления [1, 3]

$$\tau_{pk}^{(j)}(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{-1+s} \tau_{pk}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad p, k = 1, 2, 3; \quad s = \overline{0, N},$$

$$(u^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j)}(\xi, \eta, \zeta)) = \varepsilon^s (u^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), v^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta), w^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta)) \quad (11)$$

и припишем всем искомым величинам индекс b (от слова boundary).

Для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{1}{a_{66}^{(j)}} A_0^2 \frac{\partial^2 v_b^{(j,s)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a_{44}^{(j)}} \frac{\partial^2 v_b^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \omega_{*p}^2 \rho^{(j)} v_b^{(j,s-p)} = T_v^{(j,s-1)}, \quad p = \overline{0, s} \quad (12)$$

$$\frac{\Delta_{23}^{(j)}}{\Delta^{(j)}} A_0^2 \frac{\partial^2 u_b^{(j,s)}}{\partial \xi^2} + A_0 \left(\frac{\Delta_{12}^{(j)}}{\Delta^{(j)}} + \delta^{(j)} \right) \frac{\partial^2 w_b^{(j,s)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{1}{a_{55}^{(j)}} \frac{\partial^2 u_b^{(j,s)}}{\partial \zeta^2} + \omega_{*p}^2 \rho^{(j)} u_b^{(j,s-p)} = T_u^{(j,s-1)} \quad (13)$$

$$(u, w; \Delta / \Delta_{23}, a_{55}; a_{55}, \Delta / \Delta_{12}), \delta^{(j)} = 1/a_{55}^{(j)} \quad \omega_*^2 = h^2 \omega^2$$

а компоненты тензора напряжений выражаются через $u_b^{(j,s)}, v_b^{(j,s)}, w_b^{(j,s)}$:

$$\tau_{23b}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{44}^{(j)}} \left[\frac{\partial v_b^{(j,s)}}{\partial \xi} - R_{4\tau}^{(j,s-1)} \right], \quad \tau_{12b}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{66}^{(j)}} \left[A_0 \frac{\partial v_b^{(j,s)}}{\partial \xi} - R_{6\tau}^{(j,s-1)} \right]$$

$$\tau_{12b}^{(j,s)} - \tau_{21b}^{(j,s)} = R_{7\tau}^{(j,s-1)} \quad (14)$$

$$\tau_{13b}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}} \left[A_0 \frac{\partial w_b^{(j,s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_b^{(j,s)}}{\partial \xi} - R_{5\tau}^{(j,s-1)} \right] \quad (15)$$

$$\tau_{11b}^{(j,s)} = \frac{1}{\Delta^{(j)}} \left[\left(A_0 \frac{\partial u_b^{(j,s)}}{\partial \xi} - R_u^{(j,s-1)} \right) \Delta_{23}^{(j)} + R_v^{(j,s-1)} \Delta_1^{(j)} + \left(\frac{\partial w_b^{(j,s)}}{\partial \xi} - R_w^{(j,s-1)} \right) \Delta_2^{(j)} \right]$$

$$(11b, 22b, 33b; \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2; \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3; \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12})$$

где

$$\Delta_1^{(j)} = a_{13}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{33}^{(j)} a_{12}^{(j)}, \quad \Delta_2^{(j)} = a_{12}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)} a_{13}^{(j)}, \quad \Delta^{(j)} = a_{11}^{(j)} \Delta_{23}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \Delta_2^{(j)} + a_{12}^{(j)} \Delta_1^{(j)}$$

$$\Delta_3^{(j)} = a_{13}^{(j)} a_{12}^{(j)} - a_{11}^{(j)} a_{23}^{(j)}, \quad \Delta_{12}^{(j)} = a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} - a_{12}^{(j)2}, \quad \Delta_{13}^{(j)} = a_{11}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{13}^{(j)2}, \quad \Delta_{23}^{(j)} = a_{22}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)2}$$

Уравнение (12) и соотношения (14) описывают антиплоский, а (13) и (15) – плоский пограничные слои. Особый интерес представляет исходное приближение. При $s = 0$ правые части уравнений (12) и (13) обращаются в нуль.

Решение уравнения (12) при $s = 0$ будем искать в виде

$$v_b^{(j,0)}(\xi, \eta, \zeta) = \exp(-\lambda_a \xi) C^{(j,0)}(\eta) v_{1b}^{(j,0)}(\zeta) \quad (16)$$

После подстановки выражения (16) в уравнение (12), получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$v_{1b}^{(j,0)}(\zeta) = C_1^{(j,0)} \sin \alpha_a^{(j)} \zeta + C_2^{(j,0)} \cos \alpha_a^{(j)} \zeta, \quad \alpha_a^{(j)} = \sqrt{a_{44}^{(j)} (\omega_{*0}^2 \rho^{(j)} + \lambda_a^2 A_0^2 / a_{66}^{(j)})} \quad (17)$$

Индекс a означает, что λ_a относится к антиплоскому пограничному слою.

Удовлетворив соответствующим граничным условиям (3)–(6), получим

$$(a_{44}^{II} - a_{44}^I) \cos(\alpha_a^{II} \zeta_2 - \alpha_a^I \zeta_1) = (a_{44}^{II} + a_{44}^I) \cos(\alpha_a^{II} \zeta_2 + \alpha_a^I \zeta_1) \quad (18)$$

Легко убедиться, что корни уравнения (18) вещественны.

В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться значениями λ_{ank} с $\text{Re} \lambda_{ank} > 0$.

Преобразовывая уравнения (13), получим следующее уравнение для определения $u^{(j,0)}$:

$$B_1^{(j)} \frac{\partial^4 u_b^{(j,0)}}{\partial \xi^4} + B_2^{(j)} \frac{\partial^4 u_b^{(j,0)}}{\partial \zeta^4} + B_3^{(j)} \frac{\partial^4 u_b^{(j,0)}}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + B_4^{(j)} \frac{\partial^2 u_b^{(j,0)}}{\partial \xi^2} + B_5^{(j)} \frac{\partial^2 u_b^{(j,0)}}{\partial \zeta^2} + \omega_{*0}^4 \rho^{(j)2} u_b^{(j,0)} = 0 \quad (19)$$

$$B_1^{(j)} = A_0^4 \Delta_{23}^{(j)} / (\Delta^{(j)} a_{55}^{(j)}), \quad B_2^{(j)} = \Delta_{12}^{(j)} / (\Delta^{(j)} a_{55}^{(j)})$$

$$B_3^{(j)} = \left((\Delta_{23}^{(j)} \Delta_{12}^{(j)} - (\Delta_2^{(j)})^2) / (\Delta^{(j)})^2 - 2 \Delta_2^{(j)} / (\Delta^{(j)} a_{55}^{(j)}) \right) A_0^2$$

$$B_4^{(j)} = (\Delta_{23}^{(j)} / \Delta^{(j)} + \delta^{(j)}) A_0^2 \omega_{*0}^2 \rho^{(j)}, \quad B_5^{(j)} = (\Delta_{12}^{(j)} / \Delta^{(j)} + \delta^{(j)}) \omega_{*0}^2 \rho^{(j)}$$

решение которого будем искать в виде

$$u_b^{(j,0)}(\xi, \eta, \zeta) = K_b^{(j,0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k^{(j)} \zeta)$$

$$w_b^{(j,0)}(\xi, \eta, \zeta) = L^{(j)} K_b^{(j,0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k^{(j)} \zeta) \quad (20)$$

где $L^{(j)}$ – неопределенный пока множитель, $k^{(j)}$ – корень характеристического уравнения

$$B_2^{(j)}k^4 + (\lambda_p^2 B_3^{(j)} + B_5^{(j)})k^2 + \lambda_p^4 B_1^{(j)} + \lambda_p^2 B_4^{(j)} + \omega_{*0}^4 \rho^{(j)2} = 0 \quad (21)$$

Отсюда следует

$$k_{1,2}^{(j)2} = (-\lambda_p^2 B_3^{(j)} - B_5^{(j)} \pm \sqrt{D^{(j)}}) / (2B_2^{(j)}) \quad (22)$$

$$D^{(j)} = \lambda_p^4 (B_3^{(j)2} - 4B_2^{(j)}B_1^{(j)}) + 2\lambda_p^2 (B_3^{(j)}B_5^{(j)} - 2B_2^{(j)}B_4^{(j)}) + B_5^{(j)2} - 4B_2^{(j)}\omega_{*0}^4 \rho^{(j)2}$$

Каждому k_i соответствует свой множитель L_i :

$$L_i^{(j)} = (\Delta_{23}^{(j)} a_{55}^{(j)} \lambda_p^2 A_0^2 + \Delta^{(j)} k_i^{(j)2} + \Delta^{(j)} a_{55}^{(j)} \omega_{*0}^2 \rho^{(j)}) / (A_0 (\Delta^{(j)} + \Delta_2^{(j)} a_{55}^{(j)}) \lambda_p k_i^{(j)}) \quad (23)$$

В результате решение уравнения (19) примет вид

$$u_b^{(j,0)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 K_{ib}^{(j,0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k_i^{(j)} \zeta) \quad (24)$$

$$w_b^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 L_i^{(j)} K_{ib}^{(j,0)}(\eta) \exp(-\lambda_p \xi + k_i^{(j)} \zeta)$$

Удовлетворив граничным условиям (3)-(6), получим систему из восьми линейных однородных уравнений относительно $K_{ib}^{(j,0)}$, $j = I, II; i = \overline{1, 4}$, для существования ненулевых решений которой необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} S_1^{(I)} & S_2^{(I)} & S_3^{(I)} & S_4^{(I)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1^{(I)} & Q_2^{(I)} & Q_3^{(I)} & Q_4^{(I)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_1^{(II)} & S_2^{(II)} & S_3^{(II)} & S_4^{(II)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_1^{(II)} & Q_2^{(II)} & Q_3^{(II)} & Q_4^{(II)} \\ P_1^{(I)} & P_2^{(I)} & P_3^{(I)} & P_4^{(I)} & P_1^{(II)} & P_2^{(II)} & P_3^{(II)} & P_4^{(II)} \\ R_1^{(I)} & R_2^{(I)} & R_3^{(I)} & R_4^{(I)} & R_1^{(II)} & R_2^{(II)} & R_3^{(II)} & R_4^{(II)} \\ L_1^{(I)} & L_2^{(I)} & L_3^{(I)} & L_4^{(I)} & -L_1^{(II)} & -L_2^{(II)} & -L_3^{(II)} & -L_4^{(II)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

где

$$S_i^{(I)} = L_i^{(I)} \exp(k_i^{(I)} \zeta_1), \quad S_i^{(II)} = \exp(-k_i^{(II)} \zeta_2), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$Q_i^{(I)} = \left(\frac{\Delta_{12}^{(I)}}{\Delta^{(I)}} L_i^{(I)} k_i^{(I)} - \frac{A_0}{\Delta^{(I)}} \lambda_p \right) \exp(k_i^{(I)} \zeta_1), \quad Q_i^{(II)} = L_i^{(II)} \exp(-k_i^{(II)} \zeta_2)$$

$$P_i^{(j)} = (-1)^{j+1} \frac{L_i^{(j)}}{a_{55}^{(j)}}, \quad R_i^{(j)} = (-1)^{j+1} \left(\frac{\Delta_{12}^{(j)}}{\Delta^{(j)}} L_i^{(j)} k_i^{(j)} - \frac{A_0}{\Delta^{(j)}} \lambda_p \right), \quad j = 1, 2$$

Уравнение (25) является характеристическим уравнением для определения λ_p .

Каждому собственному значению ω_{*0} будет соответствовать счетное множество λ_a и λ_p .

Таким образом, каждому собственному значению ω_{*0} соответствует свое семейство пограничных функций. При этом собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания и другого типа.

В таблице приведены первые некоторые значения скорости затухания пограничных слоев оболочки, первый слой которой состоит из стеклопластика 2:1 с характеристиками $v_{12}^I = 0.105$,

$v_{23}^I = 0.431$, $v_{31}^I = 0.405$, $E_1^I = 36 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $E_2^I = 26.3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $E_3^I = 10.8 \cdot 10^9 \text{ Па}$,
 $G_{12}^I = 4.9 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $G_{23}^I = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $G_{13}^I = 4.4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\rho^I = 1700$, а второй слой – из графито-
эпоксидного материала с упругими характеристиками $v_{12}^{II} = 0.323$, $v_{23}^{II} = 0.026$, $v_{31}^{II} = 0.3$,
 $E_1^{II} = 7.3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $E_2^{II} = 7.3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $E_3^{II} = 84.7 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $G_{12}^{II} = 2.7 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $G_{23}^{II} = 4.2 \cdot 10^9 \text{ Па}$,
 $G_{13}^{II} = 4.2 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\rho^{II} = 1660$. Из таблицы видно, что затухание в антиплоском погранслое
происходит быстрее, чем в плоском. В смысле приложений, построение приближений $s \geq 1$ для
пограничного слоя можно осуществить подобным образом, но оно вряд ли представит
существенный интерес.

Таблица

λ_p (плоский пограничный слой)		
$\omega_{*0n}^u = 2089.93$	$\omega_{*0n}^v = 2023.8$	$\omega_{*0n}^w = 6364.47$
0.437119+0.401356 I	0.423287+0.388656 I	0.133802+2.94015 I
0.646916	0.651014	1.33116+1.22225 I
3.45143+0.878491 I	3.45833+0.868594 I	2.45101+1.70049 I
4.36008	4.35998	4.40766
λ_a (антиплоский пограничный слой)		
3.5077	3.52237	4.82277
6.08045	6.08897	7.74436
8.58762	8.59367	10.4323
11.0733	11.0779	13.039

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т.70. Вып. 1. С.111-125.
4. Гулгазарян Л.Г. Собственные колебания двухслойных ортотропных оболочек при полном контакте между слоями. Тр. VI межд. конф.: "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред"(Горис-Степанакерт, сентябрь 21-26, 2008). Ереван: Институт механики НАН Армении. 2008. С. 202-211.

Сведения об авторе:

Гулгазарян Лусине Гургеновна – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, доцент кафедры математического анализа и теории функций Армянского государственного педагогического университета имени Х. Абовяна.

Тел.:(+37491) 30-25-54, (+37410) 52-48-90

E-mail: lusina@mail.ru

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ОСАДКАМИ ПЛОТИНЫ АХУРЯНСКОГО ВОДОХРАНИЛИЩА С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ГИДРОНИВЕЛИРОВАНИЯ

Гюрджян Н.Х.

В Армении существуют 30 водохранилищ: 4 строятся, 7 планируются. Так как Армения находится в сейсмически активной зоне и часто встречаются оползневые земли, то нужно быть внимательными ко всем водохранилищам, но особое внимание требуется по отношению к Ахурянскому водохранилищу, так как Ахурянская плотина – единственная бетонная гравитационная на территории Армении.

Ахурянское водохранилище представляется важным водным ресурсом как для Армении, так и для Турции. Общий объем водохранилища составляет 525 млн. кв. м., который позволяет орошать 104 тыс. га сельскохозяйственного угодья и в Армении, и в Турции.

Бетонная гравитационная плотина Ахурянского водохранилища заложена в 1,2 км ниже села Н. Джрапи. Здесь каньон реки становится наиболее узким, а река почти под прямым углом меняет направление своего течения с юго-западного на юго-восточное. Ширина каньона по верху составляет 85 м, по дну – 30-35 м. Левый берег реки за пределами каньона представлен Джрапским плато, которое поднимается по направлению горы Чал-Тапе. Правый берег – террасовидная ступень шириной 150-200м, поверхность которой наклонена к каньону.

Район створа плотины Ахурянского водохранилища, охватывающего бассейн реки Ахурян от створа плотины до села В. Джрапи, представляет собой типичное озеро – лавовое плато, в которое врезана эрозионная, в основном, каньонообразная долина реки Ахурян. Самая высокая отметка в пределах участка находится на вершине горы Чал-Тапе – 1632.5м, а самая низкая – в русле реки Ахурян ниже створа плотины – 1402 м. Выступ палеогеновых вулканогенных образований горы Чал-Тапе, а также эрозионные остатки более молодых озерных вулканогенных образований дают склонам бассейна бугристое очертание. Среднее колебание отметок составляет 40-50м над плато.

Гидрографическая сеть района развита слабо. Здесь р. Ахурян принимает с правой стороны приток Чарлу со сравнительно большим расходом, а с левой стороны – сезонные ручейки, связанные с атмосферными осадками.

Климат района умеренный: с холодной и снежной зимой и теплым летом. Самые теплые месяцы – июль и август со средней температурой 18.6° – 23° С и абсолютным максимумом $+40^{\circ}$ С, и самые холодные – январь и февраль с температурой -7° С и абсолютным минимумом -40° С. Максимальная глубина промерзания грунта до 1 м. Растительный покров представлен горно-степными лугами.

Участок строительства плотины Ахурянского водохранилища расположен в пределах 8-балльной зоны. Поблизости от участка строительства плотины имеются две локальные зоны с большой степенью вероятности возникновения в них высокобалльных землетрясений. Плотина находится в зоне сейсмически активного Ахурянского разлома. Однако, во всех странах мира, в том числе, в сейсмически более активных районах, все же строят плотины на реках, протекающих по зонам сейсмически активных разломов. Как показывает мировая практика строительства плотин, допущенный в этом случае элемент риска, в большинстве случаев оказывается оправданным, поскольку при проектировании запасы прочности и устойчивости дают возможность выдержать сильные землетрясения без существенных повреждений.

Последние геодезические наблюдения за деформациями плотины Ахурянского водохранилища были выполнены в 1986г. Г. Габаяном, В. Маргарян и П. Амбарцумяном.

В практике изучения осадок гидротехнических сооружений наиболее распространенными методами являются геометрическое, тригонометрическое и гидро nivelирование. С целью выбора способов наблюдений деформаций для плотины выполнялся их сравнительный анализ. Решили, что для определения осадка плотины единственным способом, обеспечивающим дистанционные измерения и не требующим видимости между контролируемыми точками, может служить метод гидро nivelирования. Существуют два основных способа гидро nivelирования – гидростатическое и гидродинамическое. Определение осадка способом гидростатического nivelирования производится двумя типами приборов: переносными и стационарными. Переносные гидростатические нивелиры на гидроузлах не получили распространения. При применении систем гидро nivelирования для определения осадка гидротехнических сооружений обязательно должны быть приняты меры по ее защите от влажности. Второй способ гидро nivelирования – гидродинамический. К основным преимуществам этого способа можно отнести:

1. Более широкий, по сравнению с гидростатическим способом, диапазон измерения вертикальных смещений контролируемых точек.
2. Датчики уровня жидкости более просты в изготовлении.
3. Средняя квадратическая ошибка измерений составляет 0,05-0,5 мм.
4. Способ позволяет полностью автоматизировать измерительный процесс.

Горизонтальные смещения берегов водохранилища и плотины измерялись трилатерационными методами, а линейные измерения выполнялись высокоточными светодоальномерами.

Наблюдения плановых смещений плотины были выполнены по плановой сети, созданной в виде трилатерации (рис.1).

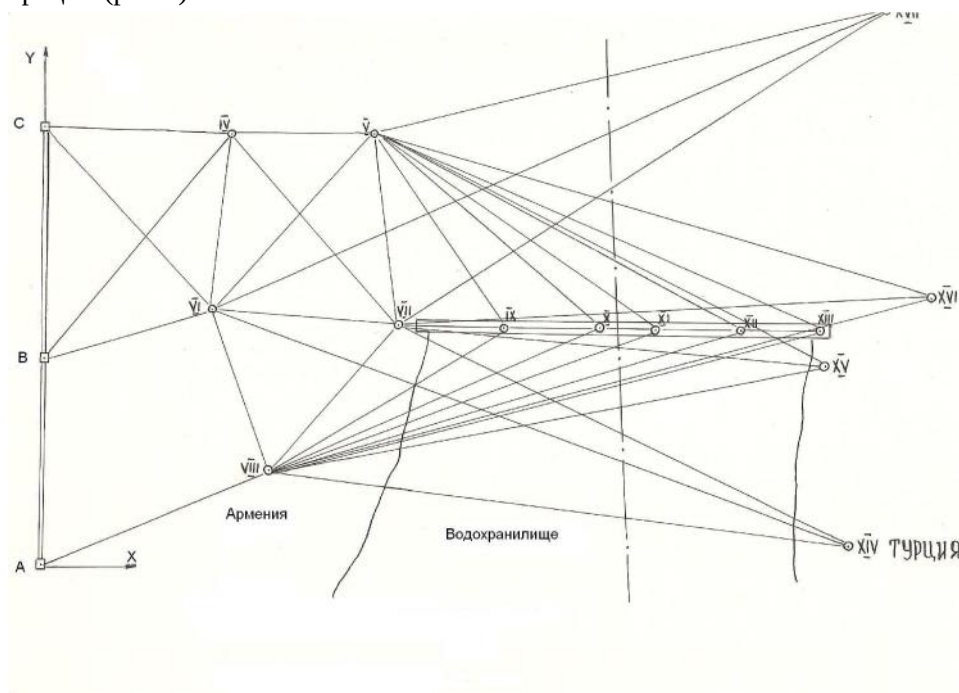


Рис.1 Схема плановой сети

Учитывая то, что Ахурянское водохранилище находится в зоне сейсмически активного Ахурянского разлома, предлагаю полностью исследовать и водохранилище, и плотину. Поскольку водохранилище находится на границе Армении и Турции, обе стороны должны участвовать в исследованиях. Кроме того, нужно еще выполнять экологические исследования,

поскольку несколько лет назад армянские экологи проводили исследования и в воде обнаружили тяжелые металлы и разные ядовитые вещества. Эти металлы могут серьезно повредить человеческое здоровье как через орошенные этой водой продукты, так и через рыб. Во время исследований выяснилось, что со стороны Армении р.Ахурян приносит собой бытовой мусор. К сожалению, р.Гюмри приносит канализационные воды г. Гюмри. Возникает вопрос: какие вещества попадают в водохранилище со стороны Турции. Армянские экологи с большими усилиями попробовали выяснить ответ на этот вопрос. И обнаружали, что в Карсе есть кожный завод, а за городом строился сахарный завод и не исключается, что заводские отходы через р.Карс попадают в водохранилище.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Последние геодезические наблюдения за деформациями плотины Ахурянского водохранилища были сделаны в 1986г. Предлагаю провести новые геодезические измерения на той же плановой сети (рис.1), чтобы определить более 20-летних горизонтальных смещений, для определения вертикальных смещений предлагаю восстановить существующую гидросистему.

Новые геодезические измерения можно выполнять современными геодезическими инструментами, например, электронным тахеометром, с помощью которых не только с большой точностью выполняют линейные измерения, но и одновременно определяют координаты точек, что позволит определить поперечные и продольные горизонтальные смещения, а уравнивание сети осуществлять по координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васютинский И. Ю. Гидростатическое нивелирование М.: Недра, 1976. 165с.
2. Большков В.Д., Васютинский И.Ю., Ключин Е.Б. и др. Методы и приборы высокоточных геодезических измерений в строительстве. М.: Недра, 1977.
3. Отчет о научно-исследовательской работе. Ереван, 1987.

Сведения об авторе

Гюрджян Наира

старший лаборант, Ереванский гос. университет архитектуры и строительства

Адрес: Н. Норк 9-й массив дом 16б. кв. 12

Тел.: (094) 07-18-18, E-mail: n.gyurjyan@mail.ru

ПРОЧНОСТЬ РЕБРИСТОЙ ДЛИННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Дарбинян А.З., Казарян К.Х.

В работе решается задача оптимального проектирования прямоугольной бесконечно длинной слоистой пластинки, изготовленной из композиционного материала, усиленной периодически расположенными ребрами жесткости под действием поперечной нагрузки. При условии сохранения веса конструкции и ограничениях, налагаемых на ее прочность, определяются оптимальные геометрические и физические параметры конструкции, обеспечивающие ее максимальную несущую способность.

Рассматривается длинная прямоугольная пластинка толщины h , свободно опертая по длинным краям $y = 0, y = b$ и подкреплённая равноудалёнными на расстоянии a прямоугольными ребрами жесткости сечения $ah_1 \times h_1$ под действием поперечной нагрузки q (рис. 1).

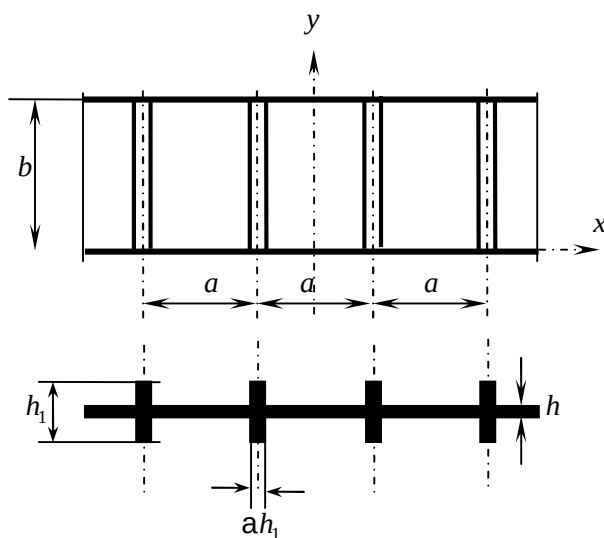


Рис. 1

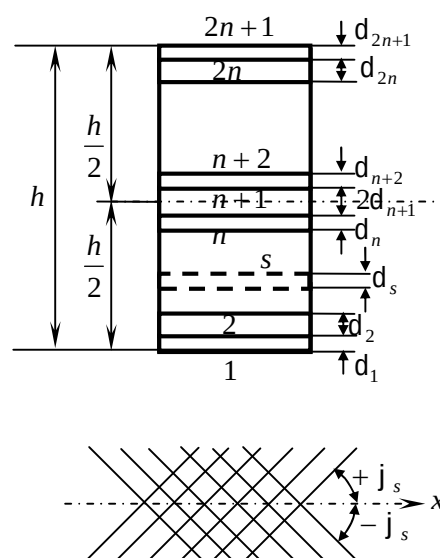


Рис. 2

Предполагается, что пластинка составлена из $2n+1$ симметрично расположенных относительно срединной поверхности слоев, толщины $\delta_s \left(h = 2 \left(\delta_{n+1} + \sum_{s=1}^n \delta_s \right) \right)$, изготовленных путем поочередной укладки монослоев композиционного материала (КМ), уложенных поочередно под углами $\pm \varphi_s$ ($s = 1, 2, \dots, n+1$) к оси x (рис. 2), а в ребре монослои ориентированы вдоль оси y .

При неизменном весе конструкции и заданных размерах $\xi = a/b$ определяются оптимальные параметры конструкции $\delta_s, \varphi_s, h_1, \alpha$, обеспечивающие из условия прочности ее наибольшую несущую способность.

Задачи оптимального оребрения длинной однослойной пластинки из изотропного и композиционного материалов под действием поперечной нагрузки рассмотрены в работах [1], [2].

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$\xi b(h_0 - h) = \alpha h_1(h_1 - h), \quad (1)$$

где h_0 – соответствующая толщина сплошной пластинки заданного веса.

Ввиду равноудаленности ребер задача изгиба пластинки сводится к определению ее прогибов $w(x, y)$ из уравнения [3]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (2)$$

и следующих граничных условий:

– свободного опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b, \quad (3)$$

– симметрии

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (4)$$

– упругого опирания

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad 2D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = B \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad \text{при } x = a/2. \quad (5)$$

Здесь: D_{ik} – жесткости пластинки, определяемые по формуле

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{(n+1)} h_{n+1}^3 + \sum_{s=1}^n B_{ik}^{(s)} (h_s^3 - h_{s+1}^3) \right] \quad (i, k = 1, 2, 6), \quad (6)$$

$h_{n+1} = \frac{h}{2}$, $h_s = \frac{h}{2} - \sum_{m=1}^{s-1} \delta_m$, $B_{ik}^{(s)}$ – упругие характеристики s -го слоя КМ в главных

геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики B_{ik}^0 в главных физических направлениях по известным формулам поворота [3], $B = E\alpha h_1^4 / 12$ – жесткость ребра на изгиб, $A = \alpha h_1^2$ – площадь поперечного сечения ребра.

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), представляется в виде:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \sin \lambda_k y, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{b}. \quad (7)$$

Разлагая функцию нагрузки в ряд:

$$q(y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \lambda_k y, \quad q_k = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) \sin \lambda_k y dy, \quad (8)$$

и подставляя (7) в уравнение (2), для функции $w_k(x)$, в зависимости от значения

$D = D_3^2 - D_{11} D_{22}$, где $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$, получаются следующие выражения:

при $D < 0$

$$w_k(x) = \frac{q_k}{D_{22}\lambda_k^4} + C_{1k} \operatorname{ch} \alpha_1 \lambda_k x \cos \alpha_2 \lambda_k x + C_{2k} \operatorname{ch} \alpha_1 \lambda_k x \sin \alpha_2 \lambda_k x + \\ + C_{3k} \operatorname{sh} \alpha_1 \lambda_k x \cos \alpha_2 \lambda_k x + C_{4k} \operatorname{sh} \alpha_1 \lambda_k x \sin \alpha_2 \lambda_k x, \quad (9)$$

где:

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}D_{22}} \pm D_3}{2D_{11}}}.$$

при $D = 0$

$$w_k(x) = \frac{q_k}{D_{22}\lambda_k^4} + C_{1k} \operatorname{ch} \alpha_0 \lambda_k x + C_{2k} x \operatorname{ch} \alpha_0 \lambda_k x + C_{3k} \operatorname{sh} \alpha_0 \lambda_k x + C_{4k} x \operatorname{sh} \alpha_0 \lambda_k x, \quad (10)$$

где:

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{D_3}{D_{11}}}.$$

при $D > 0$

$$w_k(x) = \frac{q_k}{D_{22}\lambda_k^4} + C_{1k} \operatorname{ch} \beta_1 \lambda_k x + C_{2k} \operatorname{ch} \beta_2 \lambda_k x + C_{3k} \operatorname{sh} \beta_2 \lambda_k x + C_{4k} \operatorname{sh} \beta_2 \lambda_k x, \quad (11)$$

где:

$$\beta_{1,2} = \sqrt{\frac{D_3 \pm \sqrt{D_3^2 - D_{11}D_{22}}}{D_{11}}}.$$

Постоянные C_{ik} определяются из граничных условий (4) и (5).

Условия прочности для наиболее опасных точек слоев пластинки принимаются в виде [4]

$$\left(\frac{\sigma_{11}^s}{\sigma_{B1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}^s}{\sigma_{B2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^s}{\tau_{B0}}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{B1}^2} - 1 \leq 0. \quad (12)$$

Здесь: σ_{B1} , σ_{B2} , τ_{B0} – прочностные характеристики КМ, σ_{11}^s , σ_{22}^s , σ_{12}^s – напряжения в s -ом слое пластинки по направлениям укладки монослоев КМ, определяемые по формулам

$$\sigma_{11}^s = B_{11}^0 e_{11}^s + B_{12}^0 e_{22}^s, \quad \sigma_{22}^s = B_{12}^0 e_{11}^s + B_{22}^0 e_{22}^s, \quad \sigma_{12}^s = B_{66}^0 e_{12}^s, \quad (13)$$

где e_{11}^s , e_{22}^s , e_{12}^s – деформации в s -ом слое пластинки по направлениям укладки монослоев КМ, которые по формулам

$$e_{11}^s = e_{xx} \cos^2 \varphi_s + e_{yy} \sin^2 \varphi_s - e_{xy} \sin \varphi_s \cos \varphi_s, \\ e_{22}^s = e_{xx} \sin^2 \varphi_s + e_{yy} \cos^2 \varphi_s + e_{xy} \sin \varphi_s \cos \varphi_s, \\ e_{12}^s = (e_{xx} - e_{yy}) \sin 2\varphi_s + e_{xy} \cos 2\varphi_s \quad (14)$$

выражаются через деформации по направлениям осей x и y

$$e_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad e_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (15)$$

Условие прочности для ребра жесткости принимается в виде

$$\sigma_{y \max}^r - \sigma_{B1} \leq 0, \quad (16)$$

где

$$\sigma_y^r = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=a/2}. \quad (17)$$

Очевидно, что в слоях пластинки наиболее опасными будут точки с координатами $x = 0$, $y = b/2$, $z = \pm h_s$ и $x = a/2$, $y = b/2$, $z = \pm h_s$, а наибольшее нормальное напряжение в ребре будет при $y = b/2$ и $z = \pm h_1/2$.

Из условий прочности слоев пластинки (12) и ребер (16), записанных в виде равенств, определяются параметры нагрузки q_{0s} ($s = 1, 2, \dots, n+1$) и q_{0r} . Допустимое значение параметра нагрузки q_0 определится из условия

$$q_0 = \min \{q_{0s}, q_{0r}\}. \quad (18)$$

Определение оптимальных параметров конструкции $\delta_s, \varphi_s, h_1, \alpha$, обеспечивающие ее максимальную несущую способность при неизменном весе конструкции (1) и заданных размерах ξ , сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

найти:

$$Q = \max_x q_0 \quad \bar{x} = \{\delta_s, \varphi_s, h_1, \alpha\} \quad (19)$$

при ограничениях (1), (12), (16), а также ограничениях

$$h_0 \leq h_1 \leq 0.2b, \quad 0.2 < \alpha < 5, \quad \delta \leq h \leq h_0, \quad (20)$$

обусловленных пределами применимости классической теории балок и пластин. Для d принимается: $\delta = 0.01b$ при $a \geq b$, $\delta = 0.01a$ при $a \leq b$.

Задача решается методом деформируемого многогранника в сочетании с методом прямого поиска [5].

Числовые расчеты произведены для трехслойной конструкции при $\xi = 1.0$, $\bar{h}_0 = h_0/b = 0.015, 0.02, 0.03$, в случае, когда поперечная нагрузка распределена по закону $q(y) = q_0 \sin \pi y/b$. В качестве материала принят КМ со следующими приведенными характеристиками:

$$B_{22}^0/B_{11}^0 = 0.6164; \quad B_{12}^0/B_{11}^0 = 0.12; \quad B_{66}^0/B_{11}^0 = 0.1572; \quad G_{23}/G_{13} = 1; \quad E_1/B_{11}^0 = 0.9875; \\ G_{23}/B_{11}^0 = 0.1572; \quad \sigma_{B2}/\sigma_{B1} = 0.4033; \quad \tau_{B0}/\sigma_{B1} = 0.2637.$$

Вычислены оптимальные значения параметров α , $\bar{h}_1 = h_1/b$, $\bar{h} = h/b$, $\bar{\delta}_1 = \delta_1/h$, $\bar{\delta}_2 = \delta_2/h$, φ_1 , φ_2 и соответствующие значения параметра нагрузки $\bar{Q} = Q/B_{11}^0$. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

ξ	$\bar{h}_0$	a	$\bar{h}_1$	$\bar{h}$	$\bar{\delta}_1$	φ_1	$\bar{\delta}_2$	φ_2	$\bar{Q} \cdot 10^3$
	0.015	0.2	0.11	0.013	-	-	0.5	0°	0.439

1.0	0.020	0.2	0.13	0.019	-	-	0.5	0°	0.779
	0.030	0.2	0.16	0.026	0.16	0°	0.34	90°	1.597

Как следует из табл.1, изготовление слоистой пластинки приводит к некоторому увеличению несущей способности для сравнительно толстой пластинки ($\bar{h}_0 = 0.030$), в случае сравнительно тонких пластин ($\bar{h}_0 = 0.015, 0.020$) наиболее оптимальными являются однослойные пластинки. В то же время, как показано в работе [2], усиление пластинки ребрами жесткости при сохранении веса конструкции, приводит к значительному увеличению ее несущей способности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Проектирование оптимальной длинной ребристой пластинки //Межвуз.сб. ЕрПИ «Инженерные проблемы строительной механики». Ереван, 1985. С. 77-81.
2. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Оптимальное ребрирование длинной пластинки, изготовленной из композиционного материала //ДАН АН Арм.ССР. 1986. Т.82. №5. С. 214-217.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
4. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
5. Погосян А.Г. Применение метода деформируемого многогранника к решению задачи оптимального проектирования прямоугольной сжатой пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, при заданном значении первой частоты собственных колебаний //Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. №3. С.28-33.

Сведения об авторах

Дарбинян Артавазд Завенович – канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр. Института механики НАН Армении,
тел. (077) 30 4881, e-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Казарян Карине Хачиковна – соискатель кафедры “Соппротивление материалов” Ереванского государственного университета архитектуры и строительства,
тел. (010) 421976, (091) 651657, e-mail: Karine-Ghazaryan@mail.ru

ИЗГИБ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ

Егиазарян Т.А.

В точной постановке линейной теории упругости проводится изучение напряженно-деформированного состояния однородной упругой полосы, содержащей в себе трещину, под воздействием сжимающих сил. Допускается, что в результате плоской деформации под действием сжимающих сил берега трещины входят в контакт между собой и происходит проскальзывание точек различных берегов трещины друг над другом.

Пусть упругая полоса занимает область $-\infty < x < \infty$, $-h_2 < y < h_1$, а на линии $y = 0$ расположена трещина, которая занимает отрезок $-x_0 < x < x_0$. Пусть далее на граничных линиях полосы $y = h_1$ и $y = -h_2$ действуют нормальные сжимающие силы, симметричные относительно оси OY , как это показано на рис.1.

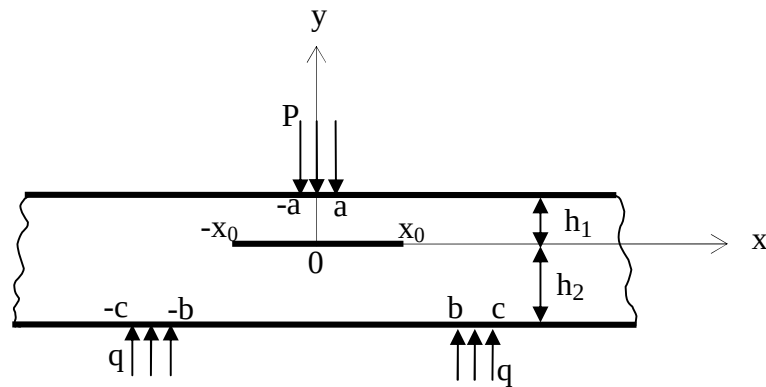


Рис.1

Для решения данной задачи удобно рассматриваемую область разделить на две области: $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h_1$ и $-\infty < x < \infty$, $-h_2 < y < 0$. Отнесем далее индекс «1» к области $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h_1$, а индекс «2» — к области $-\infty < x < \infty$, $-h_2 < y < 0$. Тогда граничные условия задачи, с учетом симметрии, можем записать в следующем виде:

$$\sigma_y^{(1)}(x, h_1) = \theta(a - x)P, \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, h_1) = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (1)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, -h_2) = q(\theta(x - b) + \theta(c - x) - 1), \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, -h_2) = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (2)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad u_y^{(1)}(x, 0) = u_y^{(2)}(x, 0), \quad 0 < x < \infty \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad 0 < x < \infty \quad (4)$$

$$\begin{cases} u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0) = 0, & x \geq x_0 \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0, & 0 < x < x_0 \end{cases} \quad (5)$$

К условиям (1) – (5) нужно добавить еще и условие равновесия полосы, которое имеет следующий вид:

$$aP = (c - b)q \quad (6)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad - \text{ функция Хевисайда}$$

Решение поставленной задачи строится при помощи бигармонической функции Эйри [4].

Доопределим первое условие, входящее в (5) на весь интервал $0 < x < \infty$. Продифференцировав указанное условие по x , введем следующую функцию:

$$u(x) = \frac{\partial [u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0)]}{\partial x}, \quad 0 < x < x_0 \quad (7)$$

после чего смешанное условие (5) преобразится в эквивалентную систему следующих двух условий:

$$\frac{\partial [u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0)]}{\partial x} = \begin{cases} u(x), & 0 < x < x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \rho(x), \quad 0 < x < x_0 \quad (9)$$

Функция $\rho(x)$, фигурирующая в условии (9) – известная функция, которая, в частности, может быть равной и нулю.

С учетом последних двух равенств (8) и (9), на основе интегрального преобразования Фурье, из граничных условий (1) – (5) получим алгебраическую систему для определения неизвестных весовых функций $\{A_i(\lambda), B_i(\lambda), C_i(\lambda), D_i(\lambda), i = 1, 2\}$.

$$\operatorname{ch} \lambda y [\gamma \lambda B_1(\lambda) + C_1(\lambda)] + \operatorname{sh} \lambda y [A_1(\lambda) + \gamma \lambda D_1(\lambda)] = \frac{2P \sin \lambda a}{\pi \lambda^2} \quad (10)$$

$$\operatorname{ch} \lambda h_2 [-\lambda h_2 B_2(\lambda) + C_2(\lambda)] - \operatorname{sh} \lambda h_2 [A_2(\lambda) - \lambda D_2(\lambda)] = \frac{2q(\sin \lambda c - \sin \lambda b)}{\pi \lambda^2} \quad (11)$$

$$\operatorname{sh} \lambda h_1 [-\lambda h_2 B_2(\lambda) + C_2(\lambda) + D_2(\lambda)] + \operatorname{ch} \lambda h_2 [A_2(\lambda) + B_2(\lambda) - \lambda h_2 D_2(\lambda)] = 0 \quad (12)$$

$$\operatorname{sh} \lambda h_2 [\lambda h_2 B_2(\lambda) - C_2(\lambda) - D_2(\lambda)] + \operatorname{ch} \lambda h_2 [A_2(\lambda) + B_2(\lambda) - \lambda h_2 D_2(\lambda)] = 0 \quad (13)$$

$$A_1(\lambda) + B_1(\lambda) - A_2(\lambda) + B_2(\lambda) = 0 \quad (14)$$

$$(1 + \nu)A_1(\lambda) + (-1 + \nu)B_1(\lambda) - (1 + \nu)A_2(\lambda) + (-1 + \nu)B_2(\lambda) = 0 \quad (15)$$

$$(1 + \nu)C_1(\lambda) + 2D_1(\lambda) - (1 + \nu)C_2(\lambda) + 2D_2(\lambda) = \bar{u}(\lambda) \quad (16)$$

$$-C_1(\lambda) + C_2(\lambda) = 0 \quad (17)$$

В системе уравнений (10) – (17) введено следующее обозначение:

$$u(\lambda) = \frac{2E}{\pi \lambda^2} \int_0^{x_0} u(x) \cos \lambda x dx \quad (18)$$

Решая систему уравнений, получим выражения для функций интегрирования через неизвестную трансформанту $u(\lambda)$. Для определения последней используем условие (9). Удовлетворение заданному условию (9) приводит к следующему интегральному уравнению относительно производной по x , скачка тангенциальных перемещений, точек верхнего и нижнего берегов трещины:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda x d\lambda \int_0^1 u(y) \cos \lambda y dy + \int_0^1 K(x, y) u(y) dy = M(x), \quad 0 < x < 1 \quad (19)$$

где $K(x, y)$ и $M(x, y)$ – краткое обозначение достаточно громоздких функций, которые не приводятся. После ряда преобразований интегральное уравнение (19) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(y)}{x - y} dy + \int_{-1}^1 K(x, y) u(y) dy = M(x), \quad -1 < x < 1 \quad (20)$$

С целью сведения определяющего интегрального уравнения задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений используем метод ортогональных многочленов Чебышева. Через $T_m(y)$ и $U_{m-1}(x)$ обозначим многочлены Чебышева первого и второго родов,

соответственно [3]. Представим решение сингулярного интегрального уравнения (20) в виде следующего ряда по многочленам Чебышева первого рода:

$$u(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{m=1}^{\infty} X_m T_{2m}(y) \quad (21)$$

уравнение окончательно сведем к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$X_n + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} X_m = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

В бесконечной системе (22) введены следующие обозначения:

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-1}(x) dx \int_{-1}^1 K(x, y) \frac{T_{2m}(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy, \\ a_n = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2n-1}(x) M(x) dx \quad (23)$$

Таким образом, решение задачи свелось к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (22). Нормальные и касательные напряжения, действующие на линии расположения трещины $y = 0$, примут следующий вид:

$$\frac{\tau_{xy}(x, 0)}{E} = \frac{\pi \operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2 - 1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m X_m}{(|x| + \sqrt{x^2 - 1})^{2m}} - \pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m X_m M(x), \quad |x| > 1, \quad (24) \\ \frac{\sigma(x, 0)}{E} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m X_m \int_0^{\infty} \lambda^2 (h_2^2 \operatorname{sh}^2 \lambda h_1 - h_1^2 \operatorname{sh}^2 \lambda h_2) \frac{J_{2m}(\lambda) \cos \lambda x}{\Delta(\lambda)} d\lambda + \\ + \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \{ 2 \operatorname{sh} \lambda h_2 \operatorname{sh}[\lambda(h_1 + h_2)] - 2 \lambda h_2 (\operatorname{sh} \lambda h_1 + \lambda h_2 \operatorname{ch} \lambda h_1) - \\ - \lambda h_1 (\operatorname{sh} \lambda h_1 - \operatorname{sh}[\lambda(h_1 + 2h_2)]) + 2 \lambda h_2 \operatorname{ch} \lambda h_1 \} \frac{\cos \lambda x \sin \lambda a}{\lambda \Delta(\lambda)} d\lambda + \\ + \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} \{ 2 \operatorname{sh} \lambda h_1 \operatorname{sh}[\lambda(h_1 + h_2)] + 2 \lambda h_2 \operatorname{ch}[\lambda(h_1 + h_2)] \operatorname{sh} \lambda h_1 - \\ - 2 \lambda h_1 (\operatorname{sh} \lambda h_2 + \lambda(h_1 + h_2) \operatorname{ch} \lambda h_2) \} \frac{\cos \lambda x (\sin \lambda c - \sin \lambda b)}{\lambda \Delta(\lambda)} d\lambda \quad (25)$$

В формуле (25) введено следующее обозначение:

$$\Delta(\lambda) \equiv \operatorname{sh}^2[\lambda(h_1 + h_2)] - \lambda^2 (h_1 + h_2)^2 \quad (26)$$

Из формул (24) и (25) легко заметить, что касательные напряжения вблизи граничных точек трещины имеют корневые особенности. Коэффициенты особенностей касательных напряжений вычисляются из следующего равенства:

$$KI = \pm \pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m X_m \quad (27)$$

Причем, знак « + » относится к точке $x = 1$, знак « - » – к точке $x = -1$. Нетрудно установить также, что условие равновесия

$$\int_0^{\infty} \sigma_y(x, 0) dx = P a \quad (28)$$

выполняется тождественно.

В численном примере исследуется характер поведения касательных и нормальных напряжений при изменении соотношения длины трещины и зоны нагрузки. Приведенный на рис.2 график показывает, что при симметричном нагружении упругой полосы происходит

изгиб полосы из-за наличия трещины, расположенной несимметрично относительно срединной линии полосы. Нормальные контактные напряжения внутри трещины сохраняют постоянный отрицательный знак, то есть берега трещины прижимаются друг к другу.

На графике рис.3 показан случай, когда зона распределения внешних нагрузок очень мала и в этом случае внутри трещины появились растягивающие нормальные напряжения. Вблизи кончиков трещины берега трещины стремятся отойти друг от друга.

Вариант 1. $\frac{P}{E} = \frac{q}{E} = -0.1$, $h_2 = 4h_1 = 4x_0$, $a = c = x_0$, $b = 0$, $\nu = 0.3$, $\rho(x) = 0$

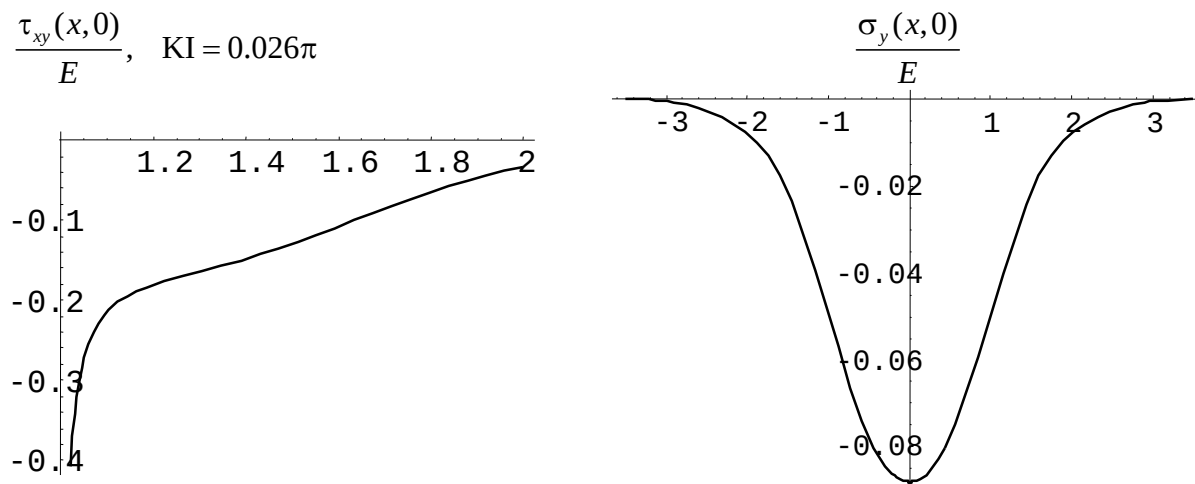


Рис. 2

Вариант 2. $\frac{P}{E} = \frac{q}{E} = -0.1$, $h_2 = 4h_1 = 4x_0$, $a = c = 0.01x_0$, $b = 0$, $\nu = 0.3$, $\rho(x) = 0$

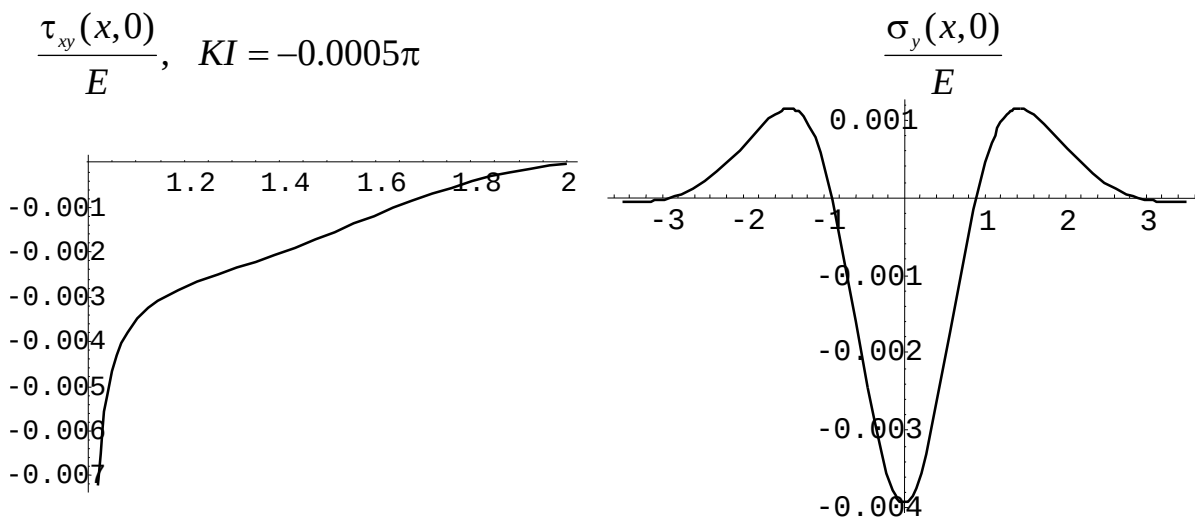


Рис. 3

Вариант 3.

$$\frac{P}{E} = \frac{q}{E} = -0.1, \quad h_2 = 0.75x_0, \quad h_1 = 0.5x_0, \quad a = c = 0.1x_0, \quad b = 0, \quad \nu = 0.3, \quad \rho(x) = x$$

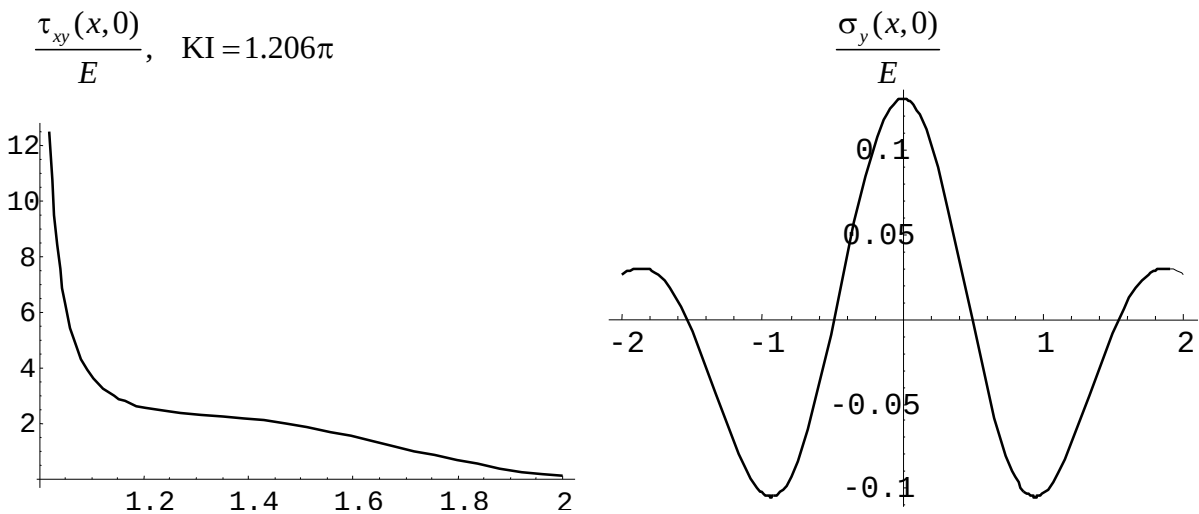


Рис.4

Из графиков, изображенных на рис. 4, следует, что учет трения внутри трещины приводит к принципиальному изменению напряженно-деформированного состояния упругой полосы. Явление изгиба существенно увеличивается. Коэффициент интенсивности касательных напряжений существенно возрастает. Нормальные, контактные напряжения, действующие внутри трещины, меняют свой знак в центральной части трещины и стремятся разрушить контакт берегов трещины, то есть касательные усилия внутри трещины приводят к отходу берегов трещины [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В. С. Поведение трещины под сжимающей нагрузкой. //Докл. НАН РА. 2006. Т.106. №2. С. 144-152.
2. Новожилов В.В.. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 369с.
3. Новацкий. В.К. Теория упругости.М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Изд.иностр.лит, 1955. 667с.

Сведения об авторе

Егиазарян Татевик Айказовна

научный сотрудник,

Институт механики НАН РА, 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24^б

Тел.: (010) 267-082, E-mail: tatevik_ygh@yahoo.com

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С ИДЕАЛЬНОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ**
Емельянов А. Г.

Введение.

Данная задача относится к классу задач аэрогидроупругости.

Аэрогидроупругость – относительно молодая наука, предметом исследования которой является поведение деформируемых тел и конструкций (их элементов), взаимодействующих с газом или жидкостью. Существенным моментом в аэрогидроупругости является учет обратного влияния деформаций тела и конструкций на движение газа, или жидкости. Поэтому в общем случае внешние нагрузки, действующие на конструкции, неизвестны до тех пор, пока не решена задача. При решении конкретных задач из области аэрогидроупругости приходится пользоваться методами теории упругости, строительной механики, аэрогидромеханики и теории колебаний.

Наибольшие успехи в развитии теории аэрогидроупругости связаны с прогрессом в области авиастроения (задачи аэроупругости).

Явления аэрогидроупругости весьма важны также для различных инженерных и технических сооружений: мачты, башни, дымовые трубы, градирни, мосты, высотные здания, трубопроводы, гидроплатформы, гидрозатворы. Круг задач, при решении которых необходимо учитывать влияние среды на поведение конструкций, сооружений и систем, непрерывно расширяется: задачи биомеханики, трубный транспорт, дефектоскопия, расчет элементов ядерных реакторов, расчет сооружений в прибрежной зоне и открытом море, взаимодействие жидкости и газа с мягкими и проницаемыми поверхностями (в работе [1], [3]) и т.д.

В данной работе рассмотрена в линейной постановке осесимметричная задача о взаимодействии

упругой круговой цилиндрической оболочки конечной длины с идеальной несжимаемой жидкостью. Использование метода интегральных преобразований позволило свести задачу к решению системы, состоящей из двух уравнений, одно из них дифференциальное, а другое интегральное. Для решения интегрального уравнения использована классическая модификация метода ортогональных многочленов, которая подробно рассмотрена в [2]. Для решения дифференциального уравнения изгибных колебаний оболочки использовано разложение искомого решения по многочленам Якоби с весовой функцией, удовлетворяющей граничным условиям на торцах оболочки.

Реализация процедуры метода ортогональных многочленов [2] свела задачу к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений искомых функций в ряды. При решении этих систем использовался метод редукции.

Нагрузка действует по всей площади поверхности оболочки. Оболочка имеет два тонких жестких ребра жесткости, прикрепленных к ее торцам. В работе рассмотрены еще две задачи: задача со свободными торцами, и задача, в которой отсутствуют ребра жесткости, а нагрузка приложена к торцам оболочки.

Постановка задачи.

Пусть упругая круговая цилиндрическая оболочка длины $2a$, радиуса R , помещена в идеальную несжимаемую жидкость, занимающую безграничный объем. Ось Oz цилиндрической системы координат r, θ, z направим вдоль оси оболочки (рис.)

Уравнение движения оболочки, взаимодействующей с жидкостью, для случая осевой симметрии будем брать в виде [1,3]

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{R^2} w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(R+0, z, t) - p(R-0, z, t) \quad (|z| \leq a) \quad (1)$$

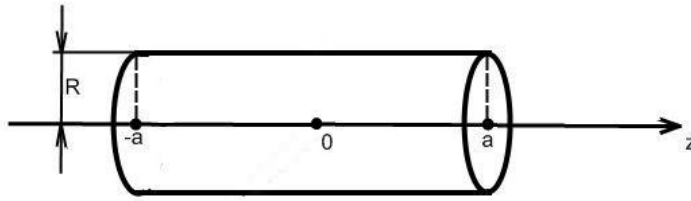


Рис. 1

Здесь $w = w(z, t)$ – радиальное перемещение точек срединной поверхности оболочки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, ρ_0 – плотность оболочки, $p = p(r, z, t)$ – гидродинамическое давление. Жесткость оболочки при изгибе D связана с параметрами E, ν, h формулой

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

К торцам оболочки прикреплены жесткие тонкие кольца. В этом случае граничные условия на торцах должны иметь вид

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad w = 0 \quad (z = \pm a) \quad (2)$$

В случае свободных торцов граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w(z)}{\partial z^3} = 0 \quad (z = \pm a)$$

В случае задачи с отсутствующими кольцами жесткости и нагрузки, распределенной по торцам, граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = C_1, \quad w = C_0 \quad (C_0, C_1 = \text{const}) \quad (z = \pm a)$$

Движение жидкости предполагается потенциальным. Потенциал скоростей точек жидкости $\varphi = \varphi(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Гидродинамическое давление p в предположении малости вносимых оболочкой возмущений связано с функцией φ интегралом Коши

$$p = p_\infty - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где ρ – плотность жидкости, p_∞ – давление на бесконечности.

Занимаемую жидкостью область разобьем на 2 области, которые определяются условиями:

- 1) $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, |z| < \infty$
- 2) $R < r \leq \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, |z| < \infty$

Вне оболочки должны выполняться условия непрерывности движения жидкости

$$p_1 = p_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \quad (r = R, |z| > a) \quad (5)$$

На оболочке должны выполняться условия безотрывности ее обтекания жидкостью

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (r = R, |z| \leq a) \quad (6)$$

С удалением от оболочки вносимые ею возмущения движения жидкости должны затухать.

Метод решения.

Введем в рассмотрение функцию $g(z)$ формулой:

$$w(z, t) = w_*(z) e^{-i\omega t}, \quad \gamma(z) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} [\varphi_{*2}(R, z) - \varphi_{*1}(R, z)] e^{-i\omega t}, & |z| \leq a \\ 0, & |z| > a \end{cases},$$

где ω – круговая частота колебаний.

После перехода к безразмерным величинам приходим к системе (7), (8) двух уравнений относительно функций $w(z), \gamma(z)$

$$\frac{d^4 w(z)}{dz^4} + (\alpha - \omega^2) w(z) + \beta \omega^2 \psi(z) = g(z) \quad (7)$$

$$w(\pm 1) = w'(\pm 1) = 0$$

В случае одного ребра: $w''(\pm 1) = w'''(\pm 1) = 0$

$$\int_{-1}^1 \gamma(\eta) l\left(\frac{\eta - z}{\lambda}\right) d\eta = 2\pi\lambda w(z) \quad (|z| \leq 1) \quad (8)$$

$$l(t) = \int_0^\infty L(u) \sin(ut) du$$

$$L(u) = 2u I_1(u) K_1(u)$$

$$\gamma(z) = \psi'(z)$$

Функции $w(z), \gamma(z)$ представим в виде следующих разложений (для случая антисимметричных колебаний):

$$w(z) = (1 - z^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_{2n+1}^{(4,4)}(z) \quad (|z| \leq 1)$$

$$\text{Для случая симметричных колебаний оболочки: } w(z) = (1 - z^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_{2n}^{(4,4)}(z) \quad (|z| \leq 1)$$

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \gamma_n(z), \quad \gamma_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \sum_{m=1}^{\infty} Y_{n,m} T_m(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

где X_n – подлежащие определению коэффициенты, $P_{2n}^{(4,4)}(z)$ – многочлены Якоби, T_m – многочлены Чебышева первого рода.

Коэффициенты $Y_{n,m}$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$Y_{n,2m+1} = \sigma_{n,2m} + \sum_{j=0}^{\infty} d_{m,j} Y_{n,2j+1} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\sigma_{n,m} = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 (1 - z^2)^{5/2} P_{2n}^{(4,4)}(z) U_m(z) dz$$

$$d_{m,j} = (-1)^{m+j} 2(2m+1) \int_0^\infty [1 - L(u)] J_{2m+1}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2j+1}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u}$$

$U_m(z)$ – многочлены Чебышева второго рода.

Введем многочлены $Q_n(z)$ таким образом: $Q_n(z) = (1 - z^2)^2 P_{2n+1}^{(4,4)}(z)$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

В случае задачи со свободными торцами функцию $w(z)$ представим в виде следующего разложения (рассматривается случай антисимметричных колебаний):

$$w(z) = \iint ((1 - z^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_{2n+1}^{(4,4)}(z)) dz dz =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \iint (1 - z^2)^2 P_{2n+1}^{(4,4)}(z) dz dz \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Введем многочлены $Q_n(z)$ по правилу:

$$Q_n(z) = \iint (1 - z^2)^2 P_{2n+1}^{(4,4)}(z) dz dz \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

В случае задачи, когда отсутствуют ребра жесткости и нагрузка распределена по торцам, введем многочлены $Q_n(z)$ по правилу (для антисимметричных колебаний):

$$Q_n(z) = (1 - z^2)^2 P_{2n-1}^{(4,4)}(z) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$Q_0(z) = C_0 z + C_1 z(1 - z^2)$$

Тогда представление функции $w(z)$ перепишется в виде:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Q_n(z), \quad X_0 = 1 \quad (9)$$

По аналогии рассмотрены случаи симметричных колебаний оболочки для всех трех задач.

Реализация процедуры метода ортогональных многочленов приводит задачу к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n H_{k,n} = g_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

где $H_{k,n} = \bar{Q}_{k,n} + \tilde{Q}_{k,n} + \hat{Q}_{k,n}$ $(n, k = 0, 1, 2, 3, \dots)$

$$\bar{Q}_{k,n} = \int_{-1}^1 Q_n^{(4)}(z) Q_k(z) dz \quad (n, k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\tilde{Q}_{k,n} = (\alpha - \omega^2) \int_{-1}^1 Q_n(z) Q_k(z) dz \quad (n, k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\hat{Q}_{k,n} = \beta \omega^2 \int_{-1}^1 \psi_n(z) Q_k(z) dz \quad (n, k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$g_k = \int_{-1}^1 g(z) Q_k(z) dz \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\psi_n(z) = \int \gamma_n(z) dz = -\sqrt{1 - z^2} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{n,m} U_{2m+1}(z) \frac{1}{2m+2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Условием существования нетривиального решения однородной системы уравнений является равенство нулю ее определителя:

$$\det \|D_{jn}\| = 0 \quad (10)$$

Выполнение этого условия приводит к уравнению, определяющему собственные частоты симметричных колебаний оболочки.

В таблице приведены значения собственных частот антисимметричных колебаний оболочки, полученных по формуле (10) при $\beta=30$, $\alpha=1000$, $\lambda=10$, $g(z) \equiv z$ для разного порядка M урезанной системы

Таблица

M	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2	7.5706	18.6097	75.1571		
3	7.5706	17.8537	44.8255	174.3115	
4	7.5706	17.8298	39.9617	94.8767	339.7083
5	7.5706	17.8294	39.5226	77.5082	179.1253
6	7.5706	17.8294	39.5031	74.6966	135.5291
7	7.5706	17.8294	39.5027	74.4263	125.3571
8	7.5706	17.8294	39.5024	74.3190	123.4033
9	7.5706	17.8294	39.5024	74.3043	123.3157

Приведем график симметричных колебаний оболочки в случае отсутствия жестких ребер при $\alpha = 1000$, $\beta = 30$, $\omega = 10$, $g(z) = z$, $\lambda = 10$, $M = 4$, $C_0 = C_1 = 1$:

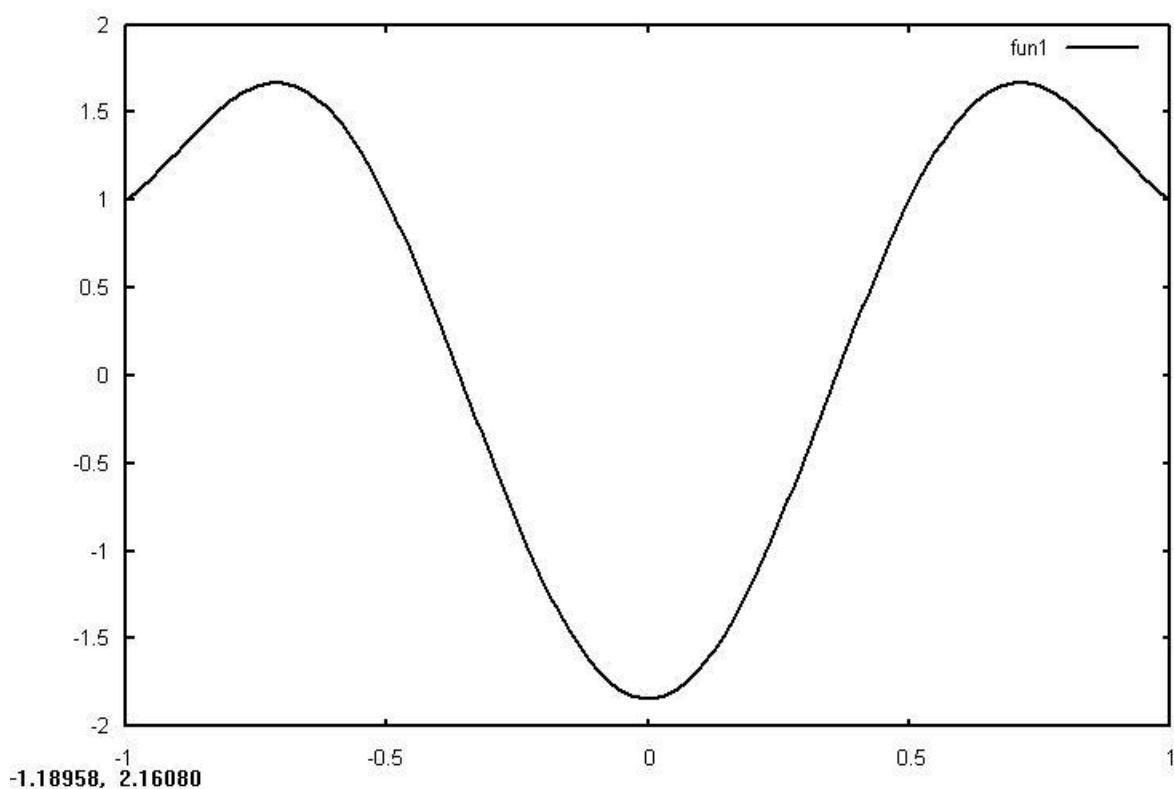


Рис.2

Выводы.

- Описанный алгоритм оказался эффективным в низкочастотном диапазоне изменения частот.
- Для получения первых 5 частот достаточно ограничиться решением системы 10 уравнений при данных значениях параметров.

– Наличие жидкости ($b > 0$) значительно уменьшает собственные частоты колебания оболочки.

– При уменьшении параметра l с 10 до 5 значения собственных (резонансных) частот колебаний оболочки уменьшаются на 0,05% для первой частоты, на 0,005% – для второй частоты, на 0,002% – для третьей частоты, на 0,001% – для четвертой частоты.

– При уменьшении параметра l с 10 до 2 значения собственных (резонансных) частот колебаний оболочки уменьшаются на 0,7% для первой частоты, на 0,07% – для второй частоты, на 0,02% – для третьей частоты, на 0,01% – для четвертой частоты.

Автор выражает благодарность Сметанину Б.И. за ценные советы, которые использовались им при написании данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах М.: Наука, 1993. 224с.
2. Сметанин Б.И. Метод ортогональных полиномов в некоторых задачах гидроупругости. //В сб.: «Современные проблемы механики сплошной среды». Тр. X Международной конференции. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». 2006. С. 260-263.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

Сведения об авторе

Емельянов Алексей Геннадьевич

Техник лаборатории градиентных материалов, гос. образовательное учреждение высшего профессионального образования “Донской Государственный Технический Университет”

Адрес: г. Ростов-на-Дону, ул. Зорге 2, кв. 44

Тел.: 89045063412, E-mail: alexdel@list.ru

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Закарян Т. В.

Первая динамическая краевая задача для изотропных полос-балок асимптотическим методом решена в [1], а для ортотропных полос – в [2,3]. В данной работе на основе динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости для ортотропных пластин, асимптотическим методом изучен пограничный слой. Выведены характеристические уравнения для определения скоростей убывания величин погранслоя при удалении от боковой поверхности. Доказано, что пограничный слой распадается на плоский и антиплоский пограничные слои. Рассмотрен вопрос сопряжения решений пограничного слоя и внутренней задачи.

1. Решение внутренней динамической задачи для ортотропных прямоугольных пластин

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, |z| \leq h, h \ll l, l = \min(a, b)\},$$

при граничных условиях первой краевой задачи теории упругости на поверхностях $z = \pm h$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, h, t) &= \sigma_{\alpha\beta}^+(x, y) \exp(i\Omega t), \\ \sigma_{\alpha\beta}(x, y, -h, t) &= -\sigma_{\alpha\beta}^-(x, y) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z \end{aligned} \quad (1.1)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) &= \sigma_{jk}(x, y, z) \exp(i\Omega t), \\ (u(x, y, z, t), v, w) &= (u_x(x, y, z), u_y, u_z) \exp(i\Omega t), \\ \alpha, \beta &= x, y, z, \quad j, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для внутренней задачи асимптотическое решение можно получить изложенным в [2] способом. Можно установить, что

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^{\text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (U^{\text{int}}, V^{\text{int}}, W^{\text{int}}) = \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}), \\ j, k &= 1, 2, 3, \quad s = \overline{0, N} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h, U = u_x/l, V = u_y/l, W = u_z/l$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{12}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\ \sigma_{11}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(-A_{23} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{22}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(-A_{13} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{33}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(A_{11} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$A_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A_{12} = a_{12}a_{33} - a_{23}a_{13}, \quad A_{13} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}, \quad A_{22} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2,$$

$$A_{23} = a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}, \quad A_{33} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2, \quad \Delta = a_{11}A_{22} - a_{12}A_{12} - a_{13}A_{23},$$

$$Q^{(m)} \equiv 0, \quad \text{при } m < 0,$$

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 U^{(s)} = R_U^{(s)}, \quad \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{44} \Omega_*^2 V^{(s)} = R_V^{(s)}, \quad A_{11} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta \Omega_*^2 W^{(s)} = R_W^{(s)},$$

$$R_U^{(s)} = -a_{55} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (1.5)$$

$$R_V^{(s)} = -a_{44} \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta},$$

$$R_W^{(s)} = -\Delta \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) + A_{23} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta},$$

Следовательно,

$$U^{(s)} = U_0^{(s)} + U_\tau^{(s)}, \quad U_0^{(s)} = C_1^{(s)}(\xi, \eta) \sin \gamma_1 \zeta + C_2^{(s)}(\xi, \eta) \cos \gamma_1 \zeta, \quad (1.6)$$

$$(U, V, W; C_1^{(s)}, C_2^{(s)}; C_3^{(s)}, C_4^{(s)}; C_5^{(s)}, C_6^{(s)}; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

$$\gamma_1 = \Omega_* \sqrt{a_{55}}, \quad \gamma_2 = \Omega_* \sqrt{a_{44}}, \quad \gamma_3 = \Omega_* \sqrt{\Delta/A_{11}},$$

где $U_\tau^{(s)}, V_\tau^{(s)}, W_\tau^{(s)}$ – частные решения уравнений (1.5).

После удовлетворения условиями (1.1) однозначно определяются функции $C_j^{(s)}(\xi, \eta)$, т.е. решение внутренней задачи, которое не будет удовлетворять, как правило, условиям на боковой поверхности. Чтобы устранить возникающую неувязку, строится пограничный слой. Чтобы построить решение пограничного слоя вблизи края $x=0$, вводится новая замена переменной $g = x/e$, тогда уравнения трехмерной задачи примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{11b}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{12b}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13b}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U_b = 0, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12b}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{22b}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23b}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V_b = 0, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13b}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_{23b}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33b}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 W_b = 0, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial \gamma} = a_{11} \sigma_{11b} + a_{12} \sigma_{22b} + a_{13} \sigma_{33b}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial V_b}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{11b} + a_{22} \sigma_{22b} + a_{23} \sigma_{33b}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{11b} + a_{23} \sigma_{22b} + a_{33} \sigma_{33b},$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial \gamma} + \frac{\partial U_b}{\partial \eta} = a_{66} \sigma_{12b}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_b}{\partial \gamma} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_b}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{13b}, \quad \frac{\partial W_b}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23b}, \quad \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2.$$

Необходимо найти такое решение системы (1.7), которое убывает при удалении от $x=0$ в глубь пластины и удовлетворяет условиям

$$\sigma_{13b}(\zeta = \pm 1) = 0, \quad \sigma_{23b}(\zeta = \pm 1) = 0, \quad \sigma_{33b}(\zeta = \pm 1) = 0. \quad (1.8)$$

Решение системы (1.7) ищем в виде

$$\sigma_{jkb} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jkb}^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda \gamma),$$

$$(U_b, V_b, W_b) = \varepsilon^s (U_b^{(s)}(\eta, \zeta), V_b^{(s)}, W_b^{(s)}) \exp(-\lambda \gamma), \quad (1.9)$$

$$j, k = 1, 2, 3, \quad s = \overline{0, N}.$$

Подставив (1.9) в (1.7), определим коэффициенты $\sigma_{jkb}^{(s)}, U_b^{(s)}, V_b^{(s)}, W_b^{(s)}$

$$\begin{aligned} \sigma_{13b}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda W_b^{(s)} \right), \quad \sigma_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left(-\lambda V_b^{(s)} + \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \\ \sigma_{11b}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(-\lambda A_{22} U_b^{(s)} - A_{12} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - A_{23} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} \right), \quad \sigma_{22b}^{(s)} = \frac{1}{\Delta} \left(\lambda A_{12} U_b^{(s)} + A_{33} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - A_{13} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{33b}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta} \left(\lambda A_{23} U_b^{(s)} - A_{13} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta} + A_{11} \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial \zeta} \right), \end{aligned}$$

$$W_b^{(s)} = c_1 \left[\Delta A_{11} a_{55} \frac{\partial^3 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^3} + c_2 \frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial \zeta} + f_{UW}^{(s)} \right], \quad (1.10)$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta \lambda (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2) (a_{55} A_{23} - \Delta)}, \quad c_2 = a_{55}^2 (\lambda^2 A_{22} + \Delta \Omega_*^2) A_{11} - \lambda^2 (A_{23} a_{55} - \Delta)^2,$$

$$f_{UW}^{(s)} = -A_{11} a_{55} \frac{\partial R_{Ub}^{(s)}}{\partial \zeta} + \lambda (A_{23} a_{55} - \Delta) R_{Wb}^{(s)},$$

$$R_{Ub}^{(s)} = -a_{55} (\lambda A_{12} \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \Delta \frac{\partial \sigma_{12b}^{(s-1)}}{\partial \eta}),$$

$$R_{Wb}^{(s)} = a_{55} (A_{13} \frac{\partial^2 V_b^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \Delta \frac{\partial \sigma_{23b}^{(s-1)}}{\partial \eta}),$$

Функция $U_b^{(s)}$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^4 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^4} + B_{11} \frac{\partial^2 U_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + B_{22} U_b^{(s)} = \psi_U^{(s)}, \quad (1.11)$$

$$B_{11} = \frac{\lambda^2}{\Delta A_{11}} (a_{55} (A_{11} A_{22} - A_{23}^2) + 2 A_{23} \Delta) + \frac{\Omega_*^2}{A_{11}} (\Delta + A_{11} a_{55}), \quad B_{22} = \frac{1}{A_{11}} (\lambda^2 A_{22} + \Delta \Omega_*^2) (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2),$$

$$\psi_U^{(s)} = \frac{1}{A_{11} a_{55}} (\lambda^2 + a_{55} \Omega_*^2) R_{Ub}^{(s)} - \frac{1}{\Delta A_{11} a_{55}} \frac{\partial f_{UW}^{(s)}}{\partial \zeta},$$

где $\psi_U^{(s)}$ – известная функция, $\psi_U^{(0)} \equiv 0$. Решением уравнения (1.11) является

$$U_b^{(s)} = A_1^{(s)} \psi_1 + A_2^{(s)} \psi_2 + A_3^{(s)} \psi_3 + A_4^{(s)} \psi_4 + U_{tb}^{(s)}, \quad (1.12)$$

где $U_{tb}^{(s)}$ – частное решение уравнения (1.11), а

$$\psi_1 = \text{ch} k_1 \zeta, \quad \psi_2 = \text{sh} k_1 \zeta, \quad \psi_3 = \text{ch} k_3 \zeta, \quad \psi_4 = \text{sh} k_3 \zeta,$$

$$k_{1,3} = \sqrt{\frac{-B_{11} \pm \sqrt{B_{11}^2 - 4 B_{22}}}{2}} \quad (1.13)$$

Функция $V_b^{(s)}$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 V_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{a_{44}}{a_{66}} \lambda^2 + \Omega_*^2 a_{44} \right) V_b^{(s)} = f_{Vb}^{(s)}, \quad (1.14)$$

$$f_{Vb}^{(s)} = \frac{a_{44}}{a_{66}} \lambda \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - a_{44} \frac{\partial \sigma_{22b}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 W_b^{(s-1)}}{\partial \zeta \partial \eta}.$$

Используя (1.12), определив по (1.10) $\mathbf{s}_{13b}^{(0)}, \mathbf{s}_{33b}^{(0)}$ и удовлетворив соответствующим условиям (1.8), для определения показателя l получим уравнения

$$(c_3 - c_4) \text{sh}(k_1 + k_3) \pm (c_3 + c_4) \text{sh}(k_1 - k_3) = 0, \quad (1.15)$$

$$c_{3,4} = (c_1 \lambda \Delta A_{11} a_{55} k_{1,3}^2 + c_1 c_2 - 1) (\lambda A_{23} + A_{11} c_1 \Delta a_{55} k_{3,1}^4 + c_1 c_2 A_{11} k_{3,1}^2) k_{1,3},$$

которые соответствуют плоскому симметричному (растяжение – сжатие) и кососимметричному (изгиб) пограничным слоям, для которых

$$I. \quad U_b^{(0)} = A_1^{(0)} \left(\psi_1 + b_4 \frac{\text{sh} k_1}{\text{sh} k_3} \psi_3 \right), \quad (1.16)$$

$$II. \quad U_b^{(0)} = A_2^{(0)} \left(\psi_2 + b_4 \frac{\text{ch} k_1}{\text{ch} k_3} \psi_4 \right), \quad (1.17)$$

$$b_4 = -\frac{(c_1 \lambda \Delta A_{11} a_{55} k_1^2 + c_1 c_2 - 1) k_1}{(c_1 \lambda \Delta A_{11} a_{55} k_3^2 + c_1 c_2 - 1) k_3}.$$

Нас будут интересовать корни уравнений (1.15) с $\text{Re } l > 0$. Из уравнения (1.14) определив $V_b^{(0)}$ и удовлетворив условиям $S_{23b}^{(0)}(Z = \pm 1) = 0$, получим

$$V_b^{(0)} = B^{(0)}(\text{tg} m \sin m \zeta + \cos m \zeta),$$

$$m = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{66}} \lambda^2 + \Omega_*^2 a_{44}}, \quad \lambda_n = \sqrt{\left(\frac{\pi^2 n^2}{4} - \Omega_*^2 a_{44} \right) \frac{a_{66}}{a_{44}}}. \quad (1.18)$$

Укажем, что l_n – определенные по формуле (1.18), не будут корнями уравнений (1.15) и, наоборот. Им будут соответствовать антиплоский и плоский пограничные слои.

2. Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя. Учитывая, что корни уравнений (1.15) – комплексно-сопряженные и $\text{Re } l_n > 0$, решение плоского пограничного слоя можно представить в виде:

$$\begin{aligned} U_{bn}^{(s)} &= A_{1n}^{(s)} \text{Re} \tilde{U}_{bn} + A_{2n}^{(s)} \text{Im} \tilde{U}_{bn} + \tilde{U}_{b\tau}^{(s)}, \quad (U, W) \\ \sigma_{jkb}^{(s)} &= A_{1n}^{(s)} \text{Re} \tilde{\sigma}_{jkb} + A_{2n}^{(s)} \text{Im} \tilde{\sigma}_{jkb} + \tilde{\sigma}_{jkb\tau}^{(s)}, \quad j, k = 1, 3, \\ \tilde{U}_{bn} &= U_{bn} \exp(-\lambda \gamma), \quad \tilde{\sigma}_{jkb} = \sigma_{jkb} \exp(-\lambda \gamma), \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение $V_b^{(s)}$, согласно (1.18), будет вещественным.

Учитывая, что пограничный слой определяется из однородных уравнений (1.7) и однородных граничных условий (1.8), решение пограничного слоя будет определено с точностью постоянного множителя (e^c), следовательно, будем иметь

$$\sigma_{jkb} = \varepsilon^{\chi-1+s} \sigma_{jkb}^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda \gamma), \quad U_b = \varepsilon^{\chi+s} U_b^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda \gamma), \quad (U, V, W). \quad (2.2)$$

Учитывая, что общее решение имеет вид

$$I = I^{\text{int}} + I_b \quad (2.3)$$

удовлетворим условиям на боковой поверхности $x = 0$. Пусть боковая поверхность $x = 0$ свободна:

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2.4)$$

Используя (2.3), (1.3), (2.2), (2.1), после удовлетворения условиями (2.4) получим непротиворечивые условия для определения величин пограничного слоя лишь при $\chi = 0$.

Согласно (1.3), (1.9) и (2.1), условия (2.4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(s)}(0, \eta, \zeta) + A_{1n}^{(s)} \text{Re} \tilde{\sigma}_{xxbn}(\gamma = 0) + A_{2n}^{(s)} \text{Im} \tilde{\sigma}_{xxbn}(\gamma = 0) + \tilde{\sigma}_{xxb\tau}^{(s)}(\gamma = 0) &= 0, \\ \sigma_{xz}^{(s)}(0, \eta, \zeta) + A_{1n}^{(s)} \text{Re} \tilde{\sigma}_{xzb}(\gamma = 0) + A_{2n}^{(s)} \text{Im} \tilde{\sigma}_{xzb}(\gamma = 0) + \tilde{\sigma}_{xzb\tau}^{(s)}(\gamma = 0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{xy}^{(s)}(0, \eta, \zeta) + B_n^{(s)} \sigma_{xybn}(\gamma = 0) + \sigma_{xyb\tau}^{(s)}(\gamma = 0) = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (2.6)$$

Поскольку $\sigma_{xx}^{(s)}$, $\sigma_{xz}^{(s)}$, $\sigma_{xy}^{(s)}$ уже определены из решения внутренней задачи, из системы (2.5) определятся $A_{1n}^{(s)}$, $A_{2n}^{(s)}$, а из уравнения (2.6) – постоянные $B_n^{(s)}$. Для их вычисления можно использовать методы коллокации и наименьших квадратов, а также метод Фурье. Аналогичным образом удовлетворяются другими условиями на боковой поверхности, например, условиями жесткой заделки ($U = V = W = 0$ при $x = 0$). Для этого случая $c = 0$ и используя (1.3), (1.9), (1.18), (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned} U^{(s)}(0, \eta, \zeta) + A_{1n}^{(s)} \text{Re} \tilde{U}_{bn}(\gamma = 0) + A_{2n}^{(s)} \text{Im} \tilde{U}_{bn}(\gamma = 0) + \tilde{U}_{b\tau}^{(s)}(\gamma = 0) &= 0, \\ (U, W), \quad n = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$V^{(s)}(0, \eta, \zeta) + B_n^{(s)}(\text{tg} m_n \sin m_n \zeta + \cos m_n \zeta) + \tilde{V}_{b\tau}^{(s)}(\gamma = 0) = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (2.8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. //Прикл. матем. и мех. (ПММ). 2008. Т. 72. Вып. 4. С. 633-643.
2. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Об асимптотике вынужденных колебаний ортотропной полосы. //Докл. НАН РА. 2007. Т. 107. №2. С. 173-178.
3. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. //В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван. 2007. С. 21-27.

Сведения об авторе

Закарян Татевик Владиковна
Аспирант, Институт механики НАН РА
Тел.: (094) 63-88-82, E-mail: tatevik83@rambler.ru

ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ

Казаков К. Е.

Рассмотрим два класса плоских контактных задач для вязкоупругих тел с тонкими покрытиями: 1) задачи для тел с поверхностно неоднородными упругими покрытиями (рис. 1а) [1] и 2) задачи для тел, форма вязкоупругих покрытий которых повторяет форму штампа (конформные покрытия) (рис. 1б) [2, 3]. Можно показать [1–3], что обе эти задачи приводят к одному и тому же, с математической точки зрения, смешанному интегральному уравнению, содержащему интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования:

$$c(t)m(x)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_1)q(x, t) + (\mathbf{I} - \mathbf{V}_2)\mathbf{F}q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x + g(x), \quad (1)$$

где $q(x, t) \geq 0$ — безразмерное контактное давление, $\delta(t)$ и $\alpha(t)$ — безразмерные осадка и угол поворота штампа; $g(x) \geq 0$ — в случае задачи о неоднородном покрытии — форма основания штампа, а в случае задачи о конформном контакте $g(x) \equiv 0$; $c(t) > 0$ — отношение модуля упруго-мгновенной деформации нижнего слоя к модулю Юнга покрытия (в случае неоднородного покрытия берется некоторое осредненное значение E_0); $\mathbf{I}$ — тождественный оператор; $\mathbf{V}_1$ — в случае задачи о неоднородном покрытии $\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$, а в случае задачи о конформном контакте — интегральный оператор Вольтерра, безразмерное ядро которого пропорционально ядру ползучести при растяжении для покрытия; $\mathbf{V}_2$ — интегральный оператор Вольтерра, безразмерное ядро которого пропорционально ядру ползучести при растяжении для нижнего слоя; $\mathbf{F}$ — интегральный оператор с ядром плоской контактной задачи [4], отнесенным к числу ρ . Функция $m(x) > 0$ для двух обозначенных задач различна. Для первой задачи она пропорциональна произведению отношения E_0 покрытия к переменной жесткости покрытия и отношению постоянной толщины покрытия к ширине штампа. Для второй задачи характерным является лишь то, что эта функция пропорциональна отношению переменной толщины к ширине штампа. Это интегральное уравнение дополняется двумя условиями равновесия штампа на слое. В безразмерном виде они представляют из себя следующие выражения:

$$\int_{-1}^1 q(x, t) dx = P(t), \quad \int_{-1}^1 q(x, t)x dx = M(t) \equiv P(t)e(t), \quad (2)$$

где $P(t)$ — действующая на штамп безразмерная сила (точнее, функция, пропорциональная отношению силы к модулю упруго-мгновенной деформации нижнего слоя), $e(t)$ —

безразмерный эксцентриситет ее приложения. Более подробно о постановке задачи и о получении безразмерных уравнений можно узнать в [1–3].

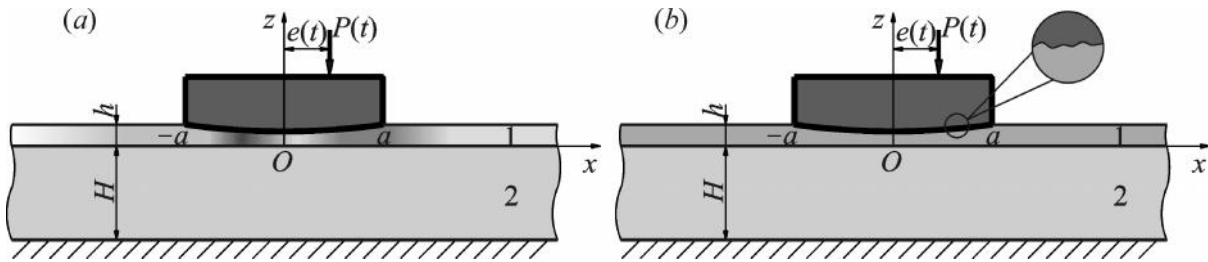


Рис. 1. Плоская контактная задача для тел с неоднородными покрытиями (a) и для тел с конформными покрытиями (b)

Решение задачи (1)–(2) можно получить с помощью обобщенного проекционного метода А.В. Манжирова решения смешанных интегральных уравнений [5, 6]. Структура решения имеет вид:

$$q(x, t) = \frac{1}{m(x)} [z_0(t)P_0(x) + z_1(t)P_1(x) + \dots],$$

где $z_k(t)$ — функции времени t , а $P_k(x)$ — полиномы специального вида (функции $p_k(x) = P_k(x)/\sqrt{m(x)}$ ортогональны), $k = 0, 1, 2, \dots$. В решении удастся в явном виде выделить функцию $m(x)$, а значит, и связанную с ней особенность: функцию неоднородности покрытия либо переменную толщину штампа. Это позволяет производить расчеты для оснований, жесткости или толщины покрытий которых описываются сложными, в частности, быстро осциллирующими и даже разрывными функциями.

Для функций осадки и угла поворота также получаются явные аналитические выражения в рядах [1–3].

В качестве примера рассмотрим двухслойное основание, нижний слой которого изготовлен из вязкоупругого стареющего материала, а верхний неоднородный — из упругого. Между слоями осуществляется идеальный контакт. Считается, что изменение модуля упругости вязкоупругого материала с течением времени несущественно, т.е. $E_2(t) \equiv E_2$. Механизм ползучести материала нижнего слоя представим в виде [7]:

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi\tau})[1 - e^{-\psi(t-\tau)}].$$

Зададимся следующими значениями параметров вязкоупругого основания и упругого покрытия [7]: $c(t) \equiv 1$, $\nu_2 = 0.1$, $C_0 E_2 = 0.5522$, $A_0 E_2 = 4$, $\chi\tau_0 = 0.31$, $\psi\tau_0 = 0.6$ ($\tau_0 = 10$ сут). Здесь ν_2 — коэффициент Пуассона нижнего слоя, τ_0 — момент, в который начинает вдавливать штамп. Без ограничения общности, момент изготовления вязкоупругого слоя примем равным нулю, т.е. $\tau_2 = 0$.

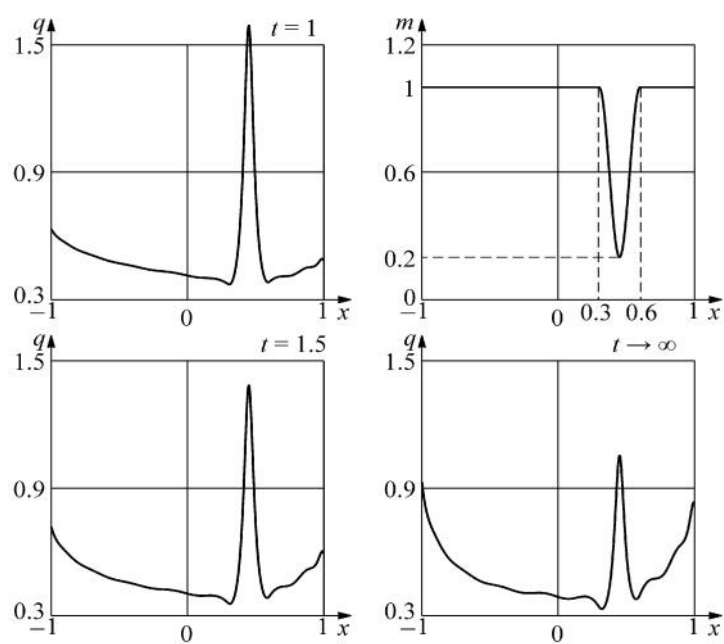


Рис. 2. Распределение контактного давления для функции $m(x)$, определяемой формулой

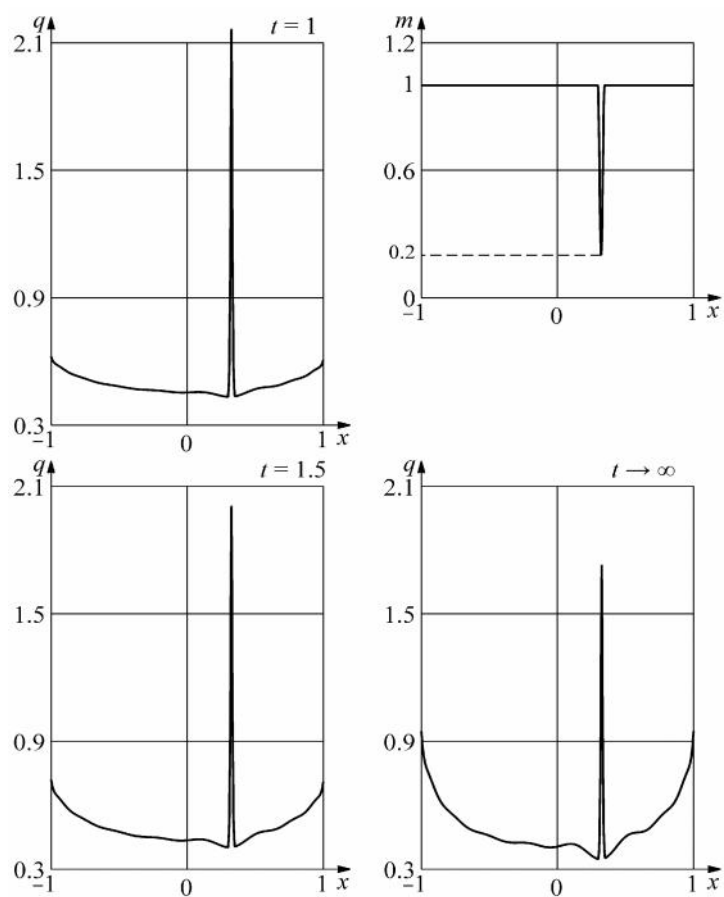


Рис. 3. Распределение контактного давления для функции $m(x)$, определяемой формулой

Рассмотрим сначала задачу с покрытием, жесткость которого изменена локально. Будем считать, что функция $m(x)$, обратно пропорциональная жесткости покрытия, задается формулой

$$m(x) = \begin{cases} 0.6 + 0.4 \cos \frac{2\pi(x-0.3)}{0.3} & \text{при } x \in [0.3, 0.6], \\ 1 & \text{при } x \notin [0.3, 0.6]. \end{cases} \quad (3)$$

На такое основание действует плоский штамп единичной силой. Эксцентриситет приложения силы равен нулю. На рис. 2 показано распределение контактного давления в различные моменты времени ($t=1$, $t=1.5$ и установившееся распределение, $t \rightarrow \infty$). С течением времени контактные давления изменяются, однако всюду в явном виде видна зависимость от жесткости покрытия. Если область повышенной жесткости будет меньше, то контактные давления в точке максимума жесткости будут больше, чем в первом случае. На рис. 3 показано распределение контактных давлений для случая, когда жесткости отвечает функция

$$m(x) = \begin{cases} 0.6 + 0.4 \cos \frac{2\pi(x-0.3)}{0.05} & \text{при } x \in [0.3, 0.35], \\ 1 & \text{при } x \notin [0.3, 0.35]. \end{cases} \quad (4)$$

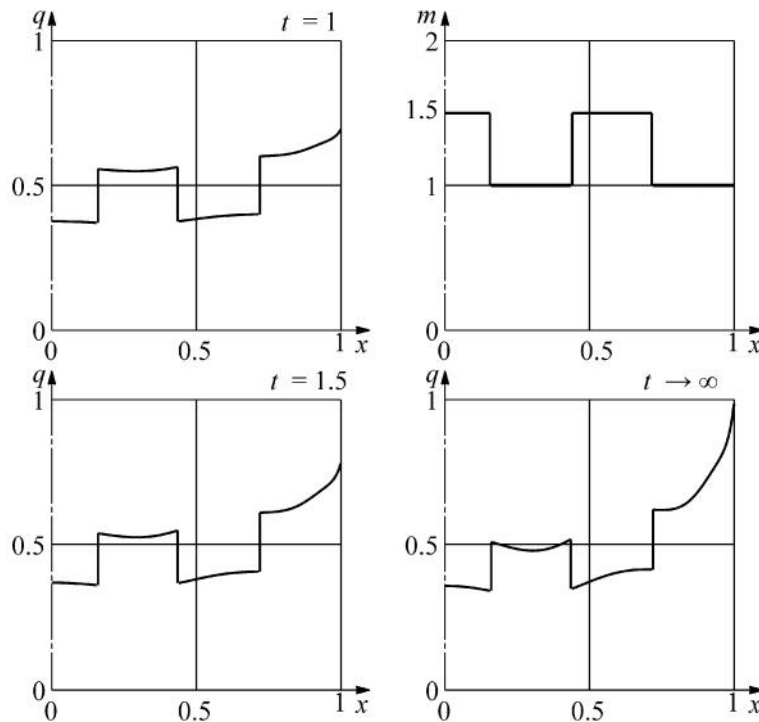


Рис. 4. Распределение контактного давления для функции $m(x)$, определяемой формулой (5)

Видно, что пик в любой момент времени заметно выше, чем в первом случае.

Очевидно, что вследствие несимметричности жесткости штамп будет поворачиваться, причем этот поворот будет осуществляться против часовой стрелки, так как справа находится более жесткий участок.

Часто неоднородные поверхности описываются функциями жесткости $R(x)$, принадлежащими к классу кусочно-постоянных функций

$$R(x) = \begin{cases} R_1 & \text{при } x \in \Omega \setminus \omega, \\ R_2 & \text{при } x \in \omega, \end{cases}$$

где ω — совокупность всех упрочненных зон, $\Omega \setminus \omega$ — совокупность всех неупрочненных зон; $R_2 > R_1$. На рис. 4 показано распределение контактного давления для случая, когда зоны упрочнения равномерно распределены по продольной оси, причем ось z является осью симметрии. Соответствующая такому распределению функция $m(x)$ имеет вид

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [\frac{1}{7}(4i-7), \frac{1}{7}(4i-5)], \\ 1.5 & \text{при } x \in [\frac{1}{7}(4i-5), \frac{1}{7}(4i-3)]. \end{cases} \quad (5)$$

Как и ранее, в основание с таким покрытием вдавливается плоский штамп единичной силой с эксцентриситетом ее приложения $e(t) \equiv 0$. Видно, что контактные давления претерпевают скачки в местах изменения жесткости покрытия. С течением времени происходит перераспределение контактных давлений, причем на всех участках это перераспределение имеет различный характер: на краях штампа оно увеличивается, ближе к центру уменьшается.

В качестве еще одного примера рассмотрим случай, когда для покрытия используются два материала, граница раздела которых проходит по оси z штампа, т.е.

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 2 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

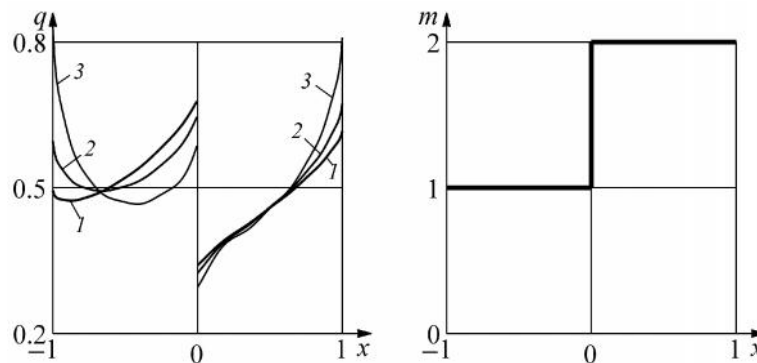


Рис. 5. Распределение контактного давления для функции $m(x)$, определяемой формулой (6)

Графики контактных давлений представлены на рис. 5 (1 — $t=1$, 2 — $t=1.5$, 3 — установившееся распределение). Видно, что на различных участках напряжения меняются по-разному. Разумеется, несимметричность жесткости вызывает значительный перекос штампа на слое.

Автор благодарит А.В. Манжирова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №08-01-00003, №08-01-00553), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа №13 ОЭ) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ №НШ-1245.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манжиров А.В., Казаков К.Е. Плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих стареющих тел с поверхностно неоднородными покрытиями // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию со дня рождения Е.И. Шемякина. — М.: Физматлит, 2006. С. 411–422.
2. Казаков К.Е., Манжиров А.В. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв. РАН. МТТ. 2008. №3. С. 227–240.
3. Manzhirrov A.V., Kazakov K.E. Conformal contact between foundations and punches // Topical problems in solid mechanics / Ed. by N.K. Gupta, A.V. Manzhirrov. — New Delhi: IPT Delhi, 2008. P. 92–104.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. Манжиров А.В. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Труды V Росс. конф. с междунар. участием, 22–24 августа 2005 г., г. Саратов, Россия. Саратов, Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2005. С. 222–226.
6. Polyanin A.D., Manzhirrov A.V. Handbook of Integral Equations, 2nd edition. Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC, 2008. 1144 p.
7. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.

Сведения об авторе

Казаков Кирилл Евгеньевич

Кандидат физ.-мат.наук, научный сотрудник, Учреждение Российской академии наук
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Адрес: пр-т Вернадского 101 корп. 1, Москва, 119526, Россия

Тел.: (+7 499) 907 9131, (+7 495) 434 3456, E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

НУЛЕВЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ СВЯЗАННОГО ДИНАМИЧЕСКОГО GNII-ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛЯ

Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А.

Нелинейная теория связанного динамического термоупругого поля типа GNII (гиперболическая термоупругость) представлена с помощью лагранжева формализма как физическая теория поля с целью вывода дифференциальных уравнений поля и последующего определения вариационных симметрий указанного поля. Изложение существенно отличается от присущих механике и термодинамике сплошных сред способов определения основных тензорных характеристик поля и вывода полевых уравнений. Исходя из вариационного принципа минимальности действия для связанного термоупругого поля, даны канонические и естественные определения всех важнейших тензорных полей, необходимых для его описания. С помощью теории нулевого лагранжиана исследуется степень определенности тензорных характеристик поля. Теория нулевого лагранжиана развивается также и для того, чтобы распространить канонический лагранжев формализм до тех естественных пределов, которые устанавливаются указанной выше неопределенностью. С помощью дивергентной формулы, справедливой для звездобразных областей, получено наиболее общее представление нулевого лагранжиана, зависящего от градиентов порядка поля не выше первого. Изложен алгоритмический метод вывода нулевого лагранжиана для произвольного n -мерного пространственно-временного многообразия. Приводятся явные формы нулевых лагранжианов в случае, когда термодинамический базис соответствует связанному динамическому термоупругому полю типа GNII и состоит из материальных лагранжевых координат, градиентов деформации, градиентов температурного смещения, скоростей эйлеровых координат и скорости температурного смещения.

1. Основные уравнения и вводные замечания

Вариационная формулировка как средство математического представления физической теории часто рассматривается в качестве самого элегантного и экономичного (в духе принципа экономии мышления Маха (E. Mach)) представления, по крайней мере, для физических теорий, не претендующих на описание диссипативных процессов [1]. Классическая механика Лагранжа и Гамильтона является великолепным образцом теории, реализованной с помощью вариационного описания. Следует также отметить, что вариационные принципы были положены в основу физической теории электромагнитного и гравитационного поля. Термомеханика континуума в варианте гиперболической термоупругости (GNII-термоупругости [2, 3]), являясь классической теорией поля, не может быть исключением. Кроме того, исследование обобщенных симметрий и групп инвариантности функционала термоупругого действия (вариационных симметрий действия) есть, по-видимому, не только самое мощное средство проникновения в сущность самой термомеханики континуума, но и регулярный метод вывода инвариантных интегралов, которые часто могут иметь и важное прикладное значение. В статьях [4, 5] нелинейная теория упругости построена как физическая теория поля в прямом каноническом варианте. При этом изложение существенно отличается от характерных для механики сплошных сред и теории упругости способов определения базовых понятий и вывода основных полевых уравнений. В работе [6] дана вариационная формулировка нелинейной связанной динамической термоупругости типа GNII. Гиперболическая термоупругость характеризуется тем, что распространение тепла происходит с конечной скоростью и представляет собой волновой процесс. Гиперболическая термоупругость не допускает диссипации энергии в процессе распространения термической волны, что позволяет ставить вопрос о поиске интеграла термоупругого действия и формулировке принципа наименьшего действия с целью последующего вывода дифференциальных уравнений связанного динамического термоупругого поля и нахождения вариационных симметрий этих уравнений. Модель гиперболической термоупругости в настоящее время все больше привлекает внимание с точки зрения ее прикладных аспектов [7]. Заметим, что в [6] с целью построения лагранжиана термоупругого поля используется термодинамический базис, состоящий из материальных лагранжевых координат, градиентов деформации, градиентов температурного смещения, скоростей эйлеровых координат и скорости температурного смещения.

Как хорошо известно из исследований, посвященных современной теории поля, лагранжиан поля всегда может быть трансформирован с помощью дополнительного слагаемого так, чтобы уравнения поля (уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала действия) не изменили свой вид. В этом случае добавочный лагранжиан должен приводить к таким уравнениям Эйлера–Лагранжа, которые удовлетворялись бы тождественно для любого физического поля. Такие

лагранжианы называются нулевыми лагранжианами (или лагранжианами пустого пространства). Понятие о лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и обобщенных законов сохранения. В работе [8] найдены все нулевые лагранжианы нелинейного упругого поля, которые зависят от градиентов поля порядка не выше первого.

Представленный в настоящей статье материал располагается в следующей последовательности: сначала излагаются основные сведения, касающиеся вариационного представления физических полей, принципа наименьшего действия и возможных форм нулевого лагранжиана (см., например, [9]), затем приводится полная теория лагранжиана пустого пространства для 4-мерного пространственно-временного многообразия и произвольного конечного набора физических полевых величин, содержащая как частный случай все формы нулевых лагранжианов термоупругого поля типа GNII. В заключительном разделе работы с помощью дивергентного представления лагранжиана пустого пространства для звездообразной области получено его общее выражение, содержащее градиенты поля, порядка не выше первого, в случае произвольного n -мерного многообразия.

В целом статью следует рассматривать как компактное, но вполне строгое дополнение к нелинейной теории динамической связанной термоупругости типа GNII [6], рассматриваемой с позиций классической теории поля.

Рассмотрим функционал типа Гамильтонова действия

$$\mathfrak{I} = \int_{\mathcal{D} \times [t_1, t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X,$$

где φ^k — упорядоченный массив физических полевых величин (динамических переменных), число которых предполагается конечным; X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — пространственно-временные координаты; $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); $d^4 X$ — элемент объема; $\mathcal{D}$ — область трехмерного пространства, в которой изменяются пространственные координаты X^1, X^2, X^3 ; величины t_1, t_2 — границы временного интервала. В дальнейшем, имея ввиду связанное динамическое термоупругое поле, будем предполагать, что $\mathcal{L}$ не зависит от градиентов динамических переменных порядка, выше первого. Интерпретируя развиваемую теорию в аспекте термомеханики деформируемых сред, можно считать, что φ^k ($k = 1, 2, 3$) есть эйлеровы координаты $\varphi^k = x^k$, а $\varphi^4 = \vartheta$ — температурное смещение (первообразная по времени от температуры θ). Большинство современных физических теорий ограничивается градиентами первого порядка от полей φ^k .

Под $d^4 X$ мы понимаем "естественный" элемент объема

$$d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4.$$

Поэтому $\mathcal{L}$ — "естественная" плотность лагранжиана. Лагранжиан предполагается локальным, т.е. его значение в точке X^β определяется значениями динамических переменных φ^k и конечного числа их частных производных по пространственно-временным координатам, вычисленных в той же самой точке.

Инвариантный элемент объема $d^4 \tau$ пространственно-временного многообразия, параметризованного криволинейными координатами $\tilde{X}^\beta$, определяется на основании

$$d^4 \tau = \sqrt{\tilde{g}} d\tilde{X}^1 d\tilde{X}^2 d\tilde{X}^3 d\tilde{X}^4,$$

где $\tilde{g}$ — определитель (точнее, его абсолютная величина), составленный из метрических коэффициентов $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Поскольку метрика пространства-времени гиперболична, то обычно вместо $\sqrt{\tilde{g}}$ пишут $\sqrt{-\tilde{g}}$, ибо в последнем случае величина под корнем будет положительной.

Таким образом, инвариант $\sqrt{-\tilde{g}}d\tilde{X}^1d\tilde{X}^2d\tilde{X}^3d\tilde{X}^4$ — величина четырехмерного объема, измеренного в локальной координатной системе посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности. Инвариантный элемент объема следует отличать от "естественного" элемента объема $d^4\tilde{X} = d\tilde{X}^1d\tilde{X}^2d\tilde{X}^3d\tilde{X}^4$, так как координатная система пространственно-временного многообразия может быть криволинейной, и в этом случае величина $\sqrt{-\tilde{g}}$ отлична от единицы.

При использовании криволинейной координатной системы в пространственно-временном многообразии функционал действия следует писать в форме

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D} \times [t_1, t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) \sqrt{-g} d^4X.$$

Ясно поэтому, что часто характер координатной системы можно вообще не специфицировать, но тогда в уравнениях поля под функцией Лагранжа следует понимать не $\mathcal{L}$, а $\sqrt{-g}\mathcal{L}$, что и будет предполагаться в дальнейшем изложении и мы, таким образом, возвращаемся к выражению действия в первоначальной форме. Следует однако помнить, что $\mathcal{L}$ в этом случае будет не плотностью по отношению к инвариантному элементу объема пространственно-временного многообразия, но будет таковой по отношению к "естественному" элементу объема. Как уже отмечалось, величину $\mathcal{L}$ можно поэтому называть "естественной" плотностью лагранжиана.

Отправным пунктом для математического описания физических полей служит принцип Гамильтона (или принцип наименьшего действия), который гласит, что поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль (для всех допустимых вариаций полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах X^β)

$$\delta \mathfrak{S} = 0.$$

Обобщение функционала действия (и теории вариационных симметрий уравнений поля) достигается путем аддитивной трансформации "естественной" плотности лагранжиана

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}'$$

так, чтобы добавочное слагаемое

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

не нарушало выполнения уравнений Эйлера–Лагранжа. Другими словами, добавление $\mathcal{L}'$ к лагранжиану $\mathcal{L}$ не оказывает влияния на условия стационарности действия, хотя, возможно, и приводит к изменению граничных условий. Эта процедура часто называется калибровкой лагранжиана. Лагранжианы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L} + \mathcal{L}'$ оказываются физически эквивалентными.

Вообще всякая функция

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta),$$

для которой уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \varphi^k} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots = 0$$

тождественно удовлетворяются для любого набора физических полевых величин φ^k , называется лагранжианом пустого пространства¹, поскольку любой подобный аддитивный добавок формально не изменяет вариационного представления физических полей и поэтому может быть ассоциирован с пространством, "вмещающим" поля.

Понятие о лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и нетривиальных законов сохранения. Теория лагранжиана пустого пространства излагается, например, в [10, pp. 224–226].

¹Или нулевым лагранжианом. Часто употребляется также термин "калибровочный лагранжиан".

Лагранжиан пустого пространства (7.1) всегда представляется (при предположении о звездобразности области² изменения его аргументов) в форме полной дивергенции

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \frac{\partial \Phi^a(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda)}{\partial X^a}.$$

Представимость лагранжиана в форме полной дивергенции является необходимым и достаточным условием того, чтобы он был нулевым. Достаточность проверяется прямым вычислением оператора Эйлера в применении к данной выше формуле. Необходимость также без труда обосновывается. Мы приведем доказательство, существенно использующее звездобразную геометрию области определения лагранжиана (см. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. с. 322, 323).

Предположим, что лагранжиан

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

есть лагранжиан пустого пространства, определенный и регулярный в некоторой области изменения аргументов $\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots$, звездобразной относительно нулевой точки.

Рассмотрим значения лагранжиана на лучах, исходящих из нулевой точки. Для этого введем параметр ε , изменяющийся на отрезке $[0, 1]$. Пользуясь звездобразной геометрией области, можно заключить, что функция от ε

$$\mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\beta \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

корректно определена и регулярна на отрезке $[0, 1]$. Дифференцирование по параметру ε приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\beta \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} \varphi^k + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \varphi^k) + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) + \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} (\partial_\gamma \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) &= \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right), \\ (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) &= \partial_\gamma \partial_\beta \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - 2(\partial_\beta \varphi^k) \partial_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right), \end{aligned}$$

а также

$$(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) = \partial_\beta \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \partial_\beta \left(2\varphi^k \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) + \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right),$$

или, вводя сокращенные обозначения для дифференциальных операторов

²Область многомерного пространства называется звездобразной (или звездной) относительно некоторой своей точки, если любую точку области можно соединить с этой точкой отрезком прямой, целиком расположенным внутри области. Выпуклая область звездобразна относительно любой своей точки. Понятие звездобразности области — обобщение на многомерный случай требования односвязности плоской области так, чтобы по-прежнему для поля P_γ , удовлетворяющего условиям совместности $\partial_\beta P_\gamma = \partial_\gamma P_\beta$, было справедливо заключение о том, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю

$$\oint P_\gamma dX^\gamma = 0.$$

Требование о звездобразной форме области может быть несколько ослаблено. В частности, речь может идти об областях, каждая точка которой достижима из некоторой фиксированной точки области по двузвенной ломанной, целиком расположенной внутри области: одно из звеньев ломанной всегда располагается в некоторой фиксированной гиперплоскости, а второе — перпендикулярно к этой гиперплоскости. Вопрос о форме нулевого лагранжиана в областях, отличающихся от звездобразной, нуждается в дополнительном исследовании.

$$\partial_J = \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \dots, \quad (-\partial_J) = (-\partial_\alpha)(-\partial_\beta)(-\partial_\gamma) \dots,$$

$$J = (\alpha, \beta, \gamma, \dots),$$

находим формулу

$$(\partial_J \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_J \varphi^k)} \right) = \varphi^k (-\partial_J) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_J \varphi^k)} \right) + \partial_\beta \Psi^\beta,$$

где Ψ^β — некоторое векторное поле, также зависящее от полей φ^k , их градиентов и пространственно-временных координат X^β .

Ясно, что оператор Эйлера (вариационная производная лагранжиана $\mathcal{L}'$) вычисляется в форме

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \varphi^k} = (-\partial_J) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_J \varphi^k)} \right).$$

Для производной (7.4), следовательно, находим формулу

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\beta \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) = \varphi^k \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) + \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \dots \right\} + \partial_\beta \Psi^\beta.$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{L}'$ есть лагранжиан пустого пространства, т.е. для любого поля φ^k его вариационная производная равна нулю, получим, интегрируя по ε на отрезке $[0, 1]$,

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) - \mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \tilde{\Psi}^\beta,$$

где

$$\tilde{\Psi}^\beta = \int_0^1 \Psi^\beta(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) d\varepsilon.$$

Выбирая далее поле $\bar{\Psi}^\beta$ так, чтобы

$$\mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \bar{\Psi}^\beta.$$

что заведомо возможно и многими способами,³ и обозначая

$$\Phi^\beta = \tilde{\Psi}^\beta + \bar{\Psi}^\beta,$$

приходим к дивергентному представлению лагранжиана пустого пространства:

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \Phi^\beta(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda).$$

Плотность лагранжиана в 4-пространстве–времени, таким образом, всегда определяется с точностью до аддитивной полной дивергенции 4-вектора, зависящего от переменных поля, включая и градиенты поля.⁴ Поэтому приходится также учитывать то обстоятельство, что в результате подсчета указанная дивергенция на самом деле может зависеть от градиентов поля, порядка более высокого, чем сам 4-вектор Φ^γ .

2. Вычисление нулевого лагранжиана 4-мерного пространства–времени

Найдем выражение для лагранжиана пустого пространства для случая, когда пространство–время четырехмерно, а число m физических полевых величин φ^k может быть произвольным. При этом будем считать, что лагранжиан $\mathcal{L}'$ и векторное поле Φ^γ в самом общем представлении лагранжиана пустого пространства зависят от градиентов полей φ^k порядка не выше первого.

³ Действительно, поле $\bar{\Psi}^\alpha$ по заданной дивергенции можно разыскивать в безвихревом виде. Для определения потенциала тогда имеется уравнение Пуассона, разрешимость которого гарантирована, если правая часть этого уравнения — непрерывная функция пространственно-временных координат X^β .

⁴ Как следует из последнего уравнения, естественное представление вектора Φ^β — 1-контравариантное отсчетное.

Поскольку

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) = \frac{\partial \Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}, \quad (1)$$

то, как и в трехмерном случае, необходимо исследовать условия, когда дивергенция в правой части не будет зависеть от вторых производных $(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^k)$.

Учитывая, во-первых, что в выражении для лагранжиана пустого пространства $\mathcal{L}'$ коэффициент при второй частной производной $(\partial_\beta \partial_\beta \varphi^k)$ (по β не суммировать) должен быть нулевым, можно заключить, что должны выполняться условия

$$\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} = 0 \quad (\text{по } \beta \text{ не суммировать}),$$

т.е. компонента Φ^γ не зависит от частных производных $(\partial_\gamma \varphi^k)$ ($k = 1, m$).

Во-вторых, лагранжиан пустого пространства $\mathcal{L}'$ не зависит от смешанных частных производных $(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^k)$ ($\alpha \neq \beta$) только при условии

$$\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial (\partial_\mu \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial (\partial_\lambda \varphi^k)} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (2)$$

Положим $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_2$ и, используя то обстоятельство, что Φ^{α_2} от производной $(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})$ не зависит, получим, что Φ^{α_1} линейно зависит от производной $(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})$, т.е.

$$\Phi^{\alpha_1} = a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2} + b^{\alpha_1} \quad (\text{по } \alpha_2, k_2 \text{ не суммировать}), \quad (3)$$

где коэффициенты $a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ и b^{α_1} не зависят от частной производной $\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}$.

Затем, подставляя выражение (3) для Φ^{α_1} в соотношение (2) при $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_3$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, получим, что $a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ и b^{α_1} линейно зависят от производной $(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3})$.

Продолжая рассуждения дальше, заключаем, что поле Φ^g можно представить в виде многочлена по возрастающим степеням градиентов динамических переменных $\partial_a j^k$

$$\Phi^\gamma = A^\gamma + B_{k_1}^{\gamma \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + C_{k_2 k_1}^{\gamma \alpha_2 \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + D_{k_3 k_2 k_1}^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \dots, \quad (4)$$

где коэффициенты A^γ , $B_{k_1}^{\gamma \alpha_1}$, $C_{k_2 k_1}^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}$, $D_{k_3 k_2 k_1}^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}$ могут зависеть от всех переменных X^β , φ^k , и не выписаны полиномиальные по градиентам слагаемые более высоких степеней.

Подставляя (4) в (2), получим

$$B_{k_1}^{\gamma \alpha_1} = -B_{k_1}^{\alpha_1 \gamma},$$

т.е. коэффициенты $B_{k_1}^{\gamma \alpha_1}$ антисимметричны по индексам γ , α_1 ; аналогично заключаем, что коэффициенты $C_{k_2 k_1}^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}$ антисимметричны по парам индексов γ , α_1 ; и γ , α_2 ; коэффициенты $D_{k_3 k_2 k_1}^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}$ антисимметричны по парам индексов γ , α_1 ; γ , α_2 ; γ , α_3 ; и т.д. для всех невыписанных в формуле (4) коэффициентов.

Из свойства антисимметричности коэффициентов $C_{k_2 k_1}^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}$ по индексам γ , α_1 и γ , α_2 получаются следующие равенства:

переставляя γ , α_1 :

$$C_{k_2 k_1}^{\gamma \alpha_2 \alpha_1} = -C_{k_2 k_1}^{\alpha_1 \alpha_2 \gamma};$$

переставляя α_1 , α_2 :

$$C_{k_2 k_1}^{\alpha_1 \alpha_2 \gamma} = -C_{k_2 k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \gamma};$$

переставляя γ , α_2 :

$$C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot \gamma} = -C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot \alpha_2}.$$

Откуда следует, что коэффициенты $C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1}$ антисимметричны по паре греческих индексов α_1, α_2 .

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1}$ антисимметричны по любой паре греческих индексов,⁵ и все остальные коэффициенты в (4) также антисимметричны по любой паре греческих индексов.

Таким образом, для любого, отличного от нуля, коэффициента в (4) все греческие индексы должны быть различны, но у греческих индексов может быть всего четыре различных значения 1,2,3,4, и поэтому более четырех различных верхних индексов у коэффициентов в (4) быть не может, т.е. в разложении (4) невыписанные слагаемые на самом деле отсутствуют:

$$\Phi^\gamma = A^\gamma + B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \dots \quad (5)$$

Рассмотрим теперь индивидуальные суммы в выражении (5). Переставляя в сумме

$$C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})$$

у коэффициентов $C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1}$ индексы α_1, α_2 , находим

$$C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) = -C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot \alpha_2} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}),$$

и, переименовывая по схеме $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_1, k_1 \rightarrow k_2, k_2 \rightarrow k_1$ немые латинские и греческие индексы, приходим к следующим равенствам:

$$C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) = -C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1} (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_2}) = -C_{\cdot k_1 \cdot k_2}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}).$$

Следовательно, коэффициенты $C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1}$ антисимметричны по паре латинских индексов k_1, k_2 .

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1}$ антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Резюмируя сказанное, имеем, что коэффициенты $B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1}$ антисимметричны по греческим индексам, коэффициенты $C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1}, D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1}$ антисимметричны по любой паре греческих и любой паре латинских индексов.

Вычисляя дивергенцию Φ^γ , после ряда преобразований получим выражение для лагранжиана пустого пространства в случае 4-мерного пространственно-временного многообразия

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = & \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + \\ & + \left(\frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \\ & + \left(\frac{\partial C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \cdot \alpha_1}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\ & + \frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1}}{\partial x^{k_4}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_\gamma \varphi^{k_4}) \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее слагаемое в (6) в силу

⁵Последнее означает, что для коэффициентов $D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1}$ справедливо также следующее представление:

$$D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1} = D_{k_3 k_2 k_1}^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1},$$

где $D_{k_3 k_2 k_1}^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}$ — антисимметричный 3-ковариантный пространственный тензор.

$$D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = D_{k_3 k_2 k_1}^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \varepsilon^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}$$

и при условии, что число физических полевых величин также равно четырем, приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{k_4}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_{\gamma} \varphi^{k_4}) = \\ = (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_{\gamma} \varphi^{k_4}) \varepsilon^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial X^{k_4}} = J \varepsilon^{k_4 k_3 k_2 k_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial X^{k_4}}, \end{aligned}$$

где J есть якобиан отображения $(X^1, X^2, X^3, X^4) \rightarrow (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

С целью оптимизации записи дальнейших рассуждений введем обозначения

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial A^{\gamma}}{\partial X^{\gamma}} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{k_1}^{\alpha_1 \cdot} &= \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial X^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{\gamma}} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{k_2}} + \left(\frac{\partial C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{\gamma}} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \frac{\partial C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{k_3}} + \left(\frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{\gamma}} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{k_4}} \end{aligned}$$

и представим лагранжиан пустого 4-мерного пространственно-временного многообразия в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = A + L_{k_1}^{\alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + L_{k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + L_{k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\ + L_{k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_{\alpha_4} \varphi^{k_4}). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в этом представлении нулевого лагранжиана все коэффициенты могут быть антисимметризованы по нижним латинским индексам, поскольку, как нетрудно проверить, все они

$$L_{k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, L_{k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, L_{k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$$

антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Формула (7), следовательно, может быть также записана в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = A + L_{k_1}^{\alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + L_{[k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + L_{[k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\ + L_{[k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_{\alpha_4} \varphi^{k_4}) \end{aligned} \quad (8)$$

где квадратные скобки применяются для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам.

В дальнейшем можно считать, что

$$L_{k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = L_{[k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, L_{k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = L_{[k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, L_{k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = L_{[k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}.$$

Подставляя (7) в уравнение Эйлера–Лагранжа и приравнявая нулю последовательно суммы коэффициентов при одинаковых степенях градиентов полевых величин φ^k , можно получить условия совместности для коэффициентов в разложении (7).

Так, условие равенства нулю суммы коэффициентов при нулевой степени градиентов есть

$$\frac{\partial A}{\partial X^{k_1}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L_{k_1}^{\alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (9)$$

или также

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0 \quad (10)$$

Ясно, что это условие совместности тождественно удовлетворяется в силу

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} \right)_{\text{expl}}$$

и, поскольку тензор $B^{\gamma\alpha_1 \cdot}_{\cdot k_1}$ антисимметричен по верхним индексам,

$$\left(\frac{\partial^2 B^{\gamma\alpha_1 \cdot}}{\partial X^{\alpha_1} \partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = 0.$$

Следующим в ряду условий совместности будет

$$\frac{\partial L^{\alpha_1 \cdot}_{\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial L^{\alpha_1 \cdot}_{\cdot k_2}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{\cdot k_1 \cdot k_2} \right)_{\text{expl}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{\cdot k_2 \cdot k_1} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{k_2}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Это условие тождественно удовлетворяется в силу перестановочности частного дифференцирования и антисимметрии тензора $C^{\gamma\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{\cdot k_2 \cdot k_1}$ по любой паре греческих индексов.

Используя, по-прежнему, квадратные скобки для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам, условие совместности (11) представим в форме

$$\frac{\partial L^{\alpha_1 \cdot}_{[k_1]}}{\partial x^{k_2}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_2 \cdot k_1]} \right)_{\text{expl}} \quad (13)$$

Аналогично могут быть найдены еще два условия совместности:

$$-\frac{\partial L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_1 \cdot k_2]}}{\partial x^{k_3}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}} L^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]} \right)_{\text{expl}}, \quad (14)$$

$$-\frac{\partial L^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_1 \cdot k_2 \cdot k_3]}}{\partial x^{k_4}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}} L^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]} \right)_{\text{expl}}. \quad (15)$$

Приведем также необходимые для понимания формул (13)–(15) соотношения:

$$P^{\alpha_1}_{k_1 k_2} = \frac{\partial L^{\alpha_1 \cdot}_{[k_1]}}{\partial x^{k_2}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_1 \cdot}_{[k_1]}}{\partial x^{k_2}} = P^{\alpha_1}_{[k_1 k_2]} = \frac{1}{2} (P^{\alpha_1}_{k_1 k_2} - P^{\alpha_1}_{k_2 k_1});$$

$$P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_3} = \frac{\partial L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_1 \cdot k_2]}}{\partial x^{k_3}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_1 \cdot k_2]}}{\partial x^{k_3}} = P^{\alpha_2 \alpha_1}_{[k_1 k_2 k_3]},$$

$$P^{\alpha_2 \alpha_1}_{[k_1 k_2 k_3]} = \frac{1}{3!} (P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_3} - P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_1 k_3} - P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_2 k_1} - P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_3 k_2} + P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_2 k_3 k_1} + P^{\alpha_2 \alpha_1}_{k_3 k_1 k_2});$$

$$P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \frac{\partial L^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_1 \cdot k_2 \cdot k_3]}}{\partial x^{k_4}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}_{[k_1 \cdot k_2 \cdot k_3]}}{\partial x^{k_4}} = P^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}_{[k_1 k_2 k_3 k_4]},$$

$$P_{[k_1 k_2 k_3 k_4]}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \frac{1}{4!} (P_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_2 k_1 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_3 k_2 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_1 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_3 k_1 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_1 k_2 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} +$$

$$+ P_{k_4 k_2 k_1 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_1 k_4 k_2 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_1 k_4 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_4 k_1 k_2 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_2 k_4 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_4 k_1 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} -$$

$$- P_{k_4 k_3 k_1 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_4 k_3 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_1 k_4 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_4 k_1 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_1 k_3 k_4 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_4 k_1 k_3 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} +$$

$$+ P_{k_4 k_3 k_2 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_4 k_3 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_2 k_4 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_4 k_2 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_3 k_4 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_4 k_2 k_3 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}).$$

3. Вычисление нулевого лагранжиана пространства–времени произвольной размерности

Приведенные рассуждения о форме лагранжиана пустого пространства без труда обобщаются на случай произвольного числа пространственно-временных координат X^β ($\beta = 1, 2, \dots, n+1$): векторное поле Φ^γ определяется в виде

$$\Phi^\gamma = A^\gamma + A_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + A_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots +$$

$$+ A_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}), \quad (16)$$

где тензоры

$$A^\gamma (X^\beta, x^s), A_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} (X^\beta, x^s), A_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (X^\beta, x^s), \dots, A_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot} (X^\beta, x^s)$$

антисимметричны по любой паре латинских и любой паре греческих индексов.⁶

Вычисляя дивергенцию поля Φ^γ , определенного согласно (16), находим выражение для лагранжиана пустого пространства в случае $(n+1)$ -мерного пространственно-временного многообразия:

$$\mathcal{L}' = \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial A_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_{\cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial A_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_{\cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_n}} + \left(\frac{\partial A_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) +$$

$$+ \frac{\partial A_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}})$$

Здесь последнее слагаемое при условии, что число физических полевых величин в точности равно $n+1$, может быть представлено в форме

$$\frac{\partial A_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) =$$

$$= (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) \varepsilon^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}} = J \varepsilon^{k_{n+1} k_n k_{n-1} \dots k_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}},$$

где J есть якобиан отображения $(X^1, X^2, \dots, X^{n+1}) \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$.

⁶Применительно к тензору $A_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}$ антисимметричность по любой паре греческих индексов означает, что

$$A_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot} = A_{k_n k_{n-1} \dots k_1} \varepsilon^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1},$$

где $A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}$ — антисимметричный n -ковариантный пространственный тензор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – Т. II. Теория поля. М: Наука, 1973. – 504 с.
2. Green A.E. On undamped heat waves in an elastic solid // A.E. Green, P.M. Naghdi / J. Therm. Stress. 1992. – V. 15. – P. 253–264.
3. Green A.E. Thermoelasticity without energy dissipation // A.E. Green, P.M. Naghdi / J. Elasticity. 1993. – V. 31. – P. 189–208.
4. Радаев Ю.Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. 2000. – №4(18). – С. 87–113.
5. Радаев Ю.Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. (Под ред. акад. Д.М. Климова.) М.: Физматлит, 2003. – С. 658–684.
6. Kalpakides V.K. Canonical Formulation and Conservation Laws of Thermoelasticity without Dissipation / V.K. Kalpakides, G.A. Maugin // Reports in Mathematical Physics. – 2004. – V. 53. – P. 371–391.
7. Радаев Ю.Н. Гармонические связанные термоупругие волны в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе / Ю.Н. Радаев, Д.А. Семенов // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2008. – №8/2(67). – С. 109–129.
8. Радаев Ю.Н. О вычислении нулевых Лагранжианов нелинейно упругого поля // Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков / Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. Специальный выпуск. 2002. – С. 39–56.
9. Olver P.J. Application of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1986.
10. Silhavy M. The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. / Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1997. – 506 pp.

Сведения об авторах

Ковалев Владимир Александрович – кафедра прикладной математики Московского городского университета управления Правительства Москвы, Москва, 107045, ул. Сретенка, 28.
E-mail: vlad_koval@mail.ru

Радаев Юрий Николаевич – кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
E-mail: radayev@ssu.samara.ru

Семенов Денис Анатольевич – кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
E-mail: semenov@ssu.samara.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРИСТЕНОЧНОЙ ОБЛАСТИ СИЛЬНОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ВБЛИЗИ ЗАРЯЖЕННОГО ТЕЛА

Кудрявцева И.А.

Исследуется пристеночный слой сильно ионизованной плазмы вблизи заряженной поверхности, имеющей форму сферы. В предположение о том, что плазма состоит из электронов и однозарядных ионов, в переходном режиме течения на параметры плазмы будут оказывать влияние столкновения типа «ион-ион» и «ион-электрон». Для учета влияния данного типа столкновений сформирована модель, содержащая уравнение Фоккера-Планка и уравнение Пуассона. Предложенный метод решения рассматриваемой задачи основывается на методе Монте-Карло.

Введение

Изучение сильно ионизованной низкотемпературной плазмы является перспективным направлением научных исследований, поскольку результаты подобных исследований позволяют учесть влияние столкновений заряженных частиц в вычислительных моделях, описывающих динамику пристеночной низкотемпературной плазмы в термоядерных установках и в приборах электронной техники.

Полноценное применение плазмы невозможно без ее всестороннего исследования. Одним из направлений диагностики низкотемпературной плазмы является использование зондового метода [1,2]. Суть метода состоит в погружении в исследуемую область заряженного электрода и получении значений параметров плазмы по зависимости величины зондового тока от потенциала, подаваемого на электрод.

В работе изучается динамика сильно ионизованной низкотемпературной плазмы вблизи заряженного электрода, имеющего форму сферы, в переходном режиме течения. Данный режим характеризуется тем, что длина свободного пробега частиц сравнима с характерным размером задачи. В этой связи возникает необходимость учета столкновений. Переходный режим течения слабо ионизованной низкотемпературной плазмы в приэлектродной области, в котором существенную роль играют только столкновения заряженных частиц с нейтральными, детально рассмотрен в работе [3]. Влияние кулоновских столкновений на параметры пристеночной области плазмы ранее детально не исследовалось.

Постановка задачи

Рассматривается задача математического моделирования динамики двухкомпонентной плазмы, которая состоит из электронов и однозарядных ионов, вблизи заряженной сферы радиуса r_p . На поверхности тела поддерживается постоянный потенциал, равный j_p . Поверхность тела является поглощающей для электронов, ионы при ударе о нее нейтрализуются. Температуры ионов $T_{i\infty}$ и электронов $T_{e\infty}$, а также концентрации частиц $n_{i\infty}, n_{e\infty}$, причем $n_{i\infty} = n_{e\infty} = n_\infty$, в невозмущенной плазме заданы. Предполагается также, что магнитное поле отсутствует. Начальные распределения ионов и электронов максвелловские.

Необходимо с учетом столкновений между заряженными частицами найти самосогласованное электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$, плотность токов на электрод ионов $\vec{j}_i(\vec{r}, t) = q \cdot \int f_i(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v}$ и плотность токов электронов $\vec{j}_e(\vec{r}, t) = e \cdot \int f_e(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{v} d\vec{v}$, где $q = Z_i e$, $Z_i = 1$ – заряд иона, e – заряд электрона, а также концентрацию вблизи электрода ионов $n_i(\vec{r}, t) = \int f_i(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ и концентрацию электронов $n_e(\vec{r}, t) = \int f_e(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$, где $f_e(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $f_i(\vec{r}, \vec{v}, t)$ – функции распределения электронов и однозарядных ионов, соответственно.

Математическая модель, соответствующая данной физической постановке, имеет вид (1) - (2) [1,4]:

$$\frac{\partial f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_a(\vec{r}, t)}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_c + S_a(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (1)$$

$$\Delta j(\vec{r}, t) = -\frac{e}{e_0} (n_i(\vec{r}, t) - n_e(\vec{r}, t)), \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla j(\vec{r}, t),$$

где первое уравнение – уравнение Фоккера-Планка для частиц сорта $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} = i, e$), второе – уравнение Пуассона для самосогласованного электрического поля; $f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$ – функция распределения частиц сорта $\mathbf{a}$; $\left(\frac{\partial f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \right)_c$ – оператор столкновений Фоккера-Планка; функция $S_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$ описывает источники или стоки частиц; $\vec{F}_a(\vec{r}, t) = q_a \vec{E}(\vec{r}, t)$, где $\vec{E}(\vec{r}, t)$ – напряженность самосогласованного электрического поля, $q_a = \begin{cases} -e, & \mathbf{a} = e, \\ e, & \mathbf{a} = i, \end{cases}$; $j(\vec{r}, t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля; $n_a(\vec{r}, t)$, $\mathbf{a} = i, e$ – концентрация частиц сорта $\mathbf{a}$; m_a – масса частицы сорта $\mathbf{a}$; e_0 – электрическая постоянная.

Оператор столкновений Фоккера-Планка имеет вид [4]:

$$\frac{1}{\Gamma_a} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c = \frac{1}{2} \nabla_v \nabla_v : (f_a \nabla_v \nabla_v g_a(\vec{r}, \vec{v}, t)) - \nabla_v \cdot (f_a \nabla_v h_a),$$

где $\nabla_v \nabla_v g_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$ – ковариантная тензорная производная второго ранга, символ двоеточия (:) обозначает операцию двойного суммирования,

$$\Gamma_a = \frac{Z_a^4 e^4}{4\pi e_0^2 m_a^2} \ln D_a, \quad D_a = \frac{12\pi e_0 k T_{a\infty}}{Z_a^2 e^2} \left(\frac{e_0 k T_{e\infty}}{n_{e\infty} e^2} \right)^{1/2},$$

$$g_a(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{b=i,e} \left(\frac{Z_b}{Z_a} \right) \int f_b(\vec{r}, \vec{v}', t) |\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}',$$

$$h_a(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{b=i,e} \frac{m_a + m_b}{m_b} \cdot \left(\frac{Z_b}{Z_a} \right) \int \frac{f_b(\vec{r}, \vec{v}', t)}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d\vec{v}', \quad Z_a = 1, \mathbf{a} = i, e.$$

К системе уравнений (1) необходимо добавить начальные и краевые условия:

$$t = 0: f_a(\vec{r}, \vec{v}, 0) = f_a^{maksv}, \quad \mathbf{a} = i, e,$$

$$\vec{r} \in \Omega_p: f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_p} = 0, \quad \mathbf{a} = i, e, \quad j(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_p} = j_p, \quad (2)$$

$$\vec{r} \in \Omega_\infty: f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_\infty} = f_a^{maksv}, \quad \mathbf{a} = i, e, \quad j(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in \Omega_\infty} = 0,$$

где $f_a^{maksv} = n_{a\infty} \left(\frac{m_a}{2kp T_{a\infty}} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_a}{2k T_{a\infty}} |\vec{v} - \vec{v}_\infty|^2 \right)$, $\mathbf{a} = i, e$; Ω_p , Ω_∞ – множество радиус-векторов частиц, концы которых принадлежат плоскости электрода и границе возмущенной зоны, соответственно.

Метод решения задачи

Для решения поставленной задачи разработан метод на основе метода статистических испытаний Монте-Карло. Вводится сферическая система координат, в которой положение и скорость частицы определяются переменными $(r, \vartheta, \varphi, v_r, v_\vartheta, v_\varphi)$. Задача имеет осевую

симметрию относительно одной из осей, в силу чего функции распределения и потенциал электрического поля инвариантны относительно вращения вокруг данной оси ($\frac{\partial f_a}{\partial y} = 0, \frac{\partial j}{\partial y} = 0$). Как следствие, количество фазовых переменных задачи может быть

уменьшено до пяти фазовых переменных (r, y, q, v_r, v_q) .

Система уравнений модели в сферической системе координат для безразмерных величин согласно системе масштабов [5] преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial \hat{t}} + \sqrt{d_a} \left\{ \hat{v}_r \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{v}_q}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial \hat{q}} + \right. \\ & + \left(\frac{\hat{v}_q^2}{\hat{r}} + \frac{\hat{v}_y^2}{\hat{r}} + \frac{z_a \hat{E}_r}{2e_a} \right) \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial \hat{v}_r} + \left(-\frac{\hat{v}_r \hat{v}_y}{\hat{r}} + \frac{\hat{v}_q \hat{v}_y}{\hat{r}} \operatorname{tg} q \right) \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial \hat{v}_y} + \left(\frac{z_a \hat{E}_q}{2e_a} - \frac{\hat{v}_r \hat{v}_q}{\hat{r}} - \frac{\hat{v}_y^2}{\hat{r}} \operatorname{tg} q \right) \frac{\partial \hat{f}_a}{\partial \hat{v}_q} \left. \right\} = \Gamma_a K \hat{f}_a, \quad a = i, e, \\ & \frac{\partial^2 \hat{J}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial^2 \hat{J}}{\partial \hat{q}^2} - \frac{1}{\hat{r}^2} \operatorname{tg} q \frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{q}} = -(\hat{n}_i - \hat{n}_e), \quad \hat{E}_r = -\frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{r}}, \quad E_y = 0, \quad \hat{E}_q = -\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{q}}, \quad (3) \\ & \hat{t} = 0: \quad \hat{f}_a(\hat{r}, q, \hat{v}_r, \hat{v}_q, \hat{v}_y, 0) = \hat{f}_a^{\text{maksv}}, \quad a = i, e, \\ & \hat{r} = \hat{r}_p: \quad \hat{f}_a(\hat{r}_p, q, \hat{v}_r, \hat{v}_q, \hat{v}_y, \hat{t}) = 0, \quad \hat{J}(\hat{r}_p, q, \hat{t}) = \hat{J}_p, \quad a = i, e, \\ & \hat{r} = \hat{r}_\infty: \quad \hat{f}_a(\hat{r}_\infty, q, \hat{v}_r, \hat{v}_q, \hat{v}_y, \hat{t}) = \hat{f}_a^{\text{maksv}}, \quad \hat{J}(\hat{r}_\infty, q, \hat{t}) = 0, \quad a = i, e, \end{aligned}$$

где $\Gamma_a K \hat{f}_a = \Gamma_a \left[\frac{1}{2} A_g^a \sum_{s,q=r,y,q} \frac{\partial^2}{\partial \hat{v}_s \partial \hat{v}_q} \left(\hat{f}_a \frac{\partial^2 \hat{g}_a}{\partial \hat{v}_s \partial \hat{v}_q} \right) - A_h^a \sum_{s=r,y,q} \frac{\partial}{\partial \hat{v}_s} \left(\hat{f}_a \frac{\partial \hat{h}_a}{\partial \hat{v}_s} \right) \right], a = i, e,$

$d_a = e_a m_a^{-1}$, $e_a = T_{a\infty} T_{i\infty}^{-1}$, $m_a = m_a m_i^{-1}$, $z_a = 1$, A_g^a, A_h^a – коэффициенты, полученные в процессе перехода в системе уравнений к безразмерным величинам [5],

$$\hat{f}_a^{\text{maksv}} = \begin{cases} \frac{1}{p^{3/2}} \exp(-\hat{v}_r^2 - \hat{v}_q^2 - \hat{v}_y^2), & a = i, \\ \frac{1}{p^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_i T_{e\infty}}{m_e T_{i\infty}} (\hat{v}_r^2 + \hat{v}_q^2 + \hat{v}_y^2)\right), & a = e. \end{cases}$$

Для решения системы уравнений (3), содержащей уравнение Фоккера-Планка, осуществляется переход к системе уравнений, включающей СДУ Ито:

$$\begin{aligned} & d\hat{\Psi}_a(\hat{t}) = a_a(\hat{t}, \hat{\Psi}_a(\hat{t}))dt + s_a(\hat{t}, \hat{\Psi}_a(\hat{t}))dW(\hat{t}), \quad a = i, e, \\ & \frac{\partial^2 \hat{J}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial^2 \hat{J}}{\partial \hat{q}^2} - \frac{1}{\hat{r}^2} \operatorname{tg} q \frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{q}} = -(\hat{n}_i - \hat{n}_e), \quad \hat{E}_r = -\frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{r}}, \quad E_y = 0, \quad \hat{E}_q = -\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{J}}{\partial \hat{q}}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\hat{t} = 0: \quad [\hat{v}_r(\hat{t}) \quad \hat{v}_y(\hat{t}) \quad \hat{v}_q(\hat{t})]^T \sim \hat{f}_a^{\text{maksv}}, \quad a = i, e; \quad \hat{r} = \hat{r}_p: \quad \hat{J}(\hat{r}_p, \hat{t}) = \hat{J}_p; \quad \hat{r} = \hat{r}_\infty: \quad \hat{J}(\hat{r}_\infty, \hat{t}) = 0,$$

где

$$\hat{\Psi}_a(\hat{t}) = [\hat{r}(\hat{t}) \quad q(\hat{t}) \quad \hat{v}_r(\hat{t}) \quad \hat{v}_y(\hat{t}) \quad \hat{v}_q(\hat{t})]^T, \quad s_a(\hat{t}, \hat{\Psi}_a(\hat{t})) s_a^T(\hat{t}, \hat{\Psi}_a(\hat{t})) = A_g^a \left\| \frac{\partial^2 \hat{g}_a}{\partial \hat{v}_s \partial \hat{v}_q} \right\|, \quad s, q = r, y, q,$$

$$a_a(\hat{t}, \hat{\Psi}_a(\hat{t})) = \begin{bmatrix} \sqrt{d_a} \hat{v}_r & \sqrt{d_a} \frac{\hat{v}_q}{\hat{r}} & A_h^a \frac{\partial \hat{h}_a}{\partial \hat{v}_r} + \sqrt{d_a} \left(\frac{\hat{v}_q^2}{\hat{r}} + \frac{\hat{v}_y^2}{\hat{r}} + \frac{z_a \hat{E}_r}{2e_a} \right) & A_h^a \frac{\partial \hat{h}_a}{\partial \hat{v}_y} + \sqrt{d_a} \left(-\frac{v_r v_y}{r} + \frac{v_q v_y}{r} \operatorname{tg} q \right) \end{bmatrix},$$

$a = i, e$, $W(\hat{t})$ – стандартный винеровский случайный процесс.

Далее вычисляются элементы вектора напряженности самосогласованного электрического поля $\hat{E}_s$, $s = r, q$ методом численного дифференцирования по значениям потенциала $\hat{J}$, полученным из решения граничной задачи для уравнения Пуассона с применением метода Фурье разделения переменных. Для вычисления элементов матрицы диффузии $\frac{\partial^2 \hat{g}_a}{\partial \hat{v}_s \partial \hat{v}_q}$, $s, q = r, y, q$ и вектора сноса $\frac{\partial \hat{h}_a}{\partial \hat{v}_s}$, $s = r, y, q$ применяется формула дифференцирования несобственного интеграла по параметру и метод Монте-Карло. Решение СДУ Ито находится с использованием стохастического метода Эйлера. Концентрации и токи частиц на электрод вычисляются методом Монте-Карло.

Результаты численного моделирования

При проведении вычислительного эксперимента с помощью разработанного программного обеспечения согласно описанному выше методу решения задачи невозмущенные концентрации варьировались в пределах $n_{i\infty} = n_{e\infty} = 10^{10} \div 10^{18} [M^{-3}]$, подаваемый на электрод потенциал изменялся в пределах $\hat{J}_p = -30 \div 2$, значения радиуса кривизны сферического электрода лежали в интервале $\hat{r}_p = 10 \div 100$. При значениях невозмущенных концентраций $n_{i\infty} = n_{e\infty} = 10^{10} \div 10^{12} [M^{-3}]$, когда столкновениями между заряженными частицами можно пренебречь, система уравнений Фоккера-Планка – Пуассона превращается в систему уравнений Власова – Пуассона. Данный факт позволил сравнить полученные результаты с результатами других авторов.

На рис.1 показана динамика изменения напряженности электрического поля и плотности тока ионов во времени в бесстолкновительном случае вблизи поверхности сферы. Из рис.1 видно, что характер изменения напряженности электрического поля не зависит от значения угла θ . Данный факт можно объяснить тем, что в момент внесения электрода плазма оставалась невозмущенной. Графики, иллюстрирующие изменения концентраций во времени в фиксированной ячейке возмущенной зоны, представлены на рис.2. На рис.2 прослеживается немонотонное поведение концентраций электронов в начальный момент, что приводит к немонотонному характеру изменения напряженности поля. Нетрудно заметить также, что для начальных моментов времени график плотности тока убывает; это говорит о том, что ионы обладают отрицательной направленной скоростью, т.е. вектор средней скорости частиц направлен к электроду. Впоследствии при становлении самосогласованного электрического поля поток ионов к электроду замедляется, и график плотности, обладая характерным минимумом, выходит на стационарное значение.

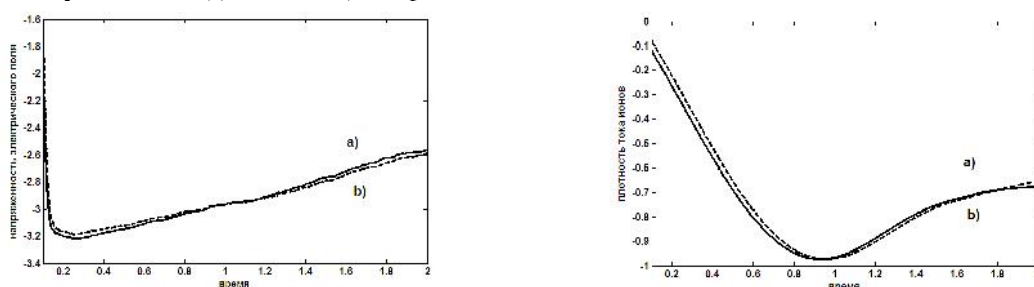


Рис.1. График изменения напряженности самосогласованного электрического поля и плотности тока ионов при $n_{i\infty} = n_{e\infty} = n_{\infty} = 10^{10} [M^{-3}]$, $\hat{\phi}_p = -16$, $T_{i\infty}/T_{e\infty} = 1$, $\hat{v}_{\infty} = 0$, $\hat{r}_p = 10$ для

разных значений полярного угла а) $q = \frac{p}{10}$ б) $q = \frac{p}{4}$

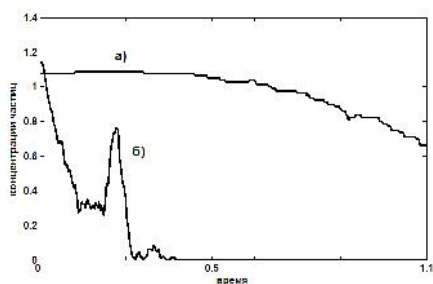


Рис.2. Графики изменения концентраций
а) ионов, б) электронов во времени для
 $n_i = n_e = n = 10^{10} [\text{л}^{-3}]$, $\hat{\phi}_p = -16$,
 $T_i / T_e = 1$, $\hat{v} = 0$, $\hat{r}_p = 10$

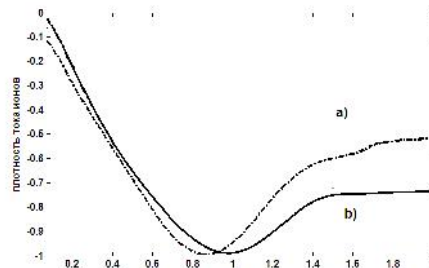


Рис.3. График изменения плотности тока ионов а) с
учетом столкновений, б) без учета столкновений
 $\hat{\phi}_p = -16$, $T_i / T_e = 1$, $\hat{v} = 0$, $\hat{r}_p = 10$

На рис.3 приведены графики изменения плотности тока при наличии и отсутствии столкновений. Наличие столкновений влияет на подвижность ионов, в силу чего начальный процесс установления идет быстрее. Максимумы кривых смещаются в сторону меньших значений времени. Плотность тока ионов уменьшается с учетом столкновений в силу обеднения приэлектродной области данным типом частиц.

Выводы

В работе сформирована математическая модель, описывающая процессы переноса и столкновений в пристеночной области двухкомпонентной плазмы вблизи заряженного сферического электрода. Рассматривается переходный режим течения, в котором средняя длина свободного пробега частицы сравнима с радиусом кривизны электрода. Сформирована вычислительная модель для решения поставленной задачи, в основе которой лежит метод Монте-Карло. На основе предложенного метода решения составлен алгоритм и создано программное обеспечение, с помощью которого получены и проанализированы результаты моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Б.В., Котельников В.А. Зондовый метод диагностики плазмы. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 240с.
2. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. – М.: Мир, 1978. – 202 с.
3. Котельников М.В. Механика и электродинамика пристеночной плазмы. // Дисс. док.физ.-мат.наук, - М.: МАИ, 2008.
4. Олдер Б. Вычислительные методы в физике плазмы. – М.: Мир, 1974. – 111 с.
5. Кудрявцева И.А. Применение метода Монте-Карло для решения задачи зондовой диагностики двухкомпонентной плазмы сферическим зондом в переходном режиме. //Электронный журнал «Труды МАИ», №33, 2009.

Сведения об авторе

Кудрявцева Ирина Анатольевна

Аспирант, Московский авиационный институт
(государственный технический университет)

Адрес: 125466, г.Москва, ул.Ворытинская, д.12,к.1, кв.40

Тел.: 8(905)5897780, E-mail: irina.home.mail@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ БАЛОК

Маргарян Л. М.

Микрополярная, несимметричная, моментная теория упругости или иначе континуума Коссера – это строгий математический алгоритм полевых уравнений упругих сред с внутренней структурой.

Изучение задач тонких балок, пластин и оболочек на основе микрополярной теории упругости поставлено С. А. Амбарцумяном [1].

С. О. Саркисяном [2,3] построены асимптотически точные общие математические модели динамических задач микрополярных изотропных упругих тонких балок, пластин и оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением, “с малой сдвиговой жесткостью”. В работах [4-6] на основе общих уравнений [2,3] микрополярных балок и пластин изучены задачи о свободных колебаниях микрополярных изотропных упругих балок и пластин.

В данной работе в тонкой прямоугольной области рассматривается плоская начально-граничная задача микрополярной теории упругости для ортотропного материала. Обобщается асимптотический подход работы [2] и построена одномерная математическая модель динамической задачи микрополярных ортотропных упругих тонких балок. В зависимости от значений безразмерных физических параметров ортотропного тела построены одномерные модели динамической задачи микрополярных ортотропных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением, “с малой сдвиговой жесткостью”.

1. Постановка динамической задачи плоского напряженного состояния несимметричной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений.

Будем рассматривать прямоугольник $(0 \leq x_1 \leq a, -h \leq x_2 \leq h)$ как плоское упругое тело. Уравнения плоской динамической задачи несимметричной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид:

уравнения движения:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = I \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

соотношения упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11} \varepsilon_{11} + A_{12} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{11} &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{11} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{22} \\ \sigma_{22} &= A_{12} \varepsilon_{11} + A_{22} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{22} &= \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{22} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} &= A_{77} \varepsilon_{12} + A_{78} \varepsilon_{21} & \varepsilon_{12} &= \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21} \\ \sigma_{21} &= A_{78} \varepsilon_{12} + A_{88} \varepsilon_{21} \quad \text{или} & \varepsilon_{21} &= \frac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{21} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sigma_{12} \\ \mu_{13} &= B_{66} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} &= \frac{1}{B_{66}} \mu_{13}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} = \frac{1}{B_{44}} \mu_{23} \\ \mu_{23} &= B_{44} \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} & \end{aligned} \quad (1.2)$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ – силовые напряжения, μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения, u_1, u_2 – перемещения, ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_3 , $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$ – упругие коэффициенты данного тела.

К определяющим уравнениям (1.1)–(1.3) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений присоединим соответствующие граничные и начальные условия. На лицевых сторонах прямоугольника $x_2 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные условия:

$$\sigma_{21} = \pm X^\pm, \quad \sigma_{22} = \pm Y^\pm, \quad \mu_{23} = \pm M^\pm \quad (1.4)$$

На боковых кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ примем следующие варианты граничных условий несимметричной теории упругости:

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \quad \sigma_{12} = \varphi_2(x_2), \quad \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{11} = \varphi_1(x_2), \quad u_2 = 0, \quad \mu_{13} = \varphi_3(x_2) \quad (1.6)$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \omega_3 = 0 \quad (1.7)$$

При помощи начальных условий при $t = 0$ задаются значения компонентов вектора перемещения и вектора независимого поворота, а также, компоненты линейной и вращательной скоростей точек прямоугольника:

$$u_2 = u_2^0(x_1, x_2), \quad \omega_3 = \omega_3^0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = V_2^0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial t} = J_3^0(x_1, x_2) \quad (1.8)$$

2. Асимптотический метод.

Предположим, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной, т.е. $2h \ll a$, $\delta = h/a \ll 1$ – основной малый геометрический параметр задачи. Рассмотрим задачу сведения двумерной плоской динамической задачи несимметричной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений к одномерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничных и начальных условий. Отметим, что указанный вопрос тесно связан с построением внутреннего итерационного процесса, который представляет собой одномерную задачу.

Для этой цели в двумерных динамических уравнениях несимметричной теории упругости ортотропного тела (1.1)–(1.3) перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных (координат x_1, x_2 и времени t):

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_0} \left(t_0 = \delta^\omega \frac{h}{c_0} \right) \quad (2.1)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \quad \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \quad \bar{I} = \frac{I}{\delta^k \rho h^2} \quad (2.2)$$

Здесь величина ω характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени.

Получим следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial \xi} + \delta^{-1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial \zeta} &= \delta^{-2\omega-2} \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \xi} + \delta^{-1} \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial \zeta} &= \delta^{-2\omega-2} \frac{\rho c_0^2}{A_{11}} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial \bar{\mu}_{13}}{\partial \xi} + \delta^{-1} \frac{\partial \bar{\mu}_{23}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12} - \bar{\sigma}_{21} &= \delta^{-2\omega} \bar{I} \delta^k \rho h^2 \frac{1}{A_{11}} \frac{c_0^2}{h^2} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} &= \frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11} - \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22} \\
\delta^{-1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} &= \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22} - \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11} \\
\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} - \omega_3 &= \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21} \\
\delta^{-1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} + \omega_3 &= \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12} \\
\frac{\partial \omega_3}{\partial \xi} &= \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \bar{\mu}_{13}, \quad \delta^{-1} \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \bar{\mu}_{23}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Мы получили также следующие безразмерные физические параметры:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \quad \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \\
&\frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}}, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Нижне рассмотрим задачу изгиба.

Решение внутренней задачи представим в форме

$$Q = \delta^{-q} \sum \delta^s Q^{(s)} \tag{2.6}$$

где Q – напряжения (силовые и моментные), перемещения и поворот, q – натуральное число, которое для различных величин разное и определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях.

3. Одномерная математическая модель динамического изгиба микрополярной упругой ортотропной тонкой балки.

В зависимости от значений физических безразмерных параметров (2.5) рассмотрим три разных случая:

А) для безразмерных физических параметров (2.5) примем значения:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \\
&\frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \sim 1
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В этом случае, для величин ω , k , q получим:

$$\omega = -1, \quad k = -2, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23} \\ 1 & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3 \end{cases} \tag{3.2}$$

На уровне исходного приближения асимптотического метода в случае (3.1), (3.2) приходим к одномерной динамической теории микрополярных ортотропных балок с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения движения:

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}, \tag{3.3}$$

где $N_{21} = h(X^+ - X^-)$

соотношения упругости:

$$N_{12} = 2h \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{88}} \Gamma_{12} + \frac{A_{78}}{A_{88}} N_{21}, \quad L_{13} = 2hB_{66}k_{13} \quad (3.4)$$

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \quad (3.5)$$

Уравнения (3.3)-(3.5) можно привести к следующему одному уравнению:

$$2hB_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - 2h \left(\rho B_{66} \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} + I \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial t^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2hI\rho \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = F(x_1, t) \quad (3.6)$$

где $2hB_{66}$ – жесткость микрополярной балки по теории со свободным вращением;

$$\begin{aligned} F(x_1, t) = & h \frac{\partial(X^+ - X^-)}{\partial x_1} - hB_{66} \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \frac{\partial^3(X^+ - X^-)}{\partial x_1^3} + \\ & + Ih \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \frac{\partial^3(X^+ - X^-)}{\partial x_1 \partial t^2} + (Y^+ + Y^-) - \\ & - B_{66} \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \frac{\partial^2(Y^+ + Y^-)}{\partial x_1^2} + I \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \frac{\partial^2(Y^+ + Y^-)}{\partial t^2} - \frac{\partial(M^+ + M^-)}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Б) для безразмерных физических параметров (2.5) примем значения:

$$\begin{aligned} \frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \\ \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \sim \delta^{-2} (B_{66}^*)^{-1} \quad (B_{66}^* \sim 1), \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \sim \delta^{-2} (B_{44}^*)^{-1} \quad (B_{44}^* \sim 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

В этом случае для величин ω , k , q получим:

$$\omega = -2, \quad k = -2, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}_{22}, \bar{\mu}_{23} \\ 1 & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\mu}_{13} \\ 2 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{u}_1 \\ 3 & \bar{u}_2, \bar{\omega}_3 \end{cases} \quad (3.8)$$

На уровне исходного приближения асимптотического метода в случае (3.7), (3.8) приходим к одномерной динамической теории микрополярных ортотропных балок со стесненным вращением:

уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h(X^+ - X^-), \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad L_{13} = 2hB_{66}k_{13} \quad (3.10)$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \quad (3.11)$$

Уравнения (3.9)-(3.11) можно привести к следующему одному уравнению:

$$\left(2hB_{66} + \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} =$$

$$= h \frac{\partial(X^+ - X^-)}{\partial x_1} + (Y^+ + Y^-) - \frac{\partial(M^+ + M^-)}{\partial x_1} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2Ih \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial t^2}$$

Здесь $2hB_{66} + \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}$ – жесткость микрополярной балки по теории со стесненным вращением.

В) Для безразмерных физических параметров (2.5) примем значения:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}(A_{88} - A_{78})}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}(A_{77} - A_{78})}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1,$$

$$\frac{A_{11}(A_{88} + A_{78})}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim \delta^{-2} (A_{88}^*)^{-1} (A_{88}^* \sim 1), \quad \frac{A_{11}(A_{77} + A_{78})}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim \delta^{-2} (A_{77}^*)^{-1} (A_{77}^* \sim 1)$$

$$\frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \sim 1$$

В этом случае для величин ω , k , q получим:

$$\omega = -2, \quad k = -4, \quad q = \begin{cases} 0 & \bar{\sigma}_{22} \\ 1 & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \\ 2 & \bar{\sigma}_{11}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23} \\ 3 & \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3 \end{cases}$$

На уровне исходного приближения асимптотического метода в случае (3.13), (3.14) приходим к одномерной динамической теории микрополярных ортотропных балок “с малой сдвиговой жесткостью”.

Уравнения “моментной” части задачи:

уравнение движения, соотношение упругости, геометрическое соотношение:

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} = -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}, \quad L_{13} = 2hB_{66}k_{13}, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}$$

Уравнения (3.15) можно привести к следующему одному уравнению:

$$2hB_{66} \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial x_1^2} = -(M^+ + M^-) + 2Ih \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}$$

Уравнения “силовой” части задачи:

уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h(X^+ - X^-), \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}, \quad N_{12} = 4h \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{88} + A_{78}} \Gamma_{12} + \frac{A_{77} + A_{78}}{A_{88} + A_{78}} N_{21}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3$$

Уравнения (3.17)-(3.19) можно привести к следующему одному уравнению:

$$\frac{2}{3}h^3 \frac{(A_{77} + A_{78})(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{A_{22}(A_{88} + A_{78})} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - 4h \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{88} + A_{78}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3 \right) =$$

$$= (Y^+ + Y^-) + \frac{A_{77} + A_{78}}{A_{88} + A_{78}} h \frac{\partial (X^+ - X^-)}{\partial x_1} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Здесь $\frac{2}{3}h^3 \frac{(A_{77} + A_{78})(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{A_{22}(A_{88} + A_{78})}$ – жесткость микрополярной балки по теории "с малой сдвиговой жесткостью".

В дальнейшем будем изучать погранслой (квазистатический) поставленной задачи и задачу сращения внутренней и погранслойной задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении. 1999. 214 с.
2. Sargsyan S. H. Dynamic Problem of Thin Plates on the Basis of Asymmetric Theory of Elasticity// Proc. of XXXIV Summer School "Advanced Problems in Mechanics". 2006. Repino, Saint-Petersburg, Russia, 25 June-1 July, 2006. P. 447-458.
3. Саркисян С. О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. Вып 2. С.154-166.
4. Атоян А. А. , Саркисян С. О. Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. №1. С.18-29.
5. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Свободные колебания микрополярных пластин //Тр. VII Всероссийской научной конференции "Нелинейные колебания механических систем". Нижний Новгород: Изд. Дом "Диалог Культур", 2008. С. 415-423.
6. Саркисян С.О., Саркисян А. А. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости //Межвуз. сб. научных трудов, посвящ. 80-летию С.Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный педагогический институт им. О. Туманяна. 2008. Т. 2. С. 4-17.
7. Iesan D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids//Archives of Mechanics. 1973. Vol. 25. №3. P.547-561.

Сведения об авторе

Маргарян Л. М.

Аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, 377526, г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, дом 4,
E-mail: M.LILOO@mail.ru.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СМЕШАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ ИЗНОСА

Мартиросян А. Н., Давтян А. В.

Задача о штампе при наличии износа для статики решена в [1], где показано, что наличие износа (шероховатости) приводит к устранению известной особенности напряжения, имеющей место у края штампа в той же задаче при отсутствии износа. Осесимметричные задачи об ударе штампа по упругому полупространству при наличии шероховатости решены в [2]. Задачи о штампах при наличии трения и износа, так же, как в [2], в квазистатической постановке решены в [3]. Задача о резании материалов решалась в [4]. Нестационарная задача о штампе с трением и износом решается методами настоящей статьи в [5], где также показано отсутствие особенностей у края штампа. В настоящей работе даются решения пространственных смешанных динамических граничных задач о движущемся с постоянной скоростью штампе по правой полуплоскости границы полупространства в изотропной упругой среде при наличии износа контакта со средой. На левой полуплоскости на границе полупространства напряжения равны нулю. В первой задаче на правой полуплоскости границы равна нулю нормальная компонента напряжения и задано граничное условие для перемещения штампа u_2 по оси OY , во второй задаче равно нулю u_1 , т.е. продольное перемещение по оси OX вдоль всей границы. Эти задачи о горизонтальном штампе, помимо теоретического интереса, представляют модельный подход к определению под штампом напряжений в задачах о резании [4] и микрорезании [3]. Задачи решаются методом интегральных преобразований Лапласа и Фурье с решением системы уравнений Винера – Хопфа. Решения проведены путем приведения к системе четырех интегральных уравнений Фредгольма. В первой задаче показано отсутствие особенности в напряжении S_{yz} , а во второй задаче – в обоих компонентах касательных напряжений S_{xz} , S_{yz} и S_{zz} .

1.Сведение задачи к системе Винера-Хопфа.

Выберем оси координат x, y в плоскости полупространства, ось z – по нормали к указанной плоскости. Пусть $u_j, j = 1, 2, 3$ есть компоненты перемещений вдоль осей $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, где $x = x' - Vt, x', y, z$ – неподвижная система координат, t – время. Уравнения движения

$$(a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + b^2 \Delta u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - 2V \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

где $k = 1, 2, 3$; a, b – скорости продольных и поперечных упругих волн, Δ – оператор Лапласа.

Решается математическая задача для уравнения (1.1) при граничных условиях ($z = 0, |y| < \infty$)

$$S_{zz} = 0, -\infty < x < \infty; S_{xz} = 0, S_{yz} = 0, -\infty < x < 0, \quad (1.2)$$

$$u_1 = 0, \frac{\partial u_2}{\partial t} + k S_{yz} = -QH(h_0 - |y|)H(x_0 - x)d(t), x > 0 \quad (1.3)$$

$$u_{1,2,3} = o(r^{1/2}), r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \text{ (условие на ребре),}$$

где $\frac{\partial u_2^*}{\partial t} = k s_{yz}$, u_2^* – перемещение за счет износа, u_2 – упругое, $u_2 + u_2^*$ – суммарное перемещение, Q, x_0, h_0 – положительные постоянные, $H(x)$ – единичная функция, ρ – плотность упругой среды, а V есть скорость движущегося штампа. Начальные условия нулевые. Таким образом, при $x > 0, z = 0$ имеется штамп, импульсно приложенный в момент $t = 0$ к границе с перемещением u_2 при наличии горизонтального износа. В дальнейшем считается, что штамп движется по поверхности полупространства $z = 0$ с постоянной скоростью V по оси Ox и указанные выше условия берутся в подвижной системе x, y, z . В общем случае в зависимости от характера поверхности среды и штампа может преобладать сухое трение ($s_{yz} = k s_{zz}$) или износ $\left(\frac{\partial u_2^*}{\partial t} = k s_{yz}\right)$. В данной статье берется износ.

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x, y . Обозначив через $\bar{u}_j$ преобразования Лапласа по t от u_j и через $\bar{\bar{u}}_j$ – преобразование Фурье по x, y от $\bar{u}_j|_{z=0}$, можно записать

$$\bar{u}_j = \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{u}}_j e^{i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}y + i\bar{\gamma}_n z} d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1), можно получить

$$\bar{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}, \quad s = -i\omega, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad \omega_0 = \omega + V\bar{\alpha}, \quad (1.5)$$

где s – параметр преобразования Лапласа. Обозначая через $u_{1,2}^+(\bar{a}, \bar{b}), t_{xz}^-, t_{yz}^-$ преобразования от перемещений $U_{1,2}$ и напряжений s_{xz}, s_{yz} на плоскости $z = 0$, причем индекс „+” дает функции параметра, аналитические в верхней полуплоскости, индекс „–” дает функции аналитические в нижней полуплоскости, из (1.2) и (1.3) мы получим неоднородную задачу Гильберта в матричной форме:

$$\Phi^+(\bar{\alpha}) = G(\bar{\alpha})\Phi^-(\bar{\alpha}) + g(\bar{\alpha}) \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^+(\bar{a}) &= \begin{pmatrix} u_2^+ \\ u_1^+ g_1^+ \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \tau_{yz}^- \\ \tau_{xz}^- / \gamma_1^- \end{pmatrix}, \quad G(\bar{a}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad g(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} -\varphi_0 Q \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_0 &= -\frac{\exp(-i\bar{\beta}\eta_0) - \exp(i\bar{\beta}\eta_0)}{4\pi^2 \bar{\alpha}\bar{\beta}} \left(1 - \exp(-i\bar{\alpha}\xi_0)\right), \quad a_{11} = k\rho + \frac{s}{D} \frac{\bar{\gamma}_2^{-2} (\bar{\gamma}_2^{-2} - \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \bar{\alpha}^2 T_0}{2\bar{\alpha}\bar{\gamma}_2 i b^2}, \\ a_{12} &= \frac{\gamma_1^- s \bar{\beta} 2\bar{\gamma}_2^{-2} - T_0}{D 2\bar{\gamma}_2 i b^2}, \quad a_{21} = \frac{\gamma_1^+}{\gamma_1^- s} a_{12}, \quad a_{22} = \frac{\bar{\gamma}_1^-}{\gamma_2 D} \frac{\bar{\gamma}_2^{-2} (\bar{\gamma}_2^{-2} + \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) + \bar{\beta}^2 T_0}{2i b^2 \bar{\alpha}}, \end{aligned}$$

$$D = \frac{\bar{\gamma}_2^{-2} (\bar{\gamma}_2^{-2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) T_0}{2\bar{\alpha}}, \quad T_0 = 4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_2^{-2} + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2$$

где использована факторизация $\bar{\gamma}_1 = \gamma_1^- \gamma_1^+$.

2. Решение задачи Гильберта для произвольного $\bar{\alpha}$.

Решение задачи (1.6), ограниченное на бесконечности, дано в [9] в виде

$$\Phi(\bar{\alpha}) = \frac{X(\bar{\alpha})}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[X^+(\bar{\zeta})]^{-1} g(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} \quad (2.1)$$

где матрица-функция $X(\bar{\alpha})$ удовлетворяет однородным уравнениям

$$X^+(\bar{\alpha}) = G(\bar{\alpha}) X^-(\bar{\alpha}), \quad G(\bar{\alpha}) = X^+(\bar{\alpha}) [X^-(\bar{\alpha})]^{-1} \quad (2.2)$$

Как показано в [9], уравнение для $X(\bar{\alpha})$ можно записать в виде системы Фредгольма

$$X^-(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^{-1}(\bar{\alpha}) G(\bar{\zeta}) - E(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} X^-(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} = \gamma(\bar{\alpha}) \quad (2.3)$$

где $\gamma(\bar{\alpha})$ есть асимптотическое поведение матрицы-функции $X(\bar{\alpha})$ при $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$.

Уравнение (2.3) с учетом (1.6) имеет вид:

$$X^-(\bar{\alpha}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} - E \right\} \begin{pmatrix} y_{11}(\bar{\zeta}) & y_{12}(\bar{\zeta}) \\ y_{21}(\bar{\zeta}) & y_{22}(\bar{\zeta}) \end{pmatrix}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} d\bar{\zeta} = \gamma(\bar{\alpha}) \quad (2.4)$$

где $X^-(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} y_{11}(\bar{\alpha}) & y_{12}(\bar{\alpha}) \\ y_{21}(\bar{\alpha}) & y_{22}(\bar{\alpha}) \end{pmatrix}$, E – единичная матрица,

$$\begin{aligned} d(\bar{\alpha})c_{11} &= a_{22}(\bar{\alpha})a_{11}(\bar{\alpha}) - a_{12}(\bar{\alpha})a_{21}(\bar{\alpha}), \quad d(\bar{\alpha})c_{12} = a_{22}(\bar{\alpha})a_{12}(\bar{\alpha}) - a_{12}(\bar{\alpha})a_{22}(\bar{\alpha}) \\ d(\bar{\alpha})c_{21} &= a_{11}(\bar{\alpha})a_{21}(\bar{\alpha}) - a_{21}(\bar{\alpha})a_{11}(\bar{\alpha}), \quad d(\bar{\alpha})c_{22} = a_{11}(\bar{\alpha})a_{22}(\bar{\alpha}) - a_{21}(\bar{\alpha})a_{12}(\bar{\alpha}) \\ d(\bar{\alpha}) &= a_{11}(\bar{\alpha})a_{22}(\bar{\alpha}) - a_{12}(\bar{\alpha})a_{21}(\bar{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{Обозначим еще } X^+(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.6)$$

Факторизация матрицы $G(\bar{\alpha})$ для больших $\bar{\alpha}$, для которых $\bar{g}_n \approx i|\bar{\alpha}|\sqrt{1 - V^2 c_n^{-2}}$, т.е. для случая рациональных коэффициентов, дана в [9] и имеет вид $G(\bar{\alpha}) = X^+(\bar{\alpha}) [X^-(\bar{\alpha})]^{-1}$, где при $\bar{\alpha} \approx \infty$ можно считать

$$X^+(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^-(\bar{\alpha}) = G^{-1}(\bar{\alpha}), \quad G^{-1}(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} (kr)^{-1} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где

$$D_1 = b^4 \left[\left(\frac{V^2}{b^2} - 2 \right)^2 - 4 \sqrt{1 - \frac{V^2}{a^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{b^2}} \right] \left[i V^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{a^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{b^2}} \right]^{-1},$$

при этом, в (2.4) $g(\bar{a}) \approx X^-(\bar{a})$, которая дается формулой (2.7), $\gamma(\bar{\alpha}) = \text{const}$.

Тогда, из (1.6) и (2.6), в частности, при $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ вытекает:

$$\begin{pmatrix} \tau_{yz}^- \\ \tau_{xz}^- \\ \gamma_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} M_1(\bar{\zeta}) \\ M_2(\bar{\zeta}) \end{pmatrix} \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}}, \quad (2.8)$$

где $M_1(\bar{\zeta}) = -\frac{\Phi_0 Q x_{11}(\bar{\zeta})}{k\rho}$, $M_2(\bar{\zeta}) = -\Phi_0 Q x_{21}(\bar{\zeta}) D_1$.

Переходя к обратным преобразованиям Лапласа и Фурье, при $z = 0, x \rightarrow 0$ получим

$$\frac{\sigma_{yz,xz}}{\rho} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\beta} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{st+i\bar{\alpha}x+i\bar{\beta}y} d\bar{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{M_{1,2}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} d\bar{\zeta} \quad (2.9)$$

Заменив $\bar{\zeta}$ через $\zeta\omega$, $\bar{\alpha}$ на $\alpha\omega$, $\bar{\beta}$ через $\beta\omega$ и вычисляя интеграл по s в формуле (2.9) и затем интеграл по $\bar{a}$, можно получить решение в форме Смирнова-Соболева [6]

при $z = 0, x \approx 0$

$$\frac{\sigma_{yz}}{\rho} = \frac{Q}{4\pi^3} (I_1 - I_2 - I_3 + I_4), \quad \frac{\sigma_{xz}}{\rho} x^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4\pi^3} (J_1 - J_2 - J_3 + J_4) \quad (2.10)$$

$$I_{1,2} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{11} dz}{ik_1 z b (t - b(y \mp h_0))},$$

$$J_{1,2} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \frac{-\sqrt{-i} D_1 x_{21}(\bar{z}) dt_1}{\Gamma(-\frac{1}{2}) t_1^{\frac{3}{2}} z b \sqrt{t - t_1 - b(y \mp h_0) + z x_0}}$$

$$I_{3,4} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{11} dz}{ik_1 z b (t - b(y \mp h_0) + z x_0)},$$

$$J_{3,4} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} \frac{-\sqrt{-i} D_1 x_{21}(\bar{z}) dt_1}{\Gamma(-\frac{1}{2}) t_1^{\frac{3}{2}} z b \sqrt{t - t_1 - b(y \mp h_0)}}$$

где $\Gamma(x)$ есть функция Эйлера.

Поскольку при $\bar{\alpha} \approx \infty$, $\gamma(\bar{\alpha}) \approx X^-(\bar{\alpha}) = G^{-1}(\bar{\alpha})$, которая дается формулой (2.7), то из

(2.4) получим систему уравнений Фредгольма:

$$\begin{aligned} y_{11}(a) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{11} y_{11}(z) + c_{12} y_{21}(z) - y_{11}(z)}{z - a} dz &= \frac{1}{k_1}, \\ y_{12}(a) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{11} y_{12}(z) + c_{12} y_{22}(z) - y_{12}(z)}{z - a} dz &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$y_{21}(a) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{21}y_{11}(z) + c_{22}y_{21}(z) - y_{21}(z)}{z - a} dz = 0 ,$$

$$y_{22}(a) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{21}y_{12}(z) + c_{22}y_{21}(z) - y_{22}(z)}{z - a} dz = D_1 .$$

Разрешимость системы (2.11) показана в [9]. При этом, интегралы понимаются в смысле главного значения. Поскольку $X^+(\bar{a}) = G(\bar{a})X^-(\bar{a})$, имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

откуда для произвольных y_{ik} из (2.11) найдутся $x_{ik}(z)$, т.е. из (2.10) можно найти $S_{yz,xz}$ в замкнутом виде. Поведение напряжения S_{xz} при $x \rightarrow +0$ имеет вид $S_{xz} = o(|x|^{-1/2})$, что соответствует поставленному условию на ребре, а напряжение S_{yz} благодаря наличию износа, в окрестности точки $x = 0$ не имеет особенностей.

3. Другая смешанная задача для штампа.

Рассмотрим смешанную граничную динамическую задачу, где граничные условия имеют вид $(z = 0, |y| < \infty)$

$$S_{zz} = 0, S_{yz} = 0, -\infty < x < 0; u_1 = 0, -\infty < x < \infty$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2^*}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + k S_{yz} = -QH(h_0 - |y|)H(x_0 - x)d(t), x > 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3^*}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + k_1 S_{zz} = -PH(h_0 - |y|)H(x_0 - x)d(t), x > 0;$$

а начальные условия нулевые.

Используя те же назначения, в этой задаче для $z = 0, x \approx 0$ на штампе мы получим

$$S_{yz} = \frac{1}{4p^3 k} (I_1 - I_2 - I_3 + I_4), S_{zz} = \frac{1}{4p^3 k_1} (J_1 - J_2 - J_3 + J_4),$$

$$S_{xz} = \frac{1}{4p^3} (K_1 - K_2 - K_3 + K_4)$$

где $I_{1,2} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Qx_{11}(z) + Px_{12}(z)}{izb(t - b(y \mp h_0))} dz$, $I_{3,4} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Qx_{11}(z) + Px_{12}(z)}{izb(t - b(y \mp h_0) + zx_0)} dz$,

$$J_{1,2} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Qx_{21}(z) + Px_{22}(z)}{izb(t - b(y \mp h_0))} dz$$
, $J_{3,4} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Qx_{21}(z) + Px_{22}(z)}{izb(t - b(y \mp h_0) + zx_0)} dz$, (3.2)
$$K_{1,2} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(a_{1,3}, b, z) dz}{izb(t - b(y \mp h_0))}$$
, $K_{3,4} = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} db \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(a_{2,4}, b, z) dz}{izb(t - b(y \mp h_0) + zx_0)}$,
$$B = ib(k\bar{a}D)^{-1}(w_0^2 - 2b^2T)(Qx_{11}(z) + Px_{12}(z)) + ib^2\bar{g}_2(k_1\bar{a}D)^{-1}T(Qx_{21}(z) + Px_{22}(z)),$$

$$D = b^2\bar{a}^{-2}(w_0^2(\bar{b}^2 - \bar{g}_2^2) - 2\bar{b}^2b^2T), T = 2\bar{g}_1\bar{g}_2 - \bar{g}_2^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2,$$

$$a_{1,2} = \frac{t - b(y \mp h_0)}{x}, a_{3,4} = \frac{t - b(y \mp h_0) + zx_0}{x}, w_0 = w + Va^-, w = is.$$

То есть, если в обоих условиях присутствует износ, то ни одно из напряжений S_{yz}, S_{zz}, S_{xz} не имеет особенностей вблизи точки $x = 0$.

Приведенные задачи можно решать также и в случае с произвольной скоростью движения штампа по границе, применяя обобщение метода Винера-Хопфа, метод сверток [6], [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: 1949. 270 с.
2. Мхитарян С.М., Шемян А.Л., Шемян Л.А. Об ударе штампа по упругому шероховатому полупространству. // Тр. VI Международной конференции „Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис, 2008, с.345-349.
3. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Наука, 1988. 253 с.
4. Кукуджанов В.Н., Левитин А.Л. Численное моделирование процессов резания упруговязко-пластических материалов. // Материалы XVI Международной конференции ВМСППС 2009, Алушта, с.456-459
5. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Варданян С.В., Мартиросян Г.А., Костандян К.С., Динунц А.С. Нестационарные задачи о трещинах и штампах. // Вестник РАУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 2007. №2.
6. Мартиросян А.Н. Краевые задачи нестационарного движения анизотропных и изотропных упругих сред. / Докторская диссертация. Ереван. Институт механики НАН Армении, 1990.
7. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
8. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Мартиросян Г.А., Погосян С.М. Решение смешанной динамической задачи о перемещениях, заданных на границе полуплоскости, расположенной на поверхности изотропного однородного упругого полупространства. // МТТ. 2007. №4. 67-74.
9. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 380 с.
10. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитотермоупругости. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1974. Т.27. № 2. С.13-23.

Сведения об авторах:

Мартиросян А. Н.

Д. ф.-м. н., профессор, зав. каф. матем. в ГГУ.

Адрес: г. Авангард 4, Горис, Армения

Тел: (0284)23638, 22048, (093)192465

E-mail: dinunts2007@rambler.ru

Давтян А. В. магистрант, каф. мат., ГГУ. Горис

Тел: (0284) 20826, (077)071366

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ О ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ШТАМПЕ ПРИ
НАЛИЧИИ ИЗНОСА И ТРЕНИЯ
Мартирисян А. Н., Динунц А. С.**

Рассматривается нестационарная задача о штампе при наличии износа и трения в изотропном упругом пространстве. Штамп негладкий $\sigma_{xz} \neq 0$, но левая часть свободна от напряжений. Задача решается методом интегральных преобразований Лапласа по времени t и Фурье по координатам x, y и приводится к уравнению Винера-Хопфа, которое решается с приведением решения к форме Смирнова-Соболева.

В пространственной задаче, вводя компоненты $U_{1,2,3}$ вектора смещения по осям x, y, z , сформулируем следующую граничную задачу о штампе, имеющем вид полуплоскости ($y = 0, |z| < \infty$) [1-3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при } x < 0 \\ \frac{\partial U_3}{\partial t} + k_1 \sigma_{zz} = C_0 H(x) H(y) \delta(t), \quad \sigma_{xz} = k_2 \sigma_{zz}, \quad \sigma_{yz} = k_3 \sigma_{zz}, \quad k_1, k_2, k_3 \neq 0 \quad \text{при } x > 0 \\ \sigma_{xy} = \rho b^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0, \quad \sigma_{yz} = \rho b^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) = 0 \\ \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad K = a^2 - 2b^2 \\ U_{1,2,3} = 0 \left(r^{\frac{1}{2}} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad (\text{условие на ребре}) \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x} \nabla + b^2 \Delta U_1 &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \\ (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial y} \nabla + b^2 \Delta U_2 &= \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \\ (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z} \nabla + b^2 \Delta U_3 &= \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} U_1 + \frac{\partial}{\partial y} U_2 + \frac{\partial}{\partial z} U_3, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2)$$

a, b – скорости продольных и поперечных волн.

$$\text{Начальные условия при } t = 0 \quad U_{1,2,3} = 0, \quad \frac{\partial U_{1,2,3}}{\partial t} = 0.$$

Решение ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x, z . Обозначая $\bar{U}_{1,2,3}$ преобразование Лапласа по t от $U_{1,2,3}$, через $\bar{\bar{U}}_{1,2,3}$ преобразование Фурье по x, z от $\bar{U}_{1,2,3}$, можно искать решение в виде

$$\bar{U}_{1,2,3} = \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \bar{\bar{U}}_{1,2,3}^{(n)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \exp(i\bar{\alpha}x + i\bar{\beta}y + iz\bar{\gamma}_n) d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_n &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b, \quad n = 1, 2 \\ \bar{U}_2^{(1)} &= \frac{\beta}{\alpha} \bar{U}_1^{(1)}, \quad \bar{U}_3^{(1)} = \frac{\gamma_1}{\alpha} \bar{U}_1^{(1)}, \quad \alpha \bar{U}_1^{(2)} + \beta \bar{U}_2^{(2)} + \gamma_2 \bar{U}_3^{(2)} = 0\end{aligned}\quad (4)$$

Подставляя (3) в (1) и проводя обратное преобразование Фурье по x, z , можно получить уравнение Винера-Хопфа

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\alpha s}{\rho b^2 i R(\alpha, \beta)} \left[\left\{ 2\gamma_1 \gamma_2 - \left(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\alpha^2 - 2\beta^2 \right) \right\} k_2 + \left\{ 2 \frac{\beta \gamma_1 \gamma_2}{\alpha} - \frac{\gamma_2 (\gamma_2^2 - \alpha^2) - \alpha^2 \beta}{\alpha \gamma_2^2} \left(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\alpha^2 - 2\beta^2 \right) \right\} k_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega^2}{b^2} \frac{\gamma_1}{\alpha} \right] + k_1 \right\} \sigma_{zz}^- = -\frac{C_0}{4\pi^2 \alpha \beta} + U_3^+\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}R(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \left(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}^2 \right)^2 + 4\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) \\ U_3^+ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^0 (\bar{U}_3)_{y=0} \exp(-i\bar{\alpha}x - i\bar{\gamma}z) dx \\ \sigma_{zz}^- &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} (\bar{\sigma}_{zz})_{y=0} \exp(-i\bar{\alpha}x - i\bar{\gamma}z) dx\end{aligned}$$

Отметим, что индекс (+) означает функции аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а индекс (-) означает функции аналитические в нижней полуплоскости.

Уравнение (5) Винера-Хопфа решается известным методом в виде [4]

$$\sigma_{zz}^- = -\frac{C_0}{4\pi^2 k_1 \alpha \beta} \cdot \frac{F^+(0, \bar{\beta})}{G_1^+(0, \bar{\beta})} \cdot \frac{F^-(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}{G_1^-(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}$$

Обратное преобразование Лапласа и Фурье дает (6), записанное в форме Смирнова-Соболева [5]

$$\sigma_{zz} = -2 \frac{C_0}{4k_1 \pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^+(0, \bar{\beta})}{\bar{\alpha}_0 \bar{\beta} G_1^+(0, \bar{\beta})} \cdot \frac{F^-(\bar{\alpha}_0, \bar{\beta})}{G_1^-(\bar{\alpha}_0, \bar{\beta})(-x/a)} d\bar{\beta} = \sigma_s, \quad \alpha_0 = \frac{at - \bar{\beta}y}{x}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}F^{\pm}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_R^2} - \bar{\beta}^2 \pm \bar{\alpha}}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\beta}^2 \pm \bar{\alpha}} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{\beta}^2 \pm \bar{\alpha}}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mp \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\alpha}^2}}^{\mp \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \bar{\alpha}^2}} \ln \frac{R(\zeta, \beta)}{R(\zeta, \beta)} \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} \right\} \\ R(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \frac{\gamma_1 \gamma_2 F(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}{C_0}, \quad C_0 = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 - b^2)}, \quad F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = F^+(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) F^-(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \\ G_1^+(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \bar{\beta}^2}} \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega^3 \gamma_1^*}{\rho b^4 k_1}}{\frac{\omega}{\rho b^2 k_1} (k_3 \beta + k_2 \zeta) (2\zeta^2 + 2\beta^2 - 2\gamma_1^* \gamma_2^*) - R^*(\zeta, \beta)} \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \beta^2}}^{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \beta^2}} \operatorname{arctg} \frac{4(\zeta^2 + \beta^2) \sqrt{\zeta^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \beta^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \zeta^2 - \beta^2} - \frac{\omega}{\rho b^2 k_1} \left[\frac{\omega^2}{b^2} \gamma_1^* + (k_3 \beta + k_2 \zeta) 2\gamma_1^* \gamma_2^* \right]}{\frac{\omega}{\rho b^2 k_1} (k_3 \beta + k_2 \zeta) \left(2\zeta^2 + 2\beta^2 - \frac{\omega^2}{b^2} \right) + \left(-2\zeta^2 - 2\beta^2 + \frac{\omega^2}{b^2} \right)^2} \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} \Bigg) \\
G_1^-(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = & \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \beta^2}}^{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \beta^2}} \ln \frac{\frac{\omega}{\rho b^2 k_1} \left[-i \frac{\omega^2}{b^2} \gamma_1^* + (k_3 \beta + k_2 \zeta) \left(2\zeta^2 + 2\beta^2 - 2i\gamma_1^* \gamma_2^* - \frac{\omega^2}{b^2} \right) \right] - \bar{R}(\bar{\zeta}, \bar{\beta})}{-\frac{\omega}{\rho b^2 k_1} \left[i \frac{\omega^2}{b^2} \gamma_1^* + (k_3 \beta + k_2 \zeta) \left(2\zeta^2 + 2\beta^2 + 2i\gamma_1^* \gamma_2^* - \frac{\omega^2}{b^2} \right) \right] - R(\bar{\zeta}, \bar{\beta})} \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \beta^2}}^{\infty} \ln \frac{\frac{\omega}{\rho b^2 k_1} \left[-i \frac{\omega^2}{b^2} \gamma_1^* + (k_3 \beta + k_2 \zeta) \left(2\zeta^2 + 2\beta^2 - 2\gamma_1^* \gamma_2^* - \frac{\omega^2}{b^2} \right) \right] - R^*(\bar{\zeta}, \bar{\beta})}{\frac{\omega}{\rho b^2 k_1} \left[i \frac{\omega^2}{b^2} \gamma_1^* + (k_3 \beta + k_2 \zeta) \left(2\zeta^2 + 2\beta^2 - 2\gamma_1^* \gamma_2^* - \frac{\omega^2}{b^2} \right) \right] - R^*(\bar{\zeta}, \bar{\beta})} \frac{d\zeta}{\zeta - \bar{\alpha}} \right\} \\
R(\bar{\zeta}, \bar{\beta}) = & \left(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\zeta^2 - 2\beta^2 \right)^2 + 4i(\zeta^2 + \beta^2) \sqrt{\zeta^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \beta^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} - \zeta^2 - \beta^2} \\
R^*(\bar{\zeta}, \bar{\beta}) = & \left(\frac{\omega^2}{b^2} - 2\zeta^2 - 2\beta^2 \right)^2 - 4(\zeta^2 + \beta^2) \sqrt{\zeta^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \beta^2} \sqrt{-\frac{\omega^2}{b^2} + \zeta^2 + \beta^2}
\end{aligned}$$

или переходя к безразмерным переменным

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} = \frac{\alpha \omega}{a}, \quad \xi = \sqrt{\eta^2 - \bar{\beta}^2}, \quad \beta_n = \frac{\omega}{1 - v\zeta} \sqrt{\frac{1}{c_n^2} - \zeta^2}, \quad \beta_n^* = \frac{\omega}{1 - v\zeta} \sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{c_n^2}}, \quad c_1 = a, \\
\alpha = \frac{at}{x} \quad c_2 = b
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
F^- = & \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{a}{b}} \operatorname{arctg} \frac{4\eta^2 \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 2\eta^2 \right)^2} \cdot \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \beta^2} (\sqrt{\eta^2 - \beta^2} - \alpha)} \right\} \\
F^+ = & \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{a}{b}} \operatorname{arctg} \frac{4\eta^2 \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2}}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 2\eta^2 \right)^2} \cdot \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \beta^2} \right\} \\
G_1^+ = & \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{a}{b}}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\frac{a^3}{\rho b^3 k_1} \sqrt{\eta^2 - 1}}{\frac{a}{\rho b^2 k_1} (k_3 \beta - k_2 \sqrt{\eta^2 - \beta^2}) \left(2\eta^2 - 2\sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\eta^2 - \frac{a^2}{b^2}} \right) - \left(\frac{a^2}{b^2} - 2\eta^2 \right)^2 + 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\eta^2 - \frac{a^2}{b^2}}} \cdot \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \beta^2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{a}{b}} \operatorname{arctg} \frac{4\eta^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2} - \frac{a}{\rho b^2 k_1} \left(\sqrt{\eta^2 - 1} + (k_3 \beta - k_2 \sqrt{\eta^2 - \beta^2}) 2\sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2} \right)}{\frac{a}{\rho b^2 k_1} (k_3 \beta - k_2 \sqrt{\eta^2 - \beta^2}) \left(2\eta^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{b^2} - 2\eta^2 \right)^2 + 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\eta^2 - \frac{a^2}{b^2}}} \cdot \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \beta^2} \Bigg\} \\
G_1^+ = & \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{a}{b}}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\frac{a^3}{\rho b^3 k_1} \sqrt{\eta^2 - 1}}{\frac{a}{\rho b^2 k_1} (k_3 \beta + k_2 \sqrt{\eta^2 - \beta^2}) \left(2\eta^2 + \frac{a^2}{b^2} - 2\sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\eta^2 - \frac{a^2}{b^2}} \right) - \left(\frac{a^2}{b^2} - 2\eta^2 \right)^2 + 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\eta^2 - \frac{a^2}{b^2}}} \times \right. \\
& \times \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \beta^2} (\sqrt{\eta^2 - \beta^2} - u)} - \\
& + \frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{a}{b}} \operatorname{arctg} \frac{4\eta^2 \sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2} + \frac{a^3}{\rho b^4 k_1} \sqrt{\eta^2 - 1} - 2 \frac{a}{\rho b^2 k_1} \sqrt{\eta^2 - 1} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \eta^2} (k_3 \beta + k_2 \sqrt{\eta^2 - \beta^2})}{\frac{a}{\rho b^2 k_1} (k_3 \beta + k_2 \sqrt{\eta^2 - \beta^2}) \left(2\eta^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{b^2} - 2\eta^2 \right)^2} \\
& \left. \times \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \beta^2} (\sqrt{\eta^2 - \beta^2} - u)} \right\}
\end{aligned}$$

Из формулы (6) видно, что особенностей при $x = 0$ нет.

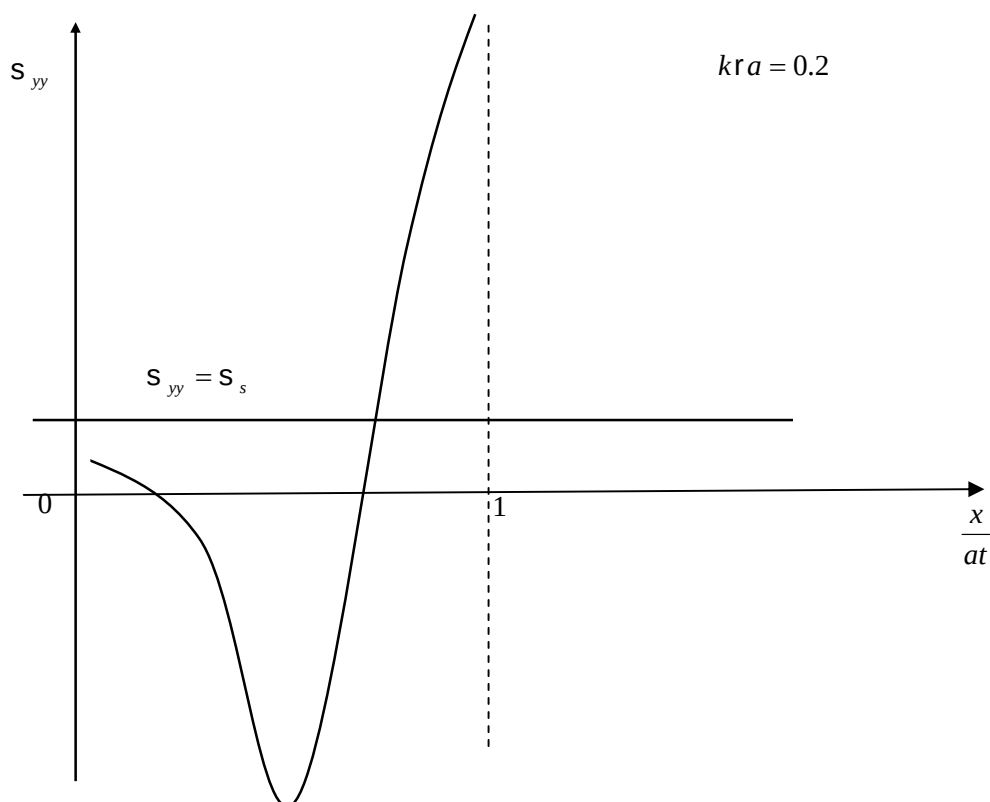
При $x = 0$, $k \neq 0$ σ_{zz} конечно около края штампа, тем не менее, при $\sigma_{zz} \geq \sigma_s$ где σ_s – предел текучести, образуется пластическая зона. Чтобы выяснить, при каких перемещениях C_0 это происходит, сделаны расчеты интегралов $\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^+(0, \bar{b})}{\bar{a}_0 \bar{b} G_1^+(0, \bar{b})} \cdot \frac{F^-(\bar{a}_0, \bar{b})}{G_1^-(\bar{a}_0, \bar{b}) (-\frac{x}{a})} d\bar{b}$,

$\bar{a}_0 = \frac{t - \frac{\bar{b}}{a} y}{\frac{x}{a}}$. Результаты приведены в таблице для $0 < \frac{x}{at} < \frac{7}{8}$

Таблица

$\frac{x}{at}$	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
$bkr = 3$	0.7089	-0.2758	-2.5502	4.1248	12.4224	41.9562	115.006

Построен график



ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред //Ереван: «Зангак-97», 2007. 244с.
2. Мартиросян А.Н., Динунц А.С. Аналитическое и численное исследование нестационарной плоской задачи о полубесконечном штампе при наличии износа.- Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред, //Тр. 6-ой Международной конференции, 21-26 сентября, Горис-Степанакерт, 2008, с.305-310.
3. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Варданыан С.В., Мартиросян Г.А., Костандян К.С., Динунц А.С. Нестационарные задачи о трещинах и штампах / Вестник, Ереван, 2007, с.106-119.
4. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ.,1962, с.278.

Сведения об авторах:

Мартиросян А. Н. – Д.ф.-м. н., профессор, зав. каф. матем., ГГУ.

Адрес: Авангард 4, тел: (0284)23638, 22048, (0.93)192465

Динунц А. С. – Преподаватель каф. матем. ГГУ.

E-mail: dinunts2007@rambler.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Мартиросян К. Л.

1. Рассматривается полубесконечная пластинка толщиной $2h$, на лицевых поверхностях которой заданы касательные нагрузки. Прямоугольная декартова система координат (x, y, z) выбрана так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью (xOy) .

Задача изгиба пластинки при наличии касательных нагрузок рассматривается на основе классической теории (К) [1], на основе уточненной теории первого порядка – теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева (В) [2], на основе уточненной теории высокого порядка – теории Амбарцумяна (А) [1]. Другой подход исследования аналогичных задач предложен в работе [3].

Предполагается, что на лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки:

$$\begin{aligned} z = h: \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = X^+(x, y), \quad \sigma_{32} = 0 \\ z = -h: \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{31} = -X^-(x, y), \quad \sigma_{32} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Относительно перемещений, по теориям (К), (В) и (А), соответственно, принимаются следующие допущения [4]:

$$U_1 = U - z \frac{\partial W}{\partial x}, \quad U_2 = V - z \frac{\partial W}{\partial y}, \quad U_3 = W \quad (1.2)$$

$$U_1 = U - z\theta_1, \quad U_2 = V - z\theta_2, \quad U_3 = W \quad (1.3)$$

$$U_1 = U - z \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z}{2G} \left(X_1 + \frac{z}{2h} X_2 \right) + \frac{1}{G} g(z) \varphi_1 \quad (1.4)$$

$$U_2 = V - z \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{G} g(z) \varphi_2, \quad U_3 = W$$

Здесь, U, V – перемещения срединной плоскости, прогиб пластинки W и функции $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$ не зависят от координаты z , G – модуль сдвига, $X_1 = X^+ - X^-$, $X_2 = X^+ + X^-$

$$g(z) = z \left(1 - \frac{z^2}{3h^2} \right) \quad (1.5)$$

Уравнения напряженно-деформированного состояния пластинки по теории (К) и (В):

$$\Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{2X_2}{C(1-\nu)} \quad (1.6)$$

$$\Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

по теории (А):

$$\begin{aligned} \Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= - \frac{2X_2}{C(1-\nu)} - \frac{\theta h}{3E} \left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2} \right) \\ \Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= - \frac{\theta h}{12G} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Уравнения изгиба пластинки по теории (К):

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D} \frac{\partial X_1}{\partial x} \quad (1.8)$$

по теории (В):

$$\Delta W - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0$$

$$D \left[\Delta \theta_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4Gh}{1-\nu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta_1 \right) = \frac{2h}{1-\nu} X_1$$

$$D \left[\Delta \theta_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) \right] + \frac{4Gh}{1-\nu} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta_2 \right) = 0$$
(1.9)

Аналогичным образом уравнения изгиба по теории (А) приведутся к виду:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{3}{4} \frac{\partial X_1}{\partial x}$$

$$D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_1 =$$

$$= \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} \right)$$
(1.10)

$$D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_2 = \frac{h^3 \theta}{3} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y}$$

2. Пусть прямоугольная пластинка занимает область $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$.

Приложенная нагрузка задана в виде:

$$X_1 = \tau_0 \sin \lambda y, \quad X_2 = 0 \quad \text{где} \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{b}$$
(2.1)

Края пластинки $y = 0, b$ шарнирно закреплены:

по теории (К):

$$W = 0, \quad \frac{\partial W^2}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b$$
(2.2)

по теории (В):

$$W = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b$$
(2.3)

по теории (А)

$$W = 0, \quad \varphi_1 = -\frac{5}{8} X_1, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{4}{5G} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b$$
(2.4)

а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки (1.1).

Следует отметить, что в случае $X_2 = 0$ обобщенное плоское напряженное состояние имеет нулевое решение.

Уравнения изгиба пластинки по теориям (К), (В), (А) имеют вид (1.8), (1.9) и (1.10), соответственно.

Уравнения изгиба в частном случае одномерной задачи имеют решения при условии (2.2), (2.3), (2.4), соответственно, по теориям (К), (В) и (А). Поэтому решения уравнений (1.8), (1.9), (1.10) в двумерном случае, по аналогии с задачей Надаи [5] будем искать по теории (К) при условии:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0$$
(2.5)

По теории (В) при условии:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta_1 = -\frac{\tau_0}{2G(\eta^2 + 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta_2 = 0$$
(2.6)

где $\eta = \frac{h\lambda}{\sqrt{3}}$

По теории (А) при условии:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1 = -\frac{5\lambda^2}{8\chi^2} \tau_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_2 = 0 \quad (2.7)$$

где принято обозначение:

$$\chi = h^{-1} \sqrt{\frac{5}{2}(1+\xi^2)}, \quad \xi = \sqrt{\frac{2}{5}} \lambda h.$$

Решения систем уравнений (1.8), (1.9) и (1.10), удовлетворяющие условиям (2.2), (2.3) и (2.4), представляются в виде:

по теории (К), (В), (А)

$$W = W_1(x) \sin \lambda y \quad (2.8)$$

по теории (В)

$$\theta_1 = \theta_{11}(x) \sin \lambda y, \quad \theta_2 = \theta_{21}(x) \cos \lambda y \quad (2.9)$$

по теории (А)

$$\varphi_1 = \varphi_{11}(x) \sin \lambda y, \quad \varphi_2 = \varphi_{21}(x) \cos \lambda y \quad (2.10)$$

Пусть на кромке $x = 0$ заданы условия жесткого закрепления:

по теории (К)

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

по теории (В)

$$W = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0 \quad (2.12)$$

по теории (А)

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{4}{5G} \varphi_1 = \frac{X_1}{2G}, \quad \varphi_2 = 0 \quad (2.13)$$

Удовлетворяя условиям (2.11), (2.12), (2.13), с учетом (2.1) и (2.8), (2.9), (2.10) получим решения задачи по теории (К):

$$W = 0 \quad (2.14)$$

по теории (В)

$$W = \frac{e^{-\lambda x} \chi \tau}{2G \left(1 + 2\eta^4(1+\theta) - 2\eta^3 \sqrt{1+\eta^2} (1+\theta) + \eta^2(3+2\theta) \right)} \sin \lambda y \quad (2.15)$$

по теории (А)

$$W = \frac{e^{-\lambda x} \chi \tau}{2G(1+\gamma)(1+\xi^2)} \sin \lambda y \quad (2.16)$$

$$\text{где } \gamma = \frac{4\xi^2}{1-\nu} \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \right)$$

Прогибы по теориям (В) и (А) при $h^2\lambda^2 \ll 1$ совпадают.

Имея формулы (2.15) и (2.16), можно вычислить расчетные величины:

по теории (В)

$$M_1(0, y) = \frac{4h\eta^2 \tau \sin \lambda y}{\lambda \left(1 + 2\eta^4(1+\theta) - 2\eta^3 \sqrt{1+\eta^2} (1+\theta) + \eta^2(3+2\theta) \right) (1-\nu)} \quad (2.17)$$

$$N_1(0, y) = \frac{h\tau \sin \lambda y}{1 + 2\eta^4(1+\theta) - 2\eta^3 \sqrt{1+\eta^2} (1+\theta) + \eta^2(3+2\theta)} \quad (2.18)$$

$$N_2(x, 0) = \frac{2 \left(e^{-x\lambda} - e^{-\frac{x\alpha}{h}} \right) h \eta^2 (1 + \theta) \tau}{1 + 2\eta^4 (1 + \theta) - 2\eta^3 \sqrt{1 + \eta^2 (1 + \theta)} + \eta^2 (3 + 2\theta)} \quad (2.19)$$

где $\alpha = \sqrt{3 + h^2 \lambda^2}$

по теории (А)

$$M_1(0, y) = \frac{10h\xi^2 \tau \sin \lambda y}{3\lambda(1 + \gamma)(1 + \xi^2)(1 - \nu)} \quad (2.20)$$

$$N_1(0, y) = \left(1 - \frac{5\xi^2}{6(1 + \xi^2)} \left(\frac{\gamma}{\xi^2(1 + \gamma)} + 1 \right) \right) h \tau \sin \lambda y \quad (2.21)$$

$$N_2(x, 0) = \frac{10h\xi^2 \tau (e^{-x\lambda} - e^{-x\gamma})}{3(1 + \gamma)(1 + \xi^2)(1 - \nu)} \quad (2.22)$$

При $h^2 \lambda^2 \ll 1$ по теориям (В) и (А) моменты и перерезывающие силы совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. // Изв.РАН. МТТ. 1998. №3. С.45-58.
3. Киракосян Р.М. К уточненной теории ортотропных пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. // Прикладная механика. 2008. Т.44. №4. С.107-119.
4. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел», посв. 80-летию акад. С.А.Амбарцумяна. Изд.НАН РА. Институт механики. Ереван. 2002. С.67-88.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 635 с.

Сведения об авторе:

Мартиросян Кристине Левоновна,
мл.научн.сотр. Института механики НАН РА
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б, тел: (+37410) 52-48-90
E-mail: kristin2004@inbox.ru

К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ПЛАСТИНКЕ

Мелконян А. В., Саркисян С. В.

Вопросам распространения волн посвящены многочисленные обзоры и работы. Задача о распространении волн в упругом слое, границы которого свободны от напряжений, была решена Рэлеем и Лэмбом [1]. Задачи магнитоупругих колебаний пластин рассмотрены в работах [5-7]. В настоящей работе рассмотрена пространственная задача распространения волн в изотропной упругой бесконечной пластинке. Для определения фазовой скорости волны получено дисперсионное уравнение. Задача исследована на основе гипотезы недеформируемых нормалей и по уточненной теории пластин. Рассмотрены предельные случаи: длина волны очень велика и очень мала по сравнению с толщиной пластинки. Проведены сравнения значений полученных фазовых скоростей.

1. Рассмотрим упругий слой толщиной $2h$, заключенный между плоскостями $z = \pm h$, свободными от напряжений. Пусть в этом слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c . Плоская продольная волна распространяется в бесконечном пространстве со скоростью c_1 , поперечная волна – со скоростью c_2 . В упругом слое скорость волны будет отличной от c_1 и c_2 . Ограничение упругого пространства двумя плоскостями вызывает возмущения, влияющие на изменение фазовой скорости и напряженного состояния.

Ниже мы рассмотрим пространственную задачу. Уравнение движения в перемещениях для слоя имеет вид [2]:

$$c_2^2 \Delta \vec{u} + (c_1^2 - c_2^2) \text{grad div } \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Согласно [2], введя Φ продольный и $\vec{\Psi}(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ поперечный потенциалы, для перемещений $u_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t)$ и $u_3(x, y, z, t)$ получим следующие соотношения:

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}; \quad u_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x}; \quad u_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получим:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \vec{\Psi} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

Ищем решение трехмерных волновых уравнений (1.3) в следующем виде:

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{i(k_1 x + k_2 y - c \sqrt{k_1^2 + k_2^2} t)} \Phi^*(z) \quad (1.4)$$

$$\vec{\Psi}(x, y, z, t) = e^{i(k_1 x + k_2 y - c \sqrt{k_1^2 + k_2^2} t)} \vec{\Psi}^*(z)$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получим дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi^*(z)}{dz^2} - n_1^2 \Phi^*(z) = 0; \quad \frac{d^2 \vec{\Psi}^*(z)}{dz^2} - n_2^2 \vec{\Psi}^*(z) = 0 \quad (1.5)$$

где

$$n_\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\alpha^2}; \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2; \quad \omega = kc; \quad \alpha = 1, 2$$

Решение уравнений (1.3) можно представить в виде:

$$\Phi = (A \text{sh } v_1 z + B \text{ch } v_1 z) e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} \quad (1.6)$$

$$\vec{\Psi} = (\vec{C} \text{sh } v_2 z + \vec{D} \text{ch } v_2 z) e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$$

где $A, B, \vec{C}(C_1, C_2, C_3), \vec{D}(D_1, D_2, D_3)$ – неизвестные постоянные.

С помощью закона Гука [2] и (1.2) для напряжений получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z} \right) + \lambda \Delta \Phi \\ \sigma_{22} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \Delta \Phi \\ \sigma_{33} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y \partial z} \right) + \lambda \Delta \Phi \\ \sigma_{12} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{13} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_{23} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} \right)\end{aligned}\quad (1.7)$$

Плоскости $z = \pm h$ свободны от напряжений, следовательно, граничные условия представляются в виде:

$$\sigma_{13}(x, y, \pm h, t) = 0; \quad \sigma_{23}(x, y, \pm h, t) = 0; \quad \sigma_{33}(x, y, \pm h, t) = 0 \quad (1.8)$$

Подставляя (1.6) в (1.7), с учетом граничных условий (1.8) получим систему восьми линейных однородных уравнений, содержащих постоянные $A, B, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$.

Приравнивание определителя этой системы уравнений нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях $\rho, \mu, \lambda, \omega$ можно найти фазовую скорость c .

Из этого характеристического уравнения получим следующую совокупность уравнений:

$$\begin{cases} 4(k_1^2 + k_2^2)\mu v_1 v_2 \operatorname{ch} v_2 h \operatorname{sh} v_1 h + ((k_1^2 + k_2^2)\lambda - (\lambda + 2\mu)v_1^2)(k_1^2 + k_2^2 + v_2^2) \operatorname{ch} v_1 h \operatorname{sh} v_2 h = 0 \\ ((k_1^2 + k_2^2)\lambda - (\lambda + 2\mu)v_1^2)(k_1^2 + k_2^2 + v_2^2) \operatorname{ch} v_2 h \operatorname{sh} v_1 h + 4(k_1^2 + k_2^2)\mu v_1 v_2 \operatorname{ch} v_1 h \operatorname{sh} v_2 h = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Из первого уравнения (1.9) получим:

$$\frac{\operatorname{th} v_1 h}{\operatorname{th} v_2 h} = \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{4\beta_1 \beta_2}; \quad \beta_\alpha = \frac{v_\alpha}{k}; \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.10)$$

Если длина волны $l = 2\pi / k$ очень велика по сравнению с толщиной слоя $2h$, то величины $n_1 h$ и $n_2 h$ будут малы при конечном значении c . Заменяя в уравнении (1.10) гиперболические тангенсы их аргументами, получим:

$$c = \frac{2c_2}{c_1} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \quad (1.11)$$

Из второго уравнения (1.9) будем иметь:

$$\frac{\operatorname{th} v_1 h}{\operatorname{th} v_2 h} = \frac{4\beta_1 \beta_2}{(1 + \beta_2^2)^2} \quad (1.12)$$

Рассмотрим и здесь предельный случай. Длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя и для которого $c < c_2 < c_1$. Разлагая гиперболические тангенсы в ряд и сохраняя три члена ряда, после некоторых преобразований получим:

$$\frac{c^2}{c_2^2} = \frac{4}{3}(kh)^2 \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) \quad (1.13)$$

Из уравнений (1.10) и (1.12) в случае, когда длина волны $l = 2\pi/k$ очень мала по сравнению с толщиной пластинки, величины $n_1 h$ и $n_2 h$ очень велики и отношение гиперболических тангенсов в левой части этих уравнений можно принять равным единице. В этом предельном случае получаем характеристическое уравнение для поверхностных волн Рэлея [1–2]:

$$R(\eta) \equiv (2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \eta)(1 - \theta\eta)} = 0 \quad (1.14)$$

где

$$\eta = \frac{c^2}{c_2^2}; \quad \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2}$$

2. Теперь эту же задачу рассмотрим на основе гипотезы недеформируемых нормалей [3], согласно которой принимается:

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

Осредняя по толщине пластинки уравнения движения в напряжениях так, как это делается в теории пластин [3], получим следующие уравнения движения пластинки в перемещениях срединной плоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Delta \Delta w + \frac{3\rho(1-\nu^2)}{Eh^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Представляя решение уравнений (2.1) в виде:

$$u(x, y, t) = u_0 e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}, \quad v(x, y, t) = v_0 e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}, \quad u_0, v_0 = \text{const} \quad (2.3)$$

получим следующее уравнение:

$$\gamma c^4 + \xi c^2 + \zeta = 0; \quad \gamma = \frac{2\rho^2(1-\nu^2)(1+\nu)}{E^2}; \quad \xi = -\frac{\rho(1+\nu)(3-\nu)}{E}; \quad \zeta = 1 \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.4) следует, что фазовая скорость продольных колебаний имеет следующий вид:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (2.5)$$

Перейдем к определению фазовой скорости поперечных колебаний. Представим решение уравнения (2.2) в виде:

$$w(x, y, t) = w_0 e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}, \quad w_0 = \text{const}. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнение (2.2), для фазовой скорости поперечных колебаний получим:

$$c^2 = \frac{Eh^2(k_1^2 + k_2^2)}{3\rho(1-\nu^2)} \quad (2.7)$$

3. Теперь исследуем эту же задачу на основе гипотезы уточненной теории пластин [3], согласно которой принимается:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z}{2G} \left(h^2 - \frac{z^2}{3} \right) \varphi(x, y, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{z}{2G} \left(h^2 - \frac{z^2}{3} \right) \psi(x, y, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В этом случае из уравнений движения получаем уравнения, определяющие планарные колебания пластинки (уравнения (2.1)) и систему уравнений для определения фазовой скорости поперечных колебаний пластинки [3]. Данную систему уравнений исключением функций $\varphi(x, y, t)$ и $\psi(x, y, t)$ можно свести к одному уравнению относительно прогиба $w(x, y, t)$ [4]:

$$\Delta \Delta w - \frac{\rho(17-5\nu)(1+\nu)}{5E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta w) + \frac{3\rho(1-\nu^2)}{Eh^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{6\rho^2(1-\nu^2)}{5GE} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (3.2)$$

Решение (3.2) представляя в виде (2.6) и пренебрегая инерционными членами, обусловленными поперечными сдвигами, для фазовой скорости получим:

$$c^2 = \frac{5E(kh)^2}{\rho(17-5\nu)(1+\nu)} \cdot \left(\frac{17-5\nu}{15(1-\nu)} - \left(\frac{17-5\nu}{15(1-\nu)} \right)^2 (kh)^2 \right) \quad (3.3)$$

Сравнивая значения фазовых скоростей, полученных на основе гипотезы недеформируемых нормалей и гипотезы уточненной теории пластин ((2.5), (2.7) и (3.3)) со значениями полученных на основе точного решения (1.11) и (1.13)), замечаем, что эти значения совпадают. Отметим, что в общем случае точные значения фазовых скоростей продольных и поперечных колебаний пластинки следует определить из уравнений (1.10) и (1.12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA, vol. 93, 1917.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
4. Белубекян М. В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: „Проблемы механики тонких деформируемых тел, посв. 80-летию акад. С.А.Амбарцумяна. Изд. НАН Армении, Ин-т механики, Ереван, 2002, с. 67-88.
5. Саркисян С.В. К задаче распространения магнитоупругих волн в пластине. /Тр. 14-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 1987. Т. 2. С.400 – 405.
6. Багдоев А. Г., Варданян А. В., Варданян С. В. // Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. № 3.
7. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate, Journal of Applied Mechanics, Transaction ASME, USA, November 2007, vol.74, p.1071-1077.

Сведения об авторах:

Мелконян Аветик Варданович – аспирант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 10) 63 06 92, (374 91) 31 50 57
E-mail av.mlk@inbox.ru

Саркисян Самвел Владимирович – доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики
(374 10) 61 17 78, (374 91) 38 43 67
E-mail vas@ysu.am

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ БАЛОК С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Микаелян А. О.

Рассматривается консольная балка, сжатая на свободном конце нагрузкой, а другой конец шарнирно закреплён. Предполагается, что на свободном конце применяется также сосредоточенная масса. Ещё рассматриваются случаи при наличии трения.

Рассматриваются задачи устойчивости с сосредоточенной массой консольной балки, сжатая на свободном конце нагрузкой P , когда

1. Направление нагрузки неизменяемое (консервативное).

Уравнение устойчивости балки принимается в виде

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (1.1)$$

т.е. предполагается, что в реальном уравнении устойчивости пренебрегаются инерционный член и силы от внутреннего и внешнего трения.

В рассматриваемой задаче граничные условия принимаются в виде

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \text{или} \quad x = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \text{или} \quad x = l. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), имеет вид

$$W = c[\sin \alpha x - \alpha x - \operatorname{tg} \alpha l (\cos \alpha x - 1)] e^{i \omega t}, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI}, \quad (1.4)$$

c – произвольная постоянная.

а) Пусть на конце $x = l$, кроме условия (1.3), задано также условие относительно перерезывающей силы [1]

$$EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + P \frac{\partial W}{\partial x} = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.4) в (1.5), получаем следующее выражение для решения частоты колебаний

$$\beta^2 \omega^2 \sin \alpha l - \alpha (l \beta^2 \omega^2 + \alpha^2) \cos \alpha l = 0, \quad \beta^2 = \frac{m}{EI}. \quad (1.6)$$

При $m = 0$ имеем задачу Эйлера.

Очевидно, что минимальная критическая нагрузка, приводящая к дивергентной ($\omega = 0$) неустойчивости, будет [2]

$$\alpha = \frac{\pi}{2l} \quad \text{или} \quad P_{кр}^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} EI. \quad (1.7)$$

Из уравнения (1.6) получаем

$$\omega = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\alpha^3 \cos \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}} . \quad (1.8)$$

В случае отсутствия нагрузки ($\alpha = 0$) из (1.8) получаем частоты колебаний балки при наличии затухания

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{3}{l^3}} . \quad (1.9)$$

Из (1.8) следует, что условие устойчивости нарушается при перемене знака функции

$$g_1(\alpha l) = \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l . \quad (1.10)$$

Функция $g_1(\alpha l)$ меняет знак при

$$\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l = 0 .$$

Тогда минимальная критическая нагрузка, приводящая к флаттерной ($\omega \rightarrow \infty$) неустойчивости, будет

$$\alpha = \frac{3\pi}{2l} \quad \text{или} \quad P_{кр}^{\Phi} = \frac{9\pi^2}{4l^2} EI . \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что критическая нагрузка дивергентной неустойчивости намного меньше флаттерной $P_{кр}^{\pi} < P_{кр}^{\Phi}$.

б) Пусть на конце балки $x = l$ вместо условия (1.5) имеем следующее условие [3]:

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + P \frac{\partial W}{\partial x} = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \delta_1 \frac{\partial W}{\partial t} , \quad (1.12)$$

где δ_1 — коэффициент трения.

Подставляя (1.4) в (1.12), получаем следующее выражение:

$$\omega^2 - \frac{i\varepsilon_1}{\beta^2} \omega - \frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha^3 \cos \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} = 0 , \quad \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{EI} . \quad (1.13)$$

Очевидно, что минимальная критическая нагрузка, приводящая к дивергентной ($\omega = 0$) неустойчивости, будет

$$\alpha = \frac{\pi}{2l} \quad \text{или} \quad P_{кр}^{\pi} = \frac{\pi^2}{4l^2} EI . \quad (1.14)$$

Решения уравнения (1.13) будут

$$\omega = \frac{i\varepsilon_1}{2\beta^2} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha^3 \cos \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} - \frac{\varepsilon_1^2}{4\beta^4}} . \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega = \frac{i\varepsilon_1}{2\beta^2} \pm \sqrt{\frac{3}{\beta^2 l^3} - \frac{\varepsilon_1^2}{4\beta^4}} , \quad \operatorname{Im} \omega > 0 . \quad (1.16)$$

При отсутствии трения ($\varepsilon_1 = 0$) из (1.15) получим

$$\omega = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\alpha^3 \cos \alpha l}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}} \quad , \quad (1.17)$$

т.е. получаем предыдущий а) случай, который уже исследовали.

С учетом (1.16) из (1.15) следует, что условие устойчивости будет нарушено при перемене знака функции

$$f_1(\alpha l) = \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l \quad . \quad (1.18)$$

Очевидно, что минимальная критическая нагрузка, приводящая к флаттерной ($\omega \rightarrow \infty$) неустойчивости, будет

$$\alpha = \frac{3\pi}{2l} \quad \text{или} \quad P_{кр}^{\Phi} = \frac{9\pi^2}{4l^2} EI \quad . \quad (1.19)$$

Таким образом, опять получили, что критическая нагрузка дивергентной неустойчивости намного меньше флаттерной $P_{кр}^{\alpha} < P_{кр}^{\Phi}$, и в этом случае трение не влияет на критические нагрузки дивергентной и флаттерной неустойчивости.

2. Нагрузка следящая (неконсервативная).

Уравнение устойчивости балки принимается в виде

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

т.е. предполагается, как и в случае 1, в реальном уравнении устойчивости пренебрегаются инерционный член и силы от внутреннего и внешнего трения.

В рассматриваемой задаче граничные условия принимаются в виде (1.2) и (1.3).

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), снова имеет вид (1.4).

в) Пусть на конце $x = l$ кроме условия (1.3) задано также условие относительно перерезывающей силы

$$EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad . \quad (2.2)$$

Подставляя (1.4) в (2.2), получаем следующее выражение:

$$\beta^2 \omega^2 \sin \alpha l - \alpha l \beta^2 \omega^2 \cos \alpha l = \alpha^3 \quad (2.3)$$

При $\omega = 0 \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{кр}^{\alpha} = 0 \quad ,$

т.е. система является устойчивой.

Из уравнения (2.3) получаем

$$\omega = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\alpha^3}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}} \quad . \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{3}{l^3}} . \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует, что условие устойчивости нарушается при перемене знака функции

$$g_2(\alpha l) = \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l \quad (2.6)$$

Тогда минимальная критическая нагрузка, приводящая к флаттерной ($\omega \rightarrow \infty$) неустойчивости, будет

$$\alpha = \frac{3\pi}{2l} \quad \text{или} \quad P_{кр}^f = \frac{9\pi^2}{4l^2} EI . \quad (2.7)$$

В этом случае дивергентная неустойчивость не имеет места, т.е. балка не может иметь другой формы равновесия кроме прямолинейной.

г) Пусть на конце балки $x = l$ вместо условия (2.2) имеем следующее условие:

$$EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \delta_1 \frac{\partial W}{\partial t} . \quad (2.8)$$

Подставляя (1.4) в (2.8), получаем следующее выражение:

$$\omega^2 - \frac{i\varepsilon_1}{\beta^2} \omega - \frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha^3}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} = 0 . \quad (2.9)$$

Минимальная критическая нагрузка, приводящая к дивергентной ($\omega = 0$) неустойчивости, будет

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad P_{кр}^a = 0 . \quad (2.10)$$

Решения уравнения (2.9) будут

$$\omega = \frac{i\varepsilon_1}{2\beta^2} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2} \frac{\alpha^3}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l} - \frac{\varepsilon_1^2}{4\beta^4}} . \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega = \frac{i\varepsilon_1}{2\beta^2} \pm \sqrt{\frac{3}{\beta^2 l^3} - \frac{\varepsilon_1^2}{4\beta^4}} , \quad \text{Im} \omega > 0 . \quad (2.12)$$

При отсутствии трения ($\varepsilon_1 = 0$) из (2.11) получим

$$\omega = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\alpha^3}{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}} , \quad (2.13)$$

т.е. получаем предыдущий в) случай, который был исследован В.В. Болотиным в работе [1].

С учетом (2.12) из (2.11) следует, что условие устойчивости будет нарушено при перемене знака функции

$$f_2(\alpha l) = \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l . \quad (2.14)$$

Очевидно, что минимальная критическая нагрузка, приводящая к флаттерной ($\omega \rightarrow \infty$) неустойчивости, будет

$$\alpha = \frac{3\pi}{2l} \quad \text{или} \quad P_{кр}^{\Phi} = \frac{9\pi^2}{4l^2} EI \quad . \quad (2.15)$$

В этом случае вновь получили, что дивергентная неустойчивость не имеет места, и нетрудно заметить, что трение не влияет на критическую нагрузку флаттерной неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит., 1961. 360с.
2. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкции. М.: Мир, 1971. 192с.
3. Белубекян М.В., Казарян К.Б., Мартиросян С.Р. Модельные задачи учета трения для консольной балки со следящей нагрузкой. // Докл. НАН РА. 2007. Т.107. № 2. С.167-172.

Сведения об авторе:

Микаелян Асмик Овиковна

Ереванский государственный университет, Магистратура, I курс

Тел. (077) 03-63-49

E-mail: hasomik@mail.ru

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ И СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМИ КРУГОВЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Мирзоян Е.С., Мирзоян С.Е.

Рассматривается задача о напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с круговым отверстием, когда на бесконечности пластина в горизонтальном направлении растягивается равномерно распределенными растягивающими силами, а пластина на обводе кругового отверстия усилена двумя одинаковыми и симметрично расположенными абсолютно жесткими тонкими круговыми стрингерами. Требуется определить законы распределения контактных напряжений под стрингерами, меру их взаимного жесткого сближения, а также концентрацию окружных нормальных напряжений в вертикальном сечении пластины. Эта контактная задача описывается интегральным уравнением Фредгольма первого рода с эрмитовым ядром, которое при помощи математического аппарата многочленов Якоби сводится к регулярной бесконечной системе. Проведен численный анализ задачи.

Пусть в полярной системе координат (r, ϑ) имеем упругую бесконечную пластину с круговым отверстием радиуса R , причем полюс помещен в центре отверстия. Пусть далее на бесконечности пластина в горизонтальном направлении растягивается равномерно распределенными растягивающими силами q , а пластина на обводе кругового отверстия $r = R$ усилена двумя одинаковыми и симметрично расположенными по участкам $L = (-\pi + \alpha, -\alpha) \cup (\alpha, \pi - \alpha)$ абсолютно жесткими тонкими круговыми стрингерами. Требуется определить законы распределения контактных напряжений под стрингерами, меру их взаимного жесткого сближения, а также концентрацию окружных нормальных напряжений в вертикальном сечении пластины.

Как известно, компоненты смещений граничных точек плоскости с круговым отверстием выражаются формулами [1,2]

$$W(\vartheta) = u_r(R, \vartheta) + iu_\vartheta(R, \vartheta) = \frac{q}{4\mu}(\kappa + 1)Re^{-2i\vartheta} + \frac{q}{8\mu}(\kappa + 1)R - \frac{R(\kappa + 1)}{4\pi\mu} \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(\varphi)e^{-i(\vartheta - \varphi)} \ln \left| 2 \sin \frac{\vartheta - \varphi}{2} \right| d\varphi - \frac{iR(\kappa - 1)}{8\pi\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(\varphi)e^{-i(\vartheta - \varphi)} (\pi - |\vartheta - \varphi|) \operatorname{sgn}(\vartheta - \varphi) d\varphi, \quad (1) \\ (-\pi < \vartheta \leq \pi)$$

где

$$\tilde{X}(\varphi) = T(\varphi) + i\Sigma(\varphi) \quad (-\pi < \varphi < \pi), \quad \kappa = 3 - 4\nu \\ -\sigma_r|_{r=R} = T(\varphi) = \begin{cases} \sigma(\varphi), & \varphi \in L \\ 0, & \varphi \in L' \end{cases} \quad -\sigma_{r\varphi}|_{r=R} = \Sigma(\varphi) = \begin{cases} \tau(\varphi), & \varphi \in L \\ 0, & \varphi \in L' \end{cases}$$

Положим

$$L_1 = (-\pi + \alpha, -\alpha) \quad L_2 = (\alpha, \pi - \alpha) \quad L' = (-\pi, \pi) \setminus L.$$

Вследствие симметрии стрингеры могут иметь только абсолютно жесткое перемещение (угол поворота стрингера равен нулю). Умножая обе части равенства (1) на $e^{i\vartheta}$ и учитывая, что перемещение на обводе отверстия пластины под стрингерами [3]

$$W(\vartheta)e^{i\vartheta} = i\beta \operatorname{sgn} \vartheta,$$

где β – вертикальное жесткое перемещение стрингера, то из равенства (1) для определения комплексной комбинации контактных напряжений под стрингерами получим следующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода с эрмитовым ядром:

$$\frac{R(\kappa+1)}{4\pi\mu} \int_L \left[\ln \left| 2 \sin \frac{\vartheta - \varphi}{2} \right| + i \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{2} (\pi - |\vartheta - \varphi|) \operatorname{sgn}(\vartheta - \varphi) \right] \tilde{X}(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi = \frac{q}{4\mu} (\kappa+1) R e^{-i\vartheta} +$$

$$+ \frac{q}{8\mu} (\kappa+1) R e^{i\vartheta} - i\beta \operatorname{sgn} \vartheta \quad (2)$$

При этом решение уравнения (2) должно удовлетворять условиям

$$\int_{L_i} \tilde{X}(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi = 0, \quad \operatorname{Im} \int_{L_i} \tilde{X}(\varphi) d\varphi = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3a, b)$$

Здесь (3a,b) представляет собой условия равновесия стрингера. Так как задача симметрична, то очевидно, что радиальное напряжение $T(\varphi)$ – четная функция, а нормальное напряжение $\Sigma(j)$ – нечетная функция. И, следовательно, условие (3b) удовлетворяется автоматически.

Теперь в уравнении (2) перейдя к новым переменным $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ и сопряженным величинам, обнаружим, что функция $X(\varphi)$ должна удовлетворять условию

$$X(\varphi) = \overline{X(-\varphi)}, \quad \left(X(\varphi) = \frac{\tilde{X}(\varphi)}{\mu} \right). \quad (4)$$

Интегралы левой части уравнения (2) можно преобразовать в интервал $(\alpha, \pi - \alpha)$, и тогда оно примет вид:

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} K_{11}(\vartheta, \varphi) X_1(\varphi) d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} K_{12}(\vartheta, \varphi) \overline{X_1(\varphi)} d\varphi = f(\vartheta) - i \frac{\beta}{R} \frac{4\pi}{\kappa+1} \operatorname{sgn} \vartheta, \quad (\vartheta \in L) \quad (5)$$

где введены обозначения:

$$K_{11}(\vartheta, \varphi) = \ln \left| 2 \sin \frac{\vartheta - \varphi}{2} \right| + i \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{2} (\pi - |\vartheta - \varphi|) \operatorname{sgn}(\vartheta - \varphi)$$

$$K_{12}(\vartheta, \varphi) = \ln \left| 2 \sin \frac{\vartheta + \varphi}{2} \right| + i \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{2} (\pi - |\vartheta + \varphi|) \operatorname{sgn}(\vartheta + \varphi)$$

$$X_1(\varphi) = X(\varphi) e^{i\varphi}, \quad f(\vartheta) = \frac{\pi q}{2\mu} (2e^{-i\vartheta} + e^{i\vartheta})$$

Рассмотрим ключевое уравнение (5) при $\vartheta \in (\alpha, \pi - \alpha)$. Чтобы интервал был симметричным, перейдем к новым переменным

$$\vartheta = \pi/2 + \vartheta', \quad \varphi = \pi/2 + \varphi',$$

в результате чего придем к интервалу $(-c, c)$, причем введено обозначение

$$X_1^*(\varphi') = X_1(\pi/2 + \varphi'), \quad c = \pi/2 - \alpha.$$

Наконец, перейдем к интервалу $(-1, 1)$, положив

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} = \xi \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} = \tau \operatorname{tg} \frac{c}{2}; \quad \tilde{X}_1^*(\tau) = X_1^*(2 \operatorname{arctg}(\tau \operatorname{tg}(c/2))) \frac{2 \operatorname{tg}(c/2)}{1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2(c/2)}.$$

Тогда условие (3a) преобразуется к виду

$$\int_{-1}^1 \tilde{X}_1^*(\tau) d\tau = 0 \quad (6)$$

В результате, для определения функции $\tilde{X}_1^*(\tau)$ получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
& i\pi \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \int_{-1}^1 \left[\frac{\operatorname{sgn}(\xi-\tau)}{2} + i \frac{1}{\pi} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \ln \frac{1}{|\xi-\tau|} \right] \tilde{X}_1^*(\tau) d\tau = -i \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \int_{-1}^1 \operatorname{arctg} \left(\tau \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right) \tilde{X}_1^*(\tau) d\tau + \tilde{f}^*(\xi) - \\
& - \int_{-1}^1 \left\{ \ln \left[2 \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\xi \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\tau \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right) \right] \right\} - i \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \operatorname{arctg} \left(\tau \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right) \right\} \overline{\tilde{X}_1^*(\tau)} d\tau + \\
& + \int_{-1}^1 \ln \sqrt{1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}} \tilde{X}_1^*(\tau) d\tau - i \frac{\beta}{R} \frac{4\pi}{\kappa+1}
\end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\tilde{f}^*(\xi) = -i \frac{\pi}{2} \frac{q}{\mu} \left(\frac{1 - \xi^2 \operatorname{tg}^2(c/2)}{1 + \xi^2 \operatorname{tg}^2(c/2)} - 6i \frac{\xi \operatorname{tg}(c/2)}{1 + \xi^2 \operatorname{tg}^2(c/2)} \right)$$

При этом, соотношение (4) перейдет в соотношение

$$\overline{\tilde{X}_1^*(t)} = -\tilde{X}_1^*(-t) \quad (8)$$

Приступив к решению определяющего интегрального уравнения (7), его решение представим бесконечным рядом [4,5]

$$\tilde{X}_1^*(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{P_m^\gamma(\tau)}{\varphi_\gamma(\tau)} \quad (9)$$

где

$$2\mu_0 = \pi \sec(\pi\gamma) - 2 \csc(\pi\gamma) [\ln 2 + \psi(0.5 + \gamma) - \psi(1)], \quad \mu_m = [m \sin(\pi\gamma)]^{-1} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$P_m^\gamma(x) = P_m^{\gamma-0.5, -\gamma-0.5}(x), \quad \varphi_\gamma(x) = (1-x)^{-\gamma+0.5} (1+x)^{\gamma+0.5},$$

а $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Здесь $P_m^{\alpha, \beta}(x)$ – многочлены Якоби, а $\psi(\delta)$ – пси-функция Эйлера [6].

Подставляя (9) в (7) и воспользовавшись известным интегральным соотношением [5]

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{\operatorname{sgn}(\xi-\tau)}{2} + \frac{\operatorname{ctg}(\pi\gamma)}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi-\tau|} \right] \frac{P_m^\gamma(\tau)}{\varphi_\gamma(\tau)} d\tau = \mu_m P_m^{-\gamma}(\xi) \quad \left(\begin{array}{l} |\xi| < 1; |\operatorname{Re} \gamma| < 0.5 \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \quad (10)$$

где

$$\operatorname{ctg}(\pi\gamma) = i \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \quad \gamma = -i \frac{\ln \kappa}{2\pi} \quad \varepsilon = \frac{\ln \kappa}{2\pi} \quad \gamma = -i\varepsilon,$$

придем к равенству

$$i\pi \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \mu_m P_m^{-\gamma}(\xi) = -i \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m C_m + \sum_{m=0}^{\infty} A_m D_m + \tilde{f}^*(\xi) - \sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_m} E_m(\xi) - i \frac{\beta}{R} \frac{4\pi}{\kappa+1} \quad (11)$$

где

$$C_m = \int_{-1}^1 \operatorname{arctg} \left(\tau \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right) \frac{P_m^\gamma(\tau)}{\varphi_\gamma(\tau)} d\tau, \quad D_m = \int_{-1}^1 \ln \sqrt{1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2}} \frac{P_m^\gamma(\tau)}{\varphi_\gamma(\tau)} d\tau$$

$$E_m(\xi) = \int_{-1}^1 \left\{ \ln \frac{1 - \tau \xi \operatorname{tg}^2(c/2)}{\sqrt{1 + \tau^2 \operatorname{tg}^2(c/2)}} - i \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \operatorname{arctg} \left(\tau \operatorname{tg} \frac{c}{2} \right) \right\} \frac{\overline{P_m^\gamma(\tau)}}{\varphi_\gamma(\tau)} d\tau$$

Теперь умножая обе части уравнения (11) и (6) на $\frac{P_n^{-\gamma}(\xi)}{\Phi_{-\gamma}(\xi)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), а затем проинтегрируя в интервале $(-1, 1)$, с учетом соотношений [5-8]

$$\int_{-1}^1 P_n^{\gamma}(\tau) \frac{P_m^{\gamma}(\tau)}{\Phi_{\gamma}(\tau)} d\tau = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi \sec(\pi\gamma), & m = n = 0 \\ (m!^2 2)^{-1} \Gamma(m + \gamma + 0.5) \Gamma(m - \gamma + 0.5), & m = n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{P_m^{\gamma}(\tau)}{\Phi_{\gamma}(\tau)} d\tau = \begin{cases} 0, & m = 1, 2, \dots \\ h = \pi \sec(\pi\gamma), & m = 0 \end{cases}$$

получим, что $A_0 = 0$, а относительно остальных коэффициентов A_m ($m = 1, 2, \dots$) получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} G_n A_n + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} e_{mn} = f_n & (n = 1, 2, \dots) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left(i \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} C_m - D_m \right) A_m h + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} e_{m0} = f_0 - i \frac{\beta}{R} \frac{4\pi}{\kappa + 1} h \end{cases} \quad (13)$$

где

$$e_{mn} = \int_{-1}^1 E_m(\xi) \frac{P_n^{-\gamma}(\xi)}{\Phi_{-\gamma}(\xi)} d\xi, \quad f_n = \int_{-1}^1 \tilde{f}^*(\xi) \frac{P_n^{-\gamma}(\xi)}{\Phi_{-\gamma}(\xi)} d\xi$$

$$G_n = i\pi \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m + \gamma + 0.5) \Gamma(m - \gamma + 0.5)}{(n!)^2 n \sin(\pi\gamma)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Из выражения (8) при помощи (9) и (12) следует зависимость между неизвестными коэффициентами

$$A_m = (-1)^{m+1} \overline{A_m}.$$

Следовательно, система (13) примет вид

$$G_n A_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} A_m e_{mn} = f_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$i \frac{\beta}{R} \frac{4\pi}{\kappa + 1} = \frac{f_0}{h} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(i \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} C_m - D_m \right) A_m - \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} e_{m0} A_m \quad (14)$$

Из второго уравнения системы (13) определяется β – мера взаимного жесткого сближения стрингеров. Первое уравнение (14) является бесконечной системой линейных алгебраических уравнений. Доказано, что бесконечная система из (14) является регулярной системой, и, следовательно, ее решение с большой точностью можно получить методом редукции.

Проведен численный анализ задачи. В результате вычислены коэффициенты C_m, D_m, e_{mn}, f_n при различных значениях угла раствора стрингеров α и принято $n = 0.3$. И при этом для вычисления интегралов использована квадратурная формула Гаусса [9]

$$\int_{-1}^1 f(x)(1-x)^{-0.5-i\varepsilon} (1+x)^{-0.5+i\varepsilon} dx \approx \frac{B\pi}{\cos(i\pi\varepsilon)} + \frac{2Ai\pi\varepsilon}{\cos(i\pi\varepsilon)} + \\ + \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M [f(x) - Ax - B](1-x)^{-0.5-i\varepsilon} (1+x)^{-0.5+i\varepsilon} \Big|_{x=\cos \frac{2m-1}{2M}\pi}$$

где

$$A = \frac{f(1) - f(-1)}{2}, \quad B = \frac{f(1) + f(-1)}{2}.$$

Вычислены также характерные величины β и $\sigma_9|_{\vartheta=\pi/2}$ и изучены закономерности их изменений.

В заключение отметим, что можно рассмотреть также вопрос о точном решении уравнения (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзоян Е.С. Взаимодействие тонких абсолютно жестких прямолинейных и круговых включений и штампов с массивными упруго-ползучими телами. //Кандидатская диссертация. Ереван. 2007. 122 с.
2. Торосян Ф.С. Исследование некоторых задач о контактном взаимодействии двух цилиндрических и сферических тел близких радиусов между собой и с тонкостенными элементами. // Кандидатская диссертация . Ереван. 1982. 152 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1973. 674 с.
4. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-36.
5. Попов Г.Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. // ПММ. 1966. Т.30. Вып. 2. С.551-563.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. М.: Физматгиз, 1962.
7. Карпенко Л.Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. //ПММ. 1966. Т.30. Вып. 3. С.564-569.
8. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500с.
9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

Сведения об авторах

Езник Саакович Мирзоян – канд. физ.-мат. наук, преподаватель ЕГУ, научный сотрудник, mirzoyan@ysu.am

Саак Езникович Мирзоян – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН РА

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО КЛИНА, СОДЕРЖАЩЕГО НА ЛИНИИ СПАЯ СИСТЕМУ ЩЕЛЕЙ И АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ
Мкртчян М.М.

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного клина при антиплоской деформации, грани которого нагружены распределенными тангенциальными силами, а на горизонтальной линии спая разнородных материалов расположена система из произвольного конечного числа трещин и абсолютно жестких тонких включений. Аналогичная задача рассмотрена в [1], укажем также на работу [2].

1. Пусть, отнесенный к цилиндрической системе координат rJz кусочно-однородный упругий клин состоит из двух областей $\Omega_a = \{-\infty < z < \infty, 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq J \leq a\}$ с модулем сдвига G_+ и $\Omega_b = \{-\infty < z < \infty, 0 \leq r \leq \infty, -b \leq J \leq 0\}$ с модулем сдвига G_- , и в плоскости $J = 0$ содержит систему из произвольного конечного числа сквозных трещин и тонких абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости rJ составляют соответственно, систему интервалов L_1 и L_2 :

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \quad 0 < a_k < b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_1); \quad b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \quad 0 < c_k < d_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_2); \quad d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1}) \quad L = L_1 \cup L_2.$$

Пусть, далее, грани клиньев нагружены распределенными тангенциальными силами произвольных интенсивностей $t_{Jz}|_{J=a} = f_+(r); t_{Jz}|_{J=-b} = f_-(r) \quad (0 < r < \infty)$, кроме того, берега трещин также нагружены силами с заданными интенсивностями $t_{Jz}|_{J=\pm 0} = -t_{\pm}^{(1)}(r) \quad (r \in L_1)$, а на систему включений L_2 действуют силы с равнодействующими P_k , направленные вдоль оси Oz и вызывающие продольный сдвиг упругого клина в направлении оси Oz с базовой плоскостью rJ .

Требуется определить плотность дислокаций смещений на берегах трещин, скачков напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородный упругий клин вдоль оси Or разрежем на две части, а затем для действующих на их гранях $J = \pm 0$ напряжений введем следующие обозначения ($L' = R_+ \setminus L; R_+ = (0, \infty)$):

$$-t_{Jz}|_{J=+0} = T_+(r) = \begin{cases} t_+^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ t_+^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ t(r) & (r \in L'); \end{cases} \quad -t_{Jz}|_{J=-0} = T_-(r) = \begin{cases} t_-^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ t_-^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ t(r) & (r \in L'). \end{cases} \quad (1)$$

На системе включений L_2 смещения постоянны:

$$u_z^+(r, J)|_{J=+0} = u_z^-(r, J)|_{J=-0} = d_k = \text{const}; \quad r \in (c_k, d_k) \quad (k = \overline{1, N_2}). \quad (2)$$

Запишем также граничные условия на $J = a, J = -b$:

$$t_{Jz}|_{J=a} = G_+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^+}{\partial J} \bigg|_{J=a} = f_+(r); \quad t_{Jz}|_{J=-b} = G_- \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^-}{\partial J} \bigg|_{J=-b} = f_-(r) \quad (0 < r < \infty) \quad (3)$$

где $u_z^{\pm}(r, J)$ – смещения точек, соответствующих клиням Ω_a и Ω_b , которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{\partial^2 u_z^\pm(r, J)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^\pm(r, J)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^\pm(r, J)}{\partial J^2} = 0. \quad (4)$$

Далее введем в рассмотрение следующие величины:

$$\begin{aligned} \Omega(r) &= T_+(r) + T_-(r); \quad h(r) = \frac{du_z^+(r, +0)}{dr} + \frac{du_z^-(r, -0)}{dr}; \\ c(r) &= T_+(r) - T_-(r) = \begin{cases} y(r) & (r \in L_2); \\ t_+^{(1)}(r) - t_-^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ 0 & (r \in L'), \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

а также плотность дислокаций смещений

$$w(r) = \frac{du_z^+(r, +0)}{dr} - \frac{du_z^-(r, -0)}{dr} = \begin{cases} j(r) & (r \in L_1); \\ 0 & (r \in R_+/L_1). \end{cases} \quad (6)$$

Теперь с помощью прямого и обратного преобразования Меллина [3] по переменной r , из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) с учетом обозначений (5)-(6), аналогично [4], придем к системе ключевых уравнений задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{w(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) w(r_0) dr_0 - \frac{G_+ - G_-}{2G_+ G_-} r \chi(r) - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 = - \frac{G_+ + G_-}{2G_+ G_-} r \Omega(r) - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_0^\infty F_+ \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_-} \int_0^\infty F_- \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_-(r_0) dr_0; \quad (r \in R_+) \\ & - \frac{G_+ + G_-}{2} r w(r) - \frac{G_+ G_-}{\pi} \int_{L_1} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) w(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\chi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\chi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} Q \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} Q \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 - \frac{G_+ + G_-}{2(\alpha G_+ + \beta G_-)} \int_{L_1} \chi(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{2(\alpha G_+ + \beta G_-)} \int_{L_2} \chi(r_0) dr_0 = \frac{G_+ + G_-}{2} r h(r) - \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_0^\infty E_+ \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0 + \\ & + \frac{G_+ + G_-}{2(\alpha G_+ + \beta G_-)} \int_0^\infty f_+(r_0) dr_0 + \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_0^\infty E_- \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_-(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{2(\alpha G_+ + \beta G_-)} \int_0^\infty f_-(r_0) dr_0; \quad (r \in R_+) \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где

$$K \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) [\operatorname{th}(\beta s) - 1] + G_- \operatorname{th}(\beta s) [\operatorname{th}(\alpha s) - 1]}{\Gamma(s)} \sin \left(s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\alpha s) - \operatorname{th}(\beta s)}{\Gamma(s)} \cos \left(s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$Q \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{G_+ [1 - \operatorname{th}(\beta s)] + G_- [1 - \operatorname{th}(\alpha s)]}{\Gamma(s)} \sin \left(s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$F_+ \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{\text{th}(\beta s)}{\text{ch}(\alpha s) \Gamma(s)} \cos \left(s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds; \quad F_- \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{\text{th}(\alpha s)}{\text{ch}(\beta s) \Gamma(s)} \cos \left(s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$E_+ \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{1}{\text{ch}(\alpha s) \Gamma(s)} \sin \left(s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds; \quad E_- \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{1}{\text{ch}(\beta s) \Gamma(s)} \sin \left(s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds,$$

$$\Gamma(p) = G_+ \text{th}(pa) + G_- \text{th}(pb).$$

Рассматривая теперь первое уравнение системы (7) на L_1 , а второе уравнение на L_2 , придем к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{p} \int_{L_1} \frac{j(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{p} \int_{L_1} K \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) j(r_0) dr_0 - \frac{1}{p} \int_{L_2} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) y(r_0) dr_0 = \\ & = \frac{1}{p} \int_{L_1} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) [t_+^{(1)}(r_0) - t_-^{(1)}(r_0)] dr_0 - r \left[\frac{t_+^{(1)}(r)}{G_+} - \frac{t_-^{(1)}(r)}{G_-} \right] - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{pG_+} \int_0^\infty F_+ \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0 - \frac{G_+ + G_-}{pG_-} \int_0^\infty F_- \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_-(r_0) dr_0; \quad (r \in L_1) \\ & - \frac{G_+ G_-}{p} \int_{L_1} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) j(r_0) dr_0 + \frac{1}{p} \int_{L_2} \frac{y(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{p} \int_{L_2} Q \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) y(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{2(aG_+ + bG_-)} \int_{L_2} y(r_0) dr_0 = - \frac{1}{p} \int_{L_1} \frac{[t_+^{(1)}(r_0) - t_-^{(1)}(r_0)] dr_0}{\ln r_0 - \ln r} - \\ & - \frac{1}{p} \int_{L_1} Q \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) [t_+^{(1)}(r_0) - t_-^{(1)}(r_0)] dr_0 + \frac{G_+ + G_-}{2(aG_+ + bG_-)} \int_{L_1} [t_+^{(1)}(r_0) - t_-^{(1)}(r_0)] dr_0 - \\ & - \frac{G_+ + G_-}{p} \int_0^\infty E_+ \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0 + \frac{G_+ + G_-}{2(aG_+ + bG_-)} \int_0^\infty f_+(r_0) dr_0 + \\ & + \frac{G_+ + G_-}{p} \int_0^\infty E_- \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_-(r_0) dr_0 - \frac{G_+ + G_-}{2(aG_+ + bG_-)} \int_0^\infty f_-(r_0) dr_0; \quad (r \in L_2) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Система (8) должна рассматриваться при условиях

$$\int_{a_k}^{b_k} j(r) dr = 0, \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad (9)$$

$$\int_{c_k}^{d_k} y(r) dr = P_k, \quad (k = \overline{1, N_2}). \quad (10)$$

Первые из них эквивалентны условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а вторые представляют собой условия равновесия включений.

Рассматривая первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, получим:

$$\begin{aligned} t(r) = & - \frac{G_+ G_-}{pr(G_+ + G_-)} \int_{L_1} \frac{j(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} - \frac{G_+ G_-}{pr(G_+ + G_-)} \int_{L_1} K \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) j(r_0) dr_0 + \\ & + \frac{G_+ G_-}{pr(G_+ + G_-)} \int_{L_1} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) [t_+^{(1)}(r_0) - t_-^{(1)}(r_0)] dr_0 + \frac{G_+ G_-}{pr(G_+ + G_-)} \int_{L_2} M \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) y(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{G_-}{pr} \int_0^\infty F_+ \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0 - \frac{G_+}{pr} \int_0^\infty F_- \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) f_-(r_0) dr_0 \quad (r \in L') \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии кусочно-однородного упругого клина с трещинами и абсолютно жесткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)-(10). После решения (8)-(10) разрушающее напряжение определяется формулой (11).

2. Для общего решения определяющей СИУ (8)-(10) сначала в системе уравнений (8) переходим к новым переменным $(\xi = \ln r_0, \eta = \ln r)$, далее интервалы $((\ln a_k, \ln b_k), (k = \overline{1, N_1}))$ и $((\ln c_k, \ln d_k), (k = \overline{1, N_2}))$ преобразуем в интервал $(-1; 1)$, а затем определяющее СИУ преобразуем в систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций, заданных на $(-1, 1)$. Решение системы (8)-(10) строится численно-аналитическим методом [5, 6, 7] с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

КИН определяются формулами [5]:

$$K_{III}(a_k) = \frac{G_+}{1+m} \lim_{r \rightarrow a_k+0} \sqrt{2p(r-a_k)} j(r);$$

$$K_{III}(b_k) = -\frac{G_+}{1+m} \lim_{r \rightarrow b_k-0} \sqrt{2p(b_k-r)} j(r). \quad (m = G_+/G_-)$$

Далее рассмотрим частный случай, когда на линии соединения разнородных клиньев содержатся трещина и абсолютно жесткое тонкое включение, $L = L_1 \cup L_2$, $L_1 = \left(\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right)$, $L_2 = (c, d)$, $(1 \leq c < d)$. Предположим, что на свободных гранях клиньев нагрузки отсутствуют $f_+(r) = f_-(r) = 0$, а на берегах щелей действуют равные между собой напряжения произвольных интенсивностей $t_+^{(1)}(r) = t_-^{(1)}(r) = t(r)$ ($r \in L_1$).

В этом частном случае по известной численно-аналитической методике, как и в общем случае, из системы (8) и условий на щели L_1 и включения L_2 , из (9) и (10) будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{K}(t_r - u_m) \right] x_0(u_m) - \frac{m+1}{M} \times \\ \times \sum_{m=1}^M \tilde{M}_1(t_r - u_m) y_0(u_m) = -\frac{(m+1)^2}{m} t_0(t_r); \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{m=1}^M x_0(u_m) = 0; \\ -\frac{m}{M(m+1)} \sum_{m=1}^M \tilde{M}_2(t_r - u_m) x_0(u_m) + \frac{1}{M} \times \\ \times \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{u_m - t_r} + \tilde{Q}(t_r - u_m) \right] y_0(u_m) = \frac{m+1}{2(am+b)} \tilde{P}; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{p}{M} \sum_{m=1}^M y_0(u_m) = \frac{2\tilde{P}}{\Delta}, \end{array} \right. \quad (12)$$

где

$$\tilde{f}(t) = e^{-\frac{\Delta}{2} \left(t - \frac{1+r}{1-r} \right)} \tilde{f}_0(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \tilde{y}(t) = e^{-\frac{\Delta}{2} \left(t + \frac{1+r}{1-r} \right)} \tilde{y}_0(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad a = \ln c; \quad b = \ln d$$

$$x(t) = e^{-\frac{\Delta}{2} \left(t - \frac{1+r}{1-r} \right)} x_0(t); \quad y(t) = e^{-\frac{\Delta}{2} \left(t + \frac{1+r}{1-r} \right)} y_0(t); \quad (t \in (-1, 1))$$

$$m = \frac{G_+}{G_-}; a_0 = \frac{2a}{\Delta}; b_0 = \frac{2b}{\Delta}; \Delta = b - a; r = \frac{a}{b}; \tilde{P} = \frac{P_1}{G_+ + G_-},$$

$$\tilde{t}_0(t) = \frac{1}{G_+ + G_-} t \left(e^{\frac{b-a}{2}t - \frac{b+a}{2}} \right), \text{ а } u_m \text{ и } t_r - \text{соответствующие чебышевские узлы из [5]. Заметим}$$

еще, что $\tilde{K}(t_r, u_m), \tilde{M}_1(t_r, u_m), \tilde{M}_2(t_r, u_m), \tilde{Q}(t_r, u_m)$ – входящие в (12) известные функции.

В этом случае формулы для безразмерного КИН в точках d^{-1} и c^{-1} определяются формулами

$$K_{III}^{(0)}\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{\Delta}{\sqrt{2}(m+1)} x(-1); \quad K_{III}^{(0)}\left(\frac{1}{c}\right) = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}(m+1)} x(1). \quad (13)$$

Для безразмерного раскрытия трещины $w_1(t)$ можем записать [5]:

$$w_1(t) = \int_{-1}^t \frac{x(h)dh}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{p}{M} \sum_{u_n \leq t} x(u_n); \quad (-1 \leq t \leq 1). \quad (14)$$

Далее, для простоты примем $t_0(t) = 0.01$ и $\tilde{P} = 0.01$. Тогда после решения системы (12) при различных значениях параметров m, a, b, r, Δ находим соответствующие значение КИН в концевых точках трещины по формулам (13) и соответствующее раскрытие трещины по формуле (14).

Вычисленные значения КИН $K_{III}^{(0)}(d^{-1})$ и $K_{III}^{(0)}(c^{-1})$ в зависимости от изменения параметра $a \in (0, p)$ при фиксированных значениях других параметров ($m = 2, r = 0.5, b = p/3, \Delta = 1$), которые характерны для этих КИН и при других значениях параметров, показывают, что значения КИН $K_{III}^{(0)}(d^{-1}), K_{III}^{(0)}(c^{-1})$ с возрастанием параметра a уменьшаются, приближаясь к своему предельному значению.

Вычисленные по формуле (14) безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра a и при фиксированных значениях ($m = 2, r = 0.5, b = p, \Delta = 1$) графически изображены на рис. 1. По мере возрастания a эти графики спускаются вниз, приближаясь к предельной кривой при $a = p$. А на рис. 2 также изображены безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра m при фиксированном значении ($r = 0.5, a = p/8; b = p/3, \Delta = 1$). В этом случае получается, что раскрытие трещины минимальное, когда клин однородный.

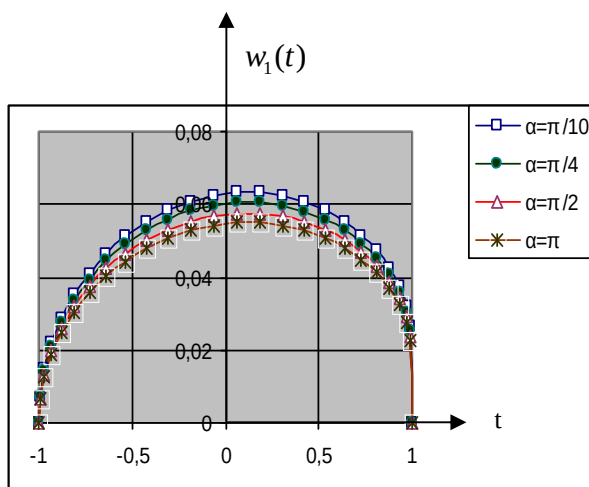


Рис. 1

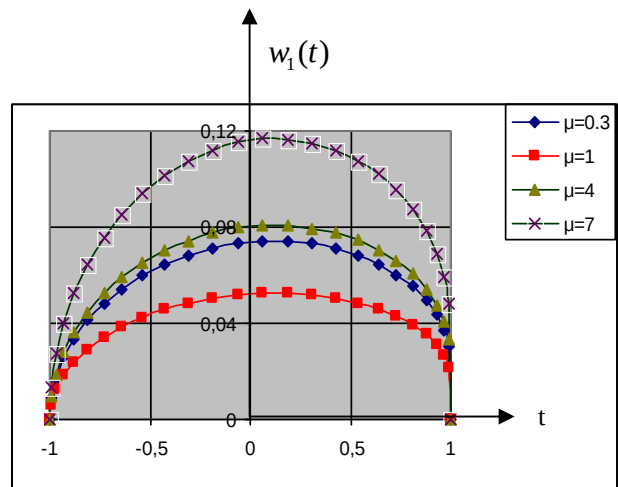


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина, содержащего трещину и абсолютно жесткое включение. // В сб.: "Современные проблемы теории контактных взаимодействий" - Ереван, Изд. НАН РА, 1996, с. 45-50.
2. Nakobyan V.N. The mixed problem for anisotropic compound wedge with crack. -In collection of papers "Modern Problems of deformable bodies Mechanics", dedicated to the memory of Prof. P.S. Theocaris, Yerevan, published by "Gitutyun" NAS RA, 2005, pp.114-120.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- М.: АН СССР, 1963.
4. Манукян Э.А., Мкртчян М.С. Об одной смешанной задаче для упругой полосы с трещиной конечной длины. // В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды." Тр.Международной конференции, посвящ. 95-летию акад. АН РА Н.Х. Арутюняна, 25-28 сентября 2007, Цахкадзор.-Ереван, 2007, с.252-257.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
7. Theocaris P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. Quart. Appl. Math., vol XXXV, No1, pp. 173-185, 1977

Сведения об авторе:

Мкртчян Мгер Мушегович,

Науч. сотрудник, Институт механики НАН РА,

Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24^б, Институт механики НАН РА

Тел: (37410)-43-16-52, E-mail: mher_1982@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТЯЖЕСТИ СТАРЕЮЩЕГО ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛУЦИРКУЛЬНОГО СВОДА, ВОЗВОДИМОГО НА ЖЕСТКОЙ ОПАЛУБКЕ

Паршин Д.А.

Рассмотрен процесс постепенного возведения полуциркульного свода, опирающегося на гладкое жесткое основание. Возведение осуществляется путем непрерывного присоединения дополнительных материальных слоев к наружной поверхности формируемого свода, в то время как его внутренняя поверхность поддерживается жесткой круговой опалубкой. Используемый для строительства свода материал обладает свойствами ползучести и старения. Поставлена линейная квазистатическая задача механики наращиваемых тел, описывающая процесс плоского деформирования свода под действием сил тяжести как во время его возведения, так и после того, как возведение завершено, но готовый свод продолжает оставаться на опалубке. Поставленная задача преобразована к краевой задаче, по форме совпадающей с классической задачей теории упругости. Построено аналитическое решение этой задачи в рядах. На основании данного решения эволюция напряженно-деформированного состояния в каждой точке окончательно сформированного свода восстанавливается посредством процедуры интегрирования по времени, а также решения некоторого интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Доказано утверждение о структуре остаточных напряжений в изготовленном своде после отсоединения от него строительной опалубки. Согласно данному утверждению, эти напряжения могут быть найдены как разность напряжений, соответствующих решенной в настоящей работе задаче наращивания, и напряжений, найденных из решения некоторой классической задачи теории упругости с нулевыми массовыми силами.

Введение. Всем известно, что собственный вес значительных по размерам сооружений вносит существенный, а чаще всего определяющий вклад в их напряженно-деформированное состояние. Поэтому при проектировании таких сооружений нельзя не считаться с действующими на них силами тяжести.

Известно также, что подавляющее большинство крупногабаритных конструкций не устанавливается сразу в готовом виде на подготовленное для них основание, а сооружается на нем постепенно, элемент за элементом. Очевидно, что всякий раз вес новых присоединяемых дополнительных элементов неизбежно вызывает дополнительную деформацию всей существующей на текущий момент части конструкции. Поэтому напряженно-деформированное состояние постепенно возведенного объекта, обусловленное действием на него сил тяжести на протяжении всего процесса возведения, должно принципиальным образом отличаться от того состояния, которое бы имел этот объект, будучи установленным на основание и подвергнутым воздействию сил тяжести уже в готовом виде.

Нетрудно понять, что если используемый конструкционный материал обладает реологическими свойствами, то как текущее, так и итоговое состояние возводимого объекта должно сильно зависеть от того временного режима, в котором этот объект возводится. В процессе строительства такого объекта происходит непрерывное взаимодействие тенденций к его постоянному догрузению весом новых дополнительных элементов и к постоянному перераспределению напряжений в уже присоединенных элементах за счет запаздывания деформации в условиях изменяющейся геометрии объекта. Характер и результат данного взаимодействия определяются многими конкретными факторами.

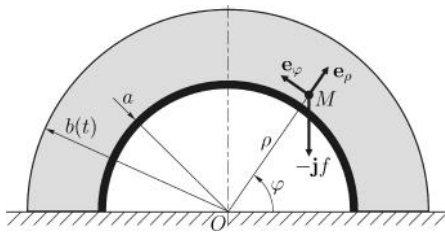
Может оказаться, что при определенном технологическом процессе возведения конструкции первоначально возникшие в ней напряжения, развиваясь, будут концентрироваться в определенных зонах, что приведет в итоге к наличию в готовом к эксплуатации объекте областей с недопустимо высоким уровнем технологических напряжений (причем зачастую не свойственным ему согласно расчетам по конечной конфигурации). В этом случае необходимо принимать специальные меры по управлению напряженно-деформированным состоянием возводимого объекта.

После сказанного выше становится совершенно ясным, что не только организация

упомянутого управления, но даже обычный расчет на прочность постепенно сооружаемых тяжелых объектов в принципе не могут быть осуществлены на основании расчетной схемы, оперирующей лишь с конечной конфигурацией рассматриваемого объекта. Следует подчеркнуть, что корректные результаты не могут быть получены также и в случае использования классических уравнений и граничных условий механики в переменной во времени пространственной области. Это обусловлено тем фундаментальным обстоятельством, что процесс деформирования любого наращиваемого тела протекает совершенно иным образом, чем процесс деформирования тела постоянного состава. Следовательно, описание подобных процессов должно осуществляться не на базе традиционных подходов механики деформируемого твердого тела, которые не учитывают специфики процесса его наращивания, а в рамках концепций механики наращиваемых тел.

С современным состоянием теории и конкретными решенными задачами в механике наращиваемых тел можно ознакомиться, например, по [1–12]. Настоящая работа посвящена одной, прежде не решавшейся, задаче о постепенном сооружении тяжелого полуциркульного свода, обладающего свойствами ползучести и старения.

1. Постановка задачи. Пусть процесс возведения полуциркульного свода, опирающегося



на гладкое жесткое основание, начинается в момент времени $t = t_1$. Возведение осуществляется путем наращивания свода за счет непрерывного присоединения равномерных по толщине элементарных слоев дополнительного материала к его наружной поверхности. При этом внутренняя поверхность свода все время поддерживается жесткой круговой опалубкой, предварительно установленной

на основание. Первоначальный слой материала присоединяется непосредственно к опалубке и сцепляется с ней. В момент $t = t_2 > t_1$ процесс наращивания свода прекращается, после чего опалубка отсоединяется от свода. Подошвы свода на протяжении всего процесса возведения, а также после его окончания взаимодействуют с основанием посредством скользящей заделки, запрещающей их отслоение от основания, но не препятствующей свободному по нему скольжению. Используемый для возведения материал является однородным изотропным стареющим линейно вязкоупругим материалом, изначально свободным от напряжений.

Поставим задачу исследовать процесс формирования напряженно-деформированного состояния рассматриваемого свода под действием сил тяжести в течение описанной процедуры его возведения и процесс развития этого состояния после завершения данной процедуры, вплоть до момента отсоединения опалубки. Кроме этого, исследуем остаточные напряжения, которые будут сохраняться в готовом своде по прошествии длительного периода времени после отсоединения от него опалубки. Процесс деформирования наращиваемого свода будем считать квазистатическим, а деформацию — плоской и малой.

Обозначим через a внутренний радиус свода (наружный радиус опалубки), а через $b(t)$ — его наружный радиус в момент времени t , $b(t_1) = a$ (см. рис.). В силу малости деформации строго монотонно возрастающую функцию времени $b(t)$ можно считать известной. Так как рассматривается процесс непрерывного наращивания свода, функция $b(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, является непрерывной. Будем считать ее кусочно-непрерывно дифференцируемой. Положим $b(t) \equiv b_{\text{fin}} = b(t_2)$ при $t > t_2$.

Свяжем с плоскостью поперечного сечения свода полярную цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) с локальным базисом $\{\mathbf{e}_\rho(\varphi), \mathbf{e}_\varphi(\varphi), \mathbf{k}\}$, где ρ — полярный радиус, отсчитываемый от оси арки, φ — полярный угол, отсчитываемый вверх от основания (см. рис.), z — продольная координата. Обозначим через $\mathbf{j}$ направленный вверх единичный нормальный вектор к основанию. Тогда объемная плотность действующих на свод сил тяжести будет равна $\mathbf{f} = -\mathbf{j}f$, где $f = \text{const}$ — удельный вес материала.

Используемый для возведения свода материал будем описывать в рамках линейной теории

вязкоупругости однородно стареющих изотропных сред [13, 1], исходя из уравнения состояния

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = G(t)(\mathcal{J} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})})[2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — тензоры напряжений и малой деформации, $\mathbf{1}$ — единичный тензор второго ранга; $G(t)$ — упругий модуль сдвига; $\kappa = (1 - 2\nu)^{-1}$, где $\nu = \text{const}$ — коэффициент Пуассона. Оператор вязкоупругости $\mathcal{J} + \mathcal{N}_s$ в (1) определяется соотношениями

$$\mathcal{J} + \mathcal{N}_s = (\mathcal{J} - \mathcal{Q}_s)^{-1}, \quad \mathcal{Q}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau, \\ K(t, \tau) = G(\tau) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau, \quad \Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau),$$

в которых $\mathcal{J}$ — тождественный оператор, $\mathcal{Q}_s$ и $\mathcal{N}_s$ — интегральные операторы Вольтерра с вещественным параметром s ; $K(t, \tau)$ и $R(t, \tau)$ — ядра ползучести и релаксации; $\Delta(t, \tau)$ и $\omega(t, \tau)$ — функция удельной деформации и мера ползучести при чистом сдвиге. Величина $\tau_0(\mathbf{r})$ есть момент возникновения напряжений в точке тела $\mathbf{r}$. Считаем, что время t отсчитывается от момента изготовления материала.

Отметим, что уравнение (1) было предложено академиком Академии наук Армении Н.Х. Арутюняном специально для описания процессов ползучести бетона [13, 14] и в настоящее время широко используется для этой цели. Между тем, оно также хорошо согласуется с экспериментальными данными по ползучести некоторых видов полимеров, горных пород, грунта, льда.

Введем взаимно обратные линейные операторы $\mathcal{H}_s = (\mathcal{J} - \mathcal{Q}_s)G(t)^{-1}$ и $\mathcal{H}_s^{-1} = G(t)(\mathcal{J} + \mathcal{N}_s)$ с вещественным параметром s и для произвольной функции $g(\mathbf{r}, t)$ точки $\mathbf{r}$ наращиваемого тела и времени t примем обозначение $g^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}, t)$. Тогда определяющее соотношение (1) можно будет записать в виде [2]

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Для меры ползучести по определению справедливо тождество $\omega(\tau, \tau) \equiv 0$ при $\tau \geq 0$. С его учетом функция удельной деформации может быть представлена в виде

$$\Delta(t, \tau) = \mathcal{H}_\tau 1. \quad (3)$$

В рассматриваемой задаче напряжения в точках тела возникают в момент включения соответствующих частиц в состав данного тела. Это значит, что

$$\tau_0(\mathbf{r}) \equiv \tau_*(\rho), \quad (4)$$

где $\tau_*(\rho)$ — момент присоединения к своду материального слоя радиуса ρ . Ясно, что уравнение $\tau_*(\rho) = t$ описывает наружную поверхность непрерывно растущего свода $\{\rho = b(t)\}$, то есть мгновенную поверхность его роста. Иными словами, справедливо тождество $\tau_*(b(t)) \equiv t$.

2. Краевая задача для возводимого свода. В процессе наращивания новые элементы дополнительного материала присоединяются к растущему телу уже по ходу его деформирования. Ясно, что у формируемого подобным образом тела в целом не может в общем случае существовать единой недеформированной конфигурации. Это обстоятельство имеет определяющее значение при описании процесса деформирования любого наращиваемого тела и должно принципиальным образом отличать механическое поведение таких тел от поведения тел постоянного состава (традиционно рассматриваемых в континуальной механике), а также тел с переменной вследствие снятия материала границей. Следствием отмеченной характерной

особенности деформирования наращиваемых тел является невозможность определения меры их деформации стандартным для механики сплошной среды образом, а значит несправедливость формул Коши для компонент линейного тензора полной деформации и, следовательно, условий Сен-Венана совместности последних.

Однако можно обратить внимание на тот факт, что частицы дополнительного материала после его сцепления с поверхностью роста продолжают далее свое движение уже в составе сплошного, пусть и растущего, тела. Это значит, что в области пространства, занимаемой в данный момент времени всем наращиваемым телом, однозначно определено достаточно гладкое поле скоростей движения его частиц. Поэтому задачу о деформировании такого тела можно поставить в терминах скоростей перемещений.

Исходя из вышесказанного, запишем аналог определяющего соотношения (2) для скоростей изменения связываемых им тензорных величин: $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$. Здесь введены тензор $\mathbf{S} = \partial \mathbf{T}^\circ / \partial t$ [2] и тензор скоростей деформации $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) / 2$, где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho v_\rho + \mathbf{e}_\varphi v_\varphi + \mathbf{k} v_z$ — векторное поле скоростей движения частиц наращиваемого тела. В рассматриваемом случае плоской деформации должны выполняться условия $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\partial \mathbf{v} / \partial z = \mathbf{0}$.

Уравнение для введенного тензора $\mathbf{S}$ во всей области, занимаемой в данный момент времени наращиваемым телом, можно получить, подействовав на стандартное уравнение равновесия $\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$ линейным оператором $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$ и продифференцировав результат по времени t . В силу зависимости от точки тела нижнего предела интегрирования в указанном интегральном операторе этот оператор не будет коммутировать с оператором дивергенции. Однако можно показать [2], что в таких процессах наращивания, которые рассматриваются в настоящей работе, для тензора напряжений будет справедлива запись $(\nabla \cdot \mathbf{T})^\circ = \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ$. В этом случае во всем наращиваемом теле как во время, так и после окончания процесса его наращивания будет выполняться следующий аналог уравнения равновесия: $\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ + \mathbf{f}^\circ = \mathbf{0}$. Продифференцировав это уравнение по времени, получим $\nabla \cdot \mathbf{S} + \partial \mathbf{f}^\circ / \partial t = \mathbf{0}$. Вычисляя с помощью представления (3) $\partial \mathbf{f}^\circ / \partial t = -\mathbf{j} h(\rho, t)$, $h(\rho, t) = f \partial \omega(t, \tau_*(\rho)) / \partial t$, придем к уравнению $\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{j} h(\rho, t)$. Заметим, что в соответствии с теми свойствами, которыми должна обладать мера ползучести (см., например, [15]), будет $h(\rho, t) \geq 0$ при $t > \tau_*(\rho)$.

Обратимся теперь к условию, которое должно быть выставлено на поверхности роста рассматриваемого тела. Поскольку присоединяемый материал считается изначально свободным от напряжений, необходимо потребовать равенства нулю полного тензора напряжений на наружной поверхности возводимого свода [16]:

$$\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \rho = b(t), \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (5)$$

Примечательным является то обстоятельство, что условие (5) может быть преобразовано к граничному условию на компоненты тензора $\mathbf{S}$, которое по своему виду аналогично классическому силовому условию на поверхности тела [2]:

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} q(t), \quad \rho = b(t); \quad q(t) = f b'(t) / G(t) \geq 0. \quad (6)$$

После прекращения наращивания свода его наружная поверхность остается незагруженной. Поэтому при $t > t_2$ на этой поверхности нужно выставить обычное условие отсутствия напряжений. Очевидным аналогом этого условия для тензора $\mathbf{S}$ является граничное условие $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}$, $\rho = b_{\text{fin}}$. Поскольку мы считаем, что $b(t) \equiv b_{\text{fin}}$ при $t > t_2$, то условие на наружной поверхности свода в форме (6) формально остается справедливым и после окончания наращивания, то есть может использоваться для любого $t \geq t_1$. Однако важно понимать, что природа этого условия на этапе непрерывного наращивания свода и после окончания этого этапа принципиально различна.

Запишем теперь условия на остальных участках граничной поверхности наращиваемого

свода. На внутренней поверхности $\{\rho = a\}$ необходимо выставить кинематическое условие жесткого сцепления материала с опалубкой. Для постановки задачи в скоростях оно должно иметь вид: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\rho = a$. На подошвах свода $\{\varphi = 0, \pi\}$, как оговорено в разделе 1 при описании задачи, ставятся смешанные условия скользящей заделки $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\rho = 0$, $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{v} = 0$. Из первого из этих условий следует равенство $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_\rho = 0$ при $\varphi = 0, \pi$.

Итак, учитывая все сказанное выше, получаем следующую краевую задачу, описывающую процесс деформирования возводимого свода вплоть до момента отсоединения от него опалубки спустя какое-то время после окончания возведения:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{j}h(\rho, t), \quad \rho \in (a, b(t)), \quad \varphi \in (0, \pi), \quad t > t_1; \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\kappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \partial \mathbf{v} / \partial z = \mathbf{0}; \\ \mathbf{v}|_{\rho=a} &= \mathbf{0}; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S}|_{\rho=b(t)} = -\mathbf{j}q(t); \quad (\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_\rho)|_{\varphi=0, \pi} = 0, \quad (\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{v})|_{\varphi=0, \pi} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Эта задача по своей форме эквивалентна классической краевой задаче линейной теории упругости, в которой в роли вектора перемещения выступает вектор $\mathbf{v}$, а в роли тензора малой деформации и отнесенного к модулю сдвига тензора напряжений — тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{S}$. Время t в ней является параметром.

3. Решение краевой задачи. Определение напряжений в возводимом своде. Будем искать радиальную и окружную компоненты векторного поля скоростей $\mathbf{v}$, являющегося решением краевой задачи (7), в виде разложений в ряды Фурье соответственно по косинусам и синусам кратных $\varphi \in [0, \pi]$ углов. Из симметрии конструкции следует, что $v_\rho|_\varphi \equiv v_\rho|_{\pi-\varphi}$, $v_\varphi|_\varphi \equiv -v_\varphi|_{\pi-\varphi}$. Таким образом,

$$v_\rho = c_0(\rho, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\rho, t) \cos 2n\varphi, \quad v_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\rho, t) \sin 2n\varphi. \quad (8)$$

Заметим, что данные разложения уже удовлетворяют содержащимся в (7) однородным смешанным граничным условиям на подошвах арки $\{\varphi = 0, \pi\}$.

После внесения (8) в отвечающие (7) уравнения Ляме необходимо решить получаемые в итоге системы линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений по ρ второго порядка с переменными коэффициентами относительно неизвестных функций $c_0(\rho, t)$, $c_n(\rho, t)$ и $d_n(\rho, t)$. Решая их, находим

$$\begin{aligned} 2c_0/\rho &= -\kappa^{-1}B_{40} - B_{10}, \quad 2c_n/\rho = [(n + \kappa^{-1})B_{2n} - B_{3n}]/(2n-1) + [(n - \kappa^{-1})B_{4n} - B_{1n}]/(2n+1), \\ 2d_n/\rho &= [(n-1 - \kappa^{-1})B_{2n} + B_{3n}]/(2n-1) - [(n+1 + \kappa^{-1})B_{4n} + B_{1n}]/(2n+1); \\ \mathbf{S} &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho S_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi S_\varphi + \mathbf{k} \mathbf{k} v(S_\rho + S_\varphi) + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho) S_{\rho\varphi}, \end{aligned}$$

$$S_{\rho/\varphi} = \pm B_{10} - B_{40} + \sum_{n=1}^{\infty} [\pm B_{1n} \mp (n \pm 1)B_{2n} \mp B_{3n} \pm (n \mp 1)B_{4n}] \cos 2n\varphi,$$

$$S_{\rho\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n} - nB_{2n} + B_{3n} - nB_{4n}] \sin 2n\varphi.$$

Здесь введены функции

$$\begin{aligned} B_{1m}(\rho, t) &= K_m^+ \Phi_{m+1}(\rho, t) + [b(t)/\rho]^{2m+2} \alpha_{1m}(t), \quad B_{2m}(\rho, t) = \kappa \Phi_m(\rho, t) + [b(t)/\rho]^{2m} \alpha_{2m}(t), \\ B_{3m}(\rho, t) &= K_m^- \Psi_{m-1}(\rho, t) + (\rho/a)^{2m-2} \alpha_{3m}(t), \quad B_{4m}(\rho, t) = \kappa \Psi_m(\rho, t) + (\rho/a)^{2m} \alpha_{4m}(t); \\ \Phi_m(\rho, t) &= \frac{k}{2m-1} \int_a^\rho (\xi/\rho)^{2m} h(\xi, t) d\xi, \quad \Psi_m(\rho, t) = \frac{k}{2m+1} \int_\rho^{b(t)} (\rho/\xi)^{2m} h(\xi, t) d\xi. \end{aligned}$$

В них фигурируют числовые множители $K_m^\pm = [m(2m \pm 3)/(2m \mp 1)]\kappa \pm 1$, $k = 2/[\pi(\kappa + 1)]$. Функции $\alpha_{jm}(t)$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемой после удовлетворения граничным условиям из (7) на внутренней и наружной поверхностях

наращиваемого свода. Выражения для α_{jm} здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Заметим, что совокупность условий (5) для всех моментов времени непрерывного роста представляет собой начальное условие для всех компонент тензора напряжений в точках сформированного в результате наращивания тела: $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \mathbf{0}$, $\rho \in [a, b_{\text{fin}}]$. В силу равенства (4) точно такое же условие можно записать и для тензора $\mathbf{T}^\circ$. Учитывая это начальное условие, после решения задачи (7) можно восстановить всю эволюцию тензора $\mathbf{T}^\circ$ в каждой точке окончательно сформированного свода по найденной скорости изменения этого тензора: $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \int_{\tau_*(\rho)}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau$ при $t \geq \tau_*(\rho)$. Затем уже по известной эволюции тензора $\mathbf{T}^\circ$ можно в соответствии с его определением найти эволюцию тензора напряжений $\mathbf{T}$, решив интегральное уравнение Вольтерра второго рода $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \mathbf{g}(\mathbf{r}, \tau) K(t, \tau) d\tau = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)$ с параметром $\mathbf{r}$ относительно неизвестной тензор-функции $\mathbf{g}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)/G(t)$. Если аналитическое выражение для резольвенты $R(t, \tau)$ ядра ползучести $K(t, \tau)$ не является достаточно простым, следует отдать предпочтение непосредственному численному решению указанного интегрального уравнения, например, методом квадратур [17].

4. Остаточные напряжения в возведенном своде после отсоединения опалубки. Выше построено решение задачи о деформировании под действием сил тяжести вязкоупругого стареющего свода, возводимого на гладком жестком основании с использованием поддерживающей жесткой опалубки, которая после окончания возведения по-прежнему остается сцепленной с внутренней поверхностью свода. Это решение имеет смысл при сколь угодно большом значении времени $t > t_1$. Зная его, можно, в частности, найти эволюцию и установившееся распределение контактных напряжений на внутренней поверхности свода, то есть реакцию опалубки.

Предположим теперь, что начиная с некоторого момента времени, когда формирование свода уже полностью завершено, кинематическое условие на его внутренней поверхности заменяется силовым и напряжения, задаваемые на этой поверхности, начинают изменяться произвольным образом, причем так, что в конце концов происходит освобождение внутренней поверхности от нагрузки, то есть отсоединение от нее строительной опалубки. Тогда, опираясь на свойство линейности рассматриваемой задачи и используя один из известных принципов соответствия в линейной теории вязкоупругости стареющих тел [1], можно доказать следующее

Утверждение. Пусть тензоры напряжений $\mathbf{T}_{\text{res}}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{T}_\infty(\mathbf{r})$ определяют состояния рассматриваемого тяжелого вязкоупругого стареющего свода, устанавливающиеся при $t \rightarrow +\infty$ после завершения процесса его возведения (в определенном временном режиме) и последующего отсоединения от готового свода строительной опалубки или, соответственно, длительной выдержки готового свода на этой опалубке. В первом случае имеем $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_{\text{res}}|_{\rho=a} = 0$, во втором случае $\mathbf{t}_a^\infty(\varphi) = -\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_\infty|_{\rho=a}$ есть установившаяся реакция опалубки. Пусть тензор напряжений $\mathbf{T}_{\text{el}}(\mathbf{r})$ определяет состояние изготовленного без остаточных напряжений невесомого чисто упругого свода тех же размеров, что и возведенный вязкоупругий свод, имеющего те же упругие характеристики, что и вязкоупругий свод после длительной выдержки, находящегося в тех же условиях закрепления подошв и нагруженного по внутренней поверхности распределенной нагрузкой $\mathbf{t}_a^\infty$. Тогда $\mathbf{T}_{\text{res}} = \mathbf{T}_\infty - \mathbf{T}_{\text{el}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 08-01-00553-а, 08-01-91302-ИНД_а, 09-08-01180-а, 09-08-01194-а), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук (программа № 13 ОЭ) и Фонда содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
2. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 836–848.
3. Манжиров А.В., Черныш В.А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 25–37.
4. Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного в механике растущих тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2004. № 4 (34). С. 82–98.
5. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83.
6. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166.
7. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процесса деформирования наращиваемых конических тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 4 (54). С. 290–303.
8. Манжиров А.В. Механика наращиваемых тел: состояние, проблемы, перспективы // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды Международной конференции, посвящ. 95-летию акад. НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Цахкадзор, 25–28 сентября 2007 г. Ереван: Ереванский гос. ун-т архитектуры и строительства, 2007. С. 243–246.
9. Паршин Д.А. Усиление конической опоры методом наращивания // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XI Международной конференции. Ростов-на-Дону, 26–29 ноября 2007 г. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. С. 205–209.
10. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Смежные задачи механики наращиваемых тел и геомеханики // Неклассические задачи геомеханики. Труды Всероссийской объединенной научной сессии Научных советов РАН по механике деформируемого твердого тела и по проблемам горных наук. Якутск, 16–20 июня 2008 г. / Отв. ред. С.М. Ткач. Якутск: Изд-во ЯНЦ СО РАН, 2008. С. 130–137.
11. Манжиров А.В., Паршин Д.А. О новых результатах в классических проблемах гео- и горных наук // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XII Международной конференции. Ростов-на-Дону, 1–5 декабря 2008 г. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2008. С. 145–149.
12. Паршин Д.А. Моделирование процесса наращивания вращающегося упругого шарового тела // Механика сплошных сред как основа современных технологий. Труды XVI Зимней школы по механике сплошных сред (Электронный ресурс). Пермь: ИМСС УрО РАН, 2009. Электрон. оптич. диск (CD).
13. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
14. Арутюнян Н.Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972. С. 155–202.
15. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
16. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142–152.
17. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.

Сведения об авторе

Паршин Дмитрий Александрович

научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, Учреждение Российской академии наук

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Адрес: 119526, Россия, Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1

Тел.: +7 495 434 3456, E-mail: parshin@ipmnet.ru

ОБ ОДНОЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Погосян Д.М.

В настоящей работе рассматриваются задачи устойчивости прямоугольных пластин, когда на одной из сторон, свободной от ограничений на перемещения и углы поворота, действует сжимающая нагрузка. На остальных сторонах пластинки задаются различные варианты граничных условий. Сжимающая нагрузка – “следающая”.

1. Пластика занимает область $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$. Уравнение устойчивости пластинки при наличии сжимающей нагрузки P на кромке $x = a$ имеет вид [1,2]:

$$D\Delta^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

Граничные условия на свободной кромке $x = a$ записываются следующим образом:

$$M_1 = I\omega_n \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{N}_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -I \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (1.2)$$

Пусть край пластинки $x = 0$ закреплен

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

На краях пластинки $y = 0, b$ заданы условия скользящего контакта

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \quad (1.4)$$

Известно, что задача устойчивости пластинки с условиями скользящего контакта на сторонах $y = 0, b$ во многом аналогична задаче устойчивости стержня [3]. Обычно для этих задач выражение для минимальной критической нагрузки представляется формулой

$$P = \beta \pi^2 D a^{-2} \quad (1.5)$$

где D – изгибная жесткость пластинки.

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.4), решение статистического варианта уравнения (1.1) представляется в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \quad (1.6)$$

Подстановка (1.6) в (1.1) приводит к решению последовательных уравнений

$$f_n^{(4)} - 2\lambda_n^2(1 - \eta_n)f_n^{(2)} + \lambda_n^4 f_n = 0 \quad (1.7)$$

где

$$\eta_n = P(2D\lambda_n^2)^{-1} \quad (1.8)$$

Общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$f_n = A_n \sin \lambda_n q_1 x + B_n \cos \lambda_n q_1 x + C_n \sin \lambda_n q_2 x + D_n \cos \lambda_n q_2 x \quad (1.9)$$

где

$$q_i = \sqrt{\eta_n - 1 \pm \sqrt{\eta_n(\eta_n - 2)}}, i=1, 2 \quad (1.10)$$

Подстановка (1.6) с учетом (1.9) в граничные условия (1.2) и (1.3) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n, C_n, D_n . Условие равенства нулю детерминанта указанной системы определяет частоту:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 = & \{ [-\lambda_n q_1 q_2 (q_1^4 + q_2^4 + 2(q_1^2 + q_2^2) + 4v - 2v^2) + \\ & + \lambda_n [(q_1^4 + q_2^4)v + (q_1^2 + q_2^2)(1 + 2v - v^2) + 4 - 2v^2] \sin \lambda_n q_1 a \sin \lambda_n q_2 a + \\ & + \lambda_n q_1 q_2 [2 + 2(q_1^2 + q_2^2) + 4v - 2v^2] \cos \lambda_n q_1 a \cos \lambda_n q_2 a] / \\ & / I q_1 q_2 (q_2^2 - q_1^2) [q_1 \sin \lambda_n q_1 a \cos \lambda_n q_2 a - q_2 \sin \lambda_n q_2 a \cos \lambda_n q_1 a] \end{aligned}$$

Равенство нулю числителя выражения определяет дивергентную критическую нагрузку, а знаменатель – флаттерную.

$$q_1 \sin \lambda_n q_1 x \cos \lambda_n q_2 a - q_2 \sin \lambda_n q_2 x \cos \lambda_n q_1 a = 0 \quad (1.11)$$

Согласно уравнению (1.11) определяется минимальное значение критической нагрузки флатера в виде (1.5) в зависимости от параметров b/a .

Следует отметить, что критические значения флаттерной неустойчивости не зависят от коэффициента Пуассона.

Численные результаты приводятся в табл. 1.

Таблица 1

b/a	4.0765	3.601	3.1304	2.8662	2.579	1.9144	1.7575	1.5875
β	1.1312	1.1720	1.2352	1.2878	1.3682	1.9570	2.2545	1.7666

2. Рассматривается прямоугольная пластинка, для которого на кромке $x=a$ заданы граничные условия следящей нагрузки (1.2), а на остальных кромках – условия шарнирного закрепления:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b \quad (2.2)$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям при $y = 0, b$, представляется в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}$$

$$\omega^2 = \lambda_n q_2 (q_1^2 + \nu)(q_2^2 + 2 - \nu) \sin \lambda_n q_1 a \cos \lambda_n q_2 a \cdot$$

$$- \lambda_n q_1 (q_2^2 + \nu)(q_1^2 + 2 - \nu) \sin \lambda_n q_2 a \cos \lambda_n q_1 a / I (q_1^2 - q_2^2) \cos \lambda_n q_1 a \cos \lambda_n q_2 a$$

Здесь приняты обозначения (1.8). Уравнение, определяющее критические значения параметра нагрузки флаттерной и дивергентной неустойчивости, будет:

$$(q_1^2 - q_2^2) \cos \lambda_n q_1 a \cos \lambda_n q_2 a = 0 \quad (2.3)$$

Решения уравнения (2.3) будут

$$\cos \lambda_n q_1 x = 0, \cos \lambda_n q_2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\eta_n = (k^2 + 4)^2 / 8k^2 \quad \beta = \frac{\eta_n^2}{\frac{b^2}{a^2}} = (k^2 + 4)^2 / 4k^2 \quad k = b/a$$

Численные результаты решения уравнения (2.3) приводятся в табл.2.

Таблица 2

b/a	0.358	0.390	0.421	0.481
β	33.24	28.34	24.61	19.35

$$q_2 (q_1^2 + \nu)(q_2^2 + 2 - \nu) \sin \lambda_n q_1 a \cos \lambda_n q_2 a -$$

$$- q_1 (q_2^2 + \nu)(q_1^2 + 2 - \nu) \sin \lambda_n q_2 a \cos \lambda_n q_1 a = 0 \quad (2.5)$$

Некоторые численные результаты решения уравнения (2.5) приводятся в табл.3.

Таблица 3

ν	0.2	0.238	0.294	0.385
b/a	0.358	0.390	0.421	0.481
β	2.25	1.69	1.21	0.81

Из таблиц видно, что критические значения флаттерной нагрузки сравнительно больше дивергентной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961, 340 с.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.
3. Belubekyan M.V., Belubekyan V.M. Nonconcervative stability problems for axially compressed rectangular plate. In "Physics and Control" Intern. Conf. S.Peterburg, Russia 2003, p. 1070-1073.

Сведения об авторе

Погосян Диана

Аспирант Института механики НАН РА

E-mail DianaPogosyan@mail.ru

Тел. (093)64-98-31

ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Попузин В. В.

Как известно, многие задачи механики сплошной среды сводятся к решению интегральных уравнений первого и второго рода, в которых неизвестной является осциллирующая функция. Численная реализация подобных задач основана на применении различных численных методов, которые требуют замены исходного интегрального оператора конечномерным. Однако в области высоких частот колебаний данные алгоритмы становятся малоэффективными, поскольку для более или менее удовлетворительного результата необходимо брать как минимум десять узлов на каждую длину волны, что приводит к алгебраическим системам больших размеров. Следовательно, подобные вычисления даже на современных компьютерах требуют огромных машинных ресурсов. В то же время, интегралы в подобных задачах, представленные в дискретном виде, можно рассматривать как свертку двух сигналов, что позволяет использовать свойство дискретного преобразования Фурье, также известное как теорема о свертке. Таким образом, Фурье-преобразование неизвестной функции выражается через Фурье-преобразование правой части интегрального уравнения и ядра интегрального оператора. После их вычисления необходимо лишь произвести обратное преобразование для нахождения неизвестной величины. Для увеличения скорости расчета предлагаемого алгоритма используется метод быстрого преобразования Фурье [БПФ].

Для демонстрации предлагаемого подхода рассмотрим следующую контактную задачу для упругой полосы [1]. Пусть на бесконечный, линейно-упругий, изотропный и однородный слой ($|x| < \infty, 0 \leq y \leq h$), закреплённый по основанию $y = 0$, действует нагрузка $p(x)$ при $0 \leq x \leq a$ и $y = h$:

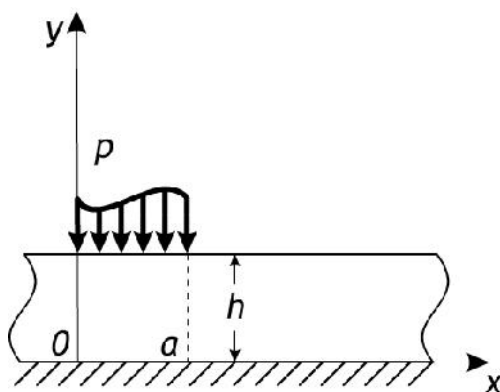


Рис.1. Контактная задача для упругой полосы.

Известно [1], что поле перемещений для данной задачи выражается интегральным уравнением вида

$$u(x) = \int_0^a p(\xi) K(x - \xi) d\xi \quad (1)$$

где ядро интегрального оператора

$$K(x) = \int_0^\infty \frac{\text{ch}(2s) - 1}{s(\text{sh}(2s) + 2s)} \cos(sx) ds \quad (2)$$

Заменяя интегралы интегральной суммой по правилу прямоугольников, приходим к дискретному виду уравнения (1)

$$u_i \approx \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} p_j K_{i-j}, \varepsilon = a/N, i = 0, \dots, N-1 \quad (3)$$

где $u_i = u(x_i)$, $p_j = p(\xi_j)$, а коэффициенты матрицы K_{i-j} даются следующим выражением:

$$K_{i-j} = K(x_i - \xi_j) \approx \varepsilon \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\text{ch}(2s_m) - 1}{s_m(\text{sh}(2s_m) + 2s_m)} \cos(s_m(x_i - \xi_j)) \quad (4)$$

здесь узлы вычисляются по формулам $x_i = i\varepsilon, \xi_j = j\varepsilon, s_m = m\varepsilon$.

В случае, когда неизвестной функцией является поле перемещений, прямое вычисление двойного интеграла (1)-(2), в дискретном виде (3)-(4), только для одной фиксированной координаты x_i требует $N \times N$ операций. При решении обратной задачи для нахождения поля давления p к алгебраической системе (3) обычно применяются различные численные алгоритмы, такие как метод градиентного спуска, метод минимальных ошибок, метод сопряженных градиентов и др., а также прямые методы типа метода исключения Гаусса. С другой стороны, правую часть уравнения (3) можно рассматривать как дискретную свертку двух сигналов. Таким образом, применяя дискретное преобразование Фурье к данному уравнению и используя теорему о свертке [2], получаем

$$\tilde{u} = DFT \left[\varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} p_j K_{i-j} \right] = \varepsilon \tilde{p} \tilde{K} \quad (5)$$

Здесь величины $\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{K}$ обозначают преобразование Фурье от функций u, p, K , соответственно, а DFT есть сокращение от Discrete Fourier Transform. Таким образом, решение прямой задачи получается применением к уравнению (5) обратного преобразования Фурье, т.е.

$$u = DFT^{-1} [\varepsilon \tilde{p} \tilde{K}] \quad (6)$$

В случае обратной задачи для вычисления поля давления необходимо лишь выразить $\tilde{p}$ из уравнения (5) и воспользоваться обратным преобразованием Фурье для нахождения искомой величины:

$$p = DFT^{-1} [\tilde{u} / (\varepsilon \tilde{K})] \quad (7)$$

Для эффективного вычисления преобразований Фурье, производимых в предлагаемой методике, используются алгоритмы БПФ. Однако, решение данной задачи можно сделать ещё более эффективным, если заметить, что дискретизированное ядро интегрального оператора (2) с помощью специального выбора сетки разбиения может быть представлено в виде быстрого косинус-преобразования, которое, в свою очередь, можно выразить через обратное дискретное преобразование Фурье. Такой подход позволит представить ядро как обратное дискретное преобразование Фурье от подынтегральной функции, в результате чего исчезнет необходимость применять прямое преобразование в формуле (5), поскольку вместо него можно будет воспользоваться непосредственно подынтегральной функцией ядра. Математически это выглядит следующим образом. Поскольку

$$K(x_j) \approx \varepsilon \sum_{m=0}^{N-1} f_m \cos(s_m x_j), \quad f_m = \frac{\text{ch}(2s_m) - 1}{s_m (\text{sh}(2s_m) + 2s_m)} \quad (8)$$

то при выборе сетки разбиения в виде $x_j = j\pi / (\varepsilon N)$ данное выражение примет вид быстрого косинус-преобразования [2].

Для приведения получившейся суммы к виду обратного преобразования Фурье расширим дискретизированную подынтегральную функцию таким образом, чтобы она оказалась четной относительно $m = N$:

$$f_{2N-m} = f_m, m = 0, \dots, N-1$$

Тогда обратное БПФ от расширенной функции будет иметь вид:

$$F_j = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} f_m \exp(-2\pi I j m / (2N)), \text{ где } I - \text{мнимая единица.}$$

Вторую половину данной суммы от $m = N$ до $m = 2N-1$ можно упростить, если воспользоваться заменой $m' = 2N - m$:

$$\begin{aligned}\sum_{m=N}^{2N-1} f_m \exp(-2\pi Ijm / (2N)) &= \sum_{m'=1}^N f_{2N-m'} \exp(-2\pi Ij(2N-m') / (2N)) = \\ &= \sum_{m'=0}^{N-1} f_{m'} \exp(2\pi Ijm' / (2N))\end{aligned}$$

Таким образом

$$F_j = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m [\exp(-2\pi Ijm / (2N)) + \exp(2\pi Ijm / (2N))] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f_m \cos(\pi jm / N)$$

Окончательно получаем, что ядро интегрального оператора выражается через обратное дискретное преобразование Фурье от функции f следующим образом:

$$K_j = \varepsilon N F_j$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (5), получаем

$$\tilde{u} = DFT \left[\varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} p_j K_{i-j} \right] = \varepsilon^2 N \tilde{p} f \quad (9)$$

Следовательно, искомые величины находятся из следующих уравнений:

$$u = DFT^{-1} \left[\varepsilon^2 N \tilde{p} f \right], \quad p = DFT^{-1} \left[\tilde{u} / (\varepsilon^2 N f) \right] \quad (10)$$

В случае решения обратных задач, описанный подход имеет некоторые недостатки, которыми по сути обладает применение дискретного преобразования Фурье к обращению свертки двух сигналов [2]. Очевидно, что в случае, когда преобразованное ядро интегрального оператора $\tilde{K}$ обращается в ноль на каком-либо шаге, мы не можем больше пользоваться формулой (7), поскольку возникает деление на ноль. Применительно к теореме о свёртке это означает, что изначальная свёртка потеряла всю информацию на этой одной частоте и реконструкция данного частотного компонента невозможна. Заметим, что деление на ноль может возникнуть лишь при решении предлагаемой методикой интегральных уравнений первого рода, поскольку решение обратной задачи для интегрального уравнения второго рода будет иметь вид:

$$p = DFT^{-1} \left[\tilde{u} / (1 + \varepsilon^2 \tilde{K}) \right]$$

Другим недостатком применения дискретного преобразования Фурье к обращению свертки является то, что данный вычислительный процесс является достаточно чувствительным к точности, с которой известны функции в правой части уравнений (6), (7). Тем не менее, описанный подход достаточно универсален и может применяться к различным интегральным уравнениям с разностными ядрами.

Однако, в случаях, когда правая часть исходного уравнения (1) имеет довольно простой вид, целесообразней путем специальной замены переменной сразу свести численное интегрирование к виду быстрого преобразования.

К примеру, легко заметить, что в случае постоянной распределенной нагрузки p соотношение (1) сводится к вычислению интеграла:

$$u(x) = p \int_0^a \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(2s) - 1}{s(\operatorname{sh}(2s) + 2s)} \cos(s(x - \xi)) ds d\xi \quad (11)$$

Меняя в (11) порядок интегрирования местами и производя интегрирование по отрезку нагружения, приходим к выражению (12)

$$u(x) = p \int_0^\infty \frac{2\operatorname{sh}^2(s)}{s^2(\operatorname{sh}(2s) + 2s)} (\sin(sx) - \sin(s(x-a))) ds \quad (12)$$

которое в наших целях удобно считать для каждого синуса отдельно. Интеграл в уравнении (12) позволяет применить быстрое синус-преобразование, если соответствующим образом выбрать сетку разбиения по обоим переменным. Для повышения точности вычислений при отбрасывании бесконечно удалённых точек, выделим в подынтегральной функции в явном виде слагаемое, соответствующее асимптотике на бесконечности:

$$\int_0^{\infty} \frac{2\text{sh}^2(s)}{s^2(\text{sh}(2s) + 2s)} \sin(sx) ds = \int_0^{\infty} \left(\frac{2\text{sh}^2(s)}{s^2(\text{sh}(2s) + 2s)} - \frac{1}{2s} \right) \sin(sx) ds + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(sx)}{s} ds \approx$$

$$\approx \int_0^A f(s) \sin(sx) ds + \frac{\text{Si}(Ax)}{2}$$

Видно, что второе слагаемое является табличным интегралом, а именно, интегральным синусом $\text{Si}(Ax)$, где A – верхний предел интегрирования. Далее, заменяя первый интеграл интегральной суммой, приходим к виду, который при выборе $x_k = kp/A$ сводится к быстрому синус-преобразованию [2]:

$$\int_0^A f(s) \sin(sx) ds \approx \varepsilon \sum_{j=1}^{N-1} f(s_j) \sin(s_j x), \text{ где } \varepsilon = A/N, s_j = je.$$

Тогда окончательное выражение для поля перемещений будет иметь следующий вид:

$$u(x_k) \approx p \left(\varepsilon \left(\sum_{j=1}^{N-1} f(s_j) \sin(s_j x_k) + \sum_{j=1}^{N-1} f(s_j) \sin(s_j (x_k - a)) \right) + \frac{\text{Si}(Ax_k) - \text{Si}(A(x_k - a))}{2} \right)$$

Ниже приведён график (рис. 2) сравнения данной методики с прямым численным интегрированием уравнения (11). Расчёты проводились при следующих параметрах: $A=10$, $a=50$, $N=2^{13}=8192$, $p=1$. Для численного счёта интегрального синуса использовались аппроксимации рациональными функциями [3].

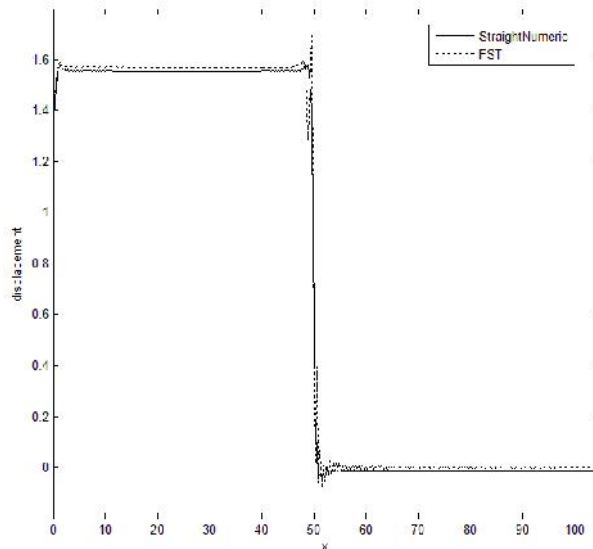


Рис.2. Зависимость вектора перемещений от расстояния.

Для прямого численного счёта среде программирования Visual C++ потребовалось 32,46 сек. Предлагаемый же подход занял всего 0,008 сек, т. е. примерно в 100 раз быстрее. Стоит отметить, что в первом случае для каждой координаты интеграл приходится считать отдельно, а применение быстрого преобразования позволяет посчитать его сразу для целого отрезка.

Причём, чем большее количество узлов N мы возьмём при численном счёте, тем больше будет длина этого отрезка, поскольку $x_N = N\pi/A$.

Работа поддержана ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. Госконтракт: 02.740.11.5024.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Ворович И.И. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001.
2. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. NUMERICAL RECIPES The Art of Scientific Computing Third Edition – NY.: Cambridge University Press, 2007.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
4. Williams, E.G., Maynard, J.D. Numerical evaluation of the Rayleigh integral for planar radiators using the FFT // The Journal of the Acoustical Society of America. 1982. С. 2020-2030.
5. Сумбатян М.А., Попужин В.В. Применение быстрого преобразования Фурье к коротковолновой дифракции на плоском твёрдом экране // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XII Международной конференции, г.Ростов-на-Дону, 1-5 декабря 2008г. , Ростов-на-Дону, 2008 г., т. 1., с.199-202.

Сведения об авторе

Попужин Виталий Владимирович – аспирант, Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики им. Воровича И. И. Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Тел: (007)-9604611932

E-mail: popuz@ya.ru

**О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, СВОБОДНО
ЛЕЖАЩИХ НА ЖЕСТКОЙ ПОДСТИЛКЕ С УЧЕТОМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ**
Саргсян М. З.

Рассмотрен вопрос определения напряженно-деформированного состояния ортотропной пластины, свободно лежащей на жесткой подстилке с учетом вязкого трения. На верхней лицевой поверхности пластины заданы: а) нормальная компонента напряжений, б) нормальная компонента вектора перемещения, а касательные напряжения отсутствуют. Получены асимптотические решения внутренней задачи [1], установлены условия возникновения резонанса.

1. Рассматриваются вынужденные колебания ортотропной пластины $D = \{(x, y, z), (x, y) \in D_0, |z| \leq h, h \ll l, \}$ с учетом вязкого трения при следующих двух типах граничных условий:

$$z = h: \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^+(\xi, \eta) \cos \Omega t, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

$$z = -h: \quad w = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$z = h: \quad w = w^+(\xi, \eta) \cos \Omega t, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.2)$$

$$z = -h: \quad w = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$\xi = x/l, \eta = y/l, \Omega$ – частота вынуждающего воздействия.

Условия на боковой поверхности, которыми обусловлено появление динамического пограничного слоя, не влияют на решение внутренней задачи, поэтому их конкретизировать не будем.

Требуется найти решение системы динамических уравнений пространственной задачи теории упругости ортотропных пластин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - k_1 \frac{\partial u}{\partial t} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (x, y, z; u, v, w) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{66} \sigma_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{22} \sigma_{yy} + a_{23} \sigma_{zz} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= a_{55} \sigma_{xz} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= a_{13} \sigma_{xx} + a_{23} \sigma_{yy} + a_{33} \sigma_{zz} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= a_{44} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (1.3)$$

при граничных условиях (1.1) и (1.2), где $\vec{R} = -k_1 \vec{V}$ – вязкое трение.

Решение системы уравнений (1.3) будем искать в виде [2, 3]:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta 1} \sin \Omega t + \sigma_{\alpha\beta 2} \cos \Omega t, \quad \alpha, \beta = x, y, z \quad (1.4)$$

$$u = u_1 \sin \Omega t + u_2 \cos \Omega t, \quad (u, v, w)$$

В системе (1.3) перейдем к безразмерным координатам и компонентам вектора перемещения:

$$\xi = x/l, \eta = y/l, \zeta = z/h, \quad (1.5)$$

$$U_i = u_i/l, V_i = v_i/l, W_i = w_i/l, \quad i = 1, 2$$

где $2h$ – толщина пластинки, $h \ll l$. Получим сингулярно-возмущенную малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{xx1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy1}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz1}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U_1 + 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* U_2 = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{xx2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy2}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz2}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U_2 - 2K \varepsilon^{-2} \Omega_* U_1 = 0 \quad (x, y, z; U, V, W) \\
& \frac{\partial U_j}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_{xxj} + a_{12} \sigma_{yyj} + a_{13} \sigma_{zzj} \quad \frac{\partial U_j}{\partial \eta} + \frac{\partial V_j}{\partial \xi} = a_{66} \sigma_{xyj} \\
& \frac{\partial V_j}{\partial \eta} = a_{12} \sigma_{xxj} + a_{22} \sigma_{yyj} + a_{23} \sigma_{zzj} \quad \frac{\partial W_j}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_j}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{yzj} \\
& \varepsilon^{-1} \frac{\partial W_j}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_{xxj} + a_{23} \sigma_{yyj} + a_{33} \sigma_{zzj} \quad \frac{\partial W_j}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_j}{\partial \zeta} = a_{55} \sigma_{xzj} \\
& \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2, \quad 2K = k_1 h / \sqrt{\rho}, \quad j = 1, 2
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Решение системы (1.6) складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b). Решение внутренней задачи будем искать в виде [4]:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\alpha\beta j}^{\text{int}} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{\alpha\beta j}^{(s)}, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad s = \overline{0, N} \\
& (U_j^{\text{int}}, V_j^{\text{int}}, W_j^{\text{int}}) = \varepsilon^s (U_j^{(s)}, V_j^{(s)}, W_j^{(s)}), \quad j = 1, 2
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Подставив (1.7) в (1.6), получим рекуррентную систему, из которой все напряжения можно выразить через компоненты вектора перемещения по формулам:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{xyj}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}} \left(\frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{xxj}^{(s)} = -A_{23} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} + A_{22} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{12} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\
& \sigma_{xzj}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U_j^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_j^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{yyj}^{(s)} = -A_{13} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{12} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{33} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\
& \sigma_{yzj}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \left(\frac{\partial V_j^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_j^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{zzj}^{(s)} = A_{11} \frac{\partial W_j^{(s)}}{\partial \zeta} - A_{23} \frac{\partial U_j^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{13} \frac{\partial V_j^{(s-1)}}{\partial \eta},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
& A_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta}, \quad A_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\Delta}, \quad A_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\Delta}, \quad A_{12} = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{\Delta}, \\
& A_{13} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{\Delta}, \quad A_{23} = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{\Delta}, \quad \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

А для определения функций $U_j^{(s)}, V_j^{(s)}, W_j^{(s)}$, $j = 1, 2$ получаются уравнения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*^2 U_1^{(s)} + 2K \Omega_* U_2^{(s)}) = R_{U1}^{(s)} \\
& \frac{\partial^2 U_2^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} (\Omega_*^2 U_2^{(s)} - 2K \Omega_* U_1^{(s)}) = R_{U2}^{(s)} \quad \left(U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}} \right)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где

$$R_{Uj}^{(s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55} \left(\frac{\partial \sigma_{xj}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xyj}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad R_{Vj}^{(s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44} \left(\frac{\partial \sigma_{xyj}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzj}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (1.11)$$

$$R_{Wj}^{(s)} = A_{23} \frac{\partial^2 U_j^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13} \frac{\partial^2 V_j^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{xzj}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yzj}^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad j = 1, 2$$

Из (1.10) получим:

$$U_2^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_* a_{55}} \left(\frac{\partial^2 U_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 U_1^{(s)} - R_{U1}^{(s)} \right), \quad \left(U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}} \right) \quad (1.12)$$

Следовательно, для определения $U_1^{(s)}, V_1^{(s)}, W_1^{(s)}$ получим уравнения:

$$\frac{\partial^4 U_1^{(s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{55} \Omega_*^2 \frac{\partial^2 U_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^2 (\Omega_*^2 + 4K^2) \Omega_*^2 U_1^{(s)} = \frac{\partial^2 R_{U1}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 R_{U1}^{(s)} - 2Ka_{55} \Omega_* R_{U2}^{(s)} \quad (1.13)$$

$$(U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}})$$

Решениями уравнений (1.13) являются:

$$U_1^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = U_{1o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{1\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W) \quad (1.14)$$

где величины с индексом "о" – решения однородных, а с индексом "τ" – частные решения неоднородных уравнений (1.13).

Решениями однородных уравнений будут:

$$U_{1o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_{U1}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{1U} + C_{U2}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{2U} + C_{U3}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{3U} + C_{U4}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{4U}, \quad (U, V, W) \quad (1.15)$$

где

$$\varphi_{1U} = \operatorname{ch} \gamma_U \zeta \cos \delta_U \zeta, \quad \varphi_{2U} = \operatorname{sh} \gamma_U \zeta \sin \delta_U \zeta, \quad \varphi_{3U} = \operatorname{ch} \gamma_U \zeta \sin \delta_U \zeta, \quad \varphi_{4U} = \operatorname{sh} \gamma_U \zeta \cos \delta_U \zeta, \quad (1.16)$$

$$\gamma_U = \sqrt{\frac{a_{55} \Omega_*}{2} (\sqrt{\Omega_*^2 + 4K^2} - \Omega_*)}, \quad \delta_U = \sqrt{\frac{a_{55} \Omega_*}{2} (\sqrt{\Omega_*^2 + 4K^2} + \Omega_*)}, \quad \left(U, V, W; a_{55}, a_{44}, \frac{1}{A_{11}} \right)$$

Одновременно из (1.12) имеем

$$U_2^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = U_{2o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{2\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W) \quad (1.17)$$

$$U_{2o}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_{U1}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{2U} - C_{U2}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{1U} - C_{U3}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{4U} + C_{U4}^{(s)}(\xi, \eta) \varphi_{3U} \quad (U, V, W)$$

Следовательно, из соотношений (1.8) для напряжений получим:

$$\sigma_{xz1}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right] + \sigma_{xz1\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\sigma_{xz2}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left[C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) - C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) - C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) \right] + \sigma_{xz2\tau}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (1.18)$$

$$(U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11})$$

где

$$U_{2\tau}^{(s)} = -\frac{1}{2K\Omega_* a_{55}} \left(\frac{\partial^2 U_{1\tau}^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \Omega_*^2 U_{1\tau}^{(s)} - R_{U1}^{(s)} \right), \quad \sigma_{xzj\tau}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}} \left(\frac{\partial U_{j\tau}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_j^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad j = 1, 2$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов $C_{Uj}^{(s)}, C_{Vj}^{(s)}, C_{Wj}^{(s)}$. Для $C_{Uj}^{(s)}, C_{Vj}^{(s)}$ получим систему:

$$\begin{aligned}
& \left[C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + \right. \\
& \left. + C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right] (\zeta = -1) = -a_{55} \sigma_{xz1\tau}^{(s)} (\zeta = -1) \\
& \left[C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) - C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) - \right. \\
& \left. - C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) \right] (\zeta = -1) = -a_{55} \sigma_{xz2\tau}^{(s)} (\zeta = -1) \\
& \left[C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) + C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) + \right. \\
& \left. + C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) \right] (\zeta = 1) = -a_{55} \sigma_{xz1\tau}^{(s)} (\zeta = 1) \\
& \left[C_{U1}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{3U} + \delta_U \varphi_{4U}) - C_{U2}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{4U} - \delta_U \varphi_{3U}) - \right. \\
& \left. - C_{U3}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{1U} - \delta_U \varphi_{2U}) + C_{U4}^{(s)} (\gamma_U \varphi_{2U} + \delta_U \varphi_{1U}) \right] (\zeta = 1) = -a_{55} \sigma_{xz2\tau}^{(s)} (\zeta = 1)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

(U, V; a₅₅, a₄₄; x, y)

Решив эту систему, получим:

$$C_{Uj}^{(s)} = \frac{f_{Uj}^{(s)}}{\Delta_U}, \quad (U, V) \tag{1.20}$$

где Δ_U – определитель матрицы коэффициентов системы (1.19), а $f_{Uj}^{(s)}(\xi, \eta)$, $j = 1, 2, 3, 4$ получаются из определителя Δ_U заменой соответствующих столбцов столбцом из свободных членов.

$$\Delta_U = \frac{1}{2} (\gamma_U^2 + \delta_U^2)^2 (\cos 4\delta_U - \operatorname{ch} 4\gamma_U), \quad (U, V) \tag{1.21}$$

$U_1^{(s)}, U_2^{(s)} (U, V)$ будут конечными, если

$$\Delta_U \neq 0, \quad \Delta_V \neq 0 \tag{1.22}$$

Условия (1.22) будут выполнены, если Ω не является частотой собственных колебаний [5], в противном случае будет возникать резонанс.

Для определения $C_{Wj}^{(s)}$ получается система:

$$\begin{aligned}
& \left[C_{W1}^{(s)} \varphi_{1W} + C_{W2}^{(s)} \varphi_{2W} + C_{W3}^{(s)} \varphi_{3W} + C_{W4}^{(s)} \varphi_{4W} \right] (\zeta = -1) = -W_{1\tau}^{(s)} (\zeta = -1) \\
& \left[C_{W1}^{(s)} \varphi_{2W} - C_{W2}^{(s)} \varphi_{1W} - C_{W3}^{(s)} \varphi_{4W} + C_{W4}^{(s)} \varphi_{3W} \right] (\zeta = -1) = -W_{2\tau}^{(s)} (\zeta = -1) \\
& \left[C_{W1}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{4W} - \delta_U \varphi_{3W}) + C_{W2}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{3W} + \delta_W \varphi_{4W}) + C_{W3}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{2W} + \delta_W \varphi_{1W}) + \right. \\
& \left. + C_{W4}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{1W} - \delta_W \varphi_{2W}) \right] (\zeta = 1) = \sigma_{zz1\tau}^{(s)} (\zeta = 1) \\
& \left[C_{W1}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{3W} + \delta_U \varphi_{4W}) - C_{W2}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{4W} - \delta_W \varphi_{3W}) - C_{W3}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{1W} - \delta_W \varphi_{2W}) + \right. \\
& \left. + C_{W4}^{(s)} (\gamma_W \varphi_{2W} + \delta_W \varphi_{1W}) \right] (\zeta = 1) = -\frac{1}{A_{11}} (\sigma_{zz2}^{+(s)} - \sigma_{zz2\tau}^{(s)} (\zeta = 1))
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\sigma_{zz2}^{+(0)} = \varepsilon \sigma_{zz}^+, \quad \sigma_{zz2}^{+(s)} = 0, \quad s > 0$$

опредетитель матрицы коэффициентов которой будет:

$$\Delta_W = -\frac{1}{2} (\gamma_W^2 + \delta_W^2) (\cos 4\delta_W + \operatorname{ch} 4\gamma_W) \tag{1.24}$$

Искомые коэффициенты определяются по формуле:

$$C_{wj}^{(s)} = \frac{f_{wj}^{(s)}}{\Delta_w}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (1.25)$$

где $f_{wj}^{(s)}$ получаются таким же способом, как $f_{Uj}^{(s)}$ и $f_{Vj}^{(s)}$. $W_1^{(s)}, W_2^{(s)}$ будут конечными, если

$$\Delta_w \neq 0 \quad (1.26)$$

В противном случае Ω будет совпадать с частотой собственных колебаний пластинки и будет возникать резонанс.

При граничных условиях (1.2) коэффициенты $C_{Uj}^{(s)}, C_{Vj}^{(s)}$ получают тот же вид, что и в предыдущем случае, а для определения $C_{wj}^{(s)}$ получается система:

$$\begin{aligned} & \left[C_{w1}^{(s)} \varphi_{1w} + C_{w2}^{(s)} \varphi_{2w} + C_{w3}^{(s)} \varphi_{3w} + C_{w4}^{(s)} \varphi_{4w} \right] (\zeta = -1) = -W_{1\tau}^{(s)} (\zeta = -1) \\ & \left[C_{w1}^{(s)} \varphi_{2w} - C_{w2}^{(s)} \varphi_{1w} - C_{w3}^{(s)} \varphi_{4w} + C_{w4}^{(s)} \varphi_{3w} \right] (\zeta = -1) = -W_{2\tau}^{(s)} (\zeta = -1) \\ & \left[C_{w1}^{(s)} \varphi_{1w} + C_{w2}^{(s)} \varphi_{2w} + C_{w3}^{(s)} \varphi_{3w} + C_{w4}^{(s)} \varphi_{4w} \right] (\zeta = 1) = -W_{1\tau}^{(s)} (\zeta = 1) \\ & \left[C_{w1}^{(s)} \varphi_{2w} - C_{w2}^{(s)} \varphi_{1w} - C_{w3}^{(s)} \varphi_{4w} + C_{w4}^{(s)} \varphi_{3w} \right] (\zeta = 1) = W_2^{+(s)} - W_{2\tau}^{(s)} (\zeta = 1) \\ & W_2^{+(0)} = w^+ / l, \quad W_2^{+(s)} = 0, \quad s > 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

определитель матрицы коэффициентов которой будет:

$$\Delta_w = \frac{1}{2} (\cos 4\delta_w - ch 4\gamma_w) \quad (1.28)$$

Функции $C_{wj}^{(s)}$ определяются по формуле (1.25), где Δ_w уже определяется по формуле (1.28), а $f_{wj}^{(s)}$ получается от определителя Δ_w системы (1.27) заменой столбца j столбцом из свободных членов системы (1.27). В этом случае условиями возникновения резонанса будут:

$$\Delta_U = 0, \quad \Delta_V = 0, \quad \Delta_w = 0 \quad (1.29)$$

где Δ_U, Δ_V имеют вид (1.21).

По выведенным выше формулам можно определить все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения для произвольного приближения “s”. Если входящие в граничные условия функции – многочлены от ξ, η , итерационный процесс обрывается и получается точное решение внутренней задачи.

2. Рассмотрим частный пример. Пусть $\sigma_{zz}^+(\xi, \eta) = \text{const}$. При граничных условиях (1.1) получим:

$$U^{(0)} = V^{(0)} = 0$$

Следовательно, будем иметь:

$$s_{xz}^{(0)} = s_{yz}^{(0)} = s_{xy}^{(0)} = 0$$

Нормальная компонента вектора перемещения определится по формуле:

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= \frac{\sigma_{zz2}^{+(0)}}{A_{11}(\gamma_w^2 + \delta_w^2)(\cos 4\delta_w + ch 4\gamma_w)} \times \\ & \times \left[ch \gamma_w \zeta (ch \gamma_w (\delta_w \cos \Omega t - \gamma_w \sin \Omega t) \sin \delta_w (3 + \zeta) + ch 3\gamma_w (-\delta_w \cos \Omega t + \right. \\ & + \gamma_w \sin \Omega t) \sin \delta_w (1 - \zeta) - (\gamma_w \cos \Omega t + \delta_w \sin \Omega t)(\cos \delta_w (3 + \zeta) sh \gamma_w - \cos \delta_w (1 - \zeta) sh 3\gamma_w)) + \\ & + (\cos \delta_w (3 + \zeta) ch \gamma_w (\gamma_w \cos \Omega t + \delta_w \sin \Omega t) + \cos \delta_w (1 - \zeta) ch 3\gamma_w (\gamma_w \cos \Omega t + \delta_w \sin \Omega t) - \\ & \left. - (\delta_w \cos \Omega t - \gamma_w \sin \Omega t) (\sin \delta_w (3 + \zeta) sh \gamma_w + \sin \delta_w (1 - \zeta) sh 3\gamma_w)) sh \gamma_w \zeta \right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

Нормальная компонента тензора напряжений имеет вид:

$$\sigma_{xx}^{(0)} = -\frac{A_{23}\sigma_{zz}^{+(s)}}{A_{11}(\cos 4\delta_w + \operatorname{ch} 4\gamma_w)} \left[(\sin \delta_w (1-\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (3+\zeta) + \sin \delta_w (3+\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (1-\zeta)) \sin \Omega t + \right. \\ \left. + (\cos \delta_w (1-\zeta) \operatorname{ch} \gamma_w (3+\zeta) + \cos \delta_w (3+\zeta) \operatorname{ch} \gamma_w (1-\zeta)) \cos \Omega t \right] \quad (x, y, z; -A_{23}, -A_{13}, A_{11}) \quad (1.31)$$

Итерационный процесс обрывается на приближении $s=0$ и имеем решение:

$$u = v = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.32)$$

$$w = \frac{h\sigma_{zz}^+}{A_{11}(\gamma_w^2 + \delta_w^2)(\cos 4\delta_w + \operatorname{ch} 4\gamma_w)} \times \\ \times \left[\operatorname{ch} \gamma_w \zeta (\operatorname{ch} \gamma_w (\delta_w \cos \Omega t - \gamma_w \sin \Omega t) \sin \delta_w (3+\zeta) + \operatorname{ch} 3\gamma_w (-\delta_w \cos \Omega t + \right. \\ \left. + \gamma_w \sin \Omega t) \sin \delta_w (1-\zeta) - (\gamma_w \cos \Omega t + \delta_w \sin \Omega t)(\cos \delta_w (3+\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w - \cos \delta_w (1-\zeta) \operatorname{sh} 3\gamma_w)) + \right. \\ \left. + (\cos \delta_w (3+\zeta) \operatorname{ch} \gamma_w (\gamma_w \cos \Omega t + \delta_w \sin \Omega t) + \cos \delta_w (1-\zeta) \operatorname{ch} 3\gamma_w (\gamma_w \cos \Omega t + \delta_w \sin \Omega t) - \right. \\ \left. - (\delta_w \cos \Omega t - \gamma_w \sin \Omega t) (\sin \delta_w (3+\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w + \sin \delta_w (1-\zeta) \operatorname{sh} 3\gamma_w)) \operatorname{sh} \gamma_w \zeta \right]$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{A_{23}\sigma_{zz}^+}{A_{11}(\cos 4\delta_w + \operatorname{ch} 4\gamma_w)} \times \\ \times \left[(\sin \delta_w (1-\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (3+\zeta) + \sin \delta_w (3+\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (1-\zeta)) \sin \Omega t + (\cos \delta_w (1-\zeta) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} \gamma_w (3+\zeta) + \cos \delta_w (3+\zeta) \operatorname{ch} \gamma_w (1-\zeta)) \cos \Omega t \right] \quad (x, y, z; -A_{23}, -A_{13}, A_{11})$$

При граничных условиях (1.2), когда $w^+(\xi, \eta) = \text{const}$, будем иметь:

$$U^{(0)} = V^{(0)} = 0 \\ \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{yz}^{(0)} = \sigma_{xy}^{(0)} = 0$$

Нормальная компонента тензора напряжений и вектора перемещения определяются по формулам:

$$W^{(0)} = \frac{W_2^{+(0)}}{\cos 4\delta_w - \operatorname{ch} 4\gamma_w} \left[(\operatorname{ch} \gamma_w \operatorname{ch} \gamma_w \zeta (\cos \delta_w (3+\zeta) + (1-2\operatorname{ch} 2\gamma_w) \cos \delta_w (1-\zeta)) - \right. \\ \left. - 2 ((\cos 2\delta_w \cos \delta_w (1+\zeta) + \cos \delta_w (1-\zeta) \operatorname{ch} 2\gamma_w) \operatorname{sh} \gamma_w \operatorname{sh} \gamma_w \zeta)) \sin \Omega t + \right. \\ \left. + (\operatorname{ch} 2\gamma_w \sin \delta_w (1-\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (1+\zeta) - \cos 2\delta_w \sin \delta_w (1+\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (1-\zeta)) \cos \Omega t \right] \\ \sigma_{xx}^{(0)} = -\frac{A_{23}W_2^{+(0)}}{\cos 4\delta_w - \operatorname{ch} 4\gamma_w} \left[2 \sin \Omega t \left[-\gamma_w \cos 2\delta_w \operatorname{ch} \gamma_w (1-\zeta) \sin \delta_w (1+\zeta) + \right. \right. \\ \left. + \operatorname{ch} 2\gamma_w (-\gamma_w \operatorname{ch} \gamma_w (1+\zeta) \sin \delta_w (1-\zeta) + \delta_w \cos \delta_w (1-\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (1+\zeta)) + \right. \\ \left. + \delta_w \cos \delta_w \cos \delta_w (1+\zeta) \operatorname{sh} \gamma_w (1-\zeta) \right] + \cos \Omega t \left[\delta_w \operatorname{ch} \gamma_w \operatorname{ch} \gamma_w \zeta ((1-2\operatorname{ch} 2\gamma_w) \times \right. \\ \left. \times \sin \delta_w (1-\zeta) - \sin \delta_w (3+\zeta)) - 2\gamma_w (\cos 2\delta_w \cos \delta_w (1+\zeta) + \cos \delta_w (1-\zeta) \operatorname{ch} 2\gamma_w) \operatorname{ch} \gamma_w \zeta \operatorname{sh} \gamma_w + \right. \\ \left. + \gamma_w \operatorname{ch} \gamma_w (\cos \delta_w (3+\zeta) + (1-2\operatorname{ch} 2\gamma_w) \cos \delta_w (1-\zeta)) \operatorname{sh} \gamma_w \zeta + \right. \\ \left. + 2\delta_w (\cos 2\delta_w \sin \delta_w (1+\zeta) - \operatorname{ch} 2\gamma_w \sin \delta_w (1-\zeta)) \operatorname{sh} \gamma_w \operatorname{sh} \gamma_w \zeta \right] \quad (1.33) \\ (x, y, z; -A_{23}, -A_{13}, A_{11})$$

Окончательным решением будет:

$$u = v = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$w = \frac{w^+}{\cos 4\delta_w - \text{ch} 4\gamma_w} [(\text{ch} \gamma_w \text{ch} \gamma_w \zeta (\cos \delta_w (3 + \zeta) + (1 - 2\text{ch} 2\gamma_w) \cos \delta_w (1 - \zeta)) - 2((\cos 2\delta_w \cos \delta_w (1 + \zeta) + \cos \delta_w (1 - \zeta) \text{ch} 2\gamma_w) \text{sh} \gamma_w \text{sh} \gamma_w \zeta)) \sin \Omega t + (\text{ch} 2\gamma_w \sin \delta_w (1 - \zeta) \text{sh} \gamma_w (1 + \zeta) - \cos 2\delta_w \sin \delta_w (1 + \zeta) \text{sh} \gamma_w (1 - \zeta)) \cos \Omega t]$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{A_{23} w^+}{h(\cos 4\delta_w - \text{ch} 4\gamma_w)} \left[2 \sin \Omega t \left[-\gamma_w \cos 2\delta_w \text{ch} \gamma_w (1 - \zeta) \sin \delta_w (1 + \zeta) + \text{ch} 2\gamma_w (-\gamma_w \text{ch} \gamma_w (1 + \zeta) \sin \delta_w (1 - \zeta) + \delta_w \cos \delta_w (1 - \zeta) \text{sh} \gamma_w (1 + \zeta)) + \delta_w \cos \delta_w \cos \delta_w (1 + \zeta) \text{sh} \gamma_w (1 - \zeta) \right] + \cos \Omega t \left[\delta_w \text{ch} \gamma_w \text{ch} \gamma_w \zeta ((1 - 2\text{ch} 2\gamma_w) \times \sin \delta_w (1 - \zeta) - \sin \delta_w (3 + \zeta)) - 2\gamma_w (\cos 2\delta_w \cos \delta_w (1 + \zeta) + \cos \delta_w (1 - \zeta) \text{ch} 2\gamma_w) \text{ch} \gamma_w \zeta \text{sh} \gamma_w + \gamma_w \text{ch} \gamma_w \times (\cos \delta_w (3 + \zeta) + (1 - 2\text{ch} 2\gamma_w) \cos \delta_w (1 - \zeta)) \text{sh} \gamma_w \zeta + 2\delta_w (\cos 2\delta_w \sin \delta_w (1 + \zeta) - \text{ch} 2\gamma_w \sin \delta_w (1 - \zeta)) \text{sh} \gamma_w \text{sh} \gamma_w \zeta \right] \right]$$

$$(x, y, z; -A_{23}, -A_{13}, A_{11}) \quad (1.34)$$

Полученные решения поставленных задач в общем случае не удовлетворяют условиям на боковых поверхностях, для удовлетворения которых необходимо построить решение типа пограничного слоя [1] и провести сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя, используя условия на боковой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л. А., Агаловян М. Л. О собственных колебаниях ортотропной полосы при наличии вязкого сопротивления // В сб.: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван.: Изд-во "Гитутюн" НАН РА, 2003. С. 57-67.
3. Азатян Г. Л. Вынужденные колебания ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. №2. С.29–40.
4. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Межвуз. сб.: Механика. Изд. ЕГУ 1982. Вып. 2. С.7-12.
5. Агаловян Л. А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. // Проблемы механики тонких деформируемых тел. Изв. "Гитутюн". НАН РА. Ереван. 2002. С. 9-19.

Сведения об авторе:

Саргсян Месроп
Аспирант, Институт механики НАН РА
Тел.: (093)069950, дом. (0224)22335
E-mail: messarg@gmail.com

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян А. А.

В последнее время интерес к несимметричной, моментной, микрополярной теории упругости, или иначе, континуума Коссера, возрос благодаря новым проблемам современной микромеханики и нанотехнологии. Исследования физико-механических свойств твердых тел с искусственной нанокристаллической структурой, изучение процессов колебаний и распространения волн в этих телах, один из актуальных вопросов в области микро- и наномеханики. Актуально также построение математических моделей микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек и изучение специфических особенностей напряженно-деформированного состояния и динамические процессы в указанных тонких телах.

Направление исследований задач тонких балок, пластин и оболочек на основе микрополярной теории упругости поставлено С. А. Амбарцумяном [1].

С. О. Саркисяном [2,3] построены асимптотически точные общие математические модели динамических задач микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек со свободным вращением, со стесненным вращением, "с малой сдвиговой жесткостью".

В работах [4 – 6] на основе общих моделей [2,3] микрополярных балок и пластин изучены задачи о свободных колебаниях балок и пластин.

В данной работе на основе общей динамической теории микрополярных тонких оболочек [3] получены основные уравнения, граничные и начальные условия осесимметричной динамической задачи микрополярных цилиндрических оболочек и рассмотрены задачи свободных колебаний микрополярных цилиндрических оболочек по трем теориям: с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением, "с малой сдвиговой жесткостью".

1. Основные уравнения и граничные условия осесимметричной динамической задачи микрополярных цилиндрических оболочек.

На основе общей динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек [3] здесь приведем определяющие уравнения для цилиндрических оболочек.

А) Когда безразмерные физические параметры цилиндрической оболочки имеют значения

$$\frac{\alpha}{4\mu} \sim 1, \quad \frac{\beta}{r^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{r^2\mu} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{r^2\mu} \sim 1 \quad (1)$$

получим случай динамической задачи со свободным вращением [3]:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \xi} &= 2\rho h r \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + r(q_1^+ + q_1^-), \quad T_{22} + \frac{\partial N_{13}}{\partial \xi} = 2\rho h r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r(q_3^+ + q_3^-), \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial \xi} + rN_{13} &= 2Jhr \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} + r(m_2^+ + m_2^-), \end{aligned} \quad (2)$$

Физические соотношения

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad L_{12} = 2h(\gamma + \varepsilon)\chi_{12}, \quad N_{13} = -2h \frac{4\alpha\mu}{\alpha + \mu} \Gamma_{13}, \quad (3)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \Gamma_{22} = -\frac{w}{r}, \quad \Gamma_{13} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \Omega_2, \quad \chi_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi}, \quad (4)$$

Граничные условия (шарнирного опирания)

$$w = 0, \quad T_{11} = 0, \quad L_{12} = 0, \quad \text{при } \xi = 0, l/r. \quad (5)$$

К общей динамической задаче следует присоединить также начальные условия.

Здесь ξ – безразмерная координата $\xi = \alpha_1/r$ вдоль оси оболочки; t – время; r – радиус срединной поверхности оболочки; $2h$ – толщина оболочки, T_{ii}, N_{13} – усилия; L_{12} – усредненный момент от моментного напряжения; w – прогиб цилиндрической оболочки; u_1 – перемещение вдоль координатной линии α_1 ; Ω_2 – свободный поворот точек срединной поверхности цилиндрической оболочки вокруг оси α_2 ; $E, \nu, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие константы

микрополярного материала оболочки; ρ – ее плотность; J – мера инерции при вращении.

Относительно перемещений w, u_1 и поворота Ω_2 уравнения динамики цилиндрической оболочки имеют вид:

$$\mathcal{L}_{11}u_1 + \mathcal{L}_{13}w + X_1 = 0, \quad \mathcal{L}_{31}u_1 + \mathcal{L}_{33}w + \mathcal{L}_{35}\Omega_2 + X_3 = 0, \quad \mathcal{L}_{53}w + \mathcal{L}_{55}\Omega_2 + X_5 = 0, \quad (6)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \rho r^2 \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathcal{L}_{33} = 1 - \frac{1-v^2}{E} \frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \rho r^2 \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathcal{L}_{13} &= \mathcal{L}_{31} = -v \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \mathcal{L}_{35} = \frac{1-v^2}{E} \frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu} r \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \mathcal{L}_{55} = (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu} r^2 - Jr^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathcal{L}_{53} &= \frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu} r \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad X_1 = -\frac{1-v^2}{E} \frac{r^2}{2h} (q_1^+ + q_1^-), \\ X_3 &= -\frac{1-v^2}{E} \frac{r^2}{2h} (q_3^+ + q_3^-) + \frac{1-v^2}{E} \frac{\alpha-\mu}{\alpha+\mu} \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (q_1^+ - q_1^-), \quad X_5 = -\frac{r^2}{2h} \left[(m_2^+ + m_2^-) + 2h \frac{\alpha}{\alpha+\mu} (q_1^+ - q_1^-) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Присоединим к системе уравнений (7) граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - vw = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \frac{l}{r} \quad (8)$$

Б) Когда безразмерные физические параметры цилиндрической оболочки имеют значения

$$\frac{\alpha}{\mu} \sim 1, \quad \frac{\beta}{r^2\mu} = \delta^2\beta_*, \quad \frac{\gamma}{r^2\mu} = \delta^2\gamma_*, \quad \frac{\varepsilon}{r^2\mu} = \delta^2\varepsilon_*, \quad \text{где } b_*, g_*, e_* \sim 1, \quad (9)$$

($\delta = \frac{2h}{r} \ll 1$ – малый геометрический параметр) получим случай динамической задачи цилиндрической оболочки со стесненным вращением [3]:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial \xi} &= 2\rho hr \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} r (q_1^+ + q_1^-), \quad T_{22} + \frac{\partial N_{13}}{\partial \xi} = 2\rho hr \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r (q_3^+ + q_3^-), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (G_{11} - L_{12}) - r N_{13} &= -2Jhr \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - r (m_2^+ - m_2^-) - rh (q_1^+ - q_1^-), \end{aligned} \quad (10)$$

Физические соотношения

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-v^2} [\Gamma_{ii} + v\Gamma_{jj}], \quad G_{11} = -\frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} K_{11}, \quad L_{12} = 2h(\gamma + \varepsilon)\chi_{12}, \quad (11)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \quad \Gamma_{22} = -\frac{w}{r}, \quad K_{11} = \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi}, \quad \beta_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \chi_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi}, \quad \Omega_2 = \beta_1, \quad (12)$$

Граничные условия шарнирного опирания

$$w = 0, \quad T_{11} = 0, \quad L_{12} - G_{11} = 0, \quad \text{при } \xi = 0, \frac{l}{r}. \quad (13)$$

Из (10) – (13) относительно перемещений w, u_1 получим следующую граничную задачу:

$$\mathcal{L}_{11}u_1 + \mathcal{L}_{13}w + X_1 = 0, \quad \mathcal{L}_{31}u_1 + \mathcal{L}_{33}w + X_3 = 0, \quad (14)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - vw = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \frac{l}{r}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \rho r^2 \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathcal{L}_{33} = 1 + \left(\frac{h^2}{3r^2} + (\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r^2} \frac{1-v^2}{E} \right) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \rho r^2 \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - J \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial t^2}, \\ \mathcal{L}_{13} &= \mathcal{L}_{31} = -v \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad X_1 = -\frac{1-v^2}{E} \frac{r^2}{2h} (q_1^+ + q_1^-), \\ X_3 &= -\frac{1-v^2}{E} \frac{r}{2h} \left[r(q_3^+ + q_3^-) - h \frac{\partial}{\partial \xi} (q_1^+ - q_1^-) + \frac{\partial}{\partial \xi} (m_2^+ + m_2^-) \right].\end{aligned}\quad (16)$$

В) Когда безразмерные физические параметры цилиндрической оболочки имеют значения

$$\frac{\alpha}{\mu} = \delta^2 \alpha_*, \quad \frac{\beta}{r^2 \mu} = \beta_*, \quad \frac{\gamma}{r^2 \mu} = \gamma_*, \quad \frac{\varepsilon}{r^2 \mu} = \varepsilon_*, \quad \text{где } \alpha_*, \beta_*, \gamma_*, \varepsilon_* \sim 1, \quad (17)$$

получим случай динамической задачи “с малой сдвиговой жесткостью”. В этом случае “чисто моментная часть” задачи отделяется, а определяющие уравнения имеют вид [3]:

уравнение движения, физико-геометрическое соотношение и граничное условие шарнирного опирания “чисто моментной” части задачи

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \xi} = 2Jhr \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} + r(m_2^+ + m_2^-), \quad (18)$$

$$L_{12} = 2h(\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi}, \quad (19)$$

$$L_{12} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \frac{l}{r}. \quad (20)$$

“Силовая часть” задачи приводится к следующей системе дифференциальных уравнений:
уравнения движения

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \xi} = 2\rho hr \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} r(q_1^+ + q_1^-), \quad \frac{\partial G_{11}}{\partial \xi} - rN_{31} + rh(q_1^+ - q_1^-) = 0, \quad T_{22} + \frac{\partial N_{13}}{\partial \xi} = 2\rho hr \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - r(q_3^+ + q_3^-) \quad (21)$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned}T_{11} &= \frac{2Eh}{1-v^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - v \frac{w}{r} \right], \quad T_{22} = \frac{2Eh}{1-v^2} \left[-\frac{w}{r} + v \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right], \\ G_{11} &= -\frac{2Eh^3}{3(1-v^2)} \frac{1}{r} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi}, \quad N_{13} = N_{31} - 8h\alpha \left(\Omega_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)'\end{aligned}\quad (22)$$

граничные условия шарнирного опирания

$$w = 0, \quad T_{11} = 0, \quad G_{11} = 0, \quad \text{при } \xi = 0, \frac{l}{r}. \quad (23)$$

Из (18) – (20) получим граничную задачу относительно поворота Ω_2 :

$$(\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial \xi^2} - Jr^2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} = \frac{r^2}{2h} (m_2^+ + m_2^-), \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \frac{l}{r}. \quad (25)$$

А из (21) – (23) получим граничную задачу относительно перемещений w, u_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - \rho r^2 \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - v \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{1-v^2}{E} \frac{r^2}{2h} (q_1^+ + q_1^-), \\ -v \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + w - 4\alpha \frac{1-v^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{h^2}{3r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{1-v^2}{E} \left(\rho r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 4\alpha r \frac{\partial \Omega_2}{\partial \xi} \right) &= 0\end{aligned}\quad (26)$$

$$= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{r^2}{2h} (q_3^+ + q_3^-) + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (q_1^+ - q_1^-),$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \nu w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \text{при } \xi = 0, \frac{l}{r}.$$
 (27)

2. Свободные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек.

В дальнейшем будем изучать свободные колебания микрополярных упругих цилиндрических оболочек, при котором нас будут интересовать частоты и формы собственных колебаний.

А) Собственные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

Решение граничной задачи (6),(7),(8) (здесь и в дальнейшем надо считать внешние силы равными нулю) представим в виде:

$$w = (A_m \sin(p_m t) + B_m \cos(p_m t)) \sin \frac{m\pi r}{l} \xi, \quad u_1 = (A'_m \sin(p_m t) + B'_m \cos(p_m t)) \cos \frac{m\pi r}{l} \xi,$$

$$\Omega_2 = (A''_m \sin(p_m t) + B''_m \cos(p_m t)) \cos \frac{m\pi r}{l} \xi,$$
 (28)

где $A_m, B_m, A'_m, B'_m, A''_m, B''_m$ – постоянные; p_m – частота собственных колебаний.

(28) уже удовлетворяет граничным условиям (8), удовлетворяя дифференциальным уравнениям (6), для определения собственных частот p_m получим следующее уравнение:

$$\left\{ J \rho^2 r^6 \frac{1-\nu^2}{E} p_m^6 - \left\{ J \left[1 + \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 \right] + \rho(\gamma + \varepsilon) \frac{1-\nu^2}{E} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 + \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \frac{1-\nu^2}{E} \left[J \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 - \rho r^2 \right] \right\} \rho r^4 p_m^4 + \right.$$

$$\left. + \left\{ JE + J \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 + \rho(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 + \rho(\gamma + \varepsilon) + \rho(\gamma + \varepsilon) \frac{1-\nu^2}{E} \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \right\} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 r^2 p_m^2 - \right.$$

$$\left. - (\gamma + \varepsilon) \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^6 - E(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^4 - Er^2 \frac{4\mu\alpha}{\mu + \alpha} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 = 0. \right.$$
 (29)

Таблица 1. Результаты численных расчетов осесимметричной цилиндрической оболочки в рамках микрополярной теории со свободным вращением

Физические параметры материала оболочки: $\alpha = 9,5$ ГПа, $\mu = 2$ ГПа, $\lambda = 3$ ГПа, $\gamma = \varepsilon = 4$ кН; плотность материала: $\rho = 10^5$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $j = 10^4$ кг/м; длина оболочки $l = r/2$								
радиус срединной поверхности оболочки	Полутолщина оболочки	Жесткость		Собственные колебания				
		Микрополярная теория со свободным вращением	Классическая теория	микрополярная теория со свободным вращением			классическая теория	
r , мм	h , мм	$2(\gamma + \varepsilon)h$, Н·м	D , Н·мм	P_1 , сек ⁻¹	P_2 , сек ⁻¹	P_3 , сек ⁻¹	P_1 , сек ⁻¹	P_2 , сек ⁻¹
1	0,01	160	0,004	164100	1493043	5621,04	1503722	234180,5
3	0,03	480	0,103	546997	497684	1876,74	501241	78060,2
5	0,05	800	0,476	328195	298614	1129,71	300744	46836,1

На основании уравнения (29) для микрополярной круглой цилиндрической оболочки со свободным вращением получаются три спектра частот собственных колебаний. Численные результаты приведены в табл. 1 (при $m=1$). В табл. 1 приведены также частоты колебаний осесимметричной цилиндрической оболочки по классической теории.

Б) Собственные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек со стесненным вращением.

Решение граничной задачи (14),(15),(16) представим в виде:

$$w = \left(A_m \sin(p_m t) + B_m \cos(p_m t) \right) \sin \frac{m\pi r}{l} \xi, \quad u_1 = \left(A'_m \sin(p_m t) + B'_m \cos(p_m t) \right) \cos \frac{m\pi r}{l} \xi, \quad (30)$$

где A_m, B_m, A'_m, B'_m – постоянные; p_m – частота собственных колебаний.

На основе (30), удовлетворяя уравнениям (14) для собственных частот p_m , получим:

$$\rho r^4 \left[2Jh \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 + 2\rho h r^2 \right] p_m^4 - \left\{ \rho r^4 \frac{2Eh}{1-\nu^2} + \rho r^2 D^* \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^4 + \right. \\ \left. + r^2 \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 \left[2Jh \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 + 2\rho h r^2 \right] \right\} p_m^2 + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 \left[D^* \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^4 + 2Eh r^2 \right] = 0. \quad (31)$$

Здесь $D^* = D + 2h(\gamma + \varepsilon)$ – жесткость по микрополярной теории со стесненным вращением,

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} - \text{классическая жесткость оболочки.}$$

Таблица 2. Результаты численных расчетов осесимметричной цилиндрической оболочки в рамках микрополярной теории со стесненным вращением

Физические параметры материала оболочки: $\alpha = 9,5$ ГПа, $\mu = 2$ ГПа, $\lambda = 3$ ГПа, $\gamma = \varepsilon = 4$ кН; плотность материала: $\rho = 10^5$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $j = 10^4$ кг/м; длина оболочки $l = r/2$							
радиус срединной поверхности оболочки	Полутолщина оболочки	Жесткость		Собственные колебания			
		Микрополярная теория со стесненным вращением	Классическая теория	микрополярная теория со стесненным вращением		классическая теория	
r , мм	h , мм	D^* , Н·м	D , Н·м	P_1 , сек ⁻¹	P_2 , сек ⁻¹	P_1 , сек ⁻¹	P_2 , сек ⁻¹
5	0,05	0,8005	0,0005	300393,7	1130,14	300744,4	46836,1
10	0,1	1,6038	0,0038	150196,9	574,232	150372,2	23418,1
16	0,16	2,5756	0,0156	93873,04	370,52	93982,64	14636,3

На основании уравнения (31) для микрополярной круглой цилиндрической оболочки со стесненным вращением получаются два спектра частот собственных колебаний. Численные результаты приведены в табл. 2 (при $m=1$).

В) Собственные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек “с малой сдвиговой жесткостью”.

Решение граничной задачи (24),(25) зададим в виде:

$$\Omega_2 = \left(A''_m \sin(p_m t) + B''_m \cos(p_m t) \right) \cos \frac{m\pi r}{l} \xi \quad (32)$$

Удовлетворяя уравнению (24) для собственных частот p_m , получим:

$$p_m = \frac{(\gamma + \varepsilon)}{Jr^2} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2. \quad (33)$$

А решение граничной задачи (26),(27) зададим в виде:

$$w = \left(A_m \sin(p_m t) + B_m \cos(p_m t) \right) \sin \frac{m\pi r}{l} \xi, \quad u_1 = \left(A'_m \sin(p_m t) + B'_m \cos(p_m t) \right) \cos \frac{m\pi r}{l} \xi \quad (34)$$

Подставляя (32) в уравнение (26), для собственных частот p_m получим:

$$p_m^4 - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\rho r^2} \left[1 + \frac{h^2}{3r^2} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^4 + \left(1 + 4\alpha \frac{1-\nu^2}{E} \right) \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 \right] p_m^2 + \quad (35)$$

$$+ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\rho^2 r^4} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 \left[\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \frac{1}{r^2} \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^4 + 4\alpha \left(\frac{m\pi r}{l} \right)^2 + E \right] = 0.$$

Таблица 3. Результаты численных расчетов осесимметричной цилиндрической оболочки в рамках микрополярной теории со стесненным вращением

Физические параметры материала оболочки: $\alpha = 9,5$ МПа, $\mu = 2$ ГПа, $\lambda = 3$ ГПа, $\gamma = \varepsilon = 225$ кН; плотность материала: $\rho = 10^5$ кг/м ³ ; мера инерции при вращении: $j = 10^4$ кг/м; длина оболочки $l = r/2$						
радиус срединной поверхности оболочки r , мм	полу-толщина оболочки h , мм	Собственные колебания				
		микрополярная теория со стесненным вращением			классическая теория	
		$P_1, \text{сек}^{-1}$	$P_2, \text{сек}^{-1}$	$P_3, \text{сек}^{-1}$	$P_1, \text{сек}^{-1}$	$P_2, \text{сек}^{-1}$
4	0,04	375934	66052,2	10537,22	375930,6	58545,13
8	0,08	187967	33026,1	5268,611	187965,3	29272,57
12	0,12	125311	22017,4	3512,407	125310,2	19515,04

На основании формул (33), (35) для микрополярной круглой цилиндрической оболочки “с малой сдвиговой жесткостью” получаются два спектра частот собственных колебаний. Численные результаты приведены в табл. 3 (при $m=1$).

В работе получены аналитические решения частот собственных колебаний круглых оболочек на основе различных моделей несимметричной теории упругости [3]. Численный анализ собственных частот по соответствующим теориям в сопоставлении с результатом, полученным по классической теории, показывает, что по теории с независимыми полями перемещений и вращений и теории “с малой сдвиговой жесткостью” получаются три спектра собственных частот в то время, как по классической теории получается два спектра, а их значения в значительной мере отличны друг от друга. А по теории со стесненным вращением хотя и получается два спектра как в классической теории, но и здесь полученные результаты существенно отличны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
2. Sargsyan S. H. Dynamic Problem of Thin Plates on the Basis of Asymmetric Theory of Elasticity// Proc. Of XXXIV Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. 2006. Repino, Saint – Petersburg, Russia, 25 June – 1 July, 2006. P. 447 – 458.
3. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек //Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. № 2. С.154 – 166.
4. Атоян А.А., Саркисян С.О. Динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин //Экологический Вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. №1. С.18 – 29.
5. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных пластин //Тр. VII Всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород: Изд. Дом “Диалог Культур”, 2008. С. 415 – 423.
6. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости / Межвуз. сб. научн. тр., посвящ. 80-летию С. Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный педагогический институт им. О. Туманяна. 2008. Т. 2. С.4 –17.

Сведения об авторе:

Аспирант Гюмрийского государственного педагогического института.
377526, ул. Паруйра Севака, 4, е – mail: armenuhis@mail.ru

СХЕМА ОТСТОЙНИКА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРОМЫВКОЙ В ВОДОПРИЕМНЫХ УЗЛАХ ГОРНЫХ РЕК

Симонян А.

Воды горных рек Армении широко используются для водоснабжения. В верхних потоках горных рек вода обычно чистая и не содержит наносов. Большая разница отметок рельефа позволяет водоснабжение осуществить самотеком. Особенности режима горных рек создают трудности в процессе водопользования. Большие различия отметок наклона в продольном направлении в верхних потоках горных рек обуславливают их большие скорости и сравнительно небольшие глубины.

Горные реки переносят донные и взвешенные наносы в большом количестве, а иногда плавающие обломки растений и деревьев, их потоки подвержены большим и резким колебаниям.

Этими особенностями обусловлена сложность водоприемных сооружений на горных реках. Среди этих сооружений наиболее важное значение имеют отстойники, которые представляют собой углубленные и расширенные (по сравнению с каналами) продольные водные бассейны и предназначены для очистки от наносов, взятой из источника воды и снабжения потребителями водой требуемого качества. Обычно отстойники строятся вблизи водоприемного узла с тем расчетом, чтобы облегчить удаление наносов к нижнему бьефу.

Отстойники классифицируются по следующим нескольким признакам:

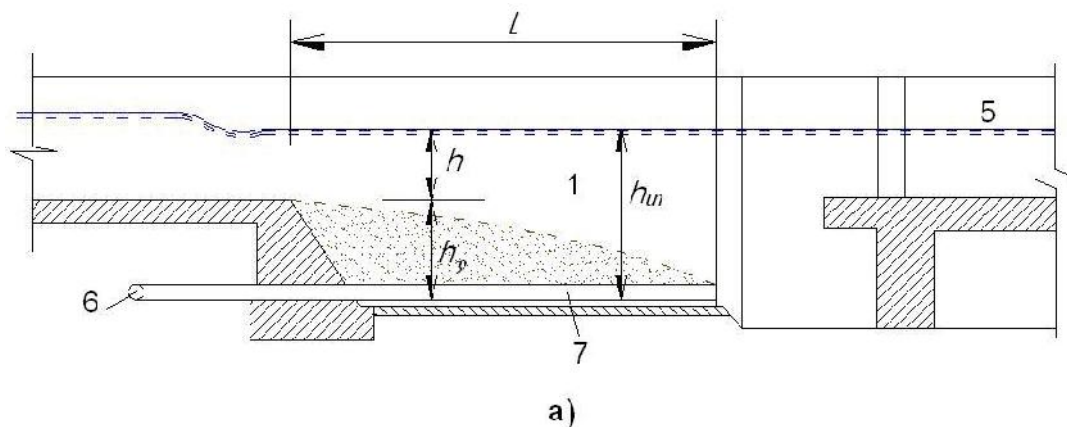
1. по назначению,
2. по качеству камер,
3. по способу промыва.

Приблизительный расчет размеров отстойника и определение времени осаждения наносов приводится в (1).

В настоящей работе рассматривается лишь комбинированный способ периодического промыва отстойников, когда скорость воды колеблется в пределах 0.2...0.5 м/с. В отстойниках подобного типа удаление наносов производится следующим образом: вначале накопившиеся наносы переводятся в взвешенное состояние, затем открывают промывающую воду, которая поглощая наносы, транспортирует их к нижнему бьефу или в другое предназначенное специально для этого место. Таким образом, можно уменьшить количество промывочной воды и сократить время промывки. С этой целью предлагаем следующую схему отстойника.

Особенность работы отстойника подобного типа состоит в том, что для разрыхления и поддержания в взвешенном состоянии накопившихся в отстойнике наносов используется давление сжатого воздуха, которое обеспечивается с помощью компрессора.

Промыв отстойника осуществляется следующим образом: когда камера наполнена наносами, с помощью компрессора (8) сжатый воздух по воздухоносной трубе (6) подается к пористым трубам (7), расположенным на дне отстойника.



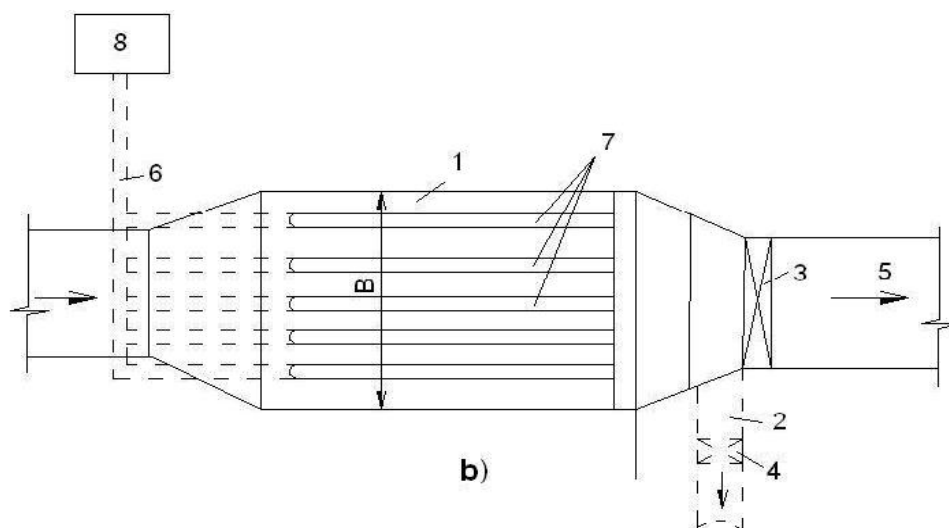


Рис1. Схема комбинированного периодически промываемого отстойника: а) продольное сечение, б) план 1 – камера отстойника, 2 – галерея промывки, 3,4 – плоские клапаны, 5 – основной канал, 6 – напорная воздухоносная труба, 7 – пористые трубы, 8 – компрессор.

Под воздействием созданного у пор вертикального давления наносы переходят в взвешенное состояние, а подаваемая в отстойник промывочная вода поглощает наносы и удаляет их к нижнему бьефу через галерею. Основными параметрами отстойника являются: длина l , ширина B , глубина h и мощность накопившихся в передней части отстойника слоя наносов h_B . Для описываемой схемы отстойника важное значение имеет как диаметр пористых труб (7), так и диаметр пор. Величину последнего можно определить, исходя из диаметра накопившихся наносов. При этом, на конце пористых труб диаметр пор должен быть меньше минимального диаметра накапливающихся наносов, а на их передней части он должен быть меньше максимального диаметра наносов.

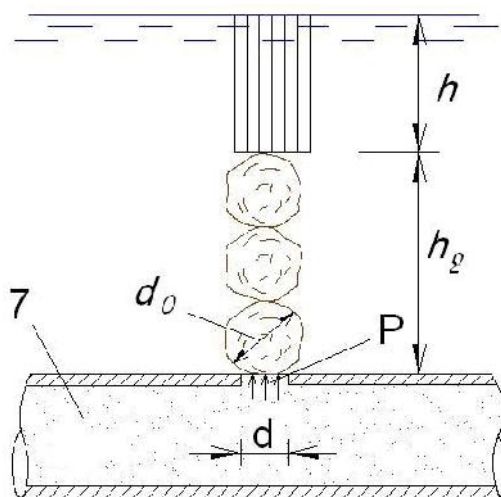


Рис. 2. Схема расчетной модели

Давление сжатого воздуха у пор должно преодолеть вес наносов высотой h_B , вес воды высотой h , а также силу сцепления частиц наносов. Если силу давления сжатого воздуха обозначим P , то условие равновесия сил можно представить в следующем виде (рис. 2):

$$P = \frac{\pi d^2}{4} = (\rho_\zeta - \rho) g \frac{\pi d_0^2}{4} h_\zeta + \rho g h \frac{\pi d_0^2}{4} + \pi d_0 h_\zeta C \quad (1)$$

где d – диаметр отверстия пористой трубы, d_0 – максимальная высота слоя накопившихся наносов, ρ – плотность воды, C – сила сцепления между частицами наносов, h – высота слоя воды, P – сила давления у отверстия.

Учитывая потери давления в воздухоносной трубе, можно определить давление компрессора и выбрать его марку из каталога.

ЛИТЕРАТУРА

1. Վերջին 30 տարիների զարգացումները հիդրոֆիզիկայի և հիդրոմեխանիկայի ոլորտում: Երևան, 1986. 480 էջ.
2. Абрамов Н.Н. “Водоснабжение”. М.: 1982.

Сведения об авторе

Симонян Армен Мартинович

Аспирант, Ереванский гос. университет архитектуры и строительства

Адрес: Ереван, ул Теряна 105

Тел.: (091) 284118, E-mail: Asrulee@mail.ru

ИЗГИБНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ СВОБОДНЫМИ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ

Срапионян Дж. Л.

В классической постановке исследуются изгибные собственные колебания ортотропной прямоугольной пластинки с противоположными свободными и жестко защемленными сторонами. Получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот и формулы для соответствующих форм колебаний. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной полубесконечной пластинки-полосы с защемленными противолежащими краями.

Пусть имеется прямоугольная ортотропная пластинка толщиной h , шириной s и длиной ℓ (рис. 1). Предполагается, что две противоположные стороны жестко защемлены, а две другие свободны. При условиях свободного колебания рассматривается вопрос существования изгибных колебаний пластинки. В качестве исходного уравнения применяется уравнение малых изгибных колебаний, которое соответствует классической теории ортотропных пластин [1], [2].

$$\mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) = \lambda u_3 \quad (1)$$

где α ($0 \leq \alpha \leq \ell$) и β ($0 \leq \beta \leq s$) – ортогональные координаты точки срединной плоскости.

$U_3(\alpha, \beta)$ – нормальная компонента вектора перемещения. B_{ik} ($i, k = 1, 2, 6$) – коэффициенты упругости; $\mu^4 = h^2 / 12$

Граничные условия имеют вид

$$U_3(\alpha, 0) = u_3(\alpha, s) = 0, \quad U_{3\beta}'(\alpha, 0) = u_{3\beta}'(\alpha, s) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \Big|_{\alpha=0, \ell} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \Big|_{\alpha=0, \ell} = 0 \quad (3)$$

Решения уравнения (1) ищем в виде [3]:

$$u_3 = W_{mn}(\beta) \exp(km\mu\alpha) \quad (4)$$

где $k = \pi/s$, m – волновое число, y – коэффициент затухания, а $W_{mn}(\beta)$ – собственная функция задачи

$$W^{IV} + k^4 m^4 \mu^4 W = 0 \quad (5)$$

$$W(0) = W(s) = W'(0) = W'(s) = 0 \quad (6)$$

соответствующем собственному значению $k^4 m^4 \mu_n^4$.

$$w_{mn}(\beta) = \frac{\omega_{mn}(\beta)}{\|\omega_{mn}\|}, \quad \|\omega_{mn}\| = \sqrt{\int_0^s \omega_{mn}^2(\beta) d\beta}$$

$$\omega_{mn}(\beta) = (\operatorname{sh}(km\mu_n s) - \sin(km\mu_n s))(\operatorname{ch}(km\mu_n \beta) - \cos(km\mu_n \beta)) - (\operatorname{ch}(km\mu_n s) - \cos(km\mu_n s))(\operatorname{sh}(km\mu_n \beta) - \sin(km\mu_n \beta)) \quad (7)$$

Заметим, что собственные значения задачи (5), (6) находятся из уравнения

$$\operatorname{ch}(kmm s) \cos(kmm s) - 1 = 0 \quad (8)$$

Подставляя (4) в (1), умножая обе части на $W_{mn}(\beta)$ и интегрируя от 0 до s , получим характеристическое уравнение для нахождения y

$$a^2 m^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} y^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \mu_n^2 \beta_{mn} y^2 - \mu_n^4 \right) - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 = 0 \quad (9)$$

$$a^2 = \mu^4 k^2, \quad \eta_m^2 = \frac{\lambda}{k^2 m^2 B_{66}}, \quad \beta_{mn} = \int_0^s W'_{mn}(\beta)^2 d\beta \quad (10)$$

Пусть y_3, y_4 – различные корни уравнения (1) с неположительными действительными частями, тогда $y_5 = -y_3, y_6 = -y_4$ – также различные корни уравнения (1). Решения задачи (1)-(3) ищем в виде

$$u_3 = W_{mn}(\beta) \sum_{j=3}^6 \exp(km y_j \alpha) w_j \quad (11)$$

При этом, граничные условия (2) выполняются автоматически. Используя граничные условия (3), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^4 A_j W_j + \sum_{j=3}^4 A_j W_{4+j} &= 0 \\ \sum_{j=3}^4 y_j B_j W_j - \sum_{j=3}^4 y_j B_j W_{4+j} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^4 A_j \exp(z_3) W_j + \sum_{j=3}^4 A_j \exp(-z_j) W_{4+j} &= 0 \\ \sum_{j=3}^4 y_j B_j \exp(z_j) - \sum_{j=3}^4 y_j B_j \exp(-z_j) W_{4+j} &= 0 \\ A_j = y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \mu_n^2 \beta_{mn}, B_j = y_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \mu_n^2 \beta_{mn}, z_j = km y_j \ell \end{aligned} \quad (13)$$

Приравнявая определитель (12) к нулю, получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} (y_4 - y_3)^2 K_{1mn}(\eta_m^2) (1 + \exp(2z_3 + 2z_4)) + 8y_3 y_4 \left(y_3^2 y_4^2 - \frac{B_{12}(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}^2} \mu_n^4 \beta_{mn}^2 \right) \exp(z_3 + z_4) - \\ - (y_3 + y_4)^2 K_{4mn}(\eta_m^2) (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$K_{imn} = y_3^2 y_4^2 + (-1)^{i-1} \frac{4B_{66}}{B_{11}} \mu_n^2 \beta_{mn} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 \mu_n^4 \beta_{mn}^2, \quad i = 1, 4 \quad (15)$$

Уравнение (14) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$\begin{aligned} K_{1mn}^2(\eta_m^2) (1 + \exp(2z_3 + 2z_4)) + 8m_{11} m_{21} m_{22} m_{12} \exp(z_3 + z_4) - \\ - 2m_{11} m_{21} (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21}) [z_3 z_4] (\exp(z_4) - \exp(z_3)) - \end{aligned} \quad (16)$$

$$- (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21})^2 (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) + 4m_{11}^2 m_{21}^2 [z_1 z_4]^2 = 0$$

$$m_{11} = R_{11}, \quad m_{21} = R_{21}, \quad m_{12} = y_3 + y_4,$$

$$m_{22} = y_3 y_4 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \mu_n^2 \beta_{mn}, \quad [z_3 z_4] = \frac{\exp(z_3) - \exp(z_4)}{z_3 - z_4} km \ell \quad (17)$$

Пусть C_1 и C_2 имеют отрицательные действительные части.

Тогда при $\ell \rightarrow \infty$ уравнения (14) и (16) преобразуются к уравнению

$$K_{1mn}(\eta_m^2) = y_3^2 y_4^2 + \frac{4B_{66}}{B_{11}} \mu_n^2 \beta_{mn} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 \mu_n^4 \beta_{mn}^2 = 0 \quad (18)$$

Уравнение (18) является дисперсионным уравнением полубесконечной ортотропной пластины-полосы с заземленными противоположащими краями. Численными вычислениями показано, что уравнения (16) и (18) могут иметь положительные корни относительно η_m^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Гулгазян Г.Р. Собственные колебания тонкой упругой ортотропной конечной цилиндрической оболочки. // ПМ. 2008. Т. 44. №5. С.68-91.
3. Chazaryan K. Mkrtchyan H., Marzocca P. Milane A. Localized bending vibration of a reetangular ptate with one Free and three clamped edges. Topical problems of continuum Mechanics; Yerevan, 2007, pp. 479-482.

Сведения об авторе...

Срапионян Джанибек Липаритович

соискатель кафедры математического анализа и теории функций АГПУ им.Х. Абовяна,
Адрес: ул. Ханджяна 5, Ереван, Армения
Тел.: (+37410) 353263, (+37491)770771

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ ПРИ МНОГИХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

Степанян А.А.

Рассматривается дифференциальная игра трех лиц с простой динамикой, когда в различные моменты времени каждый игрок имеет свое целевое множество. Цель каждого игрока является минимизация суммы расстояний движения от соответствующих целевых множеств в заданные моменты времени при самом упорном противодействии других игроков. Приведена схема построения оптимальных стратегий игроков. Для конкретных числовых значений построены стратегии игроков и определены значения функционалов для каждого игрока.

1. Рассмотрим управляемую систему, которая описывается простой динамикой

$$\dot{x} = u_1 + u_2 + u_3 \quad (1.1)$$

Здесь $x \in R^2$ – фазовый вектор объекта, $u_i \in P_i \subset R^2$ – управление i -ой стороны, где P_i – компакты ($i = 1, 2, 3$).

Введем следующие обозначения:

$$K = \{1, 2, 3\}, \quad K(i) = K \setminus \{i\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$P^{(i)} = \prod_{j \in K(i)} P_j \quad (1.2)$$

$$u^{(1)} = (u_2, u_3), \quad u^{(2)} = (u_1, u_3), \quad u^{(3)} = (u_1, u_2)$$

Предположим, что заданы моменты времени $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \dots < \vartheta_m = T$. Пусть также заданы закрытые и ограниченные множества $M_i^{(j)} \subset R^2$, которые являются целевыми множествами для i -го игрока ($i = 1, 2, 3$) в момент времени ϑ_j ($j = 1, \dots, m$).

В момент времени $t = t_0$ система (1.1) находится в положении $x(t_0) = x_0$. Обозначая через $G(t_0, x_0, \vartheta_j)$ область достижимости системы (1.1) в момент времени ϑ_j , предполагается, что целевые множества любого игрока имеют пересечение с соответствующими областями достижимости системы [1]:

$$M_i^{(j)} \cap G(t_0, x_0, \vartheta_j) \neq \emptyset \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, m)$$

Каждый игрок стремится в моменты времени ϑ_j состояние системы (1.1) сблизить со своими целевыми множествами, т.е. уменьшить суммарное расстояние от своих целевых множеств, предполагая, что все остальные игроки будут противодействовать ему.

Составим плату каждого игрока как сумму расстояний движения в моменты времени ϑ_j от целевых множеств:

$$\mathfrak{J}_i = \sum_{j=1}^m \|x(\vartheta_j) - M_i^{(j)}\| \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

где

$$\|x(\vartheta_j) - M_i^{(j)}\| = \min_{y \in M_i^{(j)}} \|x(\vartheta_j) - y\|$$

Задача каждого игрока заключается в следующем.

Требуется найти оптимальное управляющее воздействие, которое минимизирует плату (1.3) при самых упорных противодействиях остальных игроков.

2. Стратегии игроков будем искать из класса кусочно-программных допустимых стратегий [2].

Предполагаем, что $P_i = O(0; r_i)$ ($i = 1, 2, 3$), где $O(0; r_i) = \{l \in R^2, \|l\| \leq r_i\}$.

Пусть в момент времени t_* , $\vartheta_k \leq t_* < \vartheta_{k+1}$ ($k = 0, \dots, m-1$) система достигла положения $x(t_*) = x_*$.

Наихудший гарантированный результат платы i -го игрока будет зависеть от положения системы $\{t_*, x_*\}$ следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_i^o(t_*, x_*) &= \min_{u_i \in P_i} \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \left(\sum_{\alpha=1}^k \|x[\vartheta_\alpha] - M_i^{(\alpha)}\| + \sum_{\alpha=k+1}^m \|x(\vartheta_\alpha) - M_i^{(\alpha)}\| \right) = \\ &= \min_{u_i \in P_i} \max_{u^{(i)} \in P^{(i)}} \left(\sum_{\alpha=1}^k \min_{p \in M_i^{(\alpha)}} \|x[\vartheta_\alpha] - p\| + \sum_{\alpha=k+1}^m \min_{p \in M_i^{(\alpha)}} \|x(\vartheta_\alpha, t_*, x_*, u_1, u_2, u_3) - p\| \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Обозначим через $G_{\bar{u}^{(i)} \in P^{(i)}}(t_*, x_*, \vartheta_\alpha)$ область достижимости i -го игрока от положения системы $\{t_*, x_*\}$ к моменту времени ϑ_α ($\alpha = k+1, \dots, m$).

Задача i -го игрока состоит в выборе точек $x(\vartheta_{k+1}) \in G_{\bar{u}^{(i)} \in P^{(i)}}(t_*, x_*, \vartheta_{k+1})$, $x(\vartheta_{k+2}) \in G_{\bar{u}^{(i)} \in P^{(i)}}(\vartheta_{k+1}, x(\vartheta_{k+1}), \vartheta_{k+2})$, ..., $x(\vartheta_m) \in G_{\bar{u}^{(i)} \in P^{(i)}}(\vartheta_{m-1}, x(\vartheta_{m-1}), \vartheta_m)$ таких, что доставят минимум $\mathfrak{I}_i(t_*, x_*)$. Так как области достижимости замкнуты и ограничены, значит такие точки достижимы (т.е. достигаются при некотором управлении u_i^o) [2,3].

Учитывая формулу Коши для системы (1.1), из (2.1) получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_i^o(t_*, x_*) &= \max_{\{\|l_\alpha\| \leq 1, \alpha=1, \dots, m\}} \left\{ \sum_{\alpha=1}^k \langle l_\alpha, x[\vartheta_\alpha] \rangle + \sum_{\alpha=1}^k \min_{p \in M_i^{(\alpha)}} \langle l_\alpha, p \rangle + \sum_{\alpha=k+1}^m \langle l_\alpha, x_* \rangle + \sum_{\alpha=k+1}^m \min_{p \in M_i^{(\alpha)}} \langle l_\alpha, p \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_*}^{\vartheta_m} \min_{u_i \in P_i} \sum_{\alpha=k+1}^m \langle l_\alpha, \bar{X}[\vartheta_\alpha, \tau] u_i \rangle d\tau + \sum_{j \in K(i)} \int_{t_*}^{\vartheta_m} \max_{u_j \in P_j} \sum_{\alpha=k+1}^m \langle l_\alpha, \bar{X}[\vartheta_\alpha, \tau] u_j \rangle d\tau \right. \end{aligned} \quad (2.2)$$

или $\mathfrak{I}_i^o(t_*, x_*) = 0$, если правая часть (2.2) меньше нуля.

Здесь

$$\bar{X}[t, t_0] = \begin{cases} X[t, t_0] & \text{при } t < t_0 \\ 0 & \text{при } t \geq t_0 \end{cases}$$

где $X[t, t_0]$ – фундаментальная матрица однородной части системы (1.1): $X[t, t_0] = E$.

В регулярном случае оптимальное управление i -го игрока будем искать из соотношения

$$\sum_{\alpha=k+1}^m \langle l_\alpha^{(i)}, \bar{X}[\vartheta_\alpha, \tau] u_i^o \rangle = \min_{u_i \in P_i} \sum_{\alpha=k+1}^m \langle l_\alpha^{(i)}, \bar{X}[\vartheta_\alpha, \tau] u_i \rangle \quad (2.3)$$

а наибольшим образом сопротивляющие стратегии остальных игроков $u_j^{(i)}$, $j \in K(i)$ следует искать из соотношений

$$\sum_{\alpha=k+1}^m \langle l_\alpha^{(i)}, \bar{X}[\vartheta_\alpha, \tau] u_j^{(i)} \rangle = \max_{u_j \in P_j} \sum_{\alpha=k+1}^m \langle l_\alpha^{(i)}, \bar{X}[\vartheta_\alpha, \tau] u_j \rangle \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) находим

$$u_i^o(t, t_*, x_*) = -r_i \frac{\sum_{\alpha=k+1}^m \bar{X}[\vartheta_\alpha, t]^T l_\alpha^{(i)}(t_*, x_*)}{\left\| \sum_{\alpha=k+1}^m \bar{X}[\vartheta_\alpha, t]^T l_\alpha^{(i)}(t_*, x_*) \right\|}, \quad u_j^{(i)}(t, t_*, x_*) = -\frac{r_j}{r_i} u_i^o(t, t_*, x_*)$$

или учитывая значение $\bar{X}[t, t_0]$, для (1.1) получим

$$\begin{aligned} u_i^o(t, t_*, x_*) &= -r_i \cdot \tilde{u}_i(t, t_*, x_*) \\ u_j^{(i)}(t, t_*, x_*) &= r_j \cdot \tilde{u}_i(t, t_*, x_*) \quad (j \in K(i)) \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{u}_i(t, t_*, x_*) = \begin{cases} \frac{\sum_{\alpha=k+1}^m l_{\alpha}^{(i)}(t_*, x_*)}{\left\| \sum_{\alpha=k+1}^m l_{\alpha}^{(i)}(t_*, x_*) \right\|} & \text{при } t_* \leq t < \vartheta_{k+1} \\ \frac{\sum_{\alpha=k+1}^m l_{\alpha}^{(i)}(t_*, x_*)}{\left\| \sum_{\alpha=k+1}^m l_{\alpha}^{(i)}(t_*, x_*) \right\|} & \text{при } \vartheta_{k+1} \leq t < \vartheta_{k+2} \\ \dots & \\ l_m^{(i)}(t_*, x_*) & \text{при } \vartheta_{m-1} \leq t \leq \vartheta_m \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения для u_i^o и $u_j^{(i)}$ из (2.5) в (2.2), вычислим величины $l_{\alpha}^{(i)}(t_*, x_*)$ ($\alpha = 1, \dots, m$). Далее имея значения $l_{\alpha}^{(i)}(t_*, x_*)$, из (2.5) будем иметь оптимальные стратегии игроков, следовательно, и платы $\mathfrak{Z}_i^o(t_*, x_*)$.

3. Рассмотрим следующий числовой пример. Пусть $t_0 = 0, x_0 = (0, 0)$ и $\vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 2$, а целевые множества – точечные:

$$\begin{array}{ll} \text{при } \vartheta_1 = 1 & M_1^{(1)}(1; 0) \\ & M_2^{(1)}(0; 2) \\ & M_3^{(1)}(-3; 0) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{при } \vartheta_2 = 2 & M_1^{(2)}(-1; -5) \\ & M_2^{(2)}(3; -4) \\ & M_3^{(2)}(4; 4) \end{array}$$

Предполагаем, что $r_i = 1$, то есть $P_i = O(0; 1)$ ($i = 1, 2, 3$).

Из (2.5) будем иметь

$$u_i^o(t, t_0, x_0) = \begin{cases} -\frac{l_1^{(i)}(t_0, x_0) + l_2^{(i)}(t_0, x_0)}{\left\| l_1^{(i)}(t_0, x_0) + l_2^{(i)}(t_0, x_0) \right\|} & \text{при } t_0 \leq t < \vartheta_1 \\ -l_2^{(i)}(t_0, x_0) & \text{при } \vartheta_1 \leq t \leq \vartheta_2 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

$$u_j^{(i)}(t, t_0, x_0) = -u_i^o(t, t_0, x_0) \quad (j \in K(i))$$

Подставляя (3.1) в (2.2), получаем следующие значения для векторов $l_j^{(i)}(t_0, x_0)$:

$$\begin{aligned} l_1^{(1)}(t_0, x_0) &= \begin{pmatrix} -0.849956 \\ 0.526853 \end{pmatrix}, \quad l_2^{(1)}(t_0, x_0) = \begin{pmatrix} 0.0937485 \\ 0.995596 \end{pmatrix} \\ l_1^{(2)}(t_0, x_0) &= \begin{pmatrix} -0.408591 \\ -0.912718 \end{pmatrix}, \quad l_2^{(2)}(t_0, x_0) = \begin{pmatrix} -0.722681 \\ 0.691181 \end{pmatrix} \\ l_1^{(3)}(t_0, x_0) &= \begin{pmatrix} 0.961659 \\ -0.274247 \end{pmatrix}, \quad l_2^{(3)}(t_0, x_0) = \begin{pmatrix} -0.596746 \\ -0.802431 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно, оптимальная стратегия и соответствующая гарантированная плата каждого игрока будут

$$u_1^o(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.444851 \\ -0.895605 \end{pmatrix} & \text{при } 0 \leq t < 1 \\ \begin{pmatrix} -0.0937485 \\ -0.995596 \end{pmatrix} & \text{при } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad \mathfrak{Z}_1^o(t_0, x_0) = 8.6216$$

$$u_2^o(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.98136 \\ 0.192179 \end{pmatrix} & \text{при } 0 \leq t < 1 \\ \begin{pmatrix} 0.722681 \\ -0.691181 \end{pmatrix} & \text{при } 1 \leq t \leq 2 \quad \mathfrak{I}_2^o(t_0, x_0) = 8.91096 \end{cases}$$

$$u_3^o(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -0.320991 \\ 0.947082 \end{pmatrix} & \text{при } 0 \leq t < 1 \\ \begin{pmatrix} 0.596746 \\ 0.802431 \end{pmatrix} & \text{при } 1 \leq t \leq 2 \quad \mathfrak{I}_3^o(t_0, x_0) = 10.6185 \end{cases}$$

Если игроки будут следовать своим оптимальным стратегиям, то система (1.1) в моменты времени $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ окажется в положениях

$$x[1] = \begin{pmatrix} 1.10522 \\ 0.243657 \end{pmatrix} \quad x[2] = \begin{pmatrix} 2.3309 \\ -0.64069 \end{pmatrix}$$

а платы игроков будут

$$\mathfrak{I}_1 = 5.75161, \quad \mathfrak{I}_2 = 5.50045, \quad \mathfrak{I}_3 = 9.04417$$

которые меньше гарантированных значений плат.

В работе рассмотрены также следующие случаи:

1) решая рассмотренную задачу для двух игроков, получаем

$$\mathfrak{I}_1^o(t_0, x_0) = 6.09902, \quad \mathfrak{I}_2^o(t_0, x_0) = 7$$

что естественно, так как при трех игроках противодействующими являются два игрока.

2) Решая поставленную задачу поэтапно, т.е. на отдельных промежутках времени $[0,1]$ и $[1,2]$ для плат игроков при выборе противодействующими сторонами стратегий, из (3.1) получаем следующие значения:

$$\mathfrak{I}_1(t_0, x_0) = 9.87791, \quad \mathfrak{I}_2(t_0, x_0) = 10.179, \quad \mathfrak{I}_3(t_0, x_0) = 11.5811$$

Проведенные сравнения показывают качественные стороны рассмотренной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крассовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Габриелян М.С. Минимаксное прицеливание в собственно линейной системе при m целевых множествах.// Уч.записки ЕГУ, 1984, № 1, с. 36-45.

Сведения об авторе

Степанян А.А. – аспирант кафедры механики Ереванского государственного университета
E-mail: Mexanikus2006@yahoo.com

УСЛОВИЯ НАДЕЖНОСТИ РАБОТЫ ЗАТВОРОВ СИСТЕМЫ «ГИДРОПЛЮС» И ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОГО ИЗ НИХ

Токмаджян В.О., Маркарян А.Я.

Затворы системы «Гидроплюс» (идея принадлежит французским специалистам) устанавливаются на гребне водосливной части плотины и предназначены для увеличения полезного объема водохранилища. Их первенцом является песочный вал, который устанавливается по всей длине водосливного фронта плотины. В случае, когда уровень воды водохранилища не превышает предварительно выбранную границу H^* , вал устойчив и в водохранилище собирается дополнительный объем. Когда высота воды на гребне водослива превышает H^* , вал смывается и водослив работает в расчетном режиме.

Наиболее широкое применение имеют подпорные сооружения с твердой преградой. В этом случае железобетонные подпоры особого сооружения устанавливаются по всей длине гребня водосливного фронта плотины. В случае расчетного уровня водохранилища полый корпус подпора заполняется водой, в результате чего теряет устойчивость и опрокидывается в нижний бьеф. Иногда на данной перегородке устанавливаются подпоры, имеющие устойчивость, так как опрокидывание малоустойчивых подпор привело бы также к опрокидыванию других. Такие типы задвижек могут изготавливаться из металла, железобетона и других металлов.

Размеры затворов системы «Гидроплюс» по высоте колеблются в пределах 1,5–6,5 м. В случае небольших расходов затворы системы «Гидроплюс» работают как водосливы с тонкой стеной и представляют собой корытообразное сооружение, которое устанавливается на гребне водослива. Увеличение полезного объема водохранилища с установлением затворов системы «Гидроплюс» представляется как наиболее результативный вариант решения задачи.

Затворы системы «Гидроплюс» должны обеспечивать надежную эксплуатацию плотины как в нормальных условиях, так и при пропуске катастрофического расхода.

Конструктивные элементы затвора системы «Гидроплюс» и рабочая схема приведены на рис. 1.1 [1].

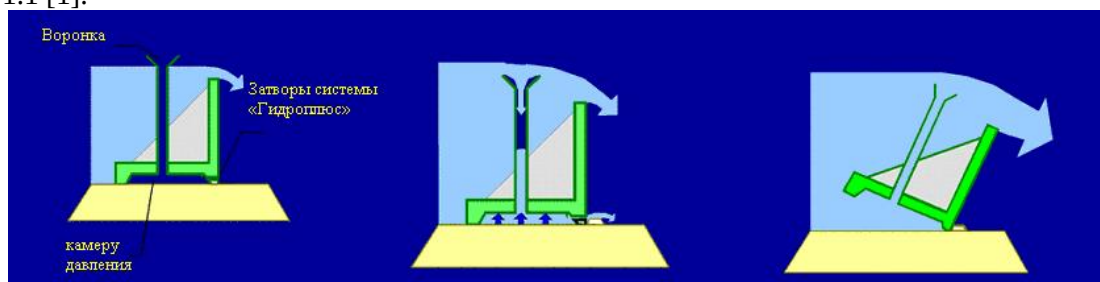


Рис. 1.1 Схема работы затвора системы «Гидроплюс».

Расход, проходящий через затворы системы «Гидроплюс» по зигзагообразному периметру (по плану) определяется по (2):

$$Q = C_d L (2g)^{1/2} (h/H)^{3/2}, \quad (1)$$

где C_d – коэффициент выхода, зависящий от геометрических размеров затвора, напора воды h и высоты затвора H .

Когда уровень воды достигает отметки гребня, начинается слив воды с гребня. В этот момент вода через воронку заливается в напорную камеру, вызывая силу противодействия (сила Архимеда), которая уменьшает вес затвора. Под воздействием гидростатического давления затвор резко поворачивается, увеличивается напор h над водосливом, при котором происходит безопасный пропуск катастрофического расхода. Во время нормальной эксплуатации затвора, с помощью гибкой ленты между основанием и упирающейся плитой обеспечивается герметичность и исключается возможность поступления воды в камеру давления. В случае неполной герметичности, поступающая в камеру давления вода, удаляется

по дренажным каналам. Воздействующие силы на затворы типа «Гидроплюс»: удерживающие и опрокидывающие. Удерживающие силы: вес затвора, при наличии противовеса – также его вес, вертикальная составляющая силы давления на основание. Опрокидывающие силы: воздействующие на затворы, гидродинамические и гидростатические силы давления, сила противодействия (Архимеда), которая возникает при заполнении воды по воронке гребня в нижнюю камеру давления.

Испытания затворов системы «Гидроплюс» были осуществлены во Франции. Устойчивость работы затворов проведена при следующих условиях:

- при повреждении противофильтрационной ленты, когда не была обеспечена необходимая герметичность,
- при закупорке фронтной входной части водослива,
- при закупорке дренажных отверстий затвора.

Затворы системы «Гидроплюс» удовлетворяют вышеуказанным требованиям безопасности. В отличие от других типов затворов, они имеют ряд преимуществ [2]:

- затворы работают автоматически, без использования электрической энергии,
- затворы поворачиваются, когда опрокидывающий момент превышает момент сдерживающих сил,
- каждый затвор действует автономно,
- требования технического обслуживания минимальны,
- затворы работают надежно в экстремальных условиях эксплуатации.

Расчетная схема устойчивой работы затвора системы «Гидроплюс» имеет вид, приведенный на рис. 2.

В действительности, уровень воды в нижнем бьефе обычно пренебрежимо мал и во время оценки условий обеспечения равновесия затвора при воздействии $F_{НБ}$ можно не учитывать.

Во время расчета устойчивости затворов системы «Гидроплюс», согласно [2] необходимо рассмотреть при следующих условиях:

- устойчивость под воздействием динамических сил,
- устойчивость под воздействием волн воды,
- устойчивость под воздействием сейсмических сил,
- надежность работы в случае наличия заледенения.

Основным недостатком существующих систем затворов «Гидроплюс» заключается в том, что начинают они действовать при достижении уровня воды до максимального значения. При этом разрушается дополнительная стенка и слив воды происходит под большим напором. Часто при разрушении затвора типа «Гидроплюс» пропускной расход несколько раз превышает его катастрофическое значение, что может привести к разрушению сооружений, расположенных по течению речного стока.

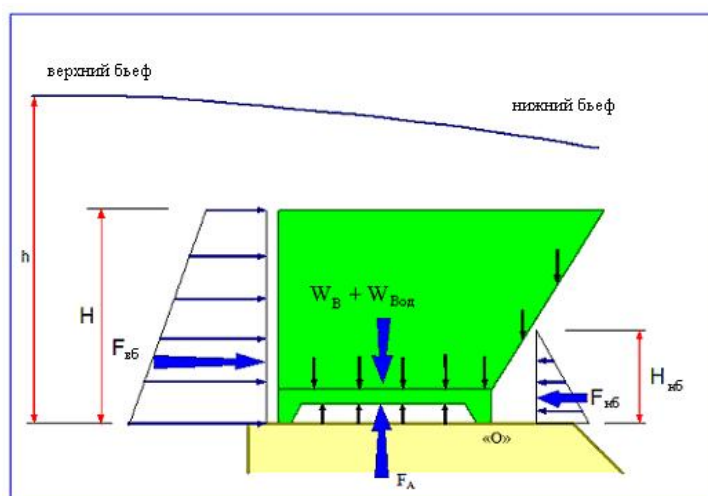


Рис. 2 Расчетная схема устойчивости работы затворов системы «Гидроплюс»

Нами предложена [3] принципиально новая система затвора, которая осуществляет выпуск паводка, начиная с более низкого уровня воды (рис. 3).

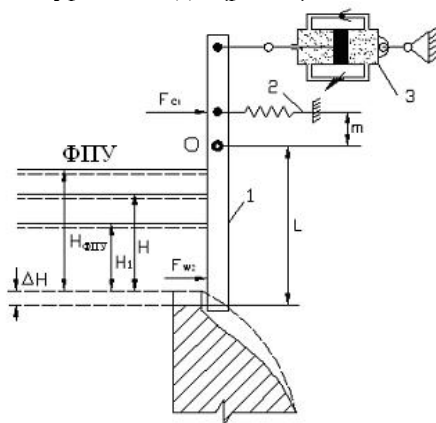


Рис. 3 Предлагаемая система затвора

Система затворов включает плоский прямоугольный щит – 1, пружина – 2 и гидравлический демпфер – 3.

Предварительно определяется минимальная расчетная высота, которая необходима для накопления дополнительного объема воды в водохранилище. В этом положении из условия равновесия плоского щита определяется жесткость пружины, необходимая для поддержания затвора в закрытом положении до минимального поднятия уровня в водохранилище.

Уравнение равновесия плоского щита будет

$$\sum m_o = 0 \quad (2)$$

где $\sum m_o$ – сумма моментов всех действующих сил относительно шарнира О.

Имея в виду, что сила давления F_{w1} воды на щит затвора воздействует на 2/3 высоты эпюры давления, а пружина находится в предварительно растянутом состоянии, уравнение (2) получит следующий вид:

$$F_{w1} \left[L - \frac{(H_1 + \Delta H)}{3} \right] - F_{c1} m = 0 \quad (3)$$

где m – расстояние силы упругости пружины от шарнира, b – ширина пружины, а $F_{w1} = \rho g \frac{(H_1 + \Delta H)^2}{2} b$. Подставляя значение F_{w1} в формулу (3), получим

$$F_{c1} = \frac{\rho g b}{6m} (H_1 + \Delta H)^2 (3L - H_1 - \Delta H). \quad (4)$$

При известном значении F_{c1} определяют жесткость пружины.

Затвор работает следующим образом: когда уровень воды на гребне водослива превышает величину H_1 , нарушается равновесие и щит 1 поворачивается под малым углом, начинается истечение воды из-под щита в нижний бьеф (рис. 5). В момент открытия щита давление на щит сильно уменьшается и щит идет на закрытие. Процесс закрытия щита продолжается до тех пор, пока момент силы давления воды приравняется к моменту силы упругости пружины. Дальнейшее повышение уровня воды в водохранилище приводит к продолжительности колебания затвора. Однако, щит продолжает наклоняться и амплитуда колебания щита постоянно увеличивается до определенного значения, при котором достигается динамическое равновесие.

Во время всего процесса водослив будет работать с переменным режимом, что приводит к искусственной эксплуатации затвора. Возникает необходимость уменьшить частоту колебания

щита, для чего он оснащается демпфером. Когда щит идет на открытие, демпфер не оказывает сопротивления, масло по обходной линии, на которой установлен обратный клапан, с правой полости перекачивается в левую, а когда щит идет на закрытие, демпфер перекрывает это движение, поскольку для перемещения масла с левой полости в правую масло проходит через дроссель, имеющий большое гидравлическое сопротивление (рис. 3, элемент 3).

Для установки предлагаемых затворов, на гребне водослива действующей плотины, необходимо соорудить ролики. Чтобы не изменить гидравлический режим, необходимо спустить гребень водослива на размер ΔH . В расчетах боковое сжатие воды в первом приближении не учитывается. Предположим, по ширине водослива устанавливаются бычки в количестве $n - 1$ (рис. 4). В этом случае, число водосливных отверстий – n , а площадь живого отверстия – $b(H_{\text{ФПУ}} + \Delta H)$. Ширину ролика обозначим b_1 , а длину водосливного фронта – B .

Тогда

$$n = \frac{B + b_1}{b + b_1} \quad (5)$$

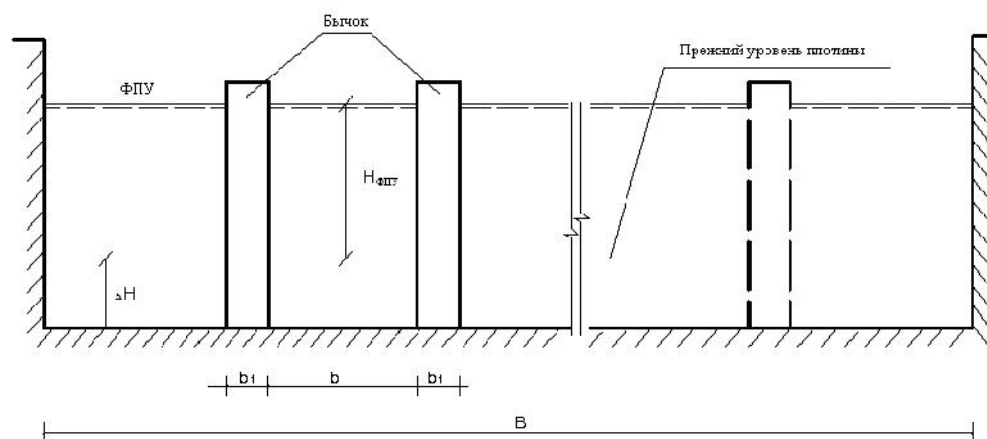


Рис. 4 Схема водосливного фронта плотины

Из условия равенства площадей живых сечений определим величину спуска порога водосливной плотины ΔH

$$\Delta H = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{b_1}{b} H_{\text{ФПУ}}. \quad (6)$$

Ширину затвора выбираем так, чтобы число отверстий n получилось целым. Наличие боковых сжатий потока приводит к уменьшению расхода, поэтому ΔH выбираем больше на 5%. Расход, вытекающий из-под щита через водослив, будет

$$Q = mbL \sin j \sqrt{2g(H + \Delta H - L \sin^2 \frac{j}{2})} \quad (7)$$

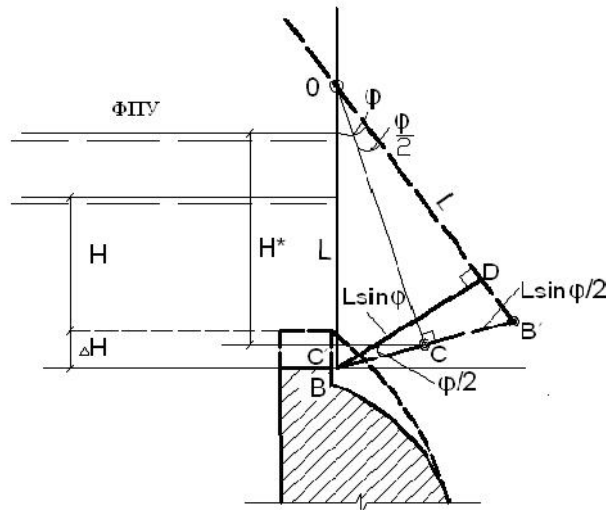


Рис. 5 Схема промежуточного раскрытия затвора

Из формулы (7) следует, что $Q = f(l, j)$. Поэтому одну из неизвестных выбираем, а другую определяем по расчету. Максимальное значение угла раскрытия затвора $j_{\max}$ выберем из условий пропуска катастрофического расхода через затворы при наибольшем подпорном уровне (НПУ)

$$Q_{\max} = nmbL \sin j_{\max} \sqrt{2g \left(H_{\text{ФПУ}} + \Delta H - L \sin^2 \frac{j_{\max}}{2} \right)} \quad (8)$$

Место расположения шарнира выбираем так, чтобы истечение происходило под напором $H^* = H_{\text{ФПУ}} + \frac{1}{2} \Delta H$. В формуле (8) приравняв подкоренное выражение к H^* , получим

$$L(1 - \cos j_{\max}) = \Delta H \quad (9)$$

Имея в виду условие (9), уравнение (8) примет следующий вид:

$$\frac{Q_{\max}}{nmb\sqrt{g}} = \sqrt{\Delta H (2H_{\text{ФПУ}} + \Delta H) (2L - \Delta H)} \quad (10)$$

Из равенства (10) получим

$$L = \frac{C^2}{\Delta H (2H_{\text{ФПУ}} + \Delta H)} + \frac{\Delta H}{2}, \quad (11)$$

где C – постоянная, определяется по формуле

$$C = \left(\frac{Q_{\max}}{nmb\sqrt{g}} \right)^2 \quad (12)$$

Если выбрать такую предварительную силу упругости пружинной системы, когда уровень наибольшего наполнения водохранилища будет стремиться к НПУ, то в водохранилище накопится дополнительный объем в размере $H_{\text{ФПУ}} - \Delta H$. Однако, исходя из соображений безопасности, уровень, соответствующий открытию затвора, необходимо выбрать из $H_1 = 0,75H_{\text{ФПУ}}$. В этом случае в водохранилище накопится дополнительный объем $(0,75H_{\text{ФПУ}} - \Delta H)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян Г.А., Габаян Г.С., Токмаджян О.В. Автоматизированные водоподпорные затворы системы <HYDROPLUS> // Изв. строителей Армении. Ереван. 2002. № 6-7. С. 26-27.
2. Мартиросян Г.А. Несколько вопросов поднятия эксплуатационной производительности водоканалов и водохранилищ // Ереван, Диссертация на соискание степени кандидата технических наук, 2002 г., 112стр.
3. Margaryan A., Tokmajyan V. Protection Of The Pumping Station's Pressure Pipeline From The Hydraulic Hammer Being Accompanied By Intermediate Break Up Of The Flow Continuity, - Venice, Italy, Abstracts of XXXII IAHR Congress, July 1-6, 2007, Vol. 2, p. 705.

Сведения об авторах

Маркарян Альберт Яхшибекович

Зав. кафедрой гидравлики

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Тел.: 091-41-27-25, E-mail: tokmajyan@rambler.ru

Токмаджян Ваче Оганесович

Аспирант кафедры гидравлики

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Тел.: 099-57-59-39, E-mail: tokmajyan@rambler.ru

КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ДВУМЯ КРАЙНИМИ ОБРАЗУЮЩИМИ И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫМ ОДНИМ КРАЕМ

Хачаян А.А.

Исследуются собственные колебания безмоментной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки. Предполагается, что оболочка шарнирно оперта на одном торце и жестко защемлена на две граничные образующие. Найдены дисперсионные и характеристические уравнения для нахождения характеристики собственных частот и коэффициентов затухания соответствующих форм колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогической задачи для прямоугольных пластин.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются свободные колебания незамкнутой круговой ортотропной цилиндрической оболочки. Предполагается, что оболочка шарнирно оперта на одном торце и жестко защемлена на два граничных образующих. Предполагается, что образующие ортогональны к краям оболочки.

Вводится на поверхности оболочки криволинейные координаты (α, β) , где α ($0 \leq \alpha \leq \ell$) и β ($0 \leq \beta \leq s$) являются, соответственно, длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности, ℓ – длина цилиндра, а s – длина направляющей [1, с. 171].

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, применяются уравнения, соответствующие классической теории ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек

$$\begin{aligned} -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} &= \lambda u_1 \\ -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{21} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} &= \lambda u_2 \\ -\frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 &= \lambda u_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений точки поверхности, соответственно, в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки. R – радиус направляющей окружности, $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала, B_{ij} – коэффициенты упругости.

Граничные условия принимают вид

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_2}{R} \right) \right|_{\alpha=\ell} = 0; \quad u_2|_{\alpha=\ell} = 0 \quad (3)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = 0; \quad u_2|_{\beta=0,s} = 0 \quad (4)$$

Соотношения (2) выражают условия свободного края при $\alpha=0$, условия (3) выражают условия шарнирного опирания на торце $\alpha=\ell$, а условия (4) являются условиями защемления по образующей $\beta=0$ и $\beta=s$.

Задача (1)–(4) самосопряженная и вне отрезка $[0, \lambda_0]$ множества значений функции

$$\Omega(\theta) = \frac{B_{66}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)R^{-2}\sin^4\theta}{B_{66}(B_{11}\sin^2\theta + B_{22}\cos^4\theta) + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta} \quad (5)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

имеет неотрицательный дискретный спектр.

Отметим, что появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1) по Дугласу-Ниренбергу [2].

Вывод дисперсионного уравнения задачи (1)-(4). Для последующих вычислений удобно задачу заменить задачей [2]

$$\begin{aligned} \Gamma u_1 &= \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} - \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\lambda}{B_{66}} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \\ \Gamma u_2 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^3 W}{\partial \beta^3} + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\lambda}{B_{66}} \frac{\partial W}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (6)$$

$$-\frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{W_0}{R^2} = \frac{\lambda}{B_{22}} W; \quad W = \frac{u_3}{R}$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - W \right) \right|_{\alpha=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - W \right) \right|_{\alpha=\ell} = 0; \quad u_2 = 0 \quad (8)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = 0; \quad u_2|_{\beta=0,s} = 0 \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ &+ \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \frac{\lambda}{B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \frac{\lambda}{B_{66}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\lambda^2}{B_{11}B_{66}} \end{aligned}$$

Решение системы (6), удовлетворяющей условиям (9), ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{\frac{2}{s}} \beta_{mn}^{(c)} \sin(km\beta) U_{mn} \exp(k\alpha) \\ u_2 &= -\sqrt{\frac{2}{s}} \beta_{mn}^{(s)} \sin(km\beta) V_{mn} \exp(k\alpha), \quad W = kW_{mn}(\beta) \exp(k\alpha) \end{aligned} \quad (10)$$

где $k = \frac{p}{s}$, U_{mn} , V_{mn} – неизвестные постоянные, а $W_{mn}(\beta)$ – собственная функция задачи

$$W^{IV} = k^4 m^4 \mu^4 W \quad (11)$$

$$W(0) = W(s) = W'(0) = W'(s) = 0 \quad (12)$$

соответствующей собственным значениям $k^4 m^4 \mu_n^4$.

$$W_{mn}(\beta) = \frac{\omega_{mn}(\beta)}{\|\omega_{mn}\|}, \quad \|\omega_{mn}\| = \sqrt{\int_0^s \omega_{mn}^2(\beta) d\beta}$$

$$\omega_{mn}(\beta) = (\text{sh}(mk\mu_n s) - \sin(mk\mu_n s))(\text{ch}(mk\mu_n \beta) - \cos(mk\mu_n \beta)) - \\ - (\text{ch}(mk\mu_n s) - \cos(mk\mu_n s))(\text{sh}(mk\mu_n \beta) - \sin(mk\mu_n \beta))$$

Заметим, что собственные частоты задачи (11)-(12) находятся из уравнения

$$\text{ch}(km\mu s) \cos(km\mu s) - 1 = 0 \quad (13)$$

Подставляя (10) в первые два уравнения (6), обе части умножая на $\sqrt{\frac{2}{s}} \sin(km\beta)$ и интегрируя в пределах от 0 до s, получим

$$c_m U_{mn} = a_m \beta_{mn}^{(s)}, \quad c_m U_{mn} = m b_m \beta_{mn}^{(c)} \quad (14)$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} a^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta^2, \quad \beta_{mn}^{(c)} = \sqrt{\frac{2}{s}} \int_0^s W_{mn}(\beta) \cos(km\beta) d\beta \\ b_m = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} a^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} (1 - \eta^2), \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{B_{66}k^2} \quad (15)$$

$$c_m = a^4 - \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} m^2 - \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) a^2 + \\ + (m^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right), \quad \beta_{mn}^{(s)} = \sqrt{\frac{2}{s}} \int_0^s W_{mn}(\beta) \sin(km\beta) d\beta$$

Подставляя (10) в третье уравнение системы (6), умножая обе части на $W_{mn}(\beta)$ и интегрируя от 0 до s, получим характеристическое уравнение для нахождения a :

$$\left(\frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 - \frac{r_0}{2} \right) c_m + \frac{r_0}{2} \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} a^2 a_m \beta_{mn}^{(s)} - m^2 b_m \beta_{mn}^{(c)} \right) = 0 \quad (16)$$

Здесь учитывается обозначение $R^{-2} = k^2 \frac{r_0}{2}$, где r_0 – безразмерный параметр.

Решение задачи (1)–(4) ищем в виде

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{s}} \beta_{mn}^{(c)} \sin(km\beta) \sum_{j=1}^4 U_{mn}^{(j)} \exp(k\alpha_j \alpha) W_j \\ u_2 = -\sqrt{\frac{2}{s}} \beta_{mn}^{(s)} \sin(km\beta) \sum_{j=1}^4 V_{mn}^{(j)} \exp(k\alpha_j \alpha) W_j \quad (17) \\ W = k W_{mn}(\beta) \sum_{j=1}^4 \exp(k\alpha_j \alpha) W_j$$

где α_1, α_2 – корни уравнения (16) с неположительными действительными частями, а $\alpha_3 = -\alpha_1, \alpha_4 = -\alpha_2$.

Учитывая граничные условия (7), (8), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^4 \frac{R_{ij}}{c_m^{(j)}} W_j = 0, \quad i = \overline{1, 4} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
R_{1j} &= \alpha_j^2 a_m^{(j)} \beta_{mn}^{2(s)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} b_m^{(j)} \beta_{mn}^{2(c)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)} \\
R_{2j} &= \alpha_j (a_m^{(j)} \beta_{mn}^{2(s)} + b_m^{(j)} \beta_{mn}^{2(c)}) \\
R_{3j} &= R_{1j} \exp(z_j), \quad R_{4j} = b_m^{(j)} \exp(z_j), \quad z_j = k \alpha_j \alpha, \quad j = \overline{1, 4}
\end{aligned} \tag{19}$$

Верхний индекс (j) означает, что соответствующая функция взята при $\alpha = \alpha_j$.
 Приравнявая определитель системы (18) к нулю, получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
&(m_{11} m_{21} - m_{12} m_{21})(1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + 2m_{11} m_{21} [z_1 z_2] (\exp(z_2) - \exp(z_1)) + \\
&+ (m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21})(\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{R_{11}}{m^4}, \quad m_{21} = \frac{R_{21}}{m^3}, & m_{12} &= \frac{R_{12} - R_{11}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{m^3} \\
m_{22} &= \frac{R_{22} - R_{21}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{1}{m^2}, & [z_1 z_2] &= \frac{\exp(z_1) - \exp(z_2)}{z_1 - z_2} \cdot k \ell
\end{aligned} \tag{21}$$

При $\alpha_0 \rightarrow 0$ уравнение (20) преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned}
&K_{2m}^{(n)}(\eta_m)(1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + \frac{2m_{11} m_{21} B_{11}}{B_{66}} [z_1 z_2] (\exp(z_2) - \exp(z_1)) + \\
&+ K_{3m}^{(n)}(\eta_m)(\exp(2z_2) - \exp(2z_1)) = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&K_{im}^{(n)}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left[\left(\frac{B_{22}}{B_{66}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} - \eta_m^2 \right) \beta_{mn}^{2(s)} \beta_{mn}^{2(c)} - \frac{B_{22} B_{66} + B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \beta_{mn}^{4(c)} \right] + \\
&+ (-1)^i \left[\left(1 + \frac{B_{12}}{B_{66}} - \eta_m^2 \right) \beta_{mn}^{2(c)} \beta_{mn}^{2(s)} - \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{66}} \beta_{mn}^{4(s)} \right] x_1 x_2, \quad \eta_m = \frac{\eta}{m}, \quad i=2,3
\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнение (22) является дисперсионным уравнением для прямоугольной пластинки с двумя противоположными заземленными сторонами и одной шарнирно-закрепленной стороной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны. //Изв. НАН РФ. МТТ. 2007. N 1. С. 84-89.

Сведения об авторе

Хачанян Алвард Артаваздовна

Соискатель кафедры математического анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна
 Адрес: Молдовакан 44, кв. 9, Ереван, Армения
 Тел.: (+37410) 63-86-83

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Холкина Н.А.

В представляемой работе рассматривается связанная задача математической теории пластичности. Связанная постановка задач необходима в механике деформируемого твердого тела для того, чтобы учесть искажение пластического течения полем повреждений, и одновременно возрастание повреждений в процессе накопления пластических деформаций. Эта задача значительно сложнее с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к их интегрированию, по сравнению с традиционными уравнениями теории идеальной пластичности. Актуальным также представляется учет анизотропии распределения поврежденности в основных уравнениях математической теории пластичности. Цель работы состоит в том, чтобы численно определить поле изостат и значение предельной растягивающей силы при аппроксимации контура свободной границы дугой эллипса для связанной осесимметричной задачи. Математическое моделирование пластического течения, сопровождающегося накоплением повреждений, подразумевает описание разупрочнения и соответствующую нетривиальную модификацию инкрементальных соотношений теории пластичности.

Математическое моделирование анизотропной поврежденности являлось предметом интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий [1], [2]-[4], [5]-[7]. Классические представления о поврежденности связаны с так называемым геометрическим подходом, позволяющим довольно просто учесть анизотропию состояния поврежденности. При помощи этого подхода эффект возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями представляется с помощью понятия эффективного напряжения. Тензор эффективных напряжений строится как произведение тензора напряжений Коши и соосного ему обратного тензора сплошности. Условие соосности выполняется, если в процессе нагружения можно пренебречь влиянием упругой деформации на состояние поврежденности.

Под поврежденностью, следуя [8], понимается сокращение обратимого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микроповреждений, которые при пластическом течении проявляются в форме распределения дислокаций. В рамках математической модели поврежденность, как правило, представляется специальной тензорной переменной – тензором поврежденности. Тензорная мера анизотропной поврежденности является мерой сокращения вследствие распределения микроповреждений, реально несущей нагрузку площади двумерного элемента тела в зависимости от его ориентации. В идеально пластическом теле сокращение эффективной площади происходит, в основном, вследствие шейкообразования.

Вычислить поврежденности можно в результате анализа тонкой структуры поврежденности, задавшись при этом определенной мерой поврежденности. Возможные варианты разнообразны. Выбор определяется, конечно же, преобладающим механизмом зарождения и развития поврежденности: образование и развитие полей взаимовлияющих микротрещин – характерный механизм деградации упругого тела, пластическое течение сопровождается зарождением и распространением дислокаций, ползучесть металлов – образованием и ростом пор. Можно ввести также общие меры поврежденности, абстрагируясь от конкретного типа микродефектов. Одной из таких мер является сокращение эффективной площади плоского элемента нормального вектору $\mathbf{n}$. Для актуального состояния поврежденности, вследствие распределенных микродефектов передающая нагрузку от одной части тела на другую эффективная площадь элемента $dA^*(\mathbf{n})$ оказывается меньше, чем площадь этого элемента без учета его микроструктуры поврежденности $dA(\mathbf{n})$. Таким образом, можно определить функцию ориентации

$$V(\mathbf{n}) = \frac{dA^*(\mathbf{n})}{dA(\mathbf{n})} \quad (1)$$

как отношение указанных площадей.

В работах [1], [6] с самого начала тензорная мера анизотропной поврежденности вводится как симметричный тензор второго ранга $\mathbf{D}$. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности $\mathbf{D}$ имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения (главные поврежденности). Векторы ортонормированного базиса из собственных векторов тензора $\mathbf{D}$ будем обозначать через $\mathbf{d}_a$, а собственные значения – через D_a . В дальнейшем будет предполагаться, что базис $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ ориентирован точно так же, как и базис из собственных векторов тензора напряжений $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Это положение нуждается в обосновании, поскольку, вообще говоря, оно может и не выполняться.

Для содержательной интерпретации тензор поврежденности удобно представлять в форме спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{a=1}^3 D_a \mathbf{d}_a \otimes \mathbf{d}_a. \quad (2)$$

Рассмотрим произвольно ориентированный поврежденный плоский элемент PQR , опирающийся на главные оси поврежденности в точке O текущей конфигурации K , так что образуется тетраэдр $OPQR$ (см. рис. 1).

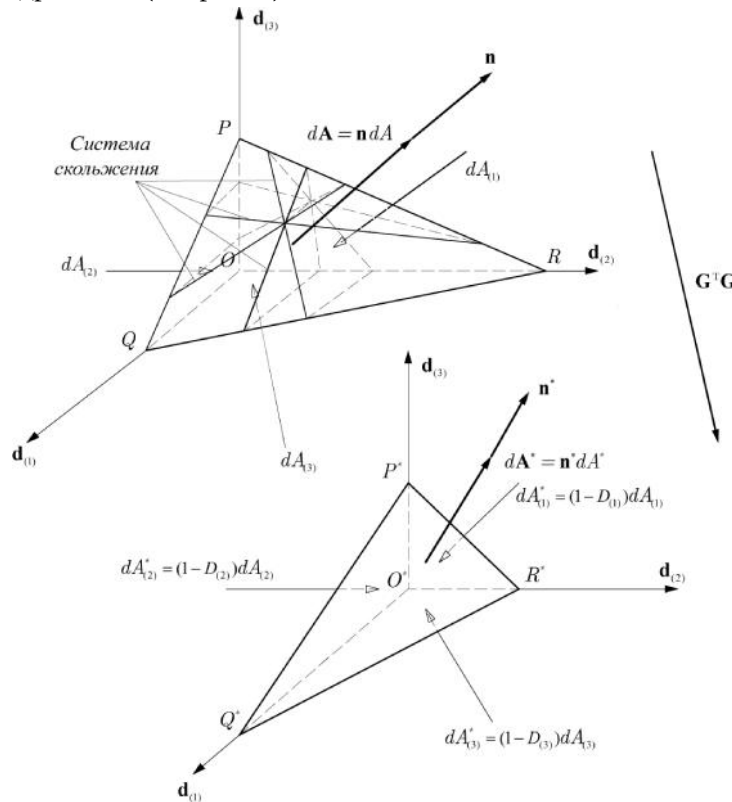


Рис. 1. Трансформация поврежденного объемного элемента, опирающегося на главные оси поврежденности, в эквивалентное неповрежденное состояние.

Эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$ получается в результате преобразования тетраэдра $OPQR$ линейным оператором $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$. В силу уравнений (1) векторные элементы $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$ связаны следующим соотношением $d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D})d\mathbf{A}$, подставляя в которое

спектральное разложение и умножая обе части уравнения скалярно на вектор $\mathbf{d}_{(b)}$, получим [1]:

$$dA_b^* = (1 - D_b) dA_b \quad (\text{по } b \text{ не суммировать}),$$

где $dA_{(a)}^* = d\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{d}_{(a)}$ есть площади граней эквивалентного неповрежденного тетраэдра $O^*P^*Q^*R^*$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Последнее уравнение позволяет дать механическую интерпретацию собственных значений тензора поврежденности: главные поврежденности выражают сокращение несущей нагрузки площади элементов, нормальных главным осям поврежденности.

Связанное осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона–Треска, можно разделить на следующие два типа:¹

1) эквивалентное тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным эквивалентным напряжением, а эквивалентные меридиональные главные напряжения равны;

2) эквивалентное напряжение равно одному из меридиональных главных эквивалентных напряжений, эквивалентное максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k .

Второй случай – обобщенное состояние “полной пластичности” Хаара–Кармана. Если присвоить эквивалентному тангенциальному главному напряжению второй номер и обозначит через s_3^j наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных эквивалентных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему обобщенное состояние “полной пластичности”:

$$s_1^j = s_2^j = s_3^j \pm 2k$$

где k – предел текучести при чистом сдвиге.

В случае осесимметричной деформации удобно ввести цилиндрическую систему координат r, j, z .

Обобщенное условие пластичности Треска в состоянии осесимметричной деформации примем в виде

$$\frac{s_1}{1 - D_1} - \frac{s_3}{1 - D_3} = 2k, \quad \frac{s_2}{1 - D_2} - \frac{s_3}{1 - D_3} = 2k. \quad (3)$$

В плоскости $j = \text{const}$ имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий, соответствующих первому и третьему главным направлениям. Введем угол ς так, чтобы наклон (к горизонтальной оси) траектории первого семейства был равен $\rho - \varsigma$.

В этом случае, справедливы следующие соотношения:

$$d_2 = 0, \quad k_{23} = \frac{\cos \varsigma}{r}, \quad k_{21} = \frac{\sin \varsigma}{r}, \quad k_{31} = 0, \quad k_{13} = 0.$$

Деривационные соотношения выражаются либо группой уравнений

$$\begin{aligned} d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 &= 0, & d_1 k_{32} + d_3 k_{12} + k_{32}^2 + k_{12}^2 &= 0, \\ d_1 k_{23} + k_{23}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, & d_1 k_{23} + k_{23}^2 + k_{21} k_{12} &= 0, \\ d_3 k_{21} + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, & d_3 k_{21} + k_{21}^2 + k_{32} k_{23} &= 0, \\ d_3 k_{23} &= k_{21} (k_{32} - k_{23}), & d_1 k_{21} &= k_{23} (k_{12} - k_{21}). \end{aligned}$$

Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в следующем виде:

$$\begin{cases} d_1 ds_1 + k_{23} (ds_1 - ds_2) + k_{32} (ds_1 - ds_3) + (2k_{12} + k_{21} + d_3) [(s_3 - s_1) dw] = 0, \\ d_3 ds_3 + k_{12} (ds_3 - ds_1) + k_{21} (ds_3 - ds_2) + (2k_{32} + k_{23} + d_1) [(s_3 - s_1) dw] = 0, \end{cases} \quad (4)$$

¹ Эквивалентное тангенциальное напряжение всегда будет главным эквивалентным напряжением при связанном осесимметричном состоянии.

где $d\omega = d\omega_2$ – поворот главных осей напряжений 1 и 3 (в плоскости $j = \text{const}$) при догрузении.

Соотношения Коши, связывающие приращения деформаций и перемещений, в осесимметричном случае сводятся к

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= \kappa_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, & -\kappa_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ d\varepsilon_2^p &= \kappa_{23} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{21} du_{\langle 3 \rangle}, & -\kappa_{12} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ d\varepsilon_3^p &= \kappa_{32} du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, & -\kappa_{21} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Ассоциированный закон течения²

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1^p}{S_1} &= d\sigma_3 - E_{12} d\sigma_2 - E_{11} d\sigma_1, \quad \frac{d\varepsilon_2^p}{S_2} = d\sigma_3 - E_{22} d\sigma_2 - E_{21} d\sigma_1, \\ -d\varepsilon_3^p &= (\beta_1 - 1) d\varepsilon_1^p + (\beta_2 - 1) d\varepsilon_2^p, \end{aligned} \quad (6)$$

в котором

$$\begin{aligned} S_1 &= \left[(1 - D_1)(\beta_1 - 1) \left[\sigma_2 K_2 - (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right] + (1 - D_2)^2 (1 - D_1)^{-1} (\beta_1 - 1)^3 (\beta_2 - 1) \sigma_3 K_3 \right] \times \\ &\quad \times \left[\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3 \right]^{-1}, \\ S_2 &= \left[(1 - D_2)(\beta_2 - 1) \left[\sigma_1 K_1 - (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right] + (1 - D_1)^2 (1 - D_2)^{-1} (\beta_2 - 1)^3 (\beta_1 - 1) \sigma_3 K_3 \right] \times \\ &\quad \times \left[\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3 \right]^{-1}, \\ S_1 E_{11} &= \frac{(1 - D_1) \left[\sigma_2 K_2 - (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right]}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}, \\ S_2 E_{22} &= \frac{(1 - D_2) \left[\sigma_1 K_1 - (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right]}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}, \\ S_1 E_{12} &= \frac{(1 - D_2)^2 (1 - D_1)^{-1} (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}, \\ S_2 E_{21} &= \frac{(1 - D_1)^2 (1 - D_2)^{-1} (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}, \\ \beta_1 - 1 &= \frac{1 - D_1}{1 - D_3}, \quad \beta_2 - 1 = \frac{1 - D_2}{1 - D_3}. \end{aligned}$$

Закон накопления повреждений есть (K_1, K_2, K_3 – положительные постоянные)

$$dD_1 = K_1 d\varepsilon_1^p, \quad dD_2 = K_2 d\varepsilon_2^p, \quad dD_3 = -K_3 d\varepsilon_3^p. \quad (7)$$

Приведем систему уравнений (3) – (7) к безразмерному виду с помощью введения параметра h , за который возьмем характерный линейный размер тела, и обозначений $\widetilde{d\sigma}_i = d\sigma_i / (2k)$, $\widetilde{du}_i = du_i / h$. Полученную задачу можно решать численно, методом конечных разностей [9]. Для этого необходимо в области непрерывного изменения аргументов $\widetilde{d\sigma}_1, \widetilde{d\sigma}_2, \widetilde{d\sigma}_3, d\omega, d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3, \widetilde{du}_{\langle 1 \rangle}, \widetilde{du}_{\langle 2 \rangle}, \widetilde{du}_{\langle 3 \rangle}, dD_1, dD_2, dD_3$ ввести сетку, а

² Формулы ассоциированного закона течения записаны для случая $d\varepsilon_1^p \geq 0, d\varepsilon_2^p \geq 0, d\varepsilon_3^p \leq 0$.

дифференциальный оператор заменить его разностным аналогом. В результате получим равномерную сетку с узлами (ξ_i^1, ξ_j^2) . Вместо функций непрерывных аргументов будем рассматривать сеточные функции $\widetilde{d\sigma}_1[i, j], \widetilde{d\sigma}_2[i, j], \widetilde{d\sigma}_3[i, j], d\omega[i, j], d\varepsilon_1[i, j], d\varepsilon_2[i, j], d\varepsilon_3[i, j], \widetilde{du}_{<1>}[i, j], \widetilde{du}_{<2>}[i, j], \widetilde{du}_{<3>}[i, j], dD_1[i, j], dD_2[i, j], dD_3[i, j]$, что позволяет систему уравнений в частных производных (3) - (7) аппроксимировать разностной схемой. Разностная задача является так называемой явной схемой: значения решения на более высоком слое определяются через значения на предыдущем слое по явным формулам. Здесь для аппроксимации используется разностное отношение «вперед имеющее первый порядок точности».

В процессе решения связанной (пластичность-поврежденность) осесимметричной задачи были численно определены поле изостат и значение предельной растягивающей силы при аппроксимации контура свободной границы дугой эллипса для связанной осесимметричной задачи.

1. Идеально пластическая модель.

Сетка скольжения была определена численно (рис. 2).

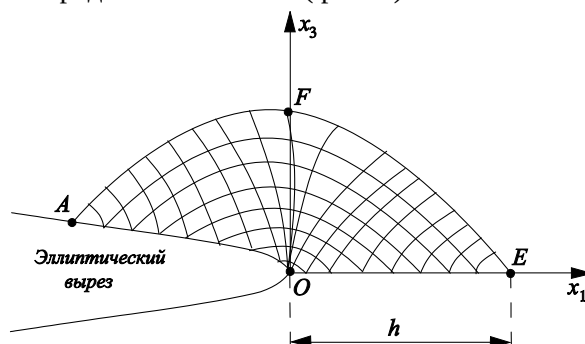


Рис. 2. Поле скольжения у вершины дискообразного выреза (осевая симметрия, случай идеальной пластичности)

Численное решение этой задачи по схеме полной пластичности было получено Ю.Н. Радаевым и Ю.Н. Бахаревой [10]. Ими было найдено значение предельной нагрузки $P_*/(2\pi kh^2)$ в зависимости от параметра kh (k – кривизна в вершине) и дано сравнение с приближенным подходом Бриджмена (см. таблицу).

Таблица. Значения предельной нагрузки P_* и значения P_{Br} , данные Бриджменом, для различных безразмерных кривизн свободного контура шейки

kh	$P_*/(2\pi kh^2)$	$P/(2\pi kh^2)$	P_*/P
0.11	0.9540	1.0268	0.9290
0.13	0.9565	1.0318	0.9254
0.15	0.9632	1.0366	0.9292
0.17	0.9707	1.0413	0.9321
0.2	0.9797	1.0483	0.9345
0.23	0.9848	1.0553	0.9331
0.25	0.9893	1.0600	0.9333
0.27	0.9976	1.0646	0.9370
0.3	1.0025	1.0714	0.9356
0.35	1.0074	1.0827	0.9304
0.4	1.0202	1.0939	0.9326
0.45	1.0286	1.1048	0.9309
0.5	1.0421	1.1157	0.9340

2. Модель с накоплением повреждений. Поскольку сжатие происходит в радиальном и окружном направлениях, то накопление повреждений происходит согласно уравнениям:

$$dD_1 = 0, \quad dD_2 = 0, \quad dD_3 = -K_3 d\varepsilon_3^p.$$

Сетка скольжения была определена численно (рис. 3).

Численный анализ позволяет заключить, что при $kh=1/2$, $K=3/2$ решение существует всегда, поскольку всюду выполняется неравенство $D_3 < 1$. Рассматривался процесс нагружения по монотонно возрастающей величине горизонтального размера пластической зоны вдоль свободного берега трещины до момента пересечения границы пластической зоны с точкой E . Величина шага 1 разностной схемы имеет порядок $10^{-4}h$. Дальнейшее измельчение сетки не приводит к существенным изменениям величины предельной растягивающей нагрузки, что косвенно свидетельствует о сходимости вычислительного процесса.

Предельная нагрузка в этом случае вычисляется в виде

$$\frac{P_*}{2\pi kh^2} = 0,822....$$

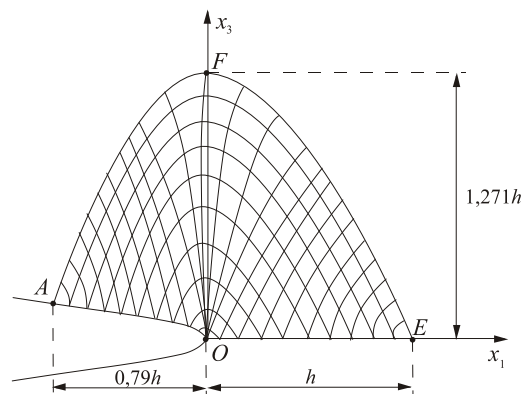


Рис. 3. Поле скольжения у вершины дискообразного выреза (осевая симметрия, случай связанной пластичности-поврежденности)

Было рассмотрено жесткопластическое тело, подчиняющееся обобщенному критерию текучести Треска, с рассеянным анизотропным полем повреждений. Поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга, главные оси которого совпадают с главными осями тензора напряжений. Предложена математическая модель связанного (пластичность-поврежденность) состояния, которая базируется на уравнениях, включающих уравнения равновесия, обобщенное условие пластичности, уравнение несовместности приращений пластических деформаций, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения с учетом повреждений, а также уравнения, определяющие изменение главных поврежденностей в зависимости от приращений деформаций. Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе.

Проведен численный анализ задачи о локализации пластических деформаций в пределах шейки одноосно растягиваемого образца в осесимметричной постановке по обобщенной схеме полной пластичности. Проведено сравнение с экспериментальными данными, полученными ранее Бриджменом.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Мураками С., Радаев Ю.Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1996. №4. С. 93-110.
2. Радаев Ю.Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. 1998. №2(8). С. 79-105.
3. Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. 1999. №4(14). С. 70-93.
4. Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. №5. С. 27-45.
5. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 2. P. 280-286.
6. Radayev Y.N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // Trans. Japan Soc. Mech. Engr. V. 60 A. No. 580. 1994. P. 68-76.
7. Radayev Y.N. On directional average of the local anisotropic damage // Int. J. Fracture. 2004. V. 128. P. 293-307.
8. Maugin G.A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 350 pp.
9. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. - М.: Издательство иностр. литературы, 1953. - 460 с.
10. Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. Об одном численном методе решения осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. - 2004. - Второй спец. выпуск. - С. 52-64.

Сведения об авторе

Холкина Наталья Александровна

кандидат физ.-мат. наук, старший преподаватель,

Московский городской университет управления Правительства Москвы

Адрес: 141076, Московская область, г. Королев-6, ул. Мичурина, д. 6, кв. 13

Тел.: 8 (926) 603 84 86, E-mail: knatallyasamgu@mail.ru

УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯМИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ СТОЛКНОВЕНИЯ

Чахмахчян Р. Э.

1. Рассматривается система из двух точечных объектов, совершающих пространственные движения в гравитационном поле Земли. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X: m_x \ddot{x} = F_x + m_x g, \quad Y: m_y \ddot{y} = F_y + m_y g \quad (1.1)$$

Здесь $x, y \in R^3$ – векторы координат объектов, $F_x, F_y \in R^3$ – векторы управляющих сил объектов, $g = (0, 0, -g)$ – постоянный вектор ускорения свободного падения, а m_x, m_y – соответственно, массы объектов X и Y .

Требуется определить управляющие вектор-функции $F_x(t)$ и $F_y(t)$ так, чтобы объекты (1.1) перешли из начальных состояний в момент $t = 0$

$$x(0) = x^0, \dot{x}(0) = \dot{x}^0, y(0) = y^0, \dot{y}(0) = \dot{y}^0 \quad (1.2)$$

в заданные конечные состояния в некоторый нефиксированный момент $t = T$

$$x(T) = x^1, \dot{x}(T) = \dot{x}^1, y(T) = y^1, \dot{y}(T) = \dot{y}^1 \quad (1.3)$$

и при их совместном движении не имело места столкновения, т.е. выполнялось условие

$$|x(t) - y(t)| \neq 0, \quad t \in [0, T] \quad (1.4)$$

где $| \cdot |$ – эвклидова норма вектора.

2. Введем обозначения

$$x_{i1} = x_i, x_{i2} = \dot{x}_i, y_{i1} = y_i, y_{i2} = \dot{y}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

и представим уравнения (1.1) в виде

$$\dot{x} = A_x x + B_x u, \quad \dot{y} = A_y y + B_y v \quad (2.2)$$

В (2.2) матрицы A_x, B_x , фазовые векторы x, y и управляющие векторы u, v определяются следующим образом:

$$A_{x,y} = \begin{pmatrix} A_{x,y}^1 & (0) & (0) \\ (0) & A_{x,y}^2 & (0) \\ (0) & (0) & A_{x,y}^3 \end{pmatrix}, \quad (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_x^i = A_y^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$$B_{x,y} = (B_{x,y}^1 \ B_{x,y}^2 \ B_{x,y}^3)^T, \quad B_x^1 = B_y^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_x^2 = B_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_x^3 = B_y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = (x_{11}, \ x_{12}, \ x_{21}, \ x_{22}, \ x_{31}, \ x_{32})^T, \quad y = (y_{11}, \ y_{12}, \ y_{21}, \ y_{22}, \ y_{31}, \ y_{32})^T$$

$$u = (u_1, \ u_2, \ u_3 - g)^T, \quad v = (v_1, \ v_2, \ v_3 - g)^T$$

$$u_i = \frac{F_{xi}}{m_x}, \quad v_i = \frac{F_{yi}}{m_y}, \quad i = 1, 2, 3;$$

В переменных (2.1) начальные, конечные условия (1.2), (1.3), а также условие отсутствия столкновения (1.2) запишутся так:

$$x^0 = (x_{11}^0, \ x_{12}^0, \ x_{21}^0, \ x_{22}^0, \ x_{31}^0, \ x_{32}^0)^T, \quad y^0 = (y_{11}^0, \ y_{12}^0, \ y_{21}^0, \ y_{22}^0, \ y_{31}^0, \ y_{32}^0)^T$$

$$x^1 = (x_{11}^1, \ x_{12}^1, \ x_{21}^1, \ x_{22}^1, \ x_{31}^1, \ x_{32}^1)^T, \quad y^1 = (y_{11}^1, \ y_{12}^1, \ y_{21}^1, \ y_{22}^1, \ y_{31}^1, \ y_{32}^1)^T \quad (2.4)$$

$$|x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t)| \neq 0 \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

где $x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t) = (x_{11}(t) - y_{11}(t), \ x_{21}(t) - y_{21}(t), \ x_{31}(t) - y_{31}(t))^T$.

Сначала построим управляющие вектор-функции $u(t), v(t)$ без учета ограничений (2.5). Запишем решение системы (2.2):

$$x(t) = \Phi_x(t) \left[x^0 + \int_0^t \Phi_x^{-1}(\tau) B_x(\tau) u(\tau) d\tau \right], \quad y(t) = \Phi_y(t) \left[y^0 + \int_0^t \Phi_y^{-1}(\tau) B_y(\tau) v(\tau) d\tau \right] \quad (2.6)$$

где $\Phi_x(t)$ и $\Phi_y(t)$ – фундаментальные матрицы, определяемые условиями

$$\dot{\Phi}_x(t) = A_x \Phi_x(t), \quad \Phi_x(0) = E_6, \quad \dot{\Phi}_y(t) = A_y \Phi_y(t), \quad \Phi_y(0) = E_6$$

$$\Phi_x = \Phi_y = \begin{pmatrix} \Phi(t) & (0) & (0) \\ (0) & \Phi(t) & (0) \\ (0) & (0) & \Phi(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Учитывая (2.4), задача сводится к отысканию таких управлений $u(t), v(t)$, при которых удовлетворяются условия:

$$\int_0^T \Phi_x^{-1}(t) B_x(t) u(t) dt = \Phi_x^{-1}(T) x^1 - x^0, \quad \int_0^T \Phi_y^{-1}(t) B_y(t) v(t) dt = \Phi_y^{-1}(T) y^1 - y^0 \quad (2.8)$$

Воспользуемся известным подходом [1] построения управления. Этот подход в [2] был распространен на случай наличия ограничения на управление – в задачах успокоения многочастотных систем линейных осцилляторов, скалярно управляемых, а в [3] – при ограничениях на компоненты управления, в задаче управления двузвенным манипулятором. Следуя указанному подходу, управления, решающие задачу без учета ограничений (2.5), ищем в виде

$$u(t) = Q_x^T(t) C_x, \quad v(t) = Q_y^T(t) C_y \quad (2.9)$$

где $Q_x(t) = \Phi_x^{-1}(t) B_x$, $Q_y(t) = \Phi_y^{-1}(t) B_y$, а C_x, C_y – постоянные векторы, которые определяются следующими системами линейных алгебраических уравнений:

$$R_x(T) C_x = \Phi_x^{-1}(T) x^1 - x^0, \quad R_y(T) C_y = \Phi_y^{-1}(T) y^1 - y^0 \quad (2.10)$$

где

$$R_x(T) = \int_0^T Q_x(t) Q_x^T(t) dt, \quad R_y(T) = \int_0^T Q_y(t) Q_y^T(t) dt \quad (2.11)$$

Так как системы (2.2), (2.3) полностью управляемы, то матрицы $R_x(T)$ и $R_y(T)$ – неособые [4] и, поэтому из (2.10) имеем

$$C_x = R_x^{-1}(T) (\Phi_x^{-1}(T) x^1 - x^0), \quad C_y = R_y^{-1}(T) (\Phi_y^{-1}(T) y^1 - y^0) \quad (2.12)$$

Подставляя выражение (2.11) в (2.9) и (2.6) и произведя некоторые упрощения, управления $u(t), v(t)$ и соответствующие им фазовые траектории (2.6) можно представить в следующих формах:

$$u(t, T) = F_x^0(t, T) \cdot x^0 + F_x^1(t, T) \cdot x^1 = \begin{pmatrix} F_x^0(t, T) & F_x^1(t, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 & x^1 \end{pmatrix}^T = F_x(t, T) \cdot (x^*)^T$$

$$x(t, T) = G_x^0(t, T) \cdot x^0 + G_x^1(t, T) \cdot x^1 = \begin{pmatrix} G_x^0(t, T) & G_x^1(t, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 & x^1 \end{pmatrix}^T = G_x(t, T) \cdot (x^*)^T$$

$$v(t, T) = F_y^0(t, T) \cdot y^0 + F_y^1(t, T) \cdot y^1 = \begin{pmatrix} F_y^0(t, T) & F_y^1(t, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^0 & y^1 \end{pmatrix}^T = F_y(t, T) \cdot (y^*)^T$$

$$y(t, T) = G_y^0(t, T) \cdot y^0 + G_y^1(t, T) \cdot y^1 = \begin{pmatrix} G_y^0(t, T) & G_y^1(t, T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^0 & y^1 \end{pmatrix}^T = G_y(t, T) \cdot (y^*)^T \quad (2.13)$$

где

$$G_x^0(t, T) = \Phi_x(t) - \Phi_x(t) R_x(t) R_x^{-1}(T), \quad G_x^1(t, T) = \Phi_x(t) R_x(t) R_x^{-1}(T) \Phi_x^{-1}(T)$$

$$F_x^0(t, T) = -(\Phi_x^{-1}(t) B_x(t))^T R_x^{-1}(T), \quad G_y^1(t, T) = \Phi_y(t) R_y(t) R_y^{-1}(T) \Phi_y^{-1}(T)$$

$$G_y^0(t, T) = \Phi_y(t) - \Phi_y(t) R_y(t) R_y^{-1}(T), \quad F_x^1(t, T) = (\Phi_x^{-1}(t) B_x(t))^T R_x^{-1}(T) \Phi_x^{-1}(T)$$

$$\bar{F}_y^0(t, T) = -(\Phi_y^{-1}(t)B_y(t))^T R_y^{-1}(T), \quad F_y^1(t, T) = (\Phi_y^{-1}(t)B_y(t))^T R_y^{-1}(T)\Phi_y^{-1}(T), \quad (2.14)$$

3. Решения (2.13) системы (2.2) при управлениях (2.12) для любого T удовлетворяют краевым условиям (2.4). При этом, однако, фазовые траектории, соответствующие построенным управлениям, не обязательно удовлетворяют наложенным ограничениям-условиям отсутствия столкновений (2.5). Для того, чтобы учесть эти ограничения-условия, введем вектор

$$z(t, T) = \begin{pmatrix} z_1(t, T) \\ z_2(t, T) \\ z_3(t, T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}(t, T) - y_{11}(t, T) \\ x_{21}(t, T) - y_{21}(t, T) \\ x_{31}(t, T) - y_{31}(t, T) \end{pmatrix},$$

и запишем условие (2.5) в виде

$$|z(t, T)| = |\bar{G}(t, T) \cdot z^{0,1}| \neq 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.1)$$

где

$$\bar{G}(t, T) = \begin{pmatrix} \bar{G}_x^0(t, T) & \bar{G}_x^1(t, T) & -\bar{G}_y^0(t, T) & -\bar{G}_y^1(t, T) \end{pmatrix}, \quad z^{0,1} = (x^0, x^1, y^0, y^1)^T \quad (3.2)$$

Матрицы $\bar{G}_{x,y}^0(t, T)$, $\bar{G}_{x,y}^1(t, T)$ (3.2) получаются из матриц $G_{x,y}^0(t, T)$, $G_{x,y}^1(t, T)$ (2.12) отбрасыванием чётных строк, т.е.

$$\bar{G}_x^0(t, T) = \bar{G}_y^0(t, T) = \begin{pmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^0 & g_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11}^0 & g_{12}^0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{G}_x^1(t, T) = \bar{G}_y^1(t, T) = \begin{pmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11}^1 & g_{12}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{11}^1 & g_{12}^1 \end{pmatrix}$$

где с учетом (2.3), (2.7), (2.11), (2.14)

$$g_{11}^0 = 1 + 2t^3/T^3 - 3t^2/T^2, \quad g_{12}^0 = t + t^3/T^2 - 2t^2/T, \quad g_{11}^1 = -2t^3/T^3 + 3t^2/T^2, \quad g_{12}^1 = t^3/T^2 - t^2/T$$

Выполнение условия (3.1) равносильно тому, чтобы не была разрешима следующая система:

$$\begin{cases} z_1(t, T) = 0 \\ z_2(t, T) = 0 \text{ или} \\ z_3(t, T) = 0 \end{cases} \begin{cases} a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} = 0 \\ a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20} = 0, \quad t \in [0, T], \\ a_{33}t^3 + a_{32}t^2 + a_{31}t + a_{30} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$a_{i0} = \alpha_i^0, \quad a_{i1} = \beta_i^0$$

$$a_{i2} = -\frac{3\alpha_i^0}{T^2} + \frac{3\alpha_i^1}{T^2} - \frac{2\beta_i^0}{T} - \frac{\beta_i^1}{T}, \quad a_{i3} = \frac{2\alpha_i^0}{T^3} - \frac{2\alpha_i^1}{T^3} + \frac{\beta_i^0}{T^2} + \frac{\beta_i^1}{T^2} \quad (3.4)$$

и

$$\alpha_i^{0,1} = x_i^{0,1} - y_i^{0,1}, \quad \beta_i^{0,1} = \dot{x}_i^{0,1} - \dot{y}_i^{0,1}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

или, в случае разрешимости, решение системы (3.3) не принадлежало бы интервалу $[0, T]$.

Запишем систему (3.3) в матричной форме

$$A \cdot \bar{t} = \bar{b} \quad (3.6)$$

где

$$A = (a_{ij})_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \bar{b} = (-a_{10}, \quad -a_{20}, \quad -a_{30})^T, \quad \bar{t} = (p, \quad q, \quad r)^T, \quad p = t^3, q = t^2, r = t \quad (3.7)$$

Так как начальные и конечные положения объектов X и Y не совпадают, т.е.

$$(\alpha_1^{0,1})^2 + (\alpha_2^{0,1})^2 + (\alpha_3^{0,1})^2 \neq 0, \text{ то } \bar{b} \neq 0.$$

между решениями систем (3.6) и (3.3) имеется следующая связь.

Пусть зафиксирован некоторый набор начальных и конечных состояний объектов X, Y , а также время $T > 0$ окончания процесса. Тогда, если

$$\det[A(T)] = 0 \quad (3.8)$$

то системы (3.6) и (3.3) одновременно неразрешимы.

Если

$$\det[A(T)] \neq 0 \quad (3.9)$$

то из разрешимости системы (3.3) относительно t на интервале $[0, T]$ следует разрешимость системы (3.6) относительно $\bar{t}$. Обратное не всегда верно. Для того, чтобы из существования решения $\bar{t}$ (3.6) вытекало существование решения t системы (3.3) на интервале $[0, T]$,

необходимо и достаточно, чтобы компоненты решения $\bar{t} = (p, q, r)^T$ удовлетворяли условиям

$$\begin{cases} q = r^2 \\ p = q \cdot r \end{cases} \quad (a) \quad (3.10)$$

$$r \in [0, T] \quad (б)$$

Отсюда следует, что в случае (3.9) для неразрешимости системы (3.3) достаточно, чтобы для компонент решения $\bar{t}$ системы (3.6) не выполнялось хотя бы одно из условий (3.10).

Вычисляя детерминант матрицы $A(T)$ и проделав некоторые упрощения, получим

$$\det[A(T)] = f(x^0, x^1, y^0, y^1) \cdot T^{-4} \quad (3.11)$$

где f имеет вид

$$\begin{aligned} f = & (\alpha_3^0 - \alpha_3^1)(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \beta_3^0((- \alpha_2^0 + \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^1) + \\ & + \beta_3^1((- \alpha_2^0 + \alpha_2^1)\beta_1^0 + (- \alpha_1^0 + \alpha_1^1)\beta_2^0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Так как $T > 0$, то из (3.12) следует, что (3.8) имеет место только для тех начальных и конечных состояний объектов X, Y , для которых $f = 0$. В этом случае системы (3.6) и (3.3) одновременно неразрешимы и условие (2.5) выполняется при любом выборе конечного времени T .

Если при некотором наборе начальных и конечных состояний объектов X, Y имеет место $f \neq 0$, то система (3.6) имеет единственное решение – $\bar{t}^*$

$$p^*(T) = Dp/D, \quad q^*(T) = Dq/D, \quad r^*(T) = Dr/D, \quad D = \det[A(T)] \quad (3.13)$$

при любом выборе конечного времени $T > 0$. Однако, найденные компоненты (3.13) не обязательно удовлетворяют условиям (3.10)(а),(б). Если нарушено одно из этих условий, то система (3.3) не имеет решения и условие отсутствия столкновения (2.5) выполняется. Определим момент времени $T > 0$ так, чтобы условие, например, (3.10)(б) не удовлетворялось. Из (3.13), с учетом (3.7), после некоторых упрощений получим:

$$r^*(T) = t^*(T) = \alpha_1 + \beta_1 T \quad (3.14)$$

$$q^*(T) = (\alpha_2 + \beta_2 T)T$$

$$p^*(T) = (\alpha_3 + \beta_3 T)T^2$$

где α_1 и β_1 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{(\alpha_1^1\alpha_3^0 - \alpha_1^0\alpha_3^1)(\beta_2^0 - \beta_2^1) + \alpha_2^1(\alpha_3^0(\beta_1^1 - \beta_1^0) + \alpha_1^0(\beta_3^0 - \beta_3^1)) + \alpha_2^0(\alpha_3^1(\beta_1^0 - \beta_1^1) + \alpha_1^1(\beta_3^1 - \beta_3^0))}{\alpha_3^1(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \alpha_3^0(\beta_1^0\beta_2^1 - \beta_1^1\beta_2^0) + ((\alpha_2^0 - \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^0)\beta_2^1)\beta_3^0 + ((\alpha_2^1 - \alpha_2^0)\beta_1^0 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^0)\beta_3^1} \\ \beta_1 = & \frac{\alpha_3^0(\beta_1^0\beta_2^1 - \beta_1^1\beta_2^0) + \alpha_3^1(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \alpha_1^0(\beta_2^0\beta_3^1 - \beta_2^1\beta_3^0)}{\alpha_3^1(\beta_1^1\beta_2^0 - \beta_1^0\beta_2^1) + \alpha_3^0(\beta_1^0\beta_2^1 - \beta_1^1\beta_2^0) + ((\alpha_2^0 - \alpha_2^1)\beta_1^1 + (\alpha_1^1 - \alpha_1^0)\beta_2^1)\beta_3^0 + ((\alpha_2^1 - \alpha_2^0)\beta_1^0 + (\alpha_1^0 - \alpha_1^1)\beta_2^0)\beta_3^1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Аналогичным образом определяются $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$.

Искомое время T определим так, чтобы $t(T) \notin [0, T]$, т.е. удовлетворялось неравенство

$$\alpha_1 + \beta_1 T > T \quad (3.16)$$

Для заданного набора начальных и конечных состояний объектов возможны следующие случаи:

1. Если $\alpha_1 \leq 0$ и $\beta_1 \leq 1$, то не существует конечного момента T , удовлетворяющего условию (3.16). В этом случае условие (3.10)(б) выполняется для любого $T \in (0, +\infty)$. Тогда для неразрешимости системы (3.3), т.е. выполнения условия нестолкновения (2.5) достаточно, чтобы не имело решения относительно $T > 0$ система (3.10)(а).

2. Если $\alpha_1 < 0$ и $\beta_1 > 1$, то условие (2.5) имеет место при любом

$$T \in [T^*, +\infty), T^* = -\frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1} > 0.$$

3. Если $\alpha_1 > 0$ и $\beta_1 \geq 1$ или $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 > 1$, то условие (2.5) имеет место при любом $T \in (0, +\infty)$.

4. Если $\alpha_1 > 0$ и $\beta_1 < 1$, то условие (2.5) имеет место при любом $T \in (0, T^*]$,

$$T^* = -\frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1} > 0.$$

Таким образом, объекты X и Y при построенных управлениях (2.12) могут гарантированно двигаться без столкновения к заданным конечным состояниям в первом случае, если неразрешима система (3.10)(а) и в случаях 2–4.

Ниже приведен расчетный результат моделирования движений объектов X и Y для следующих начальных и конечных состояний:

$$x^0 = (0 \ 1 \ 0), \dot{x}^0 = (1 \ 2 \ 3), y^0 = (1 \ 1 \ 1), \dot{y}^0 = (1 \ 2 \ 2)$$

$$x^1 = (4 \ 4 \ 4), \dot{x}^1 = (1 \ 2 \ 4), y^1 = (5 \ 5 \ 5), \dot{y}^1 = (1 \ 2 \ 3), T = 8$$

При этих значениях $f = 0$ (3.12) и поэтому, согласно (3.11) имеет место (3.8), т.е. столкновение объектов не происходит, несмотря на то, что (как видно из рис. 1,2, представленных с разных сторон)

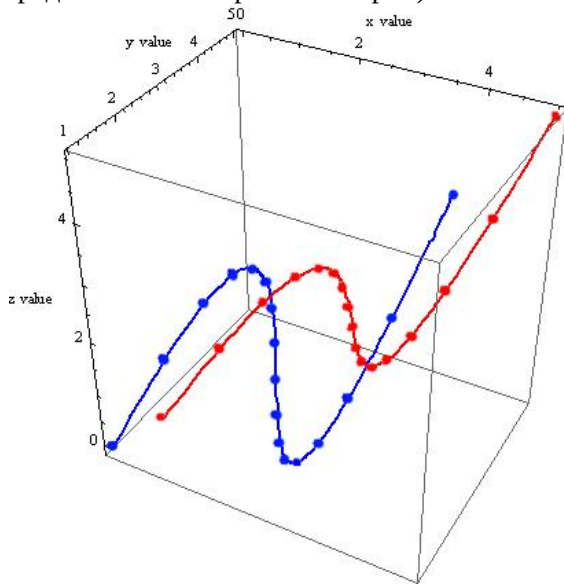


Рис 1.

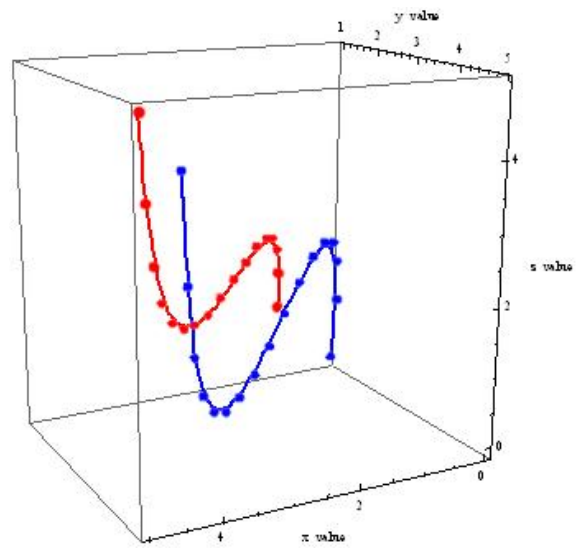


Рис. 2

траектории движения объектов X и Y пересекаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р. Об общей теории систем управления. // Тр. 1-го Конгр. Междунар. Федерации по автомат. управ-ю. (IFAC). М.: АН СССР, 1961. Т.2. С.521-547.
2. Черноушко Ф.Л. О построении ограниченного управления в колебательных системах. // ПММ. 1988. Т.52. Вып. 4. С.549-558.
3. Аветисян В.В. Ограниченное управление линейной динамической системой с ограничением на фазовую скорость. // Изв. НАН РА. Механика. 2000. Т. 53. № 4. С.48-56.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

Сведения об авторе

Чахмакчян Рафаэль Э.

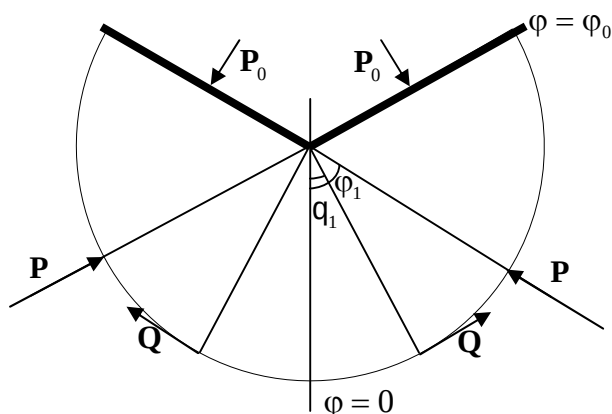
аспирант факультета математики и механики ЕГУ

Email: rafayel.chakhmakhchyan@gmail.com , Tel: (374 93) 28-52-24

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО КРУГОВОГО СЕКТОРА

Члинггарян Г.С.

Особенности напряжений, возникающие вблизи углов, рассматривались несколькими авторами [1, 2, 3]. В данной работе изучается поведение напряжений внутри упругого кругового сектора $0 \leq r \leq 1$, $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ и, в частности, у его вершины, когда на границе окружности $r=1$ заданы нормальные и касательные нагрузки в виде сосредоточенных сил, симметричных относительно $\varphi=0$. На границах сектора $\varphi=\pm\varphi_0$ заданы нормальные перемещения и касательные напряжения (фиг. 1). В силу симметрии относительно линии $\varphi=0$



Фиг. 1

рассматривается только область $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$.

Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах r, j приводится к отысканию одной функции $\Phi(r, j)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (1)$$

Компоненты напряжений и перемещений выражаются через функцию $\Phi(r, j)$ следующими известными соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, & \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, & \tau_{r\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{E} \left((1-\nu^2) \sigma_r - \nu(1+\nu) \sigma_\varphi \right), & \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} &= \frac{1}{E} \left((1-\nu^2) \sigma_\varphi - \nu(1+\nu) \sigma_r \right) + \frac{u_r}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия задачи запишем следующим образом:

1. $\sigma_r(1, \varphi) = P \delta(\varphi - \varphi_1) \quad 0 < \varphi < \varphi_0$
2. $\tau_{r\varphi}(1, \varphi) = Q \delta(\varphi - \theta_1) \quad 0 < \varphi < \varphi_0$
3. $\tau_{r\varphi}(r, \varphi_0) = 0 \quad 0 < r < 1,$
4. $u_\varphi(r, \varphi_0) = \alpha_0 r \quad 0 \leq r \leq 1$
5. $\tau_{r\varphi}(r, 0) \equiv u_\varphi(r, 0) \equiv 0 \quad 0 < r < 1$

Бигармоническую функцию Эри представим в следующем виде:

$$\Phi(r, \varphi) = Ar^2 \ln r + ar^2 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{\alpha_k} (a_k + r^2 b_k) \cos \alpha_k \varphi + r \int_0^{\infty} (A(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda \varphi) \sin(\varphi) + B(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda \varphi) \cos(\varphi)) \cos(\lambda \ln r) d\lambda \quad (4)$$

где $\alpha_k = \frac{\pi k}{\varphi_0}$, а коэффициенты разложений a_k и b_k , а также неизвестные функции интегрирования $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ должны определяться из граничных условий (3).

При решении граничных задач теории упругости в полярных координатах для конечных областей часто бывает удобным преобразование радиальной координаты r . Здесь введем это преобразование через соотношение $r = e^{-t}$.

Удовлетворив граничным условиям (3), получаем

$$A(\lambda) = \frac{2E\alpha_0}{\pi(1-\nu)} \frac{\operatorname{ch}\lambda\varphi_0 \sin\varphi_0 - \lambda \operatorname{sh}\lambda\varphi_0 \cos\varphi_0}{\lambda(1+\lambda^2)(\operatorname{ch}2\lambda\varphi_0 - \cos 2\varphi_0)}, \quad B(\lambda) = \frac{2E\alpha_0}{\pi(1-\nu)} \frac{\operatorname{sh}\lambda\varphi_0 \cos\varphi_0 + \lambda \operatorname{ch}\lambda\varphi_0 \sin\varphi_0}{\lambda(1+\lambda^2)(\operatorname{ch}2\lambda\varphi_0 - \cos 2\varphi_0)}$$

$$A = \frac{E\alpha_0}{4\varphi_0(1-\nu^2)}, \quad a = \frac{P}{2\varphi_0} - \frac{E\alpha_0}{8\varphi_0(1-\nu^2)},$$

$$a_k = \frac{P\alpha_k \cos \alpha_k \varphi_1 + Q(\alpha_k - 2) \sin \alpha_k \theta_1}{\alpha_k \varphi_0 (1 - \alpha_k)}, \quad b_k = \frac{P \cos \alpha_k \varphi_1 + Q \sin \alpha_k \theta_1}{\varphi_0 (1 + \alpha_k)} \quad (5)$$

Для компонент напряжений получаем следующие формулы:

$$\sigma_r(r, \varphi) = \frac{1}{\varphi_0^2} r^{\frac{\pi}{\varphi_0}-2} (1-r^2) \left(P \frac{\pi}{2} \left(\frac{M_1(r, \varphi - \varphi_1)}{H(r, \varphi - \varphi_1)^2} + \frac{M_1(r, \varphi + \varphi_1)}{H(r, \varphi + \varphi_1)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + Q \left(\frac{\pi}{2} \left[1 - r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}} \right] - \varphi_0 \right) \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\varphi_0} (\theta_1 - \varphi)}{H(r, \theta_1 - \varphi)} + \frac{\sin \frac{\pi}{\varphi_0} (\theta_1 + \varphi)}{H(r, \theta_1 + \varphi)} \right) \right) +$$

$$+ \frac{E\alpha_0}{2\varphi_0(1-\nu^2)} \ln r + P \frac{1}{\varphi_0} \left(\frac{M_2(r, \varphi - \varphi_1)}{H(r, \varphi - \varphi_1)} + \frac{M_2(r, \varphi + \varphi_1)}{H(r, \varphi + \varphi_1)} - 1 \right)$$

$$\sigma_\varphi(r, \varphi) = \frac{1}{\varphi_0^2} r^{\frac{\pi}{\varphi_0}-2} \left(-P \frac{\pi}{2} (1-r^2) \left(\frac{M_1(r, \varphi - \varphi_1)}{H(r, \varphi - \varphi_1)^2} + \frac{M_1(r, \varphi + \varphi_1)}{H(r, \varphi + \varphi_1)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + Q \left(-\frac{\pi}{2} (1-r^2) \left(1 - r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}} \right) \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\varphi_0} (\theta_1 - \varphi)}{H(r, \theta_1 - \varphi)^2} + \frac{\sin \frac{\pi}{\varphi_0} (\theta_1 + \varphi)}{H(r, \theta_1 + \varphi)^2} \right) + \right.$$

$$\left. \left. + \varphi_0 (1+r^2) \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\varphi_0} (\theta_1 - \varphi)}{H(r, \theta_1 - \varphi)} + \frac{\sin \frac{\pi}{\varphi_0} (\theta_1 + \varphi)}{H(r, \theta_1 + \varphi)} \right) \right) \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E \alpha_0}{2\varphi_0(1-v^2)} \ln r + P \frac{1}{\varphi_0} \left(\frac{M_2(r, \varphi - \varphi_1)}{H(r, \varphi - \varphi_1)} + \frac{M_2(r, \varphi + \varphi_1)}{H(r, \varphi + \varphi_1)} - 1 \right) + \frac{E \alpha_0}{4\varphi_0(1-v^2)} \\
& \tau_{r\varphi}(r, \varphi) = \frac{1}{\varphi_0^2} r^{\frac{\pi}{\varphi_0}-2} \left(P \frac{\pi}{2} (-1+r^2) \left(1 - r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}} \right) \left(\frac{\sin \pi(\varphi - \varphi_1)/\varphi_0}{H(r, \varphi - \varphi_1)^2} + \frac{\sin \pi(\varphi + \varphi_1)/\varphi_0}{H(r, \varphi + \varphi_1)^2} \right) + \right. \\
& \left. + Q \left(\frac{\pi}{2} (-1+r^2) \left(\frac{M_1(r, \theta_1 - \varphi)}{H(r, \theta_1 - \varphi)^2} + \frac{M_1(r, \theta_1 + \varphi)}{H(r, \theta_1 + \varphi)^2} \right) + 2\varphi_0 \left(1 - r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}} \right) \frac{\sin \pi\theta_1/\varphi_0 \sin \pi\varphi/\varphi_0}{H(r, \theta_1 - \varphi)H(r, \theta_1 + \varphi)} \right) \right)
\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$H(r, t) = 1 + r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}} - 2r^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \cos \frac{\pi t}{\varphi_0}, \quad M_1(r, t) = -2r^{\frac{\pi}{\varphi_0}} + \left(1 + r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}} \right) \cos \frac{\pi t}{\varphi_0}, \quad M_2(r, t) = 1 - r^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \cos \frac{\pi t}{\varphi_0} \quad (7)$$

Как видно из формул нормальных напряжений (6), логарифмические особенности обусловлены только конкретным линейным видом перемещений $u_\varphi(r, \varphi_0) = \alpha_0 r$ точек границы $\varphi = \varphi_0$.

Что же касается степенных особенностей, то их поведение в нормальных и касательных напряжениях (6) меняется в зависимости от значений угла φ_0 . Так, например, при всех значениях $0 < \varphi_0 \leq \pi/2$ показатель функции $f(r) = r^{\pi/\varphi_0-2}$ положителен и, следовательно, особенности напряжений характеризуются только логарифмическими функциями.

Остановимся подробно на нескольких случаях, а именно, когда $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 2\pi/3$ и $\varphi_0 = \pi$.

1. Рассмотрим случай, когда $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi_1 = \pi/4$, $\theta_1 = \pi/4$. Поскольку $\varphi_0 = \pi/2$, то показатель функции $f(r)$ обращается в нуль и все степенные особенности в выражениях (6) исчезают. В точке $r=0$ нормальные напряжения имеют логарифмические особенности, касательные же напряжения ограничены.

2. При $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$ показатель функции $f(r)$ получается отрицательным и во всех напряжениях, кроме логарифмических, возникают также и степенные особенности.

Степенные особенности сохраняются при приближении угла φ_0 к значению π , однако когда $\varphi_0 = \pi$, поведение особенностей меняется.

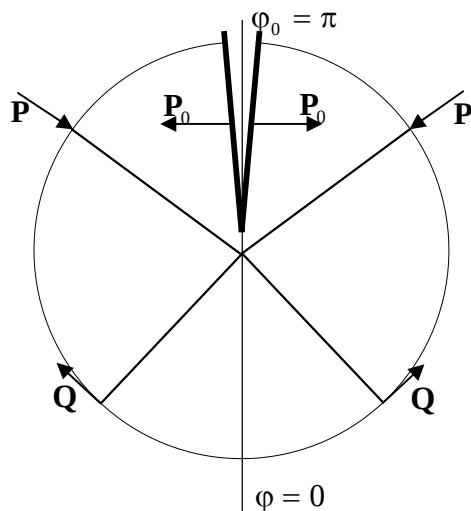
3. Наконец, рассмотрим случай, когда $\varphi_0 = \pi$, $\varphi_1 = 2\pi/3$, $\theta_1 = \pi/6$ (фиг. 2).

Как отмечается в работе [1], где был рассмотрен случай загрузки кругового сектора только нормальными нагрузками, здесь также, хотя показатели степеней в представлениях (16) становятся равными -1 , коэффициенты при этих степенях становятся равными нулю в силу условия равенства нулю главного вектора действующих сил:

$$P \cos \varphi_1 - Q \sin \theta_1 - P_0 \sin \varphi_0 = 0 \quad (8)$$

т.е. в разложениях по тригонометрическим функциям "неинтегрируемые" напряжения исчезают. Таким образом, в этом случае имеются только логарифмические особенности.

Следует отметить, что если изначально решить задачу для угла $\varphi_0 = \pi$, то в выражениях напряжений индекс суммирования в рядах будет изменяться от двух до бесконечности, поскольку первое слагаемое при $k=1$ обращается тождественно в нуль. Последнее обстоятельство доказывает, что решение предельной задачи $\varphi_0 = \pi$ тождественно совпадает с



Фиг. 2

пределом решения задачи для произвольного φ_0 при $\varphi_0 \rightarrow \pi$.

Для более наглядного представления характера напряжений около точки $r = 0$ представим также асимптотику напряжений в формулах (6), которые при $r \ll 1$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, \varphi) &= \frac{1}{\varphi_0^2} \left(\pi P \cos \frac{\varphi_1 \pi}{\varphi_0} + (\pi - 2\varphi_0) Q \sin \frac{\theta_1 \pi}{\varphi_0} \right) \cos \frac{\varphi \pi}{\varphi_0} r^{\frac{\pi}{\varphi_0} - 2} + \frac{E \alpha_0}{2\varphi_0(1-\nu^2)} \ln r + \frac{P}{\varphi_0} \\ \sigma_\varphi(r, \varphi) &= -\frac{1}{\varphi_0^2} \left(\pi P \cos \frac{\varphi_1 \pi}{\varphi_0} + (\pi - 2\varphi_0) Q \sin \frac{\theta_1 \pi}{\varphi_0} \right) \cos \frac{\varphi \pi}{\varphi_0} r^{\frac{\pi}{\varphi_0} - 2} + \frac{\alpha_0}{2\varphi_0(1-\nu^2)} \ln r + \frac{E \alpha_0}{4\varphi_0(1-\nu^2)} + \frac{P}{\varphi_0} \\ \tau_{r\varphi}(r, \varphi) &= -\frac{1}{\varphi_0^2} \left(\pi P \cos \frac{\varphi_1 \pi}{\varphi_0} + (\pi - 2\varphi_0) Q \sin \frac{\theta_1 \pi}{\varphi_0} \right) \sin \frac{\varphi \pi}{\varphi_0} r^{\frac{\pi}{\varphi_0} - 2}\end{aligned}\quad (9)$$

Из представлений (9) легко заметить, что надлежащим подбором параметров P , Q , φ_1 , θ_1 для каждого значения φ_0 можно достичь отстранения степенных особенностей во всех напряжениях. Так, например, приняв следующие численные значения:

$$\frac{P}{Q} = 1, \quad \varphi_0 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{и} \quad \theta_1 = \varphi_1 \quad (10)$$

получаем, что при $\varphi_1 = \frac{2}{3} \arctan 3$ коэффициент при функции $f(r)$ обращается в нуль и степенные особенности в напряжениях исчезают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В.С. Саркисян В.Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т.43. №2. С. 3–11.
2. Каландия А.И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов //ПММ. 1969.Т.33, Вып.1. С. 132–135.
3. Саргсян А.М. Об особенностях напряжений в одной задаче теории упругости для клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С. 48–53
4. Макарян В.С., Члингарян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с включениями, перпендикулярными к границе раздела материалов //Изв НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С. 3-12.
5. Макарян В.С. Члингарян Г.С. Плоская и осесимметричная контактные задачи для упругой плоскости и пространства с жесткими включениями //Изв НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.17-27.
6. Члингарян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с включениями на границе раздела материалов //Изв НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1. С.52-58.

Сведения об авторе

Члингарян Гурген

аспирант, Институт механики НАН РА

Адрес: 0019 Ереван, пр.Баграмяна 24Б

Тел.: (+37410) 52-48-90, E-mail: chlingarian.g@gmail.com

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГОГО ДИСКА И ШТАМПОВ ЧЕРЕЗ ТОНКИЙ ФРИКЦИОННЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ

Шекян А.Л., Шекян Т.Л.

В рамках линейной теории упругости рассматриваемая плоская контактная задача о прижатии упругого диска двумя одинаковыми и симметрично распределенными штампами (колодками), которым прикреплен тонкий упругий слой, обладающий большим фрикционным свойством. В контактной зоне упругие перемещения граничных точек диска, возникающих от действующих на его границе нормальных и касательных контактных напряжений, определены методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [1,2], а радиальные и окружные перемещения граничных точек слоев определены согласно модели Винклера [3,4].

Задача сведена относительно возникающих между диском и штампами нормальных и касательных контактных напряжений к системе двух линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Исследование этой системы проведено на основании принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций. Выяснено, что существует область изменения характерных параметров задачи, где решение полученной системы можно найти методом последовательных приближений. Получено приближенное аналитическое решение задачи. Приведены результаты числовых расчетов.

1. *Постановка задачи и вывод основных уравнений.* Пусть неподвижный упругий диск 1 (фиг.1) с радиусом R и с коэффициентами упругости μ и ν (соответственно, коэффициент сдвига и коэффициент Пуассона) вдавливаются через тонкие упругие дугообразные слои 2 двумя одинаковыми и симметрично распределенными штампами 3, имеющие дугообразные очертания с углом захвата 2α ($0 < \alpha < \pi/2$). Эти слои подкреплены тонкими упругими дугообразными слоями, изготовленными из фрикционных материалов.

Требуется определить законы распределения нормальных и касательных контактных напряжений, действующих в контактной области $L = \{r = R; \vartheta \in [-\alpha; \alpha] \cup [\pi - \alpha; \pi + \alpha]\}$ между диском и слоями, а также меру взаимного сближения штампов δ .

Рассмотренное контактное взаимодействие твердых тел является простейшей моделью узлов трения инженерных конструкций и полученные здесь результаты могут быть применены, в частности, в машиностроении, при проведении прочностных расчетов тормозных узлов машин и механизмов.

Пользуясь известным методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили о представлении решения плоской задачи теории упругости [1], определим упругие перемещения $v_r(\vartheta)$ и $v_\vartheta(\vartheta)$ граничных точек диска, возникающих вследствие действия на граничной области L нормальных $p(\vartheta)$ и касательных $\tau(\vartheta)$ контактных напряжений. Эти перемещения, согласно [2], выражаются следующими формулами:

$$v_r(\vartheta) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu} R \int_L p(\varphi) \ln 2 \left| \sin \frac{\vartheta-\varphi}{2} \right| d\varphi + \frac{\chi-1}{8\mu} R \int_L \tau(\varphi) \operatorname{sgn}(\vartheta-\varphi) d\varphi - \\ - R \int_L p(\varphi) K^{(1)}(\vartheta-\varphi) d\varphi - R \int_L \tau(\varphi) K^{(2)}(\vartheta-\varphi) d\varphi + \frac{R}{2\pi\mu} \int_L p(\varphi) \cos(\vartheta-\varphi) d\varphi + f_1, \quad (1)$$

$$v_\vartheta(\vartheta) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu} R \int_L \tau(\varphi) \ln 2 \left| \sin \frac{\vartheta-\varphi}{2} \right| d\varphi - \frac{\chi-1}{8\mu} R \int_L p(\varphi) \operatorname{sgn}(\vartheta-\varphi) d\varphi - \\ - R \int_L \tau(\varphi) K^{(1)}(\vartheta-\varphi) d\varphi - R \int_L p(\varphi) K^{(2)}(\vartheta-\varphi) d\varphi - \frac{R}{2\pi\mu} \int_L \tau(\varphi) \cos(\vartheta-\varphi) d\varphi, \quad (2)$$

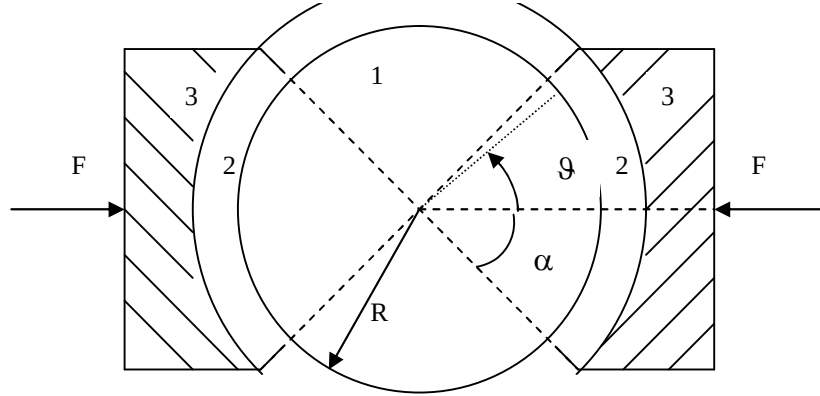
где

$$L = \{\vartheta \in [-\alpha; \alpha] \cup [\pi - \alpha; \pi + \alpha]\},$$

$$K^{(1)}(z) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu} K_{11}(z) + \frac{\chi-1}{8\pi\mu} K_{12}(z), \quad K_{11}(z) = 2 \sin^2 \frac{z}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{z}{2} \right|,$$

$$K_{12}(z) = (\pi \operatorname{sgn} z - z) \sin z, \quad K^{(2)}(z) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu} K_{21}(z) + \frac{\chi-1}{8\pi\mu} K_{22}(z) - \frac{\chi-1}{8\pi\mu} z, \quad (3)$$

$$K_{21}(z) = \sin z \ln \left| 2 \sin \frac{z}{2} \right|, \quad K_{22}(z) = -2(\pi \operatorname{sgn} z - z) \sin^2 \frac{z}{2}.$$



Фиг. 1

Здесь $\chi = 3 - 4\nu$ – при толстом диске (плоская деформация) и $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – при тонком диске (обобщенно, плоское напряженное состояние). По условиям задачи будем иметь следующие условия симметрии:

$$p(\pi \pm \vartheta) = p(\pm \vartheta) = p(\vartheta), \quad \tau(\pi \pm \vartheta) = \tau(\pm \vartheta) = \pm \tau(\vartheta) \quad (\vartheta \in [-\alpha; \alpha]). \quad (4)$$

$$v_r(\pi \pm \vartheta) = v_r(\pm \vartheta) = v_r(\vartheta), \quad v_\vartheta(\pi \pm \vartheta) = v_\vartheta(\pm \vartheta) = \pm v_\vartheta(\vartheta)$$

Вследствие деформаций слоя, его граничные точки, находящиеся в контактной области L , получают некоторые упругие перемещения $v_r^*(\vartheta)$ в радиальном и $v_\vartheta^*(\vartheta)$ в окружном направлениях. Так как фрикционные слои 2 тонкие, то будем считать, что в каждой точке контактной области L перемещения $v_r^*(\vartheta)$ и $v_\vartheta^*(\vartheta)$ пропорциональны действующим в данной точке, соответственно, нормальному $p(\vartheta)$ и касательному $\tau(\vartheta)$ контактным напряжениям

$$v_r^*(\vartheta) = \lambda_1 p(\vartheta), \quad v_\vartheta^*(\vartheta) = \lambda_2 \tau(\vartheta) \quad (\vartheta \in [-\alpha; \alpha] \cup [\pi - \alpha; \pi + \alpha]), \quad (5)$$

где λ_1 и λ_2 – постоянные, значения которых определяются формулами [3,4]

$$\lambda_1 = (1 - 2\nu^*)h/2(1 - \nu^*)\mu^*, \quad \lambda_2 = (1 - \nu^*)h/\mu^*.$$

Здесь ν^* и μ^* – соответственно, коэффициент сдвига и коэффициент Пуассона материала слоев, h – толщина слоев.

Считая, что между диском и упругими слоями существует полное сцепление, условия контакта задачи, с учетом симметрии, будут:

$$\begin{aligned} [-v_r(\vartheta) + v_r^*(\vartheta)] \cos \vartheta + [v_\vartheta(\vartheta) + v_\vartheta^*(\vartheta)] \sin \vartheta &= \delta \\ [-v_r(\vartheta) + v_r^*(\vartheta)] \sin \vartheta &= [v_\vartheta(\vartheta) + v_\vartheta^*(\vartheta)] \cos \vartheta \end{aligned} \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha). \quad (6)$$

При решении задачи воспользуемся также условием равновесия одного из штампов

$$2R \int_0^\alpha p(\varphi) \cos \varphi d\varphi = F, \quad (7)$$

где F – равнодействующая заданных внешних сил, приложенные на штампы (фиг.1).

Теперь, введя безразмерные жесткое перемещение штампов и контактные напряжения

$$\delta_0 = \delta/R, \quad p_0(\vartheta) = \lambda_1 p(\vartheta)/R, \quad \tau_0(\vartheta) = \lambda_2 \tau(\vartheta)/R \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha), \quad (8)$$

из условий (6) получим относительно $p_0(\vartheta)$ и $\tau_0(\theta)$ следующую систему линейных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} p_0(\vartheta) \cos \vartheta + \tau_0(\vartheta) \sin \vartheta = A_1(p_0, \tau_0, \vartheta) + \delta_0 \\ p_0(\vartheta) \sin \vartheta - \tau_0(\vartheta) \cos \vartheta = A_2(p_0, \tau_0, \vartheta) \end{cases} \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(p_0, \tau_0, \vartheta) &= [v_r(\vartheta) \cos \vartheta - v_\vartheta(\vartheta) \sin \vartheta] / R, \\ A_2(p_0, \tau_0, \vartheta) &= [v_r(\vartheta) \sin \vartheta + v_\vartheta(\vartheta) \cos \vartheta] / R, \end{aligned} \quad (10)$$

а $v_r(\vartheta)$ и $v_\vartheta(\vartheta)$ выражаются через $p_0(\vartheta)$ и $\tau_0(\theta)$ формулами (2), (3) и (8).

Тогда, учитывая обозначения (8) и условия симметрии (4), уравнение равновесия (7) представляется через безразмерные величины

$$\int_0^\alpha p_0(\varphi) \cos \varphi d\varphi = F_0 \quad (F_0 = \lambda_1 F / 2 R^2). \quad (11)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению $p_0(\vartheta)$, $\tau_0(\theta)$ и δ_0 из уравнений (9) и (11).

2. *Исследование системы уравнений (9) и (11).* Систему интегральных уравнений (9) при условии (11) будем решать методом последовательных приближений, а исследование его сходимости будем проводить на основе принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций [5]. С этой целью, временно считаем, что δ_0 – некоторое заданное положительное число и будем искать решение системы интегральных уравнений (9). Сначала эту систему преобразуем к следующему, наиболее удобному для применения метода последовательных приближений виду

$$\begin{cases} p_0(\vartheta) = A_1(p_0, \tau_0, \vartheta) \cos \vartheta + A_2(p_0, \tau_0, \vartheta) \sin \vartheta + \delta_0 \cos \vartheta \\ \tau_0(\theta) = A_1(p_0, \tau_0, \vartheta) \sin \vartheta + A_2(p_0, \tau_0, \vartheta) \cos \vartheta + \delta_0 \sin \vartheta \end{cases} \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha). \quad (12)$$

Заметим, что (12) представляет собой систему двух линейных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, решение которой не может иметь особенности.

Далее, систему уравнений (12) представим в операторном виде $Z = A(Z)$, где Z – вектор с компонентами $\{p_0(\vartheta), \tau_0(\vartheta)\}$, а $A(Z)$ – оператор, который определяется выражениями правых частей уравнений (12).

Пусть D – некоторое множество, каждый элемент которого Z является совокупностью двух произвольных функций $\{x(\vartheta); y(\vartheta)\}$, непрерывных на отрезке $0 \leq \vartheta \leq \alpha$. Нетрудно убедиться, что оператор $A(Z)$ отображает множество D в себе. Пусть, далее, $Z_i = \{x_i(\vartheta); y_i(\vartheta)\}$ ($i = 1; 2$) – два произвольных элемента из D . Тогда, введя в D чебышевскую метрику вида

$$\rho(Z_1, Z_2) = \max_{0 \leq \vartheta \leq \alpha} |x_1(\vartheta) - x_2(\vartheta)| + \max_{0 \leq \vartheta \leq \alpha} |y_1(\vartheta) - y_2(\vartheta)|, \quad (13)$$

множество D становится полным метрическим пространством. Так как функции перемещений $v_r(\vartheta)$ и $v_\vartheta(\vartheta)$, определяющие формулами (1) и (2) – ограниченные, то на основании (10) и (12) нетрудно также убедиться, что для двух произвольных элементов Z_1 и Z_2 из D имеет место неравенство

$$\rho[A(Z_1), A(Z_2)] \leq \varepsilon \cdot \rho(Z_1, Z_2), \quad (14)$$

где ε – некоторое положительное постоянное, зависящее от физических и геометрических параметров задачи. Из формулы (14) следует, что если характерные параметры задачи такие, что $0 < \varepsilon < 1$, то оператор $A(Z)$ в пространстве D имеет неподвижную точку, т.е. существует такой элемент $Z^* \in D$, для которого $Z^* = A(Z^*)$. При этом, элемент Z^* , являющийся

решением уравнения $Z = A(Z)$ в пространстве D единственным, к которому стремится по метрике (13) последовательность элементов $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ из D , где Z_0 – любой начальный элемент ($Z_0 \in D$), а остальные члены этой последовательности определяются на основании итерационных формул

$$Z_n = A(Z_{n-1}) \quad (n=1, 2, 3 \dots). \quad (15)$$

Теперь, принимая $Z_0 = \{0; 0\}$ в качестве нулевого приближения и учитывая (15), получим решение системы уравнений (12) в первом приближении:

$$\begin{aligned} p_0^{(1)}(\vartheta) &= A_1(0, 0, \vartheta) \cos \vartheta + A_2(0, 0, \vartheta) \sin \vartheta + \delta_0 \cos \vartheta \\ \tau_0^{(1)}(\vartheta) &= A_1(0, 0, \vartheta) \sin \vartheta + A_2(0, 0, \vartheta) \cos \vartheta + \delta_0 \sin \vartheta \end{aligned} \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha).$$

откуда, согласно (1), (2) и (12), определим законы распределения безразмерных контактных напряжений в первом приближении

$$p_0^{(1)}(\vartheta) = \delta_0^{(1)} \cos \vartheta, \quad \tau_0^{(1)}(\vartheta) = \delta_0^{(1)} \sin \vartheta \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha), \quad (16)$$

где $\delta_0^{(1)}$ – первое приближенное значение безразмерного жесткого перемещения штампов, для которого на основании (11) и (16) имеем

$$\delta_0^{(1)} = 4F_0 / (2\alpha + \sin 2\alpha). \quad (17)$$

Во втором приближении контактные напряжения, согласно (15)-(17), определяются формулами:

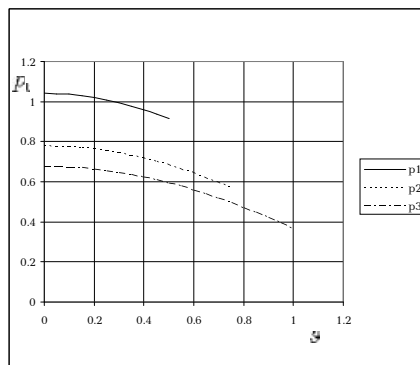
$$\begin{aligned} p_0^{(2)}(\vartheta) &= A_1(p_0^{(1)}, \tau_0^{(1)}, \vartheta) \cos \vartheta + A_2(p_0^{(1)}, \tau_0^{(1)}, \vartheta) \sin \vartheta + \delta_0 \cos \vartheta \\ \tau_0^{(2)}(\vartheta) &= A_1(p_0^{(1)}, \tau_0^{(1)}, \vartheta) \sin \vartheta + A_2(p_0^{(1)}, \tau_0^{(1)}, \vartheta) \cos \vartheta + \delta_0 \sin \vartheta \end{aligned} \quad (0 \leq \vartheta \leq \alpha), \quad (18)$$

а значение безразмерного жесткого перемещения штампов δ_0 во втором приближении, согласно (11) и (18), будет

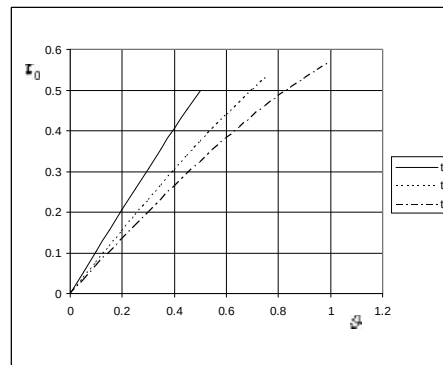
$$\delta_0^{(2)} = \frac{4}{2\alpha + \sin 2\alpha} \left\{ F_0 - \int_0^\alpha [A_1(p_0^{(1)}, \tau_0^{(1)}, \varphi) \cos \varphi + A_2(p_0^{(1)}, \tau_0^{(1)}, \varphi) \sin \varphi] \cos \varphi d\varphi \right\}. \quad (19)$$

3. *Анализ числовых результатов.* Используя вычислительные программы компьютерных сред MathCad и Excel, для некоторых значений безразмерных параметров задачи на основании формул (18) и (19) определены и на фиг. 2, 3 и 4, построены, соответственно, графики распределения безразмерных нормальных и касательных контактных напряжений, а также безразмерной меры сближения штампов, соответствующих решению задачи во втором приближении.

На фиг. 2 и 3 изображены, соответственно, графики функций $y = p_0^{(2)}(\vartheta)$ и $y = \tau_0^{(2)}(\vartheta)$, вычисленные на основании формул (18), когда $n = 0.25$, $c = 2$ (плоская деформация), $v^* = 0.3$, $\xi = \mu^* / \mu = 0.4$, $\eta = h/R = 0.1$ и $F_0 = 0.5$, в которых линии $p1$, $p2$, $p3$ и $\tau1$, $\tau2$, $\tau3$ соответствуют значениям угла $\alpha = \pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$.

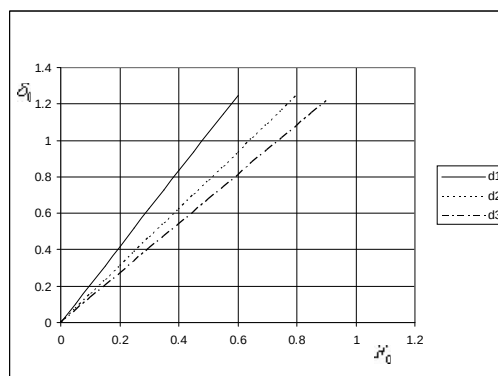


Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 4 изображены графики зависимости безразмерного жесткого перемещения штампов δ_0 от безразмерной силы F_0 , вычисленной на основании формулы (19) при вышеуказанных значениях безразмерных параметров ν , χ , ν^* , ξ , η , притом, линии d1, d2, d3 соответствуют значениям угла $\alpha = \pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$.



Фиг. 4

Эти графики показывают характер влияния изменений угла захвата α как на законы распределения контактных напряжений, так и на зависимость между сжимающими силами и жесткими перемещениями штампов. В частности, из графиков фиг. 2 и 3 видно, что с увеличением угла α в окрестности точки $\vartheta = \alpha$ нормальные контактные напряжения уменьшаются, а касательные контактные напряжения увеличиваются. Следовательно, полное сцепление между слоем и диском возможно при малых значениях α .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
2. Мхитарян С.М., Торосян Ф.С. О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т.31. №5. С.3-19.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414с.
5. Мхитарян С.М., Шемян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно-упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.15-32.

Сведения об авторах

Шемян Артем Лаврентьевич

Младший научный сотрудник, кандидат физ.-мат.наук, Институт механики НАН РА

Адрес: 0019 Ереван, пр.Баграмяна 24^Б

Тел.: (+37410) 52-48-90, E-mail: mechins@sci.am

Шемян Тигран Лаврентьевич

Магистрант, ГИУА

BUCKLING OF ISOTROPIC PLATES WITH TWO OPPOSITE SLIDING CONTACT EDGES AND THE OTHER TWO EDGES SIMPLY SUPPORTED UNLOADED

V.M. Belubekyan, R. Sharifian

Abstract

This paper presents the buckling loads of isotropic rectangular plates having two opposite edges sliding contact while the other two edges have simply supported. An analytical method that uses the Lévy solution method is employed to determine the buckling loads of mentioned rectangular plates. The convergence and comparison of the results with those available in the literature indicate the accuracy and the validity of the proposed technique.

1. Introduction

Problems of buckling of rectangular isotropic plates, though investigated extensively during 20th century, still are of interest due to several new results obtained in latest years. Particularly, papers of Banichuk and Ishlinskiy 1994, and Ishlinski 1986, proved an interesting fact that influence of the boundary of a plate may have global effect over buckling loads. Later investigations demonstrated that a special type of buckling, a localized buckling may occur near the edges of plates. These investigations were provided by several researches were using classical Kirchhoff's theory and were confirmed by application of refined theories, such as Ambartsumyans and Reissner's bending theories [1-4].

In present paper, buckling of isotropic rectangular plates having two opposite edges sliding contact while the other two edges have simply supported is considered. An analytical method that uses the Lévy solution method is employed to determine the buckling loads of mentioned rectangular plates. Buckling loads are determined depending on plate's geometry. A comparison with elastically supported case is provided.

2. Analysis

The equation governing buckling deflection w (stability equation) for a rectangular isotropic plate, subjected to distributed compressive load P along the y -axis is

$$D\Delta^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Here D is flexural stiffness defined as,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Where E is Young's modulus, ν is Poisson's ratio, w is the deflection, Δ is Laplacian operator. The rectangular plate simply supported along the edges $x = 0, a$ and sliding contact along the other edges as shown in Fig.1.

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (2)$$

At $y = \pm 0.5b$ assume conditions of sliding contact

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \text{at } y = \pm 0.5b \quad (3)$$

The first condition in boundary Eqs.(3) means the edge of the plate can freely slide in z direction,

which means that the normal the cutting force at the edge should be equal to 0, or $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$.

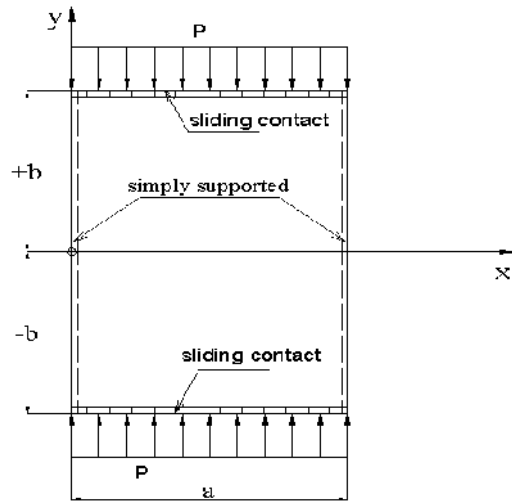


Fig.1. uniformly compressed rectangular plate simply supported along the edges $x=0$ and $x=a$, and sliding contact the other edges.

Searching for a solution as series:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \mu_m x, \text{ where } \mu_m = m\pi/a \quad (4)$$

Substituting into equation (1) will obtain an ordinary differential equation for f :

$$f_m^{IV} - 2\mu_m^2(1 - \frac{1}{2}\gamma_m^2)f_m'' + \mu_m^4 f_m = 0, \text{ where } \gamma_m^2 = \frac{P}{D\mu_m^2} \quad (5)$$

Let's search for solution in a form

$$f_m = Ce^{\mu_m p y} \quad (6)$$

Substituting (6) into (5) we will obtain

$$p^4 - 2(1 - \frac{1}{2}\gamma_m^2)p^2 + 1 = 0 \quad (7)$$

And the roots of this equation will be:

$$p = \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma_m^2}{2}} \pm i\gamma_m \sqrt{1 - \frac{\gamma_m^2}{4}} = 0 \quad (8)$$

This expression can be rewritten in a simpler form:

$$p = \pm \left(\frac{g_m}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{g_m^2}{4}} \right) \quad (9)$$

By substituting Eq.(4) into boundary Eqs.(3)

$$\frac{df_m}{dy} = 0, \quad \frac{d^3 f_m}{dy^3} = 0 \text{ at } y = \pm b \quad (10)$$

Four distinct complex roots for Eq.(7) are defined by $\pm a_m \pm ib_m$, which yield a general solution of the form

$$f_m(y) = A \sinh(\alpha_m y) \sin(\beta_m y) + B \sinh(\alpha_m y) \cos(\beta_m y) + C \cosh(\alpha_m y) \sin(\beta_m y) + D \cosh(\alpha_m y) \cos(\beta_m y) \quad (11)$$

Where

$$\alpha_m = \mu_m \frac{\gamma_m}{2} \text{ And } b_m = m_m \sqrt{1 - \frac{g_m^2}{4}} \quad (12)$$

The unknown constants A, B, C and D determine from the conditions of the edges in $y = \pm b$.

Substituting Eq.(11) into Eq.(10) and, a set of simultaneous equation with regard to A, B, C and D is obtained.

After solving a determinant, algebraic processes and simplifications we obtain the characteristic buckling equation as follows

$$\cosh^2(\alpha_m b) \cos^2(\beta_m b) (3\alpha_m^3 \beta_m + \alpha_m \beta_m^3) + \sinh^2(\alpha_m b) \sin^2(\beta_m b) (3\alpha_m \beta_m^3 + \alpha_m^3 \beta_m) + \cosh(\alpha_m b) \cos(\beta_m b) \sinh(\alpha_m b) \sin(\beta_m b) (\alpha_m^2 - \beta_m^2)^2 = 0 \quad (13)$$

Since α_m and β_m contain P [Eq. (12)] then Eq. (13) can be solved, using an iterative scheme, for the smallest P , denoted P_{cr} , once the geometric and material parameters of the plate are known.

The critical buckling may be written as

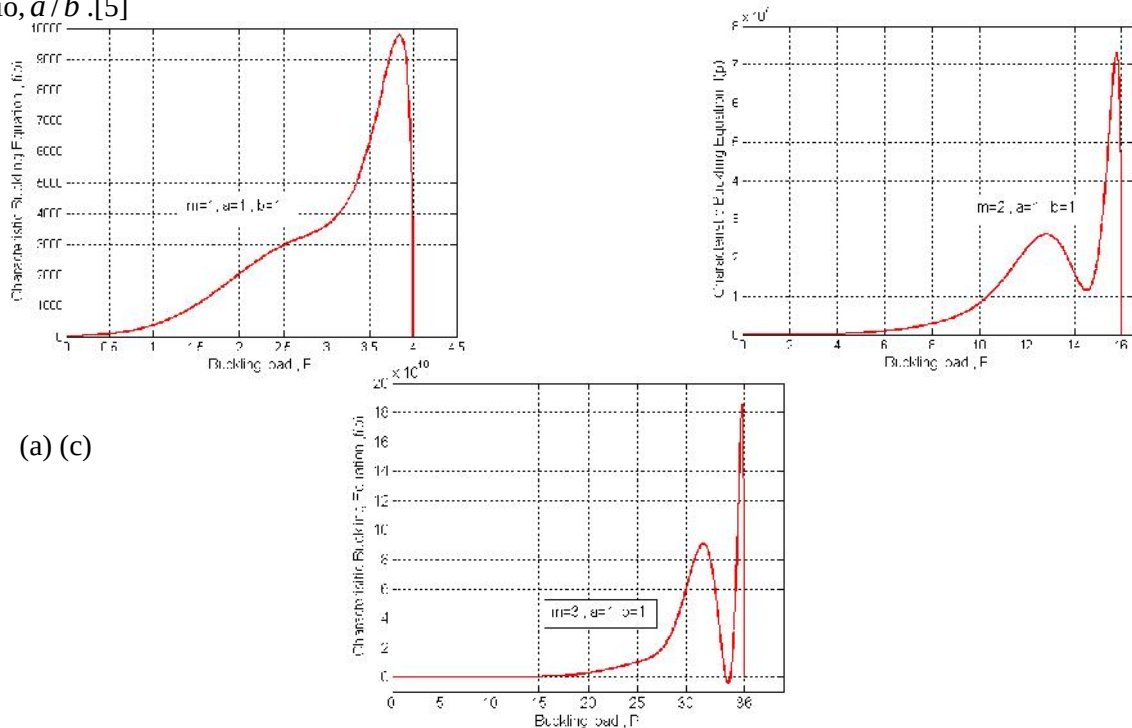
$$P_{cr} = \kappa \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (14)$$

Where κ is a numerical factor (buckling coefficient) depending on the plate aspect ratio and material properties. The transcendental equation is solved to determine the buckling coefficient, κ , as a function of plate properties, the plate aspect ratio a/b , and the mode number m . The buckling mode is given by the mode number for which the smallest κ is obtained for a given set of parameters.

3. Results and discussion

A Matlab program was written to perform the parametric studies reported in what follows. the plots are shown for Eq.(13) in Fig.2. Parametric studies were performed to investigate the influence of material properties and mode number on the buckling characteristics of this plate in Fig.3.

For comparing the uniformly compressed rectangular plate simply supported along the opposite edges and elastically supported against rotation along the other edges is shown in Fig.4. Buckling load, $\bar{P}$, was obtained for different coefficient of rotational restraint values as a function of the plate aspect ratio, a/b . [5]



(c)

Fig.2. The plots of characteristic buckling equation $f(P) = 0$ in Eq.(13) for (a) $m=1$, (b) $m=2$, (c) $m=3$

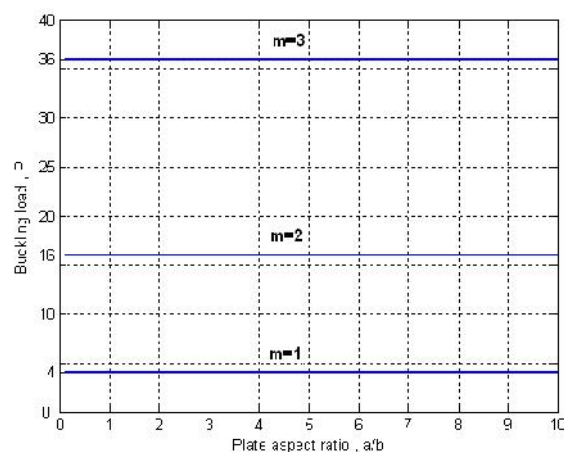


Fig.3. Nondimensional buckling loads, $\bar{P} = \frac{Pa^2}{\rho^2 D}$, versus plate aspect ratio, a/b

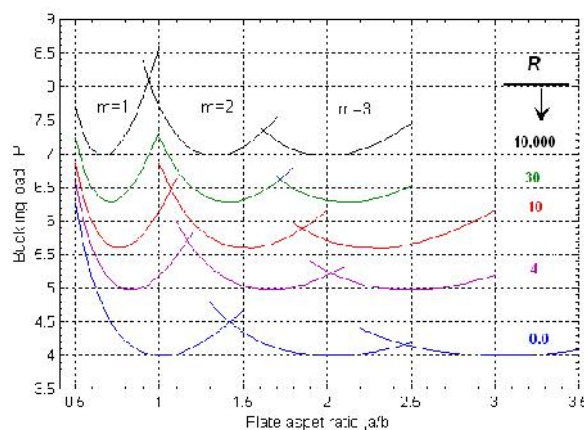


Fig.4. Nondimensional buckling loads, $\bar{P} = \frac{Pa^2}{\rho^2 D}$, versus plate aspect ratio, a/b , R is coefficient of rotational restraint.

References

1. Timoshenko S, Gere JM. Theory of Elastic Stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill; 1961.
2. Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shell. New York: McGraw-Hill 1981.
3. Bulson PS. The Stability of Flat Plates. London: Chatto and Windus; 1970.
4. Reddy JN, Wang CM, Wang CY. Exact Solution For Buckling Of Structural Members. Florida: CRC Press 2005.
5. Sharifian R. buckling of isotopic plates with two opposite simply supported edges and the other two rotationally restrained unloaded, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences (in press)

Information about authors

Belubekyan V.M.,

Department of Mechanics, Yerevan State University, 1 A. Manookyan Str., 375049

Yerevan, Armenia

Sharifian R.

GENERALIZED FLAT TENSE CONDITION OF PIEZOACTIVE PLATE UNDER CROSSCUT ELECTRIC FIELD

Sargsyan I., Sargsyan M.

This article involves consideration of thin elastic plate made of piezo active material of 6mm class polarized in the thickness. It is suggested that the plate is in the crosscut electric field. The analogy is established with the generalized flat tense condition of thermo elastic plate.

1. Assuming that $t_0 < x \leq a$ the plate with thickness $2h$ in the rectangular Cartesian coordinates systems occupies the field $0 < x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h$.

It is considered that the plate is in the electric field $E = E_3(x, y, z)$. In accordance with [1,2] equations of generalized flat tense condition of plate of material of 6mm, z class has the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial Q_e}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_e}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Where $u(x,y)$, $v(x,y)$ unknown quantity planar transfer, ν –Poisson coefficient. Volume force q_e is defined in the following way:

$$Q_e = \frac{1+\nu}{2h} \alpha_e \int_{-h}^h E_3 dz \quad (1.2)$$

Where $E_3(x, y)$ the given function of intensity of flat electric field, normal to the space of the plate, α_e – is defined through piezoelectric module in the following way:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \frac{1-\nu}{E} e_{31} - \frac{\nu'}{E'} e_{33} \\ E &= (C_{11} - C_{12}) \left(1 + \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}^2}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \right), u = \frac{C_{12}C_{33} - C_{13}^2}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \\ E' &= \frac{(C_{11} + C_{12})C_{33} - 2C_{13}^2}{C_{11} + C_{12}}, u' = \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

In the formula (1.3) C_{ij} – elastic constant, e_{ij} – piezo electric constant.

In particular case for isotropic materials $C_{33} = C_{11}, C_{13} = C_{12}$:

$$E = E' = \frac{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}{C_{11} + C_{12}}, u = u' = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} \quad (1.4)$$

For force the following formulas are given:

$$\begin{aligned} T_1 &= C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} - Q_e \right), C = \frac{2Eh}{1-u^2} \\ T_2 &= C \left(\frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} - Q_e \right), S' = \frac{1-u}{2} C \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

The above mentioned equations (1.1) and (1.5) coincide with equations for cases Q_e of thermo Q_t elastic plate, where

$$Q_t = \frac{1+u}{2h} a_t \int_{-h}^h T dz \quad (1.6)$$

$T(x,y)$ – thermo field, a_t – thermo expansion coefficient [4].

2. The simple forms of solution of task of generalized flat $0 \leq x \leq a$, $-0.5b << y \leq 0$ tense condition are given.

Rectangular plate with all sides free of tension is considered

$$\begin{aligned} T_1 &= 0, S=0 \quad x=0 \\ T_2 &= 0, S=0 \quad y = \pm 0.5b \end{aligned} \quad (2.1)$$

Equation (1.1) and condition (2.1) will be satisfied if the tensions are equal zero in any point of the plate. Then from equation (1.5) it follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} &= Q_e, \quad \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} = Q_e \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

From the third equation of system (2.2) it follows $u=u(x)$, $v=v(y)$

$$u = \frac{1}{1+u} \int_0^x Q_e dx + C_1, \quad v = \frac{1}{1+u} \int_0^y Q_e dy + C_2 \quad (2.3)$$

Assuming that on the edges $C_1 = C_2 = 0$ are given conditions of sliding contacts

$$u|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0 \quad (2.4)$$

The equation is not difficult to solve in the presence of different border conditions on the edges $Q_e = \text{const}$ ($E_3 = \text{const}$) In particular in cantilever plates.

$$u = \frac{Q_e}{1+u} x, \quad v = \frac{Q_e}{1+u} y \quad (2.5)$$

Thus the solution of system equations brings to the solution of two autonomous equations Laplace.

Lets the conditions of sliding contact on the edges $y = \pm 0.5b$ are given

$$v = 0, S = 0 \Rightarrow v = 0, \partial u / \partial y = 0 \quad y = \pm 0.5b \quad (2.6)$$

In this case the equation (1.1) with the condition $\partial Q_e / \partial y = 0$, have the solution of the type

$$u = u(x), v \equiv 0 \quad (2.7)$$

which satisfy the condition (2.6).

In accordance with the first equation from (1.1) we have

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{dQ_e}{dx} \quad (2.8)$$

The equation easy to solve under different boundary conditions on the edges $x=0$, a . In particular for cantilever plate

$$u=0, x=0, T_1 = 0 \quad x=a \quad (2.9)$$

obtained

$$u = \int_0^x Q dy \quad (2.10)$$

At last, the system of equations (1.1) we can simplify by using

$$u = \frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial j}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.11)$$

Standing (2.11) in the system (1.1) brings to equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta j - Q_e) + \frac{1-u}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(\Delta j - Q_e) - \frac{1-u}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta y &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

The equations (2.12) will be satisfied if

$$\Delta j = Q_e, \quad \Delta y = 0 \quad (2.13)$$

Reference

1. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван. Изд. ЕГУ, 1991. 144 с.
2. Belubekyan M., Karapetyan M., Sarkisyan M. Stability of Bending Form of Piezoactive Bimorphic Plates. Изв НАН Армении, Механика, 2003, т.56, N3. с.30-36.
3. Амбарцумян С.А. теория анизотропных пластин. М. : Наука, 1987. 360 с.
4. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М. : Физматгиз. 1958. 168 с.

This work is fulfilled within the framework of ANSEF (grant No 1589).

Information about authors

Sargsyan Inna - Magister State Technical University of Armenia (Polytechnik). Tel. (010) 572040

Sargsyan Mikhail - PHD State Techn. University of Armenia (Polytechnik),

e-mail: miksargsyan@mechins.sci.am

AXISYMMETRIC PROBLEMS FOR FLAT CYLINDRICAL PUNCH INDENTATION IN THE FULL PLASTIC MEDIA

Sedrak Vardanyan

Abstract.

Several basic axisymmetric problems of full plasticity media are discussed in this paper. Within the framework of Haar-von Karman, the spatial plasticity equation system is of hyperbolic type and the characteristic relationships are defined for various axial symmetric problems. We show that automodel solutions can be obtained for different problems with practical importance, including the torsion and compression of rigid indenters in the plastic media. The framework can be expanded to investigate the elasto-plastic problems.

Introduction

Axisymmetric problems of the plasticity theory were considered by Ishlinski and Ivlev (2001), Annin (2003), Ivlev et al. (2008), among others. The investigations of Ishlinski and Ivlev (2001) have shown that the axisymmetric problems of ideal plasticity theory for full plastic media are statically definable and have hyperbolic character. The problems of stamp compression in the plastic half-space were investigated by Ishlinski and Ivlev (2001). Torsion problems of beams with variable cross sections and rings were considered by Ivlev (1966) and Ivlev et al. (2008). The characteristic relationships for stress-strain were defined for these problems. Two dimensional submodels for ideal plasticity theory were investigated by Annin (2003). Axisymmetric problems for Haar-von Karman plasticity condition were investigated by Shield (1955). A recent study of axisymmetric problems for Haar-von Karman condition was carried out by Radayev (see Ivlev et. al. (2008)). Some problems of axisymmetric plasticity of Mises media were investigated by M. Zadayan (1992). The axisymmetric problem of the limit state theory in case of abruption was investigated by Vardanyan (2008).

In this paper, we study the characteristic relationships and automodel solutions for various axisymmetric problems. The obtained results may be useful for practice, such as compression and torsion problems of plastic media.

Stress state of the full plastic media: Characteristic relationships. The problem we will investigate is expressed in terms of the cylindrical system of coordinates. Using Haar-von Karman hypothesis $s_1 = s_2$, $s_3 = s_1 + 2k$ we can present the full plasticity conditions as (Ishlinski and Ivlev (2001)):

$$\begin{aligned} s_r &= s - \frac{2}{3} + (1 + \cos y) \cos^2 j, \quad s_j = s - \frac{2}{3} + (1 + \cos y) \sin^2 j, \quad s_z = s + \frac{1}{3} - \cos y, \\ t_{rj} &= (1 + \cos y) \sin j \cos j, \quad t_{rz} = \sin y \cos j, \quad t_{jz} = \sin y \sin j \end{aligned} \quad (1)$$

where $s_{ij} \sim \frac{s_{ij}}{k}$, $i, j \sim r, j, z$, $s \sim \frac{s}{k}$. The functions s, j, y depend on (r, z) for axisymmetric problem. Substitute equilibrium equations into Eq. (1) we can find the hyperbolic type equation system (Ishlinski and Ivlev (2001)). The characteristic relationships can be introduced as:

$$\left(\frac{dz}{dr} \right)_{a,b} = \frac{\cos j \sin y \pm \sqrt{\cos^2 j - \cos y \sin^2 j}}{\cos^2 j \cos y - \sin^2 j}, \quad \left(\frac{dz}{dr} \right)_g = \frac{\tan \frac{y}{2}}{\cos j}$$

after integration we have $s = \ln \left(\sin^2 j \cos^2 \frac{y}{2} r^2 \right) + C$ along g , where C is a constant along g . Along other two characteristics we can find:

$$\begin{aligned} &\pm \sqrt{\cos^2 j - \cos y \sin^2 j} ds + \sin y \sin j dj + \cos j dy + \\ &+ \cos j \sin y \frac{1 + (1 + \cos y) \sin^2 j \pm \sqrt{\cos^2 j - \cos y \sin^2 j}}{\cos y \cos^2 j - \sin^2 j} d \ln r = 0 \end{aligned} \quad \text{along } a, b$$

The characteristics a, b are in the plane of (XOY) . We can see that the g characteristic is out of the plane (XOY) .

Displacement field. The principal directions of the tensors of stresses and strains coincide for isotropic media. From such isotropic conditions, the characteristic relationships for displacements' increments can be deduced, for full plasticity and Cauchy relationships:

$$2\sqrt{2}(ctgj - \cos y) \sin j \sin\left(\frac{p}{4} - j\right) \frac{dz}{dr} \left(\cos j \cos \frac{y}{2} \frac{dz}{dz} - \sin \frac{y}{2} \right)^2 = 0$$

with $j \neq pk$, $j \neq \frac{p}{4} - pk$, $k \in \mathbb{Z}$, $ctgj \neq \cos y$ one can find $\frac{dz}{dr} = 0$ along x , $\frac{dz}{dr} = \frac{\operatorname{tg} \psi / 2}{\cos \varphi}$ along η .

Along the h characteristic we can obtain:

$$\begin{aligned} & -4\cos^2 j \cos^2 \frac{y}{2} \sin j \, du + 5\cos j (\cos^2 j - \cos y \sin^2 j) dv - \sin 2j \sin y \, dw + \\ & + (3 - \cos y + \cos 2j (1 + \cos y)) \sin j \, u \, d \ln r - 2\cos y (\cos^2 j - \cos y \sin^2 j) v \ln r = 0 \end{aligned}$$

when $j \neq \frac{p}{2} + 2k$, $j \neq pk$, $k \in \mathbb{Z}$, $rdv - v = 0$ is derived along x . For the automodel solution we will

input the variable $r = \frac{z}{r}$ and taking into account Eq. (1) from equilibrium equations:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \frac{r(1 + \cos y) + \cos j \sin y}{(1 - r^2 \cos^2 j) \cos y + r^2 \sin^2 j - 2r \cos j \sin y} \\ \frac{dj}{dr} &= - \frac{\cos \frac{y}{2} (r^2 + (r^2 - 4) \cos y) \sin j + 2r^2 \cos^3 \frac{y}{2} \sin 3j + 2r \sin 2j \left(2 \sin \frac{y}{2} + \sin \frac{3y}{2} \right)}{(2 - r^2 + 3r^2 \cos 2j) \left(r \cos j \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{y}{2} \right) + r \cos j (q - 6) \cos \frac{3y}{2} + (3q - 2) \sin \frac{3y}{2}}, \\ \frac{dy}{dr} &= - \frac{r(5 + 8\cos y + 3\cos 2y) + 4(1 - r^2) \cos j (1 + \cos y) \sin y - 2r \cos 2j \sin^2 y}{r p \cos j + 2r^2 (1 + 3\cos 2j) \sin y - 2(1 - 3r^2 \cos^2 j) \sin 2y}, \\ q &= 2r^2 \cos^2 j, \quad p = 2 - r^2 + 8r^2 \cos 2j \cos^4 \frac{y}{2} - 4\cos y + (r^2 - 6) \cos 2y \end{aligned} \quad (2)$$

Eq. (2) is a NODES of first kind which can be integrated numerically for given boundary conditions. The automodel solution for displacement increments leads to equation:

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{au + bv}{8\rho \sin \varphi \left(\sin \frac{\Psi}{2} - \rho \cos \frac{\Psi}{2} \cos \varphi \right)^2}, \quad \frac{dw}{d\rho} = \frac{cu + dv}{8\rho \sin \varphi \left(\sin \frac{\Psi}{2} - \rho \cos \frac{\Psi}{2} \cos \varphi \right)^2}, \quad \frac{dv}{d\rho} = -\frac{v}{\rho} \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} a &= 4\rho^2 \sin^3 \varphi - \rho^2 \cos \psi (5 \sin \varphi + \sin 3\varphi) + 4\rho \sin 2\varphi \sin \psi, \quad b = 4 \cos \varphi (\cos \psi - 1) + 4\rho \sin \psi - 4\rho \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \\ c &= 4\rho \sin^3 \varphi - \rho \cos \psi (5 \sin \varphi + \sin 3\varphi) - 4\rho^2 \sin 2\varphi \sin \psi, \\ d &= 4\rho \cos^3 \varphi - \rho \cos \psi (5 \cos \psi - \cos 3\varphi) + 4 \sin \psi - 4 \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \end{aligned}$$

after integration from third equation of Eq. (3) we can obtain $v = \frac{C}{r}$, where C is an integration

constant. If the functions $j(r)$ is found, it can be substituted into $v(r)$ and then into (3), such that $u(r)$ and $w(r)$ can be deduced. Thus, the field of displacement increment can be derived. Some practical problems can be solved analytically or numerically by the introduced method. In some cases analytical solutions can be very difficult, but the numerical solutions are more applicable.

Axisymmetric problem for cylindrical stamp compression in the plastic half-space: Stress state investigation. The axial symmetric problems for full plastic media were investigated by Ishlinski et al. (see Ivlev et. al. (2008)). The full plasticity conditions based on the hypothesis of Haar-von Karman can be introduced as:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma - \frac{1}{2}, \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \varphi = \varphi(r, z), \quad \sigma = \sigma(r, z). \end{aligned} \quad (4)$$

Where s_r, s_j, s_z, t_{rz} – are stress components and they are normalized by the yielding constant, i.e. $s_{ij} \sim \frac{s_{ij}}{k}$, $i, j \sim r, j, z$. From (4) and equilibrium equation we can find the hyperbolic type equation system, whose characteristic relationships are

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \varphi \text{ along } a, \quad \frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} \varphi \text{ along } b$$

Along these characteristics one can derive $ds - dj = \frac{1}{2r}(dz - dr)$ along a and $ds + dj = -\frac{1}{2r}(dz + dr)$ along b . Analogically by substituting $r = \frac{z}{r}$ and from (4) we can find:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r + \cos 2j - r \sin 2j}{2((r^2 - 1)\sin 2j - 2r \cos 2j)}, \quad \frac{dj}{dr} = \frac{\sin 2j + r \cos 2j - 1}{2((r^2 - 1)\sin 2j - 2r \cos 2j)} \quad (5)$$

The system of (5) is NODES, which can be integrated numerically for given boundary conditions.

Displacement field investigation. We will discuss the case when $u = u(r, z)$, $w = v(r, z)$, $v = 0$ and from isotropic conditions we can find:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \operatorname{tg} 2j \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0, \quad \operatorname{tg} 2j = \frac{s_r - s_z}{2t_{rz}} \quad (6)$$

Taking into consideration incompressibility condition $\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0$, we can obtain the statically

definable problem. Characteristic relationships can

be represented as $\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} j$ along a and

$\frac{dz}{dr} = -\operatorname{ctg} j$, along b . Furthermore, along these

characteristics we can obtain $du + \operatorname{tg} j dw = 0$

along a and $du - \operatorname{ctg} j dw = 0$ along b . When

$r = \frac{z}{r}$, the automodel solution can be deduced

from (6) and incompressibility condition as:

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{u}{\rho^2 - 1} \operatorname{tg} 2\varphi, \quad \frac{dw}{d\rho} = u \left[\frac{\rho}{\rho^2 - 1} \operatorname{tg} 2\varphi - 1 \right] \quad (7)$$

It can be seen from Eqs. (5) and (7) that the fields of stresses and displacement increments are connected. The following illustrative examples show that the field of displacement increments can be derived depending on the applied loads.

Let $z = 0$ than $t_{rz} = \frac{1}{2} \cos 2j = \frac{1}{4}$, $j(0) = \frac{\rho}{6}$. The second equation (5) can be successfully integrated numerically with boundary condition of $j(0) = \frac{\rho}{6}$.

The result is given in Figure 1. For the flat indentation problem, where a cylindrical indenter indents the plastic half-space, the compressive force acting on the surface with area ρa^2 can be introduced as:

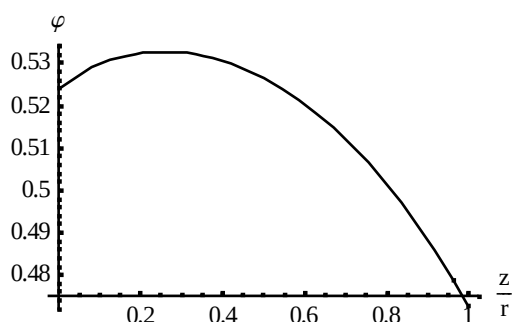


Figure 1. Dependence between j – function and automodel variable $r = \frac{z}{r}$

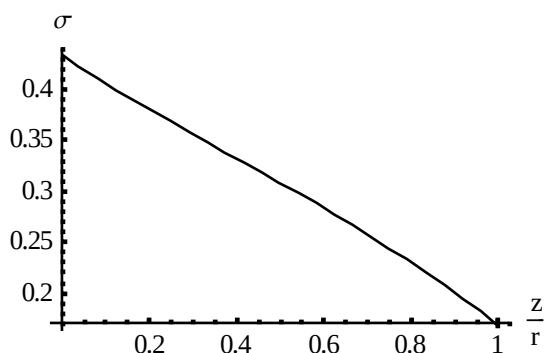


Figure 2. Dependence between hydrostatic stress S and automodel variable $r = \frac{z}{r}$

$$P = 2p \int_0^a s_z r dr = pa^2 \left(s(0) + \frac{1}{2} \sin 2j(0) \right), \quad s(0) = \frac{P}{pa^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

when $\frac{P}{pa^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ then for the boundary condition of $s(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ the first equation of (5) can be numerically integrated, as shown in Figure 2. Using obtained solution from (5) the displacement increment $u(r)$ can be derived, thereafter, $w(r)$ can be derived from the second equation of (7), which is illustrated in Figure 3. Both functions $u(r)$ and $w(r)$ are obtained by numerical integration.

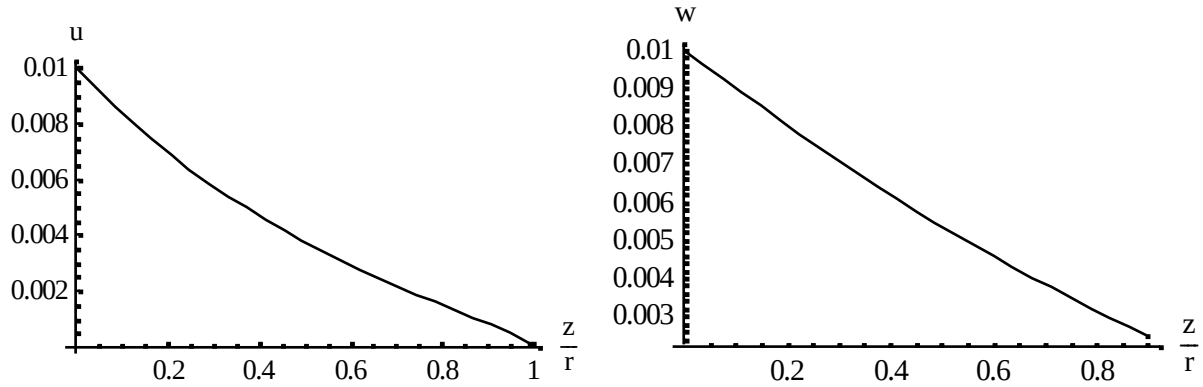


Figure 3. Dependence of displacements' increments $u(r)$, $w(r)$ from automodel variable $r = \frac{z}{r}$

The solution of torsion problem by characteristic method: Stress state investigation. The stresses in torsion will depend on two cylindrical coordinates (r, z) and $t_{rj} = t_{rj}(r, z)$, $t_{zj} = t_{zj}(r, z)$, $t_{rz} = s_r = s_j = s_z = 0$. Plasticity conditions, such as the von Mises or Tresca condition, become $t_{rj}^2 + t_{zj}^2 = 1$. As introduced earlier, the stresses are normalized as $t_{rj} \sim \frac{t_{rj}}{k}$, $t_{zj} \sim \frac{t_{zj}}{k}$. Plasticity condition will be completed if the stresses are taken as $t_{rj} = -\sin j$, $t_{zj} = \cos j$ (Ivlev (1966)). From equilibrium equation we can find:

$$\cos j \frac{\partial j}{\partial r} + \sin j \frac{\partial j}{\partial z} + \frac{2 \sin j}{r} = 0 \quad (8)$$

The determination relationships of characteristic curves can be written as follows (Ivlev (1966))

$$\frac{dz}{dr} = \tan j, \quad \frac{dj}{dr} = -\frac{2}{r} \tan j. \quad (9)$$

where the j -function is the angle between radius r and characteristic curve. From the second equation of (9) we can obtain $r^2 \sin j = c_1$, where c_1 is constant along the characteristic and from the first equation we have:

$$z = \pm \frac{\sqrt{|\sin j|}}{\sqrt{2}} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \sqrt{|\sin j|}\right) + c_2 \quad (10)$$

where $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \sqrt{|\sin j|}\right)$ is an elliptic function of the first kind, c_2 is a constant along the

characteristic. From Eq. (10) we can represent as $z = \pm \frac{|c_1|}{r\sqrt{2}} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \frac{|c_1|}{r}\right) + c_2$.

Displacement field investigation. For this case the displacement increments also depend on the two cylindrical coordinates (r, z) , and $u = 0, w = 0, v = v(r, z)$. For deformation components we have:

$$e_{rj} = e_{rj}(r, z) = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad e_{zj} = e_{zj}(r, z) = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e_r = e_z = e_j = e_{rz} = 0,$$

From yield criterion one can obtain:

$$\frac{t_{rj}}{t_{jz}} = \frac{g_{rj}}{g_{jz}} = -tgj, \quad \cos j \frac{\partial v}{\partial r} + \sin j \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v \cos j}{r} = 0 \quad (11)$$

The characteristic curves relationships can be found from $\frac{dv}{dr} = \frac{v}{r}$, $\frac{dz}{dr} = tgj$. Obtained relationships and (9) show that the characteristics for stress and displacement fields coincide. From the first relationship we can find $v = cr$, where c is a constant along the characteristic and in order to determinate it's value, it is necessary to have boundary condition for displacement increments.

Automodel solution for Stress field.

Let $j(r, z) = j\left(\frac{z}{r}\right) = j(r)$, $r = \frac{z}{r}$, then from (8) we can obtain $(1 - rctgj) \frac{dj}{dr} + 2 = 0$, and solution of

which is $r = \frac{z}{r} = \left[C_1 + F\left(2, \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} - j\right)\right) \right] \sqrt{|\sin j|}$, where C_1 is a constant and it can be solved from the boundary conditions. Afterwards the stress field can be deduced.

Automodel solution for the displacement field.

Analogically

$j(r, z) = j\left(\frac{z}{r}\right) = j(r)$, $v(r, z) = v\left(\frac{z}{r}\right) = v(r)$, $r = \frac{z}{r}$, then from

(11) we can obtain:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{tgj - r} \quad (12)$$

Taking into account (10) we can find the function of displacement increment, depending on the integral constant which will be derived from boundary conditions. Finally we can find the interpolated function for j .

Example 1. The torsion of plastic half-space by cylindrical rigid stamp.

In the first example, the rigid cylindrical stamp is clamped to the plastic layer. The torsion moment M is acting on the stamp which can rotate around Z axis. Our goal is to determine the stress and strain rates in the layer (Figure 4). The cylindrical coordinate system is fixed at the bottom surface of the layer. The thickness of layer is h . The boundary conditions are

$$\tau_{\theta z} = 0, \text{ when } z = 0, \tau_{\theta z} = 0, \text{ when } z = h, r > a \quad (13)$$

and as contact condition we have:

$$M = 2\pi \int_0^a \tau_{\theta z} r^2 dr, \text{ when } z = h, \quad (14)$$

From conditions (10) we can obtain: $j = \frac{p}{2}$ and $c_2 = 0$. The function $z(j)$ can be estimated:

$$\left| \frac{\sqrt{|\sin j|}}{\sqrt{2}} F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \arccos \sqrt{|\sin j|}\right) \right| \leq D \approx 0,43 \quad (15)$$

And for layer thickness we can find $h \in (0; 0.43]$. Let layer thickness to be 0.43. Furthermore, from

(15) we can find $j = 27.4744^\circ$ after $t_{jz} = 0.8873$ is determined. From (14) we obtain $M = 1.7746p \frac{a^3}{3}$.

The limit value of M corresponds to the transition of the layer to the plastic state. From (9) we can find $r = 1.4726\sqrt{c_1}$ when $r \leq a$. Characteristic relations in the plane of XOY can be shown from Figure 5.

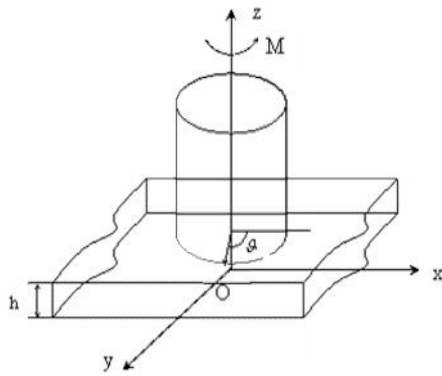


Figure 4. Cylinder clamped to the plate. In the bottom side of cylinder given displacement field, and in the top side of cylinder acts the torsion moment

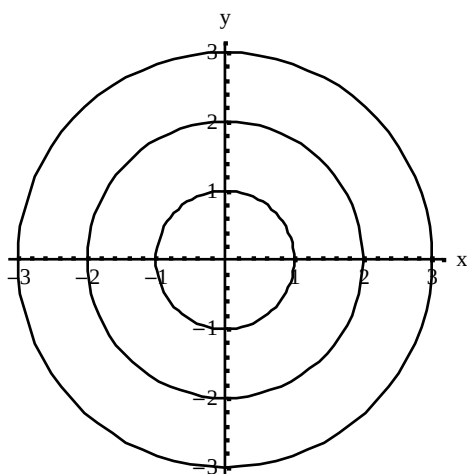


Figure 5. Characteristic curves in the plane of XOY

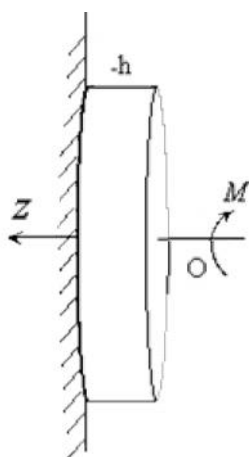


Figure 6. Cylinder: in one side displacement's field is given and in another side the tensional moment is given

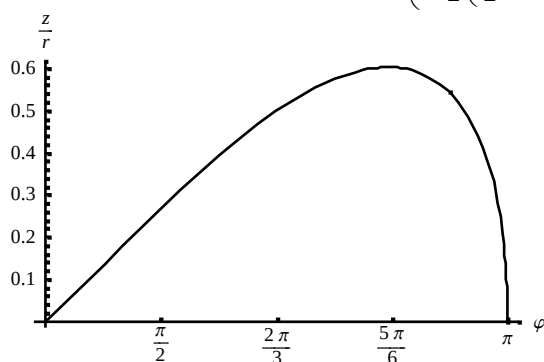


Figure 7. Dependence between j -function and automodel variable $r = \frac{z}{r}$

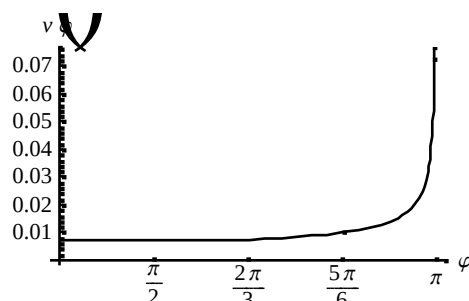


Figure 8. Dependence between displacement $v(j)$ and j -function

From (13) we have $z = h = c_2$ and $r = \sqrt{c_1}$ when $r > a$. The analytical solution of the circular rings and the beams with variable cross section torsion were obtained by Ivlev (1966). Analogical problem for elastic media was investigated by Alexandrov and Chebakov (2004) and Alexandrov (2007). However the torsion of full plastic media by rigid cylindrical stamp is not investigated

Example 2: Consider a plastic cylinder. When $z=0$, the torsion moment is M , and when $z=-h$ the value of v is obtained (Figure 6). When $z = 0$ from the automodel solution we have:

$$\sin j(0) = 0, \quad C_1 = -F\left(2, \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} - j(0)\right)\right) \quad (16)$$

The first condition of (16) will not be considered, because in the case when $z = 0$, then $t_{rj} = 0$. Taking into account second condition of (16) for automodel solution we can find:

$$r = \left[F\left(2, \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} - j(r)\right)\right) - F\left(2, \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} - j(0)\right)\right) \right] \sqrt{\sin j(r)}.$$

From the torsion moment $M = 2p \int_0^a r^2 t_{jz} dr$, $z = 0$ we can find:

$$M = \frac{2p a^3}{3} \cos j(0), \quad \cos j(0) = \frac{3M}{2p a^3}, \quad \left| \frac{3M}{2p a^3} \right| \leq 1. \quad \text{Let } \frac{3M}{2p a^3} = \frac{1}{2} \quad \text{and}$$

$j(0) = \frac{p}{3}$. Since $r \geq 0$, we can obtain $j \in \left[\frac{p}{3}, p\right]$. The dependence of j on r ($r < 0$) can be shown in Figure 7. From (8) and (12) we can find $v(r) = \frac{C_1}{\sqrt{\sin j(r)}}$. When $z = -h$, on the circle $r = a$ the

displacement increment v is given. Let $r = \frac{z}{r} = -\frac{h}{a} = b$, then for integration constant C_1 we can obtain

$$C_1 = \frac{b v(b)}{F\left(2, \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} - j(b)\right)\right) - F\left(2, \frac{p}{12}\right)}.$$

We can see that for each r , $v(r) \neq 0$. The function $r(j)$ has the maximal value $r = b \approx -0.6$ when $j \approx 0.84p$. Correspondently $v(b) = 0.01$ when $C_1 = 0.007$, than $v(j) = \frac{0.007}{\sqrt{\sin j}}$, which is shown in the

Figure 8. The stresses t_{rj} , t_{jz} are shown in the Figure 9.

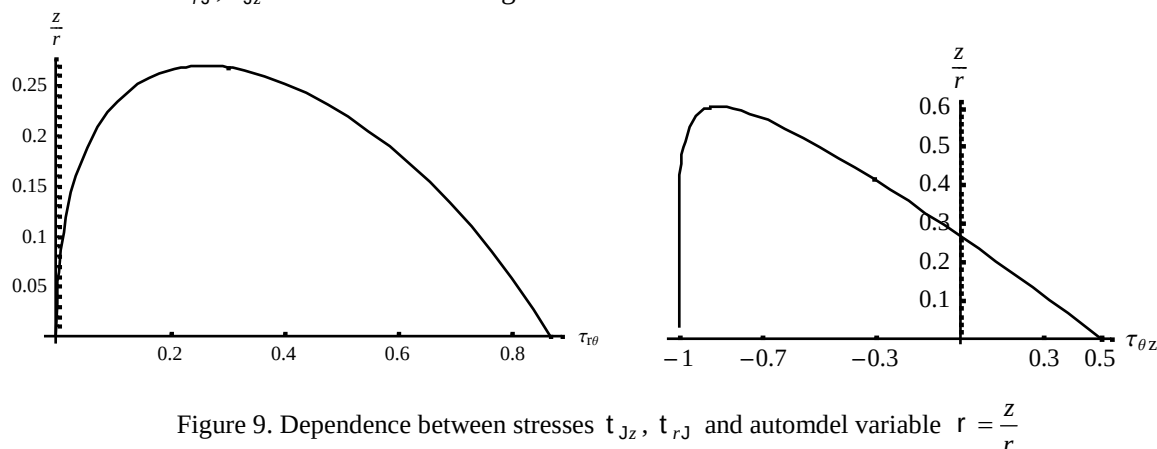


Figure 9. Dependence between stresses t_{jz} , t_{rj} and automodel variable $r = \frac{z}{r}$

Conclusion

We develop simple methods to solve practical plasticity problems in axisymmetry. The results show that some of these problems can be investigated by the characteristic method and by automodel solutions. We can obtain relationships between the applied load and displacement rates. The automodel solutions can be defined by integration of nonlinear ordinary equation system. The automodel shows the promise of solving different practical problems, which is illustrated through a few examples.

References

- Alexandrov V.M., 2007. The torsion of elastic layer with free bottom side by cylindrical stamp. Actual problems of continuous mechanics. Yerevan.
- Alexandrov V.M. Chebakov M.I., 2004. Analytical methods in the contact problems of the theory of elasticity. PhysMathLit, Moscow.
- Annin B.D., 2003. Two dimensional models of ideal plasticity theory in case of full plasticity conditions // The problems of mechanics / The collection of papers devoted to academician Ishlinski A.Yu.. PhysMathLit, Moscow, 94-99.
- Ishlinski A.Yu, Ivlev D.D., 2001. Mathematical theory of plasticity. PhysMathLit, Moscow.
- Ivlev D.D., 1966. The theory of ideal plasticity. Nauka, Moscow.
- Ivlev D.D., Maksimova L.A., Nepershin R.I., Radaev Yu.N., Senashev S.I., Shemiakin E.I., 2008, Limit State of Deformable Bodies and Rocks. PhysMathLit, Moscow.
- Shield R.T. 1955. On the plastic flow of metals under conditions of axisymmetric. Proc. R. Soc. London (Ser A), Volume 233, Number 1193, 267-287.
- Vardanyan S.V., 2008. Plane strain problem of the theory of limit state in case of abruption. Proceedings of VI International Conference of The problems of dynamics of interaction of deformable media. Armenia. 155-159.
- Zadoyan M.A. 1992. The Spatial Problems of Plasticity Theory. Nauka, Moscow.

Sedrak Vardanyan

Institute of Mechanics, Armenian National Academy of Sciences
0019, Yerevan, Marshal Baghramyan 24B, Armenia

О Г Л А В Л Е Н И Е

Пленарные доклады

Агаловян Л.А. – Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем	5
Григорян Э.Х., Агаян К.Л. – Новый подход к определению асимптотических формул в задачах дифракции	36
Зимин В.Н. – Механика трансформируемых космических конструкций	44
Ковалев В.А. – Нестационарные волны в упругих оболочках при действии торцевой нагрузки: асимптотический подход	53
Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. – Релаксационные модели деформируемого твердого тела	66
Мхитарян С.М. – Метод ортогональных функций в смешанных задачах механики сплошной среды.....	76
Сумбатян М.А. – Полуаналитический метод расчета турбулентных потоков	94
Arutyunyan Robert A. – Thermodynamic and Mechanic Formulation of Fracture Criterion for Heterogeneous Materials.....	100

Секционные доклады

Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Оганесян Р.Ж. – К определению упругих характеристик пластины, эквивалентной слоистому пакету из тонких пластин.....	108
Агаловян М.Л. – Решение одного класса задач о вынужденных колебаниях анизотропных балок-полос	113
Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В. – О напряженном состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на трещину конечной длины	118
Акопян Л.В., Амирджян А.А. – О плоско-деформированном состоянии упругой плоскости с разрезами и включением	124
Алваджян Ш. И. – Построение математической модели статической задачи микрополярных упругих ортотропных балок.....	129
Амирбемян А.Н. – Решение интегрального уравнения изгиба балки конечной длины на упругом основании.....	135
Амирджян А.А. – Равномерное движение силовых нагрузок по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра.....	140
Антимонов М.А., Черкаев А.В. – Двухфазные трехмерные композиты минимальной жесткости	145
Антонян С.С., Белубекян М.В., Василян Н.Г. – Исследование напряженно-деформированного состояния изгибаемой пластинки в окрестности закрепленного края	152

Арзумян А. М., Акопян С. А. – Математическая модель контактного взаимодействия обработанной поверхности детали с рабочими поверхностями режущей пластины	156
Асатрян В. М. – О задаче контактного взаимодействия между упругим слоем и упругим полупространством при кручении.....	161
Берберян А. Х. – Поверхностные сдвиговые электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и двумя изотропными слоями из платины и алюминия	168
Ванян Л. А., Минасян Д. М. – Об одной задаче флаттера пластинки переменной толщины при обтекании сверхзвуковым потоком газа	174
Габаян Г. С., Мхитарян Л. С. – Попуск паводковых расходов по водосбросу плотины им. 17-го апреля в республике Сирия.....	178
Галечян А.С. – Определение оптимальной дисперсии вероятностного параметра управления при нормальном законе распределения вероятностей.....	182
Гаспарян А. В., Давтян З. А. – Кручение круглого слоистого цилиндра конечной длины.....	186
Гулгазарян Л. Г. – О пограничном слое в трехмерной постановке задачи о собственных колебаниях двухслойных ортотропных оболочек	190
Гюрджян Н.Х. – Геодезические наблюдения за осадками плотины ахурянского водохранилища с применением методов гидронивелирования.....	195
Дарбинян А. З., Казарян К. Х. – Прочность ребристой длинной многослойной пластинки из композиционного материала.....	198
Егиазарян Т.А. – Изгиб упругой полосы, содержащей трещину.....	203
Емельянов А. Г. – Исследование взаимодействия упругой круговой цилиндрической оболочки конечной длины с идеальной несжимаемой жидкостью.....	208
Закарян Т. В. – О пограничном слое в трехмерной задаче о вынужденных колебаниях ортотропных пластин.....	214
Казаков К. Е. – Задачи контактного взаимодействия для вязкоупругих тел с покрытиями	219
Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. – Нулевые лагранжианы связанного динамического GII-термоупругого поля.....	225
Кудрявцева И. А. – Исследование динамики пристеночной области сильноионизированной плазмы вблизи заряженного тела.....	236
Маргарян Л. М. – Математическая модель динамической задачи микрополярных упругих ортотропных балок	241
Мартиросян А. Н., Давтян А. В. – Аналитические решения пространственных смешанных динамических граничных задач для перемещений при распространении с постоянной скоростью штампа по границе упругого изотропного полупространства при наличии износа.....	247
Мартиросян А. Н., Динунц А. С. – Аналитическое и численное исследование нестационарной пространственной задачи о полубесконечном штампе при наличии износа и трения.....	253

Мартirosян К. Л. – Об одной задаче изгиба полубесконечной пластинки-полосы при действии касательной нагрузки	258
Мелконян А. В., Саркисян С. В. – К пространственной задаче распространения упругих волн в пластинке.....	262
Микаелян А. О. – Задачи устойчивости неконсервативных балок с сосредоточенной массой.....	266
Мирзоян Е. С., Мирзоян С. Е. – Контактное взаимодействие между упругой бесконечной пластиной с круговым отверстием и двумя одинаковыми и симметрично расположенными абсолютно жесткими круговыми стрингерами	271
Мкртчян М. М. – О напряженном состоянии упругого кусочно-однородного клина, содержащего на линии спая систему щелей и абсолютно жестких тонких включений	276
Паршин Д. А. – Моделирование процесса деформирования под действием сил тяжести стареющего вязкоупругого полуциркулярного свода, возводимого на жесткой опалубке	282
Погосян Д. М. – Об одной неконсервативной задаче устойчивости сжатой прямоугольной пластинки	289
Попузин В. В. – Применение быстрого преобразования Фурье к решению интегральных уравнений в механике сплошной среды	292
Саргсян М. З. – О вынужденных колебаниях ортотропных пластин, свободно лежащих на жесткой подстилке с учетом вязкого трения.....	297
Саркисян А. А. – Свободные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек	304
Симонян А. – Схема отстойника с периодической промывкой в водоприемных узлах горных рек.....	310
Срапионян Дж. Л. – Изгибные собственные колебания прямоугольной ортотропной пластинки с противоположными свободными и жестко защемленными сторонами	313
Степанян А.А. – Об одной задаче дифференциальных игр нескольких лиц при многих целевых множествах	316
Токмаджян В.О., Маркарян А.Я. – Условия надежности работы затворов системы «Гидроплюс» и возможности применения одного из них.....	320
Хачанян А.А. – Колебания ортотропной безмоментной цилиндрической оболочки открытого профиля с жестко защемленными двумя крайними образующими и шарнирно закрепленным одним краем	326
Холкина Н.А. – Численный анализ осесимметричной задачи математической теории пластичности с учетом накопления анизотропной поврежденности.....	330
Чахмахчян Р. Э. – Управления движениями динамических объектов, уклоняющихся от столкновения	337
Члингарян Г.С. – Точное решение одной граничной задачи для упругого кругового сектора.....	343

Шекян А. Л., Шекян Т. Л. – Контактное взаимодействие упругого диска и штампов через тонкий фрикционный упругий слой.....	348
Belubekyan V.M., Sharifian R. – Buckling of Isotropic Plates with Two Opposite Sliding Contact Edges and the Other Two Edges Simply Supported Unloaded.....	353
Sargsyan I., Sargsyan M. – Generalized Flat Tense Condition of Piezoactive Plate under Crosscut Electric Field	357
Sedrak Vardanyan – Axisymmetric Problems for Flat Cylindrical Punch Indentation in the Full Plastic Media	360
CONTENTS AND ABSTRACTS	367