НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Труды II международной конференции
4-8 октября, Дилижан, Армения

Том 1

ЕРЕВАН – 2010

Министерство науки и образования Армении
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Институт механики НАН РА
Институт проблем механики РАН им. А.Ю.Ишлинского
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства
Ереванский государственный университет
Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна
Государственный аграрный университет Армении

Сопредседатели: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян (Армения),
д.ф.-м.н. А.В.Манжиров (Россия)

Зам. председателя: к.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения),
д.ф.-м.н. Ю.Н.Радаев (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения),
д.ф.-м.н. В.А.Ковалев (Россия)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

II միջազգային գիտաժողովի նյութեր

4-8 հոկտեմբեր 2010, Դիլիջան, Հայաստան

Հատոր 1

ԵՐԵՎԱՆ –2010

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Proceedings of the Second International Conference
4-8 October 2010, Dilijan, Armenia

Vol. 1

YEREVAN – **2010**

О ЗАДАЧЕ АЙЗЕРМАНА В ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ K_Δ^ω-УСТОЙЧИВОСТИ

Аванян В. Т., Аванян М. В., Аванян Н. В.

В постановке задачи K_Δ^ω-устойчивости рассматривается задача М.А. Айзермана. Получено, что выполнение обобщенного условия задачи Айзермана недостаточно для наличия устойчивости в целом. Затем для уравнений второго порядка: $\ddot{x}+\varphi(x)\dot{x}+f(x)=0$ при разных $\varphi(x)$ и $f(x)$ построена функция Ляпунова, через которую исследована устойчивость тривиального решения уравнения.

Функция Ляпунова в постановке задачи K_Δ^ω-устоичивости определяется определенно положительной эрмитовой формой [1]: $V(t,x)=(B(t)x,x)$, $(\sqrt{n^{-1}SpB^{-1}}=\omega(t))$.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка:

$$\ddot{x}+\varphi(x)\dot{x}+f(x)=0, \tag{1}$$

которое эквивалентно следующей системе:

$$\dot{x}=y \quad \dot{y}=-f(x)-\varphi(x)y. \tag{2}$$

1. Если $f(x)=bx,\ \varphi(x)=a,\ (b=\text{const},\ a=\text{const})$, система (2) принимает вид

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-bx-ay \tag{3}$$

Методом разделения переменных получается функция Ляпунова:

$$V(x,y)=[(b+1)/2b\omega^2]\left(bx^2+y^2\right) \tag{4}$$

с мартицей

$$B=\alpha^2\omega^{-2}B_1,\ \sqrt{0,5SpB^{-1}}=\omega,\quad B_1=\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \left(\ \alpha=\sqrt{0,5SpB_1^{-1}}=\sqrt{(b+1)/2b}\right)$$

$$\dot{V}(x,y)=-a(b+1)y^2/b\omega^2 \tag{5}$$

При $a\geq 0$, $b>0$ функция (4) удовлетворяет всем условиям теоремы о K_Δ^ω-устойчивости [1], значит, тривиальное решение системы (3) K_Δ^ω-устойчиво (не асимптотически).

2. Если $f(x)=bx,\ (b=\text{const}),$ система (2) принимает вид

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-bx-\varphi(x)y. \tag{6}$$

Аналогично получаем соответствующую функцию Ляпунова

$$V=((b+1)/2b\omega^2)(0,5bx^2+0,5y^2). \tag{7}$$

$$\dot{V}=-((b+1)/b\omega^2)\varphi(x)y^2. \tag{8}$$

В силу (7) и (8) условий K_Δ^ω-устойчивости, в целом, будут: $b>0$, $\varphi(x)\geq 0$.

Наряду с линейным уравнением второго порядка $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ рассмотрим нелинейное уравнение

$$\ddot{x}+a\dot{x}+f(x)=0 \quad \left(f(0)=0\right), \tag{9}$$

которое эквивалентно системе $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-f(x)-ay$. (10)

Как получено выше, при $f(x)=bx,\ \varphi(x)=a$ ($a\geq 0$, $b>0$) тривиальное решение уравнения (1) K_Δ^ω-устойчиво. Условие $b>0$ можно рассмотреть как условие расположения прямой $y=bx$ в первом и третьем четвертях координатной плоскости. Возникает вопрос: если график однозначной функции $y=f(x)$ будет также расположен в первом и третьем четвертях, то будет ли тривиальное решение уравнения (9) устойчивым? Иными словами, обеспечивают ли условия $a\geq 0$, $f(x)/x>0$ устойчивость, либо нужны ли какие-то дополнительные условия? Рассмотрим этот вопрос с более общей точки зрения [2].

Наряду с линейной системой

$$\frac{dx_1}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_k+bx_1,\ \frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k,\qquad i=2,3,...,n \tag{11}$$

рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{dx_1}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}x_k+f(x_1),\ \frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k,\qquad i=2,3,...,n,\ f(0)=0\,. \tag{12}$$

Пусть известно, что тривиальное решение системы (11) асимптотически устойчиво для всех, удовлетворяющих условию. Будет ли тривиальное решение системы (12) устойчивым в целом, если выполняется условие $\alpha<f(x_1)/x_1<\beta$.

Иными словами, если график кривой $y=f(x)$ расположен между прямыми $y=\alpha x$ и $y=\beta x$, то достаточно ли это для обеспечения устойчивости, в целом, тривиального решения системы (12)? Эта задача впервые была сформулирована М.А. Айзерманом [2] и являлась источником многочисленных исследований для математиков и механиков. В ляпуновской теории устойчивости первый пример, показывающий, что выполнение условия $\alpha<f(x_1)/x_1<\beta$ недостаточно для наличия устойчивости в целом, в случае двух уравнений построил Н.Н. Красовский [3]. В.А. Плисс [4] провел исследования системы третьего порядка и показал, что выполнение этого условия даже в более жесткой форме, т.е. в форме $\alpha_1<f(x_1)/x_1<\beta_1$, где $\alpha_1>\alpha$, $\beta_1<\beta$ не может обеспечить устойчивость в целом. Так как из K_Δ^ω-устойчивости всегда следует устойчивость по Ляпунову [5], следовательно, выполнение обобщенного условия $\alpha<f(x_1)/x_1<\beta$ недостаточно для K_Δ^ω-устойчивости, в целом.

Нижеприведённые примеры так или иначе связаны с задачей Айзермана. Однако отметим, что наиболее интересным моментом при изложении этих примеров является демонстрация функции Ляпунова в постановке задачи K_Δ^ω-устойчивости.

Вернемся к системе (10). Разлагая в степенной ряд функцию $f(x)$ и учитывая, что $f(0)=0$, будем иметь $f(x)=f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+...$

Наряду с (10) рассмотрим систему уравнений её первого приближения:

$$\dot{x} = y\,,\;\; \dot{y} = -f'(0)x - ay \tag{13}$$

Аналогично (4), функция Ляпунова для системы (13) определяется формулой

$$V(x,y) = [(f'(0)+1))/2f'(0)\omega^2][f'(0)x^2 + y^2] \tag{14}$$

$$\dot{V}(x,y) = -[(f'(0)+1)/2f'(0)\omega^2]ay^2. \tag{15}$$

С учетом (14) и (15) получаем, что при $a \ge 0$, $f'(0) > 0$ тривиальное решение уравнения первого приближения системы (13) K_Δ^ω-устойчиво, а при $a > 0, f'(0) > 0$ асимптотически K_Δ^ω-устойчиво, в целом.

Теперь, наряду с системой $\dot{x} = ax - by$, $\dot{y} = cx + dy$ (16)

рассмотрим также систему $\dot{x} = f(x) - by$, $\dot{y} = cx + dy$, $f(0) = 0$. (17)

Функция Ляпунова для системы (16) будет:

$$V(x,y) = \frac{b+c}{2bc\omega^2}\left(cx^2 + by^2\right),\; B = \frac{b+c}{2bc\omega^2}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\; \sqrt{0{,}5SpB^{-1}} = \omega\,. \tag{18}$$

$$\dot{V}(x,y) = [(b+c)/2bc\omega^2](acx^2 + bdy^2)\,. \tag{19}$$

При условиях $b > 0, c > 0$, $a = 0, d < 0$ или $b > 0, c > 0$, $a < 0, d = 0$ функция (18) удовлетворяет всем условиям теоремы о K_Δ^ω-устойчивости [1], следовательно, тривиальное решение системы (16) K_Δ^ω-устойчиво.

При $b > 0, c > 0, a < 0, d < 0$ функция (18) удовлетворяет всем условиям теоремы об асимптотической K_Δ^ω-устойчивости [1], следовательно, система (16) K_Δ^ω-устойчиво в целом (так как, если тривиальное решение линейной автономной системы асимптотически K_Δ^ω-устойчиво, то оно K_Δ^ω-устойчиво, в целом [6]).

Перейдем теперь к системе (17), которую можно получить из (16), заменяя число a на $f(x)/x$. Аналогично, для системы (17) получаем функцию Ляпунова

$$V(x,y) = \frac{b+c}{2bc\omega^2}\left(cx^2 + by^2\right),\; B = \frac{b+c}{2bc\omega^2}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\; \sqrt{0{,}5SpB^{-1}} = \omega\;. \tag{20}$$

$$\dot{V}(x,y) = [(b+c)/2bc\omega^2][(cf(x)/x)x^2 + bdy^2]\,. \tag{21}$$

Из (20), (21) следует, что при $b > 0,\; c > 0,\; d = 0,\; f(x)/x < 0$ система (17) будет K_Δ^ω-устойчивой, а при $b > 0, c > 0$, $d \cdot [f(x)/x] > 0, (f(x)/x) + bd/c < 0$ система (17) будет асимптотически K_Δ^ω-устойчивой, в целом.

Для (17) система уравнений первого приближения будет

$$\dot{x} = f'(0)x - by\,,\; \dot{y} = cx + dy \tag{23}$$

откуда получаем, что при $b>0,\ c>0,\ f'(0)=0, d<0$ или $b>0,\ c>0\quad f'(0)<0,\ d=0$ тривиальное решение системы уравнений первого приближения (23) K_{Δ}^{ω}-устойчиво, а при $b>0,\ c>0$, $f'(0)<0,\ d<0$ – асимптотически K_{Δ}^{ω}-устойчиво, в целом.

Наряду с системой (16) рассмотрим систему

$$\dot{x}=f(x)-by\,,\ \dot{y}=\varphi(x)+dy\,,\ \ f(0)=0,\ \phi(0)=0 \tag{24}$$

Системой уравнений ее первого приближения будет следующая:

$$\dot{x}=f'(0)x-by\,,\ \dot{y}=\varphi'(0)x+dy\,. \tag{25}$$

Аналогично формуле (20), функция Ляпунова для системы (25) имеет вид

$$V(x,y)=[(b+\varphi'(0))/2b\varphi'(0)\omega^2][\varphi'(0)x^2+by^2]\,, \tag{26}$$

$$\dot{V}(x,y)=[(b+\varphi'(0))/2b\varphi'(0)\omega^2][f'(0)\varphi'(0)x^2+bdy^2]\,. \tag{27}$$

Из формул (26) и (27) получаем, что при $\varphi'(0)>0, b>0$, $f'(0)<0, d=0$ или $\varphi'(0)>0, b>0\ \ f'(0)=0, d\le 0$ тривиальное решение системы уравнений первого приближения (25) будет K_{Δ}^{ω}-устойчивой, а при $\varphi'(0)>0, b>0$, $f'(0)<0, d<0$ – асимптотически K_{Δ}^{ω}-устойчивой в целом.

Рассмотрим уравнение $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+f(x)=0$, $f(0)=0,\ \varphi(0)=0$ (28)

эквивалентное системе $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-f(x)-\varphi'(y)$. (29)

Соответствующая система уравнений первого приближения будет

$$\dot{x}=y\,,\ \dot{y}=-f'(0)x-\varphi'(0)y\,. \tag{30}$$

Для этой системы функция Ляпунова будет иметь вид

$$V(x,y)=[(1+f'(0))/2\omega f'(0)][f'(0)x^2+y^2]\,, \tag{31}$$

$$\dot{V}(x,y)=-[(1+f'(0))/\omega f'(0)]\varphi(0)y^2\,. \tag{32}$$

При $f'(x)>0$ функция (31) определенно положительна и удовлетворяет условию $\sqrt{0,5SpB^{-1}}=\omega(t)$, а при $\varphi(0)\ge 0$ функция (32) будет знакоотрицательной, т.е. условия теоремы о K_{Δ}^{ω}-устойчивости выполняются, следовательно, система уравнений первого приближения будет K_{Δ}^{ω}-устойчивой, а при $\varphi(0)>0$ – асимптотически K_{Δ}^{ω}-устойчивой в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости процессов на заданном промежутке времени. Методы теории дифференциальных уравнений и их приложения //Тематический сборник науч. трудов МАИ, 1975. Вып. 339. С. 5-11.

2. Àйзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в больших динамических системах. //УМН. 1949. Т.4. Вып. 4. С. 127-136.

3. Красовский Н.Н. Теория об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. //ПММ. 1952. Т.16. Вып. 5. С. 765-732.

4. Плисс В.А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Ленинград: Изд. ЛГУ, 1958. 37 с.

5. Абгарян К.А., Аванян В.Т. К теории устойчивости на заданном интервале времени. //ПММ. 1977. Т.41. №5. С. 844-849.

6. Аванян М.В. K_{Δ}^{ω}-устойчивость в целом нелинейной автономной системы первого порядка. //Математика в высшей школе. Ереван: 2003. №4. С. 84-92.

<u>Сведения об авторах:</u>

Аванян Виген Тигранович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, Тел.: (374 10) 25 05 61, (374 77) 80 79 97; E-mail: vigenavanyan@mail.ru

Аванян Марине Вигеновна,
кандидат физико-математических наук, доцент факультета математики, Государственный инженерный университет Армении, Тел.: (374 10) 25 05 61; E-mail: marineavanyan@mail.ru

Аванян Нуне Вигеновна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ереванский государственный университет архитектуры и строительства. Тел.: (374 10) 641619.

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ИЗБЕГАЮЩИХ СТОЛКНОВЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э.

Решается задача о выборе управляющих ускорений двух динамических объектов, обеспечивающих их перемещения за возможно минимальное время из произвольных различных начальных положений покоя в заданные не совпадающие положения покоя на плоскости при условии отсутствия столкновения. Методами теории оптимального управления [1] получены условия на геометрические координаты краевых положений объектов на плоскости, при которых задача разрешима в классе управлений релейного типа с минимальным числом свободных параметров.

1. Рассмотрим систему из двух точечных объектов, совершающих движения на плоскости. Уравнения движения объектов зададим в виде

$$X:\ \ddot{x} = u\ ,\ Y:\ \ddot{y} = v \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ – векторы координат объектов, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ – векторы управляющих ускорений объектов.

Требуется определить управляющие вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ с ограниченными компонентами

$$|u_i(t)| \le u_i^0\ ,\ |v_i(t)| \le v_i^0\ ,\ i = 1, 2 \tag{1.2}$$

так, чтобы объекты (1.1) перешли из начальных состояний покоя

$$x(0) = x^0,\ \ \dot{x}(0) = 0,\ \ y(0) = y^0,\ \ \dot{y}(0) = 0\ ,\ x^0 \ne y^0 \tag{1.3}$$

в заданные конечные состояния покоя

$$x(T) = x^1,\ \ \dot{x}(T) = 0,\ \ y(T) = y^1,\ \ \dot{y}(T) = 0\ ,\ x^1 \ne y^1 \tag{1.4}$$

за минимальное время $t = T$ и при их совместном движении не имело места столкновения, т.е. выполнялось условие

$$|x(t) - y(t)| \ne 0\ ,\ t \in (0, T) \tag{1.5}$$

2. Введем обозначения

$$x_{i1} = x_i,\ x_{i2} = \dot{x}_i,\ y_{i1} = y_i,\ y_{i2} = \dot{y}_i,\ i = 1,2 \tag{2.1}$$

и представим уравнения (1.1) в виде

$$X:\ \begin{matrix}\dot{x}_{i1} = x_{i2}\\ \dot{x}_{i2} = u_i\end{matrix}\ \ i = 1, 2\ \ Y:\ \begin{matrix}\dot{y}_{i1} = y_{i2}\\ \dot{y}_{i2} = v_i\end{matrix}\ \ i = 1, 2 \tag{2.2}$$

В обозначениях (2.1) начальные и конечные условия (1.3), (1.4), ограничения на управления (1.2), а также условие отсутствия столкновения (1.5) запишутся так

$$x_{ij}(0) = x_{ij}^0,\ \ y_{ij}(0) = y_{ij}^0,\ \ x_{i2}^0 = y_{i2}^0 = 0,\ \ \sum_{i=1}^{2}(x_{i1}^0 - y_{i1}^0)^2 \ne 0,\ \ i, j = 1, 2 \tag{2.3}$$

$$x_{ij}(T) = x_{ij}^1,\ \ y_{ij}(T) = y_{ij}^1,\ \ x_{i2}^1 = y_{i2}^1 = 0,\ \ \sum_{i=1}^{2}(x_{i1}^1 - y_{i1}^1)^2 \ne 0,\ i, j = 1, 2 \tag{2.4}$$

$$|u_i(t)| \le u_i^0\ ,\ |\mathrm{v}_i(t)| \le \mathrm{v}_i^0\ ,\ u_i^0 = \mathrm{v}_i^0 = 1,\ i = 1, 2 \tag{2.5}$$

$$|x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t)| \ne 0\ \ t \in (0, T) \tag{2.6}$$

$$x^{(1)}(t) - y^{(1)}(t) = (x_{11}(t) - y_{11}(t),\ \ x_{21}(t) - y_{21}(t))^T$$

Определим управления $u_i^*(t)$, $\mathrm{v}_i^*(t)$ так, чтобы система (2.2) перешла из начального состояния (2.3) в заданное конечное состояние (2.4) и при этом удовлетворялись условия (2.5), (2.6).

Решение задачи об оптимальном по быстродействию управлении для каждой из систем (2.2), известно и имеет вид

$$u_i^* = u_i^0 \mathrm{sign}[(\tau_{Xi} - t)\Delta x_{i1}]\ ,\ {}^{2}{}_{Xi} = T_{Xi} / 2\ ,\ T_{Xi} = 2(|\Delta x_{i1}| / u_i^0)^{1/2} \tag{2.7}$$

$v_i^* = v_i^0 \mathrm{sign}[(\tau_{Yi} - t)\Delta y_{i1}]$, $^2{}_{Yi} = T_{Yi} / 2$, $T_{Yi} = 2(|\Delta y_{i1}| / v_i^0)^{1/2}$

$\Delta x_{i1} = x_{i1}^1 - x_{i1}^0$, $\Delta y_{i1}^1 = y_{i1}^1 - y_{i1}^0$, $i = 1, 2$

Построим, пользуясь соотношениями (2.7), оптимальные по быстродействию управления для системы (2.2), (2.5) при граничных условиях (2.3), (2.4). Сначала вычислим T_{xi}, T_{yi}, $i = 1, 2$ согласно (2.7) и заметим, что искомое время быстродействия равно $T = \max\{T_{x1}, T_{x2}, T_{y1}, T_{y2}\}$. Не нарушая общности, положим, что $\Delta x_{i1}, \Delta y_{i1} > 0,\ \ i = 1, 2$ и

$$T = T_{x1},\ \Delta x_{11} > \max\{\Delta x_{21}, \Delta y_{i1}\},\ i = 1, 2 \tag{2.8}$$

Тогда управление $u_1(t)$ определяется однозначно: $u_1(t) = u_1^*(t)$ (2.7). В выборе управлений $u_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ имеется произвол, связанный с возможностью более раннего приведения координат x_{21}, y_{11}, y_{21} в требуемые состояния (по сравнению с координатой x_{11}). Будем в этом случае задавать управления $u_2(t), v_1(t), v_2(t)$ в следующих формах:

$$u_2^*(t) = u_2' \mathrm{sign}(\tau_{x1} - t),\ 0 \le u_2' \le u_2^0,\ t \in [0, T] \tag{2.9}$$

$$v_i^*(t) = v_i' \mathrm{sign}(\tau_{x1} - t),\ 0 \le v_i' \le v_i^0,\ i = 1, 2,\ t \in [0, T]$$

Параметры u_2', v_i', $i = 1, 2$ законов (2.9) выберем из условия приведения координат x_{21}, y_{11}, y_{21} в заданные терминальные положения в момент T. Тогда интегрируя уравнения (2.2) при управлениях $u_1^*(t)$ (2.7), $u_2^*(t), v_i^*(t)$, $i = 1, 2$ (2.9) с краевыми условиями (2.3), (2.4) на интервале времени $[0, T]$, получим законы движения объектов X и Y

$$x_{11}(t) = \begin{cases} u_1^0 t^2 / 2 + x_{11}^0, & t \in [0, \tau_{x1}) \\ -u_1^0 (T - t)^2 / 2 + x_{11}^1, & t \in [\tau_{x1}, T] \end{cases},\quad x_{21}(t) = \begin{cases} u_2' t^2 / 2 + x_{21}^0, & t \in [0, \tau_{x1}) \\ -u_2' (T - t)^2 / 2 + x_{21}^1, & t \in [\tau_{x1}, T] \end{cases} \tag{2.10}$$

$u_2' = 4\Delta x_{21} / T_{x1}^2$,

$$y_{i1}(t) = \begin{cases} v_i' t^2 / 2 + y_{i1}^0, & t \in [0, \tau_{x1}) \\ -v_i' (T - t)^2 / 2 + y_{i1}^1, & t \in [\tau_{x1}, T] \end{cases} \tag{2.11}$$

$$v_i' = 4\Delta y_{i1} / T^2,\quad i = 1, 2$$

где

$$T = 2\tau_{x1},\ \tau_{x1} = (\Delta x_{11} / u_1^0)^{1/2} \tag{2.12}$$

Траектории движений объектов X и Y, соответствующие законам (2.10), (2.11), на плоскости (z_1, z_2) представляют собой прямолинейные отрезки:

$$\bar{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1)) : z_2(z_1) = \begin{cases} u_2^1 u_1^{*-1}(z_1 - x_{11}^0) + x_{21}^0, & x_{11}^0 \le z_1 \le (x_{11}^0 + x_{11}^1) / 2 \\ u_2^1 u_1^{*-1}(z_1 - x_{11}^1) + x_{21}^1, & (x_{11}^0 + x_{11}^1) / 2 \le z_1 \le x_{11}^1 \end{cases} \tag{2.13}$$

и

$$\bar{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1)) : z_2(z_1) = \begin{cases} v_2^1 v_1^{*-1}(z_1 - y_{11}^0) + y_{21}^0, & y_{11}^0 \le z_1 \le (y_{11}^0 + y_{11}^1) / 2 \\ v_2^1 v_1^{*-1}(z_1 - y_{11}^1) + y_{21}^1, & (y_{11}^0 + y_{11}^1) / 2 \le z_1 \le y_{11}^1 \end{cases} \tag{2.14}$$

с начальными, конечными положениями $((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ соответственно.

Таким образом, при управлениях $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ и $v^*(t) = (v_1^*(t), v_2^*(t))$ объекты X и Y движутся по отрезкам (2.13) и (2.14), соответственно, в направлении от начальных точек (x_{11}^0, x_{21}^0) и (y_{11}^0, y_{21}^0) к конечным (x_{11}^1, x_{21}^1) и (y_{11}^1, y_{21}^1) ускоренно на промежутке времени $0 < t \le \tau_{x_1}$, а на промежутке $\tau_{x_1} < t \le T$ – замедленно.

Из (2.7)-(2.14) следует, что $t = \tau_{x_1}$ – время прохождения через точки

$$M_{\overline{X}} = (z_1^X, z_2^X) \qquad\qquad M_{\overline{Y}} = (z_1^Y, z_2^Y)$$
$$z_1^X = (x_{11}^0 + x_{21}^0)/2, \quad z_2^X = (x_{11}^1 + x_{21}^1)/2 \quad z_1^Y = (y_{11}^0 + y_{21}^0)/2, \quad z_2^Y = (y_{11}^1 + y_{21}^1)/2 \tag{2.15}$$

– середины отрезков (2.13), (2.14) – есть момент переключения управлений $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ и $v^*(t) = (v_1^*(t), v_2^*(t))$.

Для заданных начальных (2.3) и конечных (2.4) значений решения $x_{11}(t), x_{21}(t), y_{11}(t), y_{21}(t)$ системы (2.2) при управлениях $u_1^*(t)$ (2.7), $u_2^*(t), v_i^*(t)$, $i = 1,2$ (2.9) необязательно удовлетворяют наложенным ограничениям (2.5). Получим условия на начальные и конечные координаты, обеспечивающие выполнение ограничения (2.6), т.е. отсутствия столкновения.

Для выполнения условия нестолкновения (2.6) объектов X и Y при управлениях (2.7), (2.9), необходимо и достаточно, чтобы не выполнялись равенства

$$x_{i1}(t, x_{i1}^0, x_{i1}^1) - y_{i1}(t, y_{i1}^0, y_{i1}^1) = 0, \ t \in (0, T_{x1}), \ i = 1,2 \tag{2.16}$$

где $x_{i1}(t; x_{i1}^0, x_{i1}^1)$ и $y_{i1}(t; y_{i1}^0, y_{i1}^1)$ определяются по формулам (2.10), (2.11).

Очевидно, что столкновение объектов X и Y не может произойти, если на плоскости (z_1, z_2) прямолинейные отрезки $\overline{X}$ (2.13) и $\overline{Y}$ (2.14), по которым происходят движения объектов X и Y при управлениях (2.7), (2.9), не пересекаются.

Уравнения прямых, проходящих через заданные точки (x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1) и (y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1), имеют вид:

$$L_X(z_1, z_2; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) = (z_1 - x_{11}^0)(x_{21}^1 - x_{21}^0) - (z_2 - x_{21}^0)(x_{11}^1 - x_{11}^0) = 0 \tag{2.17}$$
$$L_Y(z_1, z_2; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) = (z_1 - y_{11}^0)(y_{21}^1 - y_{21}^0) - (z_2 - y_{21}^0)(y_{11}^1 - y_{11}^0) = 0$$

Для того, чтобы отрезки $\overline{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\overline{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ пересеклись, необходимо и достаточно, чтобы точки (y_{11}^0, y_{21}^0) и (y_{11}^1, y_{21}^1) находились в разных сторонах от прямой L_X, а точки (x_{11}^0, x_{21}^0) и (x_{11}^1, x_{21}^1) – от L_Y, т.е. удовлетворялись следующие условия соответственно:

$$Q_X(q) = L_X(y_{11}^0, y_{21}^0; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) L_X(y_{11}^1, y_{21}^1; x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1) < 0$$
$$Q_Y(q) = L_Y(x_{11}^0, x_{21}^0; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) L_Y(x_{11}^1, x_{21}^1; y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) < 0 \tag{2.18}$$

где

$$q = (x_{11}^0, x_{21}^0, x_{11}^1, x_{21}^1, y_{11}^0, y_{21}^0, y_{11}^1, y_{21}^1) \subset R^8 \tag{2.19}$$

Неравенства (2.18) задают область

$$Q = \{q \in R^8 : (Q_X(q) < 0, Q_Y(q) < 0)\} \tag{2.20}$$

в пространстве начальных и конечных точек (2.18), для которых соответствующие отрезки $\overline{X}((x_{11}^0, x_{21}^0), (x_{11}^1, x_{21}^1))$ и $\overline{Y}((y_{11}^0, y_{21}^0), (y_{11}^1, y_{21}^1))$ пересекаются. Через $M_{\overline{X}\overline{Y}} = (z_1^p, z_2^p)$ обозначим точку их пересечения.

Из вышесказанного следует, что если $q \in R^8 \setminus Q$, то столкновения не может быть, т.е. система (2.16) неразрешима в классе управлений (2.7), (2.9).

Будем рассматривать случай пересечения отрезков $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, т.е. случай $q \in Q$ (2.20). Решим обратную задачу. Выясним, при каких условиях имеет место столкновение, т.е. разрешима система (2.16) . Исследования покзывают, что верны следующие утверждения:

1^0. Система (2.16) при условии $q \in Q$ и управлениях (2.7), (2.9) разрешима, если отрезки (2.13) и (2.14) пересекаются в середине этих отрезков (2.15).

2^0. Для того, чтобы система (2.16) при условии $q \in Q$ и управлениях (2.7), (2.9) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее соотношение:

$$(x_{11}^0 - y_{11}^0)(x_{21}^1 - y_{21}^1) = (x_{11}^1 - y_{11}^1)(x_{21}^0 - y_{21}^0) \qquad (2.21)$$

3^0. Система (2.16) при условии $q \in Q$ и управлениях (2.7), (2.9) неразрешима, если точка пересечения $M_{\overline{X}\overline{Y}}$ является серединой только для одного из отрезков $\overline{X}$ или $\overline{Y}$:

$$M_{\overline{X}\overline{Y}} = M_{\overline{X}} \neq M_{\overline{Y}} \text{ или } M_{\overline{X}\overline{Y}} \neq M_{\overline{X}} = M_{\overline{Y}} \qquad (2.22)$$

Из (2.15), (2.20)-(2.22) следует, что

$$Q_*^+ \subset Q^+ \subset Q \subset R^8$$

где

$$Q_*^+ = \{q \in Q : x_{11}^i + x_{21}^i = y_{11}^i + y_{21}^i, i = 0,1\}$$

$$Q^+ = \{q \in Q : (x_{11}^0 - y_{11}^0)(x_{21}^1 - y_{21}^1) = (x_{11}^1 - y_{11}^1)(x_{21}^0 - y_{21}^0)\}$$

– множества начальных и конечных точек (2.19), удовлетворяющих (2.15) и (2.21) соответственно.

Таким образом, в классе управлений с одним переключением (2.7), (2.9) объекты X и Y могут избегать столкновения только в случе $q \in R^8 \setminus Q^+$. Если $q \in Q^+ \setminus Q_*^+$, то во избежание столкновения требуется изменить способы управления. В этом случае можно в качестве управления объектом Y использовать, в частности, управление следующей структуры:

$$v_1^*(t) = \begin{cases} v_1^0, & t \in [0, \tau_1) \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ -v_1^0, & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \quad v_2^*(t) = \begin{cases} v_2', & t \in [0, \tau_1) \\ 0, & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ -v_2'', & t \in [\tau_1, T] \end{cases}, \quad v_1' = v_2'', 0 \le v_1', v_2'' \le v_i^0 \qquad (2.23)$$

Интегрируя уравнения движения объекта Y (2.2) с краевыми условиями (2.3), (2.4) на интервале времени $[0, T]$ при управлениях (2.23), найдем

$$\tau_1 = \frac{y_{11}^1 - y_{11}^0}{v_1^0 T_{X1}}, \quad \tau_2 = T_{X1} - \tau_1 = T_{X1} - \frac{y_{11}^1 - y_{11}^0}{v_1^0 T_{X1}}, \quad v_2' = v_2'' = v_1^0 \frac{y_{21}^1 - y_{21}^0}{y_{11}^1 - y_{11}^0} \qquad (2.24)$$

Закон движения объекта Y , соответствующий управлениям (2.23), имеет вид

$$y_1(t) = \begin{cases} v_1^0 t^2 / 2 + y_{11}^0, & t \in [0, \tau_1) \\ v_1^0 \tau_1 t + y_{11}^0 - v_1^0 \tau_1^2 / 2, & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ -v_1^0 t^2 / 2 + v_1^0 T t + y_{11}^1 - v_1^0 T^2 / 2, & t \in [\tau_2, T] \end{cases} \qquad (2.25)$$

$$y_2(t) = \begin{cases} v_2' t^2 / 2 + y_{21}^0, & t \in [0, \tau_1) \\ v_2' \tau_1 t + y_{21}^0 - v_2' \tau_1^2 / 2, & t \in [\tau_1, \tau_2) \\ -v_2' t^2 / 2 + v_2' T t + y_{21}^1 - v_2' T^2 / 2, & t \in [\tau_2, T] \end{cases}$$

На плоскости (z_1, z_2) траектория движения объекта Y (2.25), также представляет прямую линию.

Теперь рассмотрим случай, когда $q \in Q_*^+$. Не нарушая общности, положим, что $y_1^1 - y_1^0 \ge y_2^1 - y_2^0$. Выберем управления v_1, v_2 следующим образом:

$$v_1^*(t) = \begin{cases} v_1^0, & t \in [0, \tau) \\ -v_1'', & t \in [\tau, T] \end{cases} \quad v_2^*(t) = \begin{cases} v_2', & t \in [0, \tau) \\ -v_2'', & t \in [\tau, T] \end{cases} \qquad (2.26)$$

Интегрируя уравнения (2.2) с начальным (2.3) и конечным (2.4) условиями при управлениях (2.26) получим

$$y_{11}(t) = \begin{cases} v_1^0 t^2 / 2 + y_{11}^0, & t \in [0, \tau) \\ -v_1''(T - t)^2 / 2 + y_{11}^1, & t \in [\tau, T] \end{cases}, \quad y_{21}(t) = \begin{cases} v_2' t^2 / 2 + y_{21}^0, & t \in [0, \tau) \\ -v_2''(T - t)^2 / 2 + y_{21}^1, & t \in [\tau, T] \end{cases} \qquad (2.27)$$

где

$$\tau=\frac{v_1''}{v_1''+v_1^0}T\,,\ v_1''=\frac{2v_1^0(y_{11}^1-y_{11}^0)}{T^2v_1^0-2(y_{11}^1-y_{11}^0)}\,,\ v_2'=\frac{v_1^0(y_{21}^1-y_{21}^0)}{y_{11}^1-y_{11}^0}\,,\ v_2''=\frac{2v_1^0(y_{21}^1-y_{21}^0)}{T^2v_1^0-2(y_{11}^1-y_{11}^0)} \tag{2.28}$$

Из (2.7) следует, что параметры управления v_1'', v_2', v_2'' (2.28) удовлетворяют ограничениям (2.5), т.е. $v_1''<v_1^0$, $v_2', v_2''\le v_2^0$.

При управлениях (2.26), (2.28), нетрудно заметить, что система (2.16) неразрешима, т.е. объекты X и Y через точку пересечения (2.15) проходят в разные моменты времени. Действительно, X проходит через эту точку в момент $t=\tau_{x1}=T/2$, а Y – в момент $t=T-\sqrt{(T^2-2\Delta y_1)/2}<T/2$, что следует из (2.8) и (2.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392с.

Сведения об авторах

Аветисян Ваган Вардгесович,
д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории оптимального управления и приближенных методов, факультет математики и механики, Ереванский государственный университет, (374 94) 44 95 60, E –mail: vanavet@yahoo.com

Чахмахчян Рафаел Эдвардович,
аспирант, кафедра теории оптимального управления и приближенных методов, факультет математики и механики, Ереванский государственный университет, (374 93) 28 52 24, E –mail: rafayel.ch@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ КУСОЧНО ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Аветисян Г.Р., Белубекян Э.В., Погосян А.Г.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки кусочно постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала, шарнирно опертой по двум противоположным продольным сторонам и свободной или свободно опертой по торцевым краям, под действием равномерно распределенной сжимающей нагрузки, приложенной по продольным сторонам пластинки.

Определяются оптимальные значения геометрических и физических параметров пластинки, обеспечивающих максимальное значение критической нагрузки при постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины, и ее заданных габаритных размерах.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки размерами $2L\times b$, шарнирно опертой по сторонам $y=0$ и $y=b$ и свободной или свободно опертой по краям $x=\pm L$, под действием равномерно распределенной сжимающей нагрузки σ, приложенной по сторонам $y=0$ и $y=b$ пластинки. Предполагается, что пластинка изготовлена из композиционного материала (КМ) путем поочередной укладки его монослоев под углом $\pm\varphi$ к оси x пластинки, причем на участке $-a\le x\le a$ пластинка имеет толщину h_2, а на участках $-L\le x\le -a$ и $a\le x\le L$ – толщину h_1 (рис.1).

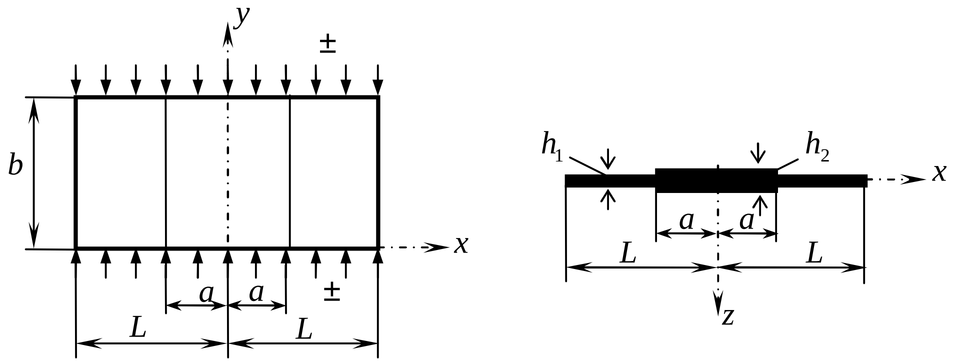


Рис. 1. Расчетная схема пластинки

Ставится задача определения оптимальных значений параметров a, h_1, h_2, φ, обеспечивающих максимальное значение критической нагрузки $\sigma_{кр}$ при постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины h_0, и заданных габаритных размерах $\xi=2L/b$ пластинки.

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$L(h_0-h_1)=a(h_2-h_1). \qquad (1)$$

Задача устойчивости решается для каждой из областей пластинки $(p=1,\ 2)$, соответствующих толщинам h_1 и h_2, с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом, ввиду симметрии, рассматривается половина пластинки ($x\ge 0$) с исследованием случаев симметричной и антисимметричной форм потери устойчивости.

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать ее ортотропной, для которой уравнения устойчивости записываются в виде:

$$D_{11}^{(p)}\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4}+2\left(D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)}\right)\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}^{(p)}\frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4}+\pm h_p\frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2}=0 \qquad (p=1,2), \qquad (2)$$

где: w_p – прогибы, $D_{ik}^{(p)}$ – жесткости составляющих участков пластинки $(p=1,2)$.

$$D_{ik}^{(p)}=\frac{B_{ik}h_p^3}{12},\qquad (i,k=1,2,6),\quad p=1,2\ ,$$

B_{ik} – упругие характеристики КМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях B_{ik}^0 по известным формулам поворота [1].

Граничные условия запишутся в виде:

– шарнирного опирания

$$w_p=0\,,\qquad \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2}=0\quad (p=1,2)\ \text{ при }\quad y=0\,,\ y=b\,, \tag{3}$$

– симметрии (в случае симметричной формы потери устойчивости)

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}=0\quad \text{ при }\ x=0, \tag{4}$$

– антисимметрии (в случае антисимметричной формы потери устойчивости)

$$w=0,\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\quad \text{ при }\ x=0, \tag{5}$$

– свободного края (в случае, когда край $x=L$ свободен)

$$D_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+D_{12}^{(1)}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}=0,\qquad D_{11}^{(1)}\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(1)}+4D_{66}^{(1)}\right)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial y^2}=0\quad \text{ при }\ x=L, \tag{6}$$

– свободного опирания (в случае, когда край $x=L$ свободно оперт)

$$w_1=0\qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0\quad \text{ при }\ x=L, \tag{7}$$

– сопряжения

$$w_1=w_2\,,\qquad \frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{\partial w_2}{\partial x},\ D_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+D_{12}^{(1)}\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}=D_{11}^{(2)}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+D_{12}^{(2)}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \tag{8}$$

$$D_{11}^{(1)}\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(1)}+4D_{66}^{(1)}\right)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x\partial y^2}=D_{11}^{(2)}\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}+\left(D_{12}^{(2)}+4D_{66}^{(2)}\right)\frac{\partial^3 w_2}{\partial x\partial y^2}\qquad \text{ при }\ x=a\,.$$

Решения уравнений (2), удовлетворяющие условиям (3), принимаются в виде

$$w_p=\left(C_{1m}^{(p)}\mathrm{ch}\mu_{1m}^{(p)}\lambda_m x+C_{2m}^{(p)}\mathrm{sh}\mu_{1m}^{(p)}\lambda_m x+C_{3m}^{(p)}\cos\mu_{2m}^{(p)}\lambda_m x+C_{4m}^{(p)}\sin\mu_{2m}^{(p)}\lambda_m x\right)\sin\lambda_m y\qquad (p=1,2)\,, \tag{9}$$

где:

$$\text{«}_{1m}^{(p)}=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(D_3^{(p)}\right)^2+D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}\left(k_{pm}^2-1\right)}+D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}},\qquad \text{«}_{2m}^{(p)}=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(D_3^{(p)}\right)^2+D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}\left(k_{pm}^2-1\right)}-D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}},$$

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{b},\quad D_3^{(p)}=D_{12}^{(p)}+2D_{66}^{(p)},\quad k_{2m}^2=\frac{\sigma h_2}{D_{22}^{(2)}\lambda_m^2},\quad k_{1m}^2=k_{2m}^2\frac{h_2^2}{h_1^2}. \tag{10}$$

В случае свободного края $x=L$ пластинки, удовлетворение граничных условий (4), (6) и (8) приводит к однородной системе линейных уравнений относительно коэффициентов $C_{im}^{(p)}$ $(i=1,2,3,4)$, соответствующей симметричной форме потери устойчивости. Удовлетворение граничным условиям (5), (6) и (8) приводит к аналогичной системе для антисимметричной формы. Из условий существования нетривиального решения этих систем для каждой из форм получаются трансцендентные уравнения относительно коэффициента k_{2m}:

$H_1(k_{2m})=0$ (для симметричной формы потери устойчивости),

$H_2(k_{2m})=0$ (для антисимметричной формы потери устойчивости).

Аналогичные трансцендентные уравнения получаются для случая свободно опертого края $x = L$ пластинки при удовлетворении условий (4), (7), (8) и (5), (7), (8).

Форма потери устойчивости пластинки будет соответствовать меньшему значению коффициента k_{2m}, полученному из решения этих уравнений.

После определения коэффициента k_{2m} значение критического напряжения, согласно (10), определится по формуле

$$\sigma_{\text{кр}} = k_{2m}^{(2)} \frac{D_{22}^{(2)} \lambda_m^2}{h_2}. \tag{11}$$

Поставленная задача оптимизации приводится к определению параметров a, h_1, h_2, φ, при которых наименьшее критическое напряжение, определяемое формулой (11), при условии (1), достигнет наибольшего значения.

Определение оптимальных параметров конструкции сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти:

$$\max_{x} \min_{m} \pm_{cr}, \qquad \bar{x} = \{a, h_1, h_2, \varphi\}, \tag{12}$$

при ограничениях:

$$h_2 = \frac{L}{a}(h_0 - h_1) + h_1, \tag{13}$$

$$0.01\delta_1 \le h_1 \le 0.2\delta_1, \quad 0.01\delta_2 \le h_2 \le 0.2\delta_2. \tag{14}$$

Ограничение (13) следует из условия постоянства веса пластинки (1), а ограничения в виде нервенств (14) обусловлены пределами применимости классической теории пластин. Здесь принимается: $\delta_1 = L - a$ при $L - a \le b$, $\delta_1 = b$ при $L - a \ge b$, $\delta_2 = 2a$ при $2a \le b$, $\delta_2 = b$ при $2a \ge b$.

Таблица 1

$\bar{h}_0$	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{\sigma}_{\text{кр}} \cdot 10^3$	$\bar{\sigma}^0_{\text{кр}} \cdot 10^3$
0.015	0.45	0.0100	0.0211	45^0	0.4013	0.1851
0.02	0.55	0.0105	0.0277	45^0	0.8229	0.3200
0.025	0.55	0.0115	0.0360	45^0	1.3303	0.5440
0.03	0.60	0.0120	0.0420	45^0	2.0466	0.7402

Таблица 2

$\bar{h}_0$	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	φ	$\bar{\sigma}_{\text{кр}} \cdot 10^3$	$\bar{\sigma}^0_{\text{кр}} \cdot 10^3$
0.015	0.65	0.0240	0.0101	45^0	0.5686	0.4004
0.02	0.65	0.0340	0.0125	45^0	1.0345	0.7118
0.025	0.65	0.0425	0.0156	45^0	1.6164	1.1122
0.03	0.60	0.0495	0.0170	45^0	2.4186	1.6015

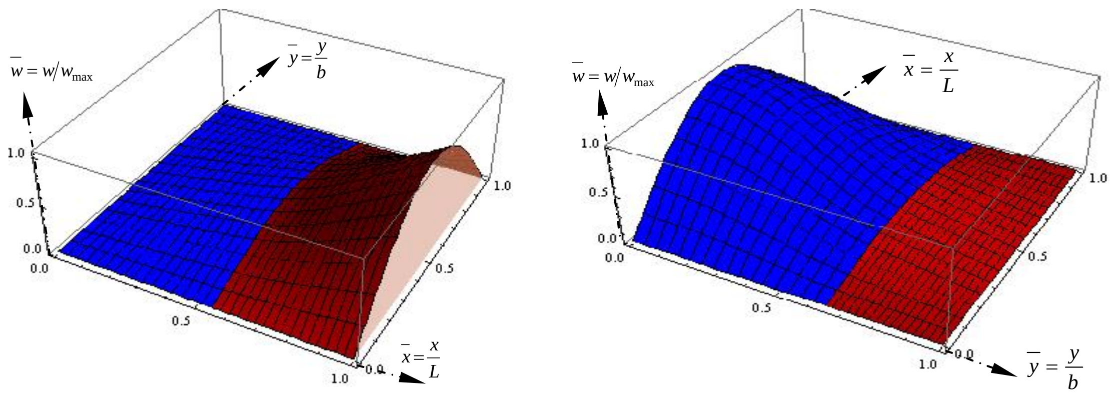
Задача решается методом Недлера-Мида [2] в сочетании с методом прямого поиска.

Числовые расчеты произведены для случаев свободного и шарнирно опертого края $x = L$ пластинки при $\xi = 1$, $\bar{h}_0 = h_0 / b = 0.015$, 0.02, 0.025, 0.03. В качестве материала принят КМ со следующими характеристиками:

$\overline{B}_{11}^{0} = 1;\quad \overline{B}_{22}^{0} = B_{22}^{0} / B_{11}^{0} = 0.0818;\quad \overline{B}_{12}^{0} = B_{12}^{0} / B_{11}^{0} = 0.0196;\quad \overline{B}_{66}^{0} = B_{66}^{0} / B_{11}^{0} = 0.04297.$

Вычислены оптимальные значения параметров $\overline{a} = a/L$, $\overline{h_1} = h_1/b$, $\overline{h_2} = h_2/b$, φ и соответствующие значения приведенного критического напряжения $\overline{\sigma}_{\text{кр}}^{0} = \sigma_{\text{кр}} / B_{11}^{0}$ для случаев свободного (табл.1) и свободно опертого (табл.2) края $x = L$ пластинки. Там же, для сравнения, приведены наибольшие значения приведенного критического напряжения $\overline{\sigma}_{\text{кр}}^{0}$ для равновесной пластинки постоянной толщины h_0.

Здесь, в случае свободного края $x = L$ пластинки при $\overline{h}_0 = 0.02$ оптимальному проекту соответствует антисимметричная форма потери устойчивости (рис.2), а в случае свободно опертого края – симметричная форма (рис.2) при $m = 1$.



а) б)

Рис. 2. Формы потери устойчивости пластинки: а) – в случае свободного края $x = L$; б) – в случае свободно опертого края $x = L$

Как следует из табл.1, оптимальным является проект, где в средней части пластинка имеет большую толщину, чем по краям ($\overline{h}_2 > \overline{h}_1$), а $\varphi = 45^0$. При этом увеличение критического напряжения по сравнению с пластинкой постоянной толщины составляет приблизительно 2.5 раза.

В случае свободно опертого края $x = L$ (табл.2) оптимальный проект получается при $\overline{h}_1 > \overline{h}_2$ и $\varphi = 45^0$, а критическое напряжение по сравнению с пластинкой постоянной толщины увеличивается приблизительно в 1.5 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 532 с.

Сведения об авторах:

Аветисян Грайр Робертович – зав. лабораторией кафедры АЯП ЕГИУА, тел.: 34 87 12, e-mail: roba@seua.am

Белубекян Эрнест Вагаршакович – зав. кафедрой сопротивления материалов ЕГУАС, докт. техн. наук, тел.: (091) 43 11 94, e-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Погосян Аревшат Гургенович – доцент кафедры АЯП ЕГИУА, канд. физ.-мат. наук, тел.: (099) 66 23 35, e-mail: roba@seua.am

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ НАКЛАДКАМИ РАЗЛИЧНЫХ ДЛИН

Агабекян П.В.

В работе рассматривается контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными и одной конечной накладками. Полубесконечная пластина деформируется под действием сил, приложенных на бесконечности.

С помощью преобразования Фурье, задача сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений относительно деформации промежуточного интервала между накладками и напряжениями, действующих под конечной накладкой.

Пусть полубесконечная пластина с двумя полубесконечными $(-\infty,-a),(a,\infty)$ и одной конечной $(-b,b)$ накладками деформируется под действием растягивающих сил с интенсивностью p, приложенных на бесконечности. Модуль упругости полубесконечных накладок равен E_1, а конечной накладки – E_2. Конечная накладка находится между полубесконечными накладками. Накладки параллельны границе полубесконечной пластины и находятся на одной линии. Относительно накладок принимается во внимание модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка и считается, что накладки не сопротивляются изгибу [1].

А относительно упругой полубесконечной пластины принимается, что она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

Решение задачи строится методом, изложенным в [2]. Уравнения равновесия накладок, в силу вышесказанного, запишутся в виде

$$\frac{dU_1}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1F}+\frac{\tau_2(x)}{E_2F},\qquad -\infty<x<\infty \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=\pm a}=0,\qquad \left.\frac{du_2}{dx}\right|_{x=\pm b}=0,\qquad \frac{du_1}{dx}\to\frac{p}{E}\quad \text{при}\quad |x|\to\infty \tag{2}$$

где $U_1(x)=\left[\theta(-x-a)+\theta(x-a)\right]\dfrac{du_1}{dx}+\left[\theta(x+b)-\theta(x-b)\right]\dfrac{du_2}{dx},$

$$-\infty<x<\infty;$$

$$\tau_1(x)=\left[\theta(-x-a)+\theta(x-a)\right]\tau(x),\qquad -\infty<x<\infty,$$

$$\tau_2(x)=\left[\theta(x+b)-\theta(x-b)\right]\tau(x),\qquad -\infty<x<\infty,$$

$\tau(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $u_1(x)$ – перемещение точек полубесконечных накладок, $u_2(x)$ – перемещение точек конечной накладки, $\tau_1(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных сил, действующих под полубесконечными накладками, $\tau_2(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных сил, действующих под конечной накладкой, E – модуль упругости пластины, F – площадь поперечного сечения накладок, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

С другой стороны, для деформации точек полубесконечной пластины, когда на нее действуют тангенциальные усилия интенсивностью

$$\tau^*(x)=\tau_1(x)+\tau_2(x)=\left[\theta(-x-a)+\theta(x-a)+\theta(x+b)-\theta(x-b)\right]\tau(x),$$

$$-\infty<x<\infty;$$

имеем [3,4]

$$U(x,d)=U^{(1)}(x,d)+U^{(2)}(x,d)=-\frac{l}{\pi Hl}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{x-s}-\frac{8d^2(x-s)}{\left[(x-s)^2+4d^2\right]^2}+\right. \tag{3}$$

$$+d_1\frac{x-s}{(x-s)^2+4d^2}+d_2\frac{2d^2(x-s)\left[12d^2-(x-s)^2\right]}{\left[(x-s)^2+4d^2\right]^3}\Bigg\}\tau^*(s)ds+\frac{p}{E},\quad -\infty<x<\infty$$

где $U^{(1)}(x,d)=\left[\theta(-x-a)+\theta(x-a)+\theta(x+b)-\theta(x-b)\right]\dfrac{du(x,d)}{dx}$

$$U^{(2)}(x,d)=\left[\theta(x+a)-\theta(x+b)+\theta(x-b)-\theta(x-a)\right]\frac{du(x,d)}{dx},$$

$$-\infty<x<\infty,$$

$$l=\frac{3\mu}{3-\nu},\ d_1=\frac{(1+\nu)(\nu-3)+8}{(1+\nu)(3-\nu)},\qquad d_2=\frac{2(1+\nu)}{3-\nu},$$

$u(x,d)$ – горизонтальные перемещения точек полубесконечной пластины, H – толщина пластины, μ – коэффициент Ляме, ν – коэффициент Пуансона, d – расстояние накладок от линии полубесконечной пластины.

Условия контакта между пластиной и накладками будут

$$U_1(x)=U^{(1)}(x,d),\qquad -\infty<x<\infty \tag{4}$$

Теперь применив к (1), (3) и (4) преобразование Фурье и имея в виду условие контакта для трансформатов Фурье тангенциальных контактных напряжений и деформаций промежуточного интервала, между накладками получим следующее функциональное уравнение:

$$\bar{\tau}^*(\sigma)+(\lambda_2-\lambda_1)\bar{R}(\sigma)\bar{\tau}_2(\sigma)=iHl\sigma\bar{R}(\sigma)\bar{U}^{(2)}(\sigma,d) \tag{5}$$

где $\bar{R}(\sigma)=\dfrac{1}{\lambda_1+\bar{K}(\sigma)},\quad \bar{K}(\sigma)=|\sigma|+\left(d_1|\sigma|+d\sigma^2+d_2d^2|\sigma|^3\right)e^{-2|\sigma|d},$

$$\lambda_1=\frac{Hl}{E_1F},\quad \lambda_2=\frac{Hl}{E_2F}.$$

Применив к (5) обратное преобразование Фурье, для тангенциальных контактных напряжений получим

$$\tau^*(x)+(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-\infty}^{\infty}R(x-s)\tau_2(s)ds=-Hl\int_{-\infty}^{\infty}R'(x-s)U^{(2)}(s,d)ds, \tag{6}$$

$$-\infty<x<\infty,$$

здесь $R(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}}{\lambda_1+\bar{K}(\sigma)}d\sigma,\ R'(x)=\dfrac{d}{dx}R(x).$ (7)

Так как $\tau^*(x)=0$ при $x\in\Omega$, где $\Omega=(-a,-b)\cup(b,a)$, $U^{(2)}(s,d)$ – четная функция, т.е. $U^{(2)}(-s,d)=U^{(2)}(s,d)=g(s)$ и $g(s)=0$ при $x\notin\Omega$, а $\tau_2(x)\neq 0$ при $x\in(-b,b)$ то из (6) получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-b}^{b}R(x-s)\tau(s)ds+Hl\int_b^a\left[R'(x-s)+R'(x+s)\right]g(s)ds=0;\\ x\in(b,a)\\ \tau(x)+(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-b}^{b}R(x-s)\tau(s)ds+Hl\int_b^a\left[R'(x-s)+R'(x+s)\right]g(s)ds=0;\\ x\in(-b,b)\end{gathered} \tag{8}$$

при условии

$$\int_a^{\infty}\tau(s)ds=\frac{E_1F}{E}p \tag{9}$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению системы интегральных уравнений (8) при условии (9).

Для решения системы (8) $R(x)$ представим в следующем виде [4-6]:

$$R(x)=\frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+\frac{\pi|\lambda_1 x|}{2}+\psi(1)\right]+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left\{(-1)^m\frac{(\lambda_1 x)^{2m}}{(2m)!}\left[\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+\psi(2m+1)\right]+(-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{|\lambda_1 x|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\}- \tag{10}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{R}_1(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

где ряд сходится при любых x; $\psi(u)$ – известная фукнция-пси,

$$\bar{R}_1(\sigma)=\frac{\bar{K}_1(\sigma)}{(\lambda_1+|\sigma|)\left[\lambda_1+|\sigma|+\bar{K}_1(\sigma)\right]},\ \bar{K}_1(\sigma)=\left(d_1|\sigma|-d\sigma^2+d_2d^2|\sigma|^3\right)e^{-2|\sigma|d}$$

Тогда из (10) для $R(x-s), R'(x-s)$ и $R'(x+s)$ получим

$$R(x-s)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}+R_3(x-s)$$
$$R'(x-s)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{s-x}+\frac{\lambda_1}{2}\operatorname{sgn}(x-s)+R_2'(x-s) \tag{11}$$
$$R'(x+s)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{x+s}+\frac{\lambda_1}{2}\operatorname{sgn}(x+s)+R_2'(x+s)$$

где

$$R_3(x-s)=\frac{\lambda_1}{2}|x-s|+\frac{\pi\psi(1)}{2}-\frac{\ln\lambda_1}{\pi}+R_2(x-s),$$
$$R_2(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left\{(-1)^m\frac{(\lambda_1 x)^{2m}}{(2m)!}\left[\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+\psi(2m+1)\right]+(-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{|\lambda_1 x|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\}-R_1(x)$$

Далее подставляя выражение из (11) в системе (8), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_b^a\frac{g(s)}{s-x}ds-\frac{1}{\pi}\int_b^a\frac{g(s)}{s+x}ds+\int_b^a\left[R_2'(x-s)+R_2'(x+s)\right]g(s)ds+$$
$$+\lambda_1\int_b^a\theta(x-s)g(s)ds=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\pi Hl}\int_{-b}^{b}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)ds+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{Hl}\int_{-b}^{b}R_3(x-s)\tau(s)ds$$
$$x\in(b,a) \tag{12}$$
$$\tau(x)+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\pi}\int_{-b}^{b}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)ds+(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-b}^{b}R_3(x-s)\tau(s)ds=$$
$$=-\frac{Hl}{\pi}\int_b^a\frac{g(s)}{s-x}ds+\frac{Hl}{\pi}\int_b^a\frac{g(s)}{s+x}ds-Hl\int_b^a\left[R_2'(x-s)+R_2'(x+s)\right]g(s)ds$$
$$x\in(-b,b)$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению сингулярных интегральных уравнений (12), откуда следует, что с помощью многочленов Чебышева систему интегральных уравнений (12) можно свести к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стренберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечнего стержня к полубесконечной упругой пластинке . // ПМ. Тр. Амер. общ. инж. механиков. 1968. Сер. Е. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №2. С.62-71.
3. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. // Изд. «Гитутюн» НАН Армении, 2006. С.138-143.
4. Агабекян П.В., Гулян К.Г. Контактная задача полубесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными накладками. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №4. С.7-15.
5. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.3-10.
6. Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А. Об одной задаче для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе упругими накладками. // Уч. записки ЕГУ. Ест. науки. 1984. №1. С.46-51.
7. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 467с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Агабекян Пайкар Вараздатович,
к.ф.-м.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении (374 10) 73 76 14, (374 93) 24 85 47
E-mail: mechins@sci.am

К ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СОСТАВНОГО БЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО КЛИНА

Агаларян О. Б.

В постановке линейной теории упругости рассматривается плоская контактная задача о вдавливании жесткого штампа в свободную грань бесконечного клина, жестко защемленного по другой грани. Предполагается, что линейно-упругий клин состоит из трех упругих материалов, а под штампом действуют только нормальные напряжения. При помощи интегрального преобразования решение смешанной краевой задачи сводится к решению интегрального уравнения первого рода относительно неизвестных контактных напряжений. Исследуется связь между характерными величинами поля напряженного состояния в окрестности вершины соединения и контактными напряжениями в зависимости от геометрических и комбинированных механических параметров при неизменной внешней нагрузке.

Аналогичная задача для однородного клина подробно была исследована в $[1]$.

Граничные условия для поставленной задачи имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u_1(r,0)=0 \\ v_1(r,0)=0 \end{cases} \quad (1.1) \qquad \begin{cases} \tau_{r\vartheta}^{(3)}(r,\alpha+\beta+\gamma)=0 \\ v_3(r,\alpha+\beta+\gamma)=-\delta_1+\delta_2 r-f(r) \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь $-\text{¢}_1+\text{¢}_2 r$ – жесткое перемещение штампа под действием силы p, $f(r)$ – форма основания штампа в области контакта. Компоненты напряжения и перемещений вдоль линии соединения клиньев удовлетворяют условиям непрерывности:

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(1)}(r,\alpha)=\sigma_\vartheta^{(2)}(r.\alpha) \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,\alpha)=\tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,\alpha) \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_1(r,\alpha)=u_2(r,\alpha) \\ v_1(r,\alpha)=v_2(r,\alpha) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \sigma_\vartheta^{(2)}(r,\alpha+\beta)=\sigma_\vartheta^{(3)}(r.\alpha+\beta) \\ \tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,\alpha+\beta)=\tau_{r\vartheta}^{(3)}(r,\alpha+\beta) \end{cases}, \qquad \begin{cases} u_2(r,\alpha+\beta)=u_3(r,\alpha+\beta) \\ v_2(r,\alpha+\beta)=v_3(r,\alpha+\beta) \end{cases}. \quad (1.4)$$

Необходимо определить закон распределения контактных напряжений и установить связь между величинами $p,\ \delta_1,\ \delta_2$, а также выявить количественное и качественное влияние механических и геометрических параметров составного клина на эти величины, исследовать характер напряжений в окрестности вершины соединения клиньев.

Ниже указывается несколько иной подход к построению характеристического интегрального уравнения поставленной задачи. Дифференцируя граничные условия (1.1) и учитывая соотношения Коши, получим

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(1)}(r,0)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\varepsilon_r^{(1)}-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\gamma_{r\vartheta}^{(1)}\right)=0 \end{cases}, \quad (1.5)$$

а из условий непрерывности перемещений вдоль лучей $\vartheta=\alpha$ и $\vartheta=\alpha+\beta$ следует:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(i)}(r,\vartheta)-\varepsilon_r^{(i+1)}(r,\vartheta)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\varepsilon_r^{(i)}(r,\vartheta)-\varepsilon_r^{(i+1)}(r,\vartheta)\right]-\dfrac{\partial}{\partial r}r\left[\gamma_{r\vartheta}^{(i)}(r,\vartheta)-\gamma_{r\vartheta}^{(i+1)}(r,\vartheta)\right]=0 \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (1.6)$$

Тем самым, решение смешанной краевой задачи с учетом закона Гука сводится к решению задачи, когда все краевые условия написаны относительно компонент напряжений.

Сначала построим функцию влияния. Для этого, применяя преобразование Меллина в полярной системе координат [2,3] и обозначив

$$\hat{\sigma}_r(s,\vartheta)=\int_0^\infty \sigma_r(r,\vartheta)r^s dr,\ \hat{\sigma}_\vartheta(s,\vartheta)=\int_0^\infty \sigma_\vartheta(r,\vartheta)r^s dr,\ \hat{\tau}_{r\vartheta}(s,\vartheta)=\int_0^\infty \tau_{r\vartheta}(r,\theta)r^s dr, \qquad (1.7)$$

из уравнений равновесия и сплошности, в каждой из областей определения функций $\hat{\sigma}_\vartheta^i(s,\vartheta)\ (i=1-3)$ получаются следующие уравнения четвертого порядка:

$$\frac{d^4\hat{\sigma}_\vartheta^i(s,\vartheta)}{d\vartheta^4}+\left[(s+1)^2+(s-1)^2\right]\frac{d^2\hat{\sigma}_\vartheta^i(s,\vartheta)}{d\vartheta^2}+\left(s^2-1\right)^2\hat{\sigma}_\vartheta^i(s,\vartheta)=0 \qquad (1.8)$$

общий интеграл которых записывается в следующем виде:

$$\hat{\sigma}_\vartheta^i(s,\vartheta)=a_i\cos(s+1)\vartheta+b_i co\cos(s-1)\vartheta+c_i\sin(s+1)\vartheta+d_i\sin(s-1)\vartheta \qquad (1.9)$$

При этом

$$\hat{\sigma}_r(s,\vartheta)=\frac{1}{s}\left[\frac{1}{s-1}\frac{d^2\hat{\sigma}_\vartheta}{d\vartheta^2}-\hat{\sigma}_\vartheta\right],\qquad \hat{\tau}_{r\vartheta}(s,\vartheta)=\frac{1}{s-1}\frac{d\hat{\sigma}_\vartheta}{d\vartheta}, \qquad (1.10)$$

а коэффициенты $a_i, b_i, c_i, d_i\ (i=1-3)$ – функции от параметра s и подлежат определению.

Для определения этих коэффициентов из граничных условий получим алгебраическую систему из двенадцати уравнений, которую можно упростить, выразив b_i и d_i через a_i и c_i. В итоге придем к следующей эквивалентной системе из шести уравнений относительно a_i и $c_i\ (i=1,2,3)$

$$\begin{cases}A_{11}a_1+A_{12}c_1+A_{13}a_2+A_{14}c_2+A_{15}a_3+A_{16}c_3=A_1\\ A_{21}a_1+A_{22}c_1+A_{23}a_2+A_{24}c_2+A_{25}a_3+A_{26}c_3=A_2\\ A_{31}a_1+A_{32}c_1+A_{33}a_2+A_{34}c_2+A_{35}a_3+A_{36}c_3=A_3\\ A_{41}a_1+A_{42}c_1+A_{43}a_2+A_{44}c_2+A_{45}a_3+A_{46}c_3=A_4\\ A_{51}a_1+A_{52}c_1+A_{53}a_2+A_{54}c_2+A_{55}a_3+A_{56}c_3=A_5\\ A_{61}a_1+A_{62}c_1+A_{63}a_2+A_{64}c_2+A_{65}a_3+A_{66}c_3=A_6\end{cases} \qquad (1.11)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{11}=-\frac{1}{s-1}\left[(b+s-1)\cos(s+1)\alpha-(m_1+s-1)\cos(s+1)\alpha\right],$$

$$A_{13}=\frac{a}{s-1}\cos(s+1)\alpha,\qquad A_{14}=\frac{a}{s-1}\sin(s+1)\alpha,$$

$$A_{21}=\frac{s+1}{s-1}\left[(b-s-1)\sin(s+1)\alpha+(m_1+s-1)\sin(s-1)\alpha\right],$$

$$A_{22}=-\frac{s+1}{s-1}\left[(b-s-1)\cos(s+1)\alpha-(m_1-s-1)\cos(s-1)\alpha\right],$$

$$A_{23}=-\frac{s+1}{s-1}a\cdot\sin(s+1)\alpha,\ A_{24}=\frac{s+1}{s-1}a\cdot\cos(s+1)\alpha,$$

$$A_{31}=-\frac{1}{s-1}\left[s\cdot\cos\left(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\right)-\cos\left(s(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\right)-(m_1+s-1)\cos(s-1)(\alpha+\beta)\right],$$

$$A_{32}=-\frac{1}{s-1}\left[s\cdot\sin\left(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\right)-\sin\left(s(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\right)+(m_1-s-1)\sin(s-1)(\alpha+\beta)\right],$$

$$A_{33}=\frac{1}{s-1}\left[-(c+s-1)\cos(s+1)(\alpha+\beta)+s\cdot\cos\left(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\right)-\cos\left(s(\alpha-\beta)+\alpha-\beta\right)\right],$$

$$A_{34}=\frac{1}{s-1}\left[-(c+s-1)\sin(s+1)(\alpha+\beta)+s\cdot\sin\left(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\right)-\sin\left(s(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\right)\right],$$

$$A_{35} = \frac{d}{s-1}\cos(s+1)(\alpha+\beta), \quad A_{36} = \frac{d}{s-1}\sin(s+1)(\alpha+\beta),$$

$$A_{41} = \frac{s+1}{s-1}\Big[s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\big)+\sin\big(s(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\big)-(m_1+s-1)\sin(s-1)(\alpha+\beta)\Big],$$

$$A_{42} = \frac{s+1}{s-1}\Big[s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\big)+\cos\big(s(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\big)-(m_1-s-1)\cos(s-1)(\alpha+\beta)\Big],$$

$$A_{43} = \frac{s+1}{s-1}\Big[s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\big)-\sin\big(s(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\big)-(c-s-1)\sin(s+1)(\alpha+\beta)\Big],$$

$$A_{44} = \frac{s+1}{s-1}\Big[s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta)+\alpha-\beta\big)-\cos\big(s(\alpha-\beta)+\alpha+\beta\big)+(c-s-1)\cos(s+1)(\alpha+\beta)\Big],$$

$$A_{45} = \frac{s+1}{s-1}d\cdot\sin(s+1)(\alpha+\beta), \; A_{46} = -\frac{s+1}{s-1}d\cdot\cos(s+1)(\alpha+\beta),$$

$$A_{51} = -\frac{1}{s-1}\Big[s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)+\sin\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)-(m_1+s-1)\sin(s-1)(\alpha+\beta+\gamma)\Big],$$

$$A_{52} = \frac{1}{s-1}\Big[s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)+\cos\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)+(m_1-s-1)\cos(s-1)(\alpha+\beta+\gamma)\Big]$$

$$\begin{aligned} A_{53} = \frac{1}{s-1}\Big[&s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)+\sin\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)- \\ &-s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)-\sin\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)\Big], \end{aligned} \qquad (1.12)$$

$$\begin{aligned} A_{54} = \frac{1}{s+1}\Big[&s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)+\cos\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)- \\ &-s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)-\cos\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)\Big], \end{aligned}$$

$$A_{55} = \frac{1}{s-1}\Big[s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)+\sin\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)-(s+1)\sin(\alpha+\beta+\gamma)\Big],$$

$$A_{56} = -\frac{1}{s-1}\Big[s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)+\cos\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)-(s+1)\cos(s+1)(\alpha+\beta+\gamma)\Big],$$

$$A_{61} = \frac{1}{s-1}\Big[s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)-\cos\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)-(m_1+s-1)\cos(s-1)(\alpha+\beta+\gamma)\Big],$$

$$A_{62} = \frac{1}{s-1}\Big[s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)-\sin\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)+(m_1-s-1)\sin(s-1)(\alpha+\beta+\gamma)\Big],$$

$$\begin{aligned} A_{63} = \frac{1}{s-1}\Big[&s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)-\cos\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)- \\ &-s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)+\cos\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{64} = \frac{1}{s-1}\Big[&s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)-\sin\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)- \\ &-s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha-\beta-\gamma\big)+\sin\big(s(\alpha-\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)\Big], \end{aligned}$$

$$A_{65} = \frac{1}{s-1}\Big[-s\cdot\cos\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)+\cos\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)+\cos(s+1)(\alpha+\beta+\gamma)\Big],$$

$$A_{66} = \frac{1}{s-1}\Big[-s\cdot\sin\big(s(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha+\beta-\gamma\big)+\sin\big(s(\alpha+\beta-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma\big)+\sin(s+1)(\alpha+\beta+\gamma)\Big],$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0, \; A_6 = p(r_0),$$

Здесь введены новые комбинированные механические параметры, имеющие следующий вид:

$$a=\frac{\mu_2 m_1}{\mu_2-\mu_1}\ ,\quad b=\frac{\mu_1 m_2}{\mu_2-\mu_1},\quad c=\frac{\mu_3 m_2}{\mu_3-\mu_2},\quad d=\frac{\mu_2 m_3}{\mu_3-\mu_2} \tag{1.13}$$

Решая систему и определяя неизвестные функции, после применения обратного преобразования, для компонент напряжения и перемещений получим интегральные выражения. Далее, из контактного условия и принципа суперпозиции для определения неизвестного контактного напряжения, приходим к следующему интегральному уравнению первого рода:

$$\int_{l_1}^{l_2} K\left(r,r_0\right) p\left(r_0\right) dr_0 = F\left(r\right) \qquad \left(l_1 \le r \le l_2\right) \tag{1.14}$$

Здесь $K\left(r,r_0\right)$ можно представить в виде суммы логарифмической и регулярной частей. Отметим, что регулярная часть как в первом, так и во втором и третьем случаях, в отличие $\left[1\right]$, не содержит бесконечной постоянной величины. Решение (1.14) при помощи ортогональных полиномов Чебышева сводится к решению квазиполных линейных алгебраических бесконечных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\left[4\right]$. При этом, характер напряжения в окрестности соединения определяется соответствующим образом расположенным корнем трансцендентного уравнения, которое получается приравниванием к нулю главного определителя исходной системы. С помощью комбинированных механических параметров уравнение принимает следующий симметричный вид:

$$\begin{aligned} D\left(a,b,c,d\right) = {} & K_1^{(4)}a^2d^2 + K_2^{(4)}c^2b^2 + K_3^{(4)}b^2d^2 + K_4^{(4)}abd^2 + K_5^{(4)}b^2cd + K_6^{(4)}abcd + \\ & + K_1^{(3)}a^2d + K_2^{(3)}bc^2 + K_3^{(3)}b^2d + K_4^{(3)}bd^2 + K_5^{(3)}b^2c + \\ & + K_6^{(3)}ad^2 + K_7^{(3)}abd + K_8^{(3)}abc + K_9^{(3)}bcd + K_{10}^{(3)}acd + \\ & + K_1^{(2)}a^2 + K_2^{(2)}b^2 + K_3^{(2)}c^2 + K_4^{(2)}d^2 + K_5^{(2)}ab + \\ & + K_2^{(6)}ac + K_7^{(2)}ad + K_8^{(2)}bc + K_9^{(2)}bd + K_{10}^{(2)}cd + \\ & + K_1^{(1)}a + K_2^{(1)}b + K_1^{(1)}c + K_4^{(1)}d + K_0 = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Отметим, что при построении решения краевой задачи эти новые механические параметры существенно сокращают объем вычислительной части. В случае, когда $\mu_1=\mu_2$ или $\mu_2=\mu_3$ количество независимых механических параметров уменьшается, исходная система принимает более простой вид. Поэтому эти случаи можно рассмотреть отдельно. Однако уравнение, определяющее характер поля напряжений в окрестности соединения, можно получить из (1.15) после соответствующего преобразования и предельного перехода. В частности, когда $\mu_2=\mu_3$ и $m_2=m_3$ для двух материалов получится уравнение, написанное в следующем симметричном виде:

$$\Delta = Aa^2 + Bb^2 + Cab + Da + Eb + F = 0$$

$$A=-\frac{1}{\left(s-1\right)^4}m_1^{\ 2}+\frac{4}{\left(s-1\right)^4}\left[\left(m-1\right)\sin^2 s\alpha + s^2\sin^2\alpha\right]$$

$$B=-\frac{4}{\left(s-1\right)^4}\left[\sin^2 s\beta - s^2\sin^2\beta\right],$$

$$\begin{aligned} C = {} & -\frac{4}{\left(s-1\right)^4}\left(s^2\sin^2\beta-\sin^2 s\beta\right)-\frac{4}{\left(s-1\right)^4}\left[s^2\sin^2\alpha-\left(m_1-1\right)\sin^2 s\alpha\right]+ \\ & +\frac{4}{\left(s-1\right)^4}\left[\left(m_1-1\right)\sin^2 s\left(\alpha+\beta\right)+s^2\sin^2\left(\alpha+\beta\right)\right], \end{aligned}$$

$$D=\frac{2}{(s-1)^4}\Big\{-\left[(m_1-1)^2-s\right]+\left[(m_1-1)^2-s^2-s-1\right]\cos2s\beta-2\left[(m_1-1)\cos2s\alpha+s^2\cos2\alpha\right]+$$

$$+\left[(m_1-1)\cos2s(\alpha-\beta)+s^2\cos2(\alpha+s\beta)\right]+(m_1-1)\cos2s(\alpha+\beta)+s^2\cos2(\alpha-s\beta)\Big\}$$

$$E=-\frac{4}{(s-1)^4}\left[s^2-1+\cos2s\beta-s^2\cos2\beta\right]$$

$$F=\frac{4}{(s-1)^4}\left[s^2-1+\cos2s\beta-s^2\cos2\beta\right]\left[\frac{(m_1-1)^2+1}{2}-s^2+\cos2s\alpha+s^2\cos2\alpha\right]$$

В общем случае окончательные выражения для компонент напряжений и перемещений имеют довольно сложный вид. Поэтому, рассматривая частный случай и предположив, что величина угла среднего клина принимается бесконечно малой, заменяя $sin\vartheta\simeq\vartheta$, $cos\vartheta\simeq1$, получим более простые выражения, сравнением решений которых с соответствующими решениями для составных тел, состоящих из двух материалов, можно выяснить количественное и качественное влияние геометрических и механических параметров среднего клина на поведение напряженного состояния в теле как в целом, так асимптотический характер в вершине соединения [5]. Проведя численный анализ основных механических величин для некоторых серий геометрических и механических параметров, на их основе можно делать практические важные выводы для прочностных свойств в окрестности соединения составного тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении М.: Наука,1986.
2. Уфлянд Я. С Интегральные преобразование в задачах теории упругости Л.: Наука, 1967.
3. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.
4. Александров В. М. Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1986.
5. Агаларян О.Б. К плоской задаче составного клина с радиальной трещиной конечной длины. //Изв.НАН РА. Механика. 2007. Т.60. N3. С.7–14.

<u>Сведения об авторе</u>

Агаларян Оганес Бегларович – кандидат физ.-мат.наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА, Тел: (37410) 52-48-90

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Агаловян М. Л.

Рассматриваются вынужденные колебания прямоугольных пластин на основе уравнений пространственной задачи теории упругости для несжимаемого материала. Считается, что на одной лицевой поверхности задан вектор перемещения, который во времени меняется гармонически, а на противоположной лицевой поверхности заданы смешанные условия. Получены общие асимптотические решения сформулированных задач. В частных случаях получены математически точные решения.

1. Постановка задач и основные уравнения. Требуется найти решения уравнений динамики теории упругости для несжимаемого материала:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (x,y,z;\,u,v,w) \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\sigma_{xx}=\sigma_{zz}+2G\left(2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{yy}=\sigma_{zz}+2G\left(2\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{G}\sigma_{xz} \qquad (u,v;\ x,y)$$

условия несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.3}$$

в области $D=\{(x,y,z): 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ |z|\le h,\ \min(a;b)=l,\ h<<l\}$ при граничных условиях

$$\begin{aligned} u(-h)&=u^-(\xi,\eta)\exp(i\Omega t)\\ v(-h)&=v^-(\xi,\eta)\exp(i\Omega t)\\ w(-h)&=w^-(\xi,\eta)\exp(i\Omega t)\end{aligned} \tag{1.4}$$

и одним из следующих вариантов условий при $z=h$:

а) $\sigma_{yz}(h)=\sigma_{zz}(h)=0,\quad u(h)=0$ (1.5)

б) $\sigma_{xz}(h)=\sigma_{zz}(h)=0,\quad v(h)=0$ (1.6)

где G – модуль сдвига, ρ – плотность, Ω – частота внешнего воздействия, $\xi=x/l$, $\eta=y/l$. Условия на боковой поверхности не конкретизируются, ими обусловлено возникновение пограничного слоя [1, 2]. Подобные задачи, в частности, возникают в расчетах сейсмоизоляторов [3].

2. Асимптотические решения сформулированных задач. В уравнениях и соотношениях (1.1)-(1.3), перейдя к безразмерным координатам $\xi = x/l$, $\eta = y/l$, $\zeta = z/h$ и безразмерным перемещениям $u_1 = u/l$, $v_1 = v/l$, $w_1 = w/l$, решение полученной системы будем искать в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{jk}(\xi,\eta,\zeta)\exp(i\Omega t), \qquad \alpha,\beta = x,y,z, \quad j,k = 1,2,3 \\ &(u_1, v_1, w_1) = (U(\xi,\eta,\zeta), V, W)\exp(i\Omega t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

В результате получим сингулярно-возмущенную систему

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2}\Omega_*^2 U = 0 \qquad (1,2,3;\ \xi,\eta,\zeta;\ U,V,W) \\ &\sigma_{jj} = \sigma_{33} + 2G\left(2\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) \qquad (j=1,2;\ \xi,\eta;\ U,V) \\ &\sigma_{12} = G\left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi}\right) \\ &\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{1}{G}\sigma_{13} \qquad (U,V;\ \xi,\eta;\ 1,2) \\ &\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0, \qquad \Omega_*^2 = \rho h^2 \Omega^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Решение системы (2.2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{jk} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{jk}^{(s)}, \qquad j,k = 1,2,3 \\ &U = \varepsilon^{s} U^{(s)} \qquad (U,V,W), \qquad s = \overline{0,N} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.2), по обычной процедуре получим систему рекуррентных уравнений для определения $\sigma_{jk}^{(s)}$, $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, $W^{(s)}$. Решив эту систему, получим

$$\begin{aligned} &W^{(s)} = W_0^{(s)}(\xi,\eta) + W_*^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \\ &\sigma_{33}^{(s)} = -\zeta\Omega_*^2 W_0^{(s)} + \sigma_{330}^{(s)}(\xi,\eta) + \sigma_{33*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \\ &\sigma_{11}^{(s)} = -\zeta\Omega_*^2 W_0^{(s)} + \sigma_{330}^{(s)}(\xi,\eta) + \sigma_{11*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \\ &\sigma_{22}^{(s)} = -\zeta\Omega_*^2 W_0^{(s)} + \sigma_{330}^{(s)}(\xi,\eta) + \sigma_{22*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \\ &\sigma_{13}^{(s)} = G\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}\right), \qquad \sigma_{12}^{(s)} = G\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi}\right) \\ &\sigma_{23}^{(s)} = G\left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$W_*^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) = -\int_0^{\zeta}\left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}\right)d\zeta$$

$$\sigma_{33*}^{(s)} = -\int_0^{\zeta}\left[\Omega_*^2 W_*^{(s)} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta}\right]d\zeta \tag{2.5}$$

$$\sigma_{11*}^{(s)}=\sigma_{33*}^{(s)}+2G\left(2\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_{22*}^{(s)}=\sigma_{33*}^{(s)}+2G\left(2\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)$$

Для определения же $U^{(s)}, V^{(s)}$ получим уравнение

$$G\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Omega_*^2 U^{(s)}=R_u^{(s)} \qquad (U,V) \tag{2.6}$$

где

$$R_u^{(s)}=-\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}-G\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}$$
$$R_v^{(s)}=-\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}-G\frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} \tag{2.7}$$

Решениями уравнений (2.6) являются

$$U^{(s)}=C_1^{(s)}(\xi,\eta)\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}\zeta+C_2^{(s)}(\xi,\eta)\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}\zeta+\overline{U}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad (U,V;\,1,3;\,2,4) \tag{2.8}$$

где $\overline{U}^{(s)}, \overline{V}^{(s)}$ – частные решения соответствующих неоднородных уравнений (2.6). В частности, $\overline{U}^{(0)}=\overline{V}^{(0)}=0$, т.к. $R_u^{(0)}=R_v^{(0)}=0$.

3. Удовлетворение граничных условий (1.4), (1.5); (1.4), (1.6). Удовлетворив условиям (1.4), (1.5) относительно w, σ_{zz}, получим

$$W^{(s)}=W^{-(s)}+W_*^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)-W_*^{(s)}(\xi,\eta,-1)$$
$$\sigma_{33}^{(s)}=\Omega_*^2\left(W^{-(s)}-W_*^{(s)}(\xi,\eta,-1)\right)(1-\zeta)+\sigma_{33*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)-\sigma_{33*}^{(s)}(\xi,\eta,1) \tag{3.1}$$
$$W^{-(0)}=w^-/l, \qquad W^{-(s)}=0,\ s\neq 0$$

После удовлетворения условий (1.4), (1.5) относительно u получим

$$U^{(s)}=-\frac{1}{\sin\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\left[f_u^{(s)}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)+\overline{U}^{(s)}(\xi,\eta,1)\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1+\zeta)\right]+\overline{U}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)$$
$$f_u^{(s)}=\overline{U}^{(s)}(\xi,\eta,-1)-U^{-(s)}, \qquad U^{-(0)}=u^-/l, \quad U^{-(s)}=0,\ s\neq 0 \tag{3.2}$$

Удовлетворив условиям (1.4), (1.5) относительно v и σ_{yz}, получим

$$V^{(s)}=\frac{1}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\left[f_{23}^{(s)}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1+\zeta)-f_v^{(s)}\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\right]+\overline{V}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)$$
$$\sigma_{23}^{(s)}=G\left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right), \qquad f_{23}^{(s)}=-\frac{\sqrt{G}}{\Omega_*}\left(\frac{\partial\overline{V}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)_{\zeta=1} \tag{3.3}$$
$$f_v^{(s)}=\overline{V}^{(s)}(\xi,\eta,-1)-V^{-(s)}, \qquad V^{-(0)}=v^-/l, \quad V^{-(s)}=0,\ s\neq 0$$

Удовлетворение условий (1.4), (1.6) приводит к решению

$$W^{(s)} = W^{-(s)} + W_*^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) - W_*^{(s)}(\xi,\eta,-1)$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = \Omega_*^2\left(W^{-(s)} - W_*^{(s)}(\xi,\eta,-1)\right)(1-\zeta) + \sigma_{33*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) - \sigma_{33*}^{(s)}(\xi,\eta,1)$$

$$V^{(s)} = -\frac{1}{\sin\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\left[f_v^{(s)}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta) + \overline{V}^{(s)}(\xi,\eta,1)\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1+\zeta)\right] + \overline{V}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)$$

$$U^{(s)} = \frac{1}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\left[f_{13}^{(s)}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1+\zeta) - f_u^{(s)}\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\right] + \overline{U}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{3.4}$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = G\left(\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}\right), \qquad \sigma_{13}^{(s)} = G\left(\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)$$

$$f_{13}^{(s)} = -\frac{\sqrt{G}}{\Omega_*}\left(\frac{\partial\overline{U}^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\xi}\right)_{\zeta=1}$$

Остальные компоненты тензора напряжений в обоих случаях определяются по формулам (2.4). Полученные решения будут конечными, если

$$\sin\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}} \neq 0, \qquad \cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}} \neq 0 \tag{3.5}$$

Значения Ω, для которых условия (3.5) не выполняются, являются резонансными.

4. Частные решения. Если функции u^-, v^-, w^- являются многочленами от ξ, η, итерационный процесс обрывается и получается математически точное решение задачи для пространственного несжимаемого слоя. Приведем это решение для случая $u^- = \mathrm{const}$, $v^- = \mathrm{const}$, $w^- = \mathrm{const}$. В этом случае решением граничной задачи (1.4), (1.5) является

$$u = \frac{u^-}{\sin\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t)$$

$$v = \frac{v^-}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t)$$

$$w = w^-\exp(i\Omega t), \qquad \sigma_{zz} = \frac{w^-}{h}\Omega_*^2(1-\zeta)\exp(i\Omega t) \tag{4.1}$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{u^-}{h}\frac{\Omega_*\sqrt{G}}{\sin\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{v^-}{h}\frac{\Omega_*\sqrt{G}}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}, \qquad \sigma_{xy} = 0$$

Решение же граничной задачи (1.4), (1.6) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
& u = \frac{u^{-}}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}} \cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t) \\
& v = \frac{v^{-}}{\sin\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}} \sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t) \\
& w = w^{-}\exp(i\Omega t), \qquad \sigma_{zz} = \frac{w^{-}}{h}\Omega_*^2(1-\zeta)\exp(i\Omega t) \\
& \sigma_{xz} = \frac{u^{-}}{h}\frac{\Omega_*\sqrt{G}}{\cos\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\sin\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t) \\
& \sigma_{yz} = -\frac{v^{-}}{h}\frac{\Omega_*\sqrt{G}}{\sin\frac{2\Omega_*}{\sqrt{G}}}\cos\frac{\Omega_*}{\sqrt{G}}(1-\zeta)\exp(i\Omega t) \\
& \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}, \qquad \sigma_{xy} = 0
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 414 с.
2. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V., Aghalovyan M.L. Asymptotics of forced vibrations of bases, foundations and seismoisolators. Journal of Structural Control, vol. 8, № 2, December 2001, p. 249-263.
3. Kelly J.M. The influence of plate flexibility on the buckling load of elastomeric isolators. Report № UCB/ EERC – 94/03, March 1994, 59 p.

Сведения об авторе:

Агаловян Мгер Ленсерович,
к. ф.-м. н.,старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, доцент кафедры высшей математики Армянского государственного экономического университета .
Тел: (+37493)055070 , (+37410)524890 ; E-mail : mheraghalovyan@rambler.ru

ТУННЕЛИРОВАНИЕ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ЗАЗОР В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЁ ДИФРАКЦИЯ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЭЛЕКТРОДЕ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х.

Рассматривается составное пьезоэлектрическое пространство, состоящее из двух одинаковых полупространств класса 6mm, разделенное вакуумным зазором конечной ширины. Край нижнего полупроствanства покрыт тонким полубесконечным металлическим заземленным слоем, (электродом). Исследуется задача о туннелировании через зазор и дифракция на полубесконечном электроде сдвиговой плоской волны, распространяющейся в верхнем полупространстве. Построено замкнутое решение задачи. Получены асимптотические формулы, определяющие характерные особенности электроупругого поля в нижнем полупространстве.

В нашей работе [1] исследована задача о дифракции сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с вакуумным слоем. Пьезоэлектрическая среда, состоящая из двух одинаковых пъезоэлектрических полупространств класса 6mm, разделенных вакуумным слоем (щель), деформируется электроупругой волной, распространяющейся на верхнем полупространстве. Край нижнего полупространства покрыт полубесконечным металлическим покрытием (электрод). Построено замкнутое решение задачи и проведено детальное исследование распределения волнового поля упругих перемещений в верхнем полупространстве.

В настоящей работе, представляющее по существу органическое продолжение работы [1], рассматривается та же задача и исследуется распределение электроупругого волнового поля в нижнем полупространстве. Построено замкнутое решение задачи в виде интегралов Фурье, представляющее поле упругих перемещений и потенциал электрического поля. При помощи методики, развитой в [1,2], получены асимптотические формулы, определяющие поведение и особенности волнового поля упругих перемещений в дальних зонах нижнего полупространства.

Рассмотрим пространство, состоящее из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделенных вакуумным слоем толщины $2h$. В декартовой системе координат $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1\left(|x|<\infty;\ y>h,\ |z|<\infty\right)$ и $\Omega_2\left(|x|<\infty;\ y<-h,\ |z|<\infty\right)$, а вакуумный слой – $\Omega_0\left(|x|<\infty;\ -h<y<h,\ |z|<\infty\right)$. Главные оси пьезоэлектрических полупространств (кристаллов) класса 6mm гексакональной симметрии параллельны друг другу и оси Oz. Предполагается, что полуплоскость $x<0$ границы нижнего полупространства покрыта тонким металлическим заземленным слоем. Считая, что ее жесткостью можно пренебречь, металлический слой рассматривается как электрод, занимающий полуплоскость $x<0,\ \ y=-h,\ \ |z|<\infty$.

В кристалле занимающая область Ω_1 распространяется падающая из бесконечности заданная сдвиговая плоская упругая волна $\bar{u}=\left(0;0;\,u_z^{(\infty)}(x,y,t)\right)$, поляризованная вдоль оси симметрии:

$$u_z^{(\infty)}(x,y,t)=w_\infty(x,y)e^{-i\omega t}=e^{-ik(x\cos\beta+y\sin\beta)-i\omega t} \tag{1}$$

где $w_\infty(x,y)$–амплитуда, $\beta(0<\beta<\pi/2)$–угол скольжения падающей упругой волны, k–волновое число, ω–частота колебании, t–время.

При этих предположениях требуется определить дифрагированное электроупругое поле в каждой области Ω_2.

Единственное отличное от нуля упругое смещение $u_z^{(j)}(x,y,t)$ $(j=1,2)$ и потенциал электрического поля $\varphi^{(j)}(x,y,t)$ $(j=0,1,2)$ в соответствующих областях Ω_j ищем в виде

$$u_z^{(j)}(x,y,t)=w_j(x,y)e^{-i\omega t},\qquad \varphi^{(j)}(x,y,t)=\varphi_j(x,y)e^{-i\omega t} \tag{2}$$

Тогда, в рамках квазистатической постановки задач для пьезоэлектрических тел [3], приходим к следующим краевым задачам относительно амплитуд из (2) (Δ–оператор Лапласа)

$$\Delta w_j(x,y)+k^2 w_j(x,y)=0,$$
$$\Delta\varphi_j(x,y)-(e_{15}/\varepsilon_{11})\,w_j(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Omega_j, \quad j=1,2 \tag{3}$$

$$\Delta\varphi_0(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Omega_0 \tag{4}$$

с граничными и контактными условиями

$$\begin{aligned}
&\tau_{yz}(x,\pm h)=0, \quad |x|<\infty\\
&D_{1y}(x,h+0)=D_{0y}(x,h-0), \quad \varphi_1(x,h+0)=\varphi_0(x,h-0), \quad |x|<\infty\\
&\varphi_0(x,-h+0)=\varphi_2(x,-h-0)=F_+(x), \quad 0<x<\infty\\
&D_{0y}(x,-h+0)-D_{2y}(x,-h-0)=\psi_-(x), \quad -\infty<x<0
\end{aligned} \tag{5}$$

где $F_+(x)=0$ при $x<0$ и $\psi_-(x)=0$ при $x>0$.

При этом, решение должно еще удовлетворять условию уходящей волны.

В (1.3)–(1.5) e_{15} – пьезомодуль, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_1/4\pi$ –диэлектрическая проницаемость, $\nu=\omega/k=\sqrt{c_{44}\left(1+\chi_1^2\right)/\rho}$ –фазовая скорость распространения сдвиговой упругой волны, c_{44} – упругая постоянная (модуль сдвига), ρ –плотность среды, D_{jy} –нормальная компонента магнитной индукции, $\chi_1^2=e_{15}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$ [3].

Решение краевых задач (3)–(5) после преобразования Фурье сводится к краевой задаче типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси. Решение этой задачи построено в [1]. В итоге для компонент дифрагированного электроупругого поля в нижнем полупространстве получим

$$w_2(x,y)=\frac{\varepsilon_{01}D_2}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\sigma|}{\Delta_1(\sigma)}\frac{e^{\gamma(y+h)}e^{-i\sigma x}}{\sqrt{\sigma+i0}\,\bar K_+(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-k\cos\beta+i0} \tag{6}$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}w_2(x,y)-\frac{\varepsilon_{01}e_{15}}{2\pi i\varepsilon_{11}\chi}D_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\sigma|}{\Delta_1(\sigma)}\frac{e^{\sigma(y+h)}e^{-i\sigma x}}{\sqrt{\sigma+i0}\,\bar K_+(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma-k\cos\beta+i0} \tag{7}$$

где

$$D_2=\frac{2\chi\sqrt{k\cos\beta}}{1+\varepsilon_{01}+\chi_1^2}\frac{e^{-ikh\sin\beta}}{\bar K_-(k\cos\beta)\Delta_3^*(k\cos\beta)}, \; \varepsilon_{10}=(\varepsilon_{01})^{-1}=\varepsilon_{11}/\varepsilon_0, \qquad \chi=\chi_1^2/\left(1+\chi_1^2\right) \tag{8}$$

$$\bar K(\sigma)=\bar K_+(\sigma)\cdot\bar K_-(\sigma), \qquad \gamma=\left(\sigma^2-k^2\right)^{1/2} \tag{9}$$

$$\bar K(\sigma)=\frac{2}{1+\varepsilon_{10}\left(1+\chi_1^2\right)}\frac{\Delta_2(\sigma)\Delta_4(\sigma)}{\Delta_1(\sigma)\Delta_3(\sigma)} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(\sigma)=\varepsilon_{01}\left(\gamma-\chi|\sigma|\right), \quad \Delta_2(\sigma)=\Delta_1(\sigma)+\gamma\,\mathrm{th}\left(h|\sigma|\right),\\
&\Delta_3(\sigma)=\left(1+\mathrm{th}^2\left(h|\sigma|\right)\right)\Delta_1(\sigma)+2\gamma\,\mathrm{th}\left(h|\sigma|\right), \quad \Delta_4(\sigma)=\gamma+\Delta_1(\sigma)\,\mathrm{th}\left(h|\sigma|\right)\\
&\Delta_3^*(\sigma)=\left(1-\chi|\sigma|\gamma^{-1}\right)\mathrm{ch}\left(2h|\sigma|\right)+\varepsilon_{10}\,\mathrm{sh}\left(2h|\sigma|\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

$\bar K_+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\mathrm{Im}\sim\,>0$, а $\bar K_-(\sim)$ регулярна и не имеет нулей при $\mathrm{Im}\sim\,<0,\ \sim\,=\pm\,+i²$. При этом, $\bar K_\pm(\sim)\to 1$ при $|\sim|\to\infty$ в своих областях регулярности и

$$\bar K_\pm(\sigma)=\exp\left(\bar R_\pm(\sigma)\right) \;\; \bar R_+(\sigma)=\int_0^{\infty}R(x)e^{i(\sigma+i0)x}dx=\frac{1}{2}\ln\left[\bar K(\sigma)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left[\bar K(t)\right]dt}{t-\sigma}$$

$$\bar R_-(\sigma)=\bar R_+(-\sigma), \qquad R(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\bar K(\sigma)\right]e^{-i\sigma x}d\sigma \tag{12}$$

При этом, функция из (9) $\gamma=\sqrt{\sigma^2-k^2}>0$ при $|\sigma|>k$, и $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, т.е. действительная ось обходит точки ветвления функции $\sqrt{\alpha^2-k^2}$ $(\alpha=\sigma+i\tau)$ $\sigma=-k$ сверху, а $\sigma=k$ – снизу [4].

Следует еще отметить, что дисперсионные функции $\Delta_j(\sigma)$ $\left(j=\overline{1,4}\right)$ из (11) на действительной оси имеют по два корня $\pm\sigma_j^*$, которые расположены в порядке

$$0<k<\sigma_4^*<\sigma_3^*<\sigma_2^*<\sigma_1^*<\infty \tag{13}$$

и других действительных корней не имеют [3,5]. Следовательно, кроме отмеченного выше, предполагается, что действительная ось обходит точки $-\sigma_j^*$ сверху, а точки σ_j^* – снизу, что обеспечивает условие уходящей волны.

Перейдем к исследованию волнового поля упругих перемещений (6) в области $\Omega_2^{(1)}\left(x<0,\ y\le -h\right)$. Для этого переходим на разрезанную комплексную плоскость и преобразуем интеграл (6) по некоторому контуру [1,2], замыкая ее в верхней полуплоскости. Не останавливаясь на подробностях [1], по обычной процедуре контурного интегрирования для упругого перемещения в области $\Omega_2^{(1)}\left(x<0,\ y\le -h\right)$, получим

$$\begin{aligned} w_2(x,y)&=\frac{D_2^*}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{\bar{K}_+(i\tau)}\left[M_{21}(\tau)e^{i\sqrt{k^2+\tau^2}(y+h)}+M_{22}(\tau)e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}(y+h)}\right]e^{-\tau|x|}d\tau+\\ &+\frac{D_2}{2\pi i}\int_0^k \frac{\sqrt{\sigma}}{\bar{K}_+(\sigma)}\left[M_{24}(\sigma)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y+h)}-M_{25}(\sigma)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}(y+h)}\right]\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{\sigma-k\cos\beta+i0}+\\ &+w_{\text{пз}}^{(21)}(x,y)+w_{\text{пов}}^{(21)}(x,y) \end{aligned}\tag{14}$$

$$w_{\text{пз}}^{(21)}(x,y)=-\frac{D_2^*}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\tau}}{\bar{K}_+(i\tau)}M_{23}(\tau)e^{-i\sqrt{k^2+\tau^2}(y+h)}e^{-\tau|x|}d\tau \tag{15}$$

$$w_{\text{пов}}^{(21)}(x,y)=A_{\text{пов}}^{(21)}e^{\gamma_1^*(y+h)}e^{-i\sigma_1^*|x|},\qquad \gamma_1^*=\gamma\left(\sigma_1^*\right)=\sqrt{\sigma_1^{*2}-k^2} \tag{16}$$

$$A_{\text{пов}}^{(21)}=\frac{D_2\sqrt{\sigma_1^*}\left(\sigma_1^{*2}-k^2\right)}{\chi k^2\bar{K}_+\left(\sigma_3^*\right)\left(\sigma_1^*-k\cos\beta\right)},\qquad \Delta_1\left(\sigma_1^*\right)=0 \tag{17}$$

$$M_{21}(\tau)=\frac{\left(i\tau-k\cos\beta\right)^{-1}}{\sqrt{k^2+\tau^2}-\chi\tau},\quad M_{22}(\tau)=\frac{\left(i\tau-k\cos\beta\right)^{-1}}{\sqrt{k^2+\tau^2}+\chi\tau},\quad M_{23}=\frac{2\sqrt{k^2+\tau^2}\left(i\tau-k\cos\beta\right)^{-1}}{k^2+\left(1-\chi^2\right)\tau^2}$$

$$M_{24}=\frac{1}{\chi\sigma-i\sqrt{k^2-\sigma^2}},\qquad M_{25}=\frac{1}{\chi\sigma+i\sqrt{k^2-\sigma^2}} \tag{18}$$

Отметим, что при получении (14) было учтено, что действительная ось обходит точку $\sigma=\sigma_1^*$ снизу, а точку $\sigma=k\cos\beta$ – сверху.

Таким образом, волновое поле в области $\Omega_2^{(1)}\left(x<0,\ y\le -h\right)$ дается формулой (14), где $w_{\text{пов}}^{(21)}(x,y)$ – амплитуда поверхносной волны (вычет подынтегральной функции из (6) в точке $\sigma=\sigma_1^*$), $w_{\text{пз}}^{(21)}(x,y)$ – амплитуда упругих перемещений, обусловленная чисто пьезоэффектом, а интегральные составляющие – амплитуды дифрагированных упругих волн. По формуле (14) с достаточной точностью можно вычислить распределение упругих перемещений в ближней зоне [6].

Для более детального изучения влияния полубесконечного электрода на характер распределения волнового поля в рассматриваемой области пьезоэлектрика, исследуем поведение интегральных слагаемых, входящих в (14) и (15), на дальних зонах, т.е. получим асимптотическое представление волнового поля $w_2(x,y)$ при $r=\sqrt{x^2+(y-h)^2}\to\infty$.

Асимптотические формулы, в обход общепринятого метода перевала, получены на основе подхода, изложенного в [1,2]. Не останавливаясь здесь на подробностях, приведем окончательные выражения этих формул в полярных координатах (r,θ):

а) при $-\pi\le\theta<-\pi+\beta$

$$w_2(r,\theta)=w_{\text{пов}}^{(21)}(r,\theta)+q_{21}(r,\theta)+q_{\text{пз}}^{(21)}(r,\theta)+O\left(r^{-5/2}\ln r\right)\quad\text{при } r\to\infty \tag{19}$$

$$w_{\text{пов}}^{(21)}(r,\theta)=A_{\text{пов}}^{(21)}e^{-\gamma_1^* r|\sin\theta|+ir\sigma_1^*|\cos\theta|} \tag{20}$$

$A_{\text{пов}}^{(21)}$ дается формулой (17)

$$q_{21}(r,\theta)=\frac{D_2}{\sqrt{\pi}}\left[b_{-1}\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{r^{1/2}}-b_1\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{r^{3/2}}\right] \tag{21}$$

$$b_{-1}=\frac{\sqrt{2|\cos\theta|}}{2k\bar{K}_+\left(k|\cos\theta|\right)\left(\chi|\cos\theta|+i|\sin\theta|\right)}\frac{1}{\left(|\cos\theta|-\cos\beta\right)}$$

$$b_1=-\frac{3|\sin\theta|}{4\sqrt{2k}}M_{25}\left(k|\cos\theta|\right)-\frac{3\sqrt{2k}}{4}|\sin2\theta|\left.\frac{dM_{25}}{d\sigma}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|}+k\sqrt{\frac{k}{2}}|\sin^3\theta|\left.\frac{d^2M_{25}}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|} \tag{22}$$

$$q_{\text{пз}}^{(21)}(r,\theta)=\left(\sqrt{2\pi}D_2^*e^{ikr\sin\theta}\Big/2k^2|\cos\theta|^{3/2}\right)r^{-3/2}, \tag{23}$$

б) при $-\pi+\beta\le\theta<-\pi/2$

$$w_2(r,\theta)=A_{21}e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}+w_{\text{пов}}^{(21)}(r,\theta)+q_{21}(r,\theta)+q_{\text{пз}}^{(21)}(r,\theta)+O\left(r^{-5/2}\ln r\right),\quad r\to\infty \tag{24}$$

$$A_{21}=\frac{D_2\sqrt{k\cos\beta}}{k\bar{K}_+\left(k\cos\beta\right)\left(\chi\cos\beta+i\sin\beta\right)} \tag{25}$$

в) по лучу $\theta=-\pi+\beta$

$$w_{-\pi+\beta}(r)=\frac{1}{2}A_{21}e^{ikr}+A_{\text{пов}}^{(21)}e^{-\gamma_1^* r\sin\beta+i\sigma_1^*\cos\beta}+O\left(r^{-1/2}\right),\qquad r\to\infty \tag{26}$$

Аналогичным путем было исследовано распределение волнового поля упругого перемещения в области $\Omega_2^{(2)}(x>0,\ y\le-h)$. Не останавливаясь на этом, приведем лишь формулу, представляющую поведение упругого перемещения по линии $y=-h$ при $x\to+\infty$. Она имеет вид:

$$w_2(x,-h)=A_{\text{пов}}^{(22)}e^{i\sigma_2^*x}+A_{\text{пов}}^{(24)}e^{-i\sigma_4^*x}+\frac{3\sqrt{2}D_2c_0\bar{K}_{(+)}(k)}{2\chi^2k^2(1+\cos\beta)}\left[1-\frac{\varepsilon_{01}}{\operatorname{sh}(2kh)}\right]\frac{e^{i(kx+\pi/4)}}{r^{3/2}}+O\left(x^{-5/2}(1+\ln x)\right) \tag{27}$$

$$A_{\text{пов}}^{(22)}=\frac{i\sqrt{\sigma_2^*}\bar{K}_{(+)}\left(\sigma_2^*\right)}{4\left(\sigma_2^*+k\cos\beta\right)}\frac{c_0D_2\left(\sigma_2^{*2}-k^2\right)\operatorname{sh}\left(2\sigma_2^*h\right)}{\chi\varepsilon_{01}k^2\operatorname{ch}^2\left(\sigma_2^*h\right)+h\left(\sigma_2^{*2}-k^2\right)^{3/2}}$$

$$A_{\text{пов}}^{(24)}=\frac{i\sqrt{\sigma_4^*}\bar{K}_{(+)}\left(\sigma_4^*\right)}{\left(\sigma_4^*+k\cos\beta\right)}\frac{c_0D_2\left(\sigma_4^{*2}-k^2\right)}{\chi\varepsilon_{01}k^2\operatorname{sh}^2\left(\sigma_4^*h\right)+h\left(\sqrt{\sigma_4^{*2}-k^2}-\chi\sigma_4^*\right)\left(\sigma_4^{*2}-k^2\right)}$$

Таким образом, формулами (19)–(26) и (27) определяется поведение волнового поля упругих перемещений в дальних зонах области $\Omega_2\left(|x|<\infty,\ y\le-h\right)$ при различных значениях полярного угла θ. Эти формулы указывают, что полубесконечный электрод существенным образом влияет на качественное распределение волнового поля упругих перемещений. В частности, сопоставляя (26) с соответствующей формулой (3.61) работы [1], показывает, что по лучам $\theta=\pi-\beta$ (верхнее полупространство) и $\theta=-\pi+\beta$ (нижнее полупространство) распространяется объемная волна $\left(Ae^{ikr}\right)$. Так что, существование полубесконечного электрода на границе нижнего полупространства возбуждает объемную волну как при $\theta=-\pi+\beta$, что следовало ожидать; так и при $\theta=\pi-\beta$, что является не столь очевидным фактом. В (19) $q_{\text{пз}}^{(21)}\left(r,\theta\right)$ – волна, распространяющаяся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $\mu/k\sin^{-}$ (или распространяющаяся по направлению Oy со скоростью μ/k) обусловленная присутствием электрода. При этом, на линии $y=-h$ волна представляет собой неволновую часть, распространяющуюся со скоростью света.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50–69.
2. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Новый подход к определению асимптотических формул в задачах дифракции. Механика-2009. //Тр. Международной школы-конференции молодых ученых. 28 сент.-1 окт. 2009. Агавнадзор, Армения. 383 с.
3. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пъезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
4. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294с.
5. Danoyan Z.N., Piliposian G.I. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer. Int. J. of Solids and Structures. 2008. 44. 5829-5847.
6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович,
к.ф.м.н., ведущий н.с. Института механики НАН Армении,
0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24б
E-mail: karo-aga@mechins.sci.am

Григорян Эдуард Хосровович,
д.ф.м.н., Ереванский Государственный Университет, факультет математики и механики

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТРИНГЕРОВ С БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Агаян К.Л., Члингарян Г.С.

Упругая бесконечная пластина, ослабленная полубесконечной трещиной, усилена конечными стрингерами, расположенными перпендикулярно к линии трещины. В рамках обобщенного плоского напряженного состояния пластины исследуется взаимовлияние этих двух типов концентраторов напряжений. При различных расположениях стрингеров относительно конца трещины и при различных значениях физических и геометрических параметров задачи исследуется изменение коэффициента интенсивности на конце трещины.

Рассматривается контактная задача о передаче нагрузки к бесконечной пластине, ослабленной полубесконечной трещиной и подкрепленной упругими стрингерами конечной длины, расположенными перпендикулярно к линии трещины.

В предположении одноосного напряженного состояния стрингеров исследуется взаимовлияние двух типов концентраторов напряжений (трещина–стрингер). Рассматривается случай, когда стрингер проходит через линию трещины. Выясняются закономерности изменения основных механических характеристик – тангенциальных контактных напряжений под стрингером, осевых усилий в нем, коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) на конце трещины.

Лист, усиленный ребрами жесткости, является очень распространенным конструкционным элементом. Поэтому контактные задачи о передаче нагрузки от стрингеров (иногда называют накладкой или ребром жесткости) к более массивным телам в виде бесконечной пластины, полосы и прямоугольной области с трещинами или без них, рассматривались многими авторами. Из этих работ отметим [1–5], в которых исследовано влияние стрингеров на поле напряжений в пластинах, ослабленных трещинами.

Рассмотрим бесконечную пластину толщиной h, ослабленную полубесконечной трещиной, которая расположена вдоль положительной оси Oy в декартовой системе координат Oxy. По конечным отрезкам $[-b,a]$, $[a,b]$, $0<a<b$ линии $y=\eta$ пластина подкреплена упругими стрингерами (накладками) прямоугольного поперечного сечения с малой площадью F_s. К берегам трещины в точках $+0+ic$ и $-0+ic$ приложены нормальные сосредоточенные силы P_0. Кроме того, стрингеры на своих концах нагружены сосредоточенными силами P_a, P_b (рис. 1). При известных предположениях относительно стрингеров, сводящихся, в основном, к тому, что они находятся в одноосном напряженном состоянии [6–8], требуется определить законы распределения тангенциальных контактных напряжений под накладками, а также коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений на конце трещины.

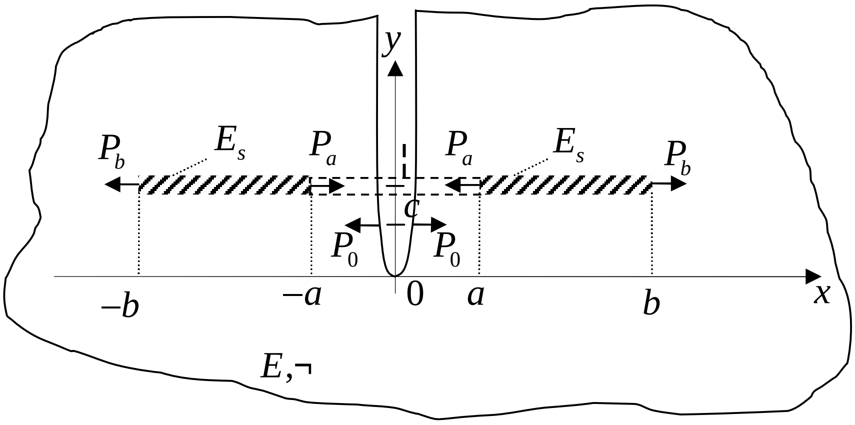


Рис. 1

Для определения функции влияния поставленной контактной задачи, предварительно рассмотрим соответствующую плоскую задачу, т.е. предположим, что стрингеры отсутствуют, а в точках $\zeta=\pm\xi+i\eta$ комплексной плоскости $z=x+iy$ приложены сосредоточенные растягивающие силы P, направленные по оси Ox. Предположив, что пластина находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, определим горизонтальное перемещение точек пластины на линии $y=\eta$, обозначив ее через $u(x,\eta,\xi)$.

Комплексные потенциалы этой задачи выражаются формулами [9]:

$$\Phi(z,\zeta)=Q\left[\left(z+\overline{\zeta}\right)^{-1}-\left(z-\zeta\right)^{-1}\right]+\Phi_0(z,\zeta) \tag{1}$$

$$\Psi(z,\zeta)=\chi Q\left[\left(z-\zeta\right)^{-1}-\left(z+\overline{\zeta}\right)^{-1}\right]-Q\left[\overline{\zeta}\left(z-\zeta\right)^{-2}+\zeta\left(z+\overline{\zeta}\right)^{-2}\right]+\Psi_0(z,\zeta) \tag{2}$$

$$Q=P/\left(2\pi\left(a+\chi\right)\right),\ \chi=\left(3-\nu\right)/\left(1+\nu\right) \tag{3}$$

где ν – коэффициент Пуассона материала пластины, $\Phi_0(z,\zeta)$ и $\Psi_0(z,\zeta)$ – голоморфные функции в комплексной плоскости z, разрезанной вдоль полубесконечной трещины ($\Phi_0,\Psi_0\sim 0$ при $z\to\infty$)

Удовлетворяя граничным условиям на берегах трещины, для неизвестных $\Phi_0(z,\zeta)$ и $\Psi_0(z,\zeta)$ получим:

$$\Phi_0(z,\zeta)=P_0\left(\sqrt{ic}\right)^{+}\left(2\pi\sqrt{z}\left(z-ic\right)\right)^{-1}+F(z,\zeta)-F\left(z,-\overline{\zeta}\right) \tag{4}$$

$$F(z,\zeta)=\frac{Q}{\sqrt{z}}\left(\frac{\chi+1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{\zeta}}+\frac{\zeta+\overline{\zeta}}{4}\frac{1}{\sqrt{\zeta}\left(\sqrt{z}+\sqrt{\zeta}\right)^{2}}\right),\quad \Psi_0(z,\zeta)=z\Phi_0'(z,\zeta) \tag{5}$$

где $\left(\sqrt{iy}\right)^{+}$ – значение функции $\sqrt{z}$ на левой стороне разреза, т.е. $\left(\sqrt{iy}\right)^{+}=\sqrt{y}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Подставляя (4) и (5) в (1), (2), получим окончательные выражения для $\Phi(z,\zeta)$ и $\Psi(z,\zeta)$, дающих решение задачи.

В частности, для $\partial u(x,\eta,\xi)/\partial x$ получим

$$2\mu\,\partial u(x,s,\eta)/\partial x=Q\left(2\chi\left(s-x\right)^{-1}+R(x,s,\eta)\right)+P_0\left(\sqrt{2}\pi\right)^{-1}f_0(x,\eta,c)$$

$$R(x,s,\eta)=2\chi\left(s+x\right)^{-1}+\left(\chi-\sin^2\alpha\right)A_0+\sin\alpha\cos\alpha B_0-2xC_0$$

$$A_0=\frac{\chi+1}{2}\left(\frac{(s+x)\cos(\varphi_-/2)}{r^2(1+\rho)}-\frac{1}{s+x}\left(1-\rho\sin\frac{\varphi_+}{2}\right)\right)+$$

$$+\frac{s}{2}\left(\frac{(s+x)^2\cos(\varphi_-/2)}{r^3\rho(1+\rho)^2\left(1+\rho^2\right)^2}-\frac{2+\rho+\rho^{-1}}{(s+x)^2}\sin\frac{\varphi_+}{2}\right)-\frac{\chi+1+2s}{(s-x)^2}\sin^2\frac{\varphi_-}{4}$$

$$B_0=\left(\frac{s(s-x)}{r^2\rho\left(1+\rho^2\right)}-(\chi+1)\rho\right)\frac{\cos(\varphi_+/2)}{2(s+x)}+\left(\frac{s(s+x)}{r^2\rho\left(1+\rho^2\right)}-(\chi+1)\rho\right)\frac{\sin(\varphi_-/2)}{2(s-x)}$$

$$C_0=\frac{\chi+1}{4}\left(\left(1+2\rho\sin(\varphi_-/2)-\rho^2\cos\varphi_+\right)\frac{1}{(s+x)^2}-\frac{(s+x)^2}{r^3(1+\rho)^2\left(1+\rho^2\right)^2}-\right.$$

$$\left.-4\rho\left(1-2\rho\cos^2(\varphi_-/2)\frac{\sin^2(\varphi_-/4)}{(s-x)^2}\right)\right)-\frac{s}{2}\left(\frac{(s+x)^3\left(1+2\rho\sin(\varphi_-/2)\right)}{r^6\rho(1+\rho)^2\left(1+\rho^2\right)^2}-\right.$$

$$-\frac{2(s+x)(1+2\cos(\varphi_-/2))}{r^2(1+\rho)}\frac{\sin^2(\varphi_-/4)}{(s-x)^2}-\frac{8\sin^4(\varphi_-/4)}{(s-x)^2}\Bigg) \tag{6}$$

$$f_0(x,\eta,c)=(\sin^2\alpha-\chi)A_1-\sin\alpha\cos\alpha B_1-2xC_1, \tag{7}$$

$$A_1=\sqrt{c}\left(x\cos\beta_-+(\eta-c)\cos\beta_+\right)/\sqrt{r}\rho_c^2,\ B_1=\sqrt{c}\left(x\cos\beta_+-(\eta-c)\cos\beta_-\right)/\sqrt{r}\rho_c^2,$$

$$C_1=\sqrt{c}\left(\rho_c^2\cos\beta_-+2x(\eta-c)\cos\beta_+\right)/\sqrt{r}\rho_c^4;\ \beta_\pm=\alpha/2\pm\pi/4,\ \ \rho_c^2=x^2+(\eta-c)^2 \tag{8}$$

$$r=\sqrt{x^2+\eta^2},\ r_0=\sqrt{s^2+\eta^2},\ \alpha=\arctan(\eta/x),\ \alpha_0=\arctan(\eta/s),\ \varphi_\pm=\alpha\pm\alpha_0, \tag{9}$$

Обратимся теперь к поставленной контактной задаче. Обозначим через $\tau(x,\eta)\equiv\tau(x),\ (\tau(x)=-\tau(-x))$ неизвестные контактные напряжения под накладками. Не останавливаясь на подробностях – удовлетворение условию контакта между стрингером и пластиной, для определения неизвестных контактных напряжений получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{s-x}+R_1(s,x)\right]\tau_1(s)\,ds=-\frac{P_0h(\chi+1)}{\sqrt{2}\chi}f_1(x)+\lambda T_a,\ \ |x|<1, \tag{10}$$

при граничном условии:

$$\int_{-1}^{1}\tau_1(s)\,ds=\frac{P_b-P_a}{\alpha_2} \tag{11}$$

$$R_1(s,x)=\alpha_2R(\alpha_2x+\alpha_1,\alpha_2s+\alpha_1,\eta)-\lambda H(x-s)$$

$$f_1(x)=(1+\chi)\left(\sqrt{2}\chi\right)^{-1}b\,f_0(\alpha_2x+\alpha_1,\eta,c),\ \ \lambda=2\pi\alpha_2\mu h(1+\chi)/(\chi E_sF_s),$$

$$\alpha_1=(b+a)/2,\quad \alpha_2=(b-a)/2,\quad \tau_1(s)=\alpha_2\,\tau(\alpha_2s+\alpha_1) \tag{12}$$

Имея решение интегрального уравнения (10) при условии (11), коэффициент интенстивности разрывающего напряжения $\sigma_x(0,y)$ определяется следующем образом:

$$K_1=\int_{-1}^{1}K_{11}(s)\tau_1(s)\,ds+P_0\sqrt{\frac{2}{\pi c}} \tag{13}$$

$$K_{1P}(s)=\frac{\sqrt{2}P}{\sqrt{\pi}(1+\chi)\left((\alpha_1+\alpha_2s)^2+\eta^2\right)^{1/4}}\left(\chi+1+\frac{2(\alpha_1+\alpha_2s)^2\eta}{\left((\alpha_1+\alpha_2s)^2+\eta^2\right)^{3/2}}\right)\times \tag{14}$$

$$\times\cos\left(2^{-1}\arctan\left(\eta/(\alpha_1+\alpha_2s)\right)-\pi/4\right)$$

Обращаясь теперь к интегральному уравнению (10), заметим следующее:

а) при $a>0,\ \eta\neq0,\ \ \tau(x)\sim\left(1-x^2\right)^{-1/2}$ и решение уравнения (10) можно построить методом ортогональных многочленов Чебышева [8];

б) при $a=0,\ \eta>0$, т.е. когда конец стрингера выходит на край трещины, ядро интегрального уравнения (10) имеет неподвижную особенность. Тогда $\tau(x)\sim x^{-\delta}(b-x)^{-1/2}$, где $\delta(0<\delta<1)$– корень известного из [6] трансцендентного уравнения. При этом, ядро $R_1(s,x)$ представляется в виде:

$$R_1(s,x)=-\left(\chi^2+1\right)/\left(2\chi(s+x)\right)-2s(x-s)/\left(\chi(x+s)^3\right)+R_2(s,x),$$

где $R_2(s,x)$регулярна при $x=s=0$;

в) при $a=0,\ \eta=0$, ядро $R_1(s,x)$ имеет вид:

$$R_1(s,x)=\frac{\chi^2-1}{4\chi}\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{s}+\sqrt{x}\right)}+\frac{2\chi+1}{4\chi}\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{s}+\sqrt{x}\right)^2}+$$

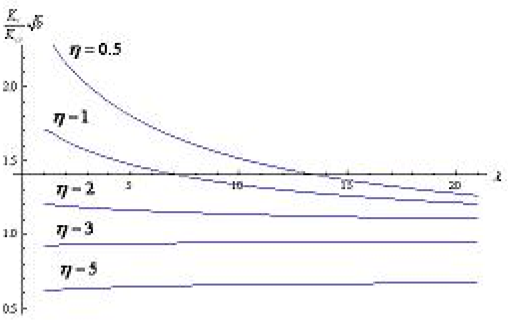
$$+\frac{1}{2\chi}\frac{\sqrt{s}}{\left(\sqrt{s}+\sqrt{x}\right)^3}-\frac{\chi^2-5\chi-2}{4\chi}\frac{1}{s+x}-\frac{4\chi-1}{2\chi}\frac{s}{(s+x)^2}-\frac{2s^2}{\chi(s+x)^3}$$

Следует отметить, что в тех случаях, когда стрингер проходит через трещину $(a=0)$ и следовательно осевое усилие $T_a=T_0$ неизвестно, то к (10) и (11) следует присоеденить условие $u(0,0,\eta)=0$.

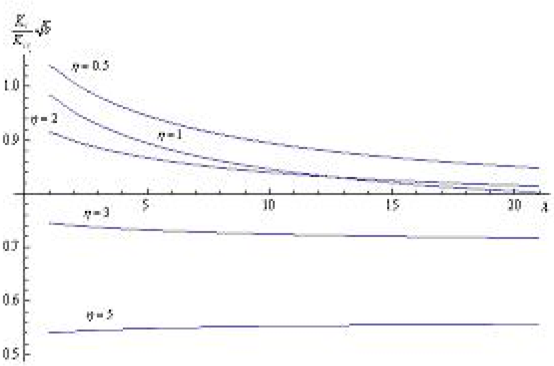
Также отметим, что во всех указанных выше случаях решение уравнение (10) построенно методом дискретных особенностей [10].

Численная реализация задачи показала, что влияние стрингеров на изменение КИН существенным образом зависит от расположения стрингеров относительно конца трещины. Если в случае прохождения стрингеров через трещины КИН всегда оказывается меньше КИН соответствующей задачи без стрингера, то в других случаях он может быть как меньше, так и больше указанного КИН.

На рис. 2, 3 приводятся графики некоторых результатов из численного расчета задачи. На рис. 2.а, 2.б показан ход изменения отношения K_1 (КИН со стрингером) на K_{1P} (КИН без стрингера) в зависимости от λ и η. На рис 3.а, 3.б показан ход изменения K_1/K_{1P} и осевого усилия T_0

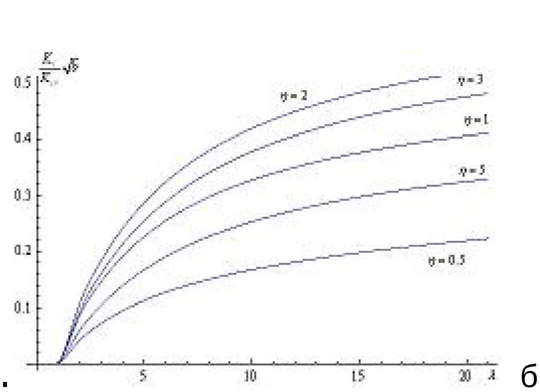


а.

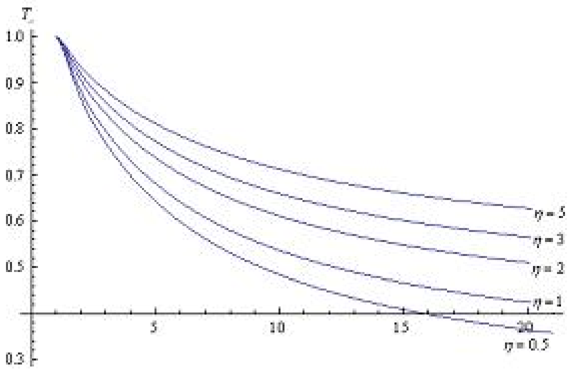


б.

Рис. 2.



а.



б.

Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грейф Р., Сендерс мл. Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. //Прикл. мех. Тр. Америк. о–ва инж.-мех.. Сер. E. 1965. Т.32. N1.
2. Черепанов Г.П., Мурсалимов В.М. О воздействии ребер жесткости на развитие трещины. //Изв. АН Аз. ССР. Сер. физ-тех. и мат. наук. 1969. N1.
3. Морозова Е.А., Партон В.З. О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещин. //ПМТФ. 1961. N5.
4. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1976.Т.29. N4. С. 3-15.
5. Мхитарян С.М., Агаян К.Л. Об одной периодической контактной задаче для упругой полосы, расслабленной трещинами и усиленной упругими накладками. //Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т.31. N3. С. 3–17.
6. Муки Р., Стенгерг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине.// Прикл. мех. Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер.E. 1968. Т.35. N4.
7. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.//ПММ. 1968. Т.32. N4.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
9. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М.: Наука, 1966.
10. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. No3. С.12-19.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – к.ф.-м.н., ведущий н.с. Института механики НАН Армении
0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна, 24^{б}
E-mail: karo-aga@mechins.sci.am
Члингарян Гурген Суренович – к.ф.-м.н., Институт механики НАН Армении
E-mail: chlingarian.g@gmail.com

МИНИМИЗАЦИЯ РАСХОДА ТОПЛИВА ПРИ ПЕРЕХОДЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТАМИ

Адамян В.Г., Манандян Л.Т., Адамян Л.В.

Исследуются геометрические закономерности двухимпульсных котангенциальных переходов между компланарными эллиптической и гиперболической орбитами произвольного взаимного расположения. Разработанный алгоритм позволяет воспроизвести движение космического аппарата и получить точное теоретическое решение задачи оптимизации перелета между заданными орбитами по расходу топлива.

Созданная в [1] геометрическая теория гравитации дала эффективные методы исследования закономерностей в движениях космического аппарата (КА) при котангенциальных переходах и позволила проникнуть в их сущность. Эта теория позволила получить единый способ построения всех котангенциальных переходов, являющйся совершенно естественным и не нуждающийся в привлечении методов вариационного исчисления и математического анализа. В работе [2] авторы впервые дали строгое решение задачи оптимизации движения КА по расходу топлива при переходе между компланарными эллиптическими орбитами. В работе [3] рассмотрена аналогичная задача при переходе КА между компланарными эллиптической и параболической орбитами.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма построения траектории оптимального перехода между компланарными эллиптической и гиперболической орбитами.

Пусть заданы эллиптическая и гиперболическая орбиты вокруг силового центра F_1 (рис.1). Эллиптичесчская орбита задана величинами большой полуоси a_1 и линейного эксцентриситета c_1, а гиперболическая орбита – действительной полуоси a_2 и линейного эксцентриситета c_2. Точка O_1– центр эллиптической орбиты, а точка F_{21}– ее второй фокус. Точка O_2 – центр гиперболической орбиты, а точка F_{22}– ее второй фокус. Известен также угол ω между фокальными осями заданных орбит. Центр центральной кривой – середина O_3 отрезка $O_1 O_2$ [2]. Проведем окружности с параметрами

$$\left(O_1, a_1\right), \left(F_{21,} 2a_1\right), \left(O_2, a_2\right), \left(F_{22}, 2a_2\right), \left(O_3, \left(a_2 + a_1\right)/2\right), \left(O_1, a_1 + a_2\right).$$

Рассмотрим котангенциальный переход, когда переходная эллиптическая орбита **3** касается в точке M_1 исходной эллиптической орбиты **1**, а в точке M_2 – конечной гиперболической орбиты **2**. В работе [1] показано, что при котангенциальном переходе эксцентр **4** орбиты перелета соприкасается с эксцентрами **5** и **6** заданных эллиптической и гиперболической орбит в точках S_1 и S_2 соответственно. Дальнейшие построения начинаем с выбора точки S_1 на начальном эксцентре **5**. Угол ϕ поворота радиуса O_1S_1 начального эксцентра отсчитывается от прямой, паралленой прямой F_1O_2 и проходящей через его центр O_1. Далее определяем точку D_1 пересечения прямой F_1S_1 с окружностью $\left(F_{21,} 2a_1\right)$. Для построения точки начала перехода M_1 проведем прямую D_1F_{21} и далее через точку S_1 – вторую прямую, перпендикулярную к прямой F_1D_1. Эта вторая прямая, пересекаясь с прямой $F_{21}D_1$, дает искомую точку M_1 на начальной орбите.

Перейдем к определению положения центра O орбиты перелета. Для этого построим сначала точку D_3 пересечения прямой O_1S_1 с окружностью $\left(O_1, a_1 + a_2\right)$. Проведем прямую D_3O_2, и через точку K_3 ее пересечения с окружностью $(O_3, (a_1 + a_2)/2)$– вторую прямую, перпендикулярную к прямой D_3O_2. Эта вторая прямая, пересекаясь с прямой O_1D_3, дает искомый центр O эксцентра 4 орбиты перелета 3 и ее радиус $a = OS_1$. Линии центров O_2O, пересекаясь с эксцентром 6 конечной орбиты, определяет точку S_2 его соприкосновения с эксцентром 4 орбиты перелета.

Точка M_2 соприкосновения орбиты перелета с конечной орбитой определяется следующим образом. Сначала проведем прямую F_1S_2, определим точку D_2 ее пересечения с окружностью $\left(F_{22}, 2a_2\right)$ и соединим эту точку прямой линией со вторым фокусом F_{22} конечной орбиты 2. Через точку S_2 проведем прямую, перпендикулярную к прямой F_1D_2, которая пересекаясь с прямой $F_{22}D_2$, определит искомую точку M_2. Второй фокус F_2 орбиты перелета совпадает с точкой пересечения прямых $F_{22}D_2$ и F_1O.

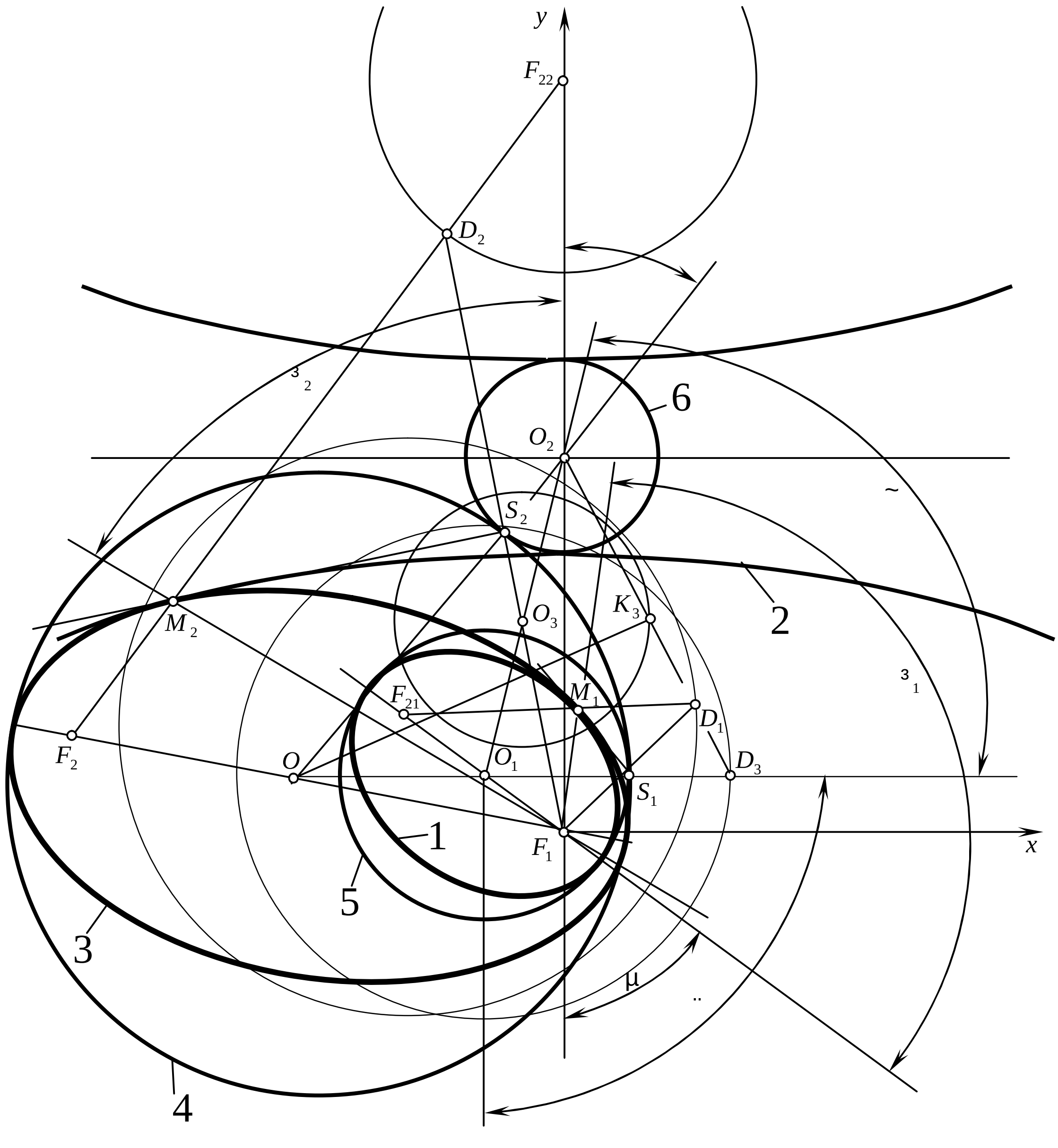


Рис.1

Для того чтобы решить задачу аналитическим путем, введем прямоугольную систему координат с началом в притягивающем центре F_1 и осью F_1y, проходящей через второй фокус F_{22} конечной орбиты. Определим координаты точки D_3

$X_{D_3} = X_{O_1} + O_1D_3 \sin\varphi$, $Y_{D_3} = Y_{O_1} - O_1D_3 \cos\varphi$.

При учете равенств , $X_{O_1} = -c_1 \sin\omega$, $Y_{O_1} = c_1 \cos\omega$ $O_1D_3 = a_2 + a_1$ после преобразований получим $X_{D3} = (a_1 + a_2)\sin\varphi - c_1\sin\omega$, $Y_{D_3} = c_1\cos\omega - (a_1 + a_2)\cos\varphi$. (1)

Расстояние между центрами O_1 и O_2 определяется из треугольника $F_1O_1O_2$ по теореме косинусов

$$s = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\omega}\,. \qquad (2)$$

Расстояние между точками $O_2(0, c_2)$ и D_3 определяется по теореме Пифагора $O_2D_3 = \sqrt{X_{D_3}^2 + (c_2 - Y_{D_3})^2}$, откуда при учете равенств (1) и (2) после преобразований получим

$$O_2D_3 = \sqrt{\left(a_1 + a_2\right)^2 + s^2 + \left(a_1 + a_2\right)\xi}; \quad \xi = 2\left(c_2\cos\varphi - c_1\cos\left(\varphi - \omega\right)\right). \qquad (3)$$

Из треугольника $O_1O_2D_3$ со сторонами $O_1O_2 = s$, $O_1D_3 = a_1 + a_2$ и углом α между ними по теореме косинусов находим другое выражение для значения длины отрезка O_2D_3, отличающиеся от выражения (3) заменой величины ξ на $2\,s \cdot \cos\alpha$.

Приравнивая эти выражения, получим

$$\cos\alpha = \xi/2s\,. \qquad (4)$$

Из треугольника O_1O_2O со сторонами $O_1O_2 = s$, $O_1O = OD_3 - O_1D_3 = OO_2 - (a_1 + a_2)$ и углом $\pi - \alpha$ между ними, по теореме косинусов и при учете равенств (2) и (4) находим длину отрезка OO_2

$$OO_2 = \left[\left(a_1 + a_2\right)^2 + s^2 - \left(a_1 + a_2\right)\xi\right]/\,\eta, \quad \eta = 2\left(a_1 + a_2\right) - \xi\,. \qquad (5)$$

Учитывая это равенство, определим величину радиуса эксцентра орбиты перелета

$$a = OS_2 = OO_2 - a_2 = \left(a_1^2 - a_2^2 + s^2 - a_1\xi\right)/\,\eta\,, \qquad (6)$$

а также расстояние между центрами O_1 и O начальной и переходной орбит

$$O_1O = OS_1 - O_1S_1 = a - a_1 = \varsigma/\eta, \quad \varsigma = s^2 - \left(a_1 + a_2\right)^2. \qquad (7)$$

и координаты точки O – центра орбиты перелета

$$X_0 = X_{01} - O_1O\sin\varphi = -c_1\sin\omega - \varsigma\sin\varphi/\eta\,, \quad Y_0 = Y_{01} + O_1O\cos\varphi = c_1\cos\omega + \varsigma\cos\varphi/\eta\,. \qquad (8)$$

Из треугольника F_1O_1O со сторонами $F_1O_1 = c_{1.}$, $F_1O = c$ и углом $F_1O_1O = \pi - \angle F_1O_1S_1 = \pi - \left(\varphi - \omega\right)$ по теореме косинусов находим квадрат фокального расстояния орбиты перелета

$$c^2 = c_1^2 + O_1O^2 + 2c_1O_1O\cos\left(\varphi - \omega\right), \qquad (9)$$

откуда при учете равенства (7) находим

$$c = \sqrt{c_1^2 + \varsigma^2/\eta^2 + 2c\varsigma\cos\left(\varphi - \omega\right)/\eta}\,. \qquad (10)$$

Определим положение линий апсид перелетной траектории. Так как точка О – центр орбиты перелета, а точка F_1 – её фокус, то угол наклона линии апсид траектории перелета к оси x определяется формулой $\mathrm{tg}\gamma = Y_0/X_0$, откуда при учете равенств (8) после преобразований получим

$$\mathrm{tg}\gamma = -\left(c_1\eta\cos\omega + \varsigma\cos\varphi\right)/\left(c_1\eta\sin\omega + \varsigma\sin\varphi\right). \qquad (11)$$

Из треугольника F_1OO_2 со сторонами $F_1O = c$, $F_1O_2 = c_2$ и углом $F_1O_2O = \beta$ по теореме косинусов находим

$$c^2 = OO_2^2 + c_2^2 - 2OO_2c_2\cos\beta \qquad (12)$$

Приравнивая правые части равенств (9) и (12), получим

$$\cos\beta = \frac{2\left(a_1 + a_2\right)\left(c_2^2 - c_1^2 + s^2\right) + 2c_1\left(2\left(a_1 + a_2\right)^2 - s^2\right)\cos\left(\varphi - \omega\right) - \left(c_2^2 - c_1^2 + \left(a_1 + a_2\right)^2\right)\xi}{2c_2\left(\left(a_1 + a_2\right)^2 + s^2 - \left(a_1 + a_2\right)\xi\right)}\,. \qquad (13)$$

Для дальнейших исследований необходимо определить величины радиус-векторов r_1 и r_2 точек касания M_1 и M_2 соприкосновения орбиты перелета соответственно с начальной и конечной орбитами. Из треугольника $F_1F_{21}M_1$ со сторонами $F_1F_{21} = 2c_1$, $F_1M_1 = r_1$, $F_{21}M_1 = 2a_1 - r_1$ и углом $F_1F_2M_1 = \varphi - \omega$, по теореме косинусов находим

$$r_1 = \frac{a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1\cos(\varphi-\omega)}{a_1 - c_1\cos(\varphi-\omega)}. \tag{14}$$

Аналогично из треугольника $F_1F_{22}M_2$ со сторонами $F_1F_{22} = 2c_2$, $F_1M_2 = r_2$, $F_{22}M_2 = 2a_2 + r_2$ и углом $F_1F_{22}M_2 =$ получим

$$r_2 = \frac{a_2^2 + c_2^2 - 2a_2c_2\cos\beta}{c_2\cos\beta - a_2}. \tag{15}$$

Теперь определим истинные аномалии ϑ_1 и ϑ_2 переходных точек M_1 и M_2, отсчитываемые от соответствующих перицентров заданных орбит. Величины радиус-векторов r_1 и r_2 точек M_1 и M_2 будут [4]

$$r_1 = \frac{a_1^2 - c_1^2}{a_1 + c_1\cos\vartheta_1}, \quad r_2 = \frac{c_2^2 - a_2^2}{a_2 + c_2\cos\vartheta_2}. \tag{16}$$

Из равенств (14) – (16), получим

$$\cos\vartheta_1 = \frac{\left(a_1^2 + c_1^2\right)\cos\left(\varphi-\omega\right) - 2a_1c_1}{a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1\cos\left(\varphi-\omega\right)}, \ \cos\vartheta_2 = \frac{\left(a_2^2 + c_2^2\right)\cos\beta - 2a_2c_2}{a_2^2 + c_2^2 - 2a_2c_2\cos\beta}. \tag{17}$$

Величины полуосей ΔV_Σ и ϕ определяются равенствами [4]

$$a_1 = \frac{g_1r_1^2}{2g_1r_1 - V_1^2}, \ a_2 = \frac{g_2r_2^2}{V_2^2 - 2g_2r_2}, \ a = \frac{g_1r_1^2}{2g_1r_1 - V_{11}^2} = \frac{g_2r_2^2}{2g_2r_2 - V_{21}^2}, \tag{18}$$

где g_1 и g_2 – величины ньютоновские ускорения, соответственно на растояниях r_1 и r_2.

Отсюда после преобразований определим модули скоростей V_1, V_2

V_{11} и V_{21} КА при движении по заданным орбитам и орбите перелета:

$$V_1 = \sqrt{\frac{g_1r_1\left(2a_1 - r_1\right)}{a_1}}, \quad V_{11} = \sqrt{\frac{g_1r_1\left(2a - r_1\right)}{a}}, \tag{19}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{g_2r_2\left(2a_2 + r_2\right)}{a_2}}, \quad V_{21} = \sqrt{\frac{g_2r_2\left(2a - r_2\right)}{a}}. \tag{20}$$

Величину приращения скорости ΔV можно определить при учете равенств (19) как разность скоростей V_{11} и V_1 КА в точке M_1, необходимых для движения по орбите перелета и начальной орбите:

$$\Delta V_1 = \sqrt{g_1r_1}\left(\sqrt{\frac{2a - r_1}{a}} - \sqrt{\frac{2a_1 - r_1}{a_1}}\right). \tag{21}$$

Величину приращения скорости ΔV_2 можно определить при учете (19) и условия $g_2r_2 = g_1r_1^2 / g_2$ как разность скоростей V_2 и V_{21} КА в точке M_2, необходимых для движения по конечной и переходной орбитам:

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{g_1r_1^2}{r_2}}\left(\sqrt{\frac{2a_2 + r_2}{a_2}} - \sqrt{\frac{2a - r_2}{a}}\right). \tag{22}$$

Суммарное приращение скорости для выполнения маневра определяется равенством

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2 \tag{23}$$

Так как задача минимизации расхода топлива эквивалентна минимизации суммарного приращения скорости (23), то для нахождения оптимальной орбиты перелета между заданными эллиптической и гиперболической орбитами необходимо найти такую точку M_1, на начальной орбите, при которой для соответствующего котангенциального перехода требуется минимальное суммарное приращение скорости КА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамян В. Г. Геометрическая теория межорбитальных котангенциальных переходов. Ереван: Авторское издание, 2007. 152с.
2. Адамян В. Г., Адамян Л. В., Заимцян Г. М., Манандян Л. Т. Двухимпульсные котангенциальные переходы между компланарными эллиптическими орбитами // Прикладная математика и механика. 2009. №6. С. 921-933.
3. Адамян В. Г., Манандян Л. Т. Адамян Л. В. Минимизация расхода топлива космического аппарата между компланарными эллиптической и параболической орбитами // Прикладная математика и механика.-М. /Принята в печать/.
4. Адамян В. Г. Альмагест -2. Геометрическая теория гравитации. Ереван: ГАСПРИНТ, 2004. 224 с.

Сведения об авторах:

Адамян Ваник Григорьевич
Д.т.н., профессор ГИУА Гюмрийского филиала

Кафедра прикладной механики
Тел: 4-94-79 (раб.), 3-84-94 (дом.)
E-mail: vgadamyan@mail.ru

Манандян Левон Туманович
К.т.н., доцент ГИУА Гюмрийского филиала
Кафедра прикладной механики
Тел: 5-93-94 (раб.), 5-95-23 (дом.)
E-mail: roman@gyumri.am

Адамян Лилит Ваниковна
Лаборант ГИУА Гюмрийского филиала,
Кафедра прикладной механики
Тел: 4-94-79 (раб.), 3-84-94 (дом.)
E-mail: vgadamyan@mail.ru

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОКРЫТИЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Айзикович С.М., Васильев А.С., Кренёв Л.И.

Излагается эффективный метод решения осесимметричных статических контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородных (функционально-градиентных**)** сред, позволяющий получить приближенное решение задачи в аналитическом виде. Предполагаются, что упругие свойства покрытия изменяются произвольно по его толщине.

В численном эксперименте анализируется напряженно-деформированное состояние покрытия, упругие свойства которого являются непрерывной гладкой немонотонной функцией, первая производная которой изменяет свой знак конечное число раз по глубине покрытия.

1. Постановка задачи о кручении

Недеформируемый круглый штамп с плоским основанием жестко сцеплен с верхней гранью Г упругого неоднородного полупространства Ω. С полупространством связана цилиндрическая система координат *r, φ, z*. Штамп контактирует с полупространством по поверхности $z=0$, $r \le a$. К штампу приложен крутящий момент *M*, ось которого совпадает с осью *z* (рис.1).

Под действием этого момента штамп повернется относительно оси *z* на угол $\pounds$, вызвав деформацию кручения Ω. Модуль сдвига *G* полупространства с глубиной изменяется по закону:

$$G(z)=\begin{cases} G_0(z)=G^S\cdot \ddot{}_i(z), -H\le z\le 0\\ G_1(z)\equiv G^S, \qquad -\infty\le z<-H \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $G^S \in R$.

Вне штампа Г не нагружена. При сделанных предположениях граничные условия задачи имеют вид:

$$z=0,\ \pm_z = {}^2{}_{rz} = 0,\ \begin{cases} {}^2{}_{z\cdot\cdot} = 0, & r>a\\ u_{\cdot\cdot} = r\pounds, & r\le a \end{cases}$$

При $r\to\infty$ и $z\to-\infty$ напряжения исчезают. Считаем, что перемещения и напряжения сопрягаются на границе изменения закона неоднородности:

$$z=-H,\ {}^2{}^{(1)}_{z\cdot\cdot} = {}^2{}^{(2)}_{z\cdot\cdot},\ u^{(1)}_{\cdot\cdot} = u^{(2)}_{\cdot\cdot}.$$

Здесь индекс $^{(1)}$ соответствует покрытию, а индекс $^{(2)}$ соответствует подложке – однородному полупространству.

Требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений под штампом

$${}^2{}_{z\cdot\cdot}\Big|_{z=0} = {}^2{}_a(r),\quad r\le a$$

и связь между приложенным моментом и углом поворота штампа.

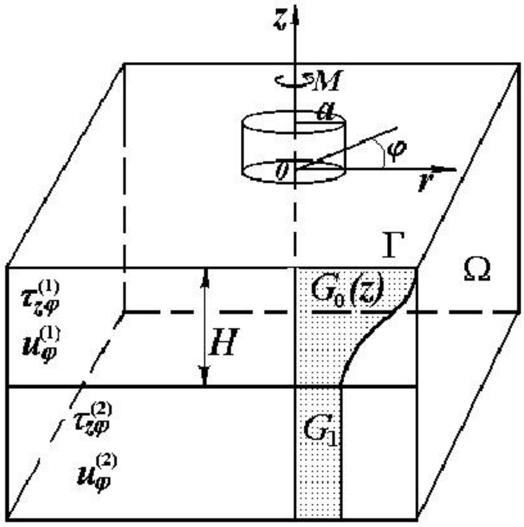


Рис. 1. Постановка задачи

Задача сводится к решению интегрального уравнения:

$$\int_0^1 \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_1\left(\frac{ur}{\lambda}\right) J_1\left(\frac{u\rho}{\lambda}\right) du = \pi G_0(0) r \varepsilon, \; r \le 1$$

Здесь $\tau(\rho)= \tau_a(\rho a)$; λ=H/a – геометрический параметр задачи, и $L\ (u)$ — трансформанта ядра интегрального уравнения.

Сведение задачи к решению интегрального уравнения, приближение трансформанты ядра выражениями вида (1.2) и построение асимптотически точного решения задачи можно найти в работах [1, 2, 3]. Различные постановки задачи о кручении рассматривались в [4, 5].

$$L_\Pi^N(u) = \prod_{i=1}^{N} \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}\,. \tag{1.2}$$

2. Неоднородные покрытия, градиент изменения упругих свойств которых меняет знак 1, 2, 4 и более раз

Предполагаем, что модуль сдвига в неоднородном покрытии изменяется в соответствии с (1.1), где $\varphi_i(z)$ изменяется по одному из следующих законов:

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi_0 + 1}{2} - \frac{\varphi_0 - 1}{2}\cos\left(2\pi k \cdot \frac{z}{H}\right); \tag{2.1}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{\varphi_0 + 1}{2\varphi_0} + \frac{\varphi_0 - 1}{2\varphi_0}\cos\left(2\pi k \cdot \frac{z}{H}\right). \tag{2.2}$$

Здесь φ_0>1 – показатель неоднородности, характеризующий отношение модуля сдвига на поверхности к модулю сдвига подложки. Далее ограничимся случаем φ_0=3,5**.**

Законы неоднородности (2.1), (2.2) описывают среду, в которой модуль сдвига изменяется по синусоиде. Параметр k, фигурирующий в законах, задает количество волн синусоиды и соответствует числу перемен знака градиента изменения упругих свойств среды.

Графики изменения модуля сдвига по глубине для законов (2.1) и (2.2) при k=1 изображены на рис.2а.

На рис.2б изображены трансформанты ядра для законов (2.1), (2.2) в случае k=1, 2, 4. Кривые 1, 2, 3 соответствуют закону (2.1) случаям k=1, 2, 4 соответственно, а кривые 4, 5, 6 – закону (2.2) случаям k=1, 2, 4. На графиках видно, что при увеличении числа волн, трансформанта ядра медленнее сходится к 1 при $u \to \infty$.

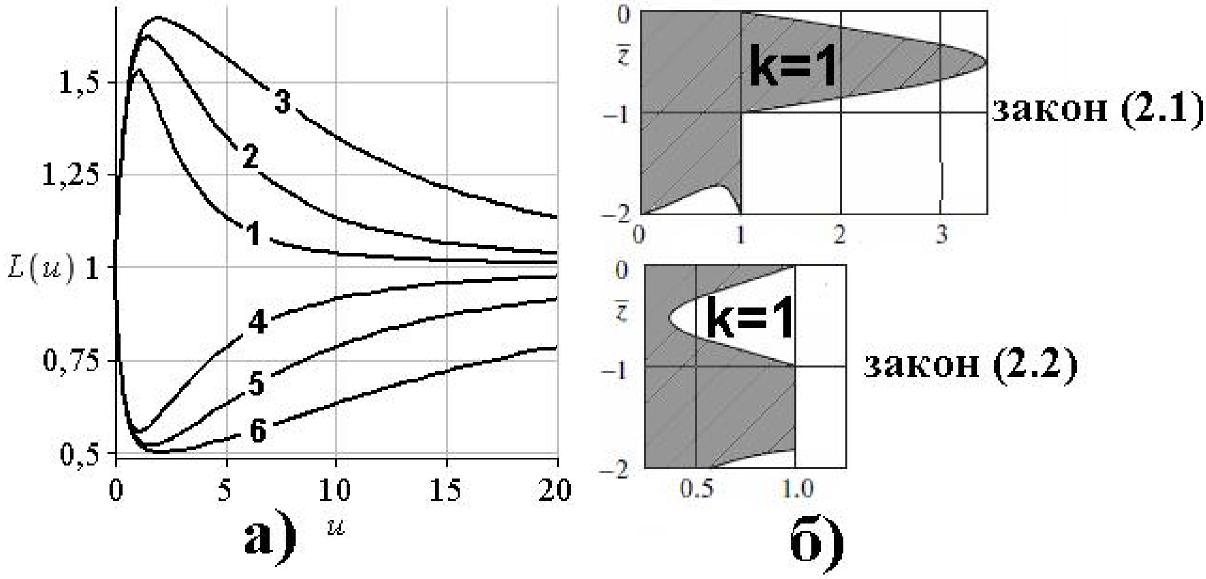


Рис. 2. а) Трансформанты ядер интегральных уравнений для законов (2.1), (2.2)

б) График изменения модуля сдвига по глубине для законов (2.1), (2.2)

Табл.1 содержит величины погрешностей аппроксимации трансформанты ядра выражениями вида (1.2) для законов (2.1) и (2.2) . Расчеты сделаны при N=60. Под погрешностью понимаем

$$\Delta_N = \max_{u>0} \left| \frac{L_N(u) - L(u)}{L_N(u)} \right| \cdot 100\%$$

Таблица 1. Погрешность аппроксимации трансформанты ядра для законов (2.1), (2.2)

№ закона	k=1	k=2	k=4	k=10	k=50
(2.1)	5%	7%	11,7%	18%	36%
(2.2)	2,8%	4,5%	6,5%	11%	23%

На рис. 3, 4 изображены графики величины

$$\tau_{\text{отн}}(r,\lambda) = \frac{\tau_{\text{неодн}}(r,\lambda)}{\tau_{\text{одн}}(r,\lambda)},$$

характеризующей распределение контактных касательных напряжений под штампом для неоднородной среды по сравнению с однородной подложкой при различных значениях **λ**. Здесь $r \in (0,1)$ – удаление точки от центра штампа, **λ** – геометрический параметр задачи, равный отношению толщины слоя к радиусу штампа. Рис. 3 соответствует закону (2.1), рис. 4 – закону (2.2), иллюстрируются случаи k=1, 2, 10.

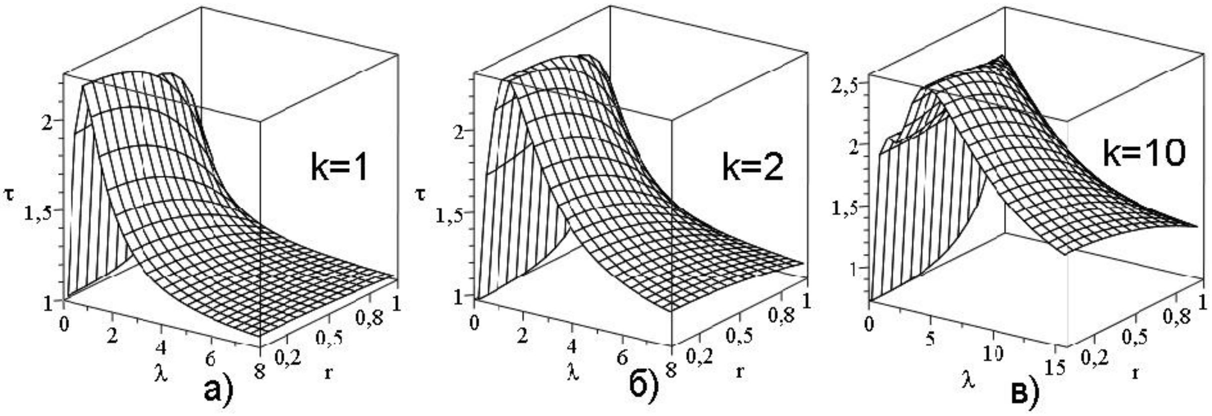


Рис. 3. Распределение контактных напряжений под штампом для закона (2.1)

Для закона (2.1) для всех значений k характерен скачок контактных напряжений в области некоторого λ_k. При λ близких к 1/8 значение $\tau_{отн}(r)$ близко к 1, с увеличением λ до λ_k наблюдается возрастание $\tau_{отн}(r)$, а при $\lambda > \lambda_k$ значение $\tau_{отн}(r)$ монотонно стремится к 1. С увеличением k, скачёк контактных напряжений растягивается и смещается вправо в зону больших λ. Кроме того, видно, что при увеличении k $\tau_{отн}(r)$ медленнее стремится к 1 при $\lambda \to \infty$. Величина скачка (максимальное значение $\tau_{отн}(r)$) с увеличением k практически не изменяется.

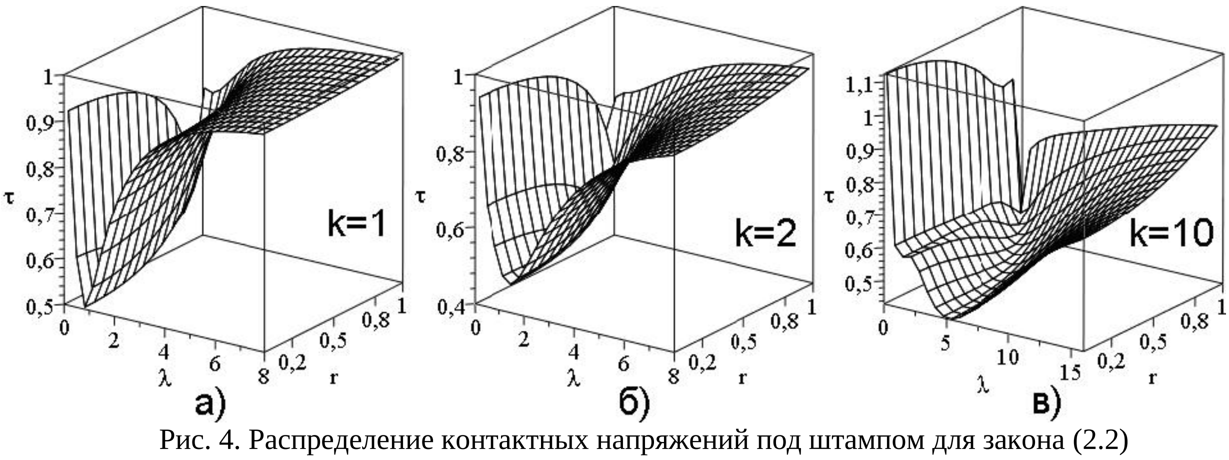


Рис. 4. Распределение контактных напряжений под штампом для закона (2.2)

Из рисунков видно подобие распределений контактных напряжений для законов (2.1), (2.2) при одинаковых значениях параметра k – зоны возрастания сменяются зонами убывания, точки максимума – точками минимума, отличие от случая однородной среды для закона (2.1) при k=2 не превышает 2,2 раза, а для закона (2.2) при k=2 – 2 раза.

Увеличение числа волн k аналогичным образом влияет на распределение контактных напряжений для закона (2.2), как и для закона (2.1), в чем можно убедиться из рис. 4.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-01-00003а, 09-08-011410а, 10-08-01296-а, 10-08-90025-Бел_а) и ГК № 02.740.11.0413, ГК № 02.740.11.5193 , АВЦП 2.1.2/5729

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзикович С.М. Кручение круглым штампом неоднородного полупространства //Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону: РИСИ. 1978. С. 156–169.
2. Айзикович С.М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т.46. Вып.1. С. 148–158.
3. Aizikovich S., Vasiliev A., Seleznev N. Inverse analysis for evaluation of the shear modulus of inhomogeneous media by torsion experiments// International Journal of Engineering Science Volume 48, Issue 10, 2010, Pages 936-942.
4. Sneddon I.N. Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci// J. Appl. Phys. 18, 1947, 130–132.
5. Yu H.Y. Forced torsional oscillations of multilayered solids// International Journal of Engineering Science 46, 2008, 250–259.

Сведения об авторах

Айзикович Сергей Михайлович – доктор физ.-мат. наук, гл.н.с. Управления научных исследований Донского государственного технического университета, профессор кафедры ” Сопротивление материалов ” ; e-mail: saizikovich@gmail.com

Кренёв Леонид Иванович – канд. физ.-мат. наук, в.н.с. Управления научных исследований Донского государственного технического университета e-mail: krd91adv@aaanet.ru

Васильев Андрей Сергеевич – мл.н.с. Управления научных исследований Донского государственного технического университета; e-mail: andre.vasiliev@gmail.com

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ПРОГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Айрапетян В.Ж., Гегамян Б.П., Гегамян Г.Б.

Рассматривается задача минимизации наибольшего значения прогиба анизотропных прямоугольных пластин. В точке пересечения диагоналей прямоугольной области пластины приложена перпендикулярная сосредоточенная сила. Параметром управления (проектирования) является функция толщины пластины. Масса пластины фиксирована. Пластина шарнирно закреплена по краям. Задача решается, используя вариационный принцип. Полученная краевая задача интегрируется с помощью применения приближенных численных методов.

Постановка задачи.

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину размерами (2*a* x 2*b*) (рис.1). Плоскость координатной системы О*xy* совпадает со срединной плоскостью пластины, а координатные оси О*x* и О*y* совпадают с главными физическими осями материала пластины. Границы пластины $x = \pm a$ и $x = \pm b$ проходят через главные физические оси материала пластины. В точке (0,0) приложена сосредоточенная сила Р ¢(*x*) ¢(*y*), где ¢( ) – известная функция Дирака. Рассмотрим тот случай, когда границы пластины $x = \pm a$ и $x = \pm b$ шарнирно закреплены. Пусть в точке (0,0) прогиб пластины принимает максимальное значение $w_{\max 0}$ при фиксированных постоянных значениях толщины пластины h_0 и коэффициентов упругости материала пластины $B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{66}$. При этом, масса пластины M_0 тоже будет известной величиной.

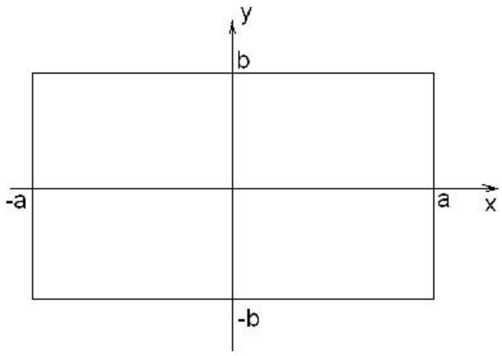


Рис. 1

Рассмотрим следующую задачу.

Найти такой переменный закон $h(x, y)$ распределения толщины пластины, при котором сохраняется значение массы пластины M_0, а наибольшее значение прогиба пластины $w(0,0)$ принимает наименьшее значение.

Задача имеет следующую математическую формулировку:

$$(h^3(x,y)\,(B_{11}\, w_{xx}(x,y) + B_{12}\, w_{yy}(x,y)\,)\,)_{xx} + 4(B_{66}\, h^3(x,y)\, w_{xy}(x,y)\,)_{xy} + \\ + (h^3(x,y)(B_{12} w_{xx}(x,y) + B_{22}\, w_{yy}(x,y)\,)\,)_{yy} = P\, \delta(x)\, \delta(y) \qquad (1)$$

$$w(-a) = w(a) = 0 \qquad h^3(x,y)\,(B_{11}\, w_{xx}(x,y) + B_{12}\, w_{yy}(x,y)\,)/_{x=-a,\ x=a} = 0 \\ w(-b) = w(b) = 0 \qquad h^3(x,y)\,(B_{11}\, w_{xx}(x,y) + B_{12}\, w_{yy}(x,y)\,)/_{x=-b,\ x=b} = 0 \qquad (2)$$

$$J = w(0, 0) \xrightarrow[h]{} \min \qquad (3)$$

$$J_1 = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} h(x, y)\,dxdy = M_0 = \text{fix} \qquad (4)$$

(здесь приняты обозначения: $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}$, …)

Эта задача раньше рассматривалась для общего случая, когда на функции $h(x,y)$, описывающей толщину пластины, не поставлено никакое ограничение. Однако в классической теории пластин принимаются такие допущения, которые будут выполнены, если функции переменной толщины пластин $h(x,y)$ принадлежат классу функций с определенной степенью гладкости. Здесь рассмотрим ограничение

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}h(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}h(x,y)\right)^2\right)dxdy \le c^2 , \qquad (5)$$

которое наиболее сопоставимо с теорией пластин, работающих в рамках кирхгофской гипотезы.

Теоретические аспекты и результаты решения задачи.

Пусть функции $h^*(x,y)$, $w^*(x,y)$ – решения задачи (1) – (5). Они удовлетворяют граничной задаче (1), (2) и ограничениям (4), (5), при том, функционал (3) принимает минимальное значение. Тогда, для произвольной допустимой вариации ¢*h* функции *h*(*x*,*y*) вариация ¢*J* функционала *J* равняется нулю.

Для решения поставленной оптимизационной задачи можно применять вариационный метод Майера-Больца [1,2]. При этом необходимо граничную задачу (1), (2) разложить в систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Удобно применять другой вариационный метод [2,3]. Здесь вводится только одна сопряженная функция *v*(*x*,*y*). Из вариационного принципа ¢*J*=0 получаем систему необходимых условий оптимальности. Оказывается, что из системы необходимых условий возможно исключить функцию *v*(*x*,*y*):

$$v(x,y) = \lambda_0 w(x,y) \qquad (6)$$

В результате, из полученной системы необходимых условий останется только одно уравнение:

$$h^2(x,y)(B_{11}w_{xx}^2(x,y)+2B_{12}w_{xx}(x,y)w_{yy}(x,y)+4B_{66}(x,y)w_{xy}^2(x,y)+B_{22}w_{yy}^2(x,y))=\lambda^2+\lambda_1(h_{xx}+h_{yy}), \qquad (7)$$

где $3\lambda^2=\lambda_0^2$, а λ_1 соответствует ограничению (5).

Заметим, что левая часть уравнения (7) представляет собой произведение по параметру *h* выражения плотности энергии упругих деформаций пластины [4].

Таким образом, поставленная оптимизационная задача приводится к решению граничной задачи (1), (2), (7) с ограничениями (4), (5). Неизвестная λ определяется из условия равенства значений энергии упругих деформаций пластины и работ внешних сил.

Численное решение задачи.

По методам современной высшей математики невозможно получать аналитическое решение нелинейной граничной задачи (1), (2), (7).

Интегрировать нелинейные уравнения (1), (7) при граничных условиях (2) также невозможно получить с помощью известной программы “**Mathemathica**”.

Здесь для численного интегрирования граничной задачи (1), (2), (7) применяется метод последовательных приближений. Численное интегрирование осуществляется по схеме:

1. Прямоугольная область пластины (2*a* x 2*b*) разлагается на *n* x *m* прямоугольники, в узлах (*i*,*j*) которых имеем неизвестные *wij* и *hij*.

2. Применяя конечно-разностный метод аппроксимации частных производных, из граничной задачи (1), (2), (7) получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных *wij* и *hij*.
3. В качестве начального приближения выбираются тригонометрические функции, которые удовлетворяют граничным условиям (2).
4. Первое (при необходимости – второе, третье и т.д.) приближение в произвольном узле *ij* получается из системы уравнений, соответствующих дифференциальным уравнениям (1), (7).
5. Процесс продолжается до достижения требуемой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арман Ж.-Л. П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977. 142с.
2. Саркисян В., Гегамян Б. Теория и приложения оптимального проектирования конструкций. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1990.
3. Баничук Н. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.
4. Амбарцумян С. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967.

Сведения об авторах:

Айрапетян Вардан Жоресович – д.т.н., профессор кафедры ЕГУ,
Тел: 091362000, E-mail: vhayrapetyan@rambler.ru

Гегамян Баграт Паруйрович – к.ф.м.н., доцент кафедры ЕГУ,
Тел: 094580026, (37410) 28-71-08; E-mail: geghmechmat@ysu.am

Гегамян Гоар Багратовна – магистр по информатике, тел-094580026,
E-mail: gohar.geghamyan@rambler.ru

ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Айрапетян Г. С.

В работе на основе асимптотического метода, в зависимости от значений безразмерных физических параметров, построены общие двумерные уравнения микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью».

1.Постановка задачи. Отметим, что асимптотическим методом в зависимости от значений физических безразмерных параметров в работе [1] построены общие прикладные –двумерные теории микрополярных упругих изотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением, «с малой сдвиговой жесткостью».

Рассмотрим ортотропную пластину постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, совмещая плоскость Ox_1x_2 со срединной плоскостью пластины. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [2]:

уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j} = 0, \qquad \mu_{ji,j} + \varepsilon_{irs}\sigma_{rs} = 0 \tag{1.1}$$

физические соотношения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = A_{11}\gamma_{11} + A_{12}\gamma_{22} + A_{13}\gamma_{33} && \mu_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + B_{13}\chi_{33}\\
&\sigma_{22} = A_{12}\gamma_{11} + A_{22}\gamma_{22} + A_{23}\gamma_{33} && \mu_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{23}\chi_{33}\\
&\sigma_{33} = A_{13}\gamma_{11} + A_{23}\gamma_{22} + A_{33}\gamma_{33} && \mu_{33} = B_{13}\chi_{11} + B_{23}\chi_{22} + B_{33}\chi_{33}\\
&\sigma_{23} = A_{44}\gamma_{23} + A_{45}\gamma_{32} && \mu_{23} = B_{44}\chi_{23} + B_{45}\chi_{32}\\
&\sigma_{32} = A_{45}\gamma_{23} + A_{55}\gamma_{32} && \mu_{32} = B_{45}\chi_{23} + B_{55}\chi_{32}\\
&\sigma_{31} = A_{55}\gamma_{31} + A_{56}\gamma_{13} && \mu_{31} = B_{55}\chi_{31} + B_{56}\chi_{13}\\
&\sigma_{13} = A_{56}\gamma_{31} + A_{66}\gamma_{13} && \mu_{13} = B_{56}\chi_{31} + B_{66}\chi_{13}\\
&\sigma_{12} = A_{77}\gamma_{12} + A_{78}\gamma_{21} && \mu_{12} = B_{77}\chi_{12} + B_{78}\chi_{21}\\
&\sigma_{21} = A_{78}\gamma_{12} + A_{88}\gamma_{21} && \mu_{21} = B_{78}\chi_{12} + B_{88}\chi_{21}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} && \chi_{11} = b_{11}\mu_{11} + b_{12}\mu_{22} + b_{13}\mu_{33}\\
&\gamma_{22} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} && \chi_{22} = b_{12}\mu_{11} + b_{22}\mu_{22} + b_{23}\mu_{33}\\
&\gamma_{33} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} && \chi_{33} = b_{13}\mu_{11} + b_{23}\mu_{22} + b_{33}\mu_{33}\\
&\gamma_{23} = a_{55}\sigma_{23} - a_{45}\sigma_{32} && \chi_{23} = b_{55}\mu_{23} - b_{45}\mu_{32}\\
&\gamma_{32} = a_{44}\sigma_{32} - a_{45}\sigma_{23} && \chi_{32} = b_{44}\mu_{32} - b_{45}\mu_{23}\\
&\gamma_{31} = a_{66}\sigma_{31} - a_{56}\sigma_{13} && \chi_{31} = b_{66}\mu_{31} - b_{56}\mu_{13}\\
&\gamma_{13} = \tilde{a}_{55}\sigma_{13} - a_{56}\sigma_{31} && \chi_{13} = \tilde{b}_{55}\mu_{13} - b_{56}\mu_{31}\\
&\gamma_{12} = a_{88}\sigma_{12} - a_{78}\sigma_{21} && \chi_{12} = b_{88}\mu_{12} - b_{78}\mu_{21}\\
&\gamma_{21} = a_{77}\sigma_{21} - a_{78}\sigma_{12} && \chi_{21} = b_{77}\mu_{21} - b_{78}\mu_{12}
\end{aligned} \tag{1.2'}$$

$$a_{11} = \frac{A_{22}A_{33} - A_{23}^2}{\Delta_A}, \qquad a_{22} = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{\Delta_A}, \qquad a_{33} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{\Delta_A}$$

$$a_{23} = \frac{A_{12}A_{13} - A_{23}A_{11}}{\Delta_A}, \qquad a_{13} = \frac{A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}}{\Delta_A}, \qquad a_{12} = \frac{A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}}{\Delta_A},$$

$$a_{44} = \frac{A_{44}}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2},\ a_{45} = \frac{A_{45}}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2},\ a_{55} = \frac{A_{55}}{A_{44}A_{55} - A_{45}^2},\ \tilde{a}_{55} = \frac{A_{55}}{A_{55}A_{66} - A_{56}^2},$$

$$a_{56} = \frac{A_{56}}{A_{55}A_{66} - A_{56}^2},\ a_{66} = \frac{A_{66}}{A_{55}A_{66} - A_{56}^2},\ a_{77} = \frac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2},\ a_{78} = \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2},$$

$$a_{88} = \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}, \quad \Delta_A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Остальные физические постоянные получаются при замене $A_{ij} \to B_{ij}$, $a_{ij} \to b_{ij}$.

геометрические соотношения

$$£_{ij} = u_{j,i} + £_{jir} μ_r, \qquad ¡_{ij} = μ_{j,i} \tag{1.3}$$

На лицевых плоскостях пластины $x_3 = \pm h$ заданы силовые и моментные граничные условия

$$±_{3i} = p_i^{\pm}, \qquad «_{3i} = m_i^{\pm} \tag{1.4}$$

где $p_i^{\pm}, m_i^{\pm}$ – компоненты внешних заданных усилий и моментов.

Предполагается , что толщина пластины $2h$ мала по сравнению с ее характерным размером a, т.е. $2h << a$, $¢ = h/a << 1$, $¢$ – основной малый параметр задачи.

Перейдем в уравнениях (1.1)–(1.3) к безразмерным координатам по формулам

$$¶ = \frac{x_1}{a}, \quad ¦ = \frac{x_2}{a}, \quad ¸ = \frac{x_3}{h} \tag{1.5}$$

в результате, получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром $¢$. При построении асимптотики краевой задачи в тонкой области пластины большую роль играют значения физических постоянных микрополярного материала пластины. Введем безразмерные физические параметры:

$$A_{11}a_{11}, ..., A_{11}a_{78}, \quad a^2 A_{11}b_{11}, ..., a^2 A_{11}b_{78}. \tag{1.6}$$

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q = ¢^{-q} \sum_{s=0}^{S} ¢^s Q^{(s)} \tag{1.7}$$

где s – номер асимптотического приближения, Q – любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и независимых поворотов, q – натуральное число, разное для разных величин, которое определяется из условия непротиворечивости рекуррентной системы уравнений после подстановки разложения (1.7) в преобразованную систему и приравнивания в каждом уравнении к нулю коэффициентов при всех степенях $¢$. В зависимости от порядка безразмерных физических постоянных (1.6) рассмотрим три разные случаи.

2. Теория микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Предположим, что все безразмерные физические постоянные (1.6) имеют порядок единицы: $A_{11}a_{11} \sim 1, ..., A_{11}a_{78} \sim 1$, $a^2 A_{11}b_{11} \sim 1, ..., a^2 A_{11}b_{78} \sim 1$.

В этом случае для числа q в разложениях получим:

для обратно-симметричной по x_3 задачи (изгиб микрополярной пластины)

$$q = 1 \quad \text{для} \quad \pm_{m3},\ \pm_{3m},\ \ll_{nn},\ \ll_{mn},\ u_3,\ \mu_m$$
$$q = 0 \quad \text{для} \quad \pm_{nn},\ \pm_{mn},\ \ll_{33},\ \ll_{m3},\ \ll_{3m},\ u_m,\ \mu_3 \tag{2.1}$$

В этом случае в асимптотических приближениях компоненты вектора поворота не зависят от компонент вектора перемещения. Для задачи изгиба введем усредненные по толщине пластины усилия N_{m3}, N_{3m} и моменты $M_{nn},\ M_{mn},\ L_{nn},\ L_{mn},\ L_{33}$:

$$N_{m3} = \int \pm_{m3} dx_3,\quad N_{3m} = \int \pm_{3m} dx_3,\quad M_{nn} = \int \pm_{nn} x_3 dx_3,\quad M_{mn} = \int \pm_{mn} x_3 dx_3$$
$$L_{nn} = \int \ll_{nn} dx_3,\quad L_{nm} = \int \ll_{nm} dx_3,\quad L_{33} = \int \ll_{33} dx_3. \tag{2.2}$$

Для задачи изгиба микрополярных пластин со свободным вращением получим: **уравнения равновесия**

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -p_3,\qquad \frac{\partial L_{nn}}{\partial x_n} + \frac{\partial L_{mn}}{\partial x_m} + (-1)^m\left(N_{m3} - N_{3m}\right) = -m_n \tag{2.3}$$

соотношения упругости

$$N_{13} = 2h\tilde{A}_{13}\Gamma_{13} + C_1 N_{31},\qquad N_{23} = 2h\tilde{A}_{23}\Gamma_{23} + C_2 N_{32},$$
$$L_{12} = 2h\left[B_{77}k_{12} + B_{78}k_{21}\right],\qquad L_{21} = 2h\left[B_{78}k_{12} + B_{88}k_{21}\right], \tag{2.4}$$
$$L_{11} = 2h\left[\tilde{B}_{11}k_{11} + \tilde{B}_{12}k_{22}\right] + d_1 L_{33},\qquad L_{22} = 2h\left[\tilde{B}_{12}k_{11} + \tilde{B}_{22}k_{22}\right] + d_2 L_{33}.$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{n3} = \frac{\partial w}{\partial x_n} + (-1)^m\Omega_m,\quad k_{nn} = \frac{\partial \Omega_n}{\partial x_n},\quad k_{nm} = \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_n} \tag{2.5}$$

Здесь w – прогиб пластины, Ω_n – независимые повороты вокруг осей x_1 и x_2 в точках срединной плоскости пластины, Γ_{n3} – компоненты деформации, k_{nn}, k_{mn} – компоненты изгиба кручения в точках срединной плоскости пластины; кроме того, $N_{3n} = hp_n,\quad L_{33} = hm_3$

$$\tilde{A}_{13} = \frac{1}{\tilde{a}_{55}},\ \tilde{A}_{23} = \frac{1}{a_{55}},\ \tilde{B}_{11} = \frac{b_{22}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2},\ \tilde{B}_{22} = \frac{b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2},\ \tilde{B}_{12} = -\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}$$
$$C_1 = \frac{a_{56}}{a_{55}},\ C_2 = \frac{a_{45}}{a_{55}},\ d_1 = \frac{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2},\ d_2 = \frac{b_{12}b_{13} - b_{23}b_{11}}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}. \tag{2.6}$$

3.Теория микроплярных пластин со стесненным вращением. Предположим, что безразмерные физические параметры материала пластины (1.6) представимы в виде

$$A_{11}a_{11} \sim 1,\ldots, A_{11}a_{78} \sim 1,\quad a^2 A_{11}b_{33} \sim ¢^{-2}B_{12}^*,\ldots, a^2 A_{11}b_{78} \sim ¢^{-2}B_{78}^*. \tag{3.1}$$

Для задачи изгиба в выражении (1.7) имеют место следующие значения q :

$$q = 0 \quad \text{для} \quad \pm_{33},\ \ll_{3m},\ \ll_{m3};\qquad q = 1 \quad \text{для} \quad \pm_{m3},\ \pm_{3m},\ \ll_{nn},\ \ll_{mn},\ll_{33}$$
$$q = 2 \quad \text{для} \quad \pm_{nn},\ \pm_{mn},\ u_m,\mu_3;\qquad q = 3 \quad \text{для} \quad u_3,\ \mu_m \tag{3.2}$$

Асимптотический анализ поставленной краевой задачи показывает, что в асимптотических приближениях компоненты вектора поворота зависят от компонент вектора перемещения, как в классической теории упругости. Основные уравнения изгиба микрополярных упругих ортотропных пластин со стесненным вращением имеют вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-p_3,$$
$$\frac{\partial\left(L_{1n}-(-1)^m M_{1m}\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\left(L_{2n}-(-1)^m M_{2m}\right)}{\partial x_2}+(-1)^m N_{13}=-m_n+(-1)^m hp_m \tag{3.3}$$

физические соотношения

$$M_{11}=\frac{2}{3}h^3\left(\tilde{A}_{11}K_{11}-\tilde{A}_{12}K_{22}\right),\qquad M_{22}=\frac{2}{3}h^3\left(\tilde{A}_{22}K_{22}-\tilde{A}_{12}K_{11}\right),$$
$$M_{12}=\frac{4h^3}{3}\left(\tilde{A}^*_{12}+R_1\right)K_{12}+2hR_1^*m_3,\qquad M_{21}=\frac{4h^3}{3}\left(\tilde{A}^*_{21}+R_2\right)K_{21}+2hR_2^*m_3,$$
$$L_{11}=\left(2hB^*_{11}+\frac{4h^3}{3}\tilde{B}^*_{11}\right)k_{11}+2h\tilde{R}_1^*m_3,\qquad L_{22}=\left(2hB^*_{22}+\frac{4h^3}{3}\tilde{B}^*_{22}\right)k_{22}+2h\tilde{R}_2^*m_3, \tag{3.4}$$
$$L_{12}=2h\left(B_{78}k_{21}+B_{77}k_{12}\right),\qquad L_{21}=2h\left(B_{88}k_{21}+B_{78}k_{12}\right),$$

геометрические соотношения

$$\Omega_n=(-1)^m\frac{\partial w}{\partial x_m},\quad K_{11}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},\quad K_{22}=\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2},K_{12}=K_{21}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},k_{ii}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},k_{ij}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_j},$$

$$L_{33}=2h\tilde{k}_1m_3+\frac{4h^3}{3}\tilde{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2},\quad \tilde{k}_1=\frac{thk_1}{k_1},\quad \tilde{R}=\frac{R}{k_1^2}\left(\frac{thk_1}{k_1}-1\right),$$
$$k_1^2=\Delta_B b^*,\quad b^*=\left[b_{33}-b_{23}\left(\tilde{B}_{12}b_{13}+\tilde{B}_{22}b_{23}\right)-b_{13}\left(\tilde{B}_{11}b_{13}+\tilde{B}_{12}b_{23}\right)\right]\left(A_{88}+A_{77}-2A_{78}\right),$$
$$R=\frac{3}{2}\left[A_{77}-A_{88}+\left(A_{77}+A_{88}-2A_{78}\right)\Delta_b\right],\quad \Delta_b=-d_1+d_2,$$
$$\tilde{A}_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\tilde{A}_{22}=\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\tilde{A}_{12}=-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\tilde{A}^*_{12}=\tilde{A}^*_{21}=\frac{1}{2a_{78}-a_{77}-a_{88}},$$
$$R_1=-\tilde{a}_{77}\tilde{R},\quad R_1^*=\tilde{a}_{77}\left(1-\tilde{k}_1\right),\quad R_2=\tilde{a}_{88}\tilde{R},\quad R_2^*=-\tilde{a}_{88}\left(1-\tilde{k}_1\right), \tag{3.5}$$
$$B^*_{11}=\tilde{B}_{11}-\tilde{B}_{12},\ B^*_{22}=\tilde{B}_{12}-\tilde{B}_{22},\quad \tilde{B}^*_{11}=\tilde{R}\tilde{b}_1,\quad \tilde{B}^*_{22}=\tilde{R}\tilde{b}_2,\ \tilde{R}_1^*=\tilde{k}_1\tilde{b}_1,\quad \tilde{R}_2^*=\tilde{k}_1\tilde{b}_2,$$
$$\tilde{a}_{77}=\tilde{B}^*_{12}\left(a_{77}-a_{78}\right),\quad \tilde{a}_{88}=\tilde{B}^*_{21}\left(a_{88}-a_{78}\right),$$
$$\tilde{b}_1=-\tilde{B}_{11}b_{13}-\tilde{B}_{12}b_{23},\tilde{b}_2=-\tilde{B}_{12}b_{13}-\tilde{B}_{22}b_{23},$$
$$\tilde{B}_{11}=\frac{b_{22}}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2},\quad \tilde{B}_{22}=\frac{b_{11}}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2},\quad \tilde{B}_{12}=-\frac{b_{12}}{b_{11}b_{22}-b_{12}^2},$$

Используя уравнения(3.3)-(3.4), получим разрешающее уравнение относительно прогиба (типа уравнения Софи Жермен):

$$\left(D_{11}+d_{11}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\left(D_{12}+d_{12}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\left(D_{22}+d_{22}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}=p_3-h\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial m_2}{\partial x_1}-\frac{\partial m_1}{\partial x_2}$$
$$D_{11}=\frac{2h^3}{3}\tilde{A}_{11},\quad D_{22}=\frac{2h^3}{3}\tilde{A}_{22},\quad d_{11}=2hB_{77},\quad d_{22}=2hB_{88},\quad d_{12}=2h\left(2B_{78}+\tilde{B}_{22}-\tilde{B}_{11}\right),$$
$$D_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[\tilde{A}_{12}+2\tilde{R}\left(\Delta_b-\Delta_a\right)\right],\quad \Delta_a=\left(a_{77}-a_{88}\right)\tilde{A}^*_{12}.$$

4.Теория микрополярных пластин с ”малой сдвиговой жесткостью”. Построим третью отличную от предыдущих асимптотику, принимая для безразмерных физических постоянных следующее представление:

$$\frac{2A_{11}\left(A_{77}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim ¢^{-2}A_{77}^*,\quad \frac{2A_{11}\left(A_{88}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim ¢^{-2}A_{88}^*,\quad \frac{2A_{11}\left(A_{55}+A_{78}\right)}{A_{55}A_{66}-A_{56}^2}\sim ¢^{-2}A_{55}^*,$$
$$\frac{2A_{11}\left(A_{66}+A_{56}\right)}{A_{55}A_{66}-A_{56}^2}\sim ¢^{-2}A_{66}^*,\frac{2A_{11}\left(A_{44}+A_{45}\right)}{A_{44}A_{55}-A_{45}^2}\sim ¢^{-2}A_{44}^*,\frac{2A_{11}\left(A_{55}+A_{45}\right)}{A_{44}A_{55}-A_{45}^2}\sim ¢^{-2}\tilde{A}_{55}^*. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим задачу изгиба. В разложениях(1.7) для q получим

$$q=0 \text{ для } ±_{33};\qquad q=1 \text{ для } ±_{m3},\ ±_{3m},\ «_{33}$$
$$q=2 \text{ для } ±_{nn},\ ±_{mn},\ u_m, «_{3m},\ «_{m3}, μ_3;\qquad q=3 \text{ для } u_3,\ μ_m, «_{nn},\ «_{mn}, \qquad (4.2)$$

При асимптотике (4.2) в уравнениях теории микроплярных пластин величины ”чисто моментного” происхождения отделяются и образуют автономную систему уравнений. Уравнения ”чисто моментной” части задачи имеют вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial L_{1n}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{2n}}{\partial x_2}=-m_n, \qquad (4.3)$$

соотношения упругости

$$L_{11}=2h\left[\tilde{B}_{11}k_{11}+\tilde{B}_{12}k_{22}\right],\qquad L_{22}=2h\left[\tilde{B}_{12}k_{11}+\tilde{B}_{22}k_{22}\right],$$
$$L_{12}=2h\left[B_{77}k_{12}+B_{78}k_{21}\right],\qquad L_{21}=2h\left[B_{78}k_{12}+B_{88}k_{21}\right]. \qquad (4.4)$$

геометрические соотношения

$$k_{nn}=\frac{\partial\Omega_n}{\partial x_n},\quad k_{nm}=\frac{\partial\Omega_m}{\partial x_n} \qquad (4.5)$$

Уравнения ”силовой” части задачи изгиба пластин:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-p_3,\quad N_{31}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}=hp_1,\quad N_{32}-\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}=hp_2 \qquad (4.6)$$

физические соотношения

$$N_{13}=2h\tilde{A}_{13}^*\Gamma_{13}+\tilde{C}_1N_{31},\qquad N_{23}=2h\tilde{A}_{23}^*\Gamma_{23}+\tilde{C}_2N_{32}$$
$$M_{12}=\frac{4h^3}{3}A_{12}^*K_{12},\quad M_{21}=\frac{4h^3}{3}A_{21}^*K_{21},\quad K_{12}=K_{21},\quad A_{12}^*=\frac{A_{77}+A_{78}}{2},\quad A_{21}^*=\frac{A_{88}+A_{78}}{2},$$
$$M_{11}=\frac{2h^3}{3}\left[\tilde{A}_{11}K_{11}+\tilde{A}_{12}K_{22}\right],\quad M_{22}=\frac{2h^3}{3}\left[\tilde{A}_{22}K_{22}+\tilde{A}_{12}K_{11}\right], \qquad (4.7)$$
$$\tilde{C}_1=\frac{2\left(a_{66}+a_{56}\right)}{\tilde{a}_{55}+a_{56}},\quad \tilde{C}_2=\frac{2\left(a_{44}+a_{45}\right)}{a_{55}+a_{45}},\quad \tilde{A}_{13}^*=\frac{1}{\tilde{a}_{55}+a_{56}},\quad \tilde{A}_{23}^*=\frac{1}{a_{55}+a_{45}}.$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{n3}=\frac{\partial w}{\partial x_n}+(-1)^m\Omega_m,\qquad K_{nn}=\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2},\qquad K_{nm}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x_n\partial x_m}. \qquad (4.8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. 1.Саркисян С. О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // ПММ. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147
2. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders //ZAMM. 1974. V. 54. №12.P. 773-779

Сведения об авторе

Айрапетян Гаяне Сократовна – аспирант Гюмрийского государственного педогогического института имени М. Налбандяна. E-mail: gayane-hayrapetyan@mail.ru

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Саргсян А.О.

Исследованию напряженно-деформированного состояния однородных и составных массивных тел, содержащих абсолютно жесткие включения, посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных исследователей. Из них особо отметим работы [1-6], которые непосредственно связаны с настоящей работой.

В настоящей работе рассмотрено плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, содержащей на линии стыка различных материалов абсолютно жесткое тонкое включение, когда одна из боковых сторон включения жестко сцеплена с матрицей, а другая сторона находится в условиях гладкого контакта. Считается, что составная полуплоскость деформируется под воздействием абсолютно жесткого штампа, вдавливаемой в свободную границу полуплоскости.

Выведена ключевая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи, изучено поведение искомых функций в концевых точках включения в зависимости от физических параметров и методом ортогональных многочленов построено решение задачи.

1. Рассмотрим плоско-деформированное состояние составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщины h и упругой полуплоскости с коэффициентами Ламэ μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2, когда на линии их соединения имеется абсолютно жесткое тонкое включение длины $2a$, нижняя сторона которого жестко сцеплена с упругой полуплоскостью, а верхняя сторона гладко контактирует с полосой. Будем считать, что в свободную границу составной полуплоскости $y = h$ при помощи сосредоточенной силы P_0, симметрично относительно оси OY, вдавливается абсолютно жесткий гладкий штамп (рис.1).

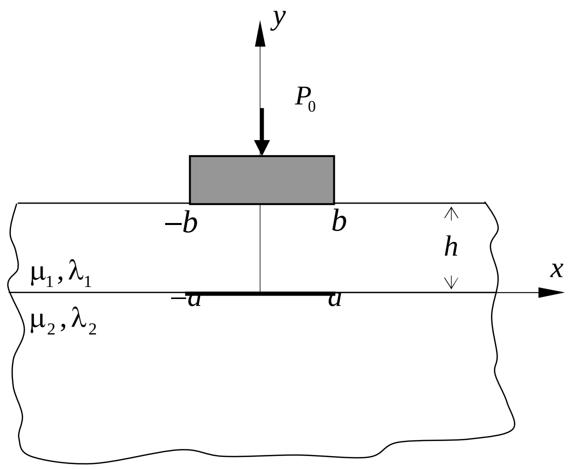


Рис.1

Требуется определить контактные давления под штампом и включением, коэффициенты их интенсивности в концевых точках включения, а также изучить закономерности взаимовлияния штампа и включения в зависимости от физических и геометрических характеристик поставленной задачи.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} V_1(x,h) = \delta_1 + f(x) & (-b < x < b) \\ \sigma_y^{(1)}(x,h) = 0 & (|x| > b) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,h) = 0 & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \tag{1.1а}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0) = \sigma_y^{(2)}(x,0); \quad \tau_{xy}^{(1)}(x,0) = \tau_{xy}^{(2)}(x,0) \\ U_1(x,0) = U_2(x,0); \quad V_1(x,0) = V_2(x,0) \end{cases} \quad (|x| > a) \tag{1.1б}$$

$$\begin{cases} V_1(x,+0) = V_2(x,-0) = \delta_2; \; U_2(x,-0) = 0 \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,+0) = 0 \end{cases} \quad (|x| < a) \tag{1.1в}$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ $(j=1,2)$ – соответственно нормальные и касательные компоненты напряжений полосы и полуплоскости, $U_j(x,y)$ и $V_j(x,y)$ – горизонтальные и вертикальные смещения точек полосы и полуплоскости, $\delta_j\ (j=1,2)$ – неизвестные постоянные, характеризующие жесткие смещения штампа и включения, а $f(x)$ – функция, описывающая основание штампа.

Обозначим контактное давление, действующее под штампом, через функцию $P(x)$ и введем в рассмотрение функции скачков напряжений, действующих на краях включения, и разности смещений на этих краях

$$\sigma(x)=\begin{cases}0, & |x|>a\\ \sigma_y^{(1)}(x,0)-\sigma_y^{(2)}(x,0), & |x|<a\end{cases}$$

$$\tau(x)=\begin{cases}0, & |x|>a\\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)-\tau_{xy}^{(2)}(x,0), & |x|<a\end{cases} \tag{1.2}$$

$$U(x)=\begin{cases}0, & |x|>a\\ U_1(x,0)-U_2(x,0), & |x|<a\end{cases}$$

Учитывая (1.2), решим вспомогательную задачу, состоящую из условий (1.1а) – (1.1.б), заменив первое из условий (1.1а) условием

$$\sigma_y^{(1)}(x,h)=-P(x)\quad (-b<x<b)$$

и выразим компоненты напряжений и смещений через функции скачков и функцию $P(x)$. Далее удовлетворим условиям (1.1в) и первому условию (1.1а), предварительно продифференцировав первые условия (1.1а) и (1.1в). В результате, вводя обозначения

$$\vartheta_1^{(j)}=\frac{\mu_j^2}{\lambda_j+3\mu_j};\quad \vartheta_2^{(j)}=\frac{\mu_j\left(\lambda_j+2\mu_j\right)}{\lambda_j+3\mu_j};\; d_0=\frac{\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}}{2};\quad d_1=\frac{\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}}{2};$$

$$d_2=\vartheta_2^{(1)}/2\left(\left(\vartheta_2^{(1)}\right)^2-\left(\vartheta_1^{(1)}\right)^2\right);\; l_0=\vartheta_2^{(1)}\left(\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}\right)-\vartheta_1^{(1)}\left(\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}\right);\quad l_1=2\left(\vartheta_1^{(2)}l_0-\vartheta_2^{(2)}l_2\right);$$

$$l_2=\vartheta_1^{(1)}\vartheta_2^{(2)}+\vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)};\; l_3=2\left(\vartheta_1^{(2)}l_2-\vartheta_2^{(2)}l_0\right);\; \Delta_*=\left[\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}\right]^2-\left[\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}\right]^2;$$

придем к следующей ключевой системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}
\dfrac{d_0}{\Delta_*}\sigma(x)-\dfrac{l_0}{\Delta_*}U'(x)-\dfrac{d_1}{\pi\Delta_*}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s)d(s)}{s-x}+\int_{-a}^{a}K^*_{11}(x-s)\sigma(s)ds+\\
+\displaystyle\int_{-a}^{a}K^*_{12}(x-s)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K^*_{13}(x-s)U'(s)ds+\int_{-b}^{b}K^*_{14}(x-s)P(s)ds=0\\
\dfrac{d_0}{\Delta_*}\tau(x)+\dfrac{d_1}{\pi\Delta_*}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)ds}{s-x}+\frac{l_2}{\pi\Delta_*}\int_{-a}^{a}\frac{U'(s)ds}{s-x}-\int_{-a}^{a}K^*_{21}(x-s)\sigma(s)ds-\\
-\displaystyle\int_{-a}^{a}K^*_{22}(x-s)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K^*_{23}(x-s)U'(s)ds+\int_{-b}^{b}K^*_{24}(x-s)P(s)ds=0\quad(-a<x<a)\\
\dfrac{l_0}{\Delta_*}\tau(x)-\dfrac{l_2}{\pi\Delta_*}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)ds}{s-x}-\frac{l_3}{\pi\Delta_*}\int_{-a}^{a}\frac{U'(s)ds}{s-x}+\int_{-a}^{a}K^*_{31}(x-s)\sigma(s)ds+\\
+\displaystyle\int_{-a}^{a}K^*_{32}(x-s)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K^*_{33}(x-s)U'(s)ds+\int_{-b}^{b}K^*_{24}(x-s)P(s)ds=0\\
\dfrac{d_2}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{P(s)ds}{s-x}+\int_{-a}^{a}K^*_{41}(x-s)\sigma(s)ds+\int_{-a}^{a}K^*_{31}(x-s)\sigma(s)ds+\\
+\displaystyle\int_{-a}^{a}K^*_{43}(x-s)U'(s)ds+\int_{-b}^{b}K^*_{44}(x-s)P(s)ds=f'(x);\qquad(-b<x<b)
\end{cases} \tag{1.3}$$

где $K_{ij}^*(x)\;(i,j=1-4)$ – регулярные функции, выражения которых не приводятся ввиду их громоздкости.

Ключевую систему сингулярных интегральных уравнений (1.3) нужно решать вместе с условиями равновесия штампа и включения, а также с условиями непрерывности смещений в концевых точках включения, т.е. вместе с условиями

$$\int_{-b}^{b} P(x)dx = P_0; \quad \int_{-a}^{a} \sigma(x)dx = Q_0;$$
$$\int_{-a}^{a} \tau(x)dx = 0; \quad \int_{-a}^{a} U'(x)dx = 0. \tag{1.4}$$

Ключевую систему сингулярных интегральных уравнений (1.3) решим при предположении, что полоса и полуплоскость изготовлены из таких материалов, упругие постоянные которых удовлетворяют неравенству $\tilde{\Delta} = \vartheta_2^{(1)}\left(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}\right) - \left(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}\right)^2 \neq 0$ [5]. Тогда, вводя новые искомые функции по формулам

$$\psi_j(x) = \frac{d_0}{\Delta_*}\sigma(x) - \frac{l_0}{\Delta_*}U'(x) + \frac{\mu_j^* d_1}{\Delta_*}\tau(x);$$
$$\psi_3(x) = \frac{\vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*}\sigma(x) + \frac{2\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(1)}}{\Delta_*}U'(x); \tag{1.5}$$
$$\left(\mu_j^* = (-1)^{j+1}\sqrt{\tilde{\Delta}/2d_1\vartheta_2^{(2)}}; \quad j = 1, 2\right),$$

приведем систему (1.3) к каноническому виду. Далее, переходя к безразмерным величинам,

$$\psi_j^*(x) = \psi_j(ax); \quad \psi_4^*(x) = bP(bx)/P_0; \qquad \left(j = 1-3\right) \tag{1.6}$$

и формулируя систему интегральных уравнений на интервале $\left(-1,1\right)$, получим

$$\begin{cases} -\pi i \operatorname{th}(\pi\mu_j')\psi_j^*(t) + \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\psi_j^*(\tau)}{\tau - t}d\tau + \sum_{n=1}^{4}\int_{-1}^{1} R_{jn}^*(t,\tau)\psi_n^*(\tau)d\tau = 0 \quad \left(j = 1, 2\right) \\ \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_j^*(\tau)}{\tau - t}d\tau + \sum_{n=1}^{4}\int_{-1}^{1} R_{jn}^*(t,\tau)\psi_n^*(\tau)d\tau = Q_j^*(t) \qquad \left(j = 3, 4\right) \end{cases} \tag{1.7}$$
$$(\ -1 < t < 1)$$
$$\left(Q_3\left(x\right) = 0,\ Q_4\left(x\right) = af'\left(ax\right)/d_2P_0\right)$$

При этом, условия (1.4) примут вид:

$$\int_{-1}^{1} \cdot\ _j^*(x)dx = P_j \ ; \qquad (P_j = 0;\ \ j = 1-3;\ P_4 = 1\ ). \tag{1.8}$$

Здесь $R_{jn}^*(x,s)$ $\left(j,n = 1-4\right)$–линейные комбинации функций K_{jn}^* $\left(j,n = 1-4\right)$, регулярные на интервале $[-1,1]$, а постоянная μ_j' $(j = 1,2)$ определяется из условия $\operatorname{th}\mu_j'\pi = iq_j^{-1}$. Используя результаты работы [7], решения системы (1.7) представим в виде разложений

$$\psi_j^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{X_k^{(j)}P_k^{(j_j,\sigma_j)}(x)}{\omega_j(x)} \quad \left(j = 1, 2\right); \quad \omega_j(x) = \left(1 - x\right)^{-j_j}\left(1 + x\right)^{-\sigma_j} \tag{1.9}$$

$$\psi^*_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X_k^{(j)}T_k\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}\quad \left(j=3,4\right);\;\; (\gamma_j=-\frac{1}{2}-i\mu'_j;\; \sigma_j=-\frac{1}{2}+i\mu';\qquad (1.10)$$

где $P_k^{(j_j,\pm_j)}(x)$ $(j=1,2;\quad k=0,1,2,...)$ – многочлены Якоби, $T_k(x)$ $(k=0,1,2,..)$ – многочлен Чебышева первого рода, а постоянные $X_k^{(j)}$ $(j=1,2,3;\; k=0,1,2,..)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Для коэффициентов $X_0^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ из (1.8) сразу находим

$$X_0^{(j)}=0\;\;(j=1-3);\qquad X_0^{(4)}=1/®\,. \qquad (1.11)$$

Далее, подставляя значения функций $\cdot\,{}^*_j(x)$ $(j=1-4)$ из (3.4) и (3.5) в (3.2) по обычной процедуре [9] для определения коэффициентов $X_k^{(j)}$ $(j=1,2,3;\; k=1,2,...)$ получим квазивполне регулярную систему из четырех систем бесконечных алгебраических уравнений следующего типа [7]:

$$X_m^{(j)}=h_m^{(j)}\left[\sum_{n=1}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}A^{(j,n)}{}_{mk}X_k^{(n)}+C_m^{(j)}\right]\quad (j=1-4;\; m=1,2,...) \qquad (1.12)$$

Следовательно, коэффициенты разложения искомых функций и сами искомые функции определяются из (1.12) единственным образом. После нахождения этих функций скачки напряжений и производная скачка горизонтальных смещений определятся по формулам:

$$\sigma(x)=\frac{\vartheta_1^{(2)}\Delta_*}{\tilde{\Delta}}\left[\psi_1(x)+\psi_2(x)-\nu_0\psi_3(x)\right];\quad \tau(x)=\frac{\Delta_*}{2\mu_1 d_1}\left[\psi_1(x)-\psi_2(x)\right];$$

$$U'(x)=-\frac{\Delta_*}{2\tilde{\Delta}}\left[\psi_1(x)+\psi_2(x)-\frac{2d_0}{\vartheta_2^{(1)}}\psi_3(x)\right];\qquad \left(\nu_0=-l_0/\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(1)}\right).$$

Таким образом, решение поставленной задачи в случае $\tilde{\Delta}\neq 0$ методом ортогональных многочленов свелось к решению квазивполне регулярной системы бесконечных алгебраических уравнений. В случае же $\tilde{\Delta}=0$ метод ортогональных многочленов не может привести к желаемому результату, так как на этот раз искомые функции помимо степенной особенности имеют также логарифмическую особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344с.
2. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наукова думка, 1983. 288с.
3. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. //Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.

4. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве. //В сб. трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Ереван, 2007, с. 45-50.
5. Акопян В.Н., Саргсян А.О. Напряженное состояние составной полуплоскости с абсолютно жестким включением на линии раздела материалов. //Тезисы докладов XIV международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”, Ростов-на-Дону, Азов 2010, с.7-8.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708с.
7. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-35.

Сведения об авторах

Акопян Ваграм Наслетникович – д.ф.-м.н., директор Института механики НАН РА.
Тел.: (37410)52-48-90, E-mail: vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Левоновна – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА.
Тел.: (37410)56-81-89, E-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Саркисян Арман Оганесович – соискатель Института механики НАН РА

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ

Акопян В.Н., Симонян А.Р.

Исследованию напряженного состояния возле абсолютно жестких тонких включений в однородных и составных изотропных массивных телах в различных постановках посвящено огромное количество работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Особо отметим работы [1,2], непосредственно связанные с настоящей работой.

Здесь построено точное решение смешанной задачи для ортотропной плоскости, которая на одном из главных направлений содержит абсолютное жесткое тонкое включение, одна из длинных сторон которого полностью сцеплена с плоскостью, а другая сторона оторвана от матрицы.

1. Пусть ортотропная упругая плоскость, отнесенная к декартовой системе координат Oxy, направление осей которой совпадают с главными направлениями ортотропии материала, на линии $y=0$ содержит абсолютно жесткое тонкое включение длины $2a$, заполняющее интервал $(-a,a)$, нижний берег которого полностью сцеплен с плоскостью, а верхний берег отходит от матрицы, создавая тем самым трещину. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нормальной нагрузки Q, приложенной в средней точке включения и распределенной нагрузки $P_0(x)$, приложенной к верхнему берегу трещины.

Требуется определить контактные напряжения, действующие в зоне контакта включения с плоскостью, коэффициенты интенсивности напряжений в концевых точках трещины и выявить закономерности их изменения в зависимости от упругих характеристик материала полуплоскости.

Мысленно разделим плоскость на верхнюю полуплоскость и на нижнюю, снабдив индексами "1" и "2" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полуплоскостей. Тогда поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(1)}(x,+0)=\sigma_y^{(2)}(x,-0)\\
&\tau_{xy}^{(1)}(x,+0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,-0)\\
&U_1(x,+0)=U_2(x,-0)\\
&V_1(x,+0)=V_2(x,-0)
\end{aligned}\qquad (|x|>a) \tag{1.1a}$$

$$\begin{aligned}
&U_2(x,-0)=0;\\
&V_2(x,-0)=\delta;\\
&\sigma_y^{(1)}(x,+0)=-P_0(x);\\
&\tau_{xy}^{(1)}(x,+0)=0.
\end{aligned}\qquad (|x|<a) \tag{1.1b}$$

Здесь $U_j(x,y)$ и $V_j(x,y)$ $(j=1,2)$ – горизонтальные и нормальные компоненты смещений соответствующих полуплоскостей, $\sigma_y^{(j)}(x,y)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$– компоненты тензора напряжений этих полуплоскостей, а δ– неизвестная постоянная, описывающая жесткое смещение включения по направлению оси Oy. При этом компоненты смещения, каждая в своей области определения удовлетворяют уравнениям [2-5]:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2}+(1+a_{12})\frac{\partial^2 V_j}{\partial x\partial y}=0\\
&\frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2}+a_{22}\frac{\partial^2 V_j}{\partial y^2}+(1+a_{12})\frac{\partial^2 U_j}{\partial x\partial y}=0
\end{aligned}\qquad (j=1,2) \tag{1.2}$$

и связаны с компонентами напряжений по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(j)} &= \mu_{12}\left(a_{12}\frac{\partial U_j}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial V_j}{\partial y}\right) \\ \tau_{xy}^{(j)} &= \mu_{12}\left(\frac{\partial U_j}{\partial y}+\frac{\partial V_j}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad \left(j=1,2\right) \tag{1.3}$$

где $a_{ij}=c_{ij}/c_{33}\ \left(i,\,j=1,2\right)$, $\mu_{12}=c_{33}$, c_{ij} – компоненты тензора Коши. Постоянные a_{ij} связаны с физическими постоянными материала полуплоскости формулами:

$$a_{11}=E_1\left[\mu_{12}\left(1-\nu_{12}^2E_2/E_1\right)\right]^{-1}\ ;\quad a_{22}=a_{11}E_2/E_1;\quad a_{12}=\nu_{12}a_{22}=\nu_{21}a_{11}\quad .$$

Чтобы решить поставленную задачу введем функции скачков смещений и напряжений $U\left(x\right),V\left(x\right),\sigma\left(x\right),\tau\left(x\right)$ и условия (1.1а) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_y^{(1)}\left(x,+0\right)-\sigma_y^{(2)}\left(x,-0\right)=\sigma\left(x\right) \\ &\tau_{xy}^{(1)}\left(x,+0\right)-\tau_{xy}^{(2)}\left(x,-0\right)=\tau\left(x\right) \\ &U_1\left(x,+0\right)-U_2\left(x,-0\right)=U\left(x\right) \\ &V_1\left(x,+0\right)-V_2\left(x,-0\right)=V\left(x\right) \end{aligned} \quad \left(-a<x<a\right); \tag{1.4}$$

$$U\left(x\right)=V\left(x\right)=\sigma\left(x\right)=\tau\left(x\right)=0\quad \left(\left|x\right|>a\right).$$

Сначала построим решение системы (1.2), удовлетворяющее условиям (1.1а), (1.4), и выразим компоненты напряжений и смещений через функции скачков. Решая эту задачу при помощи преобразования Фурье, для искомых величин получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{dU_2(x,-0)}{dx} &= -\frac{a_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{V'(s)}{s-x}ds-\frac{b_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds-\frac{1}{2}U'(x); \\ \frac{dV_2(x,-0)}{dx} &= \frac{a_2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{U'(s)}{s-x}ds-\frac{b_2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds-\frac{1}{2}V'(x); \\ \sigma_y^{(1)}(x,+0) &= \frac{c_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{V'(s)}{s-x}ds-\frac{d_1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{T(s)}{s-x}ds+\frac{1}{2}\sigma(x); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,+0) &= \frac{c_2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{U'(s)}{s-x}ds+\frac{d_2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sigma(s)}{s-x}ds+\frac{1}{2}\tau(x); \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$a_1=\frac{(a_{12}-\sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}\,(\mu_1+\mu_2)};\quad a_2=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}a_1;\ b_1=\frac{(1+\sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\mu_{12}\sqrt{a_{11}a_{22}}\,(\mu_1+\mu_2)};\ b_2=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}b_1;$$

$$c_1=\frac{\mu_{12}(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}\,(\mu_1+\mu_2)};\ c_2=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}c_1;d_1=\frac{(a_{12}-\sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}\,(\mu_1+\mu_2)};\ d_2=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}d_1.$$

Нетрудно убедиться, что вводя комплексные функции

$$\begin{aligned} &W'(x)=U'(x)+i\alpha V'(x); \\ &\chi(x)=\sigma(x)-i\alpha\tau(x);\quad (\alpha=\sqrt[4]{a_{22}/a_{11}}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

соотношения (1.5) можно представить в следующей форме:

$$\frac{dU_2(x,-0)}{dx}+i\alpha\frac{dV_2(x,-0)}{dx}=$$
$$=-\frac{a_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds+\frac{b_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)}{s-x}ds-\frac{1}{2}W'(s); \tag{1.7}$$
$$\sigma_y^{(1)}(x,+0)-i\alpha\tau^{(1)}(x,+0)=$$
$$=\frac{c_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds+\frac{d_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)}{s-x}ds+\frac{1}{2}\chi(s). \quad (-\infty<x<\infty) \tag{1.8}$$

Теперь, используя полученные формулы, удовлетворим условиям (1.1b) первоначально записывая их в виде:

$$\frac{dU_2(x,-0)}{dx}+i\alpha\frac{dV_2(x,-0)}{dx}=0;$$
$$\sigma_y^{(1)}(x,+0)-i\alpha\tau^{(1)}(x,+0)=-P_0(x). \tag{1.9}$$

В результате придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}W'(s)-\frac{a_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds+\frac{b_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)}{s-x}ds=0\\ \frac{1}{2}\chi(s)+\frac{c_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{W'(s)}{s-x}ds+\frac{d_1}{\alpha\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)}{s-x}ds=-P_0(x);\end{cases} \tag{1.10}$$

Систему нужно рассматривать совместно с условиями равновесия включения и равенства нулю смещений в концевых точках включения. Эти условия при помощи функции $\chi(x)$ и $W'(x)$ можно записать в форме:

$$\int_{-a}^{a}\chi(x)dx=Q'; \quad \int_{-a}^{a}W'(x)dx=0; \quad \left(Q'=Q-\int_{-a}^{a}P_0(x)dx\right). \tag{1.11}$$

2. Перейдем к решению определяющей системы сингулярных интегральных уравнений (1.10) при условиях (1.11). Для этого умножим первое из уравнений (1.10) поочередно на $-\beta_j\ (j=1,2)$ и просуммируем со вторым. Принимая при этом

$$\beta_j=(-1)^{j+1}i\beta; \qquad \beta=\mu_{12}\sqrt{\frac{(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)}{(1+\sqrt{a_{11}a_{22}})}} \tag{2.1}$$

и обозначив

$$\varphi_j(x)=\chi(x)-\beta_jW'(x)\ (j=1,2), \tag{2.2}$$

после некоторых преобразований придем к решению следующих двух отдельных сингулярных интегральных уравнений:

$$\varphi_j(x)+\frac{q_j}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_j(s)}{s-x}ds=-2P_0(x) \quad (j=1,2). \tag{2.3}$$

Здесь

$$q_j=2i\frac{b_1\beta_j+d_1}{\alpha}=b+ia_j=b+i(-1)^{j+1}a \quad (j=1,2);$$

$$a=\sqrt{\frac{(\sqrt{a_{11}a_{22}}+a_{12})(1+\sqrt{a_{11}a_{22}})}{(\sqrt{a_{11}a_{22}}+a_{12}+2)\sqrt{a_{11}a_{22}}}};\quad b=-\sqrt{\frac{(\sqrt{a_{11}a_{22}}-a_{12})}{(\sqrt{a_{11}a_{22}}+a_{12}+2)\sqrt{a_{11}a_{22}}}}.$$

Условия (1.11) в новых обозначениях примут вид

$$\int_{-a}^{a}\varphi_j\left(x\right)dx=Q'\quad\left(j=1,2\right). \tag{2.4}$$

Решения системы сингулярных интегральных уравнений (2.3), удовлетворяющие условиям (2.4), даются формулами [6]:

$$\varphi_j(x)=\frac{2}{1-q_j^2}\left\{-P_0(x)+\frac{q_jX_j^+}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{P_0(s)}{X_j^+(s)(s-x)}ds\right\}-\frac{Q'\sin\pi\gamma_j}{\pi\sqrt{G_j}}X_j^+(x), \tag{2.5}$$

где

$$X_j(z)=(z+a)^{-\gamma_j}(z-a)^{\gamma_j-1}\ ;\ \ G_j=\left(-1\right)^j\frac{ia}{b+1};\ \gamma_j=\frac{\ln\left|G_j\right|}{2\pi i}+\frac{\theta_j}{2\pi}\qquad\left(0\le\theta_j\le2\pi\right).$$

Нетрудно проверить, что $b+1>0$. Откуда $\theta_1=3\pi/2$ и $\theta_2=\pi/2$. Следовательно,

$$\gamma_1=3/4-i\beta_*;\quad \gamma_2=1/4-i\beta_*;\qquad \left(\beta_*=\ln\left|G_j\right|/2\pi\right).$$

Учитывая, что при $\left(-a<x<a\right)$

$$X_j^+(x)=-\sqrt{G_j}\omega_j\left(x\right);\ \omega_j\left(x\right)=(x+a)^{-\gamma_j}(a-x)^{1-\gamma_j};$$

$$\omega_2\left(x\right)=\bar{\omega}_1\left(-x\right);\ \gamma_2=1-\bar{\gamma}_1\ \left(j=1,2\right),$$

формулу (2.5) запишем в виде

$$\varphi_j(x)=\frac{2}{1-q_j^2}\left\{-P_0(x)+\frac{q_j\omega_j\left(x\right)}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{P_0(s)}{\omega_j(s)(s-x)}ds\right\}+\frac{Q'\sin\pi\gamma_j}{\pi}\omega_j(x). \tag{2.6}$$

Далее, по формулам

$$\chi(x)=\left(\varphi_1\left(x\right)+\varphi_2\left(x\right)\right)/2;\quad W'(x)=\left(\varphi_2\left(x\right)-\varphi_1\left(x\right)\right)/2\beta \tag{2.7}$$

для комплексной комбинации скачков напряжений и производных от смещений получим выражения:

$$\begin{gathered}\chi(x)=-P_0(x)+\frac{Q'}{2\pi}\left[\sin\pi\gamma_1\omega_1(x)+s\text{in}\,\pi\bar{\gamma}_1\bar{\omega}_1(-x)\right]+\\+\frac{q_1}{\pi i\left(1-q_1^2\right)}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(s)}-\frac{\bar{\omega}_1(-x)}{\bar{\omega}_1(-s)}\right]\frac{P_0(s)}{s-x}ds;\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}W'(x)=\frac{(1+q_1^2)}{i\beta\left(1-q_1^2\right)}P_0(x)-\frac{Q'}{2\pi i\beta}\left[\sin\pi\gamma_1\omega_1(x)-\sin\pi\bar{\gamma}_1\bar{\omega}_1(-x)\right]+\\+\frac{q_1}{2\pi\beta\left(1-q_1^2\right)}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(s)}+\frac{\bar{\omega}_1(-x)}{\bar{\omega}_1(-s)}\right]\frac{P_0(s)}{s-x}ds.\end{gathered} \tag{2.9}$$

После этого нетрудно определить скачки напряжений и производных от смещений. Они задаются следующими формулами:

$$\begin{gathered}\sigma(x)=-P_0(x)+\frac{q_1}{\pi i\left(1-q_1^2\right)}\text{Re}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(s)}-\frac{\omega_1(-x)}{\omega_1(-s)}\right]\frac{P_0(s)}{s-x}ds+\\+\frac{Q'}{2\pi}\text{Re}\left[\sin\pi\gamma_1\left(\omega_1(x)+\omega_1(-x)\right)\right];\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\tau(x)=\frac{iq_1}{\pi\left(1-q_{1'}^2\right)}\mathrm{Im}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(s)}+\frac{\omega_1(-x)}{\omega_1(-s)}\right]\frac{P_0(s)}{s-x}ds-$$
$$-\frac{Q'}{2\pi\alpha}\mathrm{Im}\left[\sin\pi\gamma_1\left(\omega_1(x)-\omega_1(-x)\right)\right]; \tag{2.11}$$

$$U'(x)=\frac{1+q_{1'}^2}{\left(1-q_{1'}^2\right)i\beta}P_0(x)-\frac{q_1}{\pi i\beta\left(1-q_{1'}^2\right)}\mathrm{Im}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(s)}-\frac{\omega_1(-x)}{\omega_1(-s)}\right]\frac{P_0(s)}{s-x}ds-$$
$$-\frac{Q'}{\pi\beta}\mathrm{Im}\left[\sin\pi\gamma_1\left(\omega_1(x)+\omega_1(-x)\right)\right]; \tag{2.12}$$

$$V'(x)=\frac{q_1}{2\pi i\alpha\beta\left(1-q_{1'}^2\right)}\mathrm{Re}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\omega_1(x)}{\omega_1(s)}+\frac{\omega_1(-x)}{\omega_1(-s)}\right]\frac{P_0(s)}{s-x}ds+$$
$$+\frac{Q'}{2\pi\alpha\beta}\mathrm{Re}\left[\sin\pi\gamma_1\left(\omega_1(x)-\omega_1(-x)\right)\right]. \tag{2.13}$$

Таким образом, мы полностью определили скачки напряжений и производные от разности смещений. После этого несложно определить напряженно-деформированное поле во всей плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильина И.И., Сильвестров В.В Задача о тонком жестком межфазном включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды.//Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.153-166.
2. Акопян В.Н. Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве. //В сб. трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, Ереван, 2007, с. 45-50.
3. Лехницкий С.Г . Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
4. Горшков А.Г.,Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 351 с.
5. Докучаев С.А.,Зеленцов В.Б., Сахабудинов Р.В. Об ударе плоского штампа в упругую ортотропную полуплоскость // Изв. РАН. МТТ. 2009. №1. С.53–66.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Сведения об автора

Акопян Ваграм Наслетникович,
доктор физ.-мат.наук, Директор Института механики НАН Армении
Тел: (37410) 52-48-90; e-mail: vhakobyan@sci.am

Симонян Артур Рафикович,
соискатель Института механики НАН Армении
Тел: (093) 195-193; e-mail: sim-ar@yandex.ru

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Алваджян Ш. И.

Асимптотический подход для построения теорий микрополярно-упругих изотропных тонких балок, пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением, << с малой сдвиговой жесткостью>> развит в работах [1-4]. В данной работе асимптотическим подходом построены основные уравнения и граничные условия микроплярных упругих ортотропных балок.

1.Постановка задачи плоского напряженного состояния несимметричной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений.

Рассмотрим прямоугольник ($0 \le x_1 \le a, -h \le x_2 \le h$), где имеют место уравнения и граничные условия плоской задачи несимметричной теории упругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений [5]:

<u>уравнения равновесия</u>

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=0, \quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0 \tag{1.1}$$

<u>физические соотношения</u>

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}=A_{11}\varepsilon_{11}+A_{12}\varepsilon_{22},\\
&\sigma_{22}=A_{12}\varepsilon_{11}+A_{22}\varepsilon_{22},\\
&\sigma_{12}=A_{77}\varepsilon_{12}+A_{78}\varepsilon_{21},\\
&\sigma_{21}=A_{78}\varepsilon_{12}+A_{88}\varepsilon_{21},\\
&\mu_{13}=B_{66}\chi_{13},\mu_{23}=B_{44}\chi_{23}.
\end{aligned}
\quad \text{или} \quad
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{11}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{22}\\
&\varepsilon_{22}=-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{11}+\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sigma_{22}\\
&\varepsilon_{12}=\frac{A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21}\\
&\varepsilon_{21}=-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}+\frac{A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21}\\
&\chi_{13}=\frac{1}{B_{66}}\mu_{13},\chi_{23}=\frac{1}{B_{44}}\mu_{23}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

<u>геометрические соотношения</u>

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3, \quad \varepsilon_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3, \quad \chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}, \quad \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2} \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{21}$ – силовые напряжения; μ_{13},μ_{23} – моментные напряжения; u_1,u_2 – линейные перемещения; μ_3 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_3; $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$ – упругие константы материала рассматриваемого тела.

На лицевых сторонах прямоугольника $x_2=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\pm_{21}=\pm X^{\pm}, \pm_{22}=\pm Y^{\pm}, «_{23}=\pm M^{\pm}. \tag{1.4}$$

На боковых кромках прямоугольника $x_1=0$ и $x_1=a$ примем следующие варианты граничных условий несимметричной теории упругости:

$$\sigma_{11}=\varphi_1(x_2),\sigma_{12}=\varphi_2(x_2),\mu_{13}=\varphi_3(x_2) \quad \text{(задача1)}, \tag{1.5}$$

$$\sigma_{11}=\varphi_1(x_2),u_2=0,\mu_{13}=\varphi_3(x_2) \quad \text{(задача2)}, \tag{1.6}$$

$$u_1=0,u_2=0,\omega_3=0 \quad \text{(задача3)}. \tag{1.7}$$

2. Асимптотический метод. Предполагается, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной, т. е. $2h << a$, $\delta = h/a << 1$ – основной малый геометрический параметр задачи.

Для построения внутреннего итерационного процесса в двумерных уравнениях (1.1)-(1.3) плоской задачи несимметричной теории упругости ортотропного тела перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных:

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \zeta = \frac{x_2}{h} \tag{2.1}$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{a}, \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \bar{\mu}_{i3} = \frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}. \tag{2.2}$$

В итоге получим сингулярно-возмущенную с малым параметром ₵ краевую задачу:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial \xi} + \delta^{-1}\frac{\partial \bar{\sigma}_{21}}{\partial \zeta} = 0,\\
&\frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \xi} + \delta^{-1}\frac{\partial \bar{\sigma}_{22}}{\partial \zeta} = 0,\\
&\frac{\partial \bar{\mu}_{13}}{\partial \xi} + \delta^{-1}\frac{\partial \bar{\mu}_{23}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12} - \bar{\sigma}_{21} = 0.
\end{aligned}
\quad \text{и} \quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \xi} = \frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{11} - \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{22},\\
&\delta^{-1}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \zeta} = -\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{11} + \frac{A_{11}^{\ 2}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{22},\\
&\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} - \omega_3 = \frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{12} - \frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{21},\\
&\delta^{-1}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \zeta} + \omega_3 = -\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{12} + \frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}\bar{\sigma}_{21},\\
&\frac{\partial \omega_3}{\partial \xi} = \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\bar{\mu}_{13}, \qquad \delta^{-1}\frac{\partial \omega_3}{\partial \zeta} = \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\bar{\mu}_{23}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Решение (2.3) складывается из суммы внутренней задачи (прикладной-одномерной теории) и задач пограничного слоя (около боковых граней прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a$).

Введём также следующие безразмерные физические параметры:

$$\begin{gathered}
\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}{A_{11}A_{22}}, \ \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}{A_{11}A_{12}}, \ \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}{A_{11}^{\ 2}}, \ \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{88} - A_{78})}, \ \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{77} - A_{78})},\\
\frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{88} + A_{78})}, \ \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{77} + A_{78})}, \ \frac{B_{66}}{a^2A_{11}}, \ \frac{B_{44}}{a^2A_{11}}
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Решение внутренней задачи представим в форме:

$$Q = \delta^{-q}\sum_{s=0}^{S}\delta^{s}Q^{(s)} \ , \tag{2.5}$$

где s – номер асимптотического приближения, Q – любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и независимого поворота, q – натуральное число, разное для разных величин, которое определяется из условия непротиворечивости рекуррентной системы уравнений после подстановки разложения (2.5) в преобразованную систему (1.1)-(1.3) и приравнивания в каждом уравнении к нулю коэффициенты при всех степенях δ .

3.Прикладная одномерная статическая теория изгиба микрополярных ортотропных балок с независимыми полями перемещений и вращений

Для безразмерных физических параметров (2.4) примем значения:

$$\begin{gathered}
\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}{A_{11}A_{22}} \sim 1, \ \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}{A_{11}A_{12}} \sim 1, \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}{A_{11}^{\ 2}} \sim 1, \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{88} - A_{78})} \sim 1, \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{77} - A_{78})} \sim 1\\
\frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{88} + A_{78})} \sim 1, \ \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^{\ 2}}{A_{11}(A_{77} + A_{78})} \sim 1, \ \frac{B_{66}}{a^2A_{11}} \sim 1, \ \frac{B_{44}}{a^2A_{11}} \sim 1
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Для значений q в разложении (2.5) будем иметь:

$$q = \begin{cases} 0, & \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{u}_1, \bar{\mu}_{23},\\ 1, & \bar{\sigma}_{21}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{u}_2, \bar{\mu}_{13}, \omega_3. \end{cases} \tag{3.2}$$

Тогда получим следующую систему уравнений в асимптотических приближениях s:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \pm_{11}^{(s-2)}}{\partial \P}+\frac{\partial \pm_{21}^{(s)}}{\partial \text{¸}}=0, \qquad
&&\frac{\partial \overline{u}_1^{(s)}}{\partial \P}=\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\pm_{11}^{(s)}-\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\pm_{22}^{(s)},\\
&\frac{\partial \pm_{12}^{(s)}}{\partial \P}+\frac{\partial \pm_{22}^{(s)}}{\partial \text{¸}}=0,
&&\frac{\partial \overline{u}_2^{(s)}}{\partial \text{¸}}=-\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\pm_{11}^{(s-2)}+\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\pm_{22}^{(s-2)},\\
&\frac{\partial «_{13}^{(s)}}{\partial \P}+\frac{\partial «_{23}^{(s)}}{\partial \text{¸}}+\pm_{12}^{(s)}-\pm_{21}^{(s)}=0,
&&\frac{\partial \overline{u}_2^{(s)}}{\partial \P}-\mu_3^{(s)}=\frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\pm_{12}^{(s)}-\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\pm_{21}^{(s)},\\
& &&\frac{\partial \overline{u}_1^{(s)}}{\partial \text{¸}}+\mu_3^{(s)}=-\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\pm_{12}^{(s)}+\frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\pm_{21}^{(s)},\\
& &&\frac{\partial \mu_3^{(s)}}{\partial \P}=\frac{a^2A_{11}}{B_{66}}«_{13}^{(s)}, \qquad \frac{\partial \mu_3^{(s)}}{\partial \text{¸}}=\frac{a^2A_{11}}{B_{44}}«_{23}^{(s-2)}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Уравнения (3.3) в асимптотических приближениях s легко интегрируются по координате ¸ . В итоге для описания внутреннего напряженно-деформированного состояния остается выяснить роль переменной ¶ , задающей положение точки на средней линии прямоугольника.

С этой точки зрения целесообразно ввести вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные по высоте прямоугольника усилия и моменты:

$$N_{12}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dx_2,\qquad N_{21}=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dx_2,\quad L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dx_2,\qquad M_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}x_2dx_2. \tag{3.4}$$

Важная сторона построенной асимптотики внутренней задачи состоит в том, что асимптотические приближения перемещения $W^{(s)}$ точек средней линии прямоугольника и повороты этих точек $\Omega_3^{(s)}$ вокруг оси x_3, начиная с исходного приближения $(s=0)$, не связаны между собой. В связи с этим получаемую одномерную теорию (при s=0) на основе внутренней задачи будем называть теорией с независимыми полями перемещений и вращений.

Приведем определяющую систему уравнений для исходного приближения внутренней задачи, т.е. для прикладной одномерной статической теории изгиба микрополярных ортотропных балок с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-\left(Y^++Y^-\right),\ \frac{dL_{13}}{dx_1}+N_{12}-N_{21}=-\left(M^++M^-\right),\quad \text{где}\qquad N_{21}=h\left(X^+-X^-\right) \tag{3.5}$$

физические соотношения

$$N_{12}=\frac{2h\left(A_{77}A_{88}-A_{78}^2\right)}{A_{88}}\Gamma_{12}+\frac{A_{78}}{A_{88}}N_{21},\qquad L_{13}=2hB_{66}k_{13}. \tag{3.6}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{12}=\frac{dW}{dx_1}-\Omega_3,\qquad k_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1}\ . \tag{3.7}$$

Изучим краевые упругие явления с использованием несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонком прямоугольнике. Краем прямоугольника, вблизи которого будем исследовать напряженное состояние пограничного слоя, пусть будет сторона прямоугольника $x_1=0$.

Введем в уравнение плоской задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (1.1)-(1.3) преобразования растяжения

$$t=x_1/h,\quad \zeta=x_2/h \tag{3.8}$$

и перейдем к безразмерным величинам по формулам (2.2).

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения:

$$R=\sum_{s=0}^{S}\delta^{\chi_R+s}R^{(s)}\ , \tag{3.9}$$

где R – любая из величин рассматриваемой задачи. Так как силовые и моментные неоднородные граничные условия (1.4), заданные на сторонах прямоугольника $\zeta = \pm 1$, соответствуют решениям внутренней задачи, то решение (3.9) должно удовлетворять однородным граничным условиям:

$$\bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\mu}_{23} = 0. \text{ при } \zeta = \pm 1 \tag{3.10}$$

После подстановки (3.9) в преобразованную систему уравнений (1.1)-(1.3) с учетом (3.1) и приравнивания коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ¢ в правых и левых частях, начиная с наименьшей, получим непротиворечивую систему рекуррентных уравнений относительно величин $R^{(s)}$, если

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma}_{ij} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \bar{\sigma}_{ij}^{(s)} \quad (i, j = 1,2), \qquad \bar{u}_i = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \bar{u}_i^{(s)} \quad (i = 1,2), \\ &\bar{\mu}_{i3} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \bar{\mu}_{i3}^{(s)} \quad (i = 1,2), \qquad \omega_3 = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^{S} \delta^{s} \omega_3^{(s)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где целое число ¡ характеризует интенсивность пограничного слоя.

Полученную систему уравнений в асимптотических приближениях s можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\ &\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial t} = \frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11}^{(s)} - \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}^{(s)}, \\ &\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \zeta} = -\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{11}^{(s)} + \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \bar{\sigma}_{22}^{(s)}, \\ &\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial t} - \omega_3^{(s-1)} = \frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}^{(s)}, \\ &\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_3^{(s-1)} = -\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{12}^{(s)} + \frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \bar{\sigma}_{21}^{(s)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} = 0, \quad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial t} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \bar{\mu}_{13}^{(s)}, \qquad \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \bar{\mu}_{23}^{(s)}. \tag{3.13}$$

Отметим, что при любом s решение погранслойных уравнений (3.12), (3.13) обладает некоторыми важными свойствами, которые можно получить непосредственно из указанных уравнений, если к ним применить следующие интегральные операторы:

$$\int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} dt, \qquad \int_{-1}^{1} \zeta d\zeta \int_{0}^{\infty} dt, \qquad \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} t dt.$$

В итоге будем иметь следующие интегральные соотношения, которых иначе называют условиями затухания решения задачи пограничного слоя (ниже приводятся условия затухания в случае задачи изгиба):

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \bar{\sigma}_{12}^{(s)} (t=0) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^{1} \bar{\mu}_{13}^{(s)} (t=0) d\zeta = \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} \left(\bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} \right) dt, \\ &\int_{-1}^{1} \omega_3^{(s)} (t=0) d\zeta = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} t \left(\bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} \right) dt, \\ &\int_{-1}^{1} \zeta \bar{\sigma}_{11}^{(s)} (t=0) d\zeta + \frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{78}A_{11}} \int_{-1}^{1} \bar{u}_2^{(s)} (t=0) d\zeta = -\frac{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}{A_{78}A_{11}} \int_{-1}^{1} d\zeta \int_{0}^{\infty} \omega_3^{(s-1)} dt. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Таким образом, построили два типа решений: решение внутренней задачи и решения для пограничных слоев. Их сумма

$$I = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \tag{3.15}$$

является решением исходной сингулярно-возмущенной краевой задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений для тонкой прямоугольной области. Здесь Q – решение внутренней задачи; $R_p^{(1)}, R_p^{(2)}$ – решения задачи пограничных слоев, построенные соответственно вблизи $x_1 = 0$ и $x_1 = a$.

Перейдем к изучению проблемы разделения двумерных граничных условий (1.5)-(1.7) несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений на граничных кромках прямоугольника $x_1 = 0$ и $x_1 = a$, в рамках которого необходимо выяснить вопрос о том, какие граничные условия надо приписывать к внутренним (к прикладной теории) и какие – к дифференциальным уравнениям пограничного слоя. Для удовлетворения граничным условиям (1.5)–(1.7) на кромке $x_1 = 0$ прямоугольника рассмотрим первую краевую задачу (1.5).

Подставляя (3.15) в (1.5) и учитывая (2.5) и (3.11) , а также то, что при $x_1 = 0$ проявляет себя $R_p^{(1)}$ (т.е. продольный размер a прямоугольника таков, что влиянием пограничного слоя $R_p^{(2)}$ при $x_1 = a$ на торце $x_1 = 0$ можно пренебречь), выбирая $\chi = -1$ (для получения непротиворечивого итерационного процесса удовлетворения граничным условиям), при $s = 0$ будем иметь:

$$\bar{\sigma}_{11}^{n(0)} = 0, \quad \bar{\sigma}_{12}^{вн(0)} + \bar{\sigma}_{12}^{n(0)} = \tilde{\varphi}_2, \quad \bar{\mu}_{13}^{вн(0)} + \bar{\mu}_{13}^{n(0)} = \tilde{\varphi}_3, \quad \text{где } \phi_2 = \delta^{-1} A_{11} \tilde{\varphi}_2, \; \varphi_3 = \delta^{-1} a A_{11} \tilde{\varphi}_3. \tag{3.16}$$

Здесь для величин погранслоев, принимая условия затухания (3.14), приходим к граничным условиям прикладной одномерной теории:

$$N_{12}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_2 dx_2, \quad L_{13}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3 dx_2. \tag{3.17}$$

Таким образом, система уравнений (3.5)-(3.7) и граничные условия (3.17) определяют математическую модель (прикладную одномерную теорию) микрополярной упругой ортотропной тонкой балки со свободным вращением (в случае ее изгиба).

Отметим, что при рассмотрении граничных условий (1.6) и (1.7) на кромке прямоугольника $x_1 = 0$ для прикладной одномерной теории микрополярной упругой тонкой балки со свободным вращением аналогичным образом получим соответствующие граничные условия.

$$W\Big|_{x_1=0} = 0, \qquad L_{13}\Big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h} \varphi_3 dx_2. \tag{3.18}$$

$$W\Big|_{x_1=0} = 0, \qquad \Omega_3\Big|_{x_1=0} = 0. \tag{3.19}$$

Имея в виду (3.17) (или (3.18),(3.19)), из (3.16) получим краевые условия для микрополярных пограничных слоев (3.12), (3.13) при $s = 0$.

Отметим, что асимптотическим методом аналогичным образом, как в работе [1], построены также основные уравнения и граничные условия для микрополярных упругих ортотропных балок со стесненным вращением и $\ll$с малой сдвиговой жесткостью$\gg$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. № 5. С.41–54.
2. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. № 1. С.129–147.
3. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309–319.
4. Саркисян С.О. Особенности напряженно-деформированного состояния тонких пластин в рамках теории микрополярной упругости //Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т.2. № 1. С.81–95.
5. Iesan D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids // Archives of Mechanics.1973. Vol.5. № 3. P.547–561.

<u>Сведения об авторе:</u>

Алваджян Шушаник,

Аспирант Гюмрийского государственного педагогического института

им. М. Налбандяна,377526, г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, д. 4,E-mail; alvajyanshushan@mail.ru

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗГИБАЮЩЕЙСЯ ПО ТЕОРИИ С.П. ТИМОШЕНКО БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ

Амирбекян А. Н.

Рассматривается задача об изгибе балки конечной длины на упругой полуплоскости по обобщенной модели изгиба в рамках теории С.П.Тимошенко, где помимо вертикальных сил осевые касательные силы также влияют на прогибы балки.

В работе [1] по классической теории изгиба балок методом сингулярных интегральных уравнений (СИУ) в сочетании с известным численно-аналитическим методом решения СИУ [2-4] построено решение задачи об изгибе балки конечной длины на деформируемом основании в виде упругой полуплоскости. Здесь эта задача рассматривается по обобщенной модели изгиба балки в рамках теории С.П.Тимошенко [5, 6], где помимо влияния вертикальных сил учитывается также влияние осевых касательных сил на прогибы балки. В такой постановке решение задачи опять сведено к решению СИУ, но более сложной структуры, и его решение опять построено указанным методом.

1. Пусть упругая бесконечная в одном направлении пластина $\Omega=\left\{-a<x<a;\ o<y<h;\ -\infty<z<\infty\right\}$ ширины $2a$ и высоты h, отнесенная к правой прямоугольной системе координат Oxyz, обладает модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1. Пусть далее под действием вертикальных сил интенсивности $q(x,z)$, приложенных к верхней грани пластины $y=h$ и направленных по отрицательной оси Oy, и касательных сил интенсивности $T(x,z)$, действующих в срединной плоскости пластины $y=h/2$ и направленных по оси Ox, пластина Ω изгибается на деформируемом основании в виде нижнего упругого полупространства $y<0$ с соответсвующими упругими постоянными E, ν. Предположим, что нагрузки $q(x,z)$ не зависят от координаты z: $q(x,z)=q(x)$, а $T(x,z)=T=\text{const}$. Тогда придем к случаю плоской деформации с базовой плоскостью деформации Oxy и из общих уравнений изгиба пластины $[6]$ (стр. 422) в этом частном случае получим следующее дифференциальное уравнение изгиба балки $\omega=\left\{-a<x<a;0<y,<h\right\}$ длины $2a$ и высоты h на упругой полуплоскости $y<0$ с учетом влияния осевых касательных сил постоянной интенсивности T на прогибе балки:

$$D\frac{d^4v_1}{dx^4}+T\frac{d^2v_1}{dx^2}=p(x)-q(x)\,;\, D=E_1h^3/12;-a<x<a\,) \tag{1a,b}$$

Здесь D– жесткость балки на изгиб, $v_1=v_1(x)$– вертикальные смещения точек балки, т.е. её прогибы в сечении x, а функцией $p(x)$ описывается закон распределения нормальных контактных напряжений, действующих на участке контакта балки и нижней упругой полуплоскости $L=\left\{y=0;-a<x<a\right\}$. Требуется определить функцию $p(x)$, а также изгибающий момент $M(x)$ и поперечную силу $Q(x)$ в сечении балки x:

$$M(x)=D\frac{d^2v_1}{dx^2},\quad Q(x)=D\frac{d^3v_1}{dx^3}\qquad(-a<x<a) \tag{2a,b}$$

Дифференциальное уравнение (1a,b) будем рассматривать при граничных условиях

$$M(x)\Big|_{x=\pm a}=D\frac{d^2v_1}{dx^2}\Big|_{x=\pm a}=0, \tag{3}$$

указывающих на отсутствие изгибающих моментов в крайних сечениях балки. При этом условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^{a}p(x)dx=P;\ \int_{-a}^{a}xp(x)dx=M;\quad P=\int_{-a}^{a}q(x)dx\,;\quad M=\int_{-a}^{a}xq(x)dx \tag{4a,d}$$

Выведем определяющие уравнения поставленной задачи. С этой целью сначала исходное уравнение (1a,b) представим в виде $(-a < x < a,\ k = \sqrt{T/D})$

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + k^2 w_1 = g(x)\,,\ w_1 = \frac{d^2 v_1}{dx^2}\,,\ g(x) = D^{-1}\left[p(x) - q(x)\right] \qquad (5a,c)$$

Затем при условиях $w_1(\pm a) = 0$, эквивалентных условиям (3), запишем решение уравнения (5a) $(-a \le x \le a)$:

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{k^{-1}}{\sin(2ka)} \int_{-a}^{a} (\cos^2 ka \sin kx \sin ks - \sin^2 ka \cos kx \cos ks) g(s) ds + \frac{1}{2k} \int_{-a}^{a} \sin(k|x - s|) g(s) ds \qquad (6)$$

Отсюда $(-a \le x \le a)$

$$\frac{d^3 v_1}{dx^3} = \frac{1}{2}\left\{ \int_{-a}^{a} (\mathrm{tg}ka \sin kx \cos ks + \mathrm{ctg}ka \cos kx \sin ks) g(s) ds + \int_{-a}^{a} \cos\left[k(x-s)\right] \mathrm{sign}(x-s) g(s) ds \right\} \qquad (7)$$

Теперь, интегрируя (6) , для производной прогибов балки находим $(-a \le x \le a)$

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^{a} \left\langle \left\{1 - \cos\left[k(x-s)\right]\right\} \mathrm{sign}(x-s) + \mathrm{ctg}ka(1 - \cos kx)\sin ks - \mathrm{tg}ka \sin kx \cos ks \right\rangle g(s) ds + C\,, \qquad (8)$$

где C – пока произвольная постоянная, определяемая далее. Эту постоянную можно интерпретировать как приведенный угол поворота сечения $x = 0$ или одного из крайних сечений балки. С другой стороны, вертикальные смещения граничных точек нижней упругой полуплоскости $y < 0$ от давления балки $p(x)$ выражаются формулой [7] $(-\infty < x < \infty)$

$$v(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-s|} p(s) ds + C_1\,. \qquad (9)$$

Далее (8) и (9) подставим в условие контакта балки и упругого основания по L, $dv/dx = dv_1/dx$, а затем введем безразмерные величины

$$\xi = x/a, \eta = s/a; \delta = ka\ ;.\ \lambda = \frac{3\pi E}{(1-\nu^2)\delta^2 E_1}\left(\frac{a}{h}\right)^3; \gamma = \frac{C}{2(1-\nu^2)};\ \varphi(\xi) = \frac{p(a\xi)}{E}; h(\xi) = \frac{q(a\xi)}{E}$$

В результате, с учетом (5c) относительно неизвестных безразмерных контактных напражений $\varphi(\xi)$, придем к следующему определяющему СИУ задачи $(-1 < \xi < 1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} K(\xi,\eta)\varphi(\eta) d\eta = \lambda f(\xi) + \gamma$$

$$K(\xi,\eta) = \left\{1 - \cos\left[\delta(\xi-\eta)\right]\right\}\mathrm{sign}(\xi-\eta) + \mathrm{ctg}\kappa\left[1-\cos(\delta\xi)\right]\sin(\delta\eta) - \mathrm{tg}\delta \sin(\delta\xi)\cos(\delta\eta)\ ;$$

$$f(\xi) = \int_{-1}^{1} K(\xi,\eta) h(\eta) d\eta\,. \qquad (-1 < \xi, \eta < 1) \qquad (10a,c)$$

Решение СИУ (10a,c) должно удовлетворять условиям

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) d\xi = P_0 (P_0 = P/aE)\ ; \qquad \int_{-1}^{1} \xi\varphi(\xi) d\xi = M_0 (M_0 = M/a^2 E)\,, \qquad (11a,b)$$

представляющим собой условия равновесия балки (4a,d) в безразмерных формах. При этом, после решения СИУ (10a,c)-(11a,b) согласно (2a,b), (6) и (7), безразмерные изгибающие моменты $\overline{M}(\xi)$ и поперечные силы $\overline{Q}(\xi)$ в сечении ξ балки будут определяться по формулам:

$$\overline{M}(\xi) = \frac{(2\delta)^{-1}}{\sin(2\delta)} \int_{-1}^{1} \left[\cos^2\delta \sin(\delta\xi)\sin(\delta\eta) - \sin^2\delta\cos(\delta\xi)\cos(\delta\eta)\right]\left[\varphi(\eta) - h(\eta)\right] d\eta +$$

$$+(2\delta)^{-1}\int_{-1}^{1} \sin\left[\delta|\xi-\eta|\right]\left[\varphi(\eta) - h(\eta)\right] d\eta\ ;$$

$$\overline{Q}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left[\mathrm{tg}\delta \sin(\delta\xi)\cos(\delta\eta) + \mathrm{ctg}\delta\cos(\delta\xi)\sin(\delta\eta)\right]\left[\varphi(\eta) - h(\eta)\right] d\eta +$$

$$+\int_{-1}^{1}\cos\left[\delta(\xi-\eta)\right]\operatorname{sign}(\xi-\eta)\left[\varphi(\eta)-h(\eta)\right]d\eta\,;$$

$$\overline{M}(\xi)=M(a\xi)/a^2E\,;\quad \overline{Q}(\xi)=Q(a\xi)/aE \qquad (-1\le\xi\le 1) \qquad (12a,d)$$

Отметим, что при $\delta=ka\to 0$ формулы (10a,c) – (11a,b) и (12a,b) переходят в известные формулы для случая изгиба балки по классической теории $[1]$.

2. К СИУ (10a,c) – (11a,b) применим изложенный в $[2-4]$ численно-аналитический метод. С этой целью в (10a,c) - (11a,b) положим

$$\varphi(\xi)=\chi(\xi)\Big/\sqrt{1-\xi^2} \qquad (-1<\xi<1)\,,$$

где $\chi(\xi)$ –функция из гельдеровского класса функций на отрезке $[-1;1]$. Далее следуя известной процедуре из $[4]$, СИУ (10a,c)- (11a,b) сведем к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{N}\left[\frac{1}{\eta_m-\xi_r}+\lambda K(\xi_r,\eta_m)\right]\chi(\eta_m)=\lambda f(\xi_r)+\gamma;(r=\overline{1,N-1})\\ \displaystyle\frac{\pi}{N}\sum_{m=1}^{N}\chi(\eta_m)=P_0, \qquad \frac{\pi}{N}\sum_{m=1}^{N}\eta_m\chi(\eta_m)=M_0\end{cases} \qquad (13)$$

Здесь N – любое натуральное число, а

$$\eta_m=\cos\left(\frac{2m-1}{2N}\pi\right)\ \left(m=\overline{1,N}\right);\quad \xi_r=\cos\left(\frac{\pi r}{N}\right)\ \left(r=\overline{1,N-1}\right)$$

чебышевские узлы – корни многочленов Чебышева первого рода $T_N(\eta)$ и второго рода $U_{N-1}(\xi)$,соответственно. Отметим, что система (13) состоит из $N+1$ линейных уравнений и содержит $N+1$ неизвестных $\chi(\eta_1),\chi(\eta_2),......\chi(\eta_N),\gamma$. Далее систему (13) представим в канонической форме

$$\sum_{m=1}^{N+1}K_{rm}X_m=a_r \qquad \left(r=\overline{1,N+1}\right), \qquad (14)$$

где введены следующие обозначения:

$$K_{rm}=\begin{cases}\displaystyle\frac{1}{N}\left[\frac{1}{\eta_m-\xi_r}+\lambda K(\xi_r,\eta_m)\right]\left(m=\overline{1,N},r=\overline{1,N-1}\right); & -1\ \left(r=\overline{1,N-1},m=N+1\right);\\ \pi/N \qquad \left(r=N,m=\overline{1,N}\right); & 0 \qquad \left(r=N,m=N+1\right);\\ \pi\eta_m/N \qquad \left(r=N+1,m=\overline{1,N}\right); & 0 \qquad \left(r=N+1,m=N+1\right);\end{cases} \qquad (15)$$

$$X_m=\left\{\chi(\eta_m)\left(m=\overline{1,N}\right);\,\gamma\left(m=N+1\right)\right\};\ \ a_r=\left\{\lambda f(\xi_r)\left(r=\overline{1,N-1}\right);\,P_0\left(r=N\right);\,M_0\left(r=N+1\right)\right\} \qquad (16)$$

Чтобы в решении системы (14)–(16) выделить вклады постоянных P_0 и M_0, введем в рассмотрение векторы-столбцы

$$a_r^{(1)}=\begin{pmatrix}\left\{\lambda f(\xi_r)\right\}_{r=1}^{N}\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad a_r^{(2)}=\begin{pmatrix}\left\{0\right\}_{r=1}^{N-1}\\ 1\\ 0\end{pmatrix};\quad a_r^{(3)}=\begin{pmatrix}\left\{0\right\}_{r=1}^{N-1}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Теперь решение системы (14) с правыми частями $a_r^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ обозначим, соответствнно, через $X_m^{(j)}(j=1,2,3)$. Тогда решение системы (14)–(16) будет выражаться формулой

$$X_m=X_m^{(1)}+P_0X_m^{(2)}+M_0X_m^{(3)} \qquad \left(m=\overline{1,N+1}\right) \qquad (17)$$

После того, как найдено решение системы (14)-(16), по формулам (12a,d) можно вычислить безразмерные изгибающие моменты и поперечные силы. Их значения в узлах ξ_r будут определяться формулами $(r=\overline{1,N-1})$

$$\overline{M}(\xi_r)=\frac{\pi}{\delta N\sin(2\delta)}\sum_{m=1}^{N}\left[\cos^2\delta\sin(\delta\xi_r)\sin(\delta\eta_m)-\sin^2\delta\cos(\delta\xi_r)\cos(\delta\eta_m)\right]\left[X_m-\sqrt{1-\eta_m{}^2}h(\eta_m)\right]+$$

$$+\frac{\pi}{2\delta N}\sum_{m=1}^{N}\sin\left[\delta\left|\xi_r-\eta_m\right|\right]\left[X_m-\sqrt{1-\eta_m{}^2}h(\eta_m)\right]$$

$$\overline{Q}(\xi_r)=\frac{\pi}{2N}\left\{\sum_{m=1}^{N}\left[\mathrm{tg}\delta\sin(\delta\xi_r)\cos(\delta\eta_m)+\mathrm{ctg}\delta\cos(\delta\xi_r)\sin(\delta\eta_m)\right]\left[X_m-\sqrt{1-\eta_m{}^2}h(\eta_m)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{N}\cos\left[\delta(\xi_r-\eta_m)\right]\mathrm{sign}(\xi_r-\eta_m)\left[X_m-\sqrt{1-\eta_m{}^2}h(\eta_m)\right]\right\} \qquad (18a,b)$$

Отметим, что значения решения СИУ (10a,c) - (11a,b) в чебышевских узлах будут

$$\varphi(\eta_m)=\chi(\eta_m)\Big/\sqrt{1-\eta_m{}^2}=X_m\Big/\sqrt{1-\eta_m{}^2} \qquad (19)$$

где коэффициенты X_m имеют вид (17). Отметим еще, что в качестве внешней нагрузки можно взять $q(a\xi)/E=h(\xi)=|\xi|^p$ $(p=0,1,2,...)$ или их линейную комбинацию, т.е. четную функцию от ξ в виде многочлена. Но если $h(\xi)$ – четная функция, то легко показать, что $f(\xi)$ – нечетная функция, $\gamma=0$ и, следовательно, решение СИУ (10a,c) - (11a,b) $\varphi(\xi)$– четная функция (функция $\chi(\xi)$ также четная). В этом случае моментное условие равновесия балки (11b) автоматически удовлетворяется и выпадает из рассмотрения. Тогда последняя строка системы (13) также выпадает. В этом случае система (13) опять запишется в форме (14), но ее матрица и правая часть упростятся и примут вид

$$K_{rm}=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\left[\dfrac{1}{\eta_m-\xi_r}+\lambda K(\xi_r,\eta_m)\right] & (m=\overline{1,N},r=\overline{1,N-1})\\[2ex] \dfrac{\pi}{N} & (r=N,m=\overline{1,N})\end{cases};\quad a_r=\begin{cases}\lambda f(\xi_r) & (r=\overline{1,N-1});\\ P_0 & (r=N).\end{cases} \qquad (20a,b)$$

Если теперь положить

$$a_r^{(1)}=\begin{pmatrix}\{\lambda f(\xi_r)\}_{r=1}^{N-1}\\ 0\end{pmatrix};\qquad a_r^{(2)}=\begin{pmatrix}\{0\}_{r=1}^{N-1}\\ 1\end{pmatrix};$$

и обозначить решение системы (14) - (20a,b), соответственно, через $X_m^{(1)}$ и $X_m^{(2)}$, то вместо формулы (17) будем иметь формулу

$$X_m=X_m^{(1)}+P_0X_m^{(2)}\qquad (m=\overline{1,N}) \qquad (21)$$

В обсуждаемом частном случае формулы (12a,b) остаются в силе, причем $\overline{M}(\xi)$ будет четной функцией, а $\overline{Q}(\xi)$ – нечетной функцией. Остаются в силе также формулы (18a,b).

Далее по интерполяционному многочлену Лагранжа по чебышевским узлам $[4]$

$$\chi(1)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}\chi(\eta_m)\mathrm{ctg}\left(\frac{2m-1}{4N}\pi\right)\ \left(X_m=\chi(\eta_m)\right) \qquad (22)$$

Если ввести в рассмотрение коэффициент концентрации напряжений в концевой точке $\xi=1$ балки

$$K=\lim_{\xi\to 1-0}\left(\sqrt{1-\xi}\varphi(\xi)\right)=\chi(1)\Big/\sqrt{2},$$

то с учетом (22) будем иметь

$$K=\frac{1}{N\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m+1}X_m\mathrm{ctg}\left(\frac{2m-1}{4N}\pi\right) \qquad (23)$$

Численный анализ задачи можно провести по расчетным формулам (14)-(16), (17) (или (20a,b)-(21)), (18a,b),(19) и (23).

Автор благодарит проф. С. М. Мхитаряна за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирбекян А.Н. Решение интегрального уравнения изгиба балки на упругом основании. // В сб. трудов международной школы–конференции молодых ученых «Механика», 28сентября – 1октября, Агавнадзор, Армения, Ереван. 2009, с. 135-139.
2. Erdogan F.,Gupta G. D.,Gook T. S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. Intern.Publ., Leyden, 1973. pp 368-425.
3. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. Quart. Appl.Math., vol.XXXV, N-1.1997, pp 173-185.
4. Панасюк В. В, Саврук М.П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
5. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Т. 2. М.: Наука, 1965, 480с.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963, 635 с.
7. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Госмехтеориздат, 1949, 270 с.

Сведения об авторе:

Амирбекян Аревик Норайровна,
младший научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна $24^{б}$, Институт механики НАН РА.
Тел.: (37410) 52-48-90. **E-mail:** mechins@sci.am

РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ЖЁСТКОГО ШТАМПА ПО ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Амирджанян А.А., Акопян Л.В.

Рассмотрено осесимметричное напряженное состояние бесконечного полого цилиндра, по внутренней поверхности которого с постоянной скоростью движется абсолютно жёсткий кольцевой штамп, а внешняя поверхность свободна от нагрузок или жестко защемлена.

Исследовано поведение контактных напряжений, действующих под штампом, в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра.

Пусть по внутренней поверхности бесконечного упругого полого цилиндра с внутренним радиусом r_0 и внешним радиусом r_1, изготовленного из материала с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν, с постоянной скоростью v_0 движется осесимметричный жёсткий вкладыш. Внешняя поверхность полого цилиндра свободна от нагрузок или жестко защемлена.

Будем считать, что скорость движения вкладыша v_0 меньше скорости распространения поверхностных волн в полом цилиндре, а в зоне контакта цилиндра с вкладышем имеет место сухое трение, т.е. между касательными напряжениями и давлениями под вкладышем имеется связь по закону Кулона

$$\tau(z) = f\,\sigma(z), \tag{1}$$

где f – коэффициент трения.

Ставится задача определить давление в зоне контакта вкладыша с цилиндром и изучить закономерности его изменения в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра и вкладыша.

Предположим, что вкладыш имеет цилиндрическую форму с радиусом $r_0+\delta$. Тогда, условие контакта в движущейся со скоростью v_0 цилиндрической системе координат $Or\varphi z$, ось Oz которой направлена по главной оси цилиндра, будет иметь вид

$$u_r(r_0, z) = \delta, \tag{2}$$

где $u_r(r_0, z)$ – нормальное смещение точек внутренней границы цилиндра, δ – разность радиусов вкладыша и цилиндра.

Согласно результатам работы [1], радиальная компонента перемещений точек внутренней границы цилиндра под воздействием осесимметрично распределенных сосредоточенных нормальных и касательных нагрузок интенсивности P и Q имеет вид

$$u_r(r_0,z)=\frac{P}{\pi\mu}\left(\vartheta_1\ln\frac{1}{|z|}+\int_0^\infty\tilde{K}_{21}(kr_0)\frac{\cos(kz)}{k}dk\right)+\frac{Q}{\pi\mu}\left(\vartheta_0\vartheta_1\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} z+\int_0^\infty\tilde{K}_{22}(kr_0)\frac{\sin(kz)}{k}dk\right)$$

где

$$\vartheta_0=\frac{\beta-\alpha_1\alpha_2}{(1-\beta)\alpha_1};\qquad \vartheta_1=\frac{(1-\beta)\alpha_1}{2(\beta^2-\alpha_1\alpha_2)};\qquad \alpha_1=\sqrt{1-\theta\eta};\qquad \alpha_2=\sqrt{1-\eta};$$

$$\beta=\frac{1+\alpha_2^2}{2}=1-\frac{\eta}{2};\quad \eta=\left(\frac{v_0}{c_2}\right)^2;\quad c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}};\quad c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}};\quad \theta=\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)};$$

а значения функций $\tilde{K}_{ij}(z)\,(i, j=1,2)$ приведены в работе [1] и здесь не повторяются из-за громоздкости.

Тогда, на основании принципа суперпозиции, для распределенных на интервале $(-a,a)$ оси Oz нормальных и касательных нагрузок интенсивности $\sigma(z)$ и $\tau(z)$, связанных условием (1), можем записать:

$$u_r\left(r_0,z\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\left(G\left(\frac{s-z}{r_0}\right)-\frac{\pi}{2}f\vartheta_0\vartheta_1\operatorname{sgn}\left(s-z\right)+\vartheta_1\ln\frac{1}{|s-z|}\right)\frac{\sigma\left(s\right)}{\mu}ds \qquad (3)$$

где

$$G\left(z\right)=\int\limits_0^\infty\tilde{\mathrm{K}}_{21}\left(k\right)\frac{\cos\left(kz\right)}{k}dk-f\int\limits_0^\infty\tilde{\mathrm{K}}_{22}\left(k\right)\frac{\sin\left(kz\right)}{k}dk.$$

Теперь удовлетворим условию контакта (2), первоначально продифференцировав его по z. В итоге для определения неизвестного контактного давления $\sigma\left(x\right)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение второго рода:

$$f\vartheta_0\vartheta_1\frac{\sigma\left(z\right)}{\mu}+\frac{\vartheta_1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{1}{s-z}\frac{\sigma\left(s\right)}{\mu}ds+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\frac{1}{r_0}K\left(\frac{s-z}{r_0}\right)\frac{\sigma\left(s\right)}{\mu}ds=0 \qquad (4)$$

Здесь

$$K\left(z\right)=\int\limits_0^\infty\tilde{\mathrm{K}}_{21}\left(k\right)\sin\left(kz\right)dk+f\int\limits_0^\infty\tilde{\mathrm{K}}_{22}\left(k\right)\cos\left(kz\right)dk.$$

Для получения однозначного решения к уравнению (4) нужно добавить условие

$$u_r\left(r_0,0\right)=\delta. \qquad (5)$$

После решения уравнения (4) при условии (5), легко определить равнодействующее контактных напряжений по формуле

$$\int\limits_{-a}^{a}\sigma\left(x\right)dx=P. \qquad (6)$$

Заметим, что для численных расчетов в качестве дополнительного условия к уравнению (4) удобнее использовать условие (6), задавая наперед равнодействующее контактных напряжений P, а затем, из условия (5), можно будет найти соответствующую разность радиусов вкладыша и цилиндра. В дальнейшем, мы так и поступим.

Чтобы решить уравнение (4) при условии (6), исследуем поведение функции $K\left(z\right)$ в окрестности точки $z=0$. Заметим, что при больших значениях аргумента матрица $\tilde{\mathrm{K}}\left(x\right)=\left\{\tilde{\mathrm{K}}_{ij}\left(x\right)\right\}$ имеет следующее поведение:

$$\tilde{\mathrm{K}}\left(x\right)=\mathrm{R}^1\frac{1}{x}+\mathrm{R}^2\frac{1}{x^2}+\ldots. \qquad (7)$$

$$\mathrm{R}^1=\frac{1-\beta}{2\left(\beta^2-\alpha_1\alpha_2\right)^2}\begin{pmatrix}\beta\left(\alpha_1+\alpha_2\right)-2\alpha_1^2\alpha_2 & \dfrac{\beta^2(1+\beta)-4\beta\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^2\alpha_2^2}{(1-\beta)}+\alpha_2^2\\ \beta^2+\left(1-2\beta\right)\alpha_1^2 & \beta\left(\alpha_1+\alpha_2\right)-2\alpha_1^2\alpha_2\end{pmatrix},$$

где матрицы $\mathrm{R}^i\left(i>1\right)$ также не зависят от внешнего радиуса цилиндра и граничных условий на внешней поверхности и имеют похожий вид.

Заметим, что для произвольной функции, представимой в виде ряда (7), имеют место формулы:

$$\int\limits_0^\infty\tilde{f}\left(k\right)\sin\left(kz\right)dk=\log|z|\sum_{i=1}^\infty\mathrm{R}^{2i}\frac{\left(-1\right)^i z^{2i-1}}{\left(2i-1\right)!}+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\left(z\right)\sum_{i=1}^\infty\mathrm{R}^{2i-1}\frac{\left(-1\right)^i z^{2i-2}}{\left(2i-2\right)!}+e_1\left(z\right);$$

$$\int\limits_0^\infty\tilde{f}\left(k\right)\cos\left(kz\right)dk=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\left(z\right)\sum_{i=1}^\infty\mathrm{R}^{2i}\frac{\left(-1\right)^i z^{2i-1}}{\left(2i-1\right)!}+\log|z|\sum_{i=1}^\infty\mathrm{R}^{2i-1}\frac{\left(-1\right)^i z^{2i-2}}{\left(2i-2\right)!}+e_2\left(z\right);$$

где $e_i\left(z\right)$ $\left(i=1,2\right)$ – функции, гладкие в окрестности точки $z=0$.

Тогда, для функции $K(z)$ в окрестности точки $z=0$ будем иметь следующее представление:

$$K(z)=-\log|z|K_L(z)+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(z)K_S(z)+K_R(z), \qquad (8)$$

где $K_{L,S,R}(z)$ – достаточно гладкие функции, хорошо аппроксимируемые полиномами.

Уравнение (4) будем решать при помощи метода дискретных особенностей [2]. Для этого, при помощи замены переменных

$$z=at;\ \ s=a\tau;\quad s,z\in(-a,a),$$

интегральное уравнение (4) запишем на интервале (-1,1) и введём обозначения

$$\sigma^*(t)=\frac{1}{\mu}\sigma(at);\qquad p^*=\frac{P}{a\mu};\qquad K^*(\tau,t)=\frac{a}{r_0}K\left(\frac{a}{r_0}(\tau-t)\right).$$

Получим уравнение

$$f\vartheta_0\vartheta_1\sigma^*(t)+\frac{\vartheta_1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sigma^*(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K^*(\tau,t)\sigma^*(\tau)d\tau=0. \qquad (9)$$

Условие (6), при этом, принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\sigma^*(\tau)d\tau=p^*. \qquad (10)$$

Используя известные результаты Н.И.Мусхелишвили [3] о поведении сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования, решение уравнения (9) представим в виде

$$\sigma^*(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\varphi(t)=\omega(t)\varphi(t). \qquad (11)$$

где α и β те решения уравнений

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pi)+f\vartheta_0=0;\ -\operatorname{ctg}(\beta\pi)+f\vartheta_0=0;\ 0<|\alpha|,|\beta|<1,$$

которые обеспечивают надлежащее поведение искомых функций в точках ±1. Очевидно, что в рассматриваемом случае искомая функция в концевых точках не ограничена. Следовательно, α и β будут даваться формулами:

$$\alpha=-\frac{1}{2}+\gamma;\quad \beta=-\frac{1}{2}-\gamma;\ \ \gamma=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(f\vartheta_0).$$

Неизвестную функцию $\varphi(t)$ заменим интерполяционным многочленом $\varphi_n(t)$, определяемым формулой

$$\varphi_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i\,P_n^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t-\tau_i)P_n'^{(\alpha,\beta)}(\tau_i)} \qquad (12)$$

где $\varphi_m=\varphi(\tau_m)$, а $\{\tau_m\}_{m=1}^{n}$ – корни многочлена Якоби $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)$.

Так как функция $K(z)$ имеет представление (8), то для применения метода дискретных особенностей следует иметь также квадратурные формулы для интегралов, содержащих $\log|z|$ и $\operatorname{sgn}(z)$.

При помощи формулы Кристоффеля-Дарбу для ортогональных полиномов Якоби можно получить

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(x-y)\varphi_n(x)\omega(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\chi_{Si}(y)\varphi_i;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-y|}\varphi_n(x)\omega(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\chi_{Li}(y)\varphi_i;$$

где

$$\chi_{(S,L)\,i}\left(y\right)=-\frac{1}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\tau_i)}\frac{a_n\gamma_n}{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\tau_i)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\tau_i)}{\gamma_k}I_{(S,L)\,k}\left(y\right);$$

$$I_{Sn}\left(t\right)=\frac{1}{2n}\omega(t)\left(1-t^2\right)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\left(t\right);$$
$$I_{S0}\left(t\right)=2^{\alpha+\beta}\left(\mathrm{B}\left(\alpha+1,\beta+1\right)-2\mathrm{B}_{(t+1)/2}\left(\alpha+1,\beta+1\right)\right)$$

$$I_{Ln}\left(t\right)=-\frac{\cot\pi\alpha}{2n}\omega\left(t\right)\left(1-t^2\right)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t)-\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n\sin\pi\alpha}P_{n+\alpha+\beta+1}^{(-\alpha-1,-\beta-1)}(t)$$
$$I_{L0}\left(t\right)=2^{\alpha+\beta+1}\mathrm{B}\left(\alpha+1,\beta+1\right)\left(\psi\left(\alpha+\beta+2\right)-\psi(\alpha)-\pi\cot(\pi\alpha)-\ln 2-\frac{1}{\alpha}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{B}_{(t+1)/2}\left(\alpha+1,\beta+1\right)}{\mathrm{B}\left(\alpha+1,\beta+1\right)}\cot(\pi\alpha)-\frac{\left(t-1\right)\left(\alpha+\beta+1\right)}{2\pi\alpha}\,{}_3F_2\left(1,1,-\alpha-\beta;2,1-\alpha;\frac{1-t}{2}\right)\right)$$

$$a_m=-\frac{(1+2m+\alpha+\beta)(2+2m+\alpha+\beta)}{2(1+m)(1+m+\alpha+\beta)};\quad \gamma_m=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma\left(m+\alpha+1\right)\Gamma\left(m+\beta+1\right)}{\left(2m+\alpha+\beta+1\right)\Gamma\left(m+1\right)\Gamma\left(m+\alpha+\beta+1\right)}.$$

где $\mathrm{B}\left(\alpha,\beta\right)$ – бета-функция, $\mathrm{B}_z\left(\alpha,\beta\right)$ – неполная бета-функция, ${}_3F_2$ – гипергеометрическая функция, а $\psi\left(x\right)$ – пси-функция, $\Gamma\left(x\right)$ – гамма-функция [4].

Далее, заменяя в (9) и (10) интегралы квадратурными формулами и приравнивая обе части уравнения (9) в корнях полинома Якоби $P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(z)$, $z=\zeta_j$ $\left(j=1,2,...,n-1\right)$, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно φ_i

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\vartheta_1 w_i}{(\tau_i-\zeta_j)}+w_iK_R^*\left(z_i,\zeta_j\right)+\chi_{Si}\left(\zeta_j\right)K_S^*\left(z_i,\zeta_j\right)+\chi_{Li}\left(\zeta_j\right)K_L^*\left(z_i,\zeta_j\right)\right)\varphi_i=0;$$
$$\sum_{i=1}^{n}w_i\,\varphi_i=p^*. \tag{13}$$

где

$$w_i=-\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sin\pi\alpha}\frac{P_{n+\alpha+\beta}^{(-\alpha,-\beta)}(\tau_i)}{P_n'^{(\alpha,\beta)}(\tau_i)}$$

Проведен численный анализ и изучено изменение контактного давления в зависимости от физических и геометрических параметров цилиндра и вкладыша с плоским основанием. Результаты вычислений приведены в виде графиков на рис.1 и рис.2. На рис. 1 приведены графики контактного давления для различных значений параметра r_1/r_0 в случае, когда внешняя поверхность цилиндра свободна от напряжений и $\nu=0,3$, $f=0,2$, $\eta=0.4$, $p^*=0.1$, $a/r_0=1$. Как видно из графиков, при увеличении этого параметра контактное давление в средней части контактной зоны увеличивается, а в остальных частях уменьшается, стремясь к определенному закону распределения, соответствующему случаю движения вкладыша в пространстве с цилиндрической выемкой.

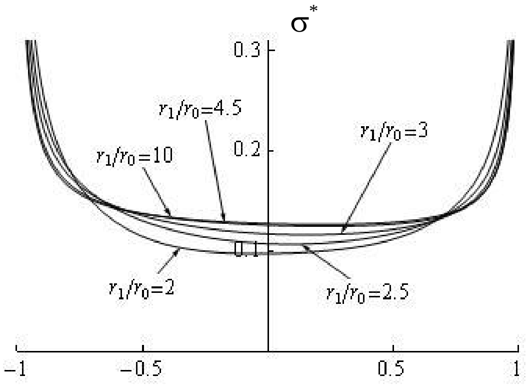


Рис.1

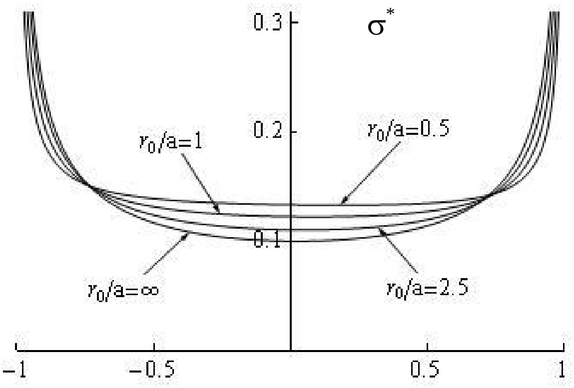


Рис.2

На рис. 2 приведены графики контактного давления для различных значений параметра r_0 / a в случае, когда вкладыш движется в пространстве с цилиндрической выемкой и $\nu = 0,3$, $f = 0,2$, $\eta = 0.4$, $p^* = 0.1$. Как видно из графиков, при увеличении этого параметра контактное давление в средней части контактной зоны уменьшается, а в остальных частях увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирджанян А.А. Равномерное движение силовых нагрузок по внутренней поверхности бесконечного полого цилиндра. Труды международной школы-конференции молодых учёных “Механика–2009”, Ереван, Изд-во ЕГУАС, 2009. стр.140-144.
2. Саакян А.В. Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с комплексным коэффициентом. Доклады НАН Армении, 1997, т.97, No4, сс.32-36.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968, 510 стр.
4. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М.Абрамовица и И.Стиган, М., Наука, 1979, 830 стр.

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович,
аспирант, Институт механики НАН РА
Тел.: (37410) 27-62-23, E-mail: amirjanyan@gmail.com

Акопян Лусине Ваграмовна,
младший научный сотрудник Института механики НАН РА,
Тел.: (37410) 52-48-90

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Анофрикова Н.С., Шевцова Ю.В.

В данной работе результаты асимптотических методов исследования динамических задач для тонких упругих пластин и оболочек [1]-[3] применяются к случаю двухслойных пластин, оба слоя которых выполнены из упругих или вязкоупругих материалов. В основу исследования положена методика непосредственного вывода асимптотических приближений из точных трехмерных уравнений [4].

Рассмотрим полубесконечную двухслойную пластину. В $l-$ом слое $(l=\overline{1,2})$ введем декартову систему координат $(x_1^{(l)},\ x_2^{(l)},\ z^{(l)})$, совмещая плоскость $O x_1^{(l)} x_2^{(l)}$ со срединной плоскостью слоя и направляя ось $z^{(l)}$ по нормали к срединной плоскости. Введем обозначения: $\pm_{ij,l}$ – напряжения, $u_{i,l}$ – перемещения в $l-$ом слое пластины; $2h_l$ – толщина слоя.

Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Тогда граничные условия на них имеют вид $(k=\overline{1,3})$:

$$
\begin{aligned}
&\text{при}\quad z^{(1)}=-h_1: \quad \pm_{3k,1}=0,\\
&\text{при}\quad z^{(2)}=h_2: \quad \pm_{3k,2}=0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Граничные условия на стыке двух слоев пластины - условия непрерывного контакта - сформулируем следующим образом [5]

$$
\text{при } z^{(2)}=-h_2,\, z^{(1)}=h_1: \quad \pm_{3k,2}=\pm_{3k,1},\ u_{k,2}=u_{k,1}. \tag{2}
$$

Предполагается, что к торцу пластины, находящейся в состоянии покоя, в начальный момент времени прикладывается ударное продольное воздействие.

Приведем точные трехмерные динамические уравнения теорий упругости и вязкоупругости для пластины. Уравнения движения возьмем в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \pm_{ii,l}}{\partial x_i^{(l)}}+\frac{\partial \pm_{ji,l}}{\partial x_j^{(l)}}+\frac{\partial \pm_{3i,l}}{\partial z^{(l)}}-\circ_l\frac{\partial^2 u_{i,l}}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial \pm_{i3,l}}{\partial x_i^{(l)}}+\frac{\partial \pm_{j3,l}}{\partial x_j^{(l)}}+\frac{\partial \pm_{33,l}}{\partial z^{(l)}}-\circ_l\frac{\partial^2 u_{3,l}}{\partial t^2}=0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $\circ_l$ – плотность материала слоя, t - время.

Рассмотрим два случая.

1) Каждый слой пластины выполнен из упругого материала. Для дальнейших преобразований уравнения состояния удобно записать следующим образом [6]:

$$
\begin{aligned}
&\pm_{ii,l}=\frac{E_l}{1-\neg_l^{\,2}}\left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial x^{(l)}{}_i}+\neg_k\frac{\partial u_{j,l}}{\partial x^{(l)}{}_j}\right)+\frac{\neg_l}{1-\neg_l}\pm_{33,l},\\
&E_l\frac{\partial u_{3,l}}{\partial z^{(l)}}=\pm_{33,l}-\neg_l(\pm_{ii,l}+\pm_{jj,l}),
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$\frac{E_l}{2(1+\nu_l)}\left(\frac{\partial u_{3,l}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_{i,l}}{\partial z}\right)=\sigma_{3i,l}\,,$$

$$\frac{E_l}{2(1+\nu_l)}\left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{j,l}}{\partial x_i}\right)=\sigma_{ij,l}\,,$$

$$(i\neq j=1,2;\ l=1,2)\,,$$

где E_l,ν_l – модуль Юнга и коэффициент Пуассона l-ого слоя.

2) Каждый слой пластины выполнен из вязкоупругого материала, свойства которого описываются моделью стандартного вязкоупругого тела. Уравнения состояния для l-того слоя могут быть записаны следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}
&E_l\left(\frac{1}{t_{2l}}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_{i,l}}{\partial x^{(l)}{}_i}=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}}+2\frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\right]\sigma_{ii,l}+\\
&+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}}-\frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}}\right)-\nu_l\frac{\partial}{\partial t}\right](\sigma_{jj,l}+\sigma_{33,l})\,,\\
&E_l\left(\frac{1}{t_{2l}}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u_{3,l}}{\partial z^{(l)}}=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}}+2\frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\right]\sigma_{33,l}+\\
&+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{(1-2\nu_l)}{t_{2l}}-\frac{(1+\nu_l)}{t_{1l}}\right)-\nu_l\frac{\partial}{\partial t}\right](\sigma_{ii,l}+\sigma_{jj,l})\,,\\
&\frac{E_l}{1+\nu_l}\left(\frac{1}{t_{2l}}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial x^{(l)}{}_j}+\frac{\partial u_{j,l}}{\partial x^{(l)}{}_i}\right)=\left(\frac{1}{t_{1l}}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{ij,l}\,,\\
&\frac{E_l}{1+\nu_l}\left(\frac{1}{t_{2l}}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_{i,l}}{\partial z^{(l)}}+\frac{\partial u_{3,l}}{\partial x^{(l)}{}_i}\right)=\left(\frac{1}{t_{1l}}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{3i,l}\,,\ (i\neq j=1,2;\ l=1,2)\,,
\end{aligned}\qquad(5)$$

где t_{1l} – характерное время релаксации, t_{2l} – характерное время ползучести, E_l,ν_l – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициент Пуассона l-того слоя, соответственно.

Произведем в уравнениях (3)-(5) и граничных условиях (1)-(2) растяжение масштабов независимых переменных по формулам:

$$x_i^{(l)}=L\varepsilon_l^{q_l}\xi_i^{(l)},\ z^{(l)}=L\varepsilon_l\zeta^{(l)},\ t=Lc_{2l}^{-1}\varepsilon_l^{a_l}\tau_l\,,\qquad(6)$$

где q_l – показатель изменяемости, a_l – показатель динамичности, c_{2l} – скорость волны сдвига, $\varepsilon_l=h_l L^{-1}$ – малый параметр, L – характерный размер длины. Предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным $\xi_i^{(l)},\ \zeta^{(l)},\tau_l$ не меняет асимптотического порядка неизвестных величин. Введение независимых переменных (6) позволяет методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости или вязкоупругости вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих НДС при различных показателях изменяемости и динамичности. Остановимся на случае так называемых длинноволновых низкочастотных тангенциальных приближений. К этому виду относятся приближения, для которых $q_l=1,\ a_l<1$. Данный тип приближений соответствует теории растяжения тонких пластин. В этом случае тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой $u_{i,l}>>u_{3,l}$.

В вязкоупругом случае оценим также величины времен ползучести и релаксации, вводя показатели их интенсивности по формулам

$$t_{il} = Lc_{2l}^{-1}\text{¦}_l^{r_{il}}\mathbf{2}_{il}\,, \; (i = 1{,}2) \tag{7}$$

и будем предполагать, что $r_{il} \le a_l$. В этом случае процесс асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории вязкоупругости будет аналогичен упругому случаю.

Введем следующие асимптотики для компонент НДС:

$$u_{i,l} = L\text{¦}_l^{q_l}u_{i,l}^0,\; u_{3,l} = L\text{¦}_l u_{3,l}^0,\; \pm_{ii,l} = E_l\pm_{ii,l}^0,\; \pm_{ij,l} = E_l\pm_{ij,l}^0,\; \pm_{3i,l} = E_l\text{¦}_l^{1-q_l}\pm_{3i,l}^0\,, \tag{8}$$
$$\pm_{33,l} = E_l\text{¦}_l^{2-2q_l}\pm_{33,l}^0 \quad (i,j = 1{,}2)\,.$$

Предполагается, что величины с индексом "0" имеют один и тот же асимптотический порядок.

В силу выбора асимптотик (8), в уравнения движения, записанные с учетом (6), в рамках погрешности $O(\text{¦}^{2-2q_l})$, входят слагаемые, содержащие производные по $\text{¸}^{(l)}$ от $\pm_{3i,l}^0 \; (i = \overline{1,3})$:

$$\frac{\partial\pm_{ii,l}^0}{\partial\P^{(l)}{}_i} + \frac{\partial\pm_{ij,l}^0}{\partial\P^{(l)}{}_j} + \frac{\partial\pm_{3i,l}^0}{\partial s^{(l)}} - \frac{1}{2(1+\neg_l)}\frac{\partial^2 u_{i,l}^0}{\partial\mathbf{2}_l^2} = 0\,,$$
$$\frac{\partial\pm_{i3,l}^0}{\partial\P^{(l)}{}_i} + \frac{\partial\pm_{j3,l}^0}{\partial\P^{(l)}{}_j} + \frac{\partial\pm_{33,l}^0}{\partial s^{(l)}} - \frac{1}{2(1+\neg_l)}\frac{\partial^2 u_{3,l}^0}{\partial\mathbf{2}_l^2} = 0\,. \tag{9}$$

Такой выбор асимптотик позволяет при асимптотическом интегрировании удовлетворить всем граничным условиям на лицевых поверхностях.

Переход в граничных условиях (1), (2) к представлениям (6), (8) позволяет установить связь между компонентами НДС первого и второго слоев:

$$\begin{gathered}
\text{¸}^{(2)} = 1: \quad \pm_{3i,2}^{(0)} + \pm_{3i,2}^{(1)} = 0, \quad \pm_{33,2}^{(0)} + \pm_{33,2}^{(1)} + \pm_{33,2}^{(2)} = 0,\\
\text{¸}^{(1)} = -1: \quad \pm_{3i,1}^{(0)} - \pm_{3i,1}^{(1)} = 0, \quad \pm_{33,1}^{(0)} - \pm_{33,1}^{(1)} + \pm_{33,1}^{(2)} = 0,\\
\text{¸}^{(2)} = -1, \; \text{¸}^{(1)} = 1:\\
\text{¦}_2E_2\left(\pm_{3i,2}^{(0)} - \pm_{3i,2}^{(1)}\right) = \text{¦}_1E_1\left(\pm_{3i,1}^{(0)} + \pm_{3i,1}^{(1)}\right),\\
\text{¦}_2{}^2E_2\left(\pm_{33,2}^{(0)} - \pm_{33,2}^{(1)} + \pm_{33,2}^{(2)}\right) = \text{¦}_1{}^2E_1\left(\pm_{33,1}^{(0)} + \pm_{33,1}^{(1)} + \pm_{33,1}^{(2)}\right),\\
u_{i,2}^{(0)} = u_{i,1}^{(0)}, \quad \text{¦}_2\left(u_{3,2}^{(0)} - u_{3,2}^{(1)}\right) = \text{¦}_1\left(u_{3,1}^{(0)} + u_{3,1}^{(1)}\right).
\end{gathered} \tag{10}$$

Введем следующую зависимость компонент НДС от нормальной координаты: номер слоя

$$u_{i,l}^0 = u_{i,l}^{(0)}, u_{3,l}^0 = u_{3,l}^{(0)} + \text{¸}^{(l)}v_{3,l}^{(1)}, \pm_{ii,l}^0 = \pm_{ii,l}^{(0)}, \pm_{ij,l}^0 = \pm_{ij,l}^{(0)}, \tag{11}$$
$$\pm_{3i,l}^0 = \pm_{3i,l}^{(0)} + \text{¸}^{(l)}\pm_{3i,l}^{(1)}, \pm_{33,l}^0 = \pm_{33,l}^{(0)} + \text{¸}^{(l)}\pm_{33,l}^{(1)} + \text{¸}^{(l)2}\pm_{33,l}^{(2)}\,,$$

где величины с индексами в скобках от $\text{¸}^{(l)}$ не зависят.

В результате асимптотического интегрирования получены: системы относительно асимптотически главных компонент НДС $u_{i,l}^{(0)}, \pm_{ii,l}^{(0)}, \pm_{ij,l}^{(0)}, \pm_{i3,l}^{(0)}, \pm_{i3,l}^{(1)}$ для каждого из рассматриваемых случаев и системы, определяющие асимптотически второстепенные компоненты через асимптотически главные. Приведем вид системы относительно асимптотически главных компонент в упругом случае:

$$\frac{\partial \pm^{(0)}_{ii,l}}{\partial \P^{(1)}{}_i} + \frac{\partial \pm^{(0)}_{ij,l}}{\partial \P^{(1)}{}_j} + \pm^{(1)}_{3i,l} - \frac{1}{2(1+\neg_l)} \frac{\partial^2 u^{(0)}_{i,l}}{\partial ²{}^2_l} = 0\,,$$

$$\pm^{(0)}_{ii,l} = \frac{1}{1-\neg_l^2}\left(\frac{\partial v^{(0)}_{i,l}}{\partial \P^{(1)}{}_i} + \neg_l \frac{\partial v^{(0)}_{j,l}}{\partial \P^{(1)}{}_j}\right),$$

$$\pm^{(0)}_{ij,l} = \frac{1}{2(1+\neg_l)}\left(\frac{\partial u^{(0)}_{i,l}}{\partial \P^{(1)}{}_j} + \frac{\partial u^{(0)}_{j,l}}{\partial \P^{(1)}{}_i}\right) \tag{12}$$

$$\pm^{(0)}_{3i,2} + \pm^{(1)}_{3i,2} = 0,$$

$$¦_1 E_2\left(\pm^{(0)}_{3i,2} - \pm^{(1)}_{3i,2}\right) = ¦_1 E_1\left(\pm^{(0)}_{3i,1} + \pm^{(1)}_{3i,1}\right)$$

$$u^{(0)}_{i,2} = u^{(0)}_{i,1}$$

$$\pm^{(0)}_{3i,1} - \pm^{(1)}_{3i,1} = 0.$$

Перейдем к размерной двумерной форме записи полученной системы для асимптотически главных компонент НДС. Введем перемещения u_i, усилия T_i, S_{ij} и усредненную плотность $\circ$ по формулам:

$$u_{i,1} = u_{i,2} = u_i\,,\ T_i = 2(h_1 \pm_{ii,1} + h_2 \pm_{ii,2}),\quad S_{ij} = 2(h_1 \pm_{ij,1} + h_2 \pm_{ij,2}),$$

$$\circ = \frac{\circ_1 h_1 + \circ_2 h_2}{h}, \qquad h = h_1 + h_2. \tag{13}$$

С учетом (13) система разрешающих уравнений для асимптотически главных компонент НДС (12) в упругом случае примет вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - 2\circ h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0\,,$$

$$T_i = C_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + C_2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,,$$

$$S_{ij} = C_3\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$C_1 = \sum_{l=1}^{2} \frac{2E_l h_l}{1-\neg_l^2}, \qquad C_2 = \sum_{l=1}^{2} \frac{2E_l h_l \neg_l}{1-\neg_l^2}, \qquad C_3 = \sum_{l=1}^{2} \frac{E_l h_l}{1+\neg_l}. \tag{14}$$

В случае, когда каждый слой пластины выполнен из вязкоупругого материала, система разрешающих уравнений для асимптотически главных компонент НДС имеет вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - 2\circ \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0\,,$$

$$\left[\frac{h_1 E_1}{1+\neg_1} f_{12} f_{21} + \frac{h_2 E_2}{1+\neg_2} f_{11} f_{22}\right]\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = f_{11} f_{12} S_{ij}\,, \tag{15}$$

$$2\left[h_1 E_1 (f_{32} + f_{42}) f_{21} + h_2 E_2 (f_{31} + f_{41}) f_{22}\right]\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = (f_{31} + f_{41})(f_{32} + f_{42})(T_i + T_j)\,,$$

где $f_{il} = \left(\frac{1}{t_{il}} + \frac{\partial}{\partial t}\right),$

$$f_{3l} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-2\neg_{1}}{t_{21}} + 2\frac{1+\neg_{1}}{t_{1l}}\right) + \frac{\partial}{\partial t},$$

$$f_{4i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-2\neg_{1}}{t_{21}} - \frac{1+\neg_{1}}{t_{1l}}\right) - \neg_{1}\frac{\partial}{\partial t},$$

$$i \neq j = 1,2;\ l = 1,2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaplunov Ju.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. London: Academic Press. 1998. 226 p.
2. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1986. 176 с.
3. Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн// Известия Сарат. ун-та. 2001. Т.1, вып.2. С.111-131.
4. Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек// ПММ. 1993. Т.57. вып.1. С.83-91.
5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1971.
6. Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. Асимптотические приближения трехмерных динамических уравнений теории упругости в случае двухслойных пластин//Межвуз.сб. «Проблемы прочности и пластичности», вып. 67, Н.Новгород, Изд-во Нижегородского ун-та, 2005. С.102-111.
7. Новацкий В. Динамика сооружений. –М.: Госстройиздат, 1963.376 с.

Сведения об авторах

Анофрикова Наталия Сергеевна – к.ф.-м.н., доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики механико-математического факультета СГУ. Телефон рабочий: +7(8452)210683. Факс: +7 (8452) 511527. E-mail: nano-bio@sgu.ru

Шевцова Юлия Владиславовна – к.ф.-м.н., доцент кафедры геометрии механико-математического факультета СГУ. Телефон рабочий: +7(8452) 515539. Факс: +7 (8452) 511527. E-mail: nano-bio@sgu.ru

РАЗРАБОТКА РАЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОЦЕНКИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОДПЯТНИКОВ ГИДРОГЕНЕРАТОРОВ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКИ

Антонова О.В., Боровков А.И., Войнов И.Б., Михайлов А.А.

Эффективность и надежность работы подпятника зависит от ряда конструктивных особенностей и наличия смазки между трущимися поверхностями, т.е. образования масляного клина. Работа посвящена разработке математической модели для оценки несущей способности подпятников гидрогенераторов на основе численного решения задач термогидродинамики. Проведено исследование влияния различных элементов конструкции на результаты численного анализа и выбрана рациональная гидродинамическая модель, позволяющая получить результаты с высокой степенью точности и с наименьшими временными затратами.

При проектировании гидроагрегатов одним из основных критериев работоспособности конструкции является несущая способность подпятника. Этот узел воспринимает значительную часть нагрузки от веса вращающихся частей и реакции воды на рабочее колесо турбины и передает усилие от массы вращающихся частей гидрогенератора на строительные конструкции.

Подпятник гидрогенератора состоит из двух основных частей – вращающейся (диска подпятника) и неподвижной (собственно подпятника). На рис. 1 представлена схема расположения сегментов колодки подпятника (неподвижная часть). Для эффективной работы подпятника необходимо обеспечить между трущимися поверхностями накладки сегмента подпятника и диска подпятника наличие смазки. При этом происходит образование масляной плёнки, которая сохраняется в процессе работы за счёт вращения подпятника. Для обеспечения большей несущей способности конструкции опору сдвигают относительно оси сегмента на некоторую величину в направлении вращения, называемую эксцентриситетом. Наличие эксцентриситета позволяет в процессе течения жидкости через обойму колодки сегментам подпятника устанавливаться под углом к диску подпятника, образуя масляный клин [1].

Геометрия масляного клина (геометрические размеры скосов входной и выходной кромок накладки сегмента и минимальная толщина смазочного слоя – $h_{\min}$ оказывают влияние на несущую способность конструкции. Для рассматриваемой конфигурации подпятника величина $h_{\min}$, определенная при помощи инженерной методики [2], составляет $h_{\min}^{(0)} = 0.58$ мкм.

Кроме этого, на несущую способность влияют значения углов установки сегмента в потоке жидкой смазки. В модели учитываются тангенциальный θ и радиальный β углы наклона, определяющие поворот колодки относительно осей Z и Y, соответственно (рис. 2). При расчётах используется методика определения углов, с контролем условия равновесия сегмента, при этом минимальная толщина смазочного слоя в нулевом приближении задаётся согласно инженерной методике $h_{\min}^{(0)} = 0.58$ мкм, а затем изменяется в зависимости от изменения углов наклона сегмента [3].

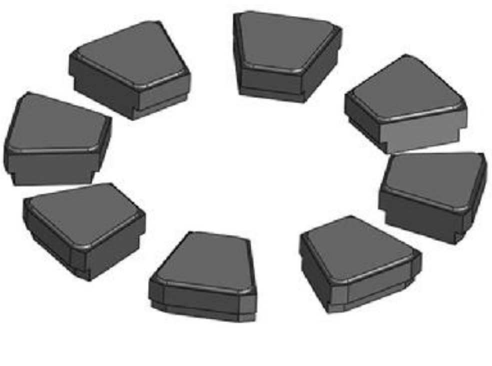


Рис. 1. Схема расположения сегментов

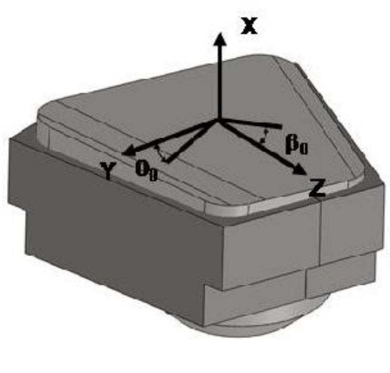


Рис. 2. 3-D CAD-модель сборки сегмента

Для проведения расчетов несущей способности и с целью исследования влияния области, прилегающей к масляному клину и колодке, на результаты, разработана последовательность математических и гидродинамических моделей рабочей области подпятника, заполненной жидкой смазкой:

Модель № 1. Гидродинамическая модель, включающая масляный клин и прилегающую к нему область между рабочей поверхностью колодки и диском подпятника (за исключением нерабочей поверхности колодки и части обоймы колодок).

Модель № 2. Гидродинамическая модель, учитывающая всю область течения масла вокруг колодки: масляный клин, прилегающую к нему область между рабочей поверхностью колодки и диском подпятника, а также нерабочей поверхностью колодки и подпятником.

Модель № 3. Термогидродинамическая модель (модель с учетом теплообмена), включающая всю область течения масла в подпятнике, колодки подпятника с обоймой, вал с диском подпятника и корпусные элементы.

На основе построенных моделей с помощью CFD-системы (Computational Fluid Dynamic) ANSYS/CFX [4] получены численные результаты.

На рис. 3 и 4 представлены пространственные (3-D) CAD – модели расчетной области для моделей № 1 и 3 , а на рис. 5 – фрагменты расчетных сеток в зоне масляного клина. Во всех трёх моделях в зоне масляного клина в программном комплексе ANSYS ICEM CFD [5] были построены структурированные гексаэдральные конечно-объёмные сетки с размером элемента ~ $h_{min}/30 = 0.019$ мкм. Число расчётных ячеек для модели № 1 составляет 996 006, для модели № 2 – 1 234 604, для модели № 3 – 2 562 276. Наличие циклической симметрии в конструкции подпятника позволяет в численном моделировании рассмотреть 1/8 часть конструкции.

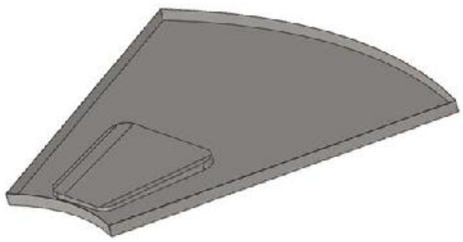


Рис. 3. CAD-модель расчетной области для первой гидродинамической модели

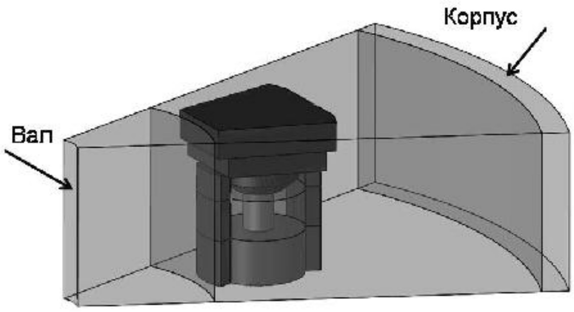


Рис.4. CAD-модель расчетной области для термогидродинамической модели

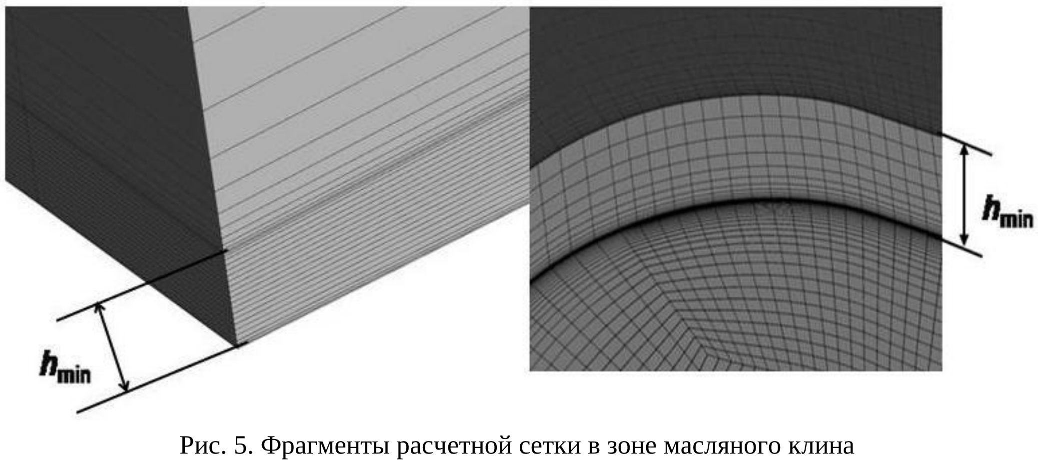


Рис. 5. Фрагменты расчетной сетки в зоне масляного клина

Решение 3-D задач гидродинамики для первых двух моделей проводилось в изотермической постановке. Свойства масла задавались постоянными и соответствующими температуре 50^0С. Поведение жидкости описывалось уравнениями Навье-Стокса [5],[6]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(V \cdot \nabla\right) V = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}P + \nu \nabla^2 V \qquad (1)$$

Для получения замкнутой системы уравнений добавляется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho V\right) = 0 \qquad (2)$$

где $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость, μ – динамическая вязкость, ρ – плотность жидкости, V – вектор скорости, P – давление.
Для термогидродинамической модели № 3 также учитывается уравнение полной энергии:

$$\frac{\partial \rho H}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V H) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (V \cdot \tau) \qquad (3)$$

где H – энтальпия, λ – коэффициент теплопроводности, T – температура, τ – тензор касательных напряжений.

В зоне масляного клина течение предполагаем ламинарным, в нерабочей области подпятника учитываем турбулентное движение масла – для расчёта используем SST (shear stress transport)–модель турбулентности [7].

На рис.6 представлено 3-D распределение давления по поверхности сегмента для гидродинамической модели № 1, в этом случае минимальная толщина смазочного слоя составляет $h_{\min}^{(1)} = h_{\min}^{(0)} / 2 = 0.29$ мкм, конструкция находится в равновесии. Значение минимальной толщины отличается в два раза от полученного по инженерной методике. Это объясняется тем, что инженерная методика не учитывает условия равновесия сегмента в потоке жидкой смазки в явном виде.

Рис.6. Распределение давления по поверхности сегмента

При помощи термогидродинамической модели № 3 задача решена в двух постановках: с учетом зависимости вязкости от температуры μ(t) (рис.8) и без учета, в этом случае, как и для двух первых моделей, свойства масла задавались постоянными и соответствующими температуре 50^0С. Вязкость масла $\mu|_{T=50^0 C} = 0.027 \text{Па} \cdot \text{с}$.

Для оценки влияния элементов конструкции на течение смазки в масляном клине и несущую способность подпятника решена задача с учетом теплообмена масла со стальными элементами конструкции подпятника (вал, корпус, опора и.т.д.), но без учета зависимости вязкости масла от температуры. На рис. 7 представлено 3-D распределение температуры по поверхности сегмента и стальным элементам конструкции для термогидродинамической модели № 3.

Из сравнения величин подъемной силы (табл. 1) видно, что учёт всей области течения масла без учёта зависимости вязкости от температуры не даёт существенных изменений результатов. Отличие в значении подъёмной силы не превышает 5%, а время, потраченное на решение задачи в случае использования модели с числом расчетных ячеек порядка 2,5 млн., составляет около двух суток, в то время как задача для модели с числом расчетных ячеек порядка 1 млн. решается за 10 часов (на одном и том же компьютере).

Таблица 1

Модель	Величина подъемной силы F, кН	Время решения задачи, ч	ε = (Fпр – F)/Fпр *100%
№ 1	273,5	~ 10	0,6%
№ 2	270,4	~ 12	1,7%
№ 3	263,8	~ 48	4%

где Fпр = 275 кН – проектная величина подъемной силы, F – величина подъемной силы, полученная из численного решения, ε – отличие величины, полученной при численном решении от проектного значения подъёмной силы.

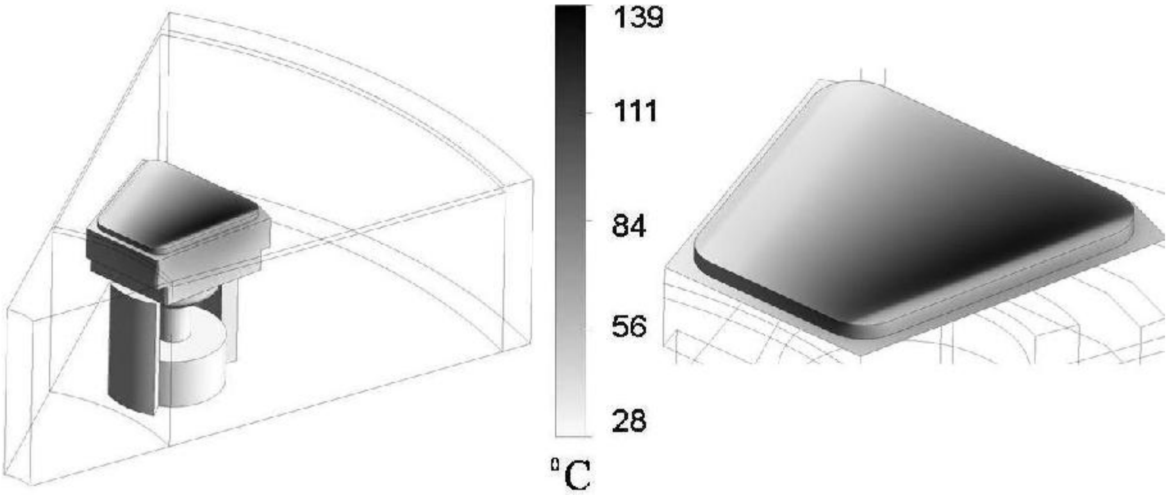


Рис.7. Распределение температуры

Из табл. 1 видно, что учет дополнительных областей течения масла приводит к уменьшению расчетного значения несущей способности подпятника.

Для получения 3-D распределения температуры в элементах конструкции и уточнения значения подъемной силы, полученного при помощи более простых моделей, решим задачу с учетом зависимости вязкости масла от температуры μ(t), представленной на рис.8

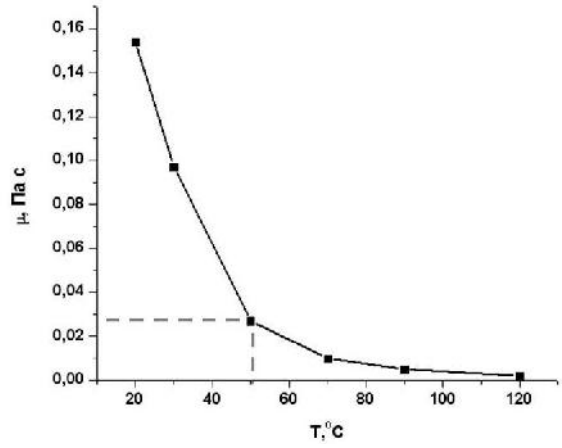


Рис. 8. Зависимость коэффициента вязкости от температуры жидкой смазки

Учёт зависимости вязкости от температуры качественно распределение температуры по поверхности сегмента не меняет. Температура масла в зоне масляного клина составляет примерно 80 ^{0}C, что хорошо отвечает экспериментальным данным.

Выводы:

1. Учет дополнительных областей течения масла приводит к уменьшению расчетного значения несущей способности подпятника.
2. Учет зависимости вязкости масла от температуры необходим для получения 3-D распределения температуры, хорошо отвечающего экспериментальным данным.

На основе построенных моделей с помощью CFD-системы ANSYS/CFX получены численные результаты. На основании сравнения полученных расчетных значений и исследования влияния различных элементов конструкции на ее 3-D тепловое и гидродинамическое состояние из последовательности выбрана рациональная модель, позволяющая получать достоверные результаты при наименьших временных затратах.

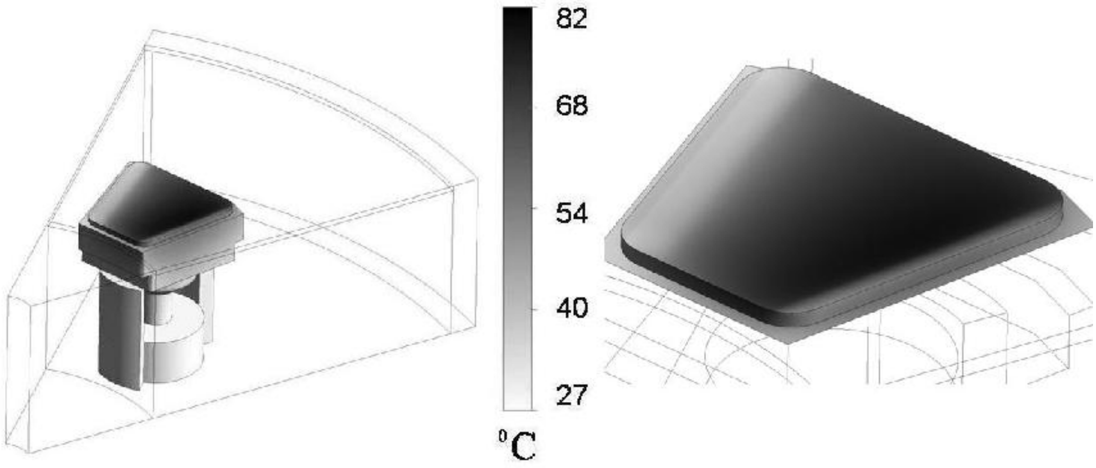


Рис.9. Распределение температуры

ЛИТЕРАТУРА

1. Домбровский В. В., Детинко М. Ф., Еремеев А. С. и др. Проектирование гидрогенераторов (ч. 2, конструкция и механические расчеты) Л.: Энергия, 1968. 364 с.
2. Воскресенский В.А., Дьяков В.И. Расчёт и проектирование опор скольжения. М.: Машиностроение, 1980. 224 с.
3. Antonova O.V., Borovkov A.I., Michailov A.A.,Voynov I.B. The method of determination of thrust bearing pad angle in a fluid flow. Proc. of the XXXVIII Summer School – Conference "Advanced Problems in Mechanics", 2010, St.Petersburg, Russia. p. 30-34.
4. ANSYS theory reference. Eleventh edition. SAS IP, Inc. 2001. 1286 p.
5. ANSYS CFX 10.0 Theory Reference / SAS IP Inc., 2005.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: 1987. 840 с.
7. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. СПб.: Изд-во БГТУ, 2001. 108 с.

Сведения об авторах:

Антонова Ольга Владимировна – аспирант кафедры "Механика и процессы управления", Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, физико-механический факультет, 8 (812) 552 77 78, 8 (921) 307 85 60, E-mail antonova@compmechlab.com

Боровков Алексей Иванович – к.т.н., профессор кафедры "Механика и процессы управления", Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, физико-механический факультет, заведующий лабораторией "Вычислительная механика" 8 (812) 552 77 78, E-mail: borovkov@compmechlab.com

Войнов Игорь Борисович–аспирант кафедры "Механика и процессы управления", Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, физико-механический факультет, 8 (812) 552 77 78, E-mail: voinov@compmechlab.com

Михайлов Александр Александрович –ассистент кафедры "Механика и процессы управления", Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, физико-механический факультет, 8 (812) 552 77 78, E-mail: michailov@compmechlab.com

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ТОНКОЙ ЛЕЗВИЙНОЙ ОБРАБОТКЕ ЦВЕТНЫХ СПЛАВОВ

Арзуманян А.М., Акопян С.А.

В данной статье рассматривается процесс стружкообразования и расчет сжимающих напряжений, действующих на контактные поверхности режущей пластины в зависимости от геометрии режущего лезвия и температуры резания.

Процессы размерной обработки материалов резанием являются основным и эффективным способом финишной обработки деталей в технологии машиностроения. Для решения задач для повышения износостойкости, надежности работы режущего инструмента, а также разработки методов расчета его на прочность, определения стойкости и т.д. важно раскрыть природу и механизм износа с изучением явлений, происходящих в контактных слоях режущего инструмента и обрабатываемой детали [1].

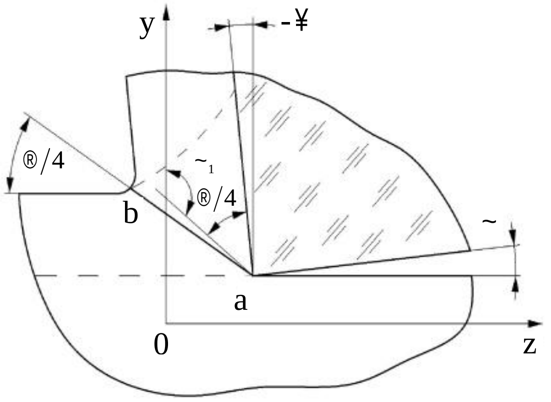


Рис. 1.

Режущая пластина из синтетического корунда имеет прямолинейную режущую кромку с радиусом закругления при вершине, который в несколько раз больше толщины и ширины среза. Деформация происходит, в основном, в условиях плоского деформирования.

Между стружкой и передней поверхностью режущей пластины имеют место два вида трения различных по характеру. В первой зоне, примыкающей к режущей кромке пластины силы трения настолько значительны, что напряжение трения превышает предел текучести на сдвиг материала контактных слоев стружки. Поэтому перемещение стружки относительно передней поверхности пластины осуществляется за счет внутренних сдвигов в ее прирезцовых слоях с образованием продольной текстуры, то есть за счет контактной пластической деформации. Устойчивость в зоне стружкообразования, в основном, зависит от физико-механических свойств цветных металлов, материала режушей пластины, температурно-скоростных и других условий [2].

При наличии значительного трения на контактных поверхностях деформации срезаемого слоя не заканчивается в зоне стружкообразования. При движении вдоль поверхностей инструмента тонкие контактные слои стружки и обработанной поверхности получают весьма значительную дополнительную деформацию и упрочнение. На рис. 1 показана упрощенная схема стружкообразования при обработке цветных металлов режущей пластиной из синтетического корунда [1]. С помощью этой схемы определяется усадка стружки, углы сдвига и трения, относительный сдвиг, напряжение сдвига и другие характеристики напряженно-деформированного состояния процесса стружкообразования при образовании сливной стружки [3]. Из исследования Н.В. Талантова предполагается, что в процессе пластического деформирования в зоне контактного взаимодействия на участке пластического контакта каждый элементарный объем срезаемого материала перемещается по определенной траектории и имеет свои закономерности изменения степени и скорости деформации , а также температуры и сопротивление деформированию. В ходе пластического деформирования в зоне стружкообразования материал упрочняется, достигая на конечной границе условия равенства интенсивностей деформированного упрочнения и температурного разупрочнения. Начальная граница зоны стружкообразования сопрягается с поверхностью раздела, а конечная граница – с верхней границей зоны контактных пластических деформаций конца участка упрочнения [2].

Процесс резания в нашем случае производится режущими пластинами с отрицатленым передним углом. Для упрощения в начале примем, что трение на контактной поверхности отсутствует. От режущей кромки a исходит одна из линий скольжения, которая выходит на свободную поверхность в точке b. На переднюю поверхность, в том числе и на режующую кромки пластины действуют только нормальные напряжения, которые по мере удаления от режущей кромки будут уменьшаться. Ввиду этого для отрицательного переднего угла линия скольжения должна быть выпуклой. Касательное напряжение по всей линии скольжения максимально и равно K. Нормальные напряжения изменяются от точки a до точки b. Изменение среднего нормального напряжения пропорционально углу поворота характеристики.

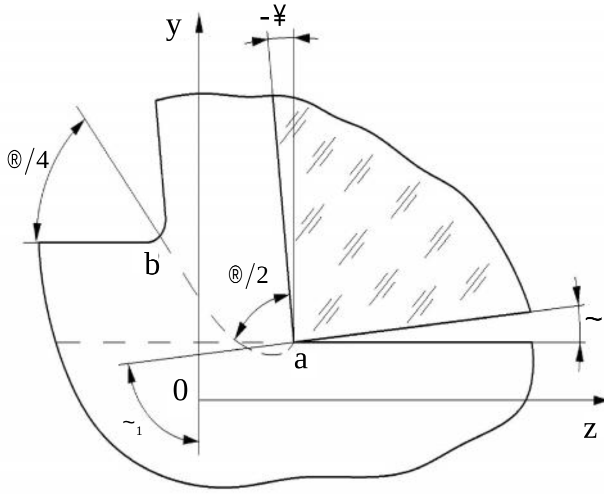


Рис. 2

В точках a и b имеем напряжение сжатия, так как они создаются давлением резца на обрабатываемый материал:

$$\sigma_A = \sigma_Б - 2K\left|\pm\gamma\right| \tag{1}$$

По Т.Н. Лоладзе в точке b касательное напряжение равно K, а нормальное напряжение на свободной поверхности равно 0, которое является одним из главных напряжений. Поэтому для точки b можно написать:

$$\sigma_1 = 0;\ \sigma_2 = -2K;\ \sigma_Б = -K \tag{2}$$

Нормальное напряжение σ_n на передней поверхности также является одним из главных напряжений. Для точки a:

$$\sigma_A = -\sigma_1 - (-K) = -\sigma_n + K \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в формулу (1) и определим нормальное напряжение на передней поверхности для отрицательного переднего угла:

$$\left|\sigma_n\right| = 2K(1+\gamma) \tag{4}$$

Угол, составленный линиями скольжения и напряжением оси y для отрицательного переднего угла равен $\alpha = 3/4\pi - |\gamma|$. Тогда нормальное напряжение вдоль оси z, y и касательное напряжение для отрицательного переднего угла определим по формулам [1]:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \sigma + K\sin 2\left(3/4\pi - |\gamma|\right) = 2K\left(1+|\gamma|\right) - K\cos 2\gamma; \\ \sigma_z &= \sigma - K\sin 2\left(3/4\pi - |\gamma|\right) = 2K\left(1+|\gamma|\right) + K\cos 2\gamma; \\ \tau &= -K\cos 2\left(3/4\pi - |\gamma|\right) = K\sin 2\gamma \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из полученных выражений следует, что при резании материала с заданными механическими характеристиками напряжение действующее на режущей кромке режущей пластины, в основном, зависит от переднего угла. С увеличением переднего угла нормальное напряжение постепенно уменьшается. Касательные напряжения по абсолютному значению имеют максимальное значение при $\gamma = -45^0$ и $\gamma = +45^0$ тогда, когда направления осей y и z совпадают с направлением характеристик.

При рассмотрении конкретного случая, когда на контактных поверхностях существует трение, принимаем, что оно так велико, что отсутствует внешнее скольжение, то есть $\tau = K$. Характеристики на поверхности контакта повернутся на угол $\pi/4$ в таком направлении, что общий угол поворота характеристики α_{ab} увеличится на $\pi/4$, то есть $\alpha_{ab} = \left|\pi/4 \pm \gamma\right|$. Линия скольжения с передней поверхностью в данном случае составляет угол $\pi/2$. Нормальное напряжение:

$$\sigma_n \approx 2K(1,3+\gamma) \qquad (6)$$

Угол между линией скольжения и осью Y равен: $\alpha = \pi/2 - |\gamma|$.

Поэтому нормальные напряжения в направлении осей Y и Z выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \sigma + K\sin 2\left(\pi/2 - |\gamma|\right) \approx 2K(1,3+\gamma) + K\sin 2\gamma, \\ \sigma_z &= \sigma - K\sin 2\left(\frac{\pi}{2} - |\gamma|\right) \approx 2K(1,3+\gamma) - K\sin 2\gamma \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

а касательные напряжения:

$$\tau = -K\cos 2\left(\pi/2 - |\gamma|\right) = K\cos 2\gamma\,. \qquad (8)$$

При рассмотрении состояния контактных поверхностей режущей пластины и обрабатываемого материала необходимо изучить величины температур в зоне резания. Имея в виду экспериментальные данные измерения напряжения в зависимости от температуры при фрезеровании латуни ЛС 59-1 режущими пластинами из синтетического корунда, для напряжения текучести будем иметь:

$$\sigma = 1200\cdot\left[1.06\cdot\left(1-\frac{T}{2000}\right)+0.93\cdot\left(1-\frac{T}{2000}\right)^{39}-\left(1-\frac{T}{2000}\right)^{28}\right] \qquad (9)$$

где σ – напряжение при нормальной температуре, T – температура резания, T_h – температура плавления обрабатываемого материала. Подставляя значение (9) в уравнения (7), получим величины нормальных напряжений в направлении осей y и z.

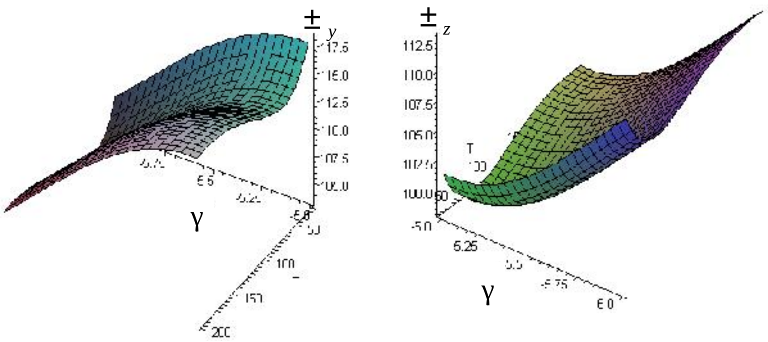


Рис. 3.

На рис. 3 показан график зависимостей σ_x и σ_z от температуры и переднего угла режущей пластины. Для латуни ЛС59-1 $\sigma_n = 5.685$ МПа [1].

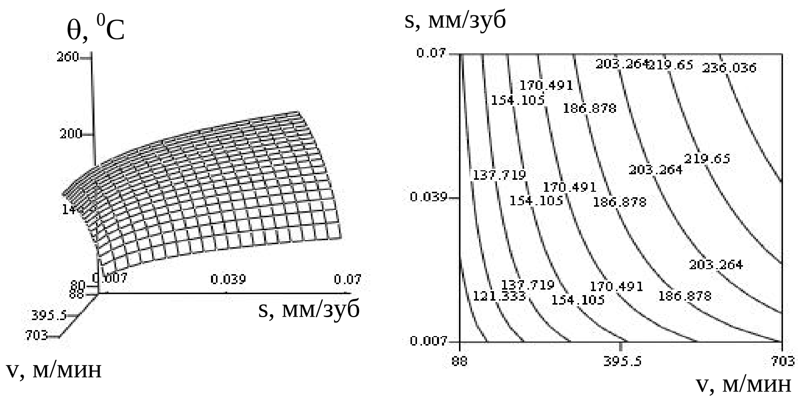


Рис. 4.

Как показывают графики (рис.4), при оптимальных сочетаниях режимов резания и геометрических параметров режущей пластины, температура фрезерования не превышает полученных ранее расчетных значений (120-200°С) при оптимальных условиях режимов резания. Повышенное значение температуры при обработке Д16 объясняется физико-механическими свойствами этого материала, режимы фрезерования, а также однородность режущего и обрабатываемого материалов. На рис. 5 показан микрошлиф корня стружки из латуни ЛС 59-1 при обработке оптимальными режимами резания V= 250 м/мин, S= 0,02 мм/зуб и t= 0,1мм.

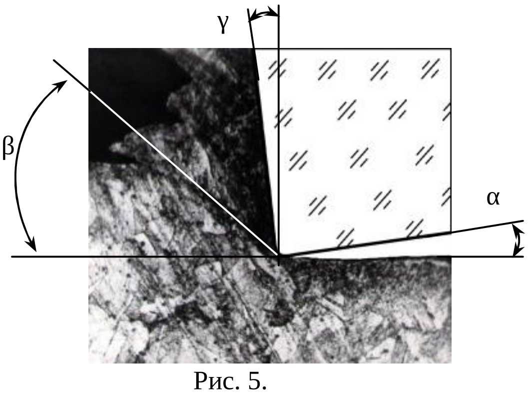


Рис. 5.

При визуальном наблюдении микрошлифа корня стружки установлено, что контактные пластические деформации отсутствуют и четко выделяются границы разлома между элементами стружки. Отсутствие зоны контакта на микрошлифе стружки можно объяснить образовавшимся на передней поверхности режущей пластины налипом. Установлено,что деформация в контактной зоне или незначительна, или отсутствует и происходит только вблизи начальной зоны стружкообразования.

Химическая инертность синтетического корунда при температурах резания, полученных нами для ряда сплавов, дает основание считать, что эти пластины не подвергаются диффузионному износу.

Исследованием доказано, что режущие пластины подвергаются выкрашиванию, особенно при форсировании режимов обработки.

Сравнительно высокие контактные давления и температура в отдельных точках на контактных поверхностях режущей пластины способствуют возникновению двойникования режущего кристалла. После появления двойниковых прослоек в отдельных областях под действием циклических напряжений частицы корунда отрываются и уносятся с передней поверхности стружкой, а с задней поверхности – поверхностью резания. После того, как стружка проходит зону нароста или застоя, скорость перемещения резко увеличивается и интенсивность схватывания обрабатываемого материала и режущей пластины возрастает. Схватывание возрастает также при увеличении скорости обработки и подачи [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лоладзе Т.Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента. М.: Машиностроение, 1982. 320 с.
2. Талантов Н.В. Физические основы процесса резания, изнашивания и разрушения инструмента. М.: Машиностроение, 1992. 240 с.
3. Арзуманян А.М. Деформация стружки при параметроуправляемых процессах механической обработки цветных металлов и сплавов. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. /Материалы V международной конференции. 1–7 ноября, Горис, 2005, с.48-52.
4. Хачатрян Г.Г., Арзуманян А.М. Контактные явления при тонкой обработке цветных сплавов инструментами из синтетического корунда. // Изв. НАН Армении. Сер.техн. наук. 1992. Т.14. № 1-2. С. 8-11.

Сведения об авторах:

Арзуманян Алексан Мкртычевич,
декан факультета професионального инженерного обучения Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении, канд.техн.наук, доцент,
(374 312) 4 50 60. **E-mail:** arzal@yandex.ru

Акопян Сережа Амаякович,
мл. научн.сотр. кафедры “Технология художественной обработки материалов” Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении, магистр инженерии, (374 312) 4 62 81.

ПРОБЛЕМА ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Рассматриваются хрупкие материалы со случайным распределением поврежденного состояния в малых микрообъемах. Критерий длительной прочности формулируется на основе концепции хрупкого разрушения Вейбулла. Вероятностные методы применяются также при формулировке критерия длительной прочности керамических композитов. Предложено кинетическое уравнение роста малых дефектов с начальным случайным распределением размеров. Предложен вероятностный критерий длительной прочности, учитывающий взаимосвязанные процессы высокотемпературного окисления, деформации и разрушения кристаллической фазы

Введение. Критерии прочности, в частности, критерии длительной прочности формулируются обычно для детерминированных, микрооднородных сред. К таким средам относятся, например, металлические материалы. Прочность этих материалов определяется процессами, охватывающими значительные объемы. В то же время критерии, сформулированные на основе отмеченных положений, не могут быть использованы в случае хрупких материалов (стекла, керамические композиты, горные породы, бетон и др.), для которых процессы разрушения определяются локальными дефектами и флуктуациями свойств материала. Дефекты и микронеоднородности структуры в локализованных процессах приобретают фундаментальное значение – они являются источниками разрушения. В мировой научной литературе выполнены многочисленные исследования по разработке критериев прочности хрупких материалов. В то же время проблема длительной или статической усталости для этих материалов исследована недостаточно [1, 2]. В качестве примера рассмотрим проблему длительной прочности стекла. Принято считать, что стекло является почти идеально хрупким материалом, поэтому процесс его разрушения должен происходить при упругом растяжении межатомных связей до момента разрыва. В действительности разрушение стекла весьма сложно и характеризуется наличием эффекта статической усталости, зависящей от скорости деформации или времени выдержки под напряжением. При этом для полного понимания статической усталости стекла, например, силикатного стекла состава кремний-кислород, предполагается наличие коррозии под напряжением, которая может существенно влиять на концентрацию напряжений у вершины микротрещины. Как показывают опыты [1], при очень малом времени нагружения или при низких температурах разрушающее напряжение почти не зависит от времени и температуры. С увеличением времени выдержки под напряжением и с увеличением температуры химическое и физико-химическое взаимодействие с окружающей средой становится значительным, что и приводит к эффекту статической усталости. Эти процессы можно объяснить на основе теории коррозии под напряжением – быстрой абсорбцией влаги и медленного гидролиза силикатов. Для данного уровня напряжения эти процессы будут способствовать упрочнению, или разупрочнению материала в зависимости от того. как изменяет проникающая в кончик трещины вода его радиус кривизны и эффективную поверхностную энергию. Эти положения применимы также для объяснения и описания статической прочности других хрупких материалов, например, керамических композитов. Как показывают наблюдения [2], длительная прочность этих материалов связана с механизмом коррозионо-окислительного роста дефектов. Учитывая эти результаты и принимая во внимание взаимосвязанные процессы окисления, деформирования и разрушения кристаллической фазы керамических композитов, сформулированы кинетические уравнения роста точечных дефектов и критерий длительной высокотемпературной прочности.

В работе принимается также во внимание, что дефектность и микронеоднородность хрупких материалов имеют случайный характер и при формулировке критерия длительной прочности используется вероятностные методы [3-5] и концепция хрупкого разрушения Качанова-Работнова [6, 7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 09-01-00513).

1. Формулировка вероятностного критерия длительной прочности хрупких материалов, основанного на концепции хрупкого разрушения Качанова-Работнова.

Для описания хрупких разрушений широко используется концепция поврежденности Качанова-Работнова [6, 7]. В частности, критерий чисто хрупкого разрушения был сформулирован Л.М. Качановым в 1958 г. При формулировке этого критерия Качанов исходил из предположения о том, что деформирование и разрушение являются независимыми процессами. Более общей следует считать теорию Ю.Н. Работнова, согласно которой вводится система из двух взаимосвязанных уравнений для деформации ползучести $£$ и параметра поврежденности μ в задаче о ползучести и разрушении образца под действием напряжения $\pm$:

$$\frac{d£}{dt} = f_1(\pm, \mu) \tag{1}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = f_2(\pm, \mu) \tag{2}$$

Следуя Работнову, выберем правые части уравнений (1)-(2) в виде степенных функций и запишем эту систему в виде

$$\frac{d£}{dt} = b\pm^{m}(1-\mu)^{-q}, \tag{3}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = c\pm^{n}(1-\mu)^{-r}, \tag{4}$$

где b, c, m, n, q, r – постоянные, $\pm = \frac{P}{F}$, $\pm_0 = \frac{P}{F_0}$, F_0 – начальная, F – текущая площадь поперечного сечения стержня, P – постоянная нагрузка.

Рассматривая случай чисто хрупкого разрушения и малых деформаций, можно считать $F \approx F_0$, $\pm = \pm_0 = const$. При этих предположениях уравнение (4) обычно используется для формулировки критерия чисто хрупкого разрушения лабораторного образца. Для i– го элемента среды решение уравнения (3) при начальном условии $t = 0$, $\mu = \mu_{0i}$ имеет вид

$$\mu_i = 1 - \left[(1-\mu_{0i})^{r+1} - \left(r+1\right) c \pm_0^n \, t_i \right]^{1/r+1}. \tag{5}$$

При условии $\mu_i = 1$, $\mu_{0i} = 0$ из (5) следует критерий чисто хрупкого разрушения Качанова-Работнова

$$t_*^x = \frac{1}{c(r+1)\pm_0^n}. \tag{6}$$

Критерий (6) применяется для описания участка хрупкого разрушения кривой длительной прочности металлических материалов, работающих в условиях высокотемпературной ползучести. Изложенная концепция хрупкого разрушения далее используется для формулировки вероятностного критерия длительной прочности хрупких тел. При этом исходим из следующих положений. Считаем, что образец из хрупкого материала состоит из N элементов с различными начальными состояниями поврежденности μ_{0i} ($i = 1,...,N$). Различия поврежденного состояния элементов определяются такими факторами, как пористость, фазовый состав, наличие микропор и микротрещин разного размера и др., а временная эволюция дефектного состояния определяется кинетическим уравнением типа (2), (4). Время до разрушения, т.е. достижение критической величины одного из параметров поврежденности, является также случайной величиной. Разрушение образца определяется временем достижения критической поврежденности одного элемента. Таким образом, принимается гипотеза слабого звена, когда длительная прочность хрупкого тела целиком определяется длительной прочностью наиболее слабого звена. При этих предположениях параметр поврежденности μ задается в виде распределения Вейбулла [3]

$$G(\mu) = 1 - exp(-\cdot\ \mu^{¸}), \tag{7}$$

где $\cdot$, $¸$ – постоянные.

Учитывая соотношение (5), функция распределения (7) запишется в виде

$$G(t) = 1 - exp(-\alpha F^{\beta}(t_i)), \tag{8}$$

где $F(t_i) = 1 - \left[(1-\omega_{0i})^{r+1} - (r+1)c\sigma_0^n t_i\right]^{1/r+1}$.

Для оценки вероятности безотказной работы перейдем к функции надежности $R(t) = 1 - G(t) = exp(-\alpha F^{\beta}(t_i))$. Задавая уровень надежности R_* $(t_i = t_*)$, из соотношения (8) можно получить следующий критерий длительной прочности

$$t_* = \frac{1}{c(r+1)\sigma_0^n}\left\{(1-\omega_0)^{r+1} - \left[1 - \left(\frac{ln1/R_*}{\alpha}\right)^{1/\beta}\right]^{r+1}\right\}. \tag{9}$$

Основное отличие критерия (9) от критерия хрупкого разрушения Качанова-Работнова (6) в том, что в формуле (9) содержатся дополнительно статистические характеристики дефектного состояния материала. Таким образом, в рамках предложенного критерия имеются возможности для описания экспериментальных кривых длительной прочности с учетом естественного разброса времени до разрушения. Действительно, с помощью семейства кривых длительной прочности, соответствующих равной вероятности разрушения, можно описать полосу разброса с указанием верхней и нижней границ работоспособности материала. В рамках предложенной концепции можно также описать кривые ползучести хрупких материалов с учетом естественного разброса. Соответствующие теоретические кривые накопления деформации ползучести следует из решения уравнения (2) с учетом в них величины параметра поврежденности по формуле (5).

2. Длительная прочность керамических материалов, основанная на механизме коррозионно-окислительного роста дефектов.

Согласно последним исследованиям [8] высокотемпературные окислительные процессы оказывают существенное влияние на изменения прочностных характеристик керамических композитов на основе нитрида кремния. В частности, в процессе окисления в течение ста часов при температуре $1400^0\,C$ прочность при изгибе уменьшается на $10-19\,\%$, трещиностойкость на $8-22\,\%$. Отмеченные изменения механических свойств авторы работы [8] связывают с окислением кристаллической фазы (стеклофазы) на границе зерен. В работе [8] вопросы роста трещин не рассматриваются. Рассматривая вопросы роста дефектов и разрушения керамических композитов, естественно считать, что начальный дефект возникает в пределах кристаллической фазы. Окислительные процессы на поверхности дефекта приводят к росту окисной пленки по закону насыщения

$$\frac{dl}{dt} = k(T)(l_* - l), \tag{10}$$

где l – текущая и l_* – предельная глубина окисного слоя, T – температура.

Как следует из решения уравнения (10) $l = l_*(1-e^{-kt})$ окислительный процесс с течением времени затухает, достигая предельной величины l_*. В случае воздействия механических напряжений и высоких температур неупругие деформации, возникающие в кристаллической фазе, приведут к разрушению окисного слоя и возобновлению процесса окисления. Эти процессы могут быть описаны с помощью модифицированного уравнения (10)

$$\frac{dl}{dt} = k(T)(l_* - l) + k_1\dot{\varepsilon}, \tag{11}$$

где k_1 – постоянная, $\dot{\varepsilon}$ – скорость неупругой деформации кристаллической фазы.

При высоких температурах кристаллическую фазы будем рассматривать как нелинейно вязкую среду. Реологическое уравнение (закон ползучести) для такой среды задается в виде степенного закона $\dot{\varepsilon} = \sigma^d/\eta$, где d – постоянная, η – коэффициент вязкости. Считается, что коэффициент вязкости является некоторой функцией времени и температуры [9, 10]

$¦ = ¦(t,T)$. Далее эта функция задается в виде экспоненциальной зависимости $¦ = ¦_0(T)\, e^{-\sim t}$ ($\sim$ – постоянная).

Экспериментальные исследования показывают [2], что при высоких температурах, когда проскальзывание и разрушение по границам зерен являются, в основном, определяющими для некоторых классов керамик, в частности для окиси алюминия, деформирование связано с диффузией атомов алюминия и кислорода в объеме зерна окисла. В этом случае выполняется известный закон Набарро-Херринга, согласно которому показатель степени в законе ползучести принимается равным единице ($b = 1$) [2].

Учитывая принятые выражения в уравнении (11), получим

$$\frac{dl}{dt} = k\,(T)\,(l_* - l) + a\, e^{\sim t}. \tag{12}$$

Принимая условия $t = 0$, $l = l_0$, $± = const$, решение уравнения (12) запишется в виде

$$l = l_* + (l_0 - l_*)e^{-k\,t} + \frac{a}{\sim + k}(e^{\sim t} - e^{-k\,t}). \tag{13}$$

Будем считать, что в момент разрушения $t = t_P$ $l = l_*$, тогда из (13) следует критерий длительной прочности

$$t_P = \frac{1}{\sim + k} ln\left[1 + \frac{¦_0(T)(\sim + k)(l_* - l_0)}{k_1 ±^{d}}\right]. \tag{14}$$

При многократном повторении взаимосвязанных процессов окисления, деформирования и разрушения будет наблюдаться ступенчатый рост начального дефекта согласно критерию (14) с последующим макроразрушением при достижении размера дефекта критической величины. В приложении к тонкостенным конструкциям, работающим под давлением окислительных сред, критический размер дефекта определяется толщиной стенки конструкции.

Критерий длительной прочности (14) сформулирован для случая развития единичного дефекта. В действительности в произвольном элементе тонкостенной конструкции имеется большое число начальных дефектов. Можно считать, что распределение дефектов по размерам является случайным. Случайно также и время до разрушения, т. е. достижения одной из трещин предельного значения. Пусть $l_{0i} \le l_i \le l_*$ $(i = 1,...,N)$ – случайная выборка из показательного распределения Вейбулла

$$G = 1 - exp(-ª\; l^{¢}), \tag{15}$$

где $ª$, $¢$ – постоянные.

Обозначим через t_i число циклов, при котором i – я трещина достигает предельной длины. Для произвольной трещины решение (13) можно записать в виде

$$l_i = l_* + (l_{0\,i} - l_*)e^{-k\,t_i} + \frac{a}{\sim + k}(e^{\sim t_i} - e^{-k\,t_i}). \tag{16}$$

Учитывая соотношения (15) и (16) будем иметь

$$G = 1 - exp(-ª\; F^{¢}(t_i)), \tag{17}$$

где

$$F(t_i) = l_* + (l_{0\,i} - l_*)\, e^{-k\,t_i} + \frac{a}{\sim + k}\left(e^{\sim t_i} - e^{-k\,t_i}\right). \tag{18}$$

Для оценки вероятности безотказной работы перейдем к функции надежности $R(t) = 1 - G(t) = exp(-ª\; F^{¢}(t_i))$. Задавая уровень надежности R_* $(t_i = t_*)$, из этого соотношения можно получить критерий длительной прочности. С учетом (18) имеем

$$k_1 ±^{b} = \frac{¦_0(T)(\sim + k)\left[A - (l_{0i} - l_*)e^{-kt_*}\right]}{e^{\sim t_*} - e^{-kt_*}}, \tag{19}$$

где $A = \left(\frac{1}{\alpha} ln \frac{1}{R_*} \right)^{1/\prime} - l_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филлипс К. Дж. Разрушение стекла // Разрушение. М.: Мир. 1976. том 7. часть 1. С. 19-58.
2. Кобл Р.Л., Парих Н.М. Разрушение поликристаллической керамики // Разрушение. М.: Мир. 1976. том 7. часть 1. С. 221-299.
3. Weibull W. A statistical theory of the strength of materials // Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res. 1939. N 151. P. 5-45.
4. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир. 1965. 450с.
5. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат. 1965. 279 с.
6. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 311с.
7. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. 752с.
8. Tong Xuguang, Li Jianbao, Yang Xiaozhan, Lin Hong, Guo Gangfeng, He Mingsheng Mechanical property and oxidation behavior of self-reinforced Si_3N_4 doped with Re_2O_3 ($Re = Yb, Lu$) // J. Amer. Ceram. Soc. 2006. Vol. 89. N 5. P. 1730-1732.
9. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 252с.
10. Robert A. Arutyunyan. Creep fracture of nonlinear viscoelastic media undergoing UV radiation // International journal of fracture. 2005. Vol. 132. N 1. P. L3-L8.

<u>Сведения об авторах</u>

Арутюнян Александр Робертович – инженер кафедры теории упругости, Санкт-Петербургский государственный университет, факультет математики и механики, (7 812) 428 42 45
E-mail Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

Арутюнян Роберт Ашотович – профессор кафедры теории упругости, Санкт-Петербургский государственный университет, факультет математики и механики, (7 812) 428 41 64
E-mail Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

ПЛОСКИЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ МЕЖДУ МАТЕРИАЛАМИ

Арутюнян Л.А.

Рассматриваются плоские задачи теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

На одном берегу трещины заданы нормальные напряжения и касательные перемещения, а на другом берегу заданы нормальные и касательные напряжения.

При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Папковича-Нейбера задачи решаются амкнуто. В частном случае рассмотрены конкретные задачи.

Задачи с трещинами связаны с задачами определения напряженно-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, представляющих интерес в теоретических и практических вопросах прочности разнообразных конструкций, они стали предметом исследования многих авторов [2-6].

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

На прямоугольной декартовой системе координат (x,y) при $y \geq 0$ полуплоскость имеет упругие характеристики G_1 и v_1, а при $y \leq 0$ имеет упругие характеристики G_2 и v_2 (G_1 и G_2 – модули сдвига материалов, v_1 и v_2 – коэффициенты Пуассона).

Для решения задачи удобно использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x,y) с биполярными координатами (α,β) дается соотношениями [1].

$$gx = \operatorname{sh}\alpha,\quad gy = \sin\beta,\quad ag = \operatorname{ch}\alpha + \cos\beta \tag{1}$$

a – размерный параметр.

Координата α будет при этом изменятся от $-\infty$ до $+\infty$; в правой полуплоскости $\alpha > 0$; в левой $\alpha < 0$; ось $0y$ является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm a$, $y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней $\beta < 0$, отрезок $(-a,a)$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси $0x$ при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв, равный 2π, а именно, на верхнем берегу $\beta = \pi$, на нижнем берегу $\beta = -\pi$.

Задачи решаются при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, можно представить через три гармонические функции, поскольку одна из них принимается произвольно. Пользуясь этой произвольностью, принимаем одну из функций равной тождественно нулю $\Phi_1 = 0$.

Приведем выражения перемещений u и v напряжений σ_y и τ_{xy} через функцию Папковича-Нейбера [1]:

$$\begin{gathered}
2GU(x,y) = -\frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial x} \\
2GV(x,y) = (3-4v)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial y} \\
\sigma_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-v)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x,y)}{\partial y^2} \\
\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2v)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial y}\right]
\end{gathered} \tag{2}$$

1. Пусть на участках граничной прямой $y=0$, а именно, на отрезке $|x|<a$ имеем трещину, а на участках $|x|>a$ имеем полный контакт материалов (рис.1)

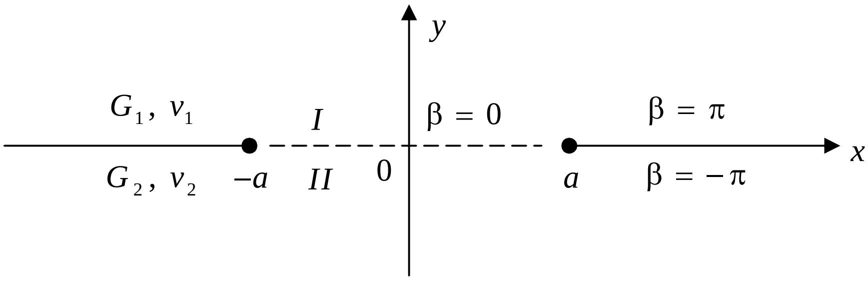


Рис.1

Рассмотрим смешанную краевую задачу, то есть на одном берегу трещины заданы нормальные перемещениии касательные напряжения, а на другом берегу заданы нормальные и касательные напряжения.

$$V_1(\alpha,0)=V_0(\alpha),\ \sigma_y^{(2)}(\alpha,0)=\sigma_2(\alpha)\ ,\quad \tau_{xy}^{(m)}(\alpha,0)=\tau_m(\alpha)\ ,\ (m=1,2) \tag{3}$$

Предполагается, что функции $V_0(\alpha)$, $\sigma_2(\alpha)$ и $\tau_m(\alpha)$, $(m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграле Фурье.

На линии контакта имеем полное сцепление материалов, т.е. нормальное и касательное перемещения, так как нормальное и касательное напряжения равны:

$$U_1(\alpha,\pi)=U_2(\alpha,-\pi)\ ;\ V_1(\alpha,\pi)=V_2(\alpha,-\pi)\ ;\sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)\ ;\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi) \tag{4}$$

Подставляя в граничные условия (3) и (4) выражения (2) перемещений и напряжений через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)$ Папковича-Нейбера, мы приходим к следующей краевой задаче. При этом следует перейти от производных x и y к производным по α и β [1]

$$\begin{gathered}
\left[(3-4v_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}=2G_1V_0(\alpha)\\
\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-v_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}=\frac{a\sigma_2(\alpha)}{\mathrm{ch}\alpha+1}\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2v_m)\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(m)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0}=\frac{a\tau_m(\alpha)}{\mathrm{ch}\alpha+1}\quad(m=1,2)\\
\frac{1}{G_1}\frac{\partial\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Bigg|_{\beta=\pi}=\frac{1}{G_2}\frac{\partial\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Bigg|_{\beta=-\pi}\\
\frac{1}{G_1}\left[(3-4v_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\pi)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\pi)\right]=\frac{1}{G_2}\left[(3-4v_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,-\pi)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,-\pi)\right]\\
\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-v_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=\pi}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-v_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=-\pi}\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2v_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=\pi}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2v_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=-\pi}
\end{gathered} \tag{5}$$

где введены новые граничные функции

$$\Phi_3^{(m)}(x,y)=\frac{\partial\Phi_0^{(m)}(x,y)}{\partial y}\qquad(m=1,2) \tag{6}$$

Рассматриваемая краевая задача допускает точное решение в биполярных координатах, если представить искомые функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)\ (n=2,3;\ m=1,2)$ в виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_n^{(m)}(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\beta+B_n^{(m)}(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\beta\right]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), мы приходим к системе алгебраических уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ $(n=2,3;\ m=1,2)$, правые части которых будут содержать преобразования Фурье от заданных функций:

$$A_2^{(1)}(\lambda)=\frac{2\left[\bar{V}_1(\lambda)-\bar{\tau}_1(\lambda)\right]}{\chi_1+1}\ ;\ A_3^{(1)}(\lambda)=\frac{(\chi_1-1)\bar{V}_1(\lambda)-2\chi_1\bar{\tau}_1(\lambda)}{\chi_1+1}$$

$$A_3^{(2)}(\lambda)=\frac{\chi_2-1}{2}A_2^{(2)}-\bar{\tau}_2(\lambda);\ \ B_3^{(2)}(\lambda)=\frac{\chi_2+1}{2}B_2^{(2)}(\lambda)-\bar{\sigma}_2(\lambda)$$

$$A_2^{(2)}(\lambda)=\left[B_3^{(1)}(\lambda)-\frac{\chi_1+1}{2}B_2^{(1)}(\lambda)\right]\mathrm{cth}\lambda\pi+\bar{\sigma}_2(\lambda)\mathrm{cth}\lambda\pi-\frac{2\bar{V}_1(\lambda)+(\chi_1-1)\bar{\tau}_1(\lambda)}{\chi_1+1}+\bar{\tau}_2(\lambda) \tag{8}$$

$$B_2^{(2)}(\lambda)=\frac{\chi_1-1}{2}B_2^{(1)}(\lambda)-B_3^{(1)}(\lambda)+\bar{\sigma}_2(\lambda)+\left[\bar{\tau}_1(\lambda)-\bar{\tau}_2(\lambda)\right]\mathrm{cth}\lambda\pi$$

$$B_2^{(1)}(\lambda)=\frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\ ;\ \ B_3^{(1)}(\lambda)=\frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

где

$$\Delta=a_{11}a_{22}(\lambda)-a_{12}a_{21}(\lambda),\ \Delta_1(\lambda)=a_{22}(\lambda)b_1(\lambda)-a_{12}b_2(\lambda)\ ,\ \Delta_2(\lambda)=a_{11}b_2(\lambda)-a_{21}(\lambda)b_1(\lambda)$$

$$a_{11}=\frac{\mu}{2}(1-\chi_1\chi_2)\ ;\ a_{12}=1+\mu\chi_2\ ,\ \ a_{22}(\lambda)=-2(1+\mu\chi_2)\mathrm{ch}2\lambda\pi+2(1-\mu)$$

$$a_{21}(\lambda)=\left[\mu(1+\chi_1\chi_2)+2\chi_1\right]\mathrm{ch}2\lambda\pi+\mu(\chi_1+\chi_2)-2\chi_1$$

$$b_1(\lambda)=\left[1-\chi_1-\mu(1-\chi_2)\right]\frac{\bar{V}_1(\lambda)\mathrm{th}\lambda\pi}{1+\chi_1}-\frac{\mu(1+\chi_2)\bar{\tau}_2(\lambda)}{\mathrm{sh}2\lambda\pi}+$$

$$+\frac{\bar{\tau}_1(\lambda)}{(1+\chi_1)\mathrm{sh}2\lambda\pi}\left[\left(2\chi_1+\mu(1+\chi_1\chi_2)\right)\mathrm{ch}2\lambda\pi+\mu(\chi_1+\chi_2)-2\chi_1\right] \tag{9}$$

$$b_2(\lambda)=-\frac{2\bar{V}_1(\lambda)}{1+\chi_1}\left[1+\chi_1+\mu(\chi_1+\chi_2)\right]\mathrm{sh}2\lambda\pi+2\mu(1+\chi_2)\bar{\sigma}_2(\lambda)+\frac{2\mu\bar{\tau}_1(\lambda)}{1+\chi_1}(1-\chi_1\chi_2)\mathrm{sh}2\lambda\pi$$

$$\bar{V}_1(\lambda)=\frac{2G_1\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}V_0(\alpha)e^{i\lambda\alpha}d\alpha\ ;\ \ \bar{\sigma}_2(\lambda)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_2(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\mathrm{ch}\alpha+1}d\alpha$$

$$\bar{\tau}_m(\lambda)=\frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_m(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\mathrm{ch}\alpha+1}d\alpha;\ \ \mu=\frac{G_1}{G_2}\ ;\ \ \chi_m=3-4\nu_m\ \ (m=1,2)$$

2. На участках граничной прямой $y=0$, а именно, на отрезках $|x|>a$ имеем трещину, а на участках $|x|<a$ имеем полный контакт материалов (рис.2).

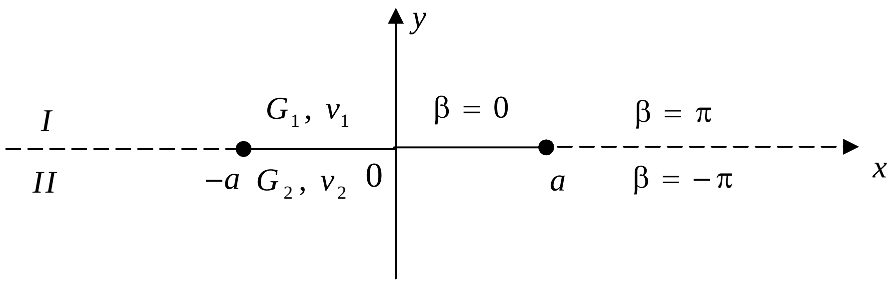


Рис.2

Граничные и контактные условия в этом случае имеют вид:

$$V_1(\alpha,\pi)=V_0\ ;\ \sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)=\sigma_2(\alpha)\ ;\ \tau_{xy}^{(m)}\left(\alpha,(-1)^{m+1}\pi\right)=\tau_m(\alpha)\ ;\ (m=1,2)$$
$$V_1(\alpha,0)=V_2(\alpha,0)\ ;\quad U_1(\alpha,0)=U_2(\alpha,0) \tag{10}$$
$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,0)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,0);\ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,0)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,0)$$

В этом случае функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)\ (n=2,3;\ m=1,2)$ ищем в следующем виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[A_n^{(m)}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)+B_n^{(m)}(\lambda)\operatorname{sh}\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)\right]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda \tag{11}$$

После удовлетворения краевым и контактным условиям (10), учитывая формулы (1,2,11) для неизвестных величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($m=1,2$; $n=2,3$), получаем опять значения (8 и 9), только в этом случае

$$\bar{\sigma}_2(\lambda)=-\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_0(\lambda)e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha-1}d\alpha\ ;\ \bar{\tau}_m(\lambda)=-\frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_m(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\operatorname{ch}\alpha-1} \tag{12}$$

Дадим решение одной конкретной задачи, когда внешние усилия, приложеные к берегам трещины, сводятся к сосредоточенным силам величины P, приложенным в точках $y=0$, $x=b$ в первом случае $-a<b<a$ (рис.3) и $b<-a$ или $b>a$ во втором случае (рис.4).

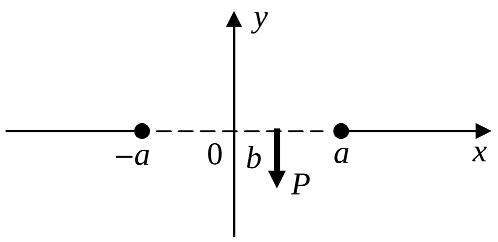


Рис.3

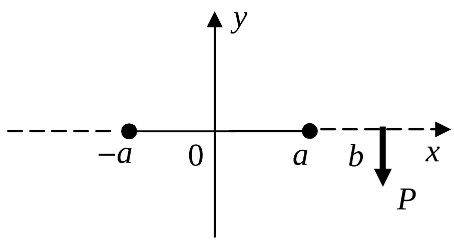


Рис.4

Представляет интерес распределение напряжений на линии контакта:

В первом случае при $K_0\geq 1$ получаем:

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)=-\frac{K_3P\cos(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(K_0+1)}}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi)=-\frac{K_4P\sin(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(K_o-1)}}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}} \tag{13}$$

при $K_0\leq 1$

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)=-\frac{K_3P\operatorname{ch}(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(1+K_0)}}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi)=-\frac{K_4P\operatorname{sh}(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(1-K_0)}}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(x-b)\sqrt{x^2-a^2}} \tag{14}$$

Во втором случае имеем следующие значения при $K\geq 1$:

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha,0)=-\frac{K_3P\cos(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(K_0+1)}}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$\tau_{xy}^{(m)}(\alpha,0)=\frac{K_4P\sin(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(K_0-1)}}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}} \tag{15}$$

при $K\leq 1$

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha,0) = -\frac{K_3 P \operatorname{ch}(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(1+K_0)}} \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\tau_{xy}^{(m)}(\alpha,0) = \frac{K_4 P \operatorname{sh}(\alpha_0-\alpha)\theta}{\pi\sqrt{2(1-K_0)}} \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{(b-x)\sqrt{a^2-x^2}} \tag{16}$$

где

$$K_0 = \frac{\mu^2(1+\chi_2^2)+\mu(\chi_1+\chi_2-\chi_1\chi_2-1)-2\chi_1}{2(\mu+\chi_1)(1+\mu\chi_2)}$$

$$K_3 = \frac{\mu(1+\chi_2)\left[\mu(1+\chi_2)+1+\chi_1\right]}{2(\mu+\chi_1)(1+\mu\chi_2)}$$

$$K_4 = \frac{\mu(1+\chi_2)\left[\mu(1-\chi_2)-1+\chi_1\right]}{2(\mu+\chi_1)(1+\mu\chi_2)}$$

$$\alpha_0-\alpha = \ln\left|\frac{(a-x)(b+a)}{(a+x)(b-a)}\right|,$$

$$\theta = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{\frac{K_0+1}{2}}+\sqrt{\frac{K_0-1}{2}}\right);\; K_o \ge 1; \quad \theta = \pm\frac{1}{2\pi}\arccos K_0\,,\; K_0 \le 1 \tag{17}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401с.
2. Попов Г.Я. Конструкция упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений.М.: Наука, 1982. 344 с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционнывх материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Изв.НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №4. С.57-65.
5. Даштоян Л.Л. Об обной смешанной задаче для составной плоскости с двумя полубесконечными трещинами. //XII Респуб. конф.молодых ученых. «Механика», Ереван: 2003. С.78-82.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. // Междунар. научно-техн.конф. «Архитектура и строительство». 2008: Ереван, с.34-37.

Сведения об авторе:

Арутюнян Л.А.,
Кандидат физ.-мат.наук, ст.науч.сотр. Института механики НАН Армении.
Адрес:0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б , тел. 099-67-57-47, 010-64-87-44.

К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГОВЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В СЛОЕ

Багдасарян А.Д.

Имеются многочисленные исследования по распространению упругих волн в пьезоактивной среде на основе квазистатического приближения [1,2]. Однако известен ряд задач для пьезоэлектрических сред гексагональной симметрии класса 6 мм, для которых получение точного решения не составляет особого труда по сравнению с квазистатическим приближением [3,4]. В этом случае, точное решение позволяет оценить пределы применимости приближенных методов.

В настоящей статье приводится решение задачи плоского волновода на основе точной линейной теории взаимодействия электромагнитного поля и упругой волны для пьезоэлектрических материалов класса 6 мм. Сравнивается с известным решением этой же задачи на основе квазистатического приближения. Показывается возможность исследования электромагнитной волны в зависимости от параметра электромеханической связи.

1. В прямоугольной декартовой системе координат волновод занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 \le y \le h$, $-\infty < z < \infty$. Материал волновода обладает пьезоэлектрическим свойством гексагональной симметрии класса 6 мм. Рассматривается задача распространения чисто сдвиговых волн. Уравнение задачи в точной постановке имеет вид [3]:

$$\Delta w = \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \Delta H_3 = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 H_3}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial E_2}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_3}{\partial x} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}. \tag{1.2}$$

В (1.1), (1.2) приняты следующие обозначения:

$$\mathrm{c}_t^2 = \frac{\mathrm{c}_{44}}{\rho}(1+\chi), \quad \chi = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_1 c_{44}}, \quad \mathrm{c}_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_1 \mu_1}. \tag{1.3}$$

В (1.1) – (1.3) использованы общепринятые символы: w – упругое перемещение в направлении оси z; H_3 – компонент напряженности магнитного поля по оси z; E_1, E_2 – компоненты напряженности электрического поля по осям x и y соответственно; c_{44} – модуль сдвига, ρ – плотность материала, ε_1 и μ_1 – диэлектрическая и магнитная проницаемости материала, χ – коэффициент электромеханической связи.

Решение уравнений (1.1) представляется в виде гармонических волн

$$w = f(y)\exp i(\omega t - kx), \quad H_3 = F(y)\exp i(\omega t - kx), \tag{1.4}$$

Подстановка (1.3) в (1.1) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций f(y), F(y), общие решения которых имеют вид:

$$f = A_1 \exp\left(\sqrt{1-\eta}\cdot ky\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{1-\eta}\cdot ky\right) \tag{1.5}$$

$$F = B_1 \exp\left(\sqrt{1-\theta\eta}\cdot ky\right) + B_2 \exp\left(-\sqrt{1-\theta\eta}\cdot ky\right)$$

где

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2}, \quad \theta = \frac{c_t^2}{c_1^2}$$

С учетом (1.4) и (1.5) компоненты электрического поля определяются из (1.2) следующим образом:

$$E_1 = -\frac{ik}{\varepsilon_1 \omega}\left\{\sqrt{1-\theta\eta}\left[B_1 \exp\sqrt{1-\theta\eta}\cdot ky - B_2 \exp\left(-\sqrt{1-\theta\eta}\cdot ky\right)\right] - \right.$$

$$\left. -e_{15}\omega\left[A_1 \exp\sqrt{1-\eta}\cdot ky + A_1 \exp\left(-\sqrt{1-\eta}\cdot ky\right)\right]\right\}\exp i(\omega t - kx) \tag{1.6}$$

$$E_2 = -\frac{k}{\varepsilon_1 \omega}\Big\{B_1 \exp\left(\sqrt{1-\theta\eta}\cdot ky\right) + B_2 \exp\left(-\sqrt{1-\theta\eta}\cdot ky\right) -$$
$$-e_{15}\omega\sqrt{1-\eta}\left[A_1 \exp\left(\sqrt{1-\eta}\cdot ky\right) - A_2 \exp\left(-\sqrt{1-\eta}\cdot ky\right)\right]\Big\}\exp i\left(\omega t - kx\right).$$

Произвольные постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 должны определяться, удовлетворяя гармоничным условиям относительно функций w, H_3, E_1, E_2.

2. Пусть границы волновода закреплены

w = 0 при y = 0, h (2.1)

Подставляя выражение для w из (1.4) с учетом (1.5), получим следующую систему уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2 :

$$A_1 + A_2 = 0$$
$$A_1 \exp\left(\sqrt{1-\eta}\cdot ky\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{1-\eta}\cdot ky\right) = 0 \tag{2.2}$$

Система уравнений (2.2) имеет нетривиальное решение ($A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$), если детерминант равняется нулю, т.е. если

$$\mathrm{sh}\sqrt{1-\eta}\cdot kh = 0 \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что уравнение (2.3) не имеет решения, удовлетворяющего условию $\eta < 1$.

При $\eta > 1$ из (2.3) получается

$$\sin\sqrt{\eta-1}\cdot kh = 0\,,\ \eta_n = 1 = \left(\frac{n\pi}{kh}\right)^2,\ \text{n = 1, 2, ...} \tag{2.4}$$

Формула для η_n определяет квадраты частоты фазовых колебаний для соответствующих МОД. При условии (2.4) из системы (2.2) следует $A_2 = A_1$. Из (2.4) можно определить волновое число (или длину волны) через частоту

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2} - \left(\frac{n\pi}{n}\right)^2 \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что колебания с частотой $\omega < \pi h^{-1} c_t$ не могут распространяться в волноводе. Если сравнить с выражением для c_t из (1.3), то очевидно, что учет пьезоэффекта приводит к расширению указанного диапазона частоты.

Необходимо отметить, что приведенные результаты для сдвиговой волны, в случае закрепленных краев пластинки, остаются такими же,как и для квазистатического приближения.

3. Пусть, дополнительно к граничным условиям закрепленной границы (2.1), заданы граничные условия экрана электрического поля

$E_1 = 0$ при y = 0, h (3.1)

В этом случае, из выражения (1.6) для E_1 , при условии $\theta\eta_n < 1$, что вместе с (2.4) дает

$1 < \eta_n < \theta^{-1}$ при $c_t^2 < \omega^2 k^{-2} < c_1^2$ (3.2)

следует, что $B_1 = B_2 = 0$. Окончательно, при условии (3.2) для электрического поля получается (с учетом $A_2 = - A_1$)

$H_3 = 0$, $E_1 = 0$

$$E_2 = -i\frac{2ke_{15}}{\varepsilon_1}\sqrt{\eta_n - 1}\cdot A_1 \cos\sqrt{\eta_n - 1}\cdot ky \exp i\left(\omega t - kx\right) \qquad (3.3)$$

Как и в квазистатическом приближении, сдвиговые колебания сопровождаются колебанием электрического поля (безвихревым). Однако, при граничных условиях (2.1) и (3.1) и при условии

$$\eta_n > \theta^{-1} \text{ или } \frac{\omega^2}{\kappa^2} > c_1^2 \qquad (3.4)$$

получается решение для электромагнитного поля.
При удовлетворении решению условия (3.1) получаем

$$\sin\sqrt{\theta\eta - 1}\cdot kh = 0 \text{ или } \frac{\omega_m^2}{k^2} = c_1^2\left[1 + \left(\frac{m\pi}{kn}\right)^2\right] \qquad (3.5)$$

Из (3.5) и (3.4) следует $B_2 = B_1$ и, естественно, при условии (3.5) $A_1 = A_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах: Новосибирск: Наука, 1982. 239с.
2. Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л. Электроупругость кусочно-однородных тел. Изд. “Университетская книга”, 2000. 308 с.
3. Yang J.S. Bleustein – Gulaev waves in piezoelectromagnetic material. Intern. Jorrn of Applied electromagnetic and mechanics. 2000, 12, p 235-240.
4. Baghdasaryan A.D, Belubekyan M.V., On the problem of reflection of shear wave from a boundary of piezoelectric media of class 6mm. Proc, of the 8th International Congress on Thermal Stresses. TS 2009 University of Illinois at Urbana-Champaign, USA. CD 4p.
5. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексогональной симметрии. //В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформированных сред”. Ереван: Институт механики НАН РА. 2008. С.125- 130.

Сведения об авторе:

Багдасарян Армен Дорвардович,
внештатный научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (374 91) 415235; E-mail: armenb2000@yahoo.com

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАЗОРОМ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМ ЖИДКОСТЬЮ

Багдасарян Г. Е., Марухян С. А.

Рассмотрена задача колебаний и устойчивости коаксиальных круговых цилиндрических оболочек конечной длины, когда область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью. Исследована зависимость частоты колебаний рассматриваемой гидроупругой системы от глубины заполнения и толщины зазора. Показана возможность потери статической устойчивости внутренней оболочки под действием гидростатического давления.

1. Основные уравнения. Рассмотрим колебания и устойчивость коаксиальной системы двух цилиндрических оболочек конечных длин l, когда область между оболочками (зазор) частично заполнена несжимаемой жидкостью глубины $b\ (b \le l)$. Будем пользоваться цилиндрическими координатами (α, r, θ), совместив полярную ось α с осью оболочек.

За основу принимаются следующие предположения:
а) гипотеза Корхгофа – Лява о недеформируемых нормалях;
б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменяемости;
в) жидкость между оболочками совершает потенциальное движение;
г) волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебание оболочек [1–3].

На основе принятых предположений система уравнений колебания оболочек имеет вид [4]:

$$D_i \Delta^2 w_i - \frac{1}{R_i}\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \alpha^2} + \rho_i h_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = Z_i, \qquad i = (1,2),$$

$$\frac{1}{E_i h_i}\Delta^2 \Phi_i + \frac{1}{R_i}\frac{\partial^2 w_i}{\partial \alpha^2} = 0, \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}, \tag{1.1}$$

причем индекс $i=1$ относится к внутренней оболочке, а $i=2$ – к внешней.

В системе (1.1) w_i – прогиб, Φ_i – функция напряжений, R_i – радиус, h_i –толщина, E_i – модуль упругости, ν_i – коэффицент Пуассона, ρ_i – плотность материала i-ой оболочки, Z_i – нормально приложенная внешняя нагрузка.

В случае рассматриваемой задачи для Z_i имеем [3]

$$Z_i = \begin{cases} (-1)^i \left[-Z_0 + \rho_0 g (b-\alpha) \dfrac{1}{R_i}\dfrac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} \right] \text{ при } 0 < \alpha < b \\ 0 \quad \text{при} \quad b < \alpha < l. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь Z_0 –возмущенное давление жидкости, g – ускорение силы тяжести, ρ_0 – плотность жидкости.

Из интеграла Коши –Лагранжа имеем

$$Z_0 = -\rho_0 \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{t}}\right|_{r=R_i}, \tag{1.3}$$

где φ – потенциальная функция возмущенного движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0, \tag{1.4}$$

в области, занятой жидкостью, и следующим краевым условиям на границе этой области [5]:

$$v_r\big|_{r=R_i} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R_i} = \frac{\partial w_i}{\partial t}, \left(i = 1, 2\right), \tag{1.5}$$

$$v_\alpha\big|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\alpha=b}=0. \qquad (1.7)$$

Для определения функции φ, как это следует из (1.5), необходимо определить радиальные скорости стенок оболочек. Поэтому прежде всего обсудим вопрос о формах смещений поверхностей оболочек.

Предположим, что оболочки шарнирно оперты по торцам. Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее известным условиям шарнирного опирания, запишем в форме

$$\begin{aligned} w_i &= \cos n\theta\sum_{s=0}^{\infty} W_s^{(i)}\left(\mathrm{t}\right)\sin\lambda_s\alpha, \\ \Phi_i &= \cos n\theta\sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s^{(i)}\left(\mathrm{t}\right)\sin\lambda_s\alpha, \end{aligned} \qquad (1.8)$$

где $\lambda_s=(m+s)\pi/l$, m – число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n – число волн в окружном направлении, $W_s^{(i)}\left(\mathrm{t}\right)$ и $\Phi_s^{(i)}\left(\mathrm{t}\right)$ – искомые функции.

Исходя из (1.8), гармоническую функцию φ представим в виде

$$\varphi=\cos n\theta\left\{\sum_{s=0}^{\infty}\left[A_s(t)I_n\left(\lambda_s r\right)+B_s(t)K_n\left(\lambda_s r\right)\right]\sin\lambda_s\alpha+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\left[C_j(t)\mathrm{sh}\alpha_{nj}\alpha+D_j(t)\mathrm{ch}\alpha_{nj}\alpha\right]\Psi_n(\alpha_{nj}r)\right\}, \qquad (1.9)$$

где I_n, K_n – функции Бесселя чисто мнимого аргумента первого и второго рода,

$$\Psi_n\left(\alpha_{nj}r\right)=\frac{J_n(\alpha_{nj}r)}{J_n'(\alpha_{nj}R_1)}-\frac{Y_n(\alpha_{nj}r)}{Y_n'(\alpha_{nj}R_1)} \qquad (1.10)$$

J_n, Y_n – функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода порядка n; A_s, B_s, C_j, D_j – некоторые величины, которые определяются из поверхностных условий (1.5) – (1.7); α_{nj} – корни следующего трансцендентного уравнения:

$$J_n'\left(\alpha_{nj}R_2\right)Y_n'\left(\alpha_{nj}R_1\right)-J_n'\left(\alpha_{nj}R_1\right)Y_n'\left(\alpha_{nj}R_2\right)=0. \qquad (1.11)$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в граничные условия (1.5) – (1.7) и учитывая (1.11), путем ортогонализации определяем неизвестные A_s, B_s, C_j, D_j, выраженные через функции $W_s^{(i)}\left(\mathrm{t}\right)$. В силу этого и представления (1.9), из (1.3) находим следующие выражения для давления жидкости на стенках оболочек:

$$Z_0^{(i)}=-\rho_0\cos n\theta\sum_{\mathrm{s}=0}^{\infty}\left\{\left[A_1^{(i)}\left(s\right)\sin\lambda_s\alpha+\sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty}\left(B_1^{(i)}\left(s,j\right)\mathrm{sh}\alpha_{nj}\alpha+C_1^{(i)}\left(s,j\right)\mathrm{ch}\alpha_{nj}\alpha\right)\right]\frac{d^2W_s^{(1)}}{dt^2}+\right.$$

$$\left.+\left[A_2^{(i)}\left(s\right)\sin\lambda_s\alpha+\sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty}\left(B_2^{(i)}\left(s,j\right)\mathrm{sh}\alpha_{nj}\alpha+C_2^{(i)}\left(s,j\right)\mathrm{ch}\alpha_{nj}\alpha\right)\right]\frac{d^2W_s^{(2)}}{dt^2}\right\}. \qquad (1.12)$$

Здесь

$$A_p^{(i)}\left(s\right)=(-1)^{p+1}\frac{K_n'\left(\lambda_s R_{r(p)}\right)I_n\left(\lambda_s R_i\right)-I_n'\left(\lambda_s R_{r(p)}\right)K_n\left(\lambda_s R_i\right)}{\lambda_s\left[I_n'\left(\lambda_s R_1\right)K_n'(\lambda_s R_2)-I_n'\left(\lambda_s R_2\right)K_n'\left(\lambda_s R_1\right)\right]},(p=1,2;r^{(p)}=1+\delta_{1p}),$$

$$B_p^{(i)}\left(s,j\right)=(-1)^{p+1}\lambda_s R_p\Psi_n\left(\alpha_{nj}R_p\right)\Psi_n\left(\alpha_{nj}R_i\right)\Delta^{-1}(s,j),$$

$$C_p^{(i)}\left(s,j\right)=(-1)^{p+1}R_p\left(\alpha_{nj}\sin\lambda_s b-\lambda_s sh\alpha_{nj}b\right)\Psi_n\left(\alpha_{nj}R_p\right)\Psi_n\left(\alpha_{nj}R_i\right)(\Delta(s,j)ch\alpha_{nj}b)^{-1},$$

$$\Delta(s,j)=\alpha_{nj}\left(\alpha_{nj}{}^2+\lambda_s{}^2\right)^2\left[\frac{R_1^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_1^2}\right)\Psi_n^2\left(\alpha_{nj}R_1\right)-\frac{R_2^2}{2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha_{nj}^2R_2^2}\right)\Psi_n^2\left(\alpha_{nj}R_2\right)\right].$$

Подставляя (1.8) во второе уравнение системы (1.1), для искомой функции $\Phi_s^{(i)}(\mathrm{t})$ будем иметь

$$\Phi_s^{(i)}(\mathrm{t})=\frac{E_ih_i}{R_i}\frac{\lambda_s{}^2}{\left(\lambda_s{}^2+\dfrac{n^2}{R_i^2}\right)^2}W_s^{(i)}(\mathrm{t}). \tag{1.13}$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции $W_s^{(1)}(\mathrm{t})$ и $W_s^{(2)}(\mathrm{t})$.

На основе вариационного метода Бубнова –Галеркина из первого уравнения системы (1.1) для определения $W_s^{(1)}(\mathrm{t})$ и $W_s^{(2)}(\mathrm{t})$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2W_\kappa^{(1)}}{dt^2}+\Omega_1^2(k,n)W_\kappa^{(1)}+\sum_{s=0}^{\infty}\left(b_{ks}^{(1)}W_s^{(1)}+\frac{d^2}{dt^2}\left[m_1^{(1)}(k,s)W_s^{(1)}+m_2^{(1)}(k,s)W_s^{(2)}\right]\right)=0,$$

$$\frac{d^2W_\kappa^{(2)}}{dt^2}+\Omega_2^2(k,n)W_\kappa^{(2)}+\sum_{s=0}^{\infty}\left(b_{ks}^{(2)}W_s^{(2)}+\frac{d^2}{dt^2}\left[m_1^{(2)}(k,s)W_s^{(1)}+m_2^{(2)}(k,s)W_s^{(2)}\right]\right)=0,$$

$$(k=1,2,3,...). \tag{1.14}$$

Здесь

$$\left[\Omega^{(i)}(k,n)\right]^2=\frac{D_i}{h_i\rho_i}\left[\left(\lambda_k{}^2+\frac{n^2}{R_i^2}\right)^2+\frac{12(1-\nu_i^2)}{R_i^2h_i^2}\frac{\lambda_k{}^4}{\left(\lambda_k{}^2+\dfrac{n^2}{R_i^2}\right)^2}\right],$$

$$b_{ks}^{(i)}=(-1)^{i+1}\frac{\rho_0gn^2}{lR_ih_i\rho_i}\left[\frac{1-\cos(\lambda_s+\lambda_k)b}{(\lambda_s+\lambda_k)^2}-\frac{1-\cos(\lambda_s-\lambda_k)b}{(\lambda_s-\lambda_k)^2}\right],$$

$$m_p^{(i)}(k,s)=(-1)^{i+1}\frac{2\rho_0}{lh_i\rho_i}\left\{A_p^{(i)}(s)\left[\frac{\sin(\lambda_s-\lambda_k)b}{2(\lambda_s-\lambda_k)}-\frac{\sin(\lambda_s+\lambda_k)b}{2(\lambda_s+\lambda_k)}\right]+\right. \tag{1.15}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left[B_p^{(i)}(s,j)\frac{\alpha_{nj}\mathrm{ch}\alpha_{nj}b\sin\lambda_kb-\lambda_k\mathrm{sh}\alpha_{nj}b\cos\lambda_kb}{\alpha_{nj}{}^2+\lambda_s{}^2}+\right.$$

$$\left.+C_p^{(i)}(s,j)\frac{\lambda_k+\alpha_{nj}\mathrm{sh}\alpha_{nj}b\sin\lambda_kb-\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nj}b\cos\lambda_kb}{\alpha_{nj}{}^2+\lambda_s{}^2}\right\},$$

где $\Omega^{(1)}(k,n)$ и $\Omega^{(2)}(k,n)$ – частоты собственных поперечных колебаний внутренней и внешней оболочек соответственнно, $b_{ks}^{(i)}$ –коэффициенты гидростатического давления жидкости, $m_p^{(i)}(k,s)$ – коэффициенты присоединенных масс.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая одночленной аппроксимации $(s=0)$. Тогда из уравнений (1.14) имеем:

$$\left[1+M_1^{(1)}(m,n)\right]\frac{d^2W_{mn}^{(1)}}{dt^2}+\left[\Omega^{(1)}(m,n)\right]^2W_{mn}^{(1)}+M_2^{(1)}(m,n)\frac{d^2W_{mn}^{(2)}}{dt^2}+B_{mn}^{(1)}W_{mn}^{(1)}=0,$$

$$\left[1+M_2^{(2)}\left(m,n\right)\right]\frac{d^2W_{mn}^{(2)}}{dt^2}+\left[\Omega^{(2)}\left(m,n\right)\right]^2W_{mn}^{(2)}+M_1^{(2)}\left(m,n\right)\frac{d^2W_{mn}^{(1)}}{dt^2}+B_{mn}^{(2)}W_{mn}^{(2)}=0\,, \qquad (1.16)$$

где

$$M_q^{(i)}\left(m,n\right)=m_q^{(i)}\left(0,0\right),\quad B_{mn}^{(i)}=b_{00}^{(i)}\,,\quad W_{mn}^{(i)}=W_0^{(i)}\,,\quad \left(q=1,2\right).$$

Решение системы (1.16) может быть представлено в виде

$$W_{mn}^{(1)}(t)=c_{mn}^{(1)}e^{i\omega t}\,,\quad W_{mn}^{(2)}(t)=c_{mn}^{(2)}e^{i\omega t}\,, \qquad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в (1.16) и приравнивая определитель нулю, получим следующее уравнение частот:

$$\left[\left(1+M_1^{(1)}\left(m,n\right)\right)\left(1+M_2^{(2)}\left(m,n\right)\right)-M_1^{(2)}\left(m,n\right)M_2^{(1)}\left(m,n\right)\right]\omega^4-$$

$$-\left[\left(\left[\Omega^{(1)}\left(m,n\right)\right]^2+B_{mn}^{(1)}\right)\left(1+M_2^{(2)}\left(m,n\right)\right)+\left(\left[\Omega^{(2)}\left(m,n\right)\right]^2+B_{mn}^{(2)}\right)\left(1+M_1^{(1)}\left(m,n\right)\right)\right]\omega^2+$$

$$+\left(\left[\Omega^{(1)}\left(m,n\right)\right]^2+B_{mn}^{(1)}\right)\left(\left[\Omega^{(2)}\left(m,n\right)\right]^2+B_{mn}^{(2)}\right)=0\,. \qquad (1.18)$$

Если одна из оболочек является абсолютно жесткой, то из (1.18) для частоты колебаний соответственно получим

$$\omega_{mn}^2=\begin{cases}\dfrac{\left[\Omega^{(2)}\left(m,n\right)\right]^2+B_{mn}^{(2)}}{1+M_2^{(2)}\left(m,n\right)} & \text{при}\quad D_1=\infty,\\[2ex] \dfrac{\left[\Omega^{(1)}\left(m,n\right)\right]^2+B_{mn}^{(1)}}{1+M_1^{(1)}\left(m,n\right)} & \text{при}\quad D_2=\infty.\end{cases} \qquad (1.19)$$

Полученное уравнение (1.18) может быть использовано для приближенного исследования устойчивости и собственных колебаний рассматриваемой гидроупругой системы.

2. Статическая устойчивость. Рассматривается случай, когда внешняя оболочка абсолютно жесткая и $b=l$.Тогда, используя (1.19) и условие статической устойчивости $(\omega_{mn}=0)$ для определения критической длины оболочки, при котором происходит потеря устойчивости, получим уравнение

$$gl=\frac{A}{n^2}\left\{\left[n^2+\left(\frac{m\pi R_1}{l}\right)^2\right]^2+\beta\left(\frac{m\pi R_1}{l}\right)^4\left[n^2+\left(\frac{m\pi R_1}{l}\right)^2\right]^{-2}\right\}=Af\left(m,n\right), \qquad (2.1)$$

где

$$A=\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{c_1^2}{6(1-\nu_i^2)}\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^3,\quad \beta=12\left(1-\nu_i^2\right)\left(\frac{R_1}{h_1}\right)^2$$

Наибольший интерес представляют те значения аргументов m и n, вблизи которых правая часть (2.1) принимает минимальное значение. Легко заметить, что указанная часть является монотонно возрастающая функция по m и поэтому примем $m=1$. Тогда, минимизируя $f\left(1,n\right)$ по n, для определения критического числа волн n_* по окружности, получим

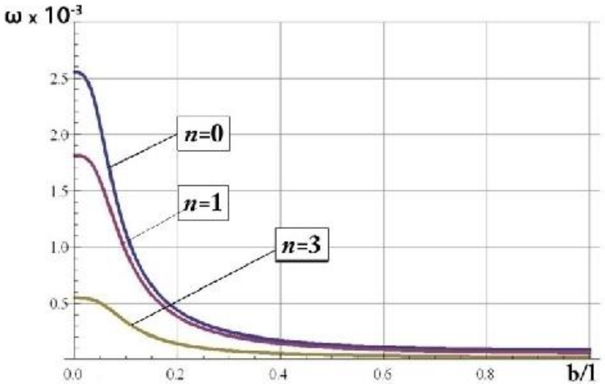
$$n^4-a_0^4-\beta a_0^4\frac{3n^2+a_0^2}{\left(n^2+a_0^2\right)^2}=0 \qquad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) составляют систему для определения n_* и критической длины l_*. Результаты численного решения (2.1) – (2.2), в случае гидроупругой системы «дюралюминовая оболочка – вода» (c_1=5100м/сек, ρ_0/ρ_1=2.7, $\nu_1=0.3$, $a_0=\pi R_1/l$) при различных значениях h_1

$h_1\times10^3$м \ R_1м	**0.5**	**1**	**2**
2	2.6 5	1.6 10	0.95 22
3	4.3 3	2.6 7	1.56 15
5	8.1 2	4.9 5	2.93 10
7	12.4 2	7.4 4	4.44 8
10	19.3 1	11.5 3	6.09 5

и R_1, приведены в таблице, где в каждой нижней части клетки приведены критические значения волнового числа n_*.

3. Собственные колебания. На основе (1.19) с учетом (1.15) произведено вычисление



значений частот колебаний гидроупругой системы, в случае, когда $D_2 = \infty$. Вычисления произведены по тем же исходным данным, как в задаче устойчивости при вычислении l_*. Результаты вычисления значения ω в зависимости от b/l приведены на рисунке при $m = 1$, R_1=2м, $l = R_2 = 2R_1$, и различных n. Из рис. видно, что присутствие жидкости может привести к существенному изменению частоты колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mixon John S., Herr Robert W. An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA, Nr. R – 145, 1962.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. //Докл. АН АрмССР. 1965. Т. XI. № 4.
3. Багдасарян Г. Е. Колебания коаксиальных цилиндрических оболочек с зазором, частично заполненным жидкостью.// Изв. АН АрмССР. Механика. 1968.Т. XXI. № 4. С.40–47.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949.
5. Кубенко В. Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи динамики упругих оболочек, частично заполненных жидкостью. //Прикладная механика. 2000. Т. 36. № 4.

<u>Сведения об авторах:</u>

Багдасарян Геворг Ервандович,
академик НАН Армении, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики, (374 10) 55 29 64

Марухян Сатик Арамовна,
магистрант второго курса факультета информатики и прикладной математики, ЕГУ
E-mail: msatineh@yahoo.com

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФЛАТТЕР ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Багдасарян Г. Е., Микилян М. А., Сагоян Р. О.

Рассматривается задача нелинейного флаттера ортотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учетом обоих типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Показано, что учет аэродинамической нелинейности (особенно ее несимметричной квадратичной части) приводит к появлению новых типов зависимостей “амплитуда-скорость” как в докритической стадии, так и послекритических скоростях.

1. Рассмотрим тонкую ортотропную ортотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h. Пусть материал пластинки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями ортогональных координатных линий α,β,γ. Координатная плоскость α,β совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Пусть, далее, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью u, направленной вдоль оси 0α (рис.1). Принимаются следующие предположения [1-4]:

а) гипотеза Кирхгофа-Лява о недеформируемых нормалях;

б) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки;

в) избыточное давление газа представляется по приближенной формуле “поршневой теории”.

На основе принятых предположений получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пластинки:

$$a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^4}+\left(a_{66}-2a_{12}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4}+ \\ +k_1\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+k_2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=0, \tag{1.1}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}+ \\ +2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}-\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left(\rho_0 h\varepsilon+\frac{æp_\infty}{a_\infty}\right)\frac{\partial w}{\partial t}-æp_\infty\left[M\frac{\partial w}{\partial\alpha}+ \right. \\ \left. +\frac{æ+1}{4}M^2\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{æ+1}{12}M^3\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^3\right]=0. \tag{1.2}$$

Здесь

$$D_{ik}=B_{ik}\frac{h^3}{12},\ \ c_{ik}=B_{ik}h,$$

$$a_{11}=\frac{c_{11}}{\Omega},\ a_{22}=\frac{c_{22}}{\Omega},\ a_{12}=\frac{c_{12}}{\Omega},\ a_{66}=\frac{1}{c_{66}},\ \Omega=c_{11}c_{22}-c_{12}^2,$$

$$M=\frac{U}{a_\infty},\ a_\infty=\frac{æp_\infty}{\rho_\infty},$$

$w(\alpha,\beta,t)$ – прогиб пластинки, B_{ik} – коэффициенты упругости, M – число Маха, a_∞ – скорость звука для невозмущенного газа, æ – показатель политропы, ρ_0 – плотность материала пластинки, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, ε – коэффициент линейного затухания, $F=F(\alpha,\beta,t)$ – функция напряжений.

При иследовании вопросов устойчивости к уравнениям (1.1) – (1.2) присоединяются также условия на контуре пластинки.

2. Рассмотрим шарнирно опертую по всему контуру ортотропную пластинку, края которой свободно смещаются в плане. Тогда граничные условия имеют следующий вид:

при $\alpha = 0$, $\alpha = a$

$$w = 0, \quad M_\alpha = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} = 0, \tag{2.1}$$

$$S^0 = 0, \; T_\alpha^0 = -p_\alpha^0, \tag{2.2}$$

при $\beta = 0$, $\beta = b$

$$w = 0, \quad M_\beta = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0, \tag{2.3}$$

$$S^0 = 0, \; T_\beta^0 = -p_\beta^0, \tag{2.4}$$

где T_α^0, T_β^0, S – средные значения тангенциальных усилий на кромках пластинки.

Приближенное решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям (2.1) и (2.3), будем искать в виде [2]

$$w(\alpha,\beta,t) = f_{11}(t)\sin\lambda_1\alpha\cdot\sin\mu_1\beta + f_2(t)\sin\lambda_2\alpha\cdot\sin\mu_1\beta,$$
$$\left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a}, \; \mu_k = \frac{k\pi}{b}\right). \tag{2.5}$$

Здесь $f_{ik}(t)$ – подлежащие определению функции времени t. Подставив (2.5) в (1.2), найдем функцию F, удовлетворяющую граничным условиям (2.2) и (2.4).

Для определения $f_{ik}(t)$ воспользуемся уравнением (1.2). Подставляя (2.5) в (1.2) и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций $x_1 = f_{11}(t)/h$, $x_2 = f_{21}(t)/h$, в случае ортотропной пластинки получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 - \frac{2}{3}k\nu x_2 + k\nu^2\Big[\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2 + \\
&\qquad + \nu x_2\left(\beta_{11}x_1^2 + \beta_{12}x_2^2\right)\Big] + Qx_1\left(\gamma_{11}x_1^2 + \gamma_{12}x_2^2\right) = 0 \\
&\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \chi\frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 + \frac{2}{3}k\nu x_2 + k\nu^2\Big[\alpha_{21}x_1x_2 + \\
&\qquad + \nu x_1\left(\beta_{21}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2\right)\Big] + Qx_2\left(\gamma_{21}x_1^2 + \gamma_{22}x_2^2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$, введены обозначения

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\rho_0 h}\Big[D_{11}\lambda_i^4 + 2\left(a_{66} - 2a_{12}\right)\lambda_i^2\mu_1^2 + D_{22}\mu_1^4 - \lambda_i^2 p_\alpha - \mu_1^2 p_\beta\Big] \quad (i = 1,2),$$

$$k = \frac{4æp_\infty}{\rho_0\omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{4}{16\rho_0\omega_1^2}, \quad L = \frac{1}{\rho_0 h\omega_1^2}, \tag{2.7}$$

$$\nu = M\frac{h}{a}, \qquad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \qquad \chi = \frac{2}{\omega_1}\left(\varepsilon + \frac{æp_\infty}{\rho_0 h a_\infty}\right),$$

$$\alpha_{11} = \frac{2}{9}(æ + 1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(æ + 1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(æ + 1), \tag{2.8}$$

$$\beta_{11}=\beta_{21}=\frac{\pi^2}{40}(æ+1),\quad \beta_{22}=\frac{11\pi^2}{70}(æ+1),\quad \beta_{12}=-\frac{9\pi^2}{70}(æ+1), \tag{2.9}$$

$$\gamma_{11}=\frac{\lambda_1^4}{a_{22}}+\frac{\mu_1^4}{a_{11}},\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=4\gamma_{11}+\frac{81\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{12}}+\frac{\lambda_1^4\mu_1^4}{\Delta_{32}},\ \gamma_{22}=\frac{\lambda_2^4}{a_{22}}+\frac{\mu_1^4}{a_{11}},$$
$$\Delta_{\lambda_i\mu_2}=a_{11}\lambda_i^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_i^2\mu_2^2+a_{22}\mu_2^4,\quad (i=1,3), \tag{2.10}$$

где ω_1 и ω_2 – частоты первой и второй формы малых собственных колебаний пластинки, ν – приведенный параметр скорости. Система нелинейных уравнений (2.6), описывающая поведение возмущений в ортотропной пластинке [5], внешне не отличается от аналогичной системы в случае изотропной пластинки, полученной в [2].

Соответствующая (2.6) линейная система допускает решения в виде $x_i=y_i\exp(\lambda\tau)$. В случае малых значений ν, все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w=0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра $\nu=\nu_*$, при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимымы, а остальные по-прежнему лежат в левой полуплоскости, является критическим и соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи

$$\nu^*=\frac{3}{4}\frac{\gamma^2-1}{k}\sqrt{1+\frac{2\chi^2(\gamma^2+1)}{(\gamma^2-1)^2}}. \tag{2.11}$$

3. Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (2.6). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин загруженных консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую к задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближенное периодическое решение системы (2.6) будем искать в виде [5]

$$x_1=A_1\cos\theta\tau+B\sin\theta\tau+C_1+\ldots,\qquad x_2=A_2\cos\theta\tau+C_2+\ldots \tag{3.1}$$

Здесь A_i, B, C_i и θ $(i=1,2)$ – неизвестные постоянные; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (3.1) отличается от существующих [2,3] наличием свободных членов $C_i\neq 0$, присутствие которых характерно задачам с квадратичной нелинейностью.

Подставим решение (3.1) в систему (2.6) и приравним нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos\theta\tau$ и $\sin\theta\tau$ (членами, содержащими гармоники, пренебрегаются). Полученная при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближенного решения этой системы предполагается, что: а) затухание достаточно мало ($\chi|B|<<|A_i|$, $|B|<<|A_i|$. При этих предположениях, как показано в [Б.] $A_2=-A_1$, если разность $|\nu-\nu^*|$ достаточно мала) и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния бесконечно мало отличающегося от невозмущенного $(|A_i|>>|C_j|;\ j=1,2)$. Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведения величин B, C_1 и C_2, исследование указанной нелинейной системы, путем исключения C_1, C_2 и θ, сводится к решению следующего уравнения относительно A_1 [5]:

$$b_0A_1^6+b_2A_1^4+b_2A_1^2+b_3=0. \tag{3.2}$$

Здесь

$$b_0 = \frac{3}{16}\left(k\nu^3\beta_0 - Q\gamma_0\right)\left[R_{12}R_{21} - P_{12}P_{21}\right],$$

$$b_1 = \frac{1}{3}k\left(\nu - \nu^*\right)\left(R_{12}R_{21} - P_{12}P_{21}\right) -$$

$$-\frac{1}{8}\left(Q\gamma_0 - k\nu^3\beta_0\right)\left\{3\left(R_{21} + \gamma^2 R_{12}\right) + 2\left[3\left(\beta_{21} - \beta_{12}\right) + \beta_{22} - \beta_{11}\right]k^2\nu^4\right\} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(k\nu^2\right)^2\left\{\left(2\alpha_{11} - \alpha_{21}\right)\left[\left(\alpha_{11} + \alpha_{12}\right)R_{21} + \alpha_{21}P_{12}\right] + \left(2\alpha_{12} - \alpha_{21}\right)\left[\alpha_{21}R_{12} + \left(\alpha_{11} + \alpha_{12}\right)P_{21}\right]\right\}$$

$$b_2 = \frac{4}{3}k\left(\nu - \nu^*\right)\left\{\frac{1}{2}\left(R_{21} + \gamma^2 R_{12}\right) + \frac{1}{3}k^2\nu^4\left[3\left(\beta_{21} - \beta_{12}\right) + \beta_{22} - \beta_{11}\right]\right\} -$$

$$-\frac{3}{4}\left(Q\gamma_0 - k\nu^3\beta_0\right)\left(\gamma^2 + \frac{4}{9}k^2\nu^2\right) - \left(k\nu^2\right)^2\left\{\left(2\alpha_{11} - \alpha_{21}\right)\left(\frac{1}{2}\gamma^2\left(\alpha_{11} + \alpha_{12}\right) - \frac{1}{3}k\nu\alpha_{21}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(2\alpha_{12} - \alpha_{21}\right)\left(\frac{1}{2}\alpha_{21} + \frac{1}{3}k\nu\left(\alpha_{11} + \alpha_{12}\right)\right)\right\},$$

$$b_3 = \frac{4}{3}k\left(\nu - \nu^*\right)\left(\gamma^2 + \frac{4}{9}k^2\nu^2\right).$$

где

$$R_{ij} = Q\left(\gamma_{ij} + 3\gamma_{ii}\right) - 2k\nu^3\beta_{ii};\; P_{ij} = Q\gamma_{ij} - 2k\nu^3\left(3\beta_{ij} + \beta_{ii}\right)\; i \neq j.$$

4. Уравнение (3.2) решено численно при следующих исходных данных: (дюралюминий), (воздух). На основе этого исследована зависимость амплитуды установившихся флаттерных колебаний в зависимости от параметра ν для разных значений параметров h/a и a/b. Результаты численного анализа показывают, что:

- если пластинка достаточно толстая (h/a и h/b одновременно больше, чем 1/60), то возможно только “жесткое” возбуждение флаттера, т.к. при $\nu \le \nu^*$ выполняется неравенство $\partial A_1/\partial\nu < 0$, а при $\nu > \nu^*$ действительные значения A_1 отсутствуют [2]. (рис.1);
- если пластинка достаточно тонкая (h/a и h/b одновременно меньше, чем 1/100), то возбуждение флаттерных колебаний носит “мягкий” характер, т.к. при $\nu \le \nu^*$ действительные значения A_1 отсутствуют, а при $\nu > \nu^*$ выполняется неравенство $\partial A_1/\partial\nu > 0$ (рис.2). Указанные характеры зависимости “амплитуда – скорость” выявлены в [2];
- кроме указанных обнаружены также следующие новые типы зависимости “амплитуда-скорость”. А именно:
    - если постепенно увеличивать скорость обтекающего потока, то можно наблюдать следующую картину: режим флаттерных колебаний (которые носят характер “жесткого” возбуждения) сохраняется вплоть до $\nu = \nu^*$, где колебания “сорвутся” и восстановится невозмущенное состояние пластинки. При снижении скорости невозмущенное состояние становится устойчивой, пока $\nu < \nu^*$. При $\nu = \nu^*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до конечного значения A_*. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает. Последнее указывает о величине амплитуд возмущений, необходимых для того, чтобы вызвать незатухающие колебания пластинки при докритических скоростях (причем, чем меньше скорость потока, тем требуется большая амплитуда) (рис.3,4).
    - Помимо случая “мягкого” возбуждения (рис.1, возмущения конечные, но достаточно малые) возможна также потеря устойчивости “в большом”. Т.е.

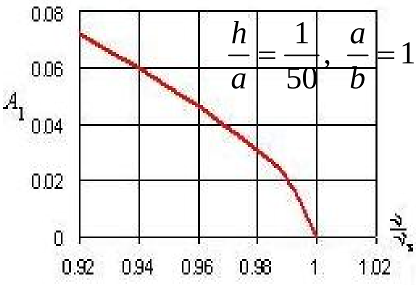


Рис.1

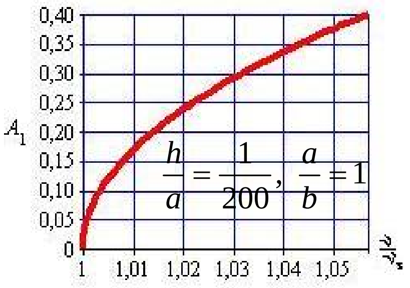


Рис.2

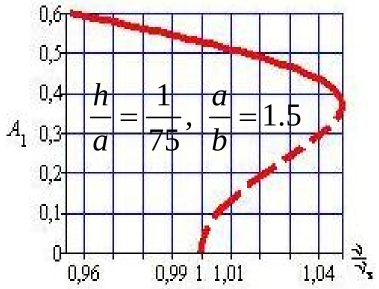


Рис.3

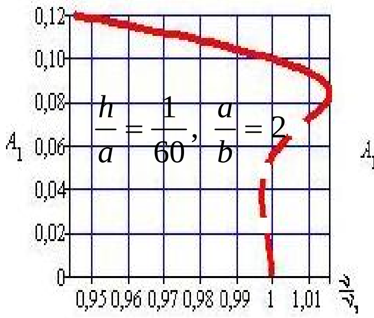


Рис.4

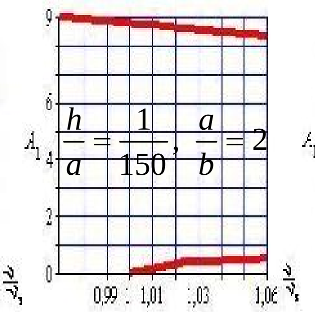


Рис.5

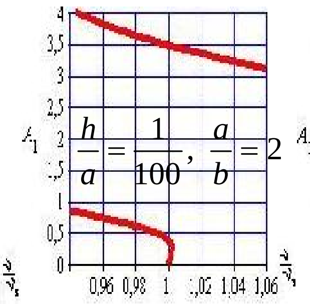


Рис.6

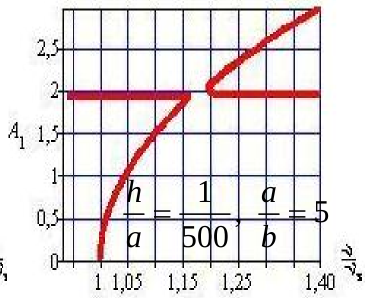


Рис.7

возможны флаттерные колебания в малой окрестности ν^* со сравнительно большой амплитудой (верхняя кривая рис.5,6). Нижние кривые рис. 5,6 соответствуют сравнительно малым возмущениям.

- На рис. 7 возможно, что кривые пересекаются, и, следовательно, может быть возможно явление бифуркации (разветвление).

Отметим еще раз, что указанные новые явления, в основном, связаны с квадратичной аэродинамической нелинейностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с
4. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
5. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв.АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. N4. С. 92-98.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН РА, профессор, Ереванский государственный университет, факультет информатики и прикладной математики
E-mail: mmikilyan@web.am

Микилян Марине Александровна – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Российско–Армянский (Славянский) университет, факультет прикладной математики и информатики
E-mail: mmikilyan@web.am

Сагоян Рафаел Оникович – магистрант Института механики НАН Армении
E-mail: rafayel1984@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УДАРА И ПРОНИКАНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВ ГРУНТОВЫХ СРЕД

Баженов В. Г., Котов В. Л.

На основе сочетания физического и математического моделирования процессов удара и проникания цилиндрических стержней разработан расчетно-экспериментальный метод идентификации деформационных и прочностных характеристик грунтовых сред в широком диапазоне изменения давлений. Предложен метод решения задачи наклонного проникания на основе гипотезы плоских сечений, который, как показывают верификационные исследования, достаточно хорошо описывает как силы сопротивления, так и отклонение траектории тела вращения от первоначального направления движения до момента удара. Показано, что, по сравнению с известными ранее моделями локального взаимодействия, он позволяет существенно повысить достоверность расчета параметров наклонного удара и проникания тел благодаря учету нелинейной зависимости давления от плотности, предела текучести от давления, необратимости объемной разгрузки, отрывного характера обтекания и разгружающего действия свободной поверхности.

1. Математическая модель С.С. Григоряна [1] динамического деформирования грунтовых сред при ударном нагружении формулируется с позиций механики сплошных сред на основе законов сохранения массы, импульса и уравнений теории пластического течения, которые в цилиндрической системе координат rOz (O – ось симметрии) записываются в виде системы дифференциальных уравнений

$$d\rho / dt + \rho(u_{r,r} + u_{z,z}) = -(\rho u_r) / r\ , \quad d\rho_* / dt = d\rho / dtH(\rho - \rho_*)H(d\rho / dt)\ ,$$

$$\rho du_r / dt - \sigma_{rr,r} - \sigma_{rz,z} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) / r\ , \quad \rho du_z / dt - \sigma_{rz,r} - \sigma_{zz,z} = (\sigma_{rz}) / r\ ,$$

$$D_J s_{ij} + \lambda s_{ij} = 2Ge_{ij}\ , \ (i, j = r, z)\ ,$$

и конечных соотношений

$$p = f_1(\rho, \rho_*) H(\rho_* - \rho) H(\rho_0 - \rho)\ , \quad s_{ij} s^{ij} = \tfrac{2}{3}\sigma_T^2\ , \quad \sigma_T \equiv f_2(p)\ .$$

Используются стандартные обозначения, неизвестные функции f_1 и f_2 подлежат определению.

Идентификация параметров уравнения состояния грунтовых сред осуществляется на основе сочетания обращенных экспериментов с использованием мерного стержня и численного моделирования процессов удара и проникания цилиндрических стержней в грунтовые среды [2-4]. Основные положения методики [5, 6] идентификации пластических свойств грунтовых сред следующие. Входными данными служит экспериментальная зависимость квазистационарных значений силы сопротивления внедрению ударника с плоским торцом от начальных скоростей удара. Искомая зависимость предела текучести от давления определяется безусловной минимизацией функционала, описывающего суммарное рассогласование теоретических и экспериментальных данных в некотором диапазоне скоростей

$$\sum_{i=1}^{N} \left| F_i - F_i^* \right| \Big/ \left| F_i^* \right| -> \min .$$

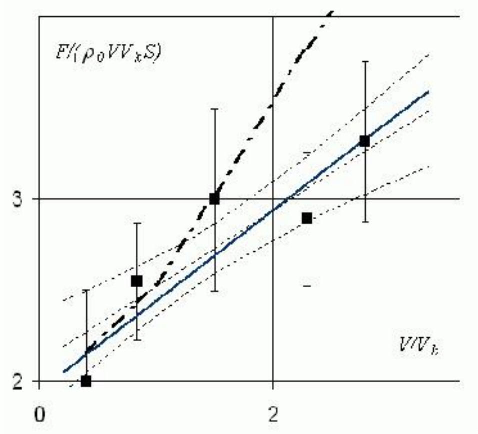
Здесь F_i^* и F_i – квазистационарные значения силы сопротивления внедрению с начальной скоростью V_i , полученные в экспериментах и в расчетах с той же скоростью. Для приближенного решения поставленной задачи оптимизации зависимость предела текучести от давления представляется в дискретном виде

$$\sigma_T(p) \equiv \sigma_T^{i-1} + \alpha^i (p - p^{i-1}),\ p^{i-1} \le p < p^i,\ i = \overline{1, N}\ .$$

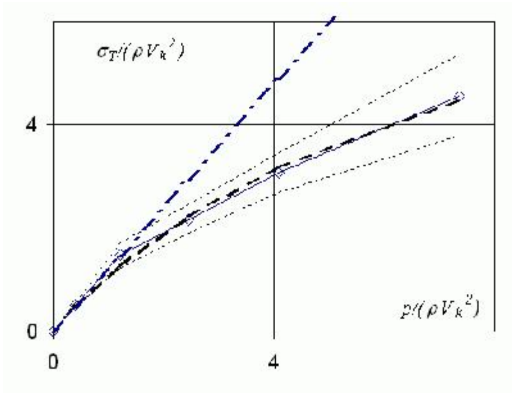
Узлы дискретизации должны быть определены таким образом, чтобы выполнялось условие $\left| F_i - F_i^* \right| / F_i^* < \delta$, где δ – заданная малая величина. Для этого в численном расчете для скоростей удара $V_i > V_{i-1}$ уточняется угол наклона α_i очередного звена ломаной до совпадения расчетных и экспериментальных значений сил сопротивления на квазистационарной стадии внедрения. Опорные значения давлений *p* кусочно-линейной функции $\sigma_T(p)$ определяются при численном решении задачи как среднее давление на ударяемом торце стержня.

2. В качестве примера практической реализации методики идентификации [5, 6] рассмотрим определение функции пластичности в песчаном грунте, представляющем собой сухую песчаную смесь с начальной плотностью ρ_0 =1.72 г/см^3. Ударная адиабата этого грунта определена в обращенных экспериментах в диапазоне скоростей удара 50 – 450 м/с и близка к линейной зависимости скорости ударной волны D от массовой скорости u за фронтом волны $D = A + bu$, где A = 455 м/с, b = 2.3. Численные расчеты проводились в осесимметричной постановке с применением модифицированного метода Годунова [8, 9]. Определяющие соотношения между объемной деформацией $\varepsilon = 1 - \rho_0/\rho$ и давлением p в грунте в диапазоне изменения давления от 0,01 до 1 МПа: $f_1 \equiv M\varepsilon^n$ при давлениях свыше 150 МПа: $f_1 \equiv \rho_0 a^2 \varepsilon/(1-b\varepsilon)^2$ в интервале 1-150 МПа используется интерполирующий кубический полином [7]. Объемная разгрузка грунтовых сред с достаточной для практических приложений точностью аппроксимируется линейной зависимостью от плотности, определяемой касательной к ударной адиабате в некоторой предельной (гидродинамической) точке ρ_∞ = 2.5 г/см^3, модуль сдвига пропорционален разгрузочному модулю.

На головной части ударника, контактирующей с грунтовой средой, принималось условие «непроникания» по нормали и скольжение с трением в касательном направлении. Поскольку обтекание грунтовым потоком, примыкающей к торцу цилиндрической части, носит отрывный – кавитационный характер, то на свободных поверхностях грунта и ударника нормальные и касательные напряжения принимались равными нулю. Внешние границы расчетной области грунта считались жесткими и соответствовали геометрии обоймы, используемой в обращенном эксперименте.



а



б

Рис. 1

На рис. 1, *а* квадратами представлены безразмерные экспериментальные значения силы сопротивления внедрению на квазистационарной стадии при скоростях соударения 48, 100, 180, 275 и 335 м/с, полученные как средние по 5 экспериментам [4]. Пунктиром показана линия регрессии и коридор ошибок с доверительной вероятностью 0.95. Значения силы отнесены к величине $\rho_0 V V_k S$, где V_k = 120 м/с соответствует скорости звука в песке, $S = \pi D^2/4$ – площадь миделя поперечного сечения ударника. Песчаный грунт представлял собой сухую смесь кварцевого песка естественного состава. На рис. 1, *б* ромбы соответствуют рассчитанным по методике [5, 6] дискретным значениям предела текучести при тех же скоростях соударения, пунктиром показан коридор ошибок для искомой зависимости. Наблюдается уменьшение темпа роста предела текучести с увеличением давления, связанное с дроблением частиц грунта при ударе и проникании. С ростом давления уменьшается вклад сдвиговых составляющих в решение, чувствительность падает – растет величина погрешности вычисления зависимости сопротивления сдвигу.

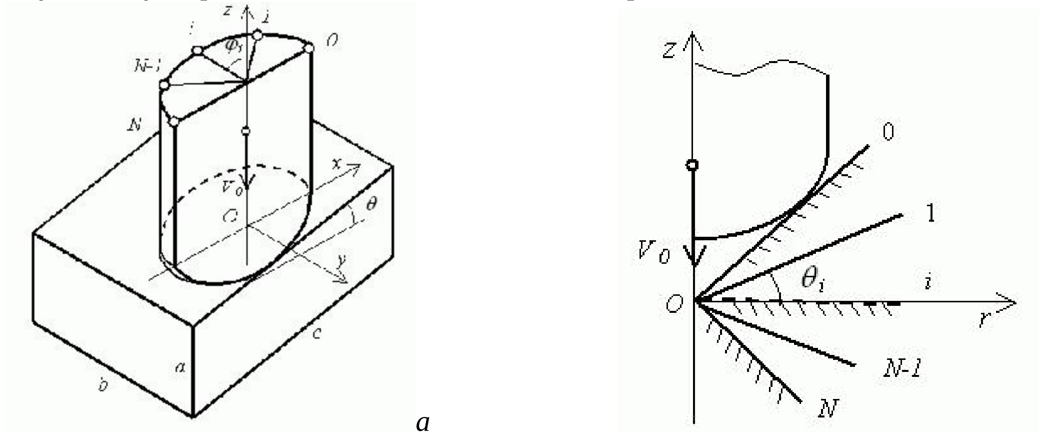
Полученная дискретная зависимость предела текучести от давления аппроксимирована нелинейной зависимостью вида $f_2 \equiv \sigma_0 + \mu p/(1 + \mu p/\sigma_M)$ (штриховая линия на рис 1, *б*) с константами σ_0 = 0.01 МПа, μ = 1.14, σ_M = 275 МПа, но в рамках погрешности может быть также представлена двузвенной ломаной. Штрих-пунктирная линия соответствует линейной зависимости $f_2 \equiv \mu p$**,** которая использовалась в качестве начального приближения. Сплошной и штрих-пунктирной линиями на рис. 1, *а* показаны зависимости квазистационарных значений силы сопротивлению от скорости удара, определенные численно с полученной и линейной зависимостями предела текучести от давления. Результаты расчетов с линейной зависимостью предела текучести удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным лишь при скоростях удара менее 200 м/с. Результаты численного моделирования с использованием полученной в результате идентификации нелинейной зависимости «предел текучести – давление» полностью находятся в коридоре ошибок (пунктир на рис. 1, *а*).

3. Рассмтрим удар и начальный этап плоскопараллельного движения осесимметричного тела под углом θ к свободной поверхности полупространства, занимаемого грунтовой средой. Ось *Oz* прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль скорости V_0 движения тела и образует с осью *Ox* плоскость симметрии *xOz*, ось *Oy* направлена перпендикулярно к плоскости *xOz* (рис. 2, *а*).

Уравнения движения проникающего тела имеют вид

$$m\dot{V}_z = F_z\,,\ m\dot{V}_x = F_x\,,\ J\ddot{\omega} = M$$

где F_z, F_x и V_z, V_x – компоненты главного вектора сил и вектора скорости тела, M – момент сил, $\ddot{\omega}$ – угловое ускорение, m и J – масса и момент инерции тела.



а *б*

Рис. 2

Решение трехмерной задачи в пренебрежении потоками массы и импульса в окружном направлении сводится к совместному решению для каждого меридионального сечения ряда двумерных осесимметричных задач, методики решения которых в настоящее время достаточно хорошо разработаны [3, 9]. Постановка осесимметричных задач (рис. 2, *б*) в цилиндрической системе координат *rOz* (*Oz* – ось симметрии) определяется рассечением ударника и полупространства грунтовой среды плоскостями $zO\varphi_i$ (рис. 2, *а*), причем $\mathrm{tg}\theta_i = \mathrm{tg}\theta\cos\varphi_i$, $\left(i = 0,1,...,N\right)$. Количество сечений *N+1* определяется углом наклона вектора скорости тела к свободной поверхности среды и требуемой точностью решения задачи [10, 11].

Компоненты главного вектора сил на каждом временном шаге расчета определяются суммированием сил по сечениям. Для равномерного разбиения по угловой координате будем иметь:

$$F_z(t) = (F_z^0 + 2\sum_{i=1}^{N-1} F_z^i + F_z^N)/\left(2N\right),\ F_x(t) = (F_r^0 + 2\sum_{i=1}^{N-1} F_r^i\cos\varphi_i - F_r^N)/\left(2N\right),$$

где F_r^i, F_z^i $\left(i = 0,1,...,N\right)$ – вклады компонент сил сопротивления внедрению ударника в грунт, полученные из решения N+1 осесимметричных задач. Компоненты главного вектора сил и вектора скорости тела рассчитываются независимо друг от друга, что оправданно в условиях значительного преобладания осевой компоненты вектора скорости над боковой составляющей, возникающей при несимметричном проникании. Подобное допущение основано на результатах исследований явления рикошета затупленных тел при их проникании в песок и пластилин [12]. Экспериментально установлено достаточно малое отклонение траектории движения компактных тел (шарик, конус, цилиндр) от первоначального направления, которое практически не зависит от угла входа тела и уменьшается с ростом скорости удара. Взаимное влияние компонент главного вектора скорости в большей мере сказывается при внедрении в грунт удлиненных тел, которое сопровождается появлением вращательного движения.

Далее приводятся результаты анализа применимости описанных выше моделей к расчету параметров проникания в грунт жесткой сферы радиуса R, плотностью 7.8 г/см^3 при скоростях удара 150 и 300 м/с. Константы модели упругопластической среды K, G и Y принимали равными 320, 160 и 0.5 МПа соответственно, $\rho_0 = 2$ г/см^3, $\mu = 1$, $k = 0$. Трехмерная область, заполняемая грунтом, представляет собой прямоугольный параллелепипед (рис. 2, *а*) с размерами ребер: $a/6 = b/5 = c/10 = R$. Конечно-элементная сетка в трехмерных расчетах состоит из 30х150х75 элементов. В осесимметричных расчетах применяется более подробная разностная сетка со стороной каждой квадратной ячейки, равной R/100.

На рис. 3 представлены компоненты F_z / F_0 и F_x / F_0 ($F_0 = \rho_0 V_0^2 \pi R^2 / 2$) – главного вектора безразмерной силы сопротивления внедрению сферы в грунт в зависимости от времени при косом ударе (угол $\theta = \pi / 6$) с начальной скоростью 150 и 300 м/с. Наблюдается хорошее соответствие результатов расчетов по предлагаемому алгоритму (кривые *2*) с результатами трехмерных расчетов (точки *1*) вплоть до момента полного погружения полусферы в грунт. Дальнейшее движение сферы прямолинейно и определяется только осевой компонентой F_z силы сопротивления, так как компонента F_x становится близкой к нулю. Модель локального взаимодействия на базе точного решения при учете свойств среды: линейной сжимаемости и зависимости предела текучести от давления (кривые *3* на рис. 3) дает решения, близкие к точному, лишь на начальной стадии внедрения. Использование гипотезы несжимаемости при постоянном пределе текучести приводит к занижению силы сопротивления на начальной стадии удара (кривые *4*).

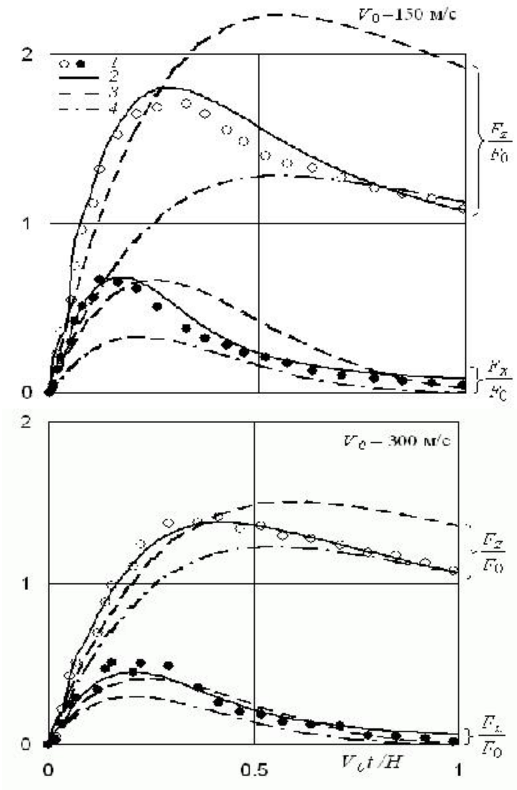


Рис. 3

Работа выполнена при финансировании в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ России (НШ-4807.2010.8), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, а также Российского фонда фундаментальных исследований (10-08-00376-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Вып. 4. С. 1057-1072.
2. Баженов В.Г., Котов В.Л., Баландин В.В. и др. Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой. // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 6. С. 190-198.
3. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С.686-697.
4. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред // ПМТФ. 2009. Т. 50. № . С. 115-125.

5. Баженов В.Г., Котов В.Л. Идентификация параметров динамической сжимаемости и сопротивления сдвигу грунтовой среды при внедрении ударников // ДАН РФ. 2006. Т. 408. № 3. С. 333-336.
6. Баженов В.Г., Котов В.Л. Метод идентификации упругопластических свойств грунтовых сред при внедрении ударников // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 4. С. 184-190.
7. Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В. и др. Исследование волновых процессов в грунтовой среде при взрыве накладного заряда // МТТ. 2001. № 2. С. 70-77.
8. Баженов В.Г., Котов В.Л. Применение метода распада разрывов к решению задач взрывного нагружения грунтовых сред // ЖВМ и МФ. 2003. Т. 43. № 2. С. 287-294.
9. Баженов В.Г., Котов В.Л. Модификация численной схемы Годунова применительно к решению задач импульсного нагружения мягких грунтов // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 4. С. 139-149.
10. Баженов В.Г., Котов В.Л. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе гипотезы плоских сечений // ДАН РФ. 2008. Т. 423. № 4. С. 470-473.
11. Баженов В.Г., Котов В.Л. Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // ПММ. 2010. Вып. 74. №. 3.
12. Бивин Ю.К. Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 4. С. 105-109.

Сведения об авторах:

Баженов Валентин Георгиевич,
заведующий отделом, профессор, д.ф.-м.н., Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета, (831) 465 66 11, (831) 465 60 25
E-mail: bazhenov@mech.unn.ru

Котов Василий Леонидович,
старший научный сотрудник, д.ф.-м.н., Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета, (831) 465 66 11, (831) 465 60 25
E-mail: vkotov@inbox.ru

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С ЧАСТИЧНО НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Банцури Р. Д.

Рассмотрена задача теории упругости для выпуклого многоугольника, ослабленного равнопрочными отверстиями. К каждому звену ломаной внешней границы соприкасаются штампы с гладкими прямолинейными основаниями. К штампам приложены внешние сосредоточенные силы, действующие перпендикулярно к границе. Под действием этих сил штампы перемещаются лишь поступательно. Неизвестные контуры свободны от внешних нагрузок.На каждом звене ломаной границы нормальные перемещения постоянны, а касательные напряжения равны нулю. Требуется определить неизвестные границы равнопрочного отверстия и напряжённое состояние тела.

Граничные задачи плоской теории упругости и изгиба пластинки для бесконечной плоскости, ослабленной неизвестными равнопрочными отверстиями, исследованы в работах [1,16,17], а для выпуклого многоугольника – в работе [3].

В данной работе решена задача плоской теории упругости для многоугольника, ослабленного неизвестными равнопрочными отверствиями.

1**.** Пусть изотропная пластинка на комплексной плоскости $z = x + iy$ занимает многосвязную область S, которая представляет собой выпуклый многоугольник $A_1A_2A_3....A_n$ с отверстиями. Внешнюю границу области S обозначим через L, а внутренюю границу через $\Gamma = \bigcup_{j1=}^{m}\Gamma_j$. Пусть точка $z = 0$ находится внутри контура Γ_1. Допустим, что на каждом отрезке A_kA_{k+1} $(k = 1,....,n;)$ $A_{n+1} = A_1$ границы L нормальные смещения u_n постоянны, а касательные напряжения τ_{ns} равны нулю. Внутренние границы Γ_j $\left(j = \overline{1,m}\right)$ свободны от внешних напряжений.

Поставим следующую задачу: найти напряжённое состояние пластинки и границы отверстий при условии, что на них тангенциальное нормальное напряжение σ_s принимает постоянное значение $\sigma_s = K = \text{const}$.

При изучении таких задач рассматриваются два случая:

Случай 1. Известны значения постоянных u_n на отрезках A_kA_{k+1} $(k = 1,....,n;)$

Случай 2. Известны значения главных векторов внешних усилий P_j, приложенных к каждому отрезку A_kA_{k+1} $(k = 1,....,n;)$

На основании формул Колосова-Мусхелишвили [11], решение поставленной задачи сводится к задаче нахождения голоморфных функций $\psi(z), \varphi(z)$ в области S со следующими граничными условиями:

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)}\left(\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right) = C(t) + c_0, \quad t \in L, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)}\left(\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}\right) = 2\mu u_n(t), \quad t \in L, \tag{2}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = B(t) \quad t \in \Gamma, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\varphi'(t) = \frac{K}{4}, \quad t \in \Gamma \ , \tag{4}$$

где χ, μ – упругие постоянные, $\alpha(t)$ – угол, составленный нормалью ***n*** с осью Ox .

$B(t) = B_j, t \in \Gamma_j$, $j = \overline{1,m}$, B_j – неизвестные постоянные.

Рассмотрим случай 2.

$$C(t) = \sum_{j=1}^{k} \sin\left(\alpha_k - \alpha_j\right)P_j, \quad t \in A_kA_{k+1} \tag{5}$$

$$C_k = C(t), \alpha_k = \alpha(t) \quad t \in A_kA_{k+1}$$

В дальнейшем мы будем считать, что функции $\varphi'(z),\psi(z)$ – аналитческие в области S за исключением, быть может, A_k $(k=1,....,n;)$, в окрестности которых выполняются условия следующего вида:

$$\left|\varphi'(z),\psi(z)\right|<M\left|z-A_k\right|^{-\delta},\quad 0\le\delta<1. \tag{6}$$

Сложением равенств (1) и (2), а затем дифференцированием по дуговой абсциссе **s** на A_kA_{k+1} $(k=1,....,n;)$, с учётом того, что $C(t),u_n(t)$ – кусочно-постоянные функции, получим

$$\operatorname{Im}\varphi'(t)=0,\quad t\in \mathrm{A_k}A_{k+1},\quad (k=1,n) \tag{7}$$

Равенства (4) и (7) представляют собой задачу Келдыша-Седова [10,12]для области S **.**

Доказывается, что при условии (6) задача Келдыша-Седова имеет единственное решение[7]:

$$\varphi(z)=\frac{K}{4}z+M \tag{8}$$

где $M=\text{const}$.

Применяя формулу (8), граничные условия (1), (3) перепишутся в виде:

$$\operatorname{Re}e^{-i\alpha(t)}\left(\frac{K}{2}t+\overline{\psi(t)}\right)=C(t)+C_0,\quad t\in L, \tag{9}$$

$$\frac{K}{2}t+\overline{\psi(t)}=B_j,\quad t\in\Gamma_j,\quad j=\overline{1,m} \tag{10}$$

где B_j $j=1,m$ являются неизвестными постоянными, подлежащие определению.

Легко видеть, что если $t\in L$, то

$$\operatorname{Re} te^{-i\sim(t)}=\operatorname{Re} e^{-i\sim(t)}A(t),\ \ t\in L, \tag{11}$$

где $A(t)=A_k,\quad t\in \mathrm{A_k}A_{k+1}$.

В том случае, когда пластинка содержит более одного отверстия, поставленная задача в общем не решается. Приведём решение задачи, когда пластинка имеет одно отверстие.

Пусть $z=\omega(\varsigma)$, $\varsigma=\xi+i\eta$ конформно отображает область D на круговое кольцо $1<|\varsigma|<R,$ где R – неизвестное число. Внешняя граница области D отображается на окружность $|\text{s}|=R.$ Граничные условия (9), (10), (11) примут вид:

$$\overline{\psi_0(\sigma)}+\frac{K}{2}\omega(\sigma)=B,\quad |\sigma|=1, \tag{12}$$

$$\operatorname{Re}e^{-i\alpha(\sigma)}\left[\frac{K}{2}\omega(\sigma)+\overline{\psi_0(\sigma)}\right]=C(\sigma),\qquad |\sigma|=R, \tag{13}$$

$$\operatorname{Re}e^{-i\alpha(\sigma)}\omega(\sigma)=\operatorname{Re}e^{-i\alpha(\sigma)}A(\sigma),\quad |\sigma|=R, \tag{14}$$

$$\psi_0(\varsigma)=\psi(\omega(\varsigma)).$$

Для упрощения записи кусочно-постоянные функции $\alpha(\omega(\sigma)),A(\omega(\sigma)),C(\omega(\sigma))$ обозначим опять через $\alpha(\sigma),A(\sigma),C(\sigma)$.

Пусть функция $W(\varsigma)$ определена равенствами

$$W(\varsigma)=\begin{cases}\dfrac{K}{2}\omega\left(\dfrac{\varsigma}{R}\right), & R<|\varsigma|<R^2,\\[2ex] \overline{B-\psi_0\left(\dfrac{R}{\bar{\varsigma}}\right)}, & 1<|\varsigma|<R.\end{cases} \tag{15}$$

Легко можно показать, что $W(\varsigma)$ голоморфна в кольце $1<|\varsigma|<R^2$. Из формул (15) имеем

$$\frac{K}{2}\omega(R\sigma)=W\left(R^2\sigma\right),\quad \psi_0\left(R\sigma\right)=B-W\left(\sigma\right),\ |\sigma|=1 \tag{16}$$

Подставляя эти значения в (13), (14), получим

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}W\left(\sigma\right)=f_1\left(\sigma\right),\quad |\sigma|=1, \tag{17}$$

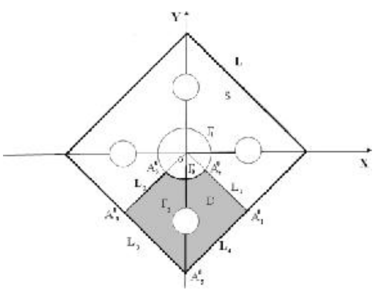
$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(\sigma)}W\left(R^2\sigma\right)=f_2\left(\sigma R^2\right),\quad |\sigma|=1\,,$$

$f_1(\sigma),\ f_2\left(\sigma R^2\right)-$ заданные кусочно-постоянные функции.

Рассмотрим частный случай. Рассмотрим случай, когда S представляет собой квадрат, вершины которого находятся на осях координат. Квадрат ослаблен пятью неизвестными отверстиями, из которых четыре отверстия равны, расположены симметрично относительно осей координат, пересекают их и равноудалены от точки $z=0$. Пятое отверстие содержит точку $z=0$, симметрично относительно осей координат и биссектрис углов координат.

Пусть длина стороны квадрата равна *2a* . Главные векторы внешних усилий на каждой стороне квадрата равны P.

Так как задача осесимметричная, то для изучения поставленной задачи достаточно рассмотреть одну четвёртую часть пластинки $A_1^0A_2^0A_3^0A_4^0A_5^0$, которую обозначим через D. Введём обозначения $L_1=A_1^0A_2^0,\ L_2=A_3^0A_4^0,\ L_3=A_4^0A_5^0,\ L_4=A_5^0A_1^0$, а дугу $A_2^0A_3^0$ обозначим через Γ_0. На отрезках L_1 и L_2 нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю. В силу равновесия вырезанной части очевидно, что главные векторы внешних усилий, приложеных к L_1, L_2, L_3, L_4, равны $\frac{P}{2}$. В этом случае



$$\sim_k=\frac{®}{4}+\frac{®}{2}(k-1),\ k=1,2,3,4 \tag{18}$$

Путём подбора c_0 условие (5) примет вид:

$$C(t)=\begin{cases}0, & t\in L_1\bigcup L_2\\ -\dfrac{P}{2}, & t\in L_3\bigcup L_4\end{cases} \tag{19}$$

$$B(t)=\begin{cases}e^{\frac{\pi}{4}i}(1+i)m, & t\in\Gamma_0\\ 0, & t\in\Gamma_2\end{cases} \tag{20}$$

Учитывая (18), (19), (20), условия (9)–(11) запишутся в виде:

$$\operatorname{Re}(e^{-\frac{\pi}{4}i}\frac{K}{4}t+e^{\frac{\pi}{4}i}\psi(t))=\begin{cases}0, & t\in L_1\bigcup\Gamma_2\\ \dfrac{P}{2}, & t\in L_3\\ m, & t\in\Gamma_0\end{cases} \tag{21}$$

$$\operatorname{Im}(e^{-\frac{\pi}{4}i}\frac{K}{4}t-e^{\frac{\pi}{4}i}\psi(t))=\begin{cases}0, & t\in L_2\bigcup\Gamma_2\\ \dfrac{P}{2}, & t\in L_4\\ m, & t\in\Gamma_0\end{cases} \tag{22}$$

$$\operatorname{Re}(e^{-\frac{\pi}{4}i}t)=\begin{cases}0, & t\in L_1\\ -a & t\in L_3\end{cases} \tag{23}$$

$$\operatorname{Im}(e^{-\frac{\pi}{4}i}t)=\begin{cases}0, & t\in L_2\\ -a, & t\in L_4\end{cases} \tag{24}$$

Учитывая (24), равенство (22) примет вид:

$$\operatorname{Im}(e^{-\frac{\pi}{4}i}\frac{K}{4}t+e^{\frac{\pi}{4}i}\psi(t))=\begin{cases}0, & t\in L_2\\ -(P/2+Ka), & t\in L_4\end{cases} \tag{25}$$

Аналогично, учитывая (23), равенство (21) примет вид:

$$\operatorname{Re}(e^{-\frac{\pi}{4}i}\frac{K}{4}t-e^{\frac{\pi}{4}i}\psi(t))=\begin{cases}0, & t\in L_1\\ -(\frac{P}{2}+aK) & t\in L_3\end{cases} \tag{26}$$

Аналогично, как и выше, пусть функция $z=\omega(\varsigma)$, $\varsigma=\xi+i\eta$ конформно отображает область D на круговое кольцо $1<|\varsigma|<R,$ где R – неизвестное число. Внешняя граница области D отображается на окружность $|\varsigma|=R.$ Образы отрезков $A_k^0A_{k+1}^0$ обозначим через l_k, образы дуги Γ_0 – через ¥$_0$, а образы дуги Γ_2 – через ¥ .

Введём обозначения:

$$W_1(\varsigma)=\frac{K}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\omega(\varsigma)+e^{\frac{\pi}{4}i}\psi_0(\varsigma) \tag{27}$$

$$W_2(\varsigma)=-i(\frac{K}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\omega(\varsigma)-e^{\frac{\pi}{4}i}\psi_0(\varsigma)) \tag{28}$$

$$\psi_0(\varsigma)=\psi(\omega(\varsigma)),\ 1<|\varsigma|<R$$

При этих обозначениях, граничные условия (21), (25) и (22), (26) принимают вид:

$$W_1(\sigma)+G_1(\sigma)\overline{W_1(\sigma)}=g_1(\sigma) \tag{29}$$

$$W_2(\sigma)+G_2(\sigma)\overline{W_2(\sigma)}=g_2(\sigma) \tag{30}$$

где

$$G_1(\sigma)=\begin{cases}1 & \sigma\in l_1\bigcup l_3\bigcup\gamma\bigcup\gamma_0\\ -1 & \sigma\in l_2\bigcup l_4\end{cases}\qquad g_1(\sigma)=\begin{cases}0, & \sigma\in l_1\bigcup l_2\bigcup\gamma\\ P, & \sigma\in l_3\\ -(P+2ak)i, & \sigma\in l_4\\ 2m, & \sigma\in\gamma_0\end{cases} \tag{31}$$

$$G_2(\sigma)=\begin{cases}1 & \sigma\in l_1\bigcup l_3\\ -1 & \sigma\in l_2\bigcup l_4\bigcup\gamma\bigcup\gamma_0\end{cases}\qquad g_2(\sigma)=\begin{cases}0, & \sigma\in l_1\bigcup l_2\bigcup\gamma\\ -Pi, & \sigma\in l_4\\ -(P+2ak), & \sigma\in l_3\\ 2mi, & \sigma\in\gamma_0\end{cases} \tag{32}$$

Задачи (29), (30) представляют собой задачи Римана-Гильберта для кругового кольца, решение которых имеет вид [2]:

$$W_j(\varsigma)=\frac{X_j(\varsigma)}{4\pi i}\left(\int\limits_{l_3\cup l_4\cup\gamma_0}\left(\frac{\sigma+\varsigma}{\sigma-\varsigma}+\frac{1+\mu_j}{1-\mu_j}+2K^0_{\mu_j}(\frac{\varsigma}{\sigma})\right)\frac{g_j(\sigma)}{X_j(\sigma)}\frac{d\sigma}{\sigma}\right), 1\le|\varsigma|<R\quad j=1,2. \tag{33}$$

$$K^0_{\mu_j}\left(\frac{\varsigma}{\sigma}\right)=\sum_{n\ge1}^{\infty}\frac{\mu_j}{R^{2n}-\mu_j}\left(\frac{\varsigma}{\sigma}\right)^n+\sum_{n\le-1}^{-\infty}\frac{R^{2n}}{R^{2n}-\mu_j}\left(\frac{\varsigma}{\sigma}\right)^n,\quad \frac{1}{R}<|\varsigma|<R^3 \tag{34}$$

$$X_1(\varsigma)=\mu_1^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{l_2\bigcup l_4}\left(\frac{\sigma+\varsigma}{\sigma-\varsigma}+2\sum_{n\ge1}\frac{1}{R^{2n}-1}\left(\left(\frac{\varsigma}{\sigma}\right)^n-\left(\frac{\sigma}{\varsigma}\right)^n\right)\right)\frac{\ln G_1(\sigma)}{\sigma}d\sigma\right],\ 1\le|\varsigma|<R^2 \tag{35}$$

$$X_2(\varsigma)=\mu_2^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{l_1\bigcup l_3}\left(\frac{\sigma+\varsigma}{\sigma-\varsigma}+2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{R^{2n}-1}\left(\left(\frac{\varsigma}{\sigma}\right)^n-\left(\frac{\sigma}{\varsigma}\right)^n\right)\right)\frac{\ln G_2(\sigma)}{\sigma}d\sigma\right]\quad ,1\leq|\varsigma|<R^2 \qquad (36)$$

где

$$\mu_1=\exp(\frac{i}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)),\ \mu_2=\exp(\frac{-i}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2))$$

ϑ_1,ϑ_2 – радианные величины дуг l_1 и l_2, соответственно.

В работах [4,5,6,8,9,13,14,15] изучены осесимметричные задачи плоской теории упругости и изгиба пластинки с частично неизвестной границей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 216 с.
2. Банцури Р. О задаче Римана-Гильберта для двусвязных областей. //Сообщ. АН ГрузССР. 1975. Т.80. №3. С.549-552.
3. Банцури Р.Д., Исаханов Р. Некоторые обратные задачи теории упругости. //Тр. Тбилисского математического института им. А.Размадзе. 1987. Т.87. С.3-20
4. Bantsuri R. One of mixed problem of the plane theory with a partially unknown boundary. Proc. A. Razmadze Math. Inst, т.140, 2006, 9-16.
5. Bantsuri R. Solution of the mixed problem of plate bending for a multy-connected domain with a partially unknown boundary in the presence of cycle symmetry. Proc. A. Razmadze Math. Inst, т.145, 2007, 9-22.
6. Bantsuri R., Mzhavanadze Sh. The mixed problem of the theory of elasticity for a rectangle weakened by unknown equi-strong holes .Proc. A. Razmadze Math. Inst, т. 145, 2007, 23-33.
7. Гахов Ф. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
8. Капанадзе Г. Задача изгиба пластинки для конечной двусвязной области с частично неизвестной границей. //Прикладная Механика. 2003. Т. 39. №5. С.121-126.
9. Капанадзе Г. Об одной задаче изгиба пластинки для двухсвязной области с частично неизвестной границей. //ПММ. 2007. Т.71. № 1. С. 33-42.
10. Келдыш М., Седов Л.. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. //ДАН СССР. 1937. Т.16. №1. С. 7-10.
11. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
12. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.707с.
13. Одишелидзе Н., Криадо-Алдеануева Ф. Об одной смешанной задаче плоской теории упругости с частично неизвестной границей. //Прикладная механика. 2006. Т.42. №3. С.110-118. International Applied Mechanics, vol.42, 2006, №3, p.342-349.
14. Odishelidze N., Criado-Aldeanueva F. Some axially Symmetric problems of the theory of plane elasticity with partially unknown boundaries . Acta Mechanica, vol.199, 2008, p.227-240.
15. Odishelidze N., Criado-Aldeanueva F. A mixed problem of plate bending for a doubly connected domains with partially unknown boundary in the presence of cycle symmetry, Science China Physics, Mechanics and Astronomy, vol.53, 2010 , No 9, p. 1-11.
16. Черепанов Г. Одна обратная задача теории упругости. //Инж. ж. МТТ. 1966. №3.
17. Черепанов Г. Обратные задачи плоской теории упругости. //ПММ. 1972. Т.38. № 6. С.963-980.

Сведения об авторе:

Банцури Реваз Давидович – член-корр. НАН Грузии., зав. отделом математической теории упругости Института математики им. А.Размадзе.
Адрес: 0193 Тбилиси, ул. М. Алексидзе 1. (+995 32) 33 49 51, (+995 32) 53 67 64
E-mail: nana_georgiana@yahoo.com, rebant@ermi.acnet.ge, nana_georgiana@yahoo.com

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН В УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ С ТОНКОСТЕННЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ТИПА НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРУЖИН

Бардзокас Д.И., Мхитарян С.М.

Рассматривается задача по вопросам взаимодействия периодической системы трещин, расположенных на одной прямой в упругой бесконечной пластине, с тонкостенными включениями. При этом тонкостенные включения моделируются в виде линейно деформируемых непрерывно распределенных пружин определенной жесткости при растяжении, соединяющих на определенных участках берега трещин.

Для предотвращения распространения трещин в упругих телах в работе [1] указаны различные способы укрепления берегов трещин в их концевых частях посредством дополнительного материала, в том числе способ соединения берегов трещин посредством непрерывно распределенных деформируемых пружин. Такая модель тонкостенного включения в задаче о напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с трещиной конечной длины принята в [2].

В настоящей работе в рамках этой модели рассматривается задача о напряженном состоянии упругой бесконечной пластины с коллинеарной периодической системой трещин, берега которых в их центральных или концевых частях соединены между собой непрерывно распределенными линейно деформируемыми пружинами.

1. Пусть упругая бесконечная пластина с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν отнесена к правой прямоугольной системе координат Oxy и на горизонтальной оси Ox содержит периодическую систему трещин $L=\{y=0;\,-a+nl,\,a+nl\}$ $(n=0,\,\pm1,\pm2,...)$, повторяющихся с периодом $2l$, причем $a<l$. Параллельно рассмотрим две задачи. В первой задаче предположим, что берега каждой трещины системы L в их концевых частях $(-a+nl;\,-b+nl)\cup(b+nl;a+nl)$ $(n=0,\,\pm1,\pm2,...)$ соединены между собой непрерывно распределенными линейными пружинами жесткости Ek на растяжение, выраженной через модуль упругости пластины, а на участках $(-b,b)$ $(b<a)$ верхнего (+) и нижнего (–) берегов этой же трещины действуют нормальные растягивающие распределенные силы с равными интенсивностями $p(x)$. Кроме того, будем считать, что на бесконечности пластина подвержена воздействиям равномерно распределенных нормальных к линии расположения системы трещин L сил интенсивности σ. Во второй задаче пружины и силы $p(x)$ меняются местами. Требуется определить плотности дислокаций на берегах трещин, их раскрытия, разрушающие нормальные напряжения вне системы трещин L на их линии расположения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Выведем определяющие уравнения поставленной задачи, для чего сначала действующие на бесконечности пластины силы σ известным способом перенесем на берега трещин и ввиду периодичности задачи ограничимся рассмотрением центральной полосы $\Pi=\{-l<x<l;\ -\infty<y<\infty\}$ упругой бесконечной пластины. Так как пружины непрерывно распределены и деформируются линейно как одномерные упругие континуумы, то для обусловленных ими нормальных напряжений в точках верхнего (+) и нижнего (–) берегов трещины $\sigma_y^s\big|_{y=\pm0}$ будем иметь $\sigma_y^{(s)}\big|_{y=\pm0}=\pm Ek\mathrm{v}_\pm(x)$ $(x\in(-a,-b)\cup(b,a))$, где $\mathrm{v}_\pm(x)$– вертикальные смещения тех же точек верхнего и нижнего берегов трещины соответственно. Далее полосу Π разрежем на верхнюю полуполосу $\Pi_+=\{-l<x<l;\,0<y<\infty\}$, на нижнюю полуполосу $\mathrm{v}_+(x)-\mathrm{v}_-(x)=\varphi(x)=\int\limits_{-a}^{x}\varphi'(s)ds$ $(-a\le x\le a)$ и положим $(-l<x<l)$

$$\sigma_y\big|_{y=\pm0}=-\sum\nolimits_\pm(x)=\{-\sigma-p(x)(|x|<b);-\sigma\pm Ek\mathrm{v}_\pm(x)(b<|x|<a);-\sigma(x)(a<|x|<l),\} \qquad (1a,c)$$

где σ_y–компонента нормальных напряжений, а $\mathrm{v}_\pm(x)$–компоненты вертикальных смещений граничных точек полуполос $\Pi_{\pm}$ соответственно. Так как $v_{-}(x)=-v_{+}(x)$, то $\sum_{+}(x)=\sum_{-}(x)$. Для второй задачи первая и вторая строки (1a,c) поменяются местами.

Теперь запишем выражения $v_{\pm}(x)$ как вертикальные смещения граничных точек верхней упругой полуплоскости $y\ge 0$ и нижней полуплоскости $y\le 0$ от периодических с периодом $2l$ нормальных нагрузок $\sum_{\pm}(x)$ [3] $(-l<x<l)$:

$$v_{\pm}(x)=\mp\frac{2}{\pi E}\int_{-l}^{l}\ln 2\left|\sin\left[\pi(s-x)/2l\right]\right|\sum_{\pm}(s)\,ds+C$$

Отсюда для функции скачка вертикальных смещений на трещине

$\varphi(x)=v_{+}(x)-v_{-}(x)=\left\{\varphi(x)\ \left(|x|<a\right);\ 0\ \left(a<|x|<l\right)\right\}$ получим $(-l<x<l)$

$$\varphi(x)=-\frac{2}{\pi E}\int_{-l}^{l}\ln 2\left|\sin\left[\pi(s-x)/2l\right]\right|\left[\sum_{+}(s)+\sum_{-}(s)\right]ds, \tag{2}$$

а после дифференцирования по x будем иметь

$$\frac{1}{El}\int_{-l}^{l}\operatorname{ctg}\left[\pi(s-x)/2l\right]\left[\sum_{+}(s)+\sum_{-}(s)\right]ds=\varphi'(x)\ \ (-l<x<l). \tag{3}$$

Перейдем к безразмерным величинам, полагая

$\xi=\pi x/l;\ \ \eta=\pi s/l;\ \ \alpha=\pi a/l;\ \ \beta=\pi b/l\qquad(\beta<\alpha);$

$\sigma_0=\sigma/E;\ \ P_0(\xi)=E^{-1}P(l\xi/\pi);\ \ \sigma_0(\xi)=E^{-1}\sigma(l\xi/\pi)$

Тогда уравнение (3) перепишется в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\Omega(\eta)\,d\eta=\Psi(\xi)\qquad(-\pi<\xi<\pi);\qquad\Psi(\xi)=\Phi'(l\xi/\pi);$$

$$\Omega(\xi)=E^{-1}\left[\sum_{+}(l\xi/\pi)+\sum_{-}(l\xi/\pi)\right]=2E^{-1}\sum_{+}(l\xi/\pi); \tag{4a,c}$$

Легко показать, что в данном случае условия разрешимости уравнения (4a,c) [4]

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Psi(\xi)\,d\xi=0 \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\xi)\,d\xi=0. \tag{6}$$

удовлетворяются. Теперь при условиях (5) и (6), обращая уравнение (4a,c) [4], получим следующее ключевое уравнение задачи:

$$\Omega(\xi)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\Psi(\eta)\,d\eta\qquad(-\pi<\xi<\pi) \tag{7}$$

При помощи функции

$\chi(\xi)=\pi l^{-1}\varphi(l\xi/\pi)=\left\{\pi l^{-1}\varphi(l\xi/\pi)\ \ \left(|\xi|<\alpha\right),\ \ 0\ \ \left(\alpha<|\xi|<\pi\right)\right\}$

ключевое уравнение (7) запишем в виде

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\chi'(\eta)\,d\eta=\Omega(\xi)\qquad(-\pi<\xi<\pi) \tag{8}$$

Рассматривая ключевое уравнение (8) на трещине $(-\alpha,\alpha)$, относительно неизвестной плотности дислокаций на берегах трещины $\chi'(\xi)$ придем к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению (СИУ) смешанного типа поставленной задачи $(\lambda=kl/2\pi)$:

$$\frac{1}{8\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\chi'(\eta)\,d\eta=\left\{-\sigma_0-P_0(\xi)\ \ \left(|\xi|<\beta\right);\ \ -\sigma_0+\lambda\chi'(\xi)\ \ \left(\beta<|\xi|<\alpha\right)\right\} \tag{9}$$

СИУ (9) представляет собой обычное СИУ на интервале $-\beta<\xi<\beta$ и интегро-дифференциальное СИУ на интервалах $\beta<|\xi|<\alpha$.

Так как $\chi(-\alpha)=\chi(\alpha)=0$, то решение уравнения (9) должно удовлетворять условию

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\chi(\eta)\,d\eta=0. \tag{10}$$

Рассматривая же ключевое уравнение (8) вне трещины на ее линии расположения, получим разрушающие безразмерные нормальные напряжения:

$$\sigma_0(\xi)=-\frac{1}{8\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}\chi'(\eta)\,d\eta \qquad (\alpha<|\xi|<\pi). \tag{11}$$

Таким образом, после того, как построено решение уравнения (9)–(10), безразмерные нормальные напряжения вне трещины определятся по формуле (11).

Определяющие уравнения второй задачи вполне аналогичны полученным уравнениям.

2. Решение уравнения (9)–(10), как в [5], можно свести к решению регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Однако, здесь к этому уравнению применим более простой и эффективный метод, а именно, известный численно–аналитический метод решения СИУ [6-8], опять приводящий к системе линейных уравнений. С этой целью сначала уравнение (9) сведем к уравнению с ядром Коши, для чего в нем положим

$$t=\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad u=\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\quad (-1<t,u<1).$$

Тогда ядро Гильберта преобразуется так:

$$\operatorname{ctg}\frac{\eta-\xi}{2}=\left(1+t^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\Big/(u-t)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\quad+t\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \tag{12}$$

и если положить $(-1<t<1)$

$$q_0(t)=p_0\left(2\operatorname{arctg}(t\operatorname{tg}\alpha/2)\right);\ \chi'\left(2\operatorname{arctg}\left(t\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\right)\Big/\left(1+t^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{13a,b}$$

где $\psi(t)$ – функция из гельдеровского класса на отрезке $[-1,1]$, то исходное уравнение (9) с учетом условия (10) преобразуется в уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(u)\,du}{(u-t)\sqrt{1-u^2}}=\frac{4}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}t^2}\left\{\begin{array}{ll}-\sigma_0-q_0(t) & \left(|t|<c,\ c=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),\ \lambda=kl/2\pi\right);\\ -\sigma_0+\lambda\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{1}\operatorname{sign}(t-u)\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{1-u^2}} & (c<|t|<1)\end{array}\right\}, \tag{14}$$

где учтены (12) и (13a,b). При этом условие (10) преобразуется в условие

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{1-u^2}}=0. \tag{15}$$

Далее уравнение (14), где для простоты будем считать функцию $p(x)$ и, следовательно, функцию $p_0(\xi)\to q_0(t)$ четной, запишем в виде единого СИУ на всем интервале $(-1,1)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{u-t}-\lambda\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}g(t)\operatorname{sign}(t-u)\right]\frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{1-u^2}}=f(t)\quad(-1<t<1)$$

$$f(t)=4\Big/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}t^2\right)\left\{-\sigma_0+\left[H(t-c)-H(t+c)\right]q_0(t)\right\};\qquad \left(c=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\Big/\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$g(t)=4\pi\Big/\left(1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)t^2\right)\left[H(c+t)-H(c-t)\right]\operatorname{sign}t. \tag{16a,c}$$

Здесь $H(t)$ –известная функция Хевисайда, а $\psi(t)$ –нечетная функция.

Теперь, следуя известной процедуре [8], СИУ (16a,c) при условии (15) сведем к следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M}K_{rm}X_m=a_r\qquad \left(r=\overline{1,M}\right)$$

$$K_{rm}=\left\{\frac{1}{M}\left[\frac{1}{u_m-u_r}-\lambda\,\mathrm{tg}\frac{a}{2}g(t_r)\,\mathrm{sign}(t_r-u_m)\left(m=\overline{1,M},\ r=\overline{1,M-1}\right);\ 1\left(m=\overline{1,M},\ r=M\right)\right]\right\}$$

$$a_r=\left\{f(t_r)\left(r=\overline{1,M-1}\right);\quad 0\left(r=M\right)\right\};\qquad X_m=\psi(u_m);$$

$$u_m=\cos\left[(2m-1)\pi/2M\right]\qquad\left(m=\overline{1,M}\right),\quad t_r=\cos(\pi r/M)\ \left(r=\overline{1,M-1}\right).\tag{17a,f}$$

Здесь M –любое натуральное число, а u_m и t_r – чебышевские узлы, т.е. корни многочленов Чебышева первого рода $T_M(u)$ и второго рода $U_{M-1}(t)$, соответственно. После решения системы (17a,f) значение $\psi(1)$ определяется при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по чебышевским узлам и выражается формулой [8]

$$\psi(1)=M^{-1}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}X_m\,\mathrm{ctg}\left((2m-1)\pi/4M\right).\tag{18}$$

Перейдем к определению КИН Ka в концевой точке $x=a$ трещины [1,8]:

$$Ka=-\frac{E}{4}\lim_{x\to a-0}\left[\sqrt{2\pi(a-x)}\varphi'(x)\right]$$

Полагая, как выше, $a=l\alpha/\pi$, $x=l\xi/\pi$, отсюда получим

$$Ka=-\frac{E\sqrt{2l}}{4}\lim_{\xi\to\alpha-0}\left[\sqrt{\alpha-\xi}\chi'(\xi)\right].$$

Далее полагая $\xi=2\,\mathrm{arctg}(t\,\mathrm{tg}\,\alpha/2)$ и учитывая (13b), можем записать

$$Ka=-\frac{E\sqrt{2l}}{4\cos^2(\alpha/2)}\lim_{t\to 1-0}\left[\sqrt{\alpha-2\,\mathrm{arctg}\left(t\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right].$$

После простых преобразований отсюда получим

$$Ka=-E\sqrt{l\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\psi(1)\Big/2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}.\quad K_0=-\frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha/2}}{2\sqrt{2}\cos(\alpha/2)}\psi(1)\ \left(K_0=\frac{K_a}{E\sqrt{l}}\right),\tag{19}$$

где введен безразмерный КИН K_0 или, подставляя сюда $\psi(1)$ из (18),

$$K_0=-\frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha/2}}{2\sqrt{2}M\cos(\alpha/2)}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}X_m\,\mathrm{ctg}\left(\frac{2m-1}{4M}\pi\right).\tag{20}$$

Итак, безразмерной КИН выражается формулой (19) или (20).

Обратимся теперь к вычислению раскрытия трещины

$$\mathrm{v}_+(x)-\mathrm{v}_-(x)=\varphi(x)=\int_{-a}^{x}\varphi'(s)ds\qquad\text{или}\quad\varphi(x)=-\int_{x}^{a}\varphi'(s)ds\qquad(-a\le x\le a).$$

Отсюда $$\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\mathrm{sign}(x-s)\varphi'(s)ds\qquad(-a\le x\le a).$$

Если в этой формуле, как выше, перейти к переменным $\xi=\pi x/l$, $\eta=\pi s/l$, $\alpha=\pi a/l$ и ввести безразмерное раскрытие, то получим

$$\chi(\xi)=\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{sign}(\xi-\eta)\chi'(\eta)d\eta;\quad\chi(\xi)=\pi l^{-1}\varphi(l\xi/\pi)\ \ (-1\le\xi\le 1).$$

Наконец, полагая $\xi=2\,\mathrm{arctg}(t\,\mathrm{tg}\,\alpha/2)$, $\eta=2\,\mathrm{arctg}(u\,\mathrm{tg}\,\alpha/2)$ и учитывая формулу (13b), окончательно находим

$$\chi_0(t)=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{sign}(t-u)\frac{\psi(u)du}{\sqrt{1-u^2}};\qquad\chi_0(t)=\chi\left(2\,\mathrm{arctg}\left(t\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\right)\ \ (-1\le t\le 1)\tag{21a,b}$$

Следовательно, по квадратурной формуле Гаусса из (21a,b) будем иметь

$$\chi_0(t)=\frac{\pi}{M}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{m=1}^{M}\mathrm{sign}(t-u_m)\psi(u_m),\ \chi_0(t_r)=\frac{\pi}{M}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{m=1}^{M}X_m\,\mathrm{sign}(t_r-u_m)\left(r=\overline{1,M-1}\right).\tag{22}$$

Обратившись к безразмерным нормальным напряжениям вне трещины, выражающимися формулой (11), при помощи (13b) эту формулу преобразуем к виду

$$\sum\nolimits_0(t) = -\frac{1+t^2\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(u)\,du}{(u-t)\sqrt{1-u^2}} \quad (c<|t|<1); \quad \sum\nolimits_0(t) = \sigma_0\left(2\operatorname{arctg}\left(t\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Отсюда по квадратурной формуле Гаусса

$$\sum\nolimits_0(t) = -\left(1+t^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\Big/4M\sum_{m=1}^{M}\frac{X_m}{u_m-t} \quad (c<|t|<1) \tag{23}$$

При численном анализе задачи расчетными формулами будут (17a,f), (20), (22) и (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed springs. //J. Mech. Phys. Solids. Vol. 35, N4, 1987, pp.363–405.
2. Mkhitaryan S.M., Bardzokas D.I. Reinforcement of a cracked infinite elastic plate with defects. Symposium on Recent Advances in Mechanics. Dedicated to the Late Academician–Prof. P.S. Theocaris, Sept. 17–19, 2009, Athens, Greece, pp.49–50.
3. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
6. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, pp.368–425, Intern. Publ., Leyden, 1973.
7. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. //Quart. Appl. Math. vol. XXXV, N 1, 1977, pp.173–185.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболчках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

Сведения об авторах:

Мхитарян Сурен Манукович,
д.ф.-м.н., профессор, гл. научн. сотрудник Института механики НАН РА
Тел.: 62 10 25, (093) 93 61 17; **E-mail:** smkhitaryan@mechins.sci.am

РАЗДЕЛЕНИЕ ВОЛН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА КЛАССА 23

Белубекян М.В.

По аналогии с известными уравнениями квазигиперболического приближения для пьезоупругих материалов гексагональной симметрии получены соответствующие уравнения для материалов кубической симметрии класса 23. На основе этих уравнений приводятся решения задач отражения волн от границы полупространства.

В большинстве работ исследования по распространению электроупругих волн проводились на основе квазистатического приближения, которое требует совместного решения гиперболических уравнений теории упругости и эллиптических уравнений электромагнитного поля [1,2]. Несмотря на то, что указанное приближение достаточно точно определяет поле упругих перемещений и существенно упрощает решение задач, появилась необходимость более точного определения электромагнитного поля. В [3] для пьезоактивных материалов гексагональной симметрии класса 6mm предложена приближенная модель (квазигиперболическое приближение), учитывающая гиперболичность уравнения электрического поля. Однако оказалось, что квазигиперболическое приближение не приводит к существенному упрощению по сравнению с точной постановкой, например, [4]. В частности, в точной постановке была исследована задача отражения электромагнитной волны от границы пьезоактивного полупространства класса 6mm [5].

Для пьезоактивных материалов других классов симметрии, в частности, для кубической симметрии, решение задач в точной постановке оказывается довольно сложным и громоздким. В настоящей статье, по аналогии с [3], приводится вывод уравнений квазигиперболического приближения для материалов кубической симметрии класса 23 (или то же, что и для класса 43 m). На основе указанных уравнений приводится решение задачи отражения волн от границы полупространства.

1. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) рассматривается антиплоская задача распространения волн с упругими перемещениями

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y, t) \tag{1.1}$$

Уравнение движения упругой среды имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где σ_{13}, σ_{23} – упругие сдвиговые напряжения; ρ – плотность материала среды.

Уравнения электродинамики для диэлектрической среды, после исключения вектора напряженности магнитного поля, приводятся к виду (в системе СИ)

$$\mathrm{rotrot}\bar{E} = -\mu\, \partial^2 \bar{D} / \partial t^2 \tag{1.3}$$

где $\bar{E}, \bar{D}$ – векторы напряженности и индукции электрического поля, независящие от координаты z; μ – магнитная проницаемость материала среды. Функциональные связи (материальные уравнения) пьезоэлектрика класса 23 в приведенной постановке имеют вид [1]

$$\sigma_{13} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} - e_{14} E_2, \quad \sigma_{23} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - e_{14} E_1 \tag{1.4}$$

$$D_1 = \varepsilon E_1 + e_{14} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad D_2 = \varepsilon E_2 + e_{14} \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.5}$$

Здесь c_{44} – модуль сдвига; ε – диэлектрическая проницаемость; e_{14} – пьезоупругий коэффициент.

Подстановка (1.4), (1.5) в (1.2) и (1.3) приводит к следующей системе уравнений:

$$c_{44}\Delta w - e_{14}\left(\frac{\partial E_2}{\partial x}+\frac{\partial E_1}{\partial y}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\Delta E_1 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial y}\right)=\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}+\mu e_{14}\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2} \tag{1.6}$$

$$\Delta E_2 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial y}\right)=\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2}+\mu\, e_{14}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}$$

Третье уравнение, которое получается из (1.3), а именно: $\Delta E_3=\mu\,\partial^2 D_3/\partial t^2$ является автономным и не связано с решением рассматриваемой задачи.

Таким образом, задача исследования пьезоактивных сдвиговых волн в среде из материала класса 23 в точной постановке приводится к решению системы уравнений (1.6).

2. С целью упрощения системы (1.6), в смысле достижения разделения волн, вводятся следующие преобразования:

$$E_1=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial t},\quad E_2=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial t} \tag{2.1}$$

После подстановки (2.1) во второе и третье уравнения системы (1.6) получается

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta A_1-\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}+\mu\, e_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta A_2-\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}+\mu\, e_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\right)=0\end{gathered} \tag{2.2}$$

Так как в преобразованиях (2.1) вместо двух искомых функций вводятся новые три искомые функции, то эти новые функции должны каким-либо образом быть связаны. Из (2.2) следует, что наиболее простой результат получится , если указанную связь брать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)+\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{2.3}$$

или в более простом виде

$$\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\mu\,\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{2.4}$$

Выражение вида (2.4) называется калибровкой Лоренца или калибровочным ограничением.

С учетом (2.4) уравнения (2.2) будут удовлетворены, если имеют место следующие уравнения:

$$\begin{gathered}\Delta A_1-\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}+\mu\, e_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}=0\\ \Delta A_2-\mu\,\varepsilon\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}+\mu\, e_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}=0\end{gathered} \tag{2.5}$$

По терминологии статьи [3] уравнения (2.5) определяют вращательную часть электромагнито-акустической волны.

Дифференцируя второе уравнение системы (1.6) по x, а третье – по y и сложив их, с учетом преобразований (2.1) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\Delta\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)-2\frac{e_{14}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]=0 \tag{2.6}$$

Исключая из (2.6) $\partial A_1/\partial x+\partial A_2/\partial y$ при помощи калибровочного ограничения (2.4), приходим к выводу, что уравнение (2.6) будет удовлетворено, если имеет место равенство

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2\frac{e_{14}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{2.7}$$

Приведем полученную систему из четырех уравнений относительно четырех искомых функций: w – из первого уравнения системы (1.6) с учетом (2.1), φ – согласно (2.7) и A_1, A_2 – согласно (2.5)

$$\begin{gathered}
c_{44}\Delta w + 2e_{14}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + e_{14}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\Delta\varphi - 2\frac{e_{14}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \\
\Delta A_1 + \mu e_{15}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \\
\Delta A_2 + \mu e_{15}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Если в первом и во втором уравнениях системы (2.8) пренебречь членами

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

то получаются известные уравнения квазистатического приближения для пьезоэлектрика класса 23.

Функциональные связи (1.4), (1.5), с учетом преобразований (2.1), будут иметь вид

$$\begin{gathered}
\sigma_{13} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} + e_{14}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial t}\right),\ \sigma_{23} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{14}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial t}\right), \\
D_1 = -\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial t}\right) + e_{14}\frac{\partial w}{\partial y},\ D_2 = -\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial t}\right) + e_{14}\frac{\partial w}{\partial x}
\end{gathered} \tag{2.9}$$

В статье [3] в аналогичной ситуации для уравнений пьезокристалла класса 6mm предлагается следующее приближение (квазигиперболическое). В первом уравнении системы (2.8) и в функциональных связях (2.9) пренебрегаются вращательные компоненты электромагнитного поля. При этом, в отличие от квазистатического приближения, сохраняется гиперболичность второго уравнения системы (2.8). В указанном приближении для рассматриваемого класса 23 задача приводится к решению системы уравнений

$$\begin{gathered}
c_{44}\Delta w + 2e_{14}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\Delta\varphi - 2\frac{e_{14}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{2.10}$$

с функциональными связями

$$\begin{gathered}
\sigma_{13} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} + e_{14}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \sigma_{23} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{14}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\
D_1 = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x} + e_{14}\frac{\partial w}{\partial y},\ D_2 = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y} + e_{14}\frac{\partial w}{\partial x}
\end{gathered} \tag{2.11}$$

После определения w и φ из системы (2.10) вращательные компоненты A_1 и A_2 могут быть определены из третьего и четвертого уравнений системы (2.8).

3. Пусть полупространство из пьезоактивного материала класса 23 занимает область $-\infty < x < \infty,\ 0 \le y < \infty,\ -\infty < z < \infty$. Рассматривается задача падения плоской двумерной волны на границу $y = 0$. Уравнения, определяющие падающие и отраженные волны,

представлены системой (2.10). Из (2.11) в предположении, что граница слоя свободна от напряжений и заземлена, следуют следующие условия:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=0,\ \varphi=0 \text{ при } y=0 \tag{3.1}$$

Приведенная задача на основе квазистатического приближения исследовалась в [6].

Решение уравнений (2.10) представляется в виде

$$\begin{aligned} w&=B\exp i\left(wt-\kappa_1 x-\kappa_2 y\right)\\ \varphi&=C\exp i\left(wt-\kappa_1 x-\kappa_2 y\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подстановка (3.2) в (2.10) приводит к системе

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\rho\omega^2}{c_{44}}-\left(\kappa_1^2+\kappa_2^2\right)\right]B-\frac{2e_{14}}{c_{44}}\kappa_1\kappa_2 C=0\\ &\frac{2e_{14}}{\varepsilon}\kappa_1\kappa_2 B+\left[\varepsilon\mu\omega^2-\left(\kappa_1^2+\kappa_2^2\right)\right]C=0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Равенство нулю детерминанта системы (3.3), после ряда преобразований, приводится к следующему уравнению относительно волнового числа κ_2:

$$\kappa_2^4-2S_1\kappa_2^2+S_2=0 \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} S_1&=0,5\left(\frac{\rho}{c_{44}}+\varepsilon\mu\right)\omega^2-\left(1+\chi\right)\kappa_1^2,\quad \chi=\frac{e_{14}^2}{\varepsilon c_{44}}\\ S_2&=\kappa_1^4-\left(\frac{\rho}{c_{44}}+\varepsilon\mu\right)\omega^2\kappa_1^2+\frac{\rho\varepsilon\mu}{c_{44}}\omega^4 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Корни уравнения (3.4) представляются в виде

$$\begin{aligned} &\kappa_{21}=\left(S_1+\sqrt{S_1^2-S_2}\right)^{1/2},\ \kappa_{22}=\left(S_1-\sqrt{S_1^2-S_2}\right)^{1/2},\\ &\kappa_{23}=-\kappa_{21},\ \kappa_{24}=-\kappa_{22} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Согласно (3.2) и (3.6) падающие на границу волны представляются в виде

$$\begin{aligned} w_n&=B_1\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x+\kappa_{21}y\right)+B_2\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x+\kappa_{22}y\right)\\ \varphi_n&=C_1\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x+\kappa_{21}y\right)+C_2\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x+\kappa_{22}y\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Отраженные волны определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} w_0&=M_1\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x-\kappa_{21}y\right)+B_2\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x-\kappa_{22}y\right)\\ \varphi_0&=N_1\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x-\kappa_{21}y\right)+N_2\exp i\left(\omega t-\kappa_1 x-\kappa_{22}y\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Следует отметить, что амплитуды B_1 и C_1, B_2 и C_2, M_1 и N_1, M_2 и N_2 связаны между собой равенствами (3.3).

В частном случае нормального падения ($\kappa_1=0$, падение с нулевым углом), волна с амплитудой B_1 определяет падающую сдвиговую. а с амплитудой C_2 – падающую волну электрического поля, которая при квазистатическом приближении отсутствует. При нормальном падении нет взаимодействия между волнами, поэтому $C_1=0,\ B_2=0$. При увеличении угла падения появляется взаимодействие между волнами с амплитудами B_1 и C_1, B_2 и C_2. В квазистатическом приближении $\left(\varepsilon\mu=0\right)$ между B_2 и C_2 взаимодействие появляется при достаточно большом угле падения. Указанный угол определяется из условия

$$S_2>0\Rightarrow\kappa_1^2>\frac{\rho\omega^2}{c_{44}}\quad\left(\text{при }\varepsilon\mu=0\right) \tag{3.9}$$

Пусть на границу полупространства падает волна электрического поля с амплитудой C_2, которая сопровождается волной перемещения с амплитудой B_2. После обычной процедуры представления решения в виде

$$w = w_n + w_0, \ \varphi = \varphi_n + \varphi_0 \tag{3.10}$$

с учетом $B_1 = 0, \ C_1 = 0$ и удовлетворения граничным условиям (3.1), получается

$$N_2 = -C_2, \ M_2 = \frac{2 e_{14} \kappa_1 \kappa_{22}}{\rho \omega^2 - \left(\kappa_1^2 + \kappa_{22}^2 \right) c_{44}} C_2 \tag{3.11}$$
$$N_1 = 0, \ M_1 = 0$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитноупругие волны. Ереван. Изд. ЕГУ. 2006. 492 с.
3. Shaofan L. The electromagnetic-acoustic surface wave in piezoelectric medium: The Bleustein – Gulyaev mode. Journ. Appl. Phys. 1996. 80(9). p. 5264-5269.
4. Yang J.S. Bleustein-Gulyaev waves in piezoelectromagnetic material. Intern. Journ. of Applied Electromagnetics and Mechanics. 2000. 12, p. 235-240.
5. Baghdasaryan A., Belubekyan M. On the problem of Reflection of Shear Wave from a Boundary of Piezoelectric Media of Class 6mm. Proc. of 8th Intern. Congress of Thermal Stresses. TS 2009, University of Illinois of Urbano USA. CD. 4p.
6. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Отражение упругой волны от границы раздела пьезоэлектрик-вакуум. ФТТ. 1969. Т. 11. № 9. С. 1027-1029.

Сведения об авторе:

Белубекян Мелс Вагаршакович,
кандидат физ-мат. наук, профессор, Институт механики НАН Армении,
(374 10) 52 15 03, (374 93) 580096
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ РОМБИЧЕСКОЙ И ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ (КЛАССЫ 222 И 6mm) ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ КОНТАКТЕ

Берберян А. Х.

Рассмотрено отражение и преломление плоской электроупругой сдвиговой волны при скользящем контакте на границе ромбического и гексагонального пьезоэлектрических кристаллов (классов 222 и 6mm). Определены амплитудные коэффициенты отражения и преломления возникающих волн, а также их отношение.

1. Пусть два пьезоэлектрических кристалла ромбической и гексагональной симметрии классов 222 и 6mm в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ находятся в скользящем контакте вдоль плоскости $y=0$. Величины, характеризующие пьезоэлектрик, находящийся при $y>0$ (ромбический пьезокристалл), будем сопровождать индексом α, а при $y<0$ –индексом β (гексагональный пьезокристалл). Одна из осей симметрии второго порядка ромбического кристалла параллельна главной оси гексагонального кристалла и оси Oz, и лежит в плоскости границы раздела. Далее, пусть кристаллы находятся в антиплоском деформированном состоянии

Следуя работам [1,2] и др., уравнения и граничные условия при $y=0$ рассматриваемой задачи для области $y>0$ и области $y<0$ соответственно будут

$$c_{44}^{\alpha}\Delta u_{\alpha}+2e_{14}^{\alpha}\frac{\partial^2\varphi_{\alpha}}{\partial x\partial y}=\rho^{\alpha}\frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial t^2}, \qquad c_{44}^{\beta}\Delta u_{\beta}+e_{15}^{\beta}\Delta\varphi_{\beta}=\rho^{\beta}\frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial t^2},$$
$$2e_{14}^{\alpha}\frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x\partial y}-\varepsilon_{11}^{\alpha}\,\Delta\varphi_{\alpha}=0 \qquad e_{15}^{\beta}\Delta u_{\beta}-\varepsilon_{11}^{\beta}\,\Delta\varphi_{\beta}=0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{23}^{\alpha}=0;\ \sigma_{23}^{\beta}=0;\ \varphi^{\alpha}=\varphi^{\beta};\ D_x^{\alpha}=D_x^{\beta}; \tag{1.2}$$

где $\bar{u}$ – вектор упругого перемещения точек среды, ϕ –потенциалы электрических полей в средах, $c_{44,}^{\alpha}$ c_{44}^{β}– упругие постоянные, e_{14}^{α}, e_{15}^{β} – пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{11}^{\alpha}$, ε_{11}^{β} – диэлектрические проницаемости, $\rho^{\alpha}_{,}$ ρ^{β} –плотности пьезокристаллов ромбической и гексагональной симметрии соответственно.

2. Рассмотрим решения уравнений (1.1) и (1.2), представляющих собой плоские гармонические волны $u=Ue^{i(px+qy-\omega t)}$, $\varphi=\Phi e^{i(px+qy-\omega t)}$, где U и Φ – амплитуды перемещения и потенциала в волне, p и q – продольное и поперечное волновые числа относительно оси Ox, ω – частота колебаний.

Для кристалла ромбической симметрии, отбрасывая нефизические решения, растущие в глубь кристалла, при $y>0$ имеем полное решение [2]:

$$u_{\alpha}=u_0^{\alpha}+u_1^{\alpha}=\left[U_0e^{-iq_0y}+U_1e^{iq_0y}+iB\Phi_{\alpha}e^{-ry}\right]e^{i(px-\omega t)}$$
$$\varphi_{\alpha}=\left[-U_0Ae^{-iq_0y}+AU_1e^{iq_0y}+\Phi_{\alpha}e^{-ry}\right]e^{i(px-\omega t)} \tag{2.1}$$

где $A=\dfrac{e_{14}^{\alpha}\sin 2\theta}{\varepsilon_{11}^{\alpha}}$, $B=\dfrac{2e_{14}^{\alpha}\,p\cos^2\theta}{c_{44}^{\alpha}\,r}$, $r=\dfrac{\omega\left|\cos\theta\right|\sqrt{1+4\chi_{\alpha}^2\cos^2\theta}}{S_{\alpha}\sqrt{1+\chi_{\alpha}^2\sin^2 2\theta}}$, $S_{\alpha}^2=\dfrac{c_{44}^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}$, $\chi_{\alpha}^2=\dfrac{e_{14}^2}{c_{44}^{\alpha}\varepsilon_{11}^{\alpha}}$

В пьезоэлектрике гексагональной симметрии возникают преломленные волны и сопутствующие поверхностные электроупругие (неоднородные) волны. Таким образом, при $y<0$ имеем полное решение:

$$u_{\beta}=U_2e^{-iq_{\beta}y}e^{i(px-\omega t)}$$
$$\varphi_{\beta}=\left[\frac{e_{15}^{\beta}}{\varepsilon_{11}^{\beta}}U_2e^{-iq_0y}+\Phi_{\beta}e^{|p|y}\right]e^{i(px-\omega t)} \tag{2.2}$$

Вследствие удовлетворения граничным условиям, все волны имеют одинаковую частоту

ω и продольное волновое число p (т.е. волны вдоль границы распространяются с одинаковой скоростью), совпадающие с соответствующими характеристиками падающей волны. Отраженная, преломленная и сопутствующие поверхностные волны имеют соответственно следующие волновые числа:

$$q = q_0 = k\sin\theta\,,\; q = q_b = (k_\beta^2 - p^2)1/2,\; q = ir,\; q = -i\left|p\right| \tag{2.3}$$

Компоненты индукции и смещения для обеих сред даются следующими выражениями [2]:

$$\begin{aligned} D_y^\alpha &= e_{14}^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{11}^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial y};\; \sigma_{zy}^\alpha = c_{44}^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + e_{14}^\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ D_y^\beta &= e_{15}^\beta \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon_{11}^\beta \frac{\partial\varphi}{\partial y};\; \sigma_{zy}^\beta = c_{44}^\beta \frac{\partial u}{\partial y} + e_{15}^\beta \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя решения (2.1) и (2.2) в граничные условия (1.2), после громоздких вычислений, получим:

$$\begin{aligned} &U_1 = -(q_\beta[i(1+AB)(e_{14}^\alpha)^2 p^2\beta + (1+AB)c_{44}^\alpha q_0 r\varepsilon_{11}^\alpha + ie_{14}^\alpha p(q_0+ir)(Bc_{44}^\alpha\beta - A\varepsilon_{11}^\alpha)b_{24} + \\ &(e_{15}^\beta)^2(1+AB)(e_{14}^\alpha)^2 p^2\beta + e_{14}^\alpha(e_{15}^\beta)^2 p(q_0+ir)(Bc_{44}^\alpha\beta - A\varepsilon_{11}^\alpha) - \\ &-ic_{44}^\alpha(c_{44}^\beta q_\beta(iq_0+ABr)(\varepsilon_{11}^\beta)^2 + (e_{15}^\beta)^2(q_\beta(i+ABr)\varepsilon_{11}^\beta + q_0(1+AB)r\varepsilon_{11}^\alpha))))\left|p\right|, \\ &U_2 = a_{11}\varepsilon_{11}^\beta\left|p\right|/D, \quad \Phi_\beta = a_{11}b_{24}/D, \\ &\Phi_\alpha = (2u_0(Ae_{14}^\alpha p + c_{44}^\alpha q_0)(-e_{14}^\alpha p\beta + Aq_0\varepsilon_{11}^\alpha)(q_\beta b_{24} - i(e_{15}^\beta)^2\left|p\right|))/D, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{11} = 2c_{44}^\alpha e_{15}^\beta(q_0 - iABr)u_0(Aq_0\varepsilon_{11}^\alpha - e_{14}^\alpha p\beta),\;\; b_{21} = (-1+AB)(e_{14}^\alpha)^2 p^2\beta, \\ &b_{22} = (Bc_{44}^\alpha\beta + A\varepsilon_{11}^\alpha), \quad b_{23} = (e_{15}^\beta)^2 q_0 r, \quad b_{24} = (e_{15}^\beta)^2 + c_{44}^\beta\varepsilon_{11}^\beta, \\ &D = q_\beta[ib_{21} + (1-AB)c_{44}^\alpha q_0 r\varepsilon_{11}^\alpha + e_{14}^\alpha p(iq_0+r)b_{22}b_{24} + (e_{15}^\beta)^2 b_{21} + e_{14}^\alpha(e_{15}^\beta)^2 p(q_0-ir)b_{22} - \\ &-ic_{44}^\alpha(c_{44}^\beta q_\beta(iq_0+ABr)(\varepsilon_{11}^\beta)^2 + (e_{15}^\beta)^2(q_\beta(i+ABr)\varepsilon_{11}^\beta + q_0(1-AB)r\varepsilon_{11}^\alpha))))\left|p\right|, \\ &b_{12} = b_{21}(e_{15}^\beta)^2 + (e_{15}^\beta)^2 e_{14}^\alpha p(q_0-ir)b_{22} - ic_{44}^\alpha b_{23}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Полученные выражения описывают отражение и преломление сдвиговых акустоэлектрических волн на границе раздела пьезоэлектриков ромбической и гексагональных систем при скользящем контакте.

Обсудим полученные результаты. Рассмотрим вначале отражение волн от свободной границы, полагая $c_{44}^\beta = e_{15}^\beta = \rho^\beta = 0,\; \varepsilon_{11}^\beta = \varepsilon_*$, воспользуемся результатами работы [2].

Получаем: $U_1 = R_1U_0$, $\Phi_\alpha = Q_2U_0$, $\Phi_\beta = Q_*U_0$, где

$$\begin{aligned} &R_1 = \frac{M\sin\theta - i\chi_\alpha^2 N\left|\cos\theta\right|}{M\sin\theta + i\chi_\alpha^2 N\left|\cos\theta\right|}, \qquad Q_2 = \frac{\pm 4ie_{14}^\alpha r_* P_2\sin\theta}{M\sin\theta + i\chi_\alpha^2 N\left|\cos\theta\right|} \\ &Q_* = \frac{\pm 8ie_{14}^\alpha r_* P_*\sin\theta}{M\sin\theta + i\chi_\alpha^2 N\left|\cos\theta\right|},\;\; M = 4\varepsilon_* r_*(1+\chi_\alpha^2\cos^4\theta) + 4\varepsilon_{11}^\alpha(1+2\chi_\alpha^2\cos^2\theta)^2 \\ &N = 4\varepsilon_{11}^\alpha r_*\cos^2 2\theta\,, \qquad P_2 = -2(1+2\chi_\alpha^2\cos^2\theta)\cos 2\theta \\ &P_* = -(1+4\chi_\alpha^2\cos^4\theta)\cos 2\theta, \qquad r_* = \sqrt{1+4\chi_\alpha^2\cos^2\theta} \end{aligned} \tag{2.7}$$

где ε_* – электрическая постоянная.

Обратим внимание на следующие важные обстоятельства при отражении волн от свободной границы. Если $\theta << \chi_\alpha^2$, то $\Phi_2 \to 0$ и $U_1 \to -U_0$, т.е. сдвиговые электроупругие волны не распространяются параллельно поверхности пьезокристалла рассматриваемой симметрии. Между тем, без пьезоэффекта такое распространение возможно (при $\chi_\alpha^2 = 0,\; R_1 = 1$). Далее, при $\theta \sim \chi_\alpha^2$ амплитуда потенциала СПК существенно превосходит амплитуду потенциала отраженной волны.

При скользящем контакте имеем те же волны (падающая, отраженная, преломленная, а также сопутствующие поверхностные колебания (СПК) электрического поля вблизи поверхности кристаллов $U_0, U_1, U_2, \Phi_\alpha, \Phi_\beta$, соответственно), что и при обычном жестком контакте [1, стр.45], здесь при угле скольжения $\theta =$ 0.1 (угол выбран малым, чтоб наблюдать возможные усиления потенциала СПК при преломлении, как это было при жестком контакте) и в части колебания $\omega = 1000000$ при скользящем контакте имеем:

$\mathrm{U}_1 = U_0(1.44054 + \mathrm{i}*0.463954)$, $\mathrm{U}_2 = U_0(-0.0156594 - \mathrm{i}*0.0155411)$,

$\Phi_\alpha = U_0(-2.84644*10^9 - i*2.82494*10^9)$, $\Phi_\beta = U_0(-2.97163*10^9 - i*2.94918*10^9)$.

Для жесткого контакта

$\mathrm{U}_1 = U_0(\text{-}0.942435\text{-}\mathrm{i}*0.162248)$, $\mathrm{U}_2 = U_0(0.00150055 - \mathrm{i}*0.0322738)$,

$\Phi_\alpha = U_0(-1.09192*10^8 + i*2.53141*10^8)$, $\Phi_\beta = U_0(-9.71959*10^7 - i*4.-87419*10^6)$,

т.е. акустоэлектрическая волна в отличие от жесткого контакта при скользящем контакте не усиливается. Преломленная волна скользит во второй среде под углом φ, найденным из соотношения: $\cos\ \varphi = S_\beta S_\alpha^{-1} \cos\ \theta$, т.е. величина $S_\beta S_\alpha^{-1}$ играет роль показателя преломления.

Заключение. Рассмотрено отражение и преломление плоской электроупругой сдвиговой волны при скользящем контакте на границе ромбического и гексагонального пьезоэлектрических кристаллов классов 23 и 6mm.

Определены волновые поля в пьезоэлектрических кристаллах. Показано, что падающие волны, отражаясь на границе ромбического кристалла, преломляются, порождая в нем упругое поле. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в пьезокристалле гексагональной симметрии, а следовательно, и сопутствующее ей упругое колебание. В свою очередь, электрическое поле падающей волны частично просачивается в кристалл гексагональной симметрии, порождая в нем, около границы раздела, волну электрического поля, распространяющуюся вдоль границы с той же фазовой скоростью, что и электроупругие волны. Такая волна порождает дополнительную поверхностную электрическую волну в гексагональном пьезокристалле, а следовательно, и сопутствующие упругие колебания.

Показано, что акустоэлектрическая волна в отличие от жесткого контакта при скользящем контакте не усиливается.

ЛИТЕРАТУРА

1 Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.

2 Багдасарян Г.Е., Берберян А.Х., Даноян З.Н. Отражение электроупругой сдвиговой волны от границы раздела пьезоэлектрического кристалла класса 222 и вакуума.// Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С. 42-48.

Сведения об авторе:

Берберян Армен Хачатурович,
научный сотрудник Института механики НАН Армении,
Тел.: (374 10) 46 20 96, (374 94) 19 19 86. **E-mail:** slavia555@gmail.com

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА: ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИСПЫТАНИЙ

Богданович А.В., Комиссаров В.В, Щербаков С.С.

Для экспериментальной оценки взаимного и совместного влияния процессов трения и механической усталости на работоспособность материалов и моделей силовых систем в сложных условиях нагружения в трибофатике разработаны специальные методы износоусталостных испытаний. Они базируются, как правило, на инновационных решениях (ИР), которые являются изобретениями.

К настоящему времени экспериментальная механика стала базой для любых расчетов на прочность и долговечность; не менее важной ее функцией является познание закономерностей и особенностей поведения материалов под нагрузкой в разнообразных условиях – в том числе, при повторно-переменных нагрузках, трении и т. д.

Для экспериментальной оценки взаимного и совместного влияния процессов трения и механической усталости на работоспособность материалов и моделей силовых систем в сложных условиях нагружения в трибофатике разработаны специальные методы износоусталостных испытаний [1, 2]. При этом следует отметить, что методы комплексных испытаний базируются, как правило, на инновационных решениях (ИР), которые, конечно же, являются изобретениями. Приведем перечень основных ИР при разработке методов и машин для трибофатических испытаний [3]:

- **ИР-1** ***Формирование и реализация методов испытаний служебных свойств материалов и моделей силовых систем***
- **ИР-2** ***Унификация объектов испытания***
- **ИР-3** ***Элементы мехатроники в механизмах нагружения***
- **ИР-4** ***Автоматизация испытаний***
- **ИР-5** ***Ускоренные методы испытаний***
- **ИР-6** ***Измерение и анализ локальных повреждений в процессе испытаний***
- **ИР-7** ***Явление троппи***
- **ИР-8** ***Оригинальная модель зубчатой передачи и методика ее испытания***
- **ИР-9** ***Оригинальная модель системы колесо-рельс и методика ее испытания***
- **ИР-10** ***Оригинальная модель системы труба/поток жидкости под давлением и методика ее испытания***

В докладе представлены лишь специально разработанные методы и технологии износоусталостных испытаний моделей наиболее широко распространенных компонентов современных машин и оборудования (ИР-8, 9, 10).

Метод испытания моделей зубчатых зацеплений. Зубчатые передачи являются наиболее ответственными и высоконагруженными силовыми системами контактного взаимодействия современных машин. К основным видам разрушения зубчатых колес относятся усталостный излом зубьев, происходящий у основания ножки зуба в области переходной кривой, и контактные разрушения рабочих поверхностей зубьев.

Существующие методы испытания зубчатых колес обладают рядом недостатков. В частности, в результате испытаний определяют сопротивление либо только контактной, либо только изгибной усталости, при этом для испытаний требуются разные стенды (и разные типоразмеры образцов).

В этой связи предложен оригинальный метод совмещенных испытаний материалов для зубчатых колес. Метод позволяет получить кривые изгибной и контактной усталости при испытаниях единой модели зубчатого зацепления при действии единой (в обоих случаях) контактной нагрузки – как в натурных условиях. Для экспериментального определения сопротивления как изгибной, так и контактной усталости одновременно используется специальная модель зубчатого зацепления (рис.1) [4].

Особенностью модели является то, что цилиндрический образец 1, изготовленный из материала зубчатого колеса, представляет собой консоль, на свободном конце которой сформирована зона контактного взаимодействия, а на другом конце сформирована зона изгиба в виде галтели, соответствующей переходной кривой у основания зуба. Образец-модель 1, закрепленный в шпинделе 5, вращается с угловой скоростью ω_1. К поверхности образца 1, в зоне контакта 3, с силой F_N прижат контробразец 2, ось вращения которого параллельна оси вращения образца, и который вращается с заданной скоростью ω_2. Путем регулирования скоростей ω_1 и ω_2 можно получить коэффициент проскальзывания, с высокой точностью имитируя скольжение в зубчатой передаче. Сила F_N, приложенная на плече L, обеспечивает одновременное возбуждение как контактных, так и изгибных напряжений в соответствующих зонах, а расстояние между этими зонами выбирают соответствующим расстоянию между полюсом зацепления и основанием зуба.

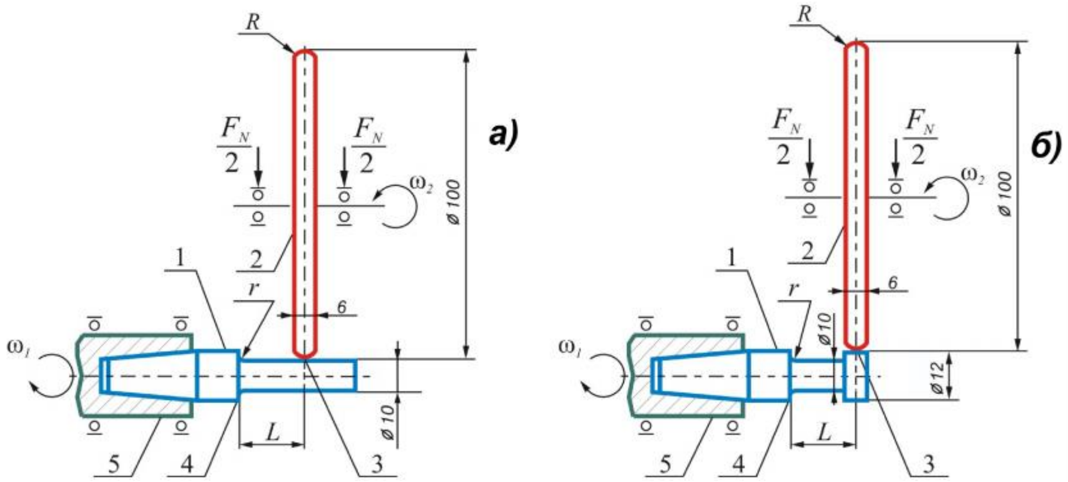


Рис. 1 – Модификации модели зубчатых зацеплений: 1 – образец-модель зуба; 2 – контробразец; 3 – зона контакта; 4 – зона изгиба; 5 – шпиндель

Отметим, что предложенная модель имеет тот недостаток, что направление качения (и проскальзывания) у нее не совпадает с направлением действия максимального изгибающего напряжения. Однако этот недостаток, видимо, нельзя считать существенным.

Для испытания таких моделей создан специализированный стенд СИ-03М на базе машин для износоусталостных испытаний серии СИ.

Разработанная модель зубчатой передачи и методика ее испытания стандартизована и запатентована [5, 6].

Методы испытания моделей системы колесо/рельс. Анализ показал, что традиционные методы испытаний (либо на механическую, либо на контактную усталость) не могут правильно охарактеризовать сопротивление системы колесо/рельс комплексному износоусталостному повреждению и разрушению. Моделирование системы колесо/рельс может оказаться корректным только в том случае, если контактные и изгибные напряжения удалось бы возбуждать при действии единой нагрузки F_N – как в процессе эксплуатации.

Таким образом, требуется иметь принципиально новую модель для испытаний системы колесо/рельс. Сформулируем основные требования к построению такой модели.

1. Изгибающая и контактная нагрузка должна быть единой.

2. Опасные (наибольшие) контактные и опасные (наибольшие) изгибные напряжения должны обнаруживаться в единой области конечных размеров – в окрестности площадки контакта.

3. В общем случае площадка контакта должна быть эллиптической; по мере деформации и износа в процессе испытаний она может трансформироваться в (почти) полоску.

4. Элемент, моделирующий рельс, должен иметь варьируемую жесткость (по направлению действия силы F_N).

5. Условия испытаний должны привести к комплексному износоусталостному повреждению модели, основными проявлениями которого являются:

– различные виды поверхностного контактно-усталостного повреждения (износ, остаточная деформация, продольные микротрещины, ямки выкрашивания и т. п.);

– объемное разрушение путем развития поперечной магистральной усталостной трещины.

Нетрудно видеть, что эти требования вполне отражают условия работы и повреждения натурной системы колесо/рельс в процессе эксплуатации – во всяком случае, в наиболее существенных моментах.

Моделирование колеса, в соответствии с сформулированными выше требованиями, в принципе не представляет собой затруднений: это может быть ролик с одним либо двумя радиусами кривизны.

Примем, что и рельс должен быть конструктивно представлен в виде ролика с одним либо с двумя радиусами кривизны. Это немедленно обеспечивает выполнение одного из главных требований: ролики можно вырезать из головки рельса так, что одна из его периферийных рабочих зон оказывается расположенной на дорожке катания рельса (рис. 2, внизу – зона I). Дополнительно получается, что так вырезанный ролик обнаруживает важное свойство: при последовательном переходе от зоны I к зонам II либо IV испытаниям будут подвергаться соответствующие слои под поверхностью рельса, то есть под дорожкой катания на любой глубине. Более того: в зонах II-III и III-IV будем иметь дело с практически неповрежденным – исходным материалом рельса. Таким образом, обеспечивается уникальная возможность сравнить свойства материала до и после эксплуатации рельса при испытании одного образца-модели.

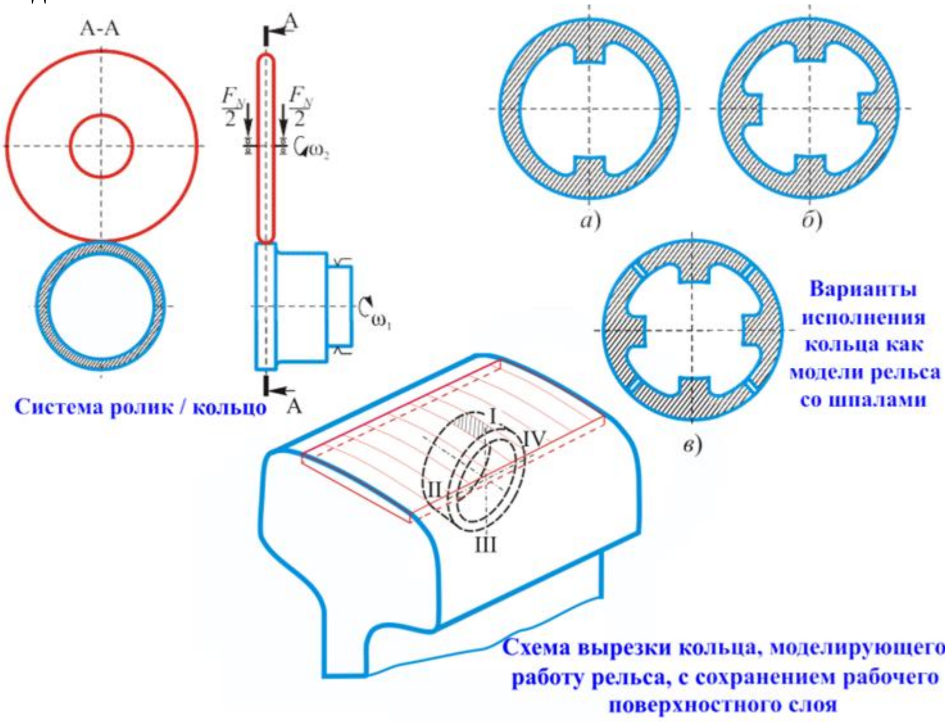


Рис. 2 – Конструктивные модели системы колесо/рельс

Чтобы удовлетворить еще одному из главных требований к испытательной модели, примем, что элемент, моделирующий рельс, является не роликом, но – кольцом. Это основополагающая идея, которая позволяет, в конечном счете, предложить общую принципиальную схему модели колесо/рельс (рис.2), удовлетворяющую основным требованиям к ней, изложенным выше.

Конструктивная схема модели представлена на рис.2, слева вверху.

Таким образом, основными достоинствами предложенного способа испытаний являются:

– осуществление контактной нагрузкой, прижимающей контробразец к образцу, одновременного возбуждения в зоне взаимодействия как контактных, так и изгибных напряжений, что приближает условия испытаний к условиям эксплуатации системы колесо/рельс;

– выполнение образца в виде кольца, что позволяет при его вырезке из натурного рельса не снимать его рабочий поверхностный слой.

Описанный способ моделирования системы колесо/рельс допускает совершенствование. Кольцо, моделирующее рельс, может иметь дискретно расположенные на внутренней поверхности выступающие элементы, имитирующие шпалы, количество которых может

варьироваться (рис.2, справа вверху, *а-б*). Изменение количества дискретно расположенных на внутренней поверхности кольца выступающих элементов приводит к возможности изменения соотношения изгибных и контактных напряжений в соответствующих зонах. При вращении кольца происходит поочередный переход от надшпальной области (максимальная жесткость) к середине пролета (минимальная жесткость); тем самым имитируется изменение жесткости в системе рельс-основание. Кроме того, в кольце могут быть прорезаны пазы, имитирующие стыки рельсов, имеющиеся в реальных условиях эксплуатации (рис.2, справа вверху, *в*).
Описанные новые схемы испытания различных модификаций модели системы колесо-рельс в настоящее время запатентованы [7, 8]; производится экспериментальная отработка соответствующих методик испытаний; устанавливаются рациональные сферы их использования.

Метод испытания моделей системы труба/поток нефти. Проблема борьбы с коррозионно-эрозионной усталостью сталей является острой в различных отраслях: машиностроении (в том числе, сельхозмашиностроении), трубопроводном транспорте и т.д.

Известны и широко применяются многообразные методы экспериментального исследования коррозионно-механической усталости и эрозии. Однако, по имеющимся сведениям, комплексные методы испытаний на коррозионно-эрозионную усталость отсутствуют.

На рис.3 приведена схема оригинального способа испытаний, который в известной мере имитирует работу системы труба/поток жидкости под давлением.

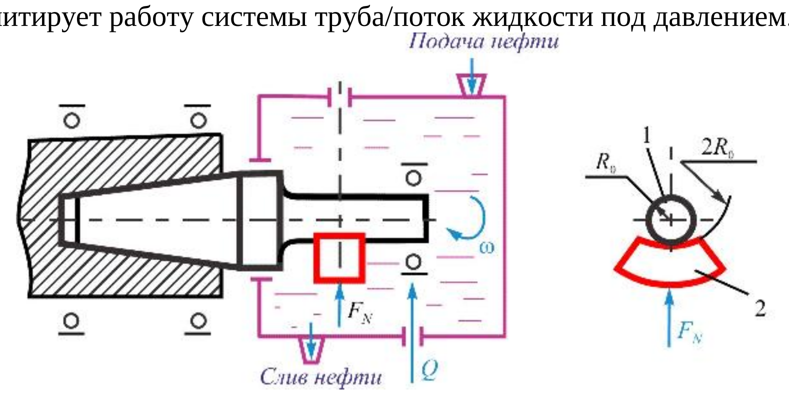


Рис.3 – Оригинальная модель системы труба / поток жидкости под давлением

Особенность контактного взаимодействия образца 1 и контробразца 2 (рис.3) состоит в том, что диаметр контактной поверхности контробразца вдвое превышает диаметр образца. Поэтому контакт осуществляется по узкой полоске, а между образцом и контробразцом реализуется конструктивный клин, в который затягивается жидкость при вращении образца. Если контакт между образцом и контробразцом будет чисто жидкостным, то контробразец исполняет лишь роль устройства для создания рабочего давления на площадке контакта твердого тела с жидкостью; последняя организуется в зоне растяжения изгибаемого образца. Непрерывное движение жидкости через конструктивный клин и площадку контакта обусловливает либо гидроэрозию (если среда слабо агрессивна), либо коррозионную эрозию (если среда агрессивна по отношению к металлу образца). Таким образом, предложенный метод испытаний имитирует, например, все основные условия работы внутренних поверхностей труб линейного участка нефтепровода.

Экспериментальная апробация метода испытаний позволила подтвердить ее эффективность.

Описанные модель системы труба/поток жидкости под давлением и методика ее испытания в настоящее время запатентованы [9].

Заключение

В работе описаны основные методы износоусталостных испытаний моделей наиболее широко распространенных компонентов современных машин и оборудования – трибофатических систем.

Все методы и технологии испытаний прошли широкую экспериментальную апробацию, что подтверждается рядом инновационных результатов испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский Л.А. Методы износоусталостных испытаний силовых систем и их моделей //Трение и износ. 1993. Т.14. № 5. С.937-952.
2. Фролов К. В.. Махутов Н. А. Новые машины и методы испытаний // Заводская лаборатория. 1995. № 5. С.32-33.
3. Сосновский Л.А., Высоцкий М.С., Сенько В.И., Богданович А.В., Еловой О.М., Тюрин С.А., Драган В.И. Трибофатические методы испытания: инновационные решения // Вестник БрГТУ. 2009. № 4(58): Машиностроение. С. 2-30.
4. Махутов Н.А., Жмайлик В.А., Тюрин С.А., Комиссаров В.В. Метод совмещенных усталостных испытаний моделей зубчатых зацеплений // Заводская лаборатория. 2005. Т.71. № 1. С.55-57.
5. СТБ 1758-2007. Трибофатика. Метод совмещенных испытаний на изгибную и контактную усталость материалов зубчатых колес (Стандарт Беларуси). Минск: Госстандарт, 2007. 45 с.
6. Способ испытаний материалов зубчатых колес на контактную и изгибную усталость: пат. 9247 Респ. Беларусь, МПК G 01M13/02/ В.А. Жмайлик, В.А. Андрияшин, Л.А. Сосновский, А.М. Захарик, В.В. Комиссаров, С.С. Щербаков; заявители ПО «Гомсельмаш», ОИМ НАН Б. –№ а20040781; заявл. 19.08.2004; опубл. 30.04.2007. –2007. 6 с.
7. Способ износоусталостных испытаний материала рельса системы колесо-рельс: пат. 10326 Респ. Беларусь, МПК G 01N3/56/ В.И. Сенько, Л.А. Сосновский; заявитель УО «Белорусский государственный университет транспорта». –№ а20050296; заявл. 28.03.2005; опубл. 28.02.2008. –2008. 5 с.
8. Способ испытания на контактно-механическую усталость материала рельса системы колесо-рельс-основание: пат. 10327 Респ. Беларусь, МПК G 01N3/56/ Г.П. Ожигар, Л.А. Сосновский, В.О. Замятнин, В.И. Матвецов, А.А. Сырокваш, С.С. Щербаков, А.А. Кебиков; заявитель УО «Белорусский государственный университет транспорта». –№ а20050297; заявл. 28.03.2005; опубл. 28.02.2008. –2008. 6 с.
9. Устройство для испытаний материала на коррозионно-эрозионную усталость: пат. 9573 Респ. Беларусь, МПК G 01N3/56, G 01N17/00/ А.А. Костюченко, А.М. Бордовский, В.В. Воробьев, В.О. Замятнин, Л.А. Сосновский; заявители РУП «Гомельтранснефть Дружба», ООО «НПО ТРИБОФАТИКА». –№ а20050020; заявл. 10.01.2005; опубл. 30.08.2007. –2007. 6 с.

Сведения об авторах:

Богданович Александр Вальдемарович,
Доктор технических наук, профессор гродненского государственного университета им. Янки Купалы (+375) 29-782 91 45
E-mail bogal@tut.by

Комиссаров Виктор Владимирович,
Канд.техн. наук, доцент Белорусского государственного университета транспорта
(375 29) 338 28 40
E-mail komissarov@ebelsut.gomel.by

Щербаков Сергей Сергеевич,
Канд.физ.-мат. наук, доцент, Белорусский государственный университет (375 29) 761 55 84
E-mail sherbakovss@mail.com

УДЕЛЬНАЯ ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ И ЛОКАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Буханько А.А., Хромов А.И.

Анализ процессов хрупкого и упругопластического разрушения в нелинейной постановке строится, как правило, на основе инвариантного J-интеграла, и представляет взгляд на пластическую область в окрестности вершины трещины со стороны нелинейно упругой части тела. Он не учитывает основной параметр, отличающий теорию упругости от теории пластичности – диссипацию механической работы внутренних сил. Вместе с этим, именно этот параметр существенно влияет на зарождение трещины и определяет скорость и направление ее развития.

В работе предлагается альтернативный взгляд на окрестность зоны локализации пластических деформаций с точки зрения теории пластичности; устанавливается связь между J-интегралом и удельной диссипацией энергии в условиях плоской деформации. Этот подход позволяет аналитически оценить диссипативные процессы, приводящие к зарождению трещины и в дальнейшем к ее распространению.

Целью рассматриваемого подхода является формулировка условия разрушения, учитывающего повреждаемость материала вследствие диссипации механической работы внутренних сил, которая считается основной характеристикой истории деформирования материала. Вид таких условий существенно зависит от вида условия пластичности. Наиболее простая формулировка критериев разрушения получается при условии пластичности, связанного с поверхностью Σ деформационных состояний несжимаемого жесткопластического тела, в частности, с линиями пересечения этой поверхности с плоскостями, параллельными девиаторной плоскости, рис. 1, [1]. За меру деформации принимается тензор конечных деформаций Альманси $\mathbf{E}$, за параметр упрочнения принимается его первый инвариант $h = E_1 + E_2 + E_3$, который может быть заменен энергетическим параметром, связанным с удельной диссипацией энергии W в процессах деформирования по линиям l, ортогональным линиям уровня m на девиаторной плоскости (рис. 1). Эти линии в пространстве главных напряжений могут определять поверхность нагружения $\sigma_T = \sigma_T(h)$, которая для любого конструкционного материала может быть определена из стандартного эксперимента на одноосное растяжение. Этому процессу будет отвечать вполне определенная линия L и l (рис. 1). Так как процесс монотонного нагружения, как правило, приводит к разрушению, то состоянию разрушения будет соответствовать вполне определенная линия M_* и m_*, которая будет определять предельное состояние материала, при достижении которого в теле образуется макротрещина.

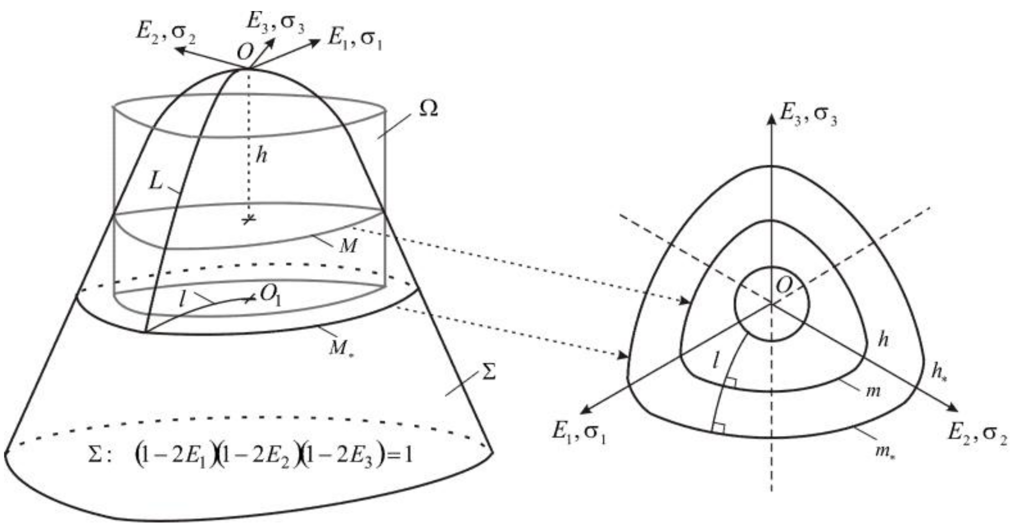


Рис. 1. Поверхность деформационных состояний ∑
несжимаемого жесткопластического тела и ее линии уровня

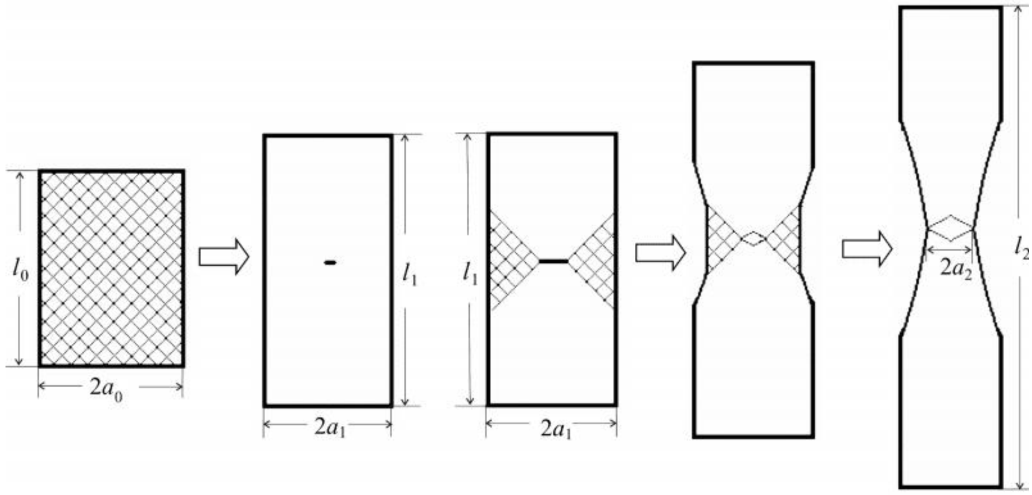


Рис. 2. Полная схема деформирования и разрушения плоских и осесимметричных образцов

Процесс разрушения понимается как процесс зарождения макротрещины и процесс дальнейшего ее распространения (рис. 2). В связи с этим вводятся две механические характеристики разрушения: W_{**} и W_*, определяющие момент зарождения макротрещины и скорость ее распространения, соответственно. Константа W_{**} определяет положение критических линий L и l, при пересечении которых происходит зарождение макротрещины. Определение констант W_{**} и W_* производится на основе одноосного растяжения цилиндрического образца по диаграмме $\sigma-\varepsilon$ и величин δ, ψ, соответствующих относительному удлинению и относительному сужению образца при разрушении, [2].

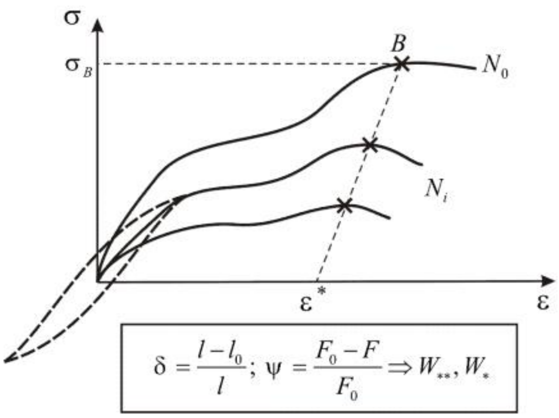


Рис. 3. Диаграмма деформирования образцов при циклическом нагружении

Предполагается, что при одноразовом деформировании (N_0) нового образца предельная линия L_* соответствует максимально возможному упрочнению материала, т.е. соответствует пределу прочности σ_B (рис. 3). Предполагается также, что, начиная с некоторого момента, предварительное деформирование материала (например, циклическое растяжение-сжатие образца без разрушения) приводит к снижению величины σ_B, т.е. уменьшает способность материала к упрочнению. Поэтому величины W_{**}, W_*, h_* являются функциями накопленной удельной диссипации энергии W_N в каждой частице, т.е. влияние предварительного деформирования (истории деформирования) учитывается с помощью экспериментально определяемых зависимостей $W_{**}(W_N)$, $W_*(W_N)$, $h_*(W_N)$.

Обобщение рассматриваемого подхода на процесс распространения трещины в упругопластическом теле проводится следующим образом: распространение трещины в упругом теле рассматривается как движение углового выреза вместе с небольшой жесткопластической областью (рис. 4), [3]. Предполагается, что внешняя часть области, окружающая вершину трещины, является упругой (или упругопластической), напряженно-деформированное состояние в которой определяется численным методом; а внутренняя часть $U: ACDBEFGA$ – жесткопластической, деформации в которой являются большими

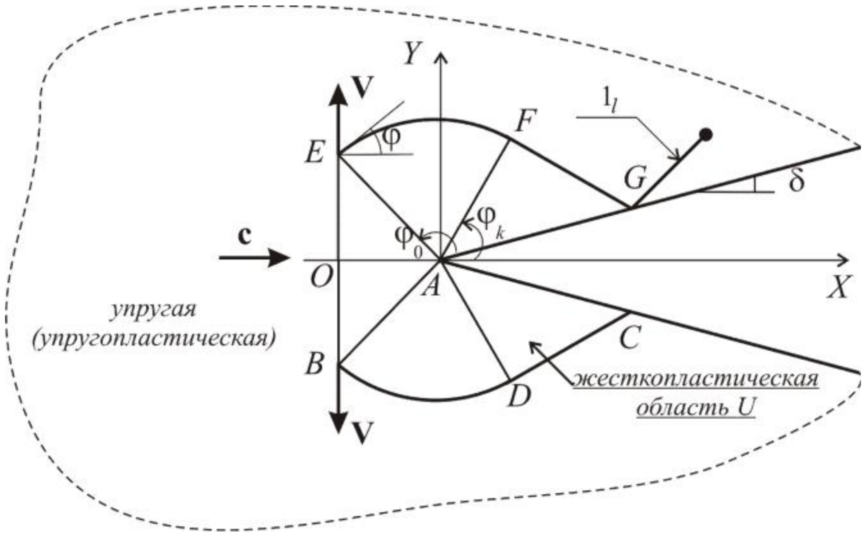


Рис. 4. Модель движения трещины внутри упругопластического тела

(конечными), и описываются тензорами конечных деформаций. Это обобщение позволяет связать значение инвариантного контурного J-интеграла с константой W_*:

$$\frac{J}{2W_*\cdot 1_l}=\frac{\sqrt{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k}\left(\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right)d\varphi}{|Vc|\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k}\left(\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}+u\right)\dfrac{d\varphi}{u}},$$

где u,v – проекции скоростей перемещений на линии скольжения; c – скорость распространения трещины, 1_l — единица длины, переводящая объемную плотность энергии W_* в плотность по площади, связанной с переходом к плоской деформации.

При предположении, что пластическая область мала (ее размеры стремятся к нулю) распределение нормальных скоростей будет стремиться к полю скоростей в задаче о растяжении жесткопластической полосы с V-образным вырезом, [4]:

$$\begin{cases}u=V(\sin\varphi-\sqrt{2})-Vc\cos\varphi,\\ v=V\cos\varphi+Vc\sin\varphi.\end{cases}\qquad c=-\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2},\quad \varphi_0=\frac{\pi}{4},\quad \varphi_k=-\frac{\pi}{4}+\delta,$$

а невязка касательных скоростей, связанная с приближенным «склеиванием» упругой и жесткопластической областей, будет стремиться к нулю. Тогда отношение $\dfrac{J}{2W_*}$ оценивается выражением

$$\frac{J}{2W_*}=-0.782\delta+1.259$$

с достоверностью аппроксимации $R^2=0.999$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буханько А.А., Григорьева А.Л., Кочеров Е.П., Хромов А.И. деформационно-энергетический критерий разрушения жесткопластических тел // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 6.
2. Хромов А.И., Буханько А.А., Козлова О.В., Степанов С.Л. Пластические константы разрушения // ПМТФ. 2006. Т.47. № 2.
3. Хромов А.И., Буханько А.А., Степанов С.Л. Концентраторы деформаций //Докл. РАН. 2006. Т.407. № 6.
4. Richmond O. Plain strain necking of V-notched and un-notched tensile bars // J. Mech. and Phys. Solids, v. 17, 1969.

<u>Сведения об авторах:</u>

Буханько Анастасия Андреевна,

доцент кафедры прочности летательных аппаратов, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)», +7 (846) 267 48 57
E-mail: abukhanko@mail.ru

Хромов Александр Игоревич,

профессор, заведующий кафедрой прочности летательных аппаратов, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)», +7 (846) 267 45 23
E-mail khromov@ssau.ru

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ В МЕХАНИКЕ СВЯЗАННЫХ ПОЛЕЙ

Ватульян А. О.

В последние годы возрос интерес к линейным моделям механики связанных полей с переменными свойствами. Это обусловлено рядом приложений в механике пьезокомпозитов, моделях электроупругости, термоэлектроупругости с неоднородной поляризацией, термомеханике функционально-градиентных материалов, в моделях биомеханики, использующих связанность физических полей. Для таких моделей для расчета компонент физических полей уже недостаточно набора физических постоянных, а требуется знание некоторого набора функций, характеризующих неоднородные свойства материала. Эти функции обычно определяются из набора экспериментов, в которых осуществляется анализ динамического отклика исследуемого объекта при варьировании способа нагружения. При этом требуется решать довольно сложные некорректные обратные задачи. Отметим, что в рамках моделей линейной теории упругости эти исследования успешно продвигаются как в направлении совершенствовании постановок, так и в направлении построения экономичных вычислительных схем.

Если подобные задачи для моделей теплопроводности и термоупругости исследовались достаточно давно и в рамках этого направления получено достаточно много результатов по реконструкции свойств [1-2], то для моделей электроупругости простейшие одномерные задачи подобного типа были мало исследованы [3-5]. В последние годы весьма интенсивно исследуются математические аспекты, связанные с идентификацией неоднородных характеристик в изотропной неоднородной теории упругости [6-8] .

В настоящей работе предложена слабая формулировка задач для связанных полей, на основе которой с единых позиций могут быть исследованы обратные задачи в разных постановках. Изучены две основных постановки обратной задачи в зависимости от вида дополнительной информации – измерение полей внутри тела или на его границе в некотором частотном диапазоне. Сформулировано обобщенное интегральное соотношение, которому удовлетворяют искомые функции, на основе его сформирован единый подход к проблеме идентификации.

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной области V с кусочно-гладкой границей $S = S_1 \cup S_2$, а n – единичный вектор внешней нормали к S. Сформулируем постановку коэффициентных обратных задач. Пусть уравнения установившихся колебаний среды и соответствующие граничные условия имеют вид

$$L(a,\omega)u = 0\,, \quad u\big|_{S_1} = 0\,,\; M(a,n)u\big|_{S_2} = p \qquad (1)$$

где $L(a,\omega)$, $M(a,n)$ –линейные дифференциальные операторы второго и первого порядков соответственно. Здесь u – вектор полевых переменных, a – вектор-функция коэффициентов с ограниченными компонентами, причем линейность имеет место и по аргументу a; ω –частота колебаний.

Слабая формулировка имеет вид

$$A(a,u,v) = b(v) \qquad (2)$$

где $A(a,u,v)$ –трилинейная форма (линейная по каждому аргументу) переменных a,u,v, $b(v)$ – линейная форма. Для рассматриваемых в настоящей работе моделей эти формы имеют вид

1) для оператора термоупругости

$$\begin{gathered} A(a,u,v) = \int\limits_V 2L(u_i, v_i, \theta, \tau, C_{ijkl}, \beta_{ij}, k_{ij}, c_\varepsilon, \rho)dV,\;\; b(v) = \int\limits_{S_2} p_i v_i dS - \int\limits_{S_2} q_n \tau dS, \\ 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) = C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j} - \beta_{ij}(\theta v_{i,j} - i\omega\tau u_{i,j}) + k_{ij}\vartheta_{,j}\tau_{,i} - \rho\omega^2 u_i v_i \end{gathered} \qquad (3)$$

где вектор коэффициентов включает в себя компоненты тензора модулей упругости, компоненты тензоров теплопроводности и коэффициентов температурной связанности, теплоемкость и плотность;

2) для оператора электроупругости

$$A(a,u,v)=\int\limits_V 2L(u_i,v_i,\varphi,\psi,C_{ijkl},e_{ijk},э_{ij},\rho)dV,\ \ b(v)=\int\limits_{S_2} p_i v_i dS+\int\limits_{S_2} D_n\psi dS, \tag{4}$$
$$2L(u_i,v_i,C_{ijkl},\rho)=C_{ijkl}u_{k,l}v_{i,j}-э_{ij}\phi_{,i}\psi_{,j}+e_{kij}(\varphi_{,k}v_{i,j}+\psi_{,k}u_{i,j})-\rho\omega^2 u_i v_i$$

Здесь вектор коэффициентов включает в себя коэффициенты тензоров упругости, диэлектрической проницаемости, пьезомодули и плотность.

Сформулируем задачу определения коэффициентов дифференциального оператора L из конуса неотрицательных ограниченных функций $G^+(V)$.

В первой постановке заданным считается поле u (смещений, скоростей, температур, электрического потенциала) внутри тела

$$u(x,\omega_0)=U(x),\ \ x\in V\ , \tag{5}$$

а под решением обратной задачи понимается вектор-функция $a\in G^+(V)$, удовлетворяющая равенству $A(a,U,v)=b(v)$ для любого $v\in H_0^1(V)$. В этом случае решение обратной задачи приводится к проблеме решения линейного операторного уравнения с компактным оператором, построение решения которого базируется на методе регуляризации А. Н. Тихонова. Отметим также, что возможен подход, основанный на решении задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$L(a,\omega_1)U=0\ ,\ M(a,n)U\big|_{S_2}=p \tag{6}$$

Во второй постановке задаются (измеряются) граничные значения полевых характеристик как функции частоты колебаний. При этом возможно задание смещений в области носителя нагрузки

$$u(x,\omega)\big|_{S_3}=f(x,\omega),\omega\in[\omega_1,\omega_2] \tag{7}$$

либо вне нее ($S_3\subset S_2$). Под решением обратной задачи в этом случае понимается пара элементов $(u,a)\in H_0^1(V)\times G^+(V)$, удовлетворяющая равенству (2) для любого $v\in H_0^1(V)$. Задача во второй постановке является нелинейной и некорректной; билинейность оператора $L(a,\omega)u$ позволяет осуществить значительные упрощения. Построена последовательность слабых постановок и интегральных уравнений первого рода с гладкими ядрами, аналогичными полученным в первой постановке, которые позволяют реализовать итерационную процедуру построения решения обратной задачи. Решение строится на основе обобщенного бесконечномерного метода Ньютона, построены производные по Фреше от операторов (этот подход был реализован ранее в [3,9]; для простых одномерных задач проведены и вычислительные эксперименты [9]). При этом начальное приближение для нахождения искомых коэффициентов определяется в классе ограниченных функций простой структуры (линейных либо кусочно-постоянных, в зависимости от наличия или отсутствия априорной информации) на основе минимизации функционала невязки.

Представлены примеры реконструкции электроупругих и теплофизических характеристик в простых задачах для одномерных структур.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№10-01-00194-а), ФЦП " Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт П596) и Южного математического института (г. Владикавказ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 2005. 262 p.
2. ВатульянА.О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел~//Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. №3. С.24-30.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223с.
4. Ватульян А. О. Соловьев А. Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета. 2008. 176с.
5. Ватульян А.О., Домброва О.Б., Жиров В.Е. Обратные задачи для неоднородно поляризованных пьезоэлектрических стержней // ПММ. 2007. №1. С.93-101
6. McLaughlin J., Yoon J.-R .Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement //Inverse Problems. 2004. V. 20. P. 25-45.
7. Ватульян А.О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Докл. РАН. 2008. Т. 422. №2. С.182-184.
8. Gockenbach M. S., Khan A.A.Identification of Lame parameters in linear elasticity: A fixed point approach // J. Indust. Manag. ptim. 2005. V.1 № 1. P.487–497.
9. Бочарова О.В., Ватульян А.О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. ж. 2009. Т. 55. №3. С.275-282.

Сведения об авторе:

Ватульян Александр Ованесович,
доктор физ.-мат. наук. профессор, зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а, факультет математики, механики и компьютерных наук, тел.: 863 220-46-52, E-mail: vatulyan@aaanet.ru

ГРАНИЧНОЕ ТРЕНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Верлинский С.В., Шекян А.Л., Шекян Л.А.

Рассматривается плоская контактная задача о передачи нагрузки от равномерно вращающегося вокруг своей оси упругого сплошного цилиндра в неподвижном недеформируемом цилиндрическом отверстии, поперечное сечение которого имеет форму эллипса. Предполагается, что цилиндр и отверстие находятся в режиме граничного трения, при этом учитываетя износ их поверхностей.

Задача сведена к замкнутой системе нелинейных интегральных уравнений. Полное математическое исследование этой системы проведено на основании принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций. Получено приближенное аналитическое решение задачи.

Рассматриваемое контактное взаимодействие тел можно рассматривать как модель подшипника скольжения, вкладыш которого имеет эллиптическое поперечное сечение. Применение в подшипниках скольжения вкладышей эллиптического поперечного сечения дает возможность конструктивным способом улучшить механические характеристики подшипников путем изменения положения и размеров таких вкладышей.

1. Пусть упругий сплошной цилиндр 1 с радиусом R и с коэффициентами упругости « и ³ (соответственно коэффициент сдвига и коэффициент Пуассона), под действием внешних сил равномерно вращется вокруг своей оси и вдоль своих образующих вдавливает в неподвижное недеформируемое цилиндрическое отверстие 2, поперечное сечение которого имеет форму эллипса с полуосями a и b, притом $a > b > R$ (фиг.1). Предполагается, что цилиндр и отверстие находятся в режиме граничного трения.

Требуется определить положение и размеры области контакта между цилиндром и отверстием (т.е. угловые координаты α и β, соответствующие началу и концу области контакта, и угол ε, образующий линией действия заданных внешних сил с линией, проходящей через центры цилиндра O_1 и отверстия O_2), законы распределения нормальных $\sigma(\varphi)$ и касательных $\tau(\varphi)$ контактных напряжений, действующих в контактной области $\varphi \in [-\alpha;\beta]$, расстояние $l = O_1O_2$ центров O_1 и O_2 (фиг.1), а также потери в узле трения.

Основными математическими соотношениями задачи являются условия равенства радиальных перемещений в области контакта $\varphi \in \left[-\alpha,\beta\right]$

$$u_E(\varphi) + u_W(\varphi) = R + l\cos(\varphi+\varepsilon) - ab\left[a^2\cos^2(\varphi+\gamma) + b^2\sin^2(\varphi+\gamma)\right]^{-0.5} \tag{1}$$

и условия равновесия цилиндра

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\left[p(\varphi)\sin(\varphi+\varepsilon) + \tau(\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon)\right]d\varphi = 0\,, \tag{2}$$

$$\int_{-\alpha}^{\beta}\left[p(\varphi)\cos(\varphi+\varepsilon) - \tau(\varphi)\sin(\varphi+\varepsilon)\right]d\varphi = F\,, \tag{3}$$

$$R^2\int_{-\alpha}^{\beta}\tau(\varphi)\,d\varphi = M\,, \tag{4}$$

где $u_E(\varphi)$ и $u_W(\varphi)$ – радиальные перемещения граничных точек контактирующихся тел, обусловленных упругой деформацией и износом соответсвенно, F и M – соответственно, внешняя радиальная сила и вращающий момент пары, действующие на единицу длины цилиндра, ¥ –угол между линией действия силы F с линией, проходящей через центры O_1 и O_2 (фиг. 1).

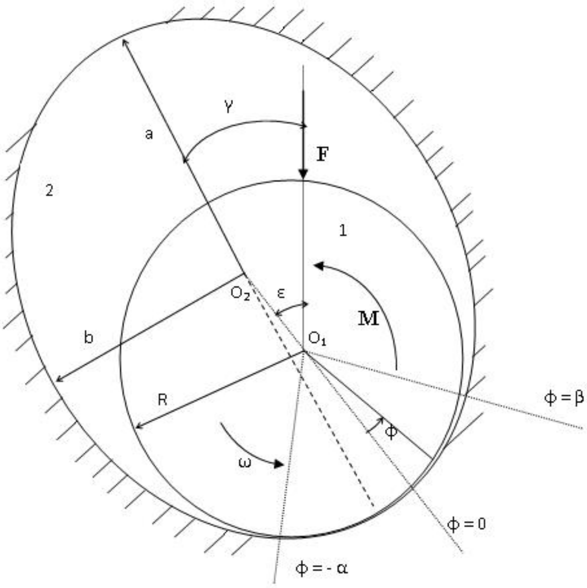
При решении задачи будем пользоваться также законом трения Кулона

$$\tau(\varphi) = fp(\varphi)\,,\ \ \varphi \in \left[-\alpha,\beta\right], \tag{5}$$

и условиями непрерывности поверхностных нормальных напряжений на границах контактной области

$$p(-\alpha) = 0\,,\ \ p(\beta) = 0\,. \tag{6}$$

Здесь f – коэффициент трения цилиндра с отверстием в режиме граничного трения.



Фиг. 1

Пользуясь известным методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили о представлении решения плоской задачи теории упругости [1], определим упругие радиальные перемещения $u_E(\vartheta)$ граничных точек цилиндра, возникающих вследствие действия на граничной области $\varphi\in[-\alpha,\beta]$ нормальных $p(\varphi)$ и касательных $\tau(\varphi)$ контактных напряжений. Эти перемещения, согласно [2], выражаются формулой

$$\begin{aligned} u_E(\vartheta) &= \frac{\chi+1}{4\pi\mu}R\int_{-\alpha}^{\beta} p(\varphi)\ln 2\left|\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right|d\varphi + \frac{\chi-1}{8\mu}R\int_{-\alpha}^{\beta}\tau(\phi)\,\mathrm{sgn}(\vartheta-\varphi)d\varphi - \\ &-R\int_{-\alpha}^{\beta} p(\varphi)K^{(1)}(\vartheta-\varphi)\,d\varphi - R\int_{-\alpha}^{\beta}\tau(\varphi)K^{(2)}(\vartheta-\varphi)\,d\varphi + \frac{R}{2\pi\mu}\int_{-\alpha}^{\beta} p(\varphi)\cos(\vartheta-\varphi)d\varphi + f_1, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &K^{(1)}(z) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu}K_{11}(z) + \frac{\chi-1}{8\pi\mu}K_{12}(z)\,,\ K_{11}(z) = 2\sin^2\frac{z}{2}\ln\left|2\sin\frac{z}{2}\right|, \\ &K_{12}(z) = (\pi\,\mathrm{sgn}\,z - z)\sin z\,,\ K^{(2)}(z) = \frac{\chi+1}{4\pi\mu}K_{21}(z) + \frac{\chi-1}{8\pi\mu}K_{22}(z) - \frac{\chi-1}{8\pi\mu}z\,, \\ &K_{21}(z) = \sin z\ln\left|2\sin\frac{z}{2}\right|,\ K_{22}(z) = -2(\pi\,\mathrm{sgn}\,z - z)\sin^2\frac{z}{2}\,,\ \vartheta\in[-\alpha,\beta]. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\chi = 3-4\nu$ – при толстом (длинном) диске, находящийся в состоянии плоской деформации, и $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ – при тонком цилиндре (обобщенно плоское напряженное состояние), f_1 – постоянное, обусловленное жестким перемещением цилиндра и определяется из условия $u_E(0)=0$.

Перемещения $u_W(\vartheta)$ определяются на основе экспериментальных данных [3], согласно которым скорость изнашивания может быть выражена степенной функцией

$$\frac{\partial u_W}{\partial t} = \lambda\left[p(\vartheta)\right]^m(\omega R)^n\,,\ 1\le m<3\,,\ n\approx 1\,,\ \vartheta\in[-\alpha,\beta], \tag{9}$$

где λ – коэффициент пропорциональности, t – время, ω – угловая скорость цилиндра. Величины параметров λ и m зависят от материалов тел, образующих пары трения, геометрии трущихся поверхностей и от режима трений. Их значения приведены в [3].

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи сводится к определению $p(\varphi)$, $\tau(\varphi)$, α, β, ε и M из соотношений (1)-(9), которые образуют замкнутую систему нелинейных уравнений относительно указанных неизвестных.

2. Математическое исследование полученной системы нелинейных уравнений, следуя [4], проводим на основе принципа сжимающих отображений [5]. С этой целью, введя новые безразмерные величины

$$U_E(\vartheta)=\frac{u_E(\vartheta)}{R},\ U(\vartheta)=\frac{u_W(\vartheta)}{R},\ a_0=\frac{a}{R},\ b_0=\frac{b}{R},\ l_0=\frac{l}{R},\ F_0=\left(\lambda\omega t\right)^{1/m}F, \tag{10}$$

и принимая во внимание то, что изменение со временем положение и размеры контактной области, а также законы распределения контактных давлений в начальной стадии контактного взаимодействия, незначительны, из (9) и (5) получим

$$p(\vartheta)=\left[U(\vartheta)/\lambda\omega t\right]^{1/m},\ \tau(\vartheta)=f\left[U(\vartheta)/\lambda\omega t\right]^{1/m}. \tag{11}$$

Тогда из соотношений (1) на основании (7), (10) и (11) получим относительно $U(\vartheta)$ нелинейное интегральное уравнение типа

$$U(\vartheta)=\int_{-\alpha}^{\beta}\Phi\left(\vartheta,\varphi\right)\left[U(\varphi)\right]^{1/m}d\varphi+\Psi(\vartheta),\ \vartheta\in\left[-\alpha,\beta\right], \tag{12}$$

где $\Phi\left(\vartheta,\varphi\right)$ и $\Psi\left(\vartheta\right)$ – известные функции. В уравнении (12), кроме неизвестной функции $U(\vartheta)$, входят также неизвестные параметры α, β (в качестве пределов интегрирования), ε и l_0. Уравнение (12) вместе с условиями равновесия (2) и (3), а также с условиями непрерывности напряжений, на границах контактной области (6) образуют полную систему нелинейных уравнений относительно неизвестных $U(\vartheta)$, α, β, ε и l_0. Как только будут определены эти неизвестные, из третьего уравнения равновесия (4) можно определить вращающий момент M, следовательно, и мощность потерянной энергии $N=M\omega$ в узле трения.

Систему нелинейных уравнений (2), (3), (6) и (12) приведем к виду, удобному для применения метода последовательных приближений. Из уравнения равновесия (2), с учетом (11), получим

$$\varepsilon=\operatorname{arctg}\frac{\int_{-\alpha}^{\beta}\left(\sin\varphi+f\cos\varphi\right)\left[U(\varphi)\right]^{1/m}d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\beta}\left(f\sin\varphi-\cos\varphi\right)\left[U(\varphi)\right]^{1/m}d\varphi}, \tag{13}$$

а на основании (1), (10) и (11) из условий (6) будем иметь

$$\alpha=\arccos\left\{\frac{U_E(-\alpha)-1}{l_0}+\frac{a_0b_0}{l_0\sqrt{a_0^2\cos^2(\alpha-\gamma)+b_0^2\sin^2(\alpha-\gamma)}}\right\}+\varepsilon, \tag{14}$$

$$\beta=\arccos\left\{\frac{U_E(\beta)-1}{l_0}+\frac{a_0b_0}{l_0\sqrt{a_0^2\cos^2(\beta+\gamma)+b_0^2\sin^2(\beta+\gamma)}}\right\}-\varepsilon. \tag{15}$$

При этом, уравнение равновесия (3) принимает вид

$$F_0=\int_{-\alpha}^{\beta}\left[\cos(\varphi+\varepsilon)-f\sin(\varphi+\varepsilon)\right]\left[U(\varphi)\right]^{1/m}d\varphi. \tag{16}$$

Таким образом, задача сводится к решению системы нелинейных уравнений (12)-(16) относительно неизвестных $U(\vartheta)$, α, β, ε и l_0. Структура уравнения (16) позволяет решать эту систему существенно упрощенным способом, временно, в уравнениях задачи считая неизвестной также силу F и, взамен чего, одновременно считая заданным расстояние

$l = O_1O_2$, принимая для него некоторые возможные значения из области его изменения $b - R < l < a$. Отметим, что получившая при такой замене зависимость F от l можно трактовать как искомую зависимость l от F. Тогда уравнения (12)-(16) при каждом допустимом значении l образуют относительно $U(\vartheta)$, α, β, ε и F_0 систему нелинейных уравнений, которую запишем в операторном виде $x = A(x)$, где $x = \{\mathrm{U}(\vartheta), \alpha, \beta, \varepsilon, F_0\}$. Эта система имеет наиболее удобный вид для получения ее решения методом последовательных приближений.

Математическое исследование о существовании и единственности решения уравнения $x = A(x)$, а также допустимость применения к ней метода последовательных приближений, следуя [4,6], нетрудно проводить в некотором метрическом пространстве X, являющейся совокупностью всех элементов $x = \{\mathrm{V}(\eta), \alpha, \beta, \varepsilon, F_0\}$, в которой расстояние его произвольных двух элементов $x_i = \{\mathrm{V}_\mathrm{i}(\eta), \alpha_i, \beta_i, \varepsilon_i, F_{0,i}\} \in X$ $(i = 1;2)$ определяется формулой

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{0\le\eta\le1} \left|V_1(\eta) - V_2(\eta)\right| + \left|\alpha_1 - \alpha_2\right| + \left|\beta_1 - \beta_2\right| + \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right| + \left|F_{0,1} - F_{0,2}\right|, \qquad (17)$$

где $U(\vartheta) = V\left((\alpha + \vartheta)/(\alpha + \beta)\right)$, $V_i(\eta)$ – произвольные непрерывные функции на отрезке $0 \le \eta \le 1$; α_i, β_i, ε_i и $F_{0,i}$ $(i = 1;2)$ – произвольные числа. При этом, доказывается существование области изменения характерных параметров задачи, где оператор A имеет единственную неподвижную точку $x_* = \{\mathrm{V}_*(\eta), \alpha_*, \beta_*, \varepsilon_*, F_{0,*}\}$, к которой по метрике (17) стремится последовательность элементов x_0, x_1, x_2, ..., определенных формулами $x_i = A(x_{i-1})$ $(i = 1,2,...)$, исходя из любого начального элемента $x_0 = \{V_0(\eta), \alpha_0, \beta_0, \varepsilon_0, F_{0,0}\}$ из определенного замкнутого подмножества H пространства X. Тогда решением системы уравнений (12)-(16) будет функция $U_*(\vartheta) = V_*\left((\alpha_* + \vartheta)/(\alpha_* + \beta_*)\right)$ и числа: α_*, β_*, ε_* , $F_{0,*}$.

Принимая $x_0 = \{0, \pi/6, \pi/6, 0, 0\}$ в качестве нулевого приближения, решение уравнения $x = A(x)$ в первом приближении будет $x_1 = A(x_0)$, откуда на основании (12)-(16), будем иметь

$$U_1(\vartheta) = \Psi(\vartheta), \quad \varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \frac{\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\sin\varphi + f\cos\varphi\right)\left[\Psi(\varphi)\right]^{1/m} d\varphi}{\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(f\sin\varphi - \cos\varphi\right)\left[\Psi(\varphi)\right]^{1/m} d\varphi},$$

$$\alpha_1 = \arccos\left\{\frac{U_E(-\pi/6) - 1}{l_0} + \frac{a_0 b_0}{l_0\sqrt{a_0^2\cos^2(\gamma - \pi/6) + b_0^2\sin^2(\gamma - \pi/6)}}\right\},$$

$$\beta_1 = \arccos\left\{\frac{U_E(\pi/6) - 1}{l_0} + \frac{a_0 b_0}{l_0\sqrt{a_0^2\cos^2(\gamma + \pi/6) + b_0^2\sin^2(\gamma + \pi/6)}}\right\},$$

$$F_{0,1} = \int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(\cos\varphi - f\sin\varphi\right)\left[\Psi(\varphi)\right]^{1/m} d\varphi.$$

В частном случае, $a = b$, т.е. при круговом отверстии полученные результаты совпадают с результатами [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
2. Мхитарян С.М., Торосян Ф.С. О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т.31. №5. С.3-19.
3. Трение, изнашивание и смазка. Справочник. Кн. 1. М.: Наука, 1978. 400с.
4. Мхитарян С.М., Шекян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР, Механика. 1977. Т.30. №3. С.15-32.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 360с.
6. Шекян А.Л. Контактное взаимодействие цилиндра и втулки в режиме граничного трения // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. №3. С. 66-72.

<u>Сведения об авторах:</u>

Верлинский Сергей Витальевич – канд. физ.-мат. наук, преподаватель Государственного инженерного университета Армении, кафедра «Машиноведения»
Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна 105
Тел: (+37410) 44 83 62; (+37493) 52 77 35; E-mail: sergeyver@mail.ru

Шекян Артем Лаврентьевич – канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410)39 89 01; (+37455)85 72 27

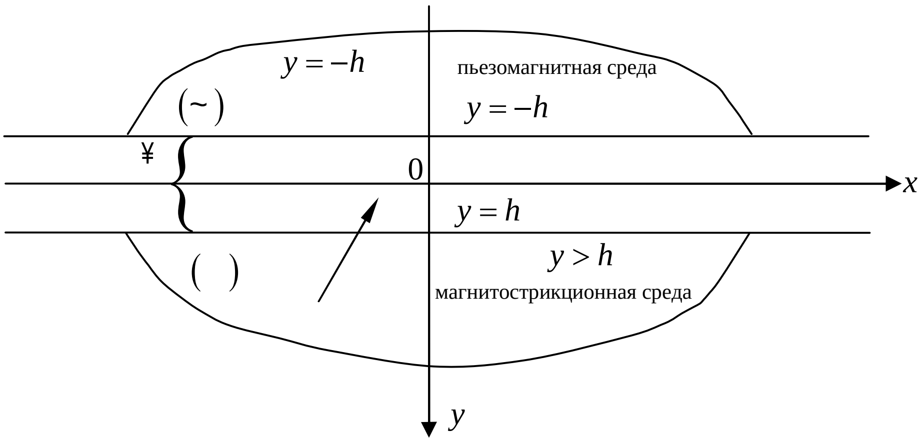
Шекян Лаврентий Арамович –канд. физ.-мат. наук, доцент Государственного инженерного университета Армении, кафедра прикладной механики
Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна, 105
Тел: (+37410)39 89 01; (+37499)28 34 40; E-mail: lshekyan@mail.ru

ТУННЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ВАКУУМНУЮ ЩЕЛЬ МЕЖДУ ПЬЕЗОМАГНИТНЫМ И МАГНИТОСТРИКЦИОННЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Гараков В.Г.

Из магнитострикционной среды на границу щели падает упругая волна, которая сопровождается магнитным полем. На границе щели часть волны отражается, остальная часть проникает в щель и возбуждает упругую преломленную волну на границе пьезомагнитной среды. Определяются амплитуды отраженной и преломленной волны.

1. Пусть магнитострикционная среда занимает область $y > h$, а пьезомагнитная среда – $y < -h$, они разделены вакуумной щелью $-y < h < y$. Величины, характеризующие полупространство $y > h$ $\left(y < -h \right)$, отмечаются индексом $\beta\left(\alpha\right)$, а величина, характеризующая щель – индексом γ



1) Уравнение при $y > h$, т.е. для магнитострикционной среды имеет вид [1]

$$\begin{cases} \nu_\beta \Delta u_\beta + \tau_\beta \Delta\varphi_\beta = \rho_\beta \dfrac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} \\ \tau_\beta u_\beta - \mu_0 \mu_{2\beta} \Delta\varphi_\beta = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

2) Уравнение при $y < -h$, т.е. для пьезомагнитной среды имеет вид

$$\begin{gathered} c_{44}^{(\alpha)} \Delta u_\alpha + \bar{b}_{15}^{(\alpha)} \Delta\varphi_\alpha = \rho_\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \\ \bar{b}_{15}^{(\alpha)} \Delta u_\alpha - \mu_0 \mu_{11}^{(\alpha)} \Delta\varphi_\alpha = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

3) Уравнение при $\left|y\right| < h$ имеет вид

$$\Delta\varphi_\gamma = 0 \tag{1.3}$$

где $\nu_\beta, \tau_\beta, \mu_0, \mu_{2\beta},$ – приведенные упругие и магнитострикционные коэффициенты,

$c_{44}^{(\alpha)}, \bar{b}_{15}^{(\alpha)}, \mu_0, \mu_{11}^{(\alpha)}$ – приведенные упругие и пьезомагнитные коэффициенты,

ρ_β, ρ_α – плотности магнитострикционной и пьезомагнитной среды [1]

4) Граничные условия следующие:

а) при $y = h$ имеем

$$\begin{cases} \nu_\beta \dfrac{\partial u_\beta}{\partial y} + \tau_\beta \dfrac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} = 0 \\ -\tau_\beta \dfrac{\partial u_\beta}{\partial y} - \mu_0 \mu_{2\beta} \dfrac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} = \mu_0 \dfrac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \\ \qquad \varphi_\beta = \varphi_\gamma \end{cases} \tag{1.4}$$

б) при $y = -h$ имеем

$$\begin{cases} c_{44}^{(\alpha)} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \overline{b}_{14}^{(\alpha)} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \overline{b}_{15}^{(\alpha)} \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} = 0 \\ \qquad \varphi_\alpha = \varphi_\gamma \\ -\mu_0 \mu_{14}^{(\alpha)} \dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} + \overline{b}_{15}^{(\alpha)} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial y} - \overline{b}_{14}^{(\alpha)} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x} = -\mu_0 \dfrac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y} \end{cases} \tag{1.5}$$

где используются обозначения $c_{44}^{(\alpha)} = c_\alpha$; $\overline{b}_{14}^{(\alpha)}$ и $\overline{b}_{15}^{(\alpha)}$ вибираем из таблиц [1]

2. Решение системы при $y > h$ представляется в виде:

$$u_\beta = A \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right), \qquad y_\beta = B \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right) \tag{2.1}$$

Подставим (2.1) в уравнение (1.1), получим уравнение (2.2)

$$\begin{gathered} \left[\left(k_1^2 + k_2^2\right)\nu_\beta - \rho_\beta \omega^2\right] A + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\tau_\beta B = 0 \\ -\left(k_1^2 + k_2^2\right)\tau_\beta A + \mu_0 \mu_{2\beta}\left(k_1^2 + k_2^2\right) B = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Приравнивая детерминант этой системы нулю, получим характристическое уравнение (2.3)

$$\mathrm{Det} \equiv \mu_0 \mu_{2\beta}\left(k_1^2 + k_2^2\right)\left[\left(k_1^2 + k_2^2\right)\nu_\beta - \rho_\beta \omega^2\right] + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\tau_\beta^2 = 0 \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) распадается на следующие два уравнения:

$$\mu_0 \mu_{2\beta}\left[\left(k_1^2 + k_2^2\right)\nu_\beta - \rho_\beta \omega^2\right] + \tau_\beta^2 = 0 \tag{2.4}$$

$$k_1^2 + k_2^2 = 0 \tag{2.5}$$

Корнями уравнения (2.4) будут:

$$k_2 = \pm k = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{2\beta} \rho_\beta \omega^2 - \tau_\beta^2}{\mu_0 \mu_{2\beta} \nu_\beta} - k_1^2} \tag{2.6}$$

Следовательно, для существования падающей волны должно выполняться условие

$$\omega^2 > \frac{\left(\mu_0 \mu_{2\beta} \nu_\beta + \tau_\beta^2\right) k_1^2}{\mu_0 \mu_{2\beta} \rho_\beta} \tag{2.7}$$

Падающая волна будет: $u_{\beta n} = A \exp i\left(\omega t - k_1 x + k y\right)$ (2.8)

Отраженная волна будет: $u_{\beta 0} = C \exp i\left(\omega t - k_1 x - k y\right)$ (2.9)

Падающая волна будет сопровождаться потенциалом:

$$\varphi_{\beta n} = \frac{\tau_\beta A}{\mu_0 \mu_{2\beta}} \exp i\left(\omega t - k_1 x - k y\right) \tag{2.10}$$

где $B = \dfrac{\tau_\beta}{\mu_0 \mu_{2\beta}} A$ из 2–го уравнения системы (2.2), а отраженная волна сопровождается потенциалом

$$\varphi_{\beta 0}=\frac{\tau_\beta}{\mu_0\mu_{2\beta}}\exp i\left(\omega t-k_1x-ky\right). \qquad (2.11)$$

Корни уравнения (2.5) следующие: $k_2=\pm ik_1$. (2.12)

Для этих значений k_2, падающая волна не существует, существует только отраженная неоднородная волна

$$u_{\beta 0n}=D\exp i\left(\omega t-k_1x+ik_1y\right)=De^{-k_1y}\exp i\left(\omega t-k_1x\right),\quad k_1>0 \qquad (2.13)$$

с сопутствующей $\varphi_{\beta 0н}=E\exp i\left(\omega t-k_1x+ik_1y\right)$ (2.14)

Подставляя $u_{\beta 0n},\varphi_{\beta 0н}$ в систему уравнений (1.1), при $y>h$ (магнитострикционная среда) получим $D=0$, а E может быть произвольным.

<u>**Примечание:**</u> в граничные условия при $y=h$ должны быть подставлены:

$$\begin{aligned}&u_\beta=u_{\beta n}+u_{\beta 0}\\&\varphi_\beta=\varphi_{\beta n}+\varphi_{\beta 0}+\varphi_{\beta 0н}\end{aligned} \qquad (2.15)$$

3. Решение уравнений (1.3) при $|y|<h$ имеет вид:

$$y_\gamma=\left(F_1e^{-k_1y}+F_2e^{-k_1y}\right)\exp i\left(\omega t-k_1x\right),\text{ где } k_1>0 \qquad (3.1)$$

Решения системы уравнений (1.2) при $y<-h$ представляются в виде:

$$\begin{aligned}&u_\alpha=M\exp i\left(\omega t-k_1x-k_6y\right)\\&\varphi_\alpha=N\exp i\left(\omega t-k_1x-k_6y\right)\end{aligned} \qquad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в систему (1.2) , получим

$$\begin{cases}\left[\left(k_1^2+k_6^2\right)c_{44}^{\alpha}-\rho_\alpha\omega^2\right]M+\left(k_1^2+k_6^2\right)b_{15}^{(\alpha)}N=0=0\\ \left(k_1^2+k_6^2\right)\left[b_{15}^{(\alpha)}M+\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}N\right]=0\end{cases} \qquad (3.3)$$

Приравнивая детерминант к нулю, получим характеристическое уравнение, которое распадается на два уравнения:

$$\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}\left[\left(k_1^2+k_2^2\right)c_{44}^{(\alpha)}-\rho_\alpha\omega^2\right]+\left(k_1^2+k_2^2\right)\left(b_{15}^{(\alpha)}\right)^2=0 \qquad (3.4)$$

$$k_1^2+k_6^2=0 \qquad (3.5)$$

Из уравнения (3.4) получим:

$$k_6=\pm\sqrt{\frac{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}\rho_\alpha\omega^2}{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}c_{44}^{(\alpha)}+\left(b_{15}^{(\alpha)}\right)^2}-k_1^2}=\pm P \qquad (3.6)$$

Преломленная (или туннелированная сдвиговая) волна будет:

$$u_{\alpha t}=M\exp i\left(\omega t-k_1x-Py\right) \qquad (3.7)$$

При условии (2.7) и (3.6) туннелированная волна будет неоднородной, если:

$$\frac{\mu_0\mu_{2\beta}\nu_\beta+\tau_\beta^2}{\mu_0\mu_{2\beta}\rho_\beta}<\frac{\omega^2}{k_1^2}<\frac{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}c_{44}^{(\alpha)}+\left(b_{15}^{(\alpha)}\right)^2}{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}\rho_\alpha} \qquad (3.8)$$

Упругая туннелированная волна, согласно системе (3.3), будет сопровождаться волной электрического поля

$$\varphi_{\alpha t}=\frac{b_{15}^{(\alpha)}}{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}}M\exp i\left(\omega t-k_1x+Py\right) \qquad (3.9)$$

Из уравнения (3.5) $k_6=\pm ik_1$. Корню $k_6=-ik_1$ соответствуют туннелированные неоднородные волны:

$$u_{\alpha t н} = K \exp i\left(\omega t5 - k_1 x - i k_1 y\right)$$
$$\varphi_{\alpha t н} = R \exp i\left(\omega t5 - k_1 x - i k_1 y\right) \tag{3.10}$$
которые затухают при $y \to -\infty$.

Согласно системе (3.5), $k = 0\left(u_{\alpha t н} = 0\right)$, а R может быть произвольным.

Примечание. В граничные условия при $y = -h$ должны быть подставлены

$$u_\alpha = u_{\alpha t},\ \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha t} + \varphi_{\alpha t н}. \tag{3.11}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.4) и (1.5), после некоторых преобразований, получим следующую систему шести уравнений для произвольных постоянных: $C_0, E_0, F_1, F_2, M_0, R_0$:

1) $ik\left(\nu_\beta + \dfrac{\tau_\beta^2}{\mu_0\mu_{2\beta}}\right)c_0 + k_1\tau_\beta E_0 = ik\left(\nu_\beta + \dfrac{\tau_\beta^2}{\mu_0\mu_{2\beta}}\right)A_0$

2) $\mu_{2\beta}E_0 - F_1 e^{-k_1 h} + F_2 e^{-k_1 h} = 0$

3) $\dfrac{\tau_\beta}{\mu_0\mu_{2\beta}}C_0 + E_0 - F_1 e^{-k_1 h} - F_2 e^{-k_1 h} = -\dfrac{\tau_\beta}{\mu_0\mu_{2\beta}}A_0,$

где $A_0 = Ae^{ikh}$; $C_0 = Ce^{-ikh}$; $E_0 = Ee^{-k_1 h}$

4) $i\left(Pc_{44}^{(\alpha)} + P\dfrac{\left(b_{15}^{(\alpha)}\right)^2}{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}} - k_1\dfrac{\bar{b}_{14}^{(\alpha)}\cdot\bar{b}_{15}^{(\alpha)}}{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}}\right)M_0 - h_0\left(i\bar{b}_{14}^{(\alpha)} - \bar{b}_{15}^{(\alpha)}\right)R_0 = 0$

5) $\dfrac{\bar{b}_{15}^{(\alpha)}}{\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}}M_0 + R_0 - F_1 e^{k_1 h} - F_2 e^{k_1 h} = 0$

6) $\bar{b}_{14}^{(\alpha)} ik_1 M_0 - k_1\mu_0\mu_{11}^{(\alpha)}R_0 - \mu_0\left(F_1 e^{k_1 h} - F_2 e^{k_1 h}\right) = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: 2006. Изд. ЕГУ, 491с.

Сведения об авторе:

Гараков Владимир Герасимович,
Канд.физ.-мат.наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении,
Тел.:(37410) 54 33 15, (37493) 33 81 66
E-mail: garakov@yandex.ru

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ КОМПОЗИТА В ВИДЕ ПАКЕТА ИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЧИСЛА УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Гаспарян А. В., Давтян З. А.

В работе при помощи рядов Фурье рассматривается задача об определении компонентов напряжённо-деформированного состояния композита, состоящего из конечного числа круговых цилиндров при антиплоской деформации.

Рассматривается задача о напряженном состоянии композита, представляющего собой кусочно-однородное цилиндрическое тело в виде пакета из произвольного конечного числа спаянных по боковым поверхностям круговых цилиндров с различными упругими и геометрическими характеристиками при антиплоской деформации. На крайних граничных поверхностях цилиндров приложены касательные силы, вызывающие антиплоскую деформацию. Требуется определить контактные напряжения и другие физико-механические характеристики задачи.

Решение указанной задачи при помощи рядов Фурье сводится к решению конечно-разностного неоднородного уравнения. Решение последнего, в свою очередь, сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

Аналогичная задача для упругих слоев рассмотрена в работе [1].

1. Пусть композит представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих колец

$$\Omega_k=\{-r_{k-1}\le r\le r_k,\quad -\pi<\theta\le\pi\}\quad (k=\overline{1,n})$$

с модулями сдвига G_k, спаянных по боковым поврхностям. Пусть далее к поверхностям $r=r_0$ и $r=r_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ соответственно, вызывающие антиплоскую деформацию, т. е.

$$\tau_{r\theta}\big|_{r=r_0}=\tau_0(x),\qquad \tau_{r\theta}\big|_{r=r_n}=\tau_n(\theta)\qquad (-\pi<\theta\le\pi) \tag{1.1}$$

Здесь $\tau_{r\theta}$ – компонента касательных напряжений. Требуется определить контактные напряжения и другие физико-механические характеристики задачи.

Выведем определяющие уравнения поставленной задачи. С этой целью рассмотрим k-ое кольцо пакета. Тогда для него придём к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w_k}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w_k}{\partial\theta^2}=0\quad (r_{k-1}<r<r_k)\\ G_k\dfrac{\partial w_k}{\partial r}\Big|_{r=r_{k-1}}=\tau_{k-1}(\theta),\quad G_k\dfrac{\partial w_k}{\partial r}\Big|_{r=r_k}=\tau_k(\theta)\ \ (-\pi<\theta\le\pi,\ k=\overline{1,n}).\end{cases} \tag{1.2}$$

где $w_k=w_k(r,\vartheta)$ – единственная отличная от нуля компонента смещений в направлении оси Oz, а $\tau_{k-1}(\theta)$ и $\tau_k(\theta)$ – неизвестные касательные контактные напряжения, соответственно, на окружностях $r=r_{k-1}$ и $r=r_k$ $(k=\overline{1,n})$ кольца.

Для решения граничной задачи (1.2) представим функции $w_k(r,\vartheta)$ и $\tau_k(\theta)$ в виде комплексного ряда Фурье [2]

$$w_k(r,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{w}_m^{(k)}(r)e^{im\theta},\qquad \tau_k(\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{\tau}_m^{(k)}e^{im\theta},\quad (k=\overline{1,n}), \tag{1.3}$$

где $\overline{w}_m^{(k)}(r)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}w_k(r,\theta)e^{-im\theta}d\theta,\qquad \overline{\tau}_m^{(k)}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\tau_k(\theta)e^{-im\theta}d\theta,\qquad (-\infty<m<\infty)$

– коэффициенты ряда Фурье функций $w_k(r,\vartheta)$ и $\tau_k(\theta)$.

Подставляя выражение (1.3) в (1.2), получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{w}_m^{(k)}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\overline{w}_m^{(k)}}{dr}-\dfrac{m^2}{r^2}\overline{w}_m^{(k)}=0 \qquad (r_{k-1}<r<r_k,\ k=\overline{1,n}) \\ G_k\dfrac{d\overline{w}_m^{(k)}}{dr}\Bigg|_{r=r_{k-1}}=\overline{\tau}_m^{(k-1)},\quad G_k\dfrac{d\overline{w}_m^{(k)}}{dr}\Bigg|_{r=r_k}=\overline{\tau}_m^{(k)}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Решение граничной задачи (1.4) представим в виде

$$\overline{w}_m^{(k)}=A_m^{(k)}r^m+B_m^{(k)}r^{-m} \qquad (m\neq 0,\quad r_{k-1}\le r\le r_k) \tag{1.5}$$

$$\overline{w}_0^{(k)}=A_0^{(k)}\ln r+B_0^{(k)} \qquad (m=0)$$

где коэффициенты $A_k^{(m)}$ и $B_k^{(m)}$ определяются при помощи матричного равенства

$$\begin{pmatrix} A_m^{(k)} \\ B_m^{(k)} \end{pmatrix}=\frac{1}{mG_k}\frac{1}{r_{k-1}^{\ m-1}r_k^{\ -m-1}-r_k^{\ m-1}r_{k-1}^{\ -m-1}}\begin{pmatrix} -r_{k-1}^{\ -m-1} & r_k^{\ -m-1} \\ -r_{k-1}^{\ m-1} & r_k^{\ m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\tau}_m^{(k)} \\ \overline{\tau}_m^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (k=\overline{1,n}) \tag{1.6}$$

Теперь условие непрерывности смещений на окружностях контакта $r=r_k$ колец Ω_k и Ω_{k+1} при помощи (1.5) примет вид

$$A_m^{(k)}r_k^{\ m}+B_m^{(k)}r_k^{\ -m}=A_m^{(k+1)}r_k^{\ m}+B_m^{(k+1)}r_k^{\ -m} \qquad (k=\overline{1,\ n-1}),$$

или же

$$\left(r_k^{\ m}\ r_k^{\ -m}\right)\begin{pmatrix} A_m^{(k)} \\ B_m^{(k)} \end{pmatrix}=\left(r_k^{\ m}\ r_k^{\ -m}\right)\begin{pmatrix} A_m^{(k+1)} \\ B_m^{(k+1)} \end{pmatrix} \ (k=\overline{1,n-1}). \tag{1.7}$$

Далее учитывая выражения (1.6) и (1.7), после несложных преобразований получим следующую систему конечно-разностных уравнений второго порядка относительно трансформантов Фурье контактных напряжений $\overline{\tau}_m^{(k)}$:

$$a_k^{(m)}\overline{\tau}_m^{(k-1)}+(r_{k+1}/r_k)^2a_{k+1}^{(m)}\overline{\tau}_m^{(k+1)}-(b_k^{(m)}+b_{k+1}^{(m)})\overline{\tau}_m^{(k)}=0 \ \ (k=\overline{1,n-1}). \tag{1.8}$$

Здесь $a_k^{(m)}=\dfrac{2}{G_k}\dfrac{r_k^{\ m-1}r_{k-1}^{\ m+1}}{r_k^{\ 2m}-r_{k-1}^{\ 2m}},\ \ b_k^{(m)}=\dfrac{1}{G_k}\dfrac{r_k^{\ 2m}+r_{k-1}^{\ 2m}}{r_k^{\ 2m}-r_{k-1}^{\ 2m}} \quad (k=\overline{1,n})$

Уравнение (1.8) представим в виде конечно-разностных уравнений первого поядка, полагая

$$a_k^{(m)}\overline{\tau}_m^{(k-1)}-b_k^{(m)}\overline{\tau}_m^{(k)}=\omega_m^{(k)} \tag{1.9}$$

$$(r_{k+1}/r_k)^2a_{k+1}^{(m)}\overline{\tau}_m^{(k+1)}-b_{k+1}^{(m)}\overline{\tau}_m^{(k)}=\chi_m^{(k+1)} \quad (k=\overline{1,n-1}). \tag{1.10}$$

Тогда (1.8) примет вид

$$\omega_m^{(k)}+\chi_m^{(k+1)}=0 \qquad (k=\overline{1,n-1}). \tag{1.11}$$

В итоге решение поставленной здесь задачи свелось к решению конечно-разностных уравнений первого порядка (1.9) и (1.10).

2. Решения определяющих конечно-разностных уравнений (1.9) и (1.10) построим методом, приведенным в [3]. (1.9) представим в виде

$$\overline{\tau}_m^{(k)}=\left[1-P_m(k)\right]\overline{\tau}_m^{(k-1)}+Q_m(k), \tag{2.1}$$

где $P_m(k)=\dfrac{b_k^{(m)}-a_k^{(m)}}{b_k^{(m)}},\qquad Q_m(k)=-\dfrac{\omega_m^{(k)}}{b_k^{(m)}} \quad (k=\overline{1,n-1})$

Поступая аналогичным образом как в [1], решение (2.1) представим так:

$$\overline{\tau}_m^{(k)}=-\prod_{j=1}^{k}\left[1-P_m(j)\right]\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_m^{(i)}}{b_i^{(m)}\prod\limits_{l=1}^{i}\left[1-P_m(l)\right]}-\overline{\tau}_m^{(0)}\right\} \ (k=\overline{1,n-1}) \tag{2.2}$$

Аналогичным образом получим решение уравнения (1.10)

$$\bar{\tau}_m^{(k)} = -\prod_{j=k}^{n-1} \frac{1}{1-\tilde{P}_m(j)} \left\{ \sum_{i=k}^{n-1} \frac{\chi_m^{(i+1)}}{(r_{k+1}/r_k)^2 a_{i+1}^{(m)} \prod_{l=i+1}^{n-1} \frac{1}{1-\tilde{P}_m(l)}} - \bar{\tau}_m^{(n)} \right\} \quad (k=\overline{1,n-1}) \tag{2.3}$$

$$\tilde{P}_m(k) = \frac{(r_{k+1}/r_k)^2 a_{k+1}^{(m)} - b_{k+1}^{(m)}}{(r_{k+1}/r_k)^2 a_{k+1}^{(m)}}$$

Теперь учитывая (1.11) и приравнивая выражения (2.2) и (2.3), относительно неизвестных $\omega_i^{(m)}$ $(i=\overline{1,n-1})$, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$-\sum_{i=1}^{k} A_i^{(m)} \frac{C_i^{(m)}}{C_k^{(m)}} \omega_m^{(i)} + \frac{\bar{\tau}_m^{(0)}}{C_k^{(m)}} = \sum_{i=k}^{n-1} B_i^{(m)} \frac{D_{i+1}^{(m)}}{D_k^{(m)}} \omega_m^{(i)} + \frac{\bar{\tau}_m^{(n)}}{D_k^{(m)}} \quad (k=\overline{1,n-1}), \tag{2.4}$$

где

$$A_i^{(m)} = G_i \frac{r_i^{2m} - r_{i-1}^{2m}}{r_i^{2m} + r_{i-1}^{2m}}, \ (i=\overline{1,k}) \quad B_i^{(m)} = \frac{G_{i+1}}{2} \frac{r_{i+1}^{2m} - r_i^{2m}}{r_{i+1}^{m+1} r_i^{m-1}} \ (i=\overline{k,n-1})$$

$$C_i^{(m)} = \prod_{j=1}^{i} \frac{r_j^{2m} + r_{j-1}^{2m}}{2 r_j^{m-1} r_{j-1}^{m+1}}, \ (i=\overline{1,k}) \quad D_i^{(m)} = \prod_{j=i}^{n-1} \frac{r_j^{2m} + r_{j+1}^{2m}}{2 r_{j+1}^{m+1} r_j^{m-1}} \ (i=\overline{k,n-1})$$

Систему (2.4) представим в виде

$$A_k^{(m)} \omega_k^{(m)} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_i^{(m)} C_i^{(m)}}{C_k^{(m)}} \omega_i + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{B_i^{(m)} D_{i+1}^{(m)}}{D_k^{(m)}} \omega_i^{(m)} = \frac{\bar{\tau}_m^{(0)}}{C_k^{(m)}} - \frac{\bar{\tau}_m^{(n)}}{D_k^{(m)}} \quad (k=\overline{1,n-1}) \tag{2.5}$$

Полагая

$$K_i^{(m)} = \prod_{j=1}^{i} \frac{r_j^{2m} + r_{j-1}^{2m}}{2 r_j^{m-1} r_{j-1}^{m+1}}, \tag{2.6}$$

получаем

$$D_{i+1}^{(m)} = \prod_{j=i+1}^{n-1} \frac{r_j^{2m} + r_{j+1}^{2m}}{2 r_{j+1}^{m-1} r_j^{m+1}} \left(\frac{r_j}{r_{j+1}} \right)^2 = \frac{K_n^{(m)}}{C_i^{(m)}} \frac{2 r_{i+1}^{m-1} r_i^{m+1}}{r_i^{2m} + r_{i+1}^{2m}} \left(\frac{r_{i+1}}{r_n} \right)^2,$$

$$D_k^{(m)} = \prod_{r=k}^{n-1} \frac{r_j^{2m} + r_{j+1}^{2m}}{2 r_{j+1}^{m-1} r_j^{m+1}} \left(\frac{r_k}{r_n} \right)^2 = \frac{K_n^{(m)}}{C_k^{(m)}} \left(\frac{r_k}{r_n} \right)^2 \qquad (i=\overline{k,n-1}; \ \ k=\overline{1,n-1}).$$

Тогда (2.5) примет вид

$$\sum_{i=1}^{k} A_i^{(m)} C_i^{(m)} \omega_i^{(m)} + \left(\frac{C_k^{(m)}}{r_k} \right)^2 \sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}^{(m)} r_i^2}{C_i^{(m)}} \omega_i^{(m)} = \bar{\tau}_m^{(0)} - \frac{\left(C_k^{(m)}\right)^2}{K_n^{(m)}} \left(\frac{r_n}{r_k} \right)^2 \bar{\tau}_m^{(n)} \qquad (k=\overline{1,n-1}). \tag{2.7}$$

Теперь положив

$$X_n^{(m)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{i+1}^{(m)}}{C_i^{(m)}} r_i^2 \omega_i^{(m)}, \tag{2.8}$$

получаем

$$\sum_{i=k}^{n-1} \frac{A_{i+1}^{(m)}}{C_i^{(m)}} r_i^2 \omega_i^{(m)} = X_n^{(m)} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{A_{i+1}^{(m)}}{C_i^{(m)}} r_i^2 \omega_i^{(m)}.$$

Тогда система (2.7) преобразуется в следующую систему линейных уравнений с левой треугольной матрицей:

$$\sum_{i=1}^{k} L_{ki}^{(m)} \omega_i^{(m)} = g_k^{(m)} \qquad (k=\overline{1,n-1}) \tag{2.9}$$

где

$$L_{ki}{}^{(m)}=\begin{cases}A_i{}^{(m)}C_i{}^{(m)}-\dfrac{(C_k{}^{(m)})^2}{C_i{}^{(m)}}\dfrac{r_i^2}{r_k^2}A_{i+1}{}^{(m)} & (i=\overline{1,k-1})\\ A_k{}^{(m)}C_k{}^{(m)} & (i=k)\end{cases}\qquad g_k{}^{(m)}=\bar\tau_0{}^{(m)}-\left(\frac{C_k{}^{(m)}}{r_k}\right)^2\left(X_n{}^{(m)}+\frac{\bar\tau_n{}^{(m)}r_n^2}{K_n{}^{(m)}}\right).$$

Решение системы (2.9) приведено в [1].

3. Рассмотрим частный случай, когда композит состоит из двух цилиндров, спаянных по боковым поверхностям. В этом случае из (2.7) или (2.9) можно определить $\omega_i^{(m)}$, а затем из (2.2) или (2.3) определится $\bar\tau_m^{(1)}$ через $\bar\tau_m^{(0)}$ и $\bar\tau_m^{(2)}$. При этом, $\tau_1(\theta)$ определится из (1.3).

Выражение $\tau_1(\theta)$ можно получить иным путем. Так как функции $W_1(r,\theta)$ и $W_2(r,\theta)$, следовательно G_1W_1 и G_2W_2 есть функции гармонические, соответственно, в кольцах,

$$\Omega_1=\{-r_0\le r\le r_1,\ -\pi<\theta\le\pi\}\quad \text{и}\quad \Omega_2=\{-r_1\le r\le r_2,\quad -\pi<\theta\le\pi\}$$

то согласно [4] существуют функции V_1 и V_2, гармонические соответственно в Ω_1 и Ω_2, такие, что

$$f_i(z)=f_i(re^{i\theta})=G_iW_i(re^{i\theta})+iV_i(re^{i\theta}),\qquad (i=1,2) \tag{3.1}$$

являются аналитическими в соответствующих кольцах Ω_1 и Ω_2. Следовательно, они представляются рядами Лорана

$$f_i(re^{i\theta})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m^{(i)}r^me^{im\theta}\quad (i=1,2),\ (r_1<r<r_2,\ -\pi<\theta\le\pi) \tag{3.2}$$

где $C_m^{(i)}$ – коэффициенты ряда Лорана функции $f_i(z)$. Для сопряженных функций $\overline{f}_i(z)$ имеем

$$\overline{f}_i(re^{i\theta})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{C}_m^{(i)}r^me^{-im\theta}\quad (i=1,2),\ (r_1<r<r_2,\ -\pi<\theta\le\pi) \tag{3.3}$$

Из соотношений (3.1) при помощи (3.2) и (3.3) получим

$$G_iW_i(re^{i\theta})=\operatorname{Re}f_i(re^{i\theta})=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[C_m^{(i)}r^m+\overline{C}_{-m}^{(i)}r^{-m}]e^{im\theta} \tag{3.4}$$

$$(i=1,2),\ (r_1<r,<r_2,\ -\pi<\theta\le\pi)$$

Далее граничные условия (1.2) для первого и второго цилиндров соответственно примут вид:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}m[C_m^{(1)}r_1^{m-1}-\overline{C}_{-m}^{(1)}r_1^{-m-1}]e^{im\theta}=\tau_1(\theta)\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}m[C_m^{(1)}r_0^{m-1}-\overline{C}_{-m}^{(1)}r_0^{-m-1}]e^{im\theta}=\tau_0(\theta)\end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}m[C_m^{(2)}r_2^{m-1}-\overline{C}_{-m}^{(2)}r_2^{-m-1}]e^{im\theta}=\tau_2(\theta)\\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}m[C_m^{(2)}r_1^{m-1}-\overline{C}_{-m}^{(2)}r_1^{-m-1}]e^{im\theta}=\tau_1(\theta)\end{cases} \tag{3.6}$$

Теперь разложив функции $\tau_j(\theta)$ $(j=0,1,2)$ в ряды Фурье

$$\tau_j(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k^{(j)}e^{ik\theta}\qquad (j=0,1,2),\ \ (-\pi<\theta\le\pi) \tag{3.7}$$

и приравнивая коэффициенты $e^{im\theta}$ в выражениях (3.5) и (3.6), получим

$$C_m^i=\frac{2}{m}\frac{d_m^{(i)}r_i^{m+1}-d_m^{(i-1)}r_{i-1}^{m+1}}{r_i^{2m}-r_{i-1}^{2m}}$$

$$C_{-m}^i=\frac{2}{m}\frac{d_m^{(i)}r_i^{m+1}r_{i-1}^{2m}-d_m^{(i-1)}r_i^{2m}r_{i-1}^{m+1}}{r_i^{2m}-r_{i-1}^{2m}}\qquad (i=1,2) \tag{3.8}$$

где $d_m^{(j)}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\tau_j(\theta)e^{-im\theta}d\theta,\quad (-\pi<\theta\le\pi),\quad (j=0,1,2)$

Исходя из (3.7) и (3.8) и принимая во внимание условие контакта двух цилиндров $(r = r_1)$

$$W_1\big|_{r=r_1} = W_2\big|_{r=r_1}, \tag{3.9}$$

после некоторых преобразований получим

$$d_m^{(1)} = \frac{2Gd_m^{(0)}\rho_0^{m+1}(1-\rho_2^{2m}) - 2d_m^{(2)}\rho_2^{m+1}(1-\rho_0^{2m})}{G(1+\rho_0^{2m})(1-\rho_2^{2m}) - (1+\rho_2^{2m})(1-\rho_0^{2m})} \tag{3.10}$$

где $G = G_2/G_1$, $\rho_0 = r_0/r_1$, $\rho_2 = r_2/r_1$.

Теперь подставляя значения (3.10) в (3.7), можно определить значения контактного давления $\tau_1(\theta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаспарян А. В., Мхитарян С. М. О напряженном состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоев при антиплоской деформации.//Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10–20.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1966. 707 с.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 375 с.
4. Гурвиц А, Курант Р. Теория функций. М: Наука, 1968. 648 с.

Сведения об авторах:

Гаспарян Ануш Вараздатовна,
младший научный сотрудник Института механики НАН Армении, (+37410) 52-48-90,
E-mail: anush@mechins.sci.am

Давтян Завен Азибекович,
канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, (+37410) 52-48-90, E-mail: anush@mechins.sci.am

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Геворкян Г. А., Мартиросян А. Б., Погосян М. З.

Предлагается модификация метода конечных элементов прямоугольной формы, которая предоставляет возможность при решении задач изгиба пластин учесть условия непрерывности изгибающих, крутящих моментов и перерезывающих сил, кинематических и статических граничных условий для всех точек контура срединной плоскости пластины.

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент срединной плоскости пластины с размерами $a \times b$. В каждой узловой точке s-го элемента введем по четыре обобщенных перемещения: w^s – перемещение в направлении оси z, два угла поворота $\theta^s = \partial w^s / \partial y$, $\omega^s = -\partial w^s / \partial x$ соответственно вокруг осей x, y и угол сдвига $\gamma^s = \partial^2 w^s / \partial x \partial y$.

Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем бикубическим полиномом, содержащим 16 неизвестных параметров:

$$w^s(x, y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \Phi_i(x, y), \tag{1}$$

где $\Phi_i(x, y), i \in \{1, 2, ..., 16\}$ – функции Эрмита, выражения которых приведены в [2].

Изгибающие моменты и перерезывающие силы определяются формулами [5]:

$$M_x = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}), M_y = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}), \tag{2}$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}), Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}). \quad (3$$

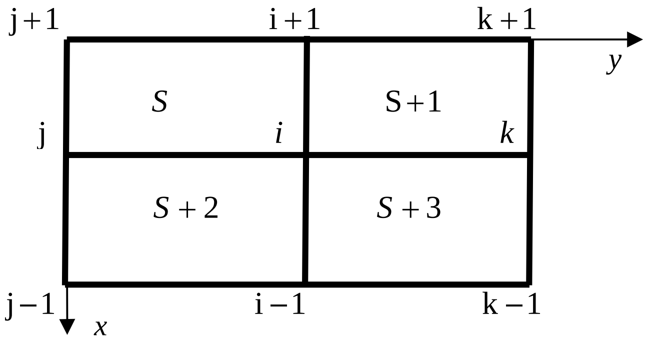


Рис. 1. i-ый узел

Функция w^s, задаваемая формулой (1), обеспечивает непрерывность обобщенных перемещений $f_s = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$, но не обеспечивает непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил. Условия непрерывности этих величин в i-ом узле (рис. 1), задаются соотношениями:

$$M_x^s = M_x^{s+1}, \quad M_x^s = M_x^{s+3}, \quad M_x^s = M_x^{s+2}, \quad M_y^s = M_y^{s+1}, \quad M_y^s = M_y^{s+3}, \quad M_y^s = M_y^{s+2},$$

$$Q_x^s = Q_x^{s+1}, \quad Q_x^s = Q_x^{s+3}, \quad Q_x^s = Q_x^{s+2}, \quad Q_y^s = Q_y^{s+1}, \quad Q_y^s = Q_y^{s+3}, \quad Q_y^s = Q_y^{s+2},$$

а вдоль границы разделов смежных сечений $i+1, i$ и j, i, – соотношениями:

$$M_y(\xi, b) = M_y(\xi, 0), M_x(a, \eta) = M_x(0, \eta), Q_y(\xi, b) = Q_y(\xi, 0), Q_x(a, \eta) = Q_x(0, \eta).$$

С учетом формул (1), (2) и (3), из этих условий соответственно находим [1]

$$-3aw_3^j + abw_4^j + 3aw_3^k + abw_4^k - 3bw_2^{i+1} - abw_4^{i+1} + 3bw_2^{i-1} - abw_4^{i-1} = 0, \tag{4}$$

$$2w_1^j + bw_2^j + 2w_1^k - bw_2^k - 2w_1^{i+1} + aw_3^{i+1} - 2w_1^{i-1} - aw_3^{i-1} = 0, \tag{5}$$

$$2aw_3^j - abw_4^j + 2aw_3^k + abw_4^k + 3w_1^{i-1} + aw_3^{i-1} - 3w_1^{i+1} + aw_3^{i+1} = 0, \tag{6}$$

$$3w_1^j + bw_2^j - 3w_1^k + bw_2^k + 2bw_2^{i+1} + abw_4^{i+1} + 2bw_2^{i-1} - abw_4^{i-1} = 0\,. \quad (7)$$

Легко видеть, что при выполнении условий (5) – (7), условие (4) тождественно выполняется. Перепишем все условия (5) – (7) в виде системы уравнений, получим

$$Hq = 0\,, \quad (8)$$

где H – матрица порядка $\bar{n} \times 4n$, $\bar{n}$ – количество необходимых условий (5) – (7).

Пусть n – общее число узлов пластины, $w = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_1^4, ..., w_n^1, w_n^2, w_n^3, w_n^4)^T$ – вектор узловых перемещений, $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_1^4, ..., P_n^1, P_n^2, P_n^3, P_n^4,)^T$ – вектор узловых нагрузок, E – модуль упругости, h – толщина пластины, ν – коэффициент Пуассона, $D = Eh^3 \big/ 12(1-\nu^2)$, $K = \dfrac{D}{ab}\left\| K_{ij} \right\|$ – матрица жесткости для всей пластины.

Обозначим

$$w_1^1 + K_{12}^{(0)} w_1^2 + K_{13}^{(0)} w_1^3 + K_{14}^{(0)} w_1^4 + ... + K_{1(4n-3)}^{(0)} w_n^1 + K_{1(4n-2)}^{(0)} w_n^2 + K_{1(4n-1)}^{(0)} w_n^3 + K_{1(4n)}^{(0)} w_n^4 = -r_1\,,$$

$$w_1^2 + K_{23}^{(1)} w_1^3 + K_{24}^{(1)} w_1^4 + K_{25}^{(1)} w_2^1 + ... + K_{2(4n-3)}^{(1)} w_n^1 + K_{2(4n-2)}^{(1)} w_n^2 + K_{2(4n-1)}^{(1)} w_n^3 + K_{2(4n)}^{(1)} w_n^4 = -r_2\,,$$

.... (9)

$$w_n^3 + K_{(4n-1)(4n)}^{(4n-3)} w_n^4 = -r_{4n-1}\,,$$

где

$$r = (r_1, r_2, ..., r_{4n-1})^T;\; K_{ii}^{(0)} = -K_{ii}, i \in M = \{1, 2, ..., 4n\} \;\; K_{1j}^{(0)} = -K_{1j},\, j \in \{2, 3, ..., 4n\};$$

$$K_{ij}^{(r)} = -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \bar{M} = \{1, 2, ..., 4n-1\}, i \in \{r, ..., 4n\},\, j \in \{r+1, ..., 4n\};$$

$$w_{ii} = K_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (K_{si}^{(s)})^2 - 1, i \in \bar{M}\};\; w_{(4n)4n} = K_{(4n)4n}^{(0)} - \sum_{i=1}^{4n-1} (K_{i(4n)}^{(4n)})^2\,.$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [3], для определения искомых векторов получим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min\{0{,}5 w^T R w + C^T w \,|\, Aw < 0\,,\; Hq = 0\,, \text{краевые условия}\} \quad (10)$$

где $R = \dfrac{D}{ab}\left\| w_{ij} \right\|$ – диагональная матрица порядка $4n$, $A = (A_1, A_2, ..., A_{4n})$ – матрица коэффициентов обозначений (9), $A_J = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{4n-1,j})^T,\, j \in \{1, 2, ..., 4n\}$, $C = -P$.

Рассмотрим три возможных случая граничных условий:

1.Край пластинки защемлен.

Если положить, что ось x или y s-го конечного элемента пластины совпадает с защемленным краем, то граничные условия будут [3]:

$$w^s = 0\,|_{y=0,b}\,,\;\; w^s = 0\,|_{x=0,a}\,, \quad (11)$$

$$\theta^s = 0\,|_{y=0,b}\,,\;\; \omega^s = 0\,|_{x=0,a}\,. \quad (12)$$

Исходя из того, что обобщенные перемещения w^s, θ^s и ω^s на контуре срединной плоскости пластины изменяются кубической параболой, для выполнения условий (11) и (12) во всех точках контура срединной плоскости пластины предположим

$$w^s(0, b/4) = 0\,,\quad w^s(0, 3b/4) = 0\,,\; w^s(a, b/4) = 0\,,\quad w^s(a, 3b/4) = 0\,, \quad (13)$$

$$w^s(a/4, 0) = 0\,,\quad w^s(3a/4, 0) = 0\,,\; w^s(a/4, b) = 0\,,\; w^s(3a/4, b) = 0\,, \quad (14)$$

$$\theta^s(a/4, 0) = 0\,,\quad \theta^s(3a/4, 0) = 0\,,\; \theta^s(a/4, b) = 0\,,\quad \theta^s(3a/4, b) = 0\,, \quad (15)$$

$$\omega^s(0, b/4) = 0\,,\quad \omega^s(0, 3b/4) = 0\,,\; \omega^s(a, b/4) = 0\,,\quad \omega^s(a, 3b/4) = 0\,. \quad (16)$$

Принимая во внимание формулу (1) , из соотношений (13)–(16) находим

$$w_2^s = 0\,,\quad w_6^s = 0 \;\text{ на линии }\; x = 0\,;\quad w_{10}^s = 0\,,\; w_{14}^s = 0 \;\text{ на линии }\; x = a\,, \quad (17)$$

$$w_3^s = 0\,,\quad w_{15}^s = 0 \;\text{ на линии }\; y = 0\,;\quad w_7^s = 0\,,\; w_{11}^s = 0 \;\text{ на линии }\; y = b\,, \quad (18)$$

$$w_4^s = 0\,,\quad w_8^s = 0\,,\quad w_{12}^s = 0\,,\ w_{16}^s = 0\,. \tag{19}$$

2.Край пластинки свободно оперт.

Соответственно вместе с условиями (11) должны иметь место и следующие граничные условия [3]:

$$\frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2} = 0\,|_{x=0,a}\,,\ \frac{\partial^2 w^s}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^s}{\partial x^2} = 0\,|_{y=0,b}\,. \tag{20}$$

Для узловых точек контура срединной плоскости пластины условия (20) примут вид:

$$M_x^s(0,0) = 0\,,\ M_x^s(0,b) = 0\,,\ M_x^s(a,b) = 0\,,\ M_x^s(a,0) = 0\,, \tag{21}$$

$$M_y^s(0,0) = 0\,,\ M_y^s(0,b) = 0\,,\ M_y^s(a,b) = 0\,,\ M_y^s(a,0) = 0\,. \tag{22}$$

Принимая во внимание формулы (1) и (2), из соотношений (21) и (22) находим:

$$a^2(6w_1^s - 4aw_3^s - 6w_{13}^s - 2aw_{15}^s) + \nu b^2(6w_1^s + 4bw_2^s - 6w_5^s + 2bw_6^s) = 0\,, \tag{23}$$

$$a^2(6w_5^s - 4aw_7^s - 6w_9^s - 2aw_{11}^s) - \nu b^2(6w_1^s + 2bw_2^s - 6w_5^s + 4bw_6^s) = 0\,, \tag{24}$$

$$a^2(6w_5^s - 2aw_7^s - 6w_9^s - 4aw_{11}^s) - \nu b^2(6w_9^s - 4bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 2bw_{14}^s) = 0\,, \tag{25}$$

$$a^2(6w_1^s - 2aw_3^s - 6w_{13}^s - 4aw_{15}^s) + \nu b^2(6w_9^s - 2bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 4bw_{14}^s) = 0\,, \tag{26}$$

$$b^2(6w_1^s + 4bw_2^s - 6w_5^s + 2bw_6^s) + \nu a^2(6w_1^s - 4aw_3^s - 6w_{13}^s - 2aw_{15}^s) = 0\,, \tag{27}$$

$$b^2(6w_1^s + 2bw_2^s - 6w_5^s + 4bw_6^s) - \nu a^2(6w_5^s - 4aw_7^s - 6w_9^s - 2aw_{11}^s) = 0\,, \tag{28}$$

$$b^2(6w_9^s - 4bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 2bw_{14}^s) - \nu a^2(6w_5^s - 2aw_7^s - 6w_9^s - 4aw_{11}^s) = 0\,, \tag{29}$$

$$b^2(6w_9^s - 2bw_{10}^s - 6w_{13}^s - 4bw_{14}^s) + \nu a^2(6w_1^s - 2aw_3^s - 6w_{13}^s - 4aw_{15}^s) = 0\,. \tag{30}$$

Для выполнения условий (20), для всех точек контура пластины предположим

$$M_x^s(0,b/4) = 0\,,\ M_x^s(0,3b/4) = 0\,,\ M_x^s(a,b/4) = 0\,,\ M_x^s(a,3b/4) = 0\,, \tag{31}$$

$$M_y^s(a/4,0) = 0\,,\ M_y^s(3a/4,0) = 0\,,\ M_y^s(a/4,b) = 0\,,\ M_y^s(3a/4,b) = 0\,. \tag{32}$$

Принимая во внимание формулы (1) и (2), из соотношений (31) и (32) находим:

$$\begin{gathered} b^2(162w_1^s + 27bw_2^s - 108aw_3^s + 18abw_4^s + 30w_5^s - 9bw_6^s - 20aw_7^s - 6abw_8^s - \\ -30w_9^s + 9bw_{10}^s - 10aw_{11}^s - 3abw_{12}^s - 162w_{13}^s - 27bw_{14}^s - 54aw_{15}^s + 9abw_{16}^s) + \\ +\nu a^2(96w_1^s + 80bw_2^s - 96w_5^s + 16bw_6^s) = 0\,, \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} b^2(30w_1^s + 9bw_2^s - 20aw_3^s + 6abw_4^s + 162w_5^s - 27bw_6^s - 108aw_7^s - 18abw_8^s - \\ -162w_9^s + 27bw_{10}^s - 54aw_{11}^s - 9abw_{12}^s - 30w_{13}^s - 9bw_{14}^s - 10aw_{15}^s + 3abw_{16}^s) - \\ -\nu a^2(96w_1^s + 16bw_2^s - 96w_5^s + 80bw_6^s) = 0\,, \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} b^2(162w_1^s + 27bw_2^s - 54aw_3^s + 9abw_4^s + 30w_5^s - 9bw_6^s - 10aw_7^s - 3abw_8^s - \\ -30w_9^s + 9bw_{10}^s - 20aw_{11}^s - 6abw_{12}^s - 162w_{13}^s - 27bw_{14}^s - 108aw_{15}^s + 18abw_{16}^s) + \\ +\nu a^2(96w_9^s - 16bw_{10}^s - 96w_{13}^s - 80bw_{14}^s) = 0\,, \end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered} b^2(30w_1^s + 9bw_2^s - 10aw_3^s + 3abw_4^s + 162w_5^s - 27bw_6^s - 54aw_7^s - 9abw_8^s - \\ -162w_9^s + 27bw_{10}^s - 108aw_{11}^s - 18abw_{12}^s - 30w_{13}^s - 9bw_{14}^s - 20aw_{15}^s + 6abw_{16}^s) - \\ -\nu a^2(96w_9^s - 80bw_{10}^s - 96w_{13}^s - 16bw_{14}^s) = 0\,, \end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered} a^2(162w_1^s + 108bw_2^s - 27aw_3^s + 18abw_4^s - 162w_5^s + 54bw_6^s + 27aw_7^s + 9abw_8^s - \\ -30w_9^s + 10bw_{10}^s - 9aw_{11}^s - 3abw_{12}^s + 30w_{13}^s + 20bw_{14}^s + 9aw_{15}^s - 6abw_{16}^s) + \\ +\nu b^2(96w_1^s - 80bw_{13}^s - 96w_3^s - 16bw_{13}^s) = 0\,, \end{gathered} \tag{37}$$

$$a^2(30w_1^s + 20bw_2^s - 9aw_3^s + 6abw_4^s - 30w_5^s + 10bw_6^s + 9aw_7^s + 3abw_8^s -$$

$$-162w_9^s+54bw_{10}^s-27aw_{11}^s-9abw_{12}^s+162w_{13}^s+108bw_{14}^s+27aw_{15}^s-18abw_{16}^s)-$$
$$-\nu b^2(96w_1^s-16bw_3^s-96w_{13}^s-80bw_{15}^s)=0\,, \tag{38}$$
$$a^2(162w_1^s+54bw_2^s-27aw_3^s+9abw_4^s-162w_5^s+108bw_6^s+27aw_7^s+18abw_8^s-$$
$$-30w_9^s+20bw_{10}^s-9aw_{11}^s-6abw_{12}^s+30w_{13}^s+10bw_{14}^s+9aw_{15}^s-3abw_{16}^s)-$$
$$-\nu b^2(96w_5^s-80bw_7^s-96w_9^s-16bw_{11}^s)=0\,, \tag{39}$$
$$a^2(30w_1^s+10bw_2^s-9aw_3^s+3abw_4^s-30w_5^s+20bw_6^s+9aw_7^s+6abw_8^s-$$
$$-162w_9^s+108bw_{10}^s-27aw_{11}^s-18abw_{12}^s+162w_{13}^s+54bw_{14}^s+27aw_{15}^s-9abw_{16}^s)+$$
$$+\nu b^2(96w_5^s-16bw_7^s-96w_9^s-80bw_{11}^s)=0\,. \tag{40}$$

3.*Свободный край.*

Соответственно вместе с условием (20) имеем и следующие граничные условия [3]:

$$R_x^s=\frac{\partial^3 w^s}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w^s}{\partial y^3}=0\,|_{x=0,a}\,,\; R_y^s=\frac{\partial^3 w^s}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w^s}{\partial x^3}=0\,|_{y=0,b}\,. \tag{41}$$

Для узловых точек и для всех точек контура срединной плоскости пластины граничные условия (41) перепишутся в аналогичном виде (21), (22) и (31), (32).

Пример 1. Рассмотрим жестко защемленную квадратную пластину, загруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Для решения задачи используем сетку 4×4 (рис. 2).

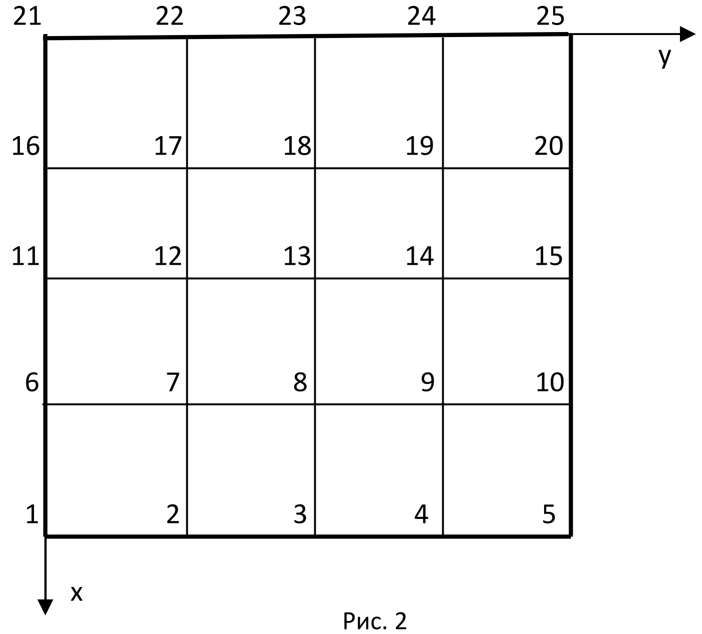


Рис. 2

Задача решена для следующих случаев.

- С граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины:

$$w_i^1=0,\; i\in\{1,2,\ldots,6,10,11,15,16,20,\ldots,25\}\,, \tag{42}$$
$$w_i^2=0,\; i\in\{1,5,6,10,11,15,16,20,21,25\}\,, \tag{43}$$
$$w_i^3=0,\; .\,i\in\{1,2,\ldots,5,21,\ldots,25\}\,. \tag{44}$$

- С граничными условиями для узловых точек контура срединной плоскости пластины с учетом непрерывностей изгибающих моментов и перерезывающих сил.
  При расчете данных, кроме соотношений (42)–(44), учтены также условия непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил (5)–(7) для узлов $i\in\{7,8,9,12,13,14,17,18,19\}$.
- С граничными условиями для всех точек контура срединной плоскости пластины. С учетом непрерывностей изгибающих моментов и перерезывающих сил.

- При расчете данных, кроме соотношений (42)–(44), (5)–(7), учтены также условия (17), (18) и (19), которые представляются в виде:

$$w_i^2 = 0,\ i \in \{1, 2, ..., 5, 21, 22, ..., 25\}, \tag{45}$$

$$w_i^3 = 0,\ i \in \{1, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 25\}, \tag{46}$$

$$w_i^4 = 0,\ i \in \{1, 2, ..., 6, 10, 11, 15, 16, 20, ..., 25\}. \tag{47}$$

Принимая во внимание, что сторона квадрата представлена в виде $c = 4a = 4b$, значение перемещения в точке 13 (максимальный прогиб) и решение Навье соответственно составляют

$$0.0013299\, qc^4/D,\ 0.001303\, qc^4/D,\ 0.0013001\, qc^4/D,\ 0.00126\, qc^4/D.$$

Значения изгибающих моментов M_x, M_y и решение Навье в узле 13 соответственно составляют

$$0.026314qc^2,\ 0.02592qc^2,\ 0.025703qc^2,\ 0.0231qc^2.$$

Значения изгибающего момента M_x в узле 3 и M_y в узле 11, а также решение Навье соответственно составляют $0.046711qc^2$, $0.047964qc^2$, $0.04834qc^2$, $0.0513qc^2$.

Пример 2. Равномерно нагруженная свободно опертая квадратная пластина. По аналогии примера 1, решим эту задачу для тех же трех случаев.

При расчете данных, в первом случае, кроме соотношений (42), (45) и (46), учтены также условия (20), которые представляются в виде (23)–(30). При расчете данных, во втором случае кроме учтенных соотношений первого случая, учтены также и условия (5)–(7) для узлов $i \in \{7, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19\}$. При расчете данных, в третьем случае, кроме учтенных соотношений второго случая, учтены также соотношеия (33)–(40).

Значение перемещения в узле 13 (максимальный прогиб) и решение Навье соответственно составляют $0.0037\, qc^4/D$, $0.003701 qc^4/D$, $0.003705\, qc^4/D$, $0.00406 qc^4/D$.

Значения изгибающих моментов M_x, M_y и решение Навье в узле 13 соответственно составляют $0.04616qc^2$, $0.046158qc^2$, $0.04512qc^2$, $0.0479qc^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геворкян Г.А., Севян С.Л., Барсегян В.Р., Мехрабекян Н.Р. Учет условий непрерывности изгибающих моментов и перерезывающих сил при решении задач изгиба пластин методом конечных элементов. / Сб. научн. работ ЕГУАС.– Ереван: 2009.- Том II (35) . С. 34-42.
2. Барсегян В.Р., Геворкян Г.А. Учет непрерывности напряжений при решении задач изгиба пластин методом конечных элементов. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. N 1. С.54-62.
3. Тимошенко С.П. и Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Госфизматлит, 1963. 636 с.

Сведения об авторах:

Геворкян Гагик Аршалуйсович – док. физ.-мат. наук, профессор (ЕГУАС), (093) 22 92 53
Мартиросян Арсен Борисович – к. т. наук, (ЕГУАС), (094) 77 66 19
Погосян Манвел Захарович – к. т. наук, доцент (ЕГУАС), (091) 30 42 86

СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН-ПОЛОС ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЁТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Геворкян Г.З.

Рассмотрена задача статической устойчивости ортотропных пластин-полос переменной толщины при учете поперечного сдвига при различных граничных условиях. Полученная система уравнений устойчивости решается численно методами коллокаций и Ритца при различных законах изменения толщины полосы и упругих постоянных. Результаты вычислений при некоторых параметрах сравниваются с известными точными решениями.

Рассмотрим ортотропную пластину-полосу переменной толщины $h(x)$, бесконечную вдоль оси Oy и длины l по оси Ox. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины. Координатные оси параллельны главным направлениям анизотропии материала пластины-полосы. На пластину-полосу кроме сил на концах может действовать также распределенная нагрузка по оси Ox, например собственный вес.

Для решения задачи используем линеаризованные уравнения устойчивости, полученные из уравнений изгиба известным способом [1], [2]. Поперечные сдвиги будем определять на основе формул, предложенных в [3]

Вводя безразмерные величины по формулам

$$h = h_0 H, \quad s = h_0 / l, \quad w = h_0 f, \quad \varphi_1 = B_{11}\varphi \quad x = l\overline{x},$$
$$a_{55}B_{11} = \chi, \quad \rho = \frac{B_{11}\overline{\rho}}{h_0 g}, \quad P = B_{11}\overline{P}h_0, \tag{1}$$

где P – сила, действующая по оси Ox, ρ – плотность объемной силы, φ_1 – функция, учитывающая поперечные сдвиги, w – прогиб, a_{55}, B_{11} – упругие постоянные [1]. χ =0 соответствует классической постановке задачи.

Тогда уравнения устойчивости в беразмерном виде будут:

$$\left(H^2 s^3 \frac{d^2 H}{dx^2} + 12k_1 s\overline{P} + 12k_2 \int_x^1 \rho(t)H(t)dt \right) \frac{d^2 f}{dx^2} - H\left[8 + s^2 \chi H \frac{d^2 H}{dx^2} \right] \frac{d\varphi}{d\overline{x}} - 16 \frac{dH}{d\overline{x}} \varphi = 0$$
$$H^2 \frac{\partial^3 f}{\partial \overline{x}^3} + 2H \frac{dH}{d\overline{x}} \frac{d^2 f}{d\overline{x}^2} - \frac{H^2 \chi}{s} \frac{d^2 \varphi}{d\overline{x}^2} - \frac{2H\chi^2}{s} \frac{dH}{d\overline{x}} \frac{d\varphi}{d\overline{x}} + \frac{8}{s^3}\varphi = 0 \tag{2}$$

где введены коэффициенты k_1 и k_2, которые позволяют учитывать и вклад силы на конце, и вклад объемной силы. При $k_1 = 1, k_2 = 0$ потеря устойчивости происходит только под действием силы на конце пластины-полосы, а при $k_1 = 0, k_2 = 1$–только под действием объемной силы. При совместном действии обеих сил одну из них следует задавать, а другую найти.

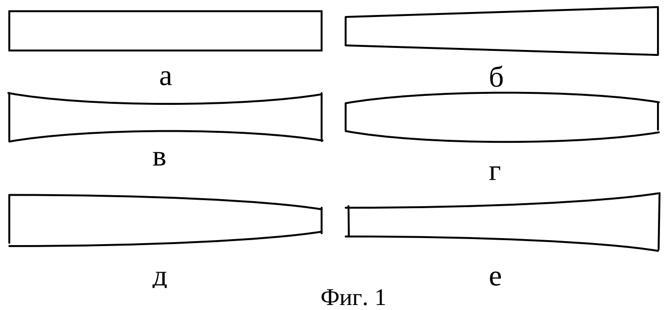
Перемещение, усилие и момент в безразмерном виде будут:

$$u_x = z\left(s\frac{df}{dx} - \chi\varphi \right), \quad N_x = s^3 H \frac{dH}{dx} - \chi s^2 H \frac{dH}{dx}\frac{d\varphi}{dx} - 8\varphi, \quad M_x = s\frac{d^2 w}{dx^2} - \chi\frac{d\varphi}{dx} \tag{3}$$

Рассмотрим пластины-полосы переменной толщины, для которых безразмерная толщина $H(x)$ изменяется по законам (фиг. 1). Все они имеют одинаковую площадь поперечного сечения и, при переменности толщины, толстая часть в два раза больше тонкой.

$$s = 0.1, \; а)\, H(x) = 1, \; б)\, H(x) = 2(1 + x)/3, \; в)\, H(x) = 3(x - 0.5)^2 + 0.75 \tag{4}$$
$$г)\, H(x) = 1.2[1 - 2(x - 0.5)^2], \; д)\, H(x) = 0.6(2 - x^2), \; е)\, H(x) = 0.75(1 + x^2),$$

В случае постоянной толщины и без учета поперечного сдвига решение уравнений (2) можно получить аналитически. В общем случае они решаются численно. Для численного решения применяется модифицированный метод коллокаций и вторая форма метода Ритца [5] и, если расхождение решений не превосходит 0,1%, результат считается окончательным.



Фиг. 1

1. Рассмотрим случай, когда оба конца пластины-полосы шарнирно закреплены. Граничные условия имеют вид:

$$f\Big|_{x=0,1}=0 \quad (w=0), \quad \left(s\frac{d^2 f}{dx^2}-\chi\frac{d\varphi}{dx}\right)\Bigg|_{x=0,1}=0 \quad \left(M_x=0\right) \tag{5}$$

Для решения методом Ритца, функции f и φ представляем в виде

$$f=\sum_{i=1}^{n} a_i \sin i\pi x, \quad \varphi=\sum_{i=1}^{n} b_i \cos i\pi x\ , \tag{6}$$

которые удовлетворяют граничным условиям. Подставляя эти функции в уравнения (2) и приравнивая работу фиктивных нагрузок на виртуальных перемещениях к нулю (умножаем первое уравнение на $\sin i\pi x$, второе – на $\cos i\pi x$ $(i=1,2,...,n)$ и интегрируем по x от 0 до 1), получим однородную систему $2n$ уравнений относительно a_i, b_i.

Для решения модифицировнным методом коллокаций функции f и φ берем в виде

$$f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad \varphi=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \tag{7}$$

В качестве точек коллокаций берем нули смещённых полиномов Чебышева $T_n(2x-1)$, $x_k=\left[1+\cos\dfrac{\pi(k-1/2)}{n}\right]/2$. Удовлетворяя в точках коллокаций уравнениям (2), а в концевых точках граничным условиям, получим однородную систему $2n+4$ уравнений относительно a_i, b_i.

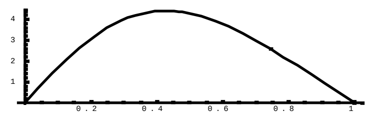
Приравнивая определители этих систем нулю, получим критические значения сил, при которых происходит потеря устойчивости.

После определения критических значений можно определить и вид функций f и φ соответствующих этим значениям. Для этого надо полученные уравнения разделить на один из коэффициентов a_m или b_m, перевести соответствующий столбец в правую часть и отбросить одно из уравнений. Решая эти уравнения, можно с точностью постоянного множителя определить функции f и φ.

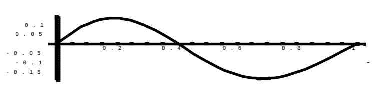
В табл. 1 и 2 приведены безразмерные значения первых трех критических значений при $k_1=1,\ k_2=0$ и $k_1=0,\ k_2=1$ соответственно, при $\chi=0,3,10.$ В качестве объемной силы учитывается сила тяжести.

При решении методом Ритца при $n=3$ и при решении методом коллокаций при $n=6$ первое критическое значение отличается от последующих менее 0,1%, а при $n\geq 6$ для метода Ритца и $n\geq 9$ для метода коллокаций, второе и третье критические значения меняются менее на 0,1%.

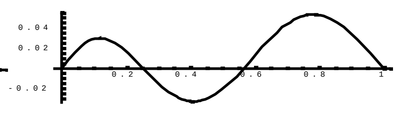
На фиг. 1–3 $k_1=1,\ k_2=0$, а на фиг. 4–6 $k_1=0,\ k_2=1$ при $H(x)=0.75(1{+}x^2)$ приведён вид функции f при первых трех критических значениях.



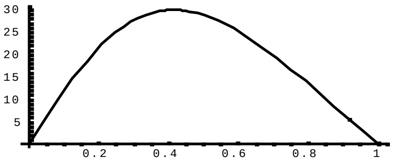
Фиг. 1



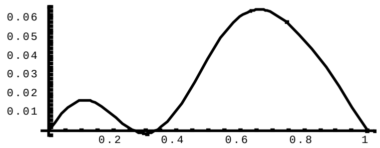
Фиг. 2



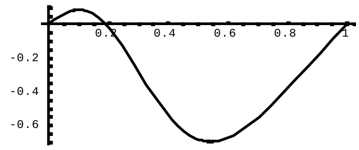
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Таблица 1

χ=0	1	2	3
H(x)=1	0.008225	0.03290	0.07403
2(1+x)/3	0.007168	0.02841	0.06464
3*(.25+(x-.5)^2)	0.004691	0.02571	0.06270
2.4(.5-(x-.5)^2)	0.010775	0.03147	0.06670
0.6(2-x^2)	0.0078765	0.02918	0.06480
0.75(1.+x^2)	0.006250	0.02700	0.06312
χ=3	1	2	3
H(x)= 1	0.007930	0.02865	0.05554
2(1+x)/3	0.006921	0.02494	0.04834
3(0.25+(x-0.5)^2)	0,004418	0.02220	0.04673
2.4(0.5-(x-.05)^2)	0.01032	0.02734	0.05024
0.6(2-x^2)"	0.007559	0.02550	0.04871
0.75(1.+x^2)	0.006061	0.02378	0.04700
χ=10	1	2	3
H(x)=1	0.006597	0.01656	0.02298
2(1+x)/3	0.005793	0.01448	0.01965
3(0.25+(x-0.5)^2)	0.003857	0.01330	0.01934
2.4(0.5-(x-.05)^2)	0.008252	0.01546	0.02170
0.6(2-x^2)	0.006279	0.01460	0.01926
0.75(1.+x^2)	0.005147	0.01405	0.01962

Таблица 2

χ=0	1	2	3
H(x)=1	0.001580	0.006823	0.01587
2(1+x)/3	0.0020660 0.001034	0.00883 0.004418	0.02034 0.01023
3(0.25+(x-0.5)^2)	0.0007530	0.005175	0.01323
2.4(0.5-(x-.05)^2)	0.001890	0.006916	0.01517
0.6(2-x^2)	0.002216 0.001112	0.009061 0.004594	0.02068 0.01045
0.75(1.+x^2)	0.001860 0.0009234	0.008119 0.004667	0.01961 0.01255
χ=3	1	2	3
H(x)=1	0.001514	0.005741	0.01088
2(1+x)/3	0.001999 0.0009905	0.007553 0.003729	0.01442 0.007175
3(0.25+(x-0.5)^2)	0.0008667	0.004434	0.009582
2.4(0.5-(x-.05)^2)	0.001815	0.005562	0.009269
0.6(2-x^2)"	0.002140 0.001068	0.007665 0.003603	0.01402 0.007161
0.75(1.+x^2)	0.001804 0.0008720	0.007093 0.003539	0.01423 0.006976

χ=10	1	2	3
H(x)=1,	0.001514	0.005741	0.01088
2(1+x)/3	0.001858 0.00090043	0.00556 0.002677	0.00831 0.004175
3(0.25+(x-0.5)^2)	0.0008573	0.003420	0.006249
2.4(0.5-(x-.05)^2)	0.001568	0.003186	0.004037
0.6(2-x^2)	0.001965 0.0009655	0.005491 0.002559	0.007601 0.003668
0.75(1.+x^2)	0.001693 0.0008043	0.005431 0.002710	0.008418 0.004660

В табл.2 в клетках, содержащих две строки, первая строка соответствует случаю, когда толстая часть находится внизу, вторая –тонкая.

2. Рассмотрим случай, когда один конец пластины-полосы защемлен, а на другом действует осевая сжимающая сила. Граничные условия имеют вид:

$$\text{при } x=0 \quad f=0 \quad (w=0), \quad \left(s\frac{df}{dx}-\chi\varphi\right)=0 \quad \left(u_x=0\right) \quad \text{или } \frac{df}{dx}=0 \tag{8}$$

при $x=1$

$$\left(s\frac{d^2 f}{dx^2}-\chi\frac{d\varphi}{dx}\right)=0 \quad \left(M_x=0\right), \; s^2 H\frac{dH}{dx}\left(s\frac{d^2 f}{dx^2}-\chi\frac{d\varphi}{dx}\right)-8H\varphi+12sP\frac{df}{dx}=0 \left(N_x=P\frac{dw}{dx}\right)$$

Таблица 3

	а	б	в	г	д	е
χ=0	0.002056	0.002633 0.001139	0.001521	0.001514	0.002645 0.001213	0.002503 0.001175
χ=3	0.002037	0.002598 0.001134	0.001501	0.001511	0.002640 0.001149	0.002462 0.001151
χ=10	0.001994	0.002515 0.001131	0.001475	0.001508	0.002584 0.001102	0.002354 0.001124

В табл. 3 приведены значения первых критических сил. В клетках, содержащих две строки, первая строка соответствует случаю, когда защемлена толстая часть, вторая – тонкая.

3. Рассмотрим случай, когда оба конца защемлены, один в неподвижной опоре, а другой в подвижной опоре и на нее действует осевая сжимающая сила. Граничные условия имеют вид:

$$\text{при } x=0,1 \quad f=0 \quad (w=0), \quad \left(s\frac{df}{dx}-\chi\varphi\right)=0 \quad \left(u_x=0\right) \quad \text{или } \frac{df}{dx}=0 \tag{9}$$

Таблица 4

	а	б	в	г	д	е
χ=0	0.03290	0.02465	0.03211	0.02725	0.02776	0.02832
χ=3	0.02864	0.02146	0.02782	0.02410	0.02436	0.02499
χ=10	0.02203	0.01926	0.02110	0.01871	0.01942	0.01940

4. Рассмотрим случай, когда один конец защемлен, а другой шарнирно закреплен. Граничные условия имеют вид:

$$\text{при } x=0 \quad f=0 \quad (w=0), \quad \left(s\frac{df}{dx}-\chi\varphi\right)=0 \quad \left(u_x=0\right) \quad \text{или } \frac{df}{dx}=0$$

при $x=1$ $f=0$ $(w=0)$, $\left(s\frac{d^2f}{dx^2}-\chi\frac{d\varphi}{dx}\right)=0$ $\left(M_x=0\right)$ (10)

Таблица 5

	а	б	в	г	д	е
χ=0	0.01682	0.01457 0.01449	0.01318	0.01707	0.01460 0.01483	0.01431 0.01400
χ=3	0.01490	0.01347 0.01346	0.01255	0.01548	0.01353 0.01377	0.01318 0.01301
χ=10	0.009357	0.01149 0.01147	0.01093	0.01300	0.01152 0.01171	0.01123 0.01113

В клетках, содержащих две строки, первая строка соответствует случаю, когда защемлена толстая часть, вторая – тонкая.

Полученные результаты в классической постановке при постоянной толщине совпадают с известными результатами [6].

На основании вычислений можно сделать следующие выводы:

1. Для решения поставленной задачи методом Ритца можно ограничиться меньшим числом уранений, но метод коллокаций затрачивает меньше машинного времени.
2. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига приводит к уменьшению значений критических сил во всех рассмотренных вариантах изменения толщин.
3. Это уменьшение зависит от способа крепления пластины-полосы. Оно больше при более жестком креплении.
4. Когда один конец пластины-полосы защемлен, а на другом действует осевая сжимающая сила, критическая сила в ~2.5 раза больше при защемлении толстой части пластины-полосы, чем при защемлении тонкой части.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312с.
3. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия// Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 12-20.
4. Геворкян Г.З., Гнуни В.Ц., Киракосян Р.М. О классической и уточненной теориях в задачах статической устойчивости ортотропных пластин. //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №3. С. 18-24.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.
6. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

Сведения об авторе:

Геворкян Гнун Завенович – кандитат ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении

E-mail: gnungev2002@yahoo.com

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ РЕШЕНИЙ КОРРЕКТНЫХ И „НЕКОРРЕКТНЫХ ПО АДАМАРУ” ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ)

Геворкян Р.С.

Асимптотическим методом решены классически корректные и „некорректные по Адамару” задачи Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений Пуассона и Лапласа. Выведенными решениями выявлена существующая взаимооднозначная связь между корректными и „некорректными” граничными условиями с любой заранее выбранной асимптотической точностью. Доказано, что при заданных на продольных границах полосы (или пластины) бесконечных размеров полиномиальных граничных условий, полученные решения краевых задач математически точные, непрерывные и единственные. Выведено решение классически корректной задачи, тождественно совпадающей с решением соответствующей „некорректной по Адамару” задачи.

О некорректных краевых задачах математической физики и их практической значимости в достаточном объеме говорится в [1,2]. В последние годы по разным причинам возросло внимание к таким задачам, в частности, статьи [3-6]. Учитывая эффективность асимптотического метода для решения неклассических краевых задач теории пластин и оболочек [7-9] с использованием современных вычислительных средств, были решены „некорректные по Адамару” задачи [4,10], которые специалистами были оценены неоднозначно.

Учитывая это, тот же асимптотический метод применяется при решении эллиптических уравнений второго порядка для корректных и „некорректных по Адамару” задач Дирихле и Неймана (задачи теплопроводности).

1. Общий интеграл гармонического уравнения. Рассмотрим двумерное уравнение Пуассона в прямоугольной области-полосе (или в полосе бесконечной длины) толщины 2h плоскости Oxz $D=\{(x,z):\ |x|\le l,\ (|x|<\infty),\ |z|\le h,\ h<<l\}$

$$\frac{\partial^2 —}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 —}{\partial z^2}+\frac{W}{а}=0 \tag{1.1}$$

В частности, (1.1) может быть уравнение стационарной теплопроводности с удельной плотностью источника тепла W.

В уравнении (1.1) перейдем к безразмерным координатам по формулам

$$¶=\frac{x}{l},\ \ ¸=\frac{z}{h}=£^{-1}\frac{z}{l},\ \ £=\frac{h}{l}<<1 \tag{1.2}$$

получим

$$\frac{\partial^2 —}{\partial ¶^2}+£^{-2}\frac{\partial^2 —}{\partial ¸^2}+l^2\frac{W}{а}=0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) сингулярно возмущено геометрическим малым параметром £. Его асимптотическое решение должно складываться из двух слагаемых: из решения внутренней, основной задачи и согласованного с ним решения задачи в пограничном слое вблизи торцов $x=\pm l$ [12].

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического разложения

$$—(x,z)=\sum_{s=0}^{S}£^{s}—^{(s)}(¶,¸) \tag{1.4}$$

одновременно заданную в уравнении (1.1) функцию (в частности, удельняя плотность источника тепла) представим в виде

$$W(x,z)=£^{-2}l^{-2}\sum_{s=0}^{S}£^{s}W^{(s)}(¶,¸),\qquad W^{(0)}=l^2£^2W,\ \ W^{(s)}=0,\ s\ne 0 \tag{1.5}$$

Такое представление обеспечивает влияние функции W на асимптотическое решение краевой задачи, начиная с первого шага итерационного процесса.

Подставив (1.4),(1.5) в (1.3) и приравняв коэффициенты при $£^{s}$ в левой и правой частях равенства, получаем разрешающее уравнение

$$\frac{\partial^2 —^{(s)}}{\partial ¸^2}=-\frac{\partial^2 —^{(s-2)}}{\partial ¶^2}-\frac{W^{(s)}}{а}\ , \tag{1.6}$$

общий интеграл которого имеет вид

$$¯^{(s)} = A^{(s)}¸ + B^{(s)} + P^{(s)}, \quad P^{(s)} = -\int_0^{¸}\left[\int_0\left(\frac{\partial^2 ¯^{(s-2)}}{\partial ¶^2} + W^{(s)}\right)d\sim\right]d \tag{1.7}$$

где $A^{(s)}, B^{(s)}$ – произвольные функции интегрирования.

Общее решение (1.6) позволяет решить краевые задачи Дирихле и смешанные задачи (когда на одном продольном крае задано значение функции, а на противоположном крае значение ее нормальной производной – условие задачи Неймана) для бесконечной полосы.

2. Решения (классически корректных) краевых задач.

а. Пусть на продольных краях полосы заданы значения искомой функции

$$¯\left(x, \pm h\right) = ¯^{\pm}\left(x\right) \tag{2.1}$$

Удовлетворив условиям (2.1) однозначно определяем функции интегрирования и искомую функцию в виде рекуррентной формулы

$$¯^{(s)} = p^{-(s)}¸ + p^{+(s)} + \frac{¸}{2}\left[P^{(s)}(¸=-1) - P^{(s)}(¸=1)\right] - \frac{1}{2}\left[P^{(s)}(¸=-1) + P^{(s)}(¸=1)\right] + P^{(s)}(¶, ¸)$$

$$p^{\pm(0)} = p^{\pm} = \frac{1}{2}\left(¯^{+} \pm ¯^{-}\right), \quad p^{\pm(s)} = 0,\ s \neq 0; \ P^{(0)} = -\int_0^{¸}\left(\int_0 W^{(0)} d\sim\right)d \tag{2.2}$$

Вычислив пять шагов итерации при $W = 0$, получаем

$$¯^{(0)} = p^{-}¸ + p^{+}, \ ¯^{(2)} = \frac{¸ - ¸^3}{6}\frac{d^2 p^{-}}{d¶^2} + \frac{1 - ¸^2}{2}\frac{d^2 p^{+}}{d¶^2}, \cdots \tag{2.3}$$

$$¯^{(8)} = \left(\frac{381¸}{5\cdot 9!} - \frac{31¸^3}{18\cdot 7!} + \frac{7¸^5}{3\cdot(5!)^2} - \frac{¸^7}{6\cdot 7!} + \frac{¸^9}{9!}\right)\frac{d^8 p^{-}}{d¶^8} + \left(\frac{1385}{8!} - \frac{61¸^2}{2\cdot 6!} + \frac{5¸^4}{(4!)^2} - \frac{¸^6}{2\cdot 6!} + \frac{¸^8}{8!}\right)\frac{d^8 p^{+}}{d¶^8}$$

б. Пусть на продольных краях полосы заданы смешанные условия (функция и ее нормальное производное)

$$¯\left(x, -h\right) = ¯^{-}\left(x\right), \qquad \left.\frac{\partial ¯}{\partial z}\right|_{z=h} = -\frac{1}{a}q_z^{+}(x) \tag{2.4}$$

тогда решение краевой задачи представляется рекуррентной формулой

$$¯^{(s)} = ¯^{-(s)} + \left(¸ + 1\right)\left(q_z^{+(s)} - \left.\frac{\partial P^{(s)}}{\partial ¸}\right|_{¸=1}\right) + P^{(s)}(¸) - P^{(s)}(¸=-1), \ P^{(0)} = -\int_0^{¸}\left(\int_0 W^{(0)} d\sim\right)d$$

$$¯^{-(0)} = ¯^{-}, \ q_z^{+(0)} = -\frac{h}{a}q_z^{+} = q^{*}, \ ¯^{-(s)} = q_z^{+(s)} = 0,\ s \neq 0 \tag{2.5}$$

Выпишем коэффициенты разложения (1.4) с точностью пяти шагов итерации при $W = 0$

$$¯^{(0)} = ¸q^{*} + p, \quad p = q^{*} + ¯^{-}, \ ¯^{(2)} = \left(\frac{1}{3} + \frac{¸}{2} - \frac{¸^3}{6}\right)\frac{d^2 q^{*}}{d¶^2} + \left(\frac{3}{2} + ¸ - \frac{¸^2}{2}\right)\frac{d^2 p}{d¶^2}, \cdots \tag{2.6}$$

$$¯^{(8)} = \frac{616408}{9!} + \frac{53849}{8!}¸ - \frac{527}{1008}¸^2 - \frac{199}{2\cdot 6!}¸^3 + \frac{38}{2\cdot 6!}¸^4 + \frac{13}{4\cdot 6!}¸^5 - \frac{¸^6}{3\cdot 6!} - \frac{¸^7}{2\cdot 7!} + \left.\frac{¸^9}{9!}\right)\frac{d^8 q^{*}}{d¶^8} +$$

$$+\left(\frac{250737}{8!} + \frac{24611}{7!}¸ - \frac{921}{4\cdot 5!}¸^2 - \frac{361}{6!}¸^3 + \frac{19}{8\cdot 4!}¸^4 + \frac{11}{6!}¸^5 - \frac{¸^6}{4\cdot 5!} - \frac{¸^7}{7!} + \frac{¸^8}{8!}\right)\frac{d^8 p}{d¶^8}$$

Следовательно, после пяти шагов итерации решениями краевых задач (1.1),(2.1) и (1.1),(2.2) при $W = 0$ будет

$$¯(x, z) = \sum_{s=0,2}^{8} £^{s} ¯^{(s)} \tag{2.7}$$

когда $¯^{(s)}$ определяются по формулам (2.3) и (2.6) соответственно.

Асимптотическая точность пяти шагов итерации составляет $O(\varepsilon^8)$, если заданные на краях полосы функции вместе со своими производными непрерывные, ограниченные и имеют изменяемости порядка $O(\varepsilon^0)$ [12]. Заметим, что если заданные в граничных условиях (2.1),(2.4) и в уравнении (1.1) функции являются многочленами, то после конечного числа шагов итерационный процесс обрывается и получаются математически точные (замкнутые) решения поставленных краевых задач.

Учитывая, что общий интеграл асимптотического решения, выраженный в виде рекуррентной формулы (1.7), при заданных полиномиальных функциях приводит к точному математическому решению краевой задачи, целесообразно решить также ,,некорректную по Адамару'' задачу и выявить ее связь с приведенными выше решениями.

3. Решение «некорректной» краевой задачи (стационарной теплопроводности). Пусть на продольном крае $z=h$ полосы заданы и функция, и ее нормальное производное (температура и тепловой поток), а на противоположном крае условия не заданы

$$\theta(x,h)=\theta^{+}(x),\qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=h}=-\lambda q_z^{+}(x) \tag{3.1}$$

тогда решение неклассической краевой задачи представляется рекуррентной формулой

$$\theta^{(s)}=\theta^{+(s)}+(\zeta-1)\left(q_z^{+(s)}-\left.\frac{\partial P^{(s)}}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1}\right)+P^{(s)}(\zeta)-P^{(s)}(\zeta=1) \tag{3.2}$$

$$\theta^{+(0)}=\theta^{+},\quad q_z^{+(0)}=-\frac{h}{\lambda}q_z^{+}=q^{*},\quad \theta^{+(s)}=q_z^{+(s)}=0,\ s\neq 0$$

Выпишем коэффициенты разложения (1.4) при учете (3.1),(3.2) и $W=0$ с точностью пяти шагов итерации

$$\theta^{(0)}=\zeta q^{*}+p^{*},\quad p^{*}=\theta^{+}-q^{*},\quad \theta^{(2)}=\left(-\frac{1}{3}+\frac{\zeta}{2}-\frac{\zeta^3}{6}\right)\frac{d^2q^{*}}{d\xi^2}+\left(-\frac{1}{2}+\zeta-\frac{\zeta^2}{2}\right)\frac{d^2p^{*}}{d\xi^2},\cdots$$

$$\begin{aligned}\theta^{(8)}&=\left(\frac{8}{9!}-\frac{7\zeta}{8!}+\frac{3\zeta^2}{7!}-\frac{5\zeta^3}{6\cdot 6!}+\frac{\zeta^4}{6!}-\frac{\zeta^5}{960}+\frac{\zeta^6}{3\cdot 6!}-\frac{\zeta^7}{2\cdot 7!}+\frac{\zeta^9}{9!}\right)\frac{d^8q^{*}}{d\xi^8}+\\&+\left(\frac{1}{8!}-\frac{\zeta}{7!}+\frac{\zeta^2}{2\cdot 6!}-\frac{\zeta^3}{6!}+\frac{\zeta^4}{(4!)^2}-\frac{\zeta^5}{6!}+\frac{\zeta^6}{2\cdot 6!}-\frac{\zeta^7}{7!}+\frac{\zeta^8}{8!}\right)\frac{d^8p^{*}}{d\xi^8}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Заметим, что решение (3.3) при учете (1.4) «некорректной» задачи как и решения (2.3),(2.6) классически корректных задач, имеет асимптотическую точность пяти шагов итерации – $O(\varepsilon^8)$, а при полиномиальных (не выше седьмой степени) граничных условиях оно математически точно удовлетворяет и уравнению (1.6) при $W=0$, и граничным условиям (3.1).

Учитывая это, установим: существует ли связь между приведенными выше классически корректными и «некорректной» задачами? Какая должна быть заданная на продольном крае $z=-h$ $(\zeta=-1)$ функция $\theta^{-}(x)$, чтобы решения (2.3),(2.7) и (2.6),(2.7) задач с классически корректными граничными условиями соответственно (2.1) и (2.4) удовлетворили также граничным условиям «некорректной» задачи (3.1) на продольном крае $z=h$ $(\zeta=1)$?

Покажем, что решение «некорректной» задачи (3.1)- (3.3),(2.7) можно получить из решений каждой из классически корректных краевых задач (2.1)-(2.3),(2.7) и (2.4)-(2.7) при подходящем выборе значенй и функции θ^{-}, заданной на границе $z=-h$ $(\zeta=-1)$.

Из решения (3.1)-(3.3),(2.7) «некорректной» задачи определим значение температурной функции θ^{-}_{cal} на продольном крае полосы $z=-h$:

$$\theta^{-}_{cal}=\theta^{+}-2q^{*}+\varepsilon^2\left(\frac{4}{3}q_2^{*}-2\theta_2^{+}\right)-\varepsilon^4\left(\frac{4}{15}q_4^{*}-\frac{2}{3}\theta_4^{+}\right)+ \tag{3.4}$$

$$+£^{6}\left(\frac{8}{315}q_6^* - \frac{4}{45}—_6^+\right) - £^{8}\left(\frac{512}{9!}q_8^* - \frac{2}{315}—_8^+\right),\ \ \frac{d^s—^\pm}{d¶^s} = —_s^\pm\left(—^\pm, p^\pm, q^*\right),\ s = 2,4,...,8$$

из решения корректной краевой задачи (2.1)-(2.3),(2.7) значение q_{cal}^* на продольном крае полосы $z = h\ \ (¸\ = 1)$:

$$q_{cal}^* = \frac{1}{2}\left(—^+ - —^-\right) - £^2\left(\frac{2}{3}—_2^+ + \frac{1}{3}—_2^-\right) - £^4\left(\frac{8}{45}—_4^+ + \frac{7}{45}—_4^-\right) -$$
$$- £^6\left(\frac{64}{945}—_6^+ + \frac{62}{945}—_6^-\right) - £^8\left(\frac{128}{4725}—_8^+ + \frac{127}{4725}—_8^-\right) \tag{3.5}$$

подставив (3.4) в (3.5), получаем

$$q_{cal}^* = q^* + o(£^8) \tag{3.6}$$

что свидетельствует о том, что решение (3.1)-(3.3),(2.7) «некорректной» задачи с асимптотической точностью $O(£^8)$ совпадает с решением корректной краевой задачи (2.1)-(2.3), (2.7), если $—^- = —_{cal}^-$. Аналогичнм образом, из решения (2.4)-(2.7) определим $—_{cal}^+$ на границе $z = h\ \ (¸\ = 1)$:

$$—_{cal}^+ = —^- + 2q^* + £^2\left(\frac{8}{3}q_2^* + 2—_2^-\right) + £^4\left(\frac{64}{15}q_4^* + \frac{10}{3}—_4^-\right) +$$
$$+ £^6\left(\frac{2176}{315}q_6^* + \frac{244}{45}—_6^-\right) + £^8\left(\frac{31744}{2835}q_8^* - \frac{554}{63}—_8^-\right) \tag{3.7}$$

куда подставив (3.4), получим

$$—_{cal}^+ = —^+ + o(£^8) \tag{3.8}$$

Таким образом, с асимптотической точностью $O(£^8)$ решения всех вышеприведенных трех краевых задач совпадают, если на границе $z = -h\ \ (¸\ = -1)$ принять $—^- = —_{cal}^-$. Эти решения совпадают тождественно (математически точно), если заданные функции–многочлены. Заметим, что согласно [1], задачу Коши для эллиптических уравнений Адамар ошибочно считал некорректной из-за нерегулярности решений. В частности, приводится пример решения уравнения Лапласа для полуплоскости, где отсутствует непрерывная связь между параметрами граничных условий и решением. Одновременно согласно [2] в качестве одного из методов решения «некорректных» краевых задач считается приближенный метод решения. Сравнивая асимптотическое решение (3.1)–(3.3),(2.7) «некорректной» краевой задачи с приведенным в [1] нерегулярным решением задачи Коши для уравнения Лапласа замечаем, что асимптотическое решение (3.1)–(3.3),(2.7) получится из нерегулярного [1], если последнее разложить в степенной ряд по поперечной координате полосы.

Таким образом асимптотическим методом решенные выше классически корректные и ,,некорректное” краевые задачи при $—^- = —_{cal}^-$ имеют одно и то же решение с любой асимптотической точностью $O\left(£^S\right)$, если заданные в уравнении и на продольных краях бесконечной полосы функции вместе со своими произвоными непрерывные, ограниченные и имеют асимптотический порядок $O\left(£^0\right)$. Если же заданные функции являются многочленами, то после конечного числа шагов итерационный процесс обрывается и все три решения тождественно совпадают, поскольку они математически точные.

Заметим, что в общем случае решение краевой задачи математической физики подразумевает нахождение функции, удовлетворяющей заданным и уравнению, и граничным условиям. Решение считается приближенным, если хоть одно из них (или уравнение, или граничное условие, или и то и другое) удовлетворяется приближенно. Асимптотический метод решения краевых задач математической физики считается приближенным методом [11,12]. Предложенный асимптотический метод [7-9] предоставляет возможность удовлетворить граничным условиям математически точно, но уравнению приближенно, в общем случае, а в частном случае, математически точно удовлетворяются так же граничные условия, если они полиномиальные.

Если учесть, что конечный результат решения любой физической задачи связан с количественной оценкой результата, а любое числовое вычисление содержит определенную приближенность, то эффективность предложенного асимптотического метода становится неоспоримой, поскольку выведенные рекуррентные формулы являются готовым алгоритмом для современных вычислительных средств, позволяющих получить аналитическое и численное решения задачи с любой точностью, если заданные в задаче функции непрерывные, ограниченные и имеют такие же производные необходимого порядка.

Все рассуждения и выводы не противоречат существующим взглядам [13,14].

Заметим, что все выводы остаются в силе также для полос конечной длины. При этом, к выведенным решениям (внутренних задач) следует прибавить согласованные с ними решения задач типа пограничных слоев [15,16] с заданными на торцах $x = \pm l$ граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
1. 2.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285с.
2. Арутюнян А.Г., Тоноян В.С., Хачикян А.С. Распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразиатской плит на основе данных GPS/ Изв.НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №3. С.3-13.
3. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. Mathematical simulation of collision of arabian and euroasian plates on the base of GPS data // Изв.НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №4. С.3-9.
4. Хачикян А.С. О гармонических и бигармонических задачах для уравнений с неклассическими граничными условиями.// Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №4. С.24-31.
5. Саргсян В.Г., Хачикян А.С. О решении „некорректной” задачи теплопроводности с переопределенными исходными данными.// Изв.НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №3. С. 58-63.
6. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Меж вуз. сборник н. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1982. С. 7-12.
7. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука-физмат, 1997. 414с.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во „Гитутюн" НАН РА, 2005. 468 с.
9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С Смешанные краевые задачи теории упругости слоистых тонких тел переменной толщины, состоящих из анизотропных неоднородных материалов//ПММ. 2009. Вып. 73. №5. С. 868-876.
10. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
11. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука,1976. 512с.
12. Келдыш М.В. О приближении голоморфных функций целыми функциями//ДАН СССР, 1945. Т.47, № 4. С. 243-145
13. Аракелян Н.У. О задачах Дирихле и Неймана для гармонических функций// Изв.НАН Армении. Математика. 2008. Т.43. № 6. С.21-38.
14. Агаловян Л. А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Меж вуз. сборник н. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С. 51-58.
15. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв АН Арм. ССР. Механика. 1984 Т. 37. . № 6. С. 3-15.

Сведения об авторе

Геворкян Рубен Степанович – профессор, д.ф.м.н., в.н.с Института механики НАН РА
(374 10) 27 08 28, (374 93) 53 68 83,   E-mail: gevorgyanrs@mail.ru

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СДВИГОВОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Горев Б.В., Коробейников С.Н.

Предложена методика построения одноосных диаграмм на кручение при конечных деформациях по результатам испытаний сплошных круглых образцов (неоднородное напряженное состояние) с использованием кинетических уравнений ползучести и повреждаемости в энергетической форме. Исследуются материалы, у которых исходные кривые ползучести при постоянных напряжениях и температурах в нормированных переменных геометрически подобны. Для таких материалов интенсивность процесса деформирования оценивается мощностью рассеянной в процессе ползучести удельной энергии, а мерой поврежденности материала является величина нормированной удельной работы необратимых деформаций ползучести. Приведены результаты экспериментальных исследований в области от растяжения до кручения при постоянной интенсивности напряжений вплоть до разрушения с обработкой по предложенной методике. Рассмотренные кинетические уравнения апробировались при кручении сплошных круглых образцов из алюминиевых сплавов АМГ-6М и АК4-1Т с постоянной скоростью угла закручивания. Получено вполне удовлетворительное совпадение расчета с экспериментом.

Установление теоретических и экспериментальных связей между термомеханическими диаграммами на растяжение, сжатие и сдвиг необходимо как для получения определяющих уравнений с конкретизацией эквивалентного напряжения, так и для обработки экспериментальных данных и определения коэффициентов функциональных зависимостей определяющих уравнений. В связи с интенсивным изучением явления сверхпластичности применительно к ОМД, а также учитывая, что формообразование осуществляется в основном через сдвиговой механизм, проблема определения деформационно-прочностных свойств на сдвиг при конечных деформациях остается актуальной и в настоящее время. Будет ли сдвиговая характеристика материала при конечных деформациях некоторой комбинацией свойств ползучести на растяжение, сжатие и свойств анизотропии или она является самостоятельной «паспортной» характеристикой материала? На сегодня этот вопрос остается открытым.

Сопоставлением результатов расчетов с испытаниями на ползучесть при кручении толстостенных и сплошных круглых образцов в условиях ползучести, рассчитанных по методу характеристических параметров для, так называемой характеристической точки $\hat{r}$ (ХТ), обоснована методика построения одноосных кривых деформирования из экспериментальных данных на кручение сплошных образцов [1]. Установление соответствия результатов расчетов и испытаний сплошных образцов с неоднородным напряженно-деформированным состоянием опытным данным на кручение тонкостенных образцов с однородным напряженным состоянием проведено для случая малых и развитых сдвиговых деформаций $(\gamma < 0,2)$. Для кручения сплошных круглых образцов с неоднородным напряженным состоянием построение кривых деформирования осуществлялось по значениям касательных напряжений $\hat{\tau}$ и сдвиговых деформаций $\hat{\gamma}$ в ХТ – точке $\hat{r}$ пересечения эпюр упругого и «установившегося» распределения напряжений. Когда неизвестен показатель ползучести, показано, что с достаточной степенью точности для аппроксимации экспериментальных данных координату ХТ для сплошного круглого образца можно определять как пересечение эпюр упругого и идеально-пластического распределения напряжений и тогда характеристические параметры имеют следующий вид: $\hat{r} = 3R/4; \hat{\tau} = M/W_p; \hat{\gamma}(t) = \varphi(t) \cdot \hat{r}/l$, где R – радиус образца; $W_p = 2\pi R^3/3$ – пластический момент сопротивления кручению; φ – угол закручивания на базе замера l. При этом полагалось, что напряжение в точке $\hat{r}$ пересечения вышеуказанных эпюр в процессе ползучести под действием постоянного крутящего момента M не изменяется и остается равным исходному (упругому) вплоть до начала разрушения, а также считалось, что выполняются гипотезы плоских сечений и прямых радиусов. Существование ХТ с радиальной координатой $\hat{r}$, в которой напряженное состояние остается практически неизменным вплоть до начала разрушения, подтверждается непосредственными расчетами [1].

Ниже предлагается распространить метод характеристических параметров на случай конечных деформаций с использованием для описания процесса деформирования кинетических уравнений в энергетической форме, когда интенсивность процесса деформирования оценивается мощностью рассеяния энергии при ползучести, а мера поврежденности материала – величиной нормированной удельной работы необратимых деформаций ползучести [2].

Проиллюстрируем методику обработки экспериментальных данных на растяжение и кручение вплоть до начала разрушения при конечных деформациях на примере деформирования титанового сплава ВТ-9 (пруток Ø 50 мм) при температуре сверхпластичности $T_c = 900^{o}C$ и титанового сплава 3В (плита толщиной 20 мм) при комнатной температуре.

На рис.1*a* светлыми точками представлены логарифмические деформации в зависимости от времени на сплаве ВТ-9 при растяжении продольных образцов под действием постоянных напряжений (указаны в МПа против соответствующих диаграмм), треугольниками – для образцов, вырезанных под углом 45° к оси прутка. Крестиками показаны результаты экспериментов на кручение сплошных образцов (Ø рабочей части – 20 мм, рабочая длина 42 мм) при постоянных крутящих моментах, пересчитанных в эквивалентное напряжение для растяжения – интенсивность напряжений $\hat{\sigma}_i = M\sqrt{3}/W_p$ в ХТ. Величина интенсивности деформаций в ХТ как и для малых деформаций, насчитывалась по формуле:

$$\hat{\varepsilon}_i(t) = (\hat{\gamma}/\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\int_o^t \frac{\hat{r}\varphi(t)}{l}dt \quad . \qquad (1)$$

Звездочками отмечены значения экспериментальных данных в момент разрушения. Вычисление сдвиговой деформации в ХТ по формуле (1) основывалось на гипотезах прямых радиусов и плоских сечений, непротиворечивость которых проверялась экспериментально.

Экспериментальная проверка гипотез прямых радиусов и плоских сечений проводилась на образцах из алюминиевого сплава АМГ-6 (пруток Ø 42 мм) при Т=450°С и из титанового сплава ВТ-9 при Т=900°С. В сплошных образцах диаметром 20 мм с рабочей длиной $l = 42$ мм засверливались два отверстия диаметром 0,5 мм по радиусу до оси образца в середине и вблизи радиуса закругления рабочей части. В сверления вставлялись проволочки – «свидетели» и образцы закручивались до различных степеней деформаций. Последующий срез образца (см. рис. 1*b*) позволил визуально установить, что поперечные сечения образцов остаются плоскими, а радиусы – прямолинейными. Рабочая длина при деформациях, близких к разрушению ($\hat{\gamma}* = \hat{r}\theta* \approx 2,2$, $\theta = \varphi(t)/l$ – погонный угол закручивания) оставалась неизменной.

В отличие от алюминиевого сплава на образцах со свидетелями из титанового сплава не удалось достичь деформаций, предшествующих разрушению ($\hat{\gamma}* = \hat{r}\theta* \approx 16$) из-за крупного размера зерна (~120 мкм), образцы с установленными «свидетелями» разрушались при $\hat{\gamma} \approx 8$ вследствие концентрации напряжений вокруг отверстий. На рис. 1*b* показано фото сечения скрученного образца со «свидетелем» после эксперимента, представленного на рис. 1*a* крестиками при $\hat{\sigma}_i = 20$ МПа, и остановленного при достижении $\hat{\gamma} \approx 7$. Таким образом, обоснование непротиворечивости гипотез прямых радиусов и плоских сечений ограничилось величиной сдвиговой деформации в ХТ порядка $\hat{\gamma} \approx 6 \div 7$. Замер диаметра и рабочей части титановых образцов без проволочки – «свидетеля» для $\hat{\gamma} \approx 10$ при $\hat{\sigma}_i = 28$ МПа перед разрушением показал незначительное увеличение рабочей длины и уменьшение диаметра образца. Однако для таких степеней деформаций необходима дополнительная экспериментальная проверка этих гипотез на материалах с мелкозернистой структурой с целью уменьшения влияния концентрации напряжений.

Из представленных на рис. 1*a* экспериментов следует, что сплав ВТ-9 при T_c = 900°С подчиняется установившемуся течению практически вплоть до разрушения без какого-либо упрочнения-разупрочнения. Удовлетворительное совпадение эквивалентных скоростей деформаций на растяжение в продольном, под углом 45° к продольному направлению и на кручение при одной и той же величине $\hat{\sigma}_i = \text{const}$ позволяет говорить об изотропии материала.

Следует отметить, что величины деформаций в момент разрушения образцов при кручении превосходят таковые на растяжение в разы при одной и той же величине $\hat{\sigma}_i = \text{const}$. Вместе с тем, в нормированных координатах экспериментальные точки группируются в «единую кривую» (см. рис.1*c* – обозначения те же).

Нормирование по оси ординат и по оси абсцисс осуществляется отнесением текущих экспериментальных значений к экспериментальным значениям в момент разрушения для каждого значения $\hat{\sigma}_i = \text{const}$. Для многих материалов с непостоянной величиной предельной деформации ползучести или работы рассеяния при ползучести в момент разрушения ($\varepsilon* \neq \text{const}, A* \neq \text{const}$) в зависимости от длительности процесса деформирования для одноосного случая при $\sigma_k = \text{const}$ величина параметра поврежденности $0 \leq \omega \leq 1$ хорошо коррелирует с величиной нормированной работы $\omega \equiv A/A*$ [2].

Наглядно это можно продемонстрировать и для умеренных температур на сплаве 3В, используемом в судостроении для изготовления корпусных деталей судов и имеющем при эксплуатации в холодном состоянии все три стадии ползучести. Подобие кривых ползучести на растяжение иллюстрируется результатами при $\sigma_k = \mathrm{const}$, представленными на рис.2*a* и 2*c* в одинаковых обозначениях (точки). При комнатной температуре сплав сначала упрочняется, а перед разрушением имеет четко выраженную стадию разупрочнения и практически постоянную энергию рассеяния при разрушении на растяжение $A^* = \mathrm{const}$.

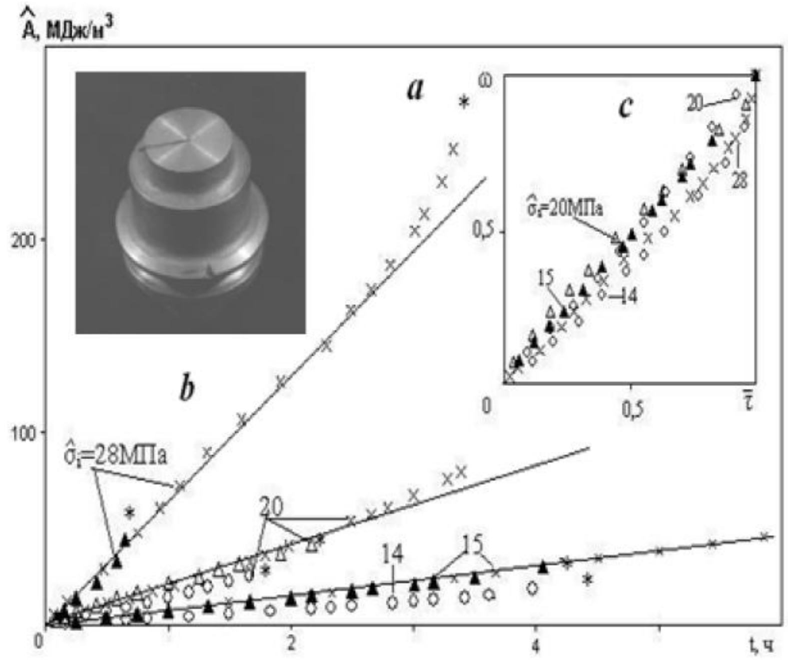


Рис.1. Экспериментальные данные для сплава ВТ-9 при Т = 900°С на растяжение и кручение сплошных круглых образцов (точки) и их аппроксимация (линии) (*a*), сечение образца со «свидетелем» по радиусу (*b*), «единая кривая» в нормированных координатах $\omega - \overline{\tau}$ (*c*).

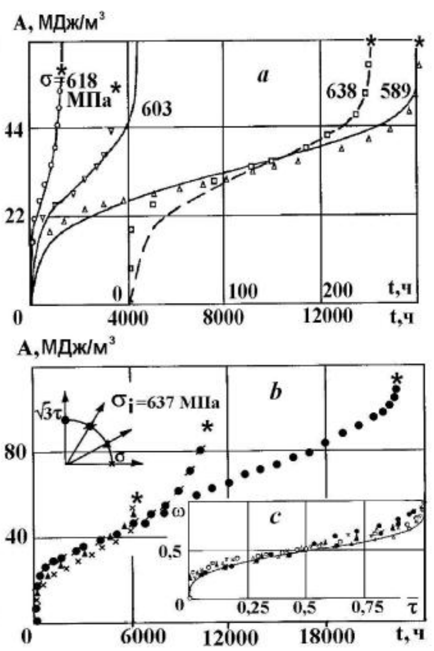


Рис.2. Диаграммы ползучести *A=A(t)* титанового сплава 3В при комнатной температуре на растяжение (*a*), при плоском напряженном состоянии (*b*), «единая кривая» в нормированных координатах $\omega - \overline{\tau}$ (*c*).

На рис.2*b* приведены результаты экспериментов на тонкостенных цилиндрических образцах из сплава 3В при плоском напряжённом состоянии в области от чистого растяжения до чистого кручения при $\sigma_i = \mathrm{const}$. Из представленных диаграмм видно, что $A^*(\sigma_i) \neq \mathrm{const}$ и тем не менее экспериментальные данные в нормированных координатах $\omega - \overline{\tau}$ достаточно хорошо группируются в «единую кривую» (см. рис.2*c*), подтверждая тем самым геометрическое подобие нормированных по оси ординат кривых ползучести $\omega \equiv A/A^* - t$, и запись уравнения повреждаемости в виде $d\omega/dt = \varphi(\sigma_{\varepsilon^*}, T) \cdot \psi(\omega)$, в котором σ_{ε^*} – эквивалентное напряжение с одинаковой длительностью до разрушения. То есть σ_{ε^*} − функция напряженных состояний, при которых в стационарных условиях нагружения происходит равное накопление повреждений и следовательно длительность до разрушения одинакова.

Установлено, что контур $\sigma_i = \mathrm{const}$, приведённый на рис. 2*b*, точки которого соответствуют экспериментам на растяжение, кручение и совместное действие растяжения с кручением, является контуром эквивалентного напряжения в смысле равенства постоянной мощности рассеяния работы на установившемся участке кривой ползучести $W_{\min} = dA/dt = \sigma_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl} = \mathrm{const}$, причём отмечается вполне удовлетворительное подтверждение ассоциированного закона течения для этого контура ($\dot{\varepsilon}_{kl} = \lambda\, \partial\sigma_i / \partial\sigma_{kl}$). Поэтому запись кинетического уравнения ползучести в энергетических терминах предпочтительнее, чем в деформационной форме. Эквивалентным напряжением в смысле интенсивности процесса ползучести по энергетической мере W для указанного сплава является интенсивность напряжений $\sigma_\varepsilon \equiv \sigma_i$. Следует заметить, что эквивалентное напряжение σ_{ε^*} с одинаковой длительностью до разрушения в уравнении повреждаемости не совпадает с эквивалентным напряжением в уравнении ползучести $(\sigma_{\varepsilon^*} \neq \sigma_\varepsilon)$ из-за существенной разницы в длительностях до разрушения при

$\sigma_\varepsilon = \text{const}$. Так при кручении длительность до разрушения более чем в 3,5 раза больше длительности до разрушения на растяжении при $\sigma_\varepsilon = \sigma_i = \text{const}$.

Из подобия нормированных по оси ординат экспериментальных кривых ползучести для сплава 3В определяющие уравнения принимают вид соотношений с одинаковыми функциями для параметра повреждённости ω в уравнениях ползучести и повреждаемости [2]:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{B_A \sigma_i^n}{\omega^\alpha (1-\omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_{\varepsilon*}^k}{\omega^\alpha (1-\omega^{\alpha+1})^m}, \quad A = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon, \quad 0 \le \omega \le 1. \qquad (2)$$

Для случая одноосного растяжения при $\sigma_k = \text{const}$ в нормированных координатах $\omega = A / A^* \equiv \varepsilon / \varepsilon^*,\ \bar{\tau} = t / t^*$ имеем для параметра повреждённости ω уравнение «единой кривой» в виде $(1\text{-}\omega^{\alpha+1})^{m+1} = 1 - \bar{\tau},\ 0 \le \bar{\tau} \le 1$. То есть для одноосного напряжённого состояния параметр повреждённости ω наряду с нормированной работой можно отождествить с величиной нормированной деформации ползучести $\varepsilon / \varepsilon^*$ и связать его с замеряемыми ε и ε^*.

На рис.2*a* и 2*c* линиями показана аппроксимация экспериментальных данных по зависимостям (2) со следующими характеристиками на растяжение: α =2,5; $m = 7$; $n = k = 51{,}8$; B_A = 1,46·10^{-151} МПа$^{(1\text{-n})}$ с$^{-1}$; B_ω = 2,205·10^{-153} МПа $^{-k}$·с$^{-1}$. Единая методика определения параметров кинетических уравнений ползучести и повреждаемости описана в работе [2]. На рис.1*a* для сплава ВТ-9 линиями показана аппроксимация экспериментальных данных по степенной зависимости от напряжений с характеристиками: α = 0; $m = 0$; $n = k = 3{,}37$; B_A = 2,34·10^{-7} МПа$^{(1\text{-n})}$ с$^{-1}$. Аналогичные результаты, как и для сплава ВТ-9, получены для одинаково работающего на растяжение и сжатие в условиях ползучести алюминиевого сплава АМГ-6М при температуре закалки 450ºС. Материал изотропный, без какого-либо эффекта упрочнения с незначительным разупрочнением вплоть до разрушения, которое реализуется при $\varepsilon_i^* \approx 1$ и менее.

Возможность использования предлагаемой методики применительно к нестационарным режимам нагружения проиллюстрирована сравнением расчета с экспериментом скручиваемого сплошного образца с постоянной скоростью угла закручивания вплоть до разрушения при Т=450°С с использованием характеристик: B = 5,13 · 10^{-9}(МПа)$^{(1-n)}$с$^{-1}$, $n = 5$.

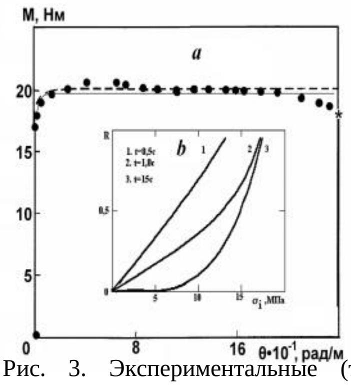


Рис. 3. Экспериментальные (точки) и расчётные (линии) значения скручивания сплошного образца при Т=450 ºС с постоянной скоростью угла закручивания (*a*), эпюры напряжений по радиусу образца в различные моменты времени (*b*).

.

На рис. 3*a* показаны экспериментальные (точки) и расчётные (линии) значения для кручения сплошного образца при Т=450ºС с постоянной скоростью угла закручивания $\dot{\theta} = 9 \cdot 10^{-2}$ рад/(м·с). Скорость задавалась такой, чтобы напряжения в образце не превосходили предела упругости материала. Видно, что незначительный ниспадающий участок наблюдается перед самым разрушением. Решение системы дифференциальных уравнений (2) проводилось методом Рунге-Кутты с разбиением радиуса образца на 31 интервал (показан тонкой сплошной линией). Начальные условия при $t = 0$: $A_k = \omega_k = 0 \quad (k = 1...31)$, модуль упругости $E = 20$ ГПа. Линии 1–3 на рис. 3*b* – эпюры напряжений по радиусу образца в различные моменты времени (линия 3 соответствует установившемуся распределению напряжений). Штриховой линией приведен расчет по методу характеристических параметров [1].

Расчет с учётом разупрочняющейся (III стадии) ползучести проиллюстрируем на примере изотропного разносопротивляющегося растяжению и сжатию сплава АК4-1Т [6] при Т = 250°С с различными постоянными скоростями угла закручивания сплошных круглых образцов. На рис.4*a* представлены экспериментальные значения работы рассеяния при ползучести $\hat{A} = \hat{\sigma}_i \cdot \hat{\varepsilon}_i$ в ХТ (точки), полученные при испытаниях на кручение сплошных образцов при различных напряжениях. Эксперименты обрабатывались по зависимостям с одинаковыми функциями для параметра повреждённости в уравнениях ползучести и повреждаемости по зависимости (2) со следующими значениями параметров: B_A = 2,79·10^{-40} (МПа)$^{(1-n)}$с$^{-1}$, $n = 16$, $m = 2$, B_ω = 3,39 · 10^{-31}(МПа)$^{-k}$с$^{-1}$,

$k = 11{,}5$. На рис. 4*b* приведена единая кривая в нормированных координатах (знаки) экспериментальных данных, представленных на рис.4*a* и их аппроксимация (линия). На рис. 4*c* приведены экспериментальные (точки) и расчётные (сплошные линии) значения крутящего момента *M* для двух значений скорости погонного угла закручивания: $\dot{\theta} = 1{,}14 \cdot 10^{-2}; 1{,}08 \cdot 10^{-3}$ рад/(м·с) (кривые I, II соответственно). Сплошные линии – расчёт, полученный интегрированием системы дифференциальных уравнений (3) методом Рунге–Кутты с разбиением радиуса образца на 31 интервал и модулем сдвига $G = 17$ ГПа, штриховые линии соответствуют расчёту крутящего момента (интенсивности напряжений в ХТ) по методу характеристического напряжения. На рис. 4*d* показано распределение касательного напряжения по радиусу вала в моменты времени $t = 50$; 10^2; $1{,}5 \cdot 10^2$; $3 \cdot 10^2$; $9 \cdot 10^2$; $1{,}5 \cdot 10^3$с для $\dot{\theta} = 1{,}08 \cdot 10^{-3}$ рад/(м·с). Следует отметить, что сплав АК4-1Т при Т = 250°С охрупчивается, т. е. предельные деформации и удельные работы необратимых деформаций ползучести при разрушении уменьшаются с увеличением продолжительности экспериментов (см. рис. 4*a*), установившаяся стадия ползучести отсутствует. Видно, что диаграммы «$\hat{\sigma}_i - \hat{\varepsilon}_i$» (рис. 4*c*) после упругого участка нагружения дают сразу ниспадающую ветвь на кривой деформирования (без горизонтальной асимптотики), причём чем медленнее процесс (кривая II), тем меньше предельная величина деформаций (отмечено звёздочками в эксперименте, см. внешние координаты на рис. 4*c*, пересчитанные для ХТ).

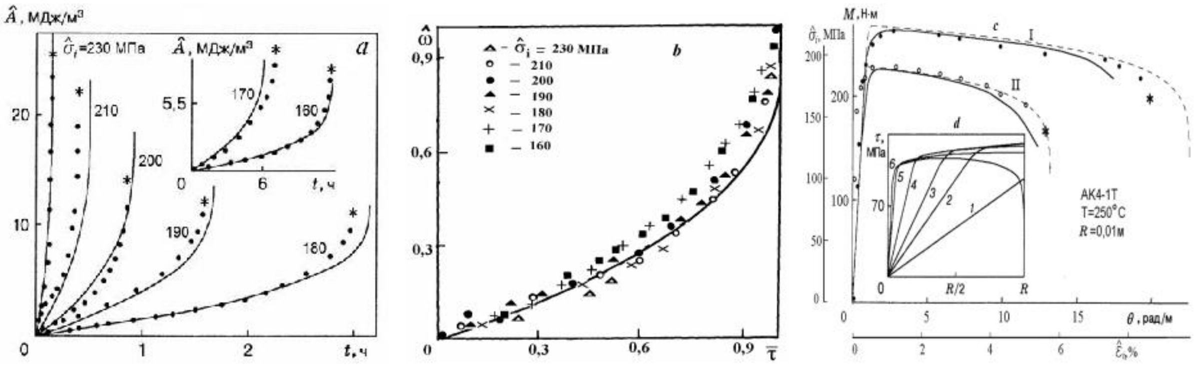


Рис. 4. Экспериментальные значения $\hat{A} = \hat{A}(t)$ в ХТ (точки) кручения сплошных круглых образцов из сплава АК4-1Т для Т=250° при $\hat{\sigma}_i = const$ и их аналитическая аппроксимация (линии) (*a*), «единая кривая» в нормированных координатах $\omega - \overline{\tau}$ (знаки) экспериментальных данных, представленных на рис. 4*a*, и их аппроксимация (линия) (*b*). Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) значения крутящего момента при заданных скоростях погонного угла закручивания (*c*), эпюры касательного напряжения по радиусу вала в различные моменты времени для эксперимента II (*d*).

Заключение. Анализ проведенных исследований с использованием кинетических уравнений в энергетической форме (2) дает основание рекомендовать предлагаемую методику получения сдвиговых диаграмм при конечных деформациях по формуле (1) из обработки экспериментальных данных на кручение сплошных круглых образцов с достаточной для практического применения точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00060, 08-01-00168, 09-08-00684).

ЛИТЕРАТУРА

1. Горев Б.В. К оценке ползучести и длительной прочности по методу характеристических параметров. Сообщ. 1. // Пробл. прочности. 1979. №4. С.30-36.
2. Gorev B.V., Klopotov I.D., Lyubashevskaya I.V. Creep and damage behavior of AK4-1T and VT-9 alloy under different stress states // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, No 29. Elsevier Science. Amsterdam. 1998. P. 1-10.

Сведения об авторах

Горев Борис Васильевич – д.т.н., ведущий научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, пр. ак. М.А. Лаврентьева, 15, (383) 333-32-89; E-mail: gorevbv@yandex.ru

Коробейников Сергей Николаевич–д.ф.-м.н., заведующий лабораторией, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, пр. ак. М.А. Лаврентьева, 15, (383) 333-17-46;E-mail: korob@hydro.nsc.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНЫХ И ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕТАЛЛ-МЕТАЛЛОИДНЫХ ПОКРЫТИЯХ ПРИ ИХ ФРИКЦИОННОМ НАГРУЖЕНИИ

Горячева И.Г., Любичева А.Н., Торская Е.В., Мышкин Н.К., Гуцев Д.М., Григорьев А.Я.

Тонкие покрытия системы металл—металллоид, обладающие высокой твердостью и вследствие этого высокой износостойкостью, можно рассматривать в качестве перспективных покрытий триботехнического назначения. В этой связи актуальной является задача систематического исследования фрикционного контакта таких покрытий для разработки методик оптимизации их триботехнических характеристик. Покрытие состоит из двух слоев, полностью сцепленных как друг с другом, так и с материалом подложки. Модуль упругости верхнего слоя больше, чем модуль упругости подложки; толщина второго слоя существенно меньше, чем первого, а материал этого слоя является наиболее податливым. В предположении, что сила трения слабо влияет на распределение нормальных напряжений в контакте, были рассмотрены осесимметричные задачи о контакте упругого контртела для двух моделей покрытия. Покрытие может быть смоделировано трехслойным упругим основанием с полным сцеплением на границах раздела слоев (точная модель). Учитывая механические характеристики и толщину второго слоя, его можно смоделировать упругим слоем Винклера. В таком случае можно рассмотреть приближенную модель двухслойного упругого полупространства с условиями неполного сцепления на границе раздела. Обе модели допускают использование ранее разработанного численно-аналитического метода решения, основанного на интегральных преобразованиях Ханкеля. Технология нанесения покрытий дает возможность варьировать толщину и твердость верхнего слоя. В заданных диапазонах при разных нагрузках проведено сравнение результатов решения контактной задачи, полученных с использованием двух моделей покрытия. В случаях, когда использование приближенной модели дает пренебрежимо малую погрешность, были рассчитаны подповерхностные напряжения, возникающие в верхнем слое при его фрикционном нагружении. Определение внутренних напряжений является трехмерной задачей, для исследования которой использовались двойные интегральные преобразования Фурье и метод граничных элементов. Исследовано влияние величины коэффициента трения на концентрацию напряжений.

1. Рассматривается фрикционный контакт трехслойного упругого полупространства и сферического контртела (рис. 1). Используя предположение о пренебрежимо малом влиянии касательных напряжений в области контакта на распределение контактного давления, рассмотрим осесимметричную задачу с граничными условиями на поверхности:

$$\begin{aligned} &w^{(1)} + w^{(4)} = f(r) + \delta, && 0 < r < a; \\ &\sigma_z^{(1)} = 0, && a < r < \infty; \\ &\tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = 0. && \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $f(r)$ – форма индентора, δ – его вертикальное смещение, $w(r)$ – упругие нормальные перемещения поверхностей полупространства (1) и индентора (4), a – радиус неизвестной области контакта. На границах раздела слоев выполняются условия полного сцепления:

$$\begin{aligned} &w^{(i)} = w^{(i+1)}; \quad u^{(i)} = u^{(i+1)}; \\ &\sigma_z^{(i)} = \sigma_z^{(i+1)}; \quad \tau_{rz}^{(i)} = \tau_{rz}^{(i+1)}, \quad i = 1..2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Систему уравнений замыкает уравнение равновесия:

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^a p(r)r\,dr\,d\varphi\ , \tag{1.3}$$

где $p(r)$ – неизвестное контактное давление ($p(a)=0$).

Задача об осесимметричном нагружении многослойного упругого полупространства в общем случае рассмотрена в [1], примеры расчета внутренних напряжений для случая пяти слоев

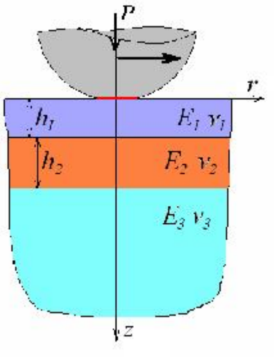


Рис.1

представлены в [2]. Метод решения построен на использовании интегральных преобразований Ханкеля. В работе [3] был использован метод граничных элементов для решения задачи о контакте произвольного гладкого осесимметричного индентора и двухслойного упругого полупространства. Этот метод был применен в данном случае для определения распределения контактного давления и радиуса области контакта.

Задача об определении внутренних напряжений при фрикционном контакте сферического индентора является трехмерной и сложной для рассмотрения в случае двухслойного покрытия. Поскольку слой (2) является мягким относительно слоя (1) и полупространства (3), рассмотрим приближенную модель для исследования напряженного состояния. В этой модели слой (2) заменяется основанием Винклера, обладающим нормальной податливостью k_1 и горизонтальной податливостью k_2. Таким образом, рассматривается двухслойное упругое полупространство со следующими условиями на границе раздела слоев:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)},\ \sigma_z^{(1)} = k_1\left(w^{(1)} - w^{(2)}\right), \\ &\tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)},\ \tau_{rz}^{(1)} = k_2\left(u^{(1)} - u^{(2)}\right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Вопрос о связи между коэффициентами, определяющими нормальную и горизонтальную податливость, рассмотрен в [4]. Задача с граничными условиями (1.1), (1.3)—(1.4) для случая одинаковых упругих свойств верхнего слоя и полупространства рассмотрена в [5]. В данном случае сравнение решения задачи в постановке (1.1)—(1.3) с приближенным решением позволяет определить параметры податливости в (1.4). Таким образом, возможно осуществить переход к решению задачи о фрикционном контакте со следующими условиями на поверхности:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)}(x,y) = p\ (x,y), \quad \tau_{xz}^{(1)} = -\mu\, p\ (x,y), \quad x^2 + y^2 \le a \\ &\sigma_z^{(1)} = 0, \quad \tau_{xz}^{(1)} = 0, \quad x^2 + y^2 \ge a \\ &\tau_{yz}^{(1)} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty \end{aligned} \tag{1.5}$$

На границе раздела слоев:

$$\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \\ &\sigma_z^{(1)} = k_1\left(u_z^{(1)} - u_z^{(2)}\right), \\ &\tau_{xz}^{(1)} = k_2\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}\right), \\ &\tau_{yz}^{(1)} = k_2\left(u_y^{(1)} - u_y^{(2)}\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Задача с граничными условиями (1.5)—(1.6) решается также с помощью метода граничных элементов. Задача сводится к определению внутренних напряжений от постоянной распределенной нагрузки и может быть решена с помощью метода, основанного на двойных интегральных преобразованиях Фурье [1]. Метод решения применительно к расчету напряженного состояния двухслойного упругого полупространства в условиях фрикционного нагружения представлен в [6].

2. Благодаря сочетанию высокой твердости, износостойкости и стойкости к действию агрессивных сред, металл-металлоидные, в частности, никель-фосфорные покрытия нашли широкое применение в различных изделиях машиностроения, химической промышленности и электроники [7]. Стабильные и близкие по значению коэффициенты трения в вакууме и атмосфере, высокая электропроводность и отсутствие магнитных свойств делает их особенно перспективными для защиты узлов трения и электрических контактов аэрокосмической техники [8].

Рассматривается покрытие из модифицированного никеля, модуль упругости которого в зависимости от модификации возрастает, начиная от $2{\cdot}10^{11}$ Па (модуль упругости чистого никеля); в расчетах в качестве верхнего предела принято значение $3{\cdot}10^{11}$ Па. Толщина покрытия 5 мкм. Модуль упругости промежуточного медного слоя – $1{,}3{\cdot}10^{11}$ Па, максимальная толщина слоя полагалась равной 0,5 мкм. Материал основного тела (упругого полупространства) – никель. В качестве контртела использовался стальной шарик радиуса 4,7 мм, нагрузка составляла 100 мН. Коэффициент трения без смазки на первой стадии испытаний был равен 0,13.

На рис. 2 приведены распределения контактного давления, полученные для предельных значений модулей упругости покрытия – минимального (кривая 1) и максимального (кривая 2). Расчеты показали, что наличие тонкого медного слоя пренебрежимо мало влияет на распределение контактного давления. Распределение давления для покрытия из чистого никеля близко к распределению Герца. Промежуточный слой оказывает влияние на распределение внутренних напряжений в покрытии, в особенности вблизи границы раздела между слоями, поэтому в данном случае в качестве критерия соответствия приближенной модели использовались результаты расчета максимальных касательных напряжений на границе раздела (а именно, совпадение максимальных значений максимальных касательных напряжений при осесимметричном нагружении). Подобное совпадение при распределении давления, представленном на кривой 2 (рис. 2), получено при $k_1 = 3{,}02 \cdot 10^{17}$ Па/м.

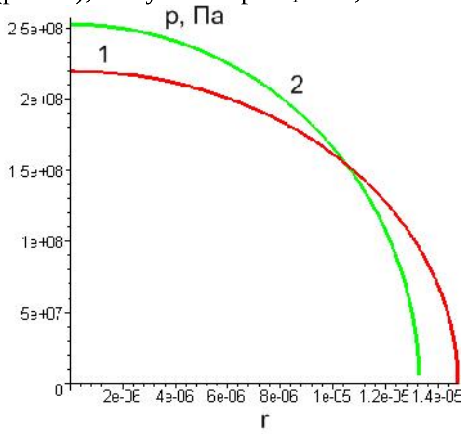
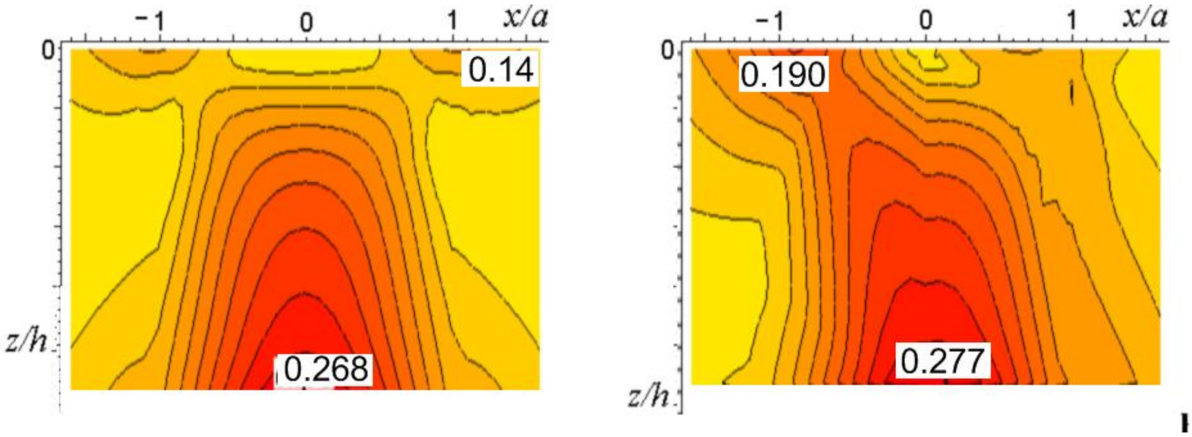


Рис. 2

На рис. 3 представлено распределение максимальных касательных напряжений в покрытии при осесимметричном нагружении (рис. 3, а) и в условиях фрикционного контакта (рис. 3, б). Безразмерные значения напряжений отнесены к значению максимального контактного давления (кривая 2 на рис. 2). На основании расчета можно сделать вывод, что при данных параметрах фрикционного нагружения покрытия трение существенно влияет на величину максимальных касательных напряжений на поверхности (увеличивает их более чем на 30%); влияние на величину напряжений на границе раздела не столь значительно.



а б

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин В.С., Шапиро Г.С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1970.
2. Торская Е.В., Лушников Н.А., Лушников П.А. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных дорожных одежд. //Трение и износ. 2008. 29. № 2. С.204-210.
3. Torskaya E. V., Goryacheva I. G. The effect of interface imperfection and external loading on the axisymmetric contact with a coated solid. Wear, 2003, vol. 254. pp. 538–545
4. Горячева И.Г., Фельдштейн И.В. Анализ влияния внутренней системы дефектов на напряженное состояние упругих тел. //Изв. РАН. МТТ. 1996.19. № 5. С.55-61.

5. Горячева И.Г., Торская Е.В. Исследование внутренних напряжений в материалах, ослабленных системой дефектов, при фрикционном нагружении. /В сб.: науч.тр.”Успехи механики сплошных”: к 70-летию академика В.А. Левина. Владивосток: Дальнаука, 2009. 170-176 с.
6. Торская Е.В. Исследование влияния трения на напряженное состояние тел с покрытиями. // Трение и износ. 2002. 23. № 2. С.130-138.
7. Reidel W. Electroless Nickel Plating. Redwood Press.1991.
8. Цеев Н. А., Козелкин В. В., Гуров А. А. Материалы для узлов сухого трения, работающих в вакууме. М.: Машиностроение,1991.

Сведения об авторах:

Горячева Ирина Георгиевна – зав. лаб. трибологии Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, +7 495 4343692
E-mail goryache@mail.ru
Любичева Анастасия Николаевна – научный сотрудник лаб. трибологии Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, +7 495 4343692
E-mail lyubicheva@mail.ru
Торская Елена Владимировна – старший научный сотрудник лаб. трибологии Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, +7 495 4343692
E-mail torskaya@mail.ru
Мышкин Николай Константинович – директор Института механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАН Беларуси, + 375 232774646
nkmyshkin@mail.ru
Григорьев Андрей Яковлевич – зав. лаб. трибоанализа Института механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАН Беларуси, + 375 232774635
aygri@tut.by
Гуцев Дмитрий Михайлович – младший научный сотрудник лаб. трибоанализа Института механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАН Беларуси, + 375 232774635

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРИКЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ШЕРОХОВАТЫХ ТЕЛ

Горячева И.Г. , Маховская Ю.Ю.

Построена модель для изучения совместного влияния несовершенной упругости реальных тел, микрогеометрии их поверхностей и адгезионного взаимодействия между ними на характеристики контактного взаимодействия и силу трения при относительном скольжении шероховатых поверхностей. Модель основана на решении контактной задачи в плоской постановке о скольжении жесткого тела с регулярным рельефом по границе вязкоупругого основания с учетом молекулярного притяжения поверхностей в зазоре между ними.

1. Введение. Молекулярно-механическая теория трения рассматривает два основных источника возникновения сопротивления при относительном перемещении поверхностей: это гистерезисные потери, связанные с циклическим деформированием материалов, обладающих несовершенно упругими свойствами, и молекулярные силы между поверхностями [1]. Роль их в каждом конкретном случае определяется рядом факторов, среди которых следует отметить физико-механические и геометрические характеристики поверхностных слоев взаимодействующих тел, свойства промежуточной среды, условия работы сопряжения, к которым относятся давление, скорость скольжения, температура, свойства окружающей среды.

Для трения без смазки важным фактором, определяющим силу трения, является вид шероховатости поверхностей взаимодействующих тел. В настоящее время принята концепция о многомасштабности этой характеристики: различают макрошероховатость (с характерным размером неровностей порядка нескольких миллиметров), микрошероховатость (с характерным размером неровностей порядка нескольких микрон) и наношероховатость (с характерным размером неровностей порядка 10нм.). Неровности одной поверхности на разных масштабных уровнях деформируют поверхность другого тела, при этом под поверхностью возникает область неравномерного напряженно-деформированного состояния, которая распространяется на глубину, соизмеримую с масштабом самой неровности, и перемещается при относительных перемещениях поверхностей. Таким образом, поверхностные слои материала оказываются циклически нагруженными, что является источником гистерезисных потерь при трении. Силы молекулярного притяжения возникают в зазоре между поверхностями на расстояниях, определяемых потенциалом их взаимодействия [2], оказывая существенное влияние на характеристики контактного взаимодействия и силу трения. Кроме того, вследствие наличия сил молекулярного притяжения в процессе сближения и удаления неровностей взаимодействующих тел при скольжении происходит диссипация энергии [3-5].

Модели контактного взаимодействия несовершенно упругих, а именно, вязкоупругих тел, с поверхностями, обладающими регулярным микрорельефом, при скольжении с постоянной скоростью в отсутствие адгезии разработаны в [4,6,7]. Результаты решения задач для разных моделей вязкоупругого материала в квазистатической постановке позволили установить характер зависимости контактных характеристик, внутренних напряжений и силы трения от скорости, нагрузки, параметров микрорельефа и свойств взаимодействующих тел.

В настоящее время все большее внимание исследователей уделяется изучению контактного взаимодействия на микро- и нано- масштабном уровне, где важная роль отводится адгезионному взаимодействию поверхностей. На основании разработанных моделей контактного взаимодействия упругих тел при скольжении изучена зависимость силы трения от нормального давления и скорости, в том числе и в области отрицательных давлений [8-13]. Задача об адгезии вязкоупругих сфер при их нормальном сближении и удалении решена в [14]. В [15] рассмотрена задача о скольжении цилиндра по вязкоупругому основанию с учетом сил адгезионного притяжения вблизи области контактного взаимодействия и, таким образом, изучено влияние молекулярных сил на силу трения, возникающую за счет гистерезисных потерь в вязкоупругом материале. Основной особенностью исследований, проведенных в цитируемых выше работах, является учет геометрии взаимодействующих неровностей только вблизи пятен фактического контакта неровностей.

Большой интерес представляет изучение адгезионного взаимодействия шероховатых тел с учетом их геометрии не только в зонах непосредственного контакта поверхностных выступов, но и вне этих зон. В трибологии известно явление насыщения области фактического контакта, когда площадь фактического контакта стремится к номинальной [16]. Учитывая многомасштабность шероховатой поверхности, явление насыщения может наступать не всюду, а только на определенном масштабном уровне.

Целью настоящего исследования является построение модели контактного взаимодействия шероховатых тел в условиях трения скольжения, учитывающей одновременно несовершенную упругость реальных тел, микрогеометрию их поверхностей и адгезионное взаимодействие в зазоре между поверхностями.

2. Описание модели. Модель строится на основе решения контактной задачи о скольжении с постоянной скоростью V вдоль оси *Ox* жесткого волнистого тела, поверхность которого описывается периодической функцией $f\left(x\right)=h\sin^2\dfrac{\pi x}{l}$ ($h \ll l$), где h и l – высота и длина волны, соответственно, по вязкоупругому основанию (фиг. 1), механические свойства которого описываются одномерной линейной моделью:

$$w+T_\varepsilon\,\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{(1-\nu^2)H}{E}\left(p+T_\sigma\frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{2.1}$$

где p и w – давление и перемещения на границе вязкоупругого основания, E - длительный модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, H – толщина вязкоупругого слоя, T_ε и T_σ – времена последействия и релаксации. Считается, что контактное давление *p(x,y,t)* действует в направлении нормали к поверхности вязкоупругого основания, в этом же направлении имеет место перемещение границы основания *w(x,y,t)*.

Пусть неподвижная система координат *(x',y',z')* связана с вязкоупругим основанием, а система координат *(x, y, z)* связана со скользящим волнистым телом, так что:

$$x' = x+Vt;\quad y' = y;\quad z' = z \tag{2.2}$$

Считаем движение установившимся по отношению к системе координат *(x,y,z)*, в которой смещения и напряжения не зависят от времени *t* и являются функциями только координат *(x,z)*. В силу постановки задачи смещения и перемещения не зависят от координаты *y*, поэтому решение задачи можно строить в плоскости $y=0$.

В подвижной системе координат *(x,y)* соотношение (2.1) принимает вид:

$$w-VT_\varepsilon\,\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{(1-\nu^2)H}{E}\left(p-T_\sigma V\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{2.3}$$

Если между поверхностями существует адгезионное (молекулярное) притяжение, то на границе вязкоупругого основания действует отрицательное адгезионное напряжение $p=-p_a(\delta)$, где δ – величина зазора между поверхностями. Воспользуемся моделью Мажи-Дагдейла [16], в которой зависимость адгезионного напряжения от зазора между поверхностями имеет вид одной ступеньки:

$$p_a(\delta)=\begin{cases} p_0, & 0<\delta\le\delta_0 \\ 0, & \delta>\delta_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

где δ_0 — максимальная величина зазора между поверхностями, на котором действует адгезионное притяжение. Поверхностная энергия взаимодействия γ определяется соотношением:

$$\gamma=\int_0^{+\infty}p_a(\delta)\,d\delta=p_0\delta_0 \tag{2.5}$$

Постановка контактной задачи, а именно, условия на функции контактного давления и перемещения зависят от режима заполнения зазора.

3. Решение задачи при разных режимах заполнения зазора. Рассматриваются три возможных режима: дискретный контакт с зонами адгезионного взаимодействия (фиг. 1), дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием (фиг. 2а) и насыщенный контакт (фиг. 2б). Реализуется один из этих режимов в зависимости от заданных характеристик взаимодействующих тел и условий нагружения (нагрузки и скорости скольжения).

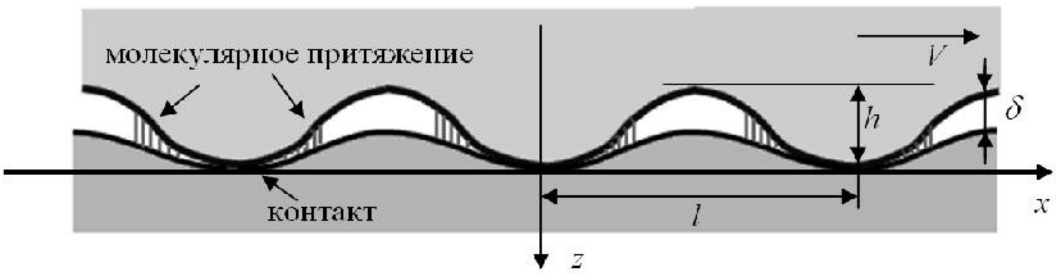


Рис. 1. Дискретный контакт с зонами адгезионного взаимодействия

В случае **насыщенного контакта** перемещения границы $z=0$ вязкоупругого основания $w(x)\equiv w(x,0)$ удовлетворяют условию контакта по всей поверхности:

$$w(x)=D+f(x) \tag{3.1}$$

где D – сближение тел за счет деформирования.

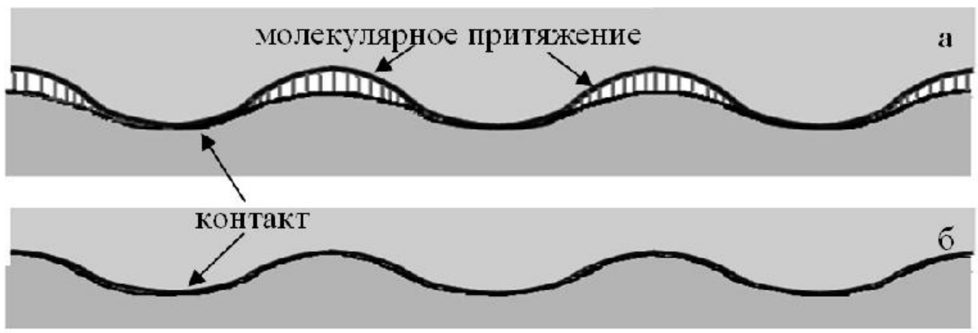


Рис.2. Дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием (а) и насыщенный контакт (б).

Поскольку шероховатая поверхность описывается периодической функцией $f(x)$, контактные давления $p(x)$ и перемещения $w(x)$ тоже являются периодическими функциями. Соотношения (2.3) и (3.1) позволяют определить контактное давление *p(x)*:

$$p(x)=\frac{E}{2H}\frac{h(l^2+4\pi^2T_\varepsilon T_\sigma V^2)\cos\frac{2\pi x}{l}+2\pi lhV(T_\varepsilon-T_\sigma)\sin\frac{2\pi x}{l}+(4\pi^2T_\sigma^2V^2+l^2)\left(2D-h\right)}{(l^2+4\pi^2T_\sigma^2V^2)} \tag{3.2}$$

Нормальная и тангенциальная погонные силы *P* и *T*, действующие на период, определяются, соответственно, выражениями:

$$P=\int_{-l/2}^{l/2}p(x)dx=\frac{El}{2Hl}(2D-h)\,,\quad T=\int_{-l/2}^{l/2}\tau(x)dx=\frac{\pi^2h^2EVl(T_\varepsilon-T_\sigma)}{2H(l^2+4\pi^2T_\sigma^2V^2)} \tag{3.3}$$

Для исследования **дискретного контакта с насыщенным адгезионным взаимодействием** рассмотрим решение задачи в интервале $x\in[-a,l-a]$. В области контакта $-a<x<b$ выполняется условие контактирования (3.1), а в области отсутствия контакта $b<x<l-a$ - вытекающее из (2.4) условие адгезионного взаимодействия:

$$p(x)=-p_0 \tag{3.4}$$

Дифференциальное уравнение (2.3) решается в интервале $-a < x < b$ относительно контактного давления $p(x)$ при перемещении $w(x)$, заданном соотношением (3.1). В интервале $b < x < l - a$ дифференциальное уравнение (2.3) решается относительно $w(x)$ при давлении $p(x)$, заданном соотношением (3.4). Дополнительными условиями служат условия непрерывности функций $p(x)$ и $w(x)$ в точках $x = -a$ и $x = b$ и условие периодичности. В результате решения этой системы уравнений получены аналитические выражения для давления *p(x)* в области контакта $-a \le x \le b$ и перемещения $w(x)$ в области $b < x < l - a$.

В режиме **дискретного контакта с зонами адгезионного взаимодействия** имеем три вида граничных условий в трех контактных зонах. В области контакта $-a < x < b$ выполняется условие контактирования (3.1). В областях адгезионного взаимодействия $-a_1 < x < -a$ и $b < x < b_1$ выполняется условие адгезионного взаимодействия (3.4). В области отсутствия взаимодействия $b_1 < x < l - a_1$ граница вязкоупругого основания свободна от усилий:

$$p(x) = 0 \tag{3.5}$$

Дифференциальное уравнение (2.3) решается на интервале $-a < x < b$ относительно контактного давления $p(x)$ при перемещении $w(x)$, заданном соотношением (3.1). На интервалах $-a_1 < x < -a$ и $b < x < b_1$ дифференциальное уравнение (2.3) решается относительно $w(x)$ при давлении $p(x)$, заданном соотношением (3.4), а на интервале $b_1 < x < l - a_1$ – при давлении $p(x)$, заданном условием (3.5). В качестве дополнительных условий используем условия непрерывности для давления $p(x)$ и перемещения $w(x)$ в точках $x = -a_1$, $x = -a$ и $x = b$ и $x = b_1$ и условия периодичности. Кроме того, для определения границ областей адгезионного взаимодействия a_1 и b_1 используем условия, следующие из (2.4) и (2.5), согласно которым величина зазора между поверхностями в точках $x = -a_1$ и $x = b_1$ должна быть равно величине δ_0, т.е.

$$\begin{gathered} w(-a_1) - f(-a_1) - D = \frac{\gamma}{p_0} \\ w(b_1) - f(b_1) - D = \frac{\gamma}{p_0} \end{gathered} \tag{3.6}$$

4. Обсуждение результатов и выводы. Модель использована для анализа взаимодействия шероховатой поверхности, характеризуемой разными параметрами микрогеометрии на разных масштабных уровнях, с гладким вязкоупругим основанием в условиях трения скольжения. Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

- учет адгезионного взаимодействия приводит к существенному увеличению фактической площади контакта; переход от дискретного к полному контакту происходит при меньших нагрузках, чем при отсутствии адгезии;
- наличие адгезии приводит к тому, что контакт существует даже при отрицательных внешних нагрузках (разрывающих поверхности), при этом деформационная составляющая силы трения всегда действует в направлении, препятствующей движению волнистого тела;
- с увеличением адгезионного давления на каждом масштабном уровне сила трения возрастает;
- для нано- и микро- масштаба, удельная сила трения возрастает и быстрее возникают условия насыщенного контакта.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 09-08-00901-а, 09-08-01236_а, 09-01-96503-р_юг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крагельский И.В. Молекулярно-механическая теория трения //В сб.: "Трение и износ в машинах". Т. III. М.– Л.: Изд-во АН СССР, 1949. С.178 -183.
2. Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985.
3. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикладная математика и механика (ПММ). 2001. Т. 65. Вып. 2. С.279-289.
4. Горячева И.Г. Механика контактных взаимодействий. М. Наука, 2001, 478с.
5. Johnson K.L., Greenwood J.A. An adhesion map for the contact or elastic spheres // J. Colloid and Interface Sci. 1997. Vol. 192. P.326–333.
6. Goryacheva I.G., Sadeghi F. Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // Wear, 1995, V.184, P.125-132.
7. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых упругих тел // Трение и износ. 1997. Т.18. №1. С.5-12.
8. Makhovskaya Yu.Yu., Goryacheva I.G. The combined effect of capillarity and elasticity in contact interaction // Tribology International. 1999, № 32, pp. 507-515.
9. Маховская Ю.Ю. Дискретный контакт упругих тел при наличии адгезии // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 2. С.49–60.
10. Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю. Об одном подходе к решению задач о взаимодействии упругих тел при наличии адгезии // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 3. С.323-327
11. Irina Goryacheva, Yulia Makhovskaya, Adhesion effect in contact interaction of solids // Comptes Rendus Mecanique, № 336, pp.118-125, 2008.
12. D. Maugis**,** Contact Adhesion and Rupture of Elastic Solids**,** Springer-Verlag, Berlin, 2000.
13. Borodich F.M., Galanov B.A. Non-direct estimations of adhesive and elastic properties of materials by depth-sensing indentation // Proc. R. Soc. A (2008), 464, pp.2759-2776.
14. Johnson K.L., Mechanics of adhesion // Tribology International. 1998. № 8. P. 413-418.
15. Маховская Ю. Ю. Скольжение вязкоупругих тел при наличии адгезии //Прикладная математика и механика (ПММ). 2005. Т. 69. № 2. С.334-344.
16. Бартенев Г.М., Лаврентьев В.В. Трение и износ полимеров. М.: Химия, 1972. 240с.

Сведения об авторах:

Горячева Ирина Георгиевна – заведующая лабораторией, академик РАН, Институт проблем механики РАН им.А.Ю.Ишлинского, (495) 4343692
E-mail: goryache@ipmnet.ru

Маховская Юлия Юрьевна – старший научный сотрудник, Институт проблем механики РАН им.А.Ю.Ишлинского, (495) 4343692
E-mail: makhovskaya@mail.ru

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ОТКРЫТЫХ МОРЯХ И ИХ КРИТИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ОБЪЕКТЫ ИНФОСТРУКТУРЫ ДОБЫЧИ И ТРАНСПОРТИРОВКИ УГЛЕВОДОРОДОВ

Григоренко К.С., Матишов Д.Г., Соловьева А.А., Хартиев С.М.

Рассматривается распространение свободных внутренних волн в произвольно стратифицированном океане и определяются декременты их затухания. Далее на основе конечно-элементного подхода решения однородной краевой задачи разработана программа определения спектра и соответствующих мод вертикальной и горизонтальной компонент скорости свободных внутренних волн. Эта программа, позволяет в режиме on-line находить характеристики внутренних волн непосредственно в рейсе, сразу после «живого» измерения характеристик водной среды CTD – зондированием. Проведены расчеты характеристик внутренних волн в районах добычи и транспортировки углеводородов — Северное, Баренцово и Охотское моря, изучены сезонные и пространственные особенности их распространения.

В настоящее время изучение динамики океана невозможно себе представить без учета внутренних волн, которые играют важную роль в различных физических, химических, биологических процессах в океанах и морях. Воды океана, как правило, устойчиво стратифицированы, поэтому гравитационные внутренние волны оказываются повсеместным явлением и с их воздействием на гидротехнические сооружения необходимо считаться в районах добычи и транспортировки углеводородов.

Само существование и свойства внутренних волн неразрывно связаны с плотностной стратификацией, которая может претерпевать сезонные изменения [1]. Покажем, что даже незначительные сезонные перемены в вертикальной структуре плотности могут привести к существенным количественным и качественным изменениям характеристик волнового движения.

1. Рассмотрим безграничный в горизонтальных направлениях плоский слой непрерывно стратифицированной по плотности жидкости постоянной глубины H.
Выберем начало прямоугольной системы координат XOZ на невозмущенном уровне свободной поверхности, ось Z направим вертикально вверх. Система уравнений с граничными условиями, описывающая динамику внутренних волн в безразмерной форме, с учетом приближения твердой крышки, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K_L}{H\sqrt{gH}}\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{K_L}{H\sqrt{gH}}\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \frac{D}{H\sqrt{gH}}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{1.4}$$

$$V_z = 0 \text{ при } z = 0, -1 \tag{1.5}$$

где безразмерные величины связаны с размерными соотношениями:

$$\bar{z} = Hz,\ \bar{x} = Hx,\ \bar{t} = t\sqrt{g^{-1}H},\ \bar{V_x} = \sqrt{gH}V_x,\ \bar{V_z} = \sqrt{gH}V_z,$$
$$\bar{p} = \rho_0(0)gHp,\ \overline{\rho_0} = \overline{\rho_0}(0)\rho_0,\ \bar{\rho} = \overline{\rho_0}(0)\rho \tag{1.6}$$

Здесь, соответственно, V_x и V_z – горизонтальная и вертикальная составляющие волновых возмущений скорости; $\rho_0(z)$ – стационарное распределение плотности; p и ρ – соответственно, волновые возмущения давления и плотности; g – ускорение свободного падения; K_L – коэффициент горизонтального турбулентного обмена; D – коэффициент горизонтальной диффузии плотности.

Решение краевой задачи (1.1)-(1.5) ищем в виде:

$$(p, \rho, V_x, V_z) = (P(z), R(z), U(z), W(z))e^{i(kx+\sigma t)} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.1)-(1.5), получаем относительно $W(z)$ однородную краевую задачу вида:

$$(\rho_0 W')' - k^2(\rho_0' + \omega^2\rho_0)\omega^{-2}W = 0,\ W(0) = 0; W(-1) = 0 \tag{1.8}$$

где штрихом обозначены производные по Z;

$$\alpha = \frac{\mu}{2H\sqrt{gH}};\ \beta = \frac{\delta}{2H\sqrt{gH}};\ \mu = \left|K_L - D\right|;\ \delta = K_L + D \tag{1.9}$$

$$\omega^2 = -\left(i\sigma + k^2\frac{K_L}{H\sqrt{gH}}\right)\left(i\sigma + k^2\frac{D}{H\sqrt{gH}}\right) \tag{1.10}$$

Задавая волновое число «k», решение однородной краевой задачи (1.8) ищем с помощью метода конечных элементов. Реализация программы расчета модального состава внутренних волн, составленная в пакете FlexPDE, позволяет найти дисперсионные зависимости $\omega_n(k)$, где n – номер моды $(n = 1, 2, 3...)$. Решая далее уравнение (1.10) относительно σ, имеем:

$$\sigma_{1,2}^n = i\beta k^2 \pm \sqrt{\omega_n^2(k) - \alpha^2 k^4} \tag{1.11}$$

здесь индекс «n» принимает целые значения $(n = 1, 2, 3...)$.

Рассмотрим случай, когда:

$$\omega_n^2(k) > \alpha^2 k^4 \tag{1.12}$$

Подставляя выражение (1.11) в (1.7), и выделяя действительную часть, находим:

$$\mathrm{Re}V_{zn}^{\pm} = W(z)e^{-\beta k^2 t}\cos(kx \pm \sqrt{\omega_n^2(k) - \alpha^2 k^4}\, t) \tag{1.13}$$

Поскольку $\omega_n(k) \to 0$ при $n \to \infty$, то неравенство (1.12) нарушается, начиная с некоторого номера N_0 ($n > N_0$). Таким образом, при выполнении условия (1.12) существует конечное число N_0 прогрессивных внутренних волн (1.13), затухающих с одинаковым декрементом:

$$d = \beta k^2 \tag{1.14}$$

Рассмотрим ситуацию, возникающую при $n > N_0$, когда имеет место неравенство:

$$\omega_n^2(k) < \alpha^2 k^4 \tag{1.15}$$

Выражение (1.11) в этом случае принимает вид:

$$\sigma_{1,2}^n = i(\beta k^2 \pm \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)}) \tag{1.16}$$

Подставляя (1.16) в (1.7), и выделяя действительную часть, получаем:

$$\mathrm{Re}V_{zn}^{\pm} = W(z)e^{-(\beta k \pm \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)})t}\cos kx \tag{1.17}$$

Формула (1.17) описывает стоячие внутренние волны каждой n-ой моде, которой соответствуют два декремента:

$$d_1 = \beta k^2 + \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)},\ d_2 = \beta k^2 - \sqrt{\alpha^2 k^4 - \omega_n^2(k)} \tag{1.18}$$

Первый – быстрому апериодическому режиму затухания, второй – медленному. В обоих случаях $n > N_0$, и апериодических режимов существует бесконечно много $n \to \infty$ [2,3].

2. Используя формулы (1.12)-(1.18), рассчитаем параметры внутренних волн для стандартного океанологического разреза м. Анива – м. Докучаева, расположенного в южной части Охотского моря (рис. 1). На рис.2 показаны сезонные изменения плотности $\rho_0(z)$, построенные для данного района с помощью формулы УС 80 [1]. Дисперсионные зависимости $\omega_n(k)$, кривые $\alpha k\, 2$ и вертикальные профили мод внутренних волн, соответствующие июньской плотностной стратификации, представлены на рис. 3,4 (цифрами указан номер моды). Видно, что с увеличением турбулентной вязкости ($\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$) количество мод внутренних волн, затухающих периодически во времени, уменьшается.

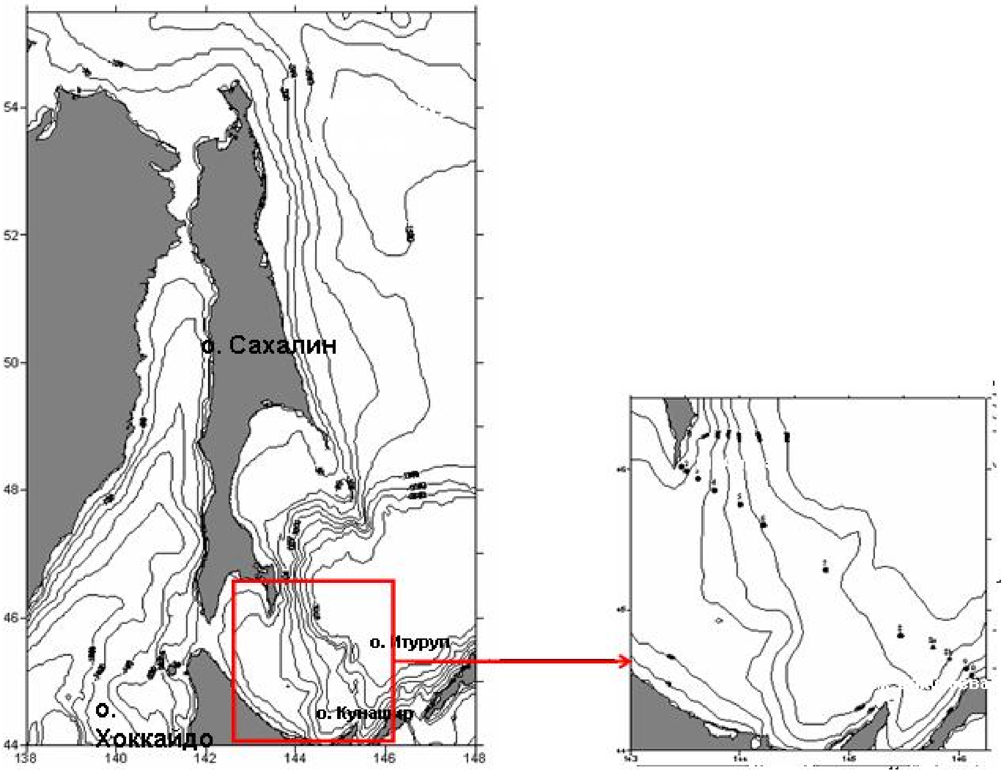


Рис 1. Исследуемый район охотского моря. Разрез м. Анива – м. Докучаева.

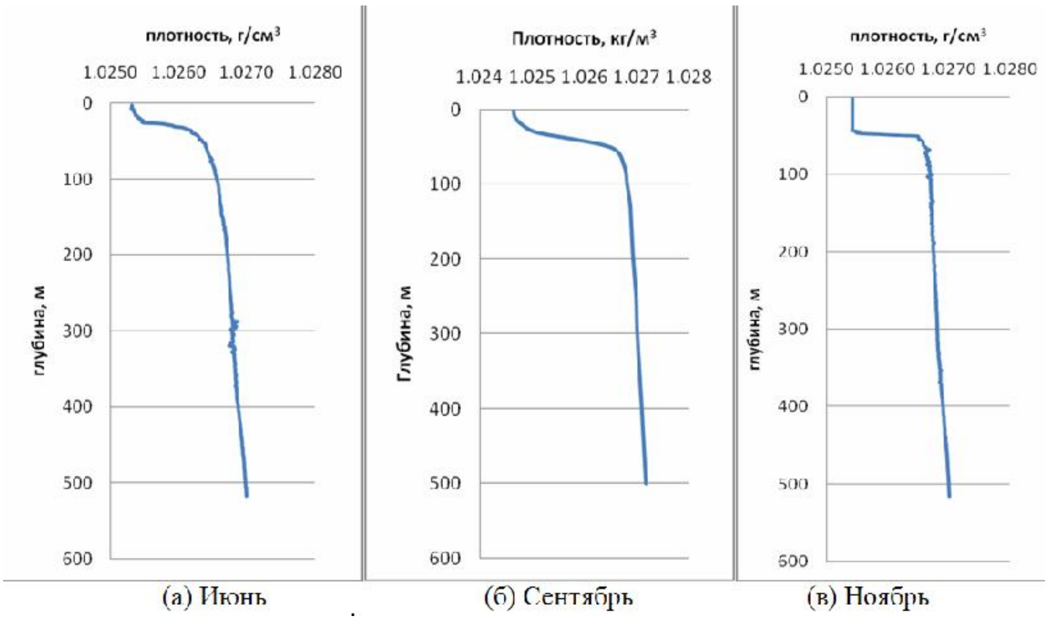


Рис. 2. Распределение плотности, рассчитанные по формуле УС-80 для южной части Охотского моря

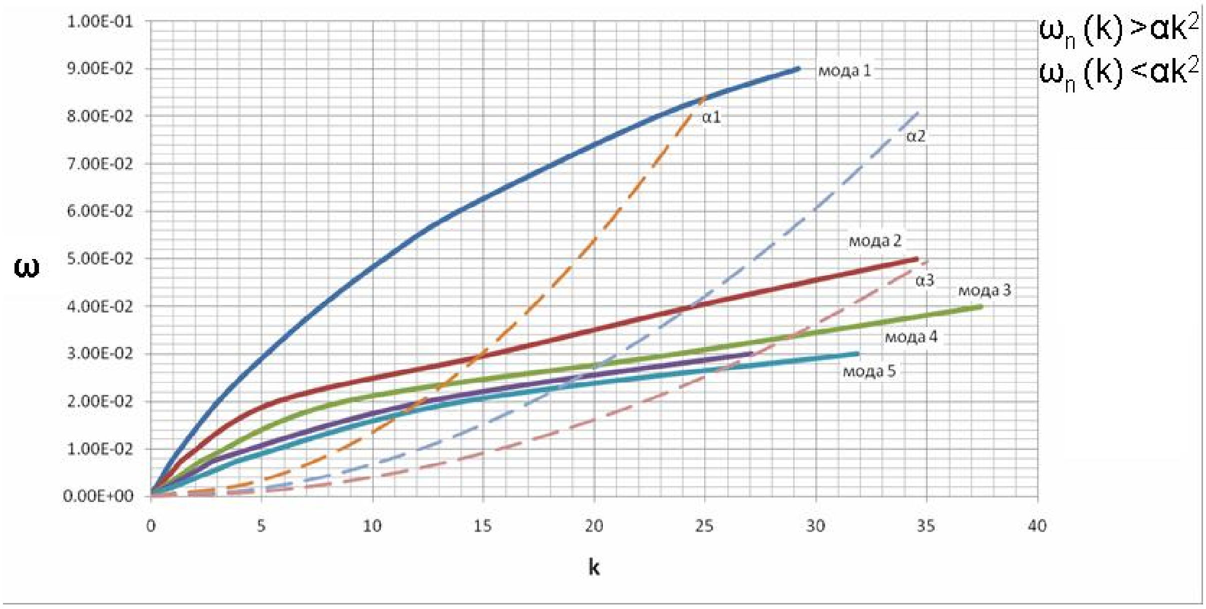


Рис. 3. Дисперсионные кривые.

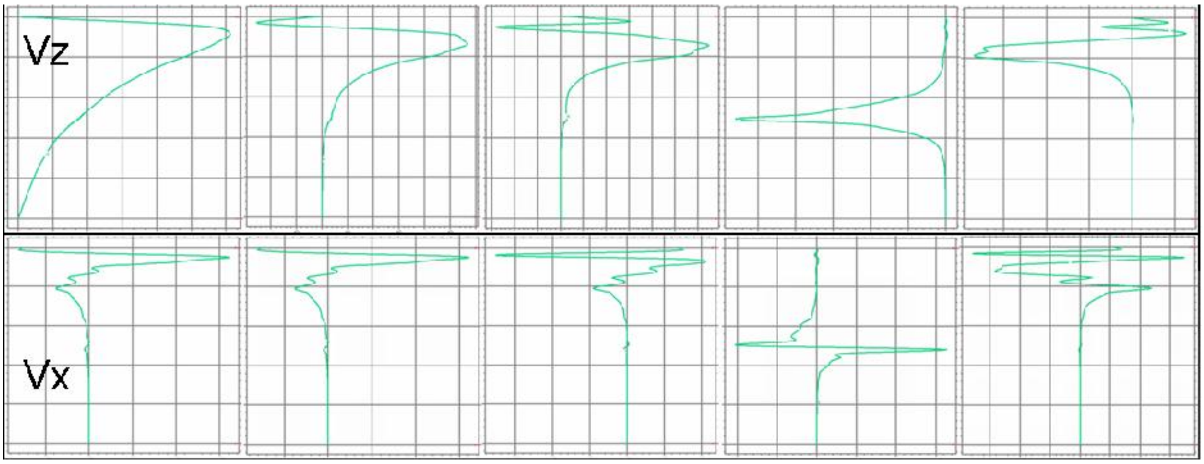


Рис. 4. Формы вертикальной и горизонтальной составляющих скорости первых пяти мод для $\omega = 3.00\text{e-}2$.

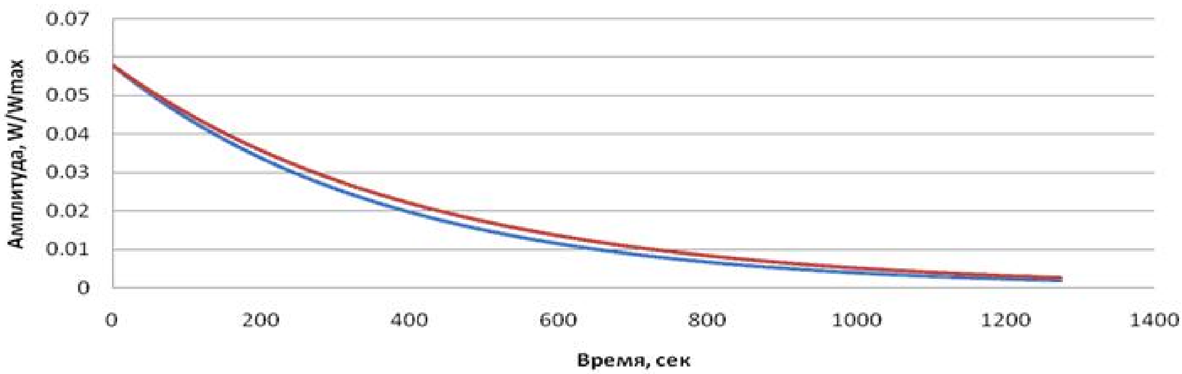


Рис. 5. Апериодический режим затухания амплитуд внутренних волн на глубине середины пикноклина (30 м.), $k = 15$, июнь 2003 г.

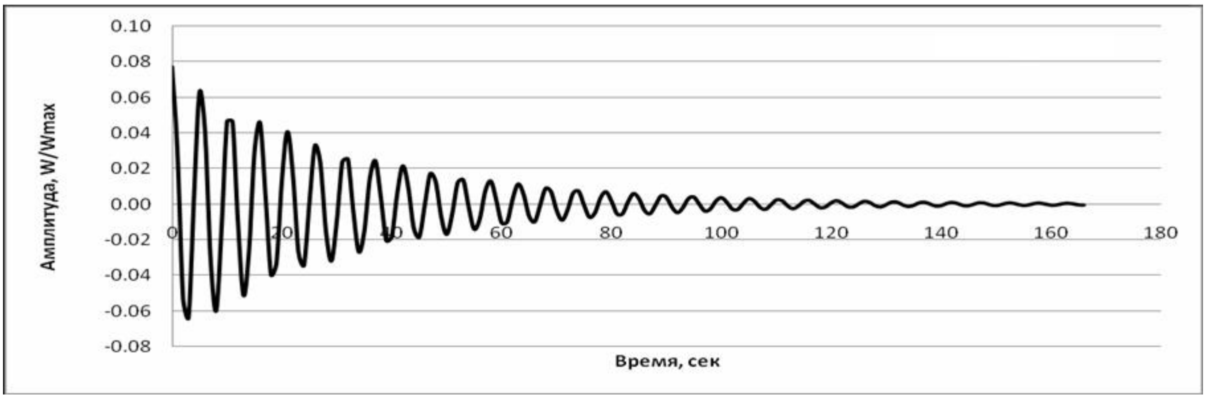


Рис. 6. Периодический режим затухания амплитуд внутренних волн на глубине середины пикноклина (30 м.), $k = 15$, ноябрь 2003 г.

На рис. 5, 6 изображены режимы затухания амплитуд внутренних волн, рассчитанных на глубине середины пикноклина в июне (рис. 5) и ноябре (рис. 6) 2003 год. Несмотря на то, что сезонные изменения вертикальных профилей плотности в июне и ноябре незначительны (рис. 2), режимы затухания мод внутренних волн существенно меняются. Так, в июне на глубине середины пикноклина существуют стоячие волны, затухающие апериодически в течение 20 мин., а в ноябре на данной глубине распространяется уже прогрессивная волна, амплитуда которой полностью затухает в течение 2 мин., то есть на порядок быстрее. Отметим, что полученные результаты могут быть использованы при анализе характеристик волнового следа, возникающего за движущимся в толще океана объектом, а также для оценки параметров внутренних волн, генерируемых периодическими колебаниями атмосферного давления и придонными возмущениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипкин В. С., Добролюбов С. А. Океанология. Физические свойства морской воды: Учебное пособие. – М.: МАКС Пресс, 2005. 216 с.
2. Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. М. Введение в гидродинамику и теорию волн. – СПБ.: Гидрометеоиздат, 1992. 264 с.
3. Задорожный А. И. Затухание длинных волн в экспоненциально стратифицированном море. МГИ. 1975. №3. С. 96-106.

Сведения об авторах:

Матишов Дмитрий Геннадьевич - доктор географических наук, член-корреспондент РАН по Отделению наук о Земле, заместитель Председателя Южного научного центра РАН, директор Азовского филиала Мурманского морского биологического института ЮНЦ РАН, директор-организатор Института аридных зон ЮНЦ РАН, заведующий кафедрой «Океанология», Южный федеральный университет.

Хартиев Сергей Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Океанология», Южный федеральный университет.

Григоренко Клим Сергеевич – студент V курса геолого-географического факультета, Южный федеральный университет, кафедра «Океанология».

Соловьева Анна Аркадьевна – студент V курса геолого-географического факультета, Южный федеральный университет, кафедра «Океанология».
E-mail microsol@km.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ЗОНЫ АНКЕРОВКИ АРМАТУРЫ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Григорян Д. Г.

В докладе представлена, выведенная методом поляризационно-оптических исследований, новая методика определения длины зоны анкеровки арматуры, которая позволяет учесть влияние модулей упругости арматуры и бетона на длину зоны анкеровки арматуры. Было проведено сравнение предлагаемой методики со схожими методами.

Исследования длины зоны анкировки арматуры в железобетонных конструкциях поляризационно-оптическим методом представлены в статье [1]. В этой работе представлена методика, полученная в результате вышеуказанных исследований, которая дает возможность определить длину зоны анкировки арматуры, учитывая как кубическую прочность бетона, так и влияние отношения модуля упругости арматуры и бетона на эту длину.

На рис. 1 изображается распределение испытательных значений длины зоны анкировки по отношению модулей упругости вкладыша и пластины.

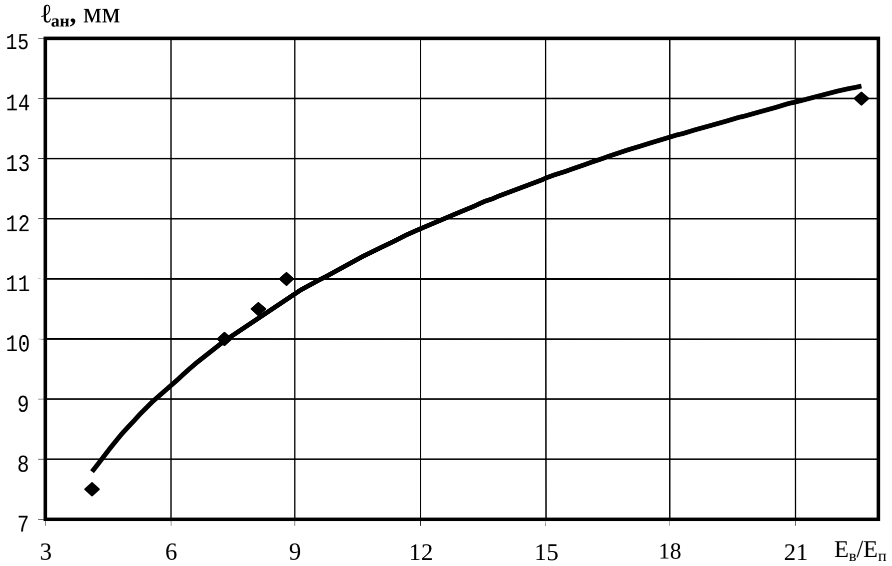


Рис. 1
Диаграмма зависимости длины зоны анкировки от соотношения модулей упругости вкладыша и пластины

По отношению к испытательным данным [1] квадратное отклонение кривой, выраженной уравнением, составляет 0,9878. Средняя статистическая кривая этого распределения лучше всего характеризуется следующим логарифмическим уравнением:

$$\ell_{an}=3.7637\bullet\ln\left(\frac{E_s}{E_b}\right)+2.4828 \tag{1.1}$$

На основании диаграммы определены сравнительные значения длины зоны анкировки, соответствующие модулям упругости арматуры и бетонов разного класса, они приведены в табл. 1.

По полученным данным, в зависимости от модуля упругости, для определения длины зоны анкировки арматуры примем следующую зависимость:

$$\ell_{an}=f\left(\ln\frac{E_S}{E_b},d,R_b\right), \tag{1.2}$$

где d – диаметр арматуры

R_b – кубическая прочность бетона,

E_s и E_b – соответственно, модули упругости арматуры и бетона.

Таблица 1. Сравнительные длины зоны анкировки арматуры

Класс бетона	Тяжелый бетон			Легкий бетон			$\ell^{т}_{ан} / \ell^{л}_{ан}$
	E_b x 10^{-3}, МПа	E_s/E_b	$\ell^{т}_{ан}$, мм	E_b x 10^{-3}, МПа	E_s/E_b	$\ell^{л}_{ан}$, мм	
B10	18.0	11.1	11.54	14.0	14.3	12.49	1.082
B15	23.0	8.7	10.62	15.7	12.7	12.06	1.135
B20	27.0	7.4	10.01	16.8	11.9	11.81	1.178
B25	30.0	6.7	9.62	17.7	11.3	11.61	1.206
B30	32.5	6.1	9.32	18.8	10.6	11.38	1.221

Влияние кубической прочности бетона на длину зоны анкировки арматуры рассчитывается коэффицентом, зависящим от прочности бетона, которая определяется следующей зависимостью:

$$m_b = \frac{R_b + 3.5}{R_b}, \tag{1.3}$$

где R_b – в МПа.

В формуле определения длины зоны анкировки арматуры требования безопасности можно учитывать коэффицент безопасности в применяемых действующих нормах $\Delta\lambda_{ан}$, который установился из условия исключения перемещения свободного конца арматуры [2,3]. Значения $\Delta\lambda_{ан}$ в действующих нормах устанавливаются, исходя из условия работы арматуры и бетона, в растянутом бетоне для работающей на растяжение арматуры она принимается 11, а в сжатом бетоне для растянутой или сжатой арматуры – 8.

Итак, имея в виду коэффициент безопасности и (1.2) зависимость, для определения длины зоны анкировки арматуры получаем следующую формулу:

$$\ell_{an} = d \bullet m_b \bullet \left(5 \bullet \ln\left(\frac{E_S}{E_b}\right) + \Delta\lambda_{an} \right) \tag{1.4}$$

В этой формуле длина зоны анкировки арматуры зависит как от соотношения модулей упругости арматуры и бетона, так и от кубической прочности бетона, что, по нашему мнению, делает формулу (1.4) более предпочтительной, чем предлагаемая нормами формула.

Определенные данной формулой длины зон анкировки арматуры легкого и тяжелого бетона различаются в пределах 5...16%.

По нашему мнению, физико-механические особенности легкого бетона можно учитывать их модулем упругости, т. е. имея зависимость длины зоны анкировки арматуры, полученную от соотношения модулей упругости арматуры и бетона, можно более точно оценить влияние свойств бетона на длину зоны анкировки арматуры и на напряженно-деформированное состояние. Согласно полученным результатам, в легких бетонах того же класса в зависимости от модулей их упругости, длина зоны анкировки арматуры изменяется до 10%, что не учитывается в действующих нормах.

Предлагаемая формула для определения длины зоны анкировки арматуры (1.4) дает возможность учитывать также в случае тепловой обработки изменение длины зоны анкировки арматуры в тяжелых бетонах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Д. Г., Ширинян Р. А. Исследование совместной работы арматуры и бетона поляриационно-оптическим методом. //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. №1. С. 79-85.

2. СНиП 2.03.01-84*, Бетонные и железобетонные конструкции. М: 1998. 77 с..

3. Мулин Н. М. Стержневая арматура железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1974. 233 с.

Сведения об авторе:

Григорян Давид Гамлетович – науч. сотрудн. Института механики НАН Армении, к.т.н.
Тел. +37493578796
Дом +37410423044
E-mail: Davit-grigoryan@yandex.ru

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Григорян М. С.

Рассматривается смешанная граничная задача для упругого изотропного клина с произвольным углом раствора при антиплоской деформации, когда на совокупности из произвольного конечного числа отрезков на одной грани клина задана компонента смещений, а на остальной части этой грани, а также на другой грани клина, задана компонента касательных напряжений. При этом предполагается, что на тех отрезках грани клина, где задана компонента смещений, заданы также равнодействующие неизвестных касательных напряжений.

Решение поставленной задачи при помощи интегрального преобразования Меллина и методов теории аналитических функций в сочетании с подходящими алгебраическими преобразованиями сводится к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром Коши на совокупности заданных отрезков. Это СИУ допускает замкнутое решение, содержащее интегралы типа Коши с непростыми весовыми функциями, берущиеся в смысле главного значения. Это обстоятельство значительно затрудняет эффективное вычисление этих интегралов и, в целом, усложняет численную реализацию обсуждаемой смешанной задачи. Поэтому решение определяющего СИУ здесь строится также известным численно-аналитическим методом решения СИУ, основанным на применении квадратурных формул Гаусса для сингулярного и обычного интегралов. В результате, определяющее СИУ задачи сводится к системе линейных алгебраических уравнений, которая решается методом Гаусса. После этого вычисляются основные характеристики изучаемой задачи. Рассмотрены частные случаи.

Смешанные граничные задачи для упругих изотропных тел при антиплоской деформации сводятся к смешанным граничным задачам теории двумерных гармонических функций для соответствующих областей. При этом на одной части границы области задается значение гармонической функции, а на остальной части границы – значение ее нормальной производной. Такие задачи, хорошо известные как задачи Келдыша – Седова, в свою очередь сводятся к граничным задачам теории аналитических функций и всесторонне исследованы в [1-3]. Их решения обычно содержат интегралы типа Коши в комплексной области, численная реализация которых сопряжена с преодолением значительных трудностей аналитического и вычислительного характера.

В настоящей работе рассматривается одна смешанная граничная задача теории упругости для клина с произвольным углом раствора при антиплоской деформации, сводящаяся с помощью интегрального преобразования Меллина, к сингулярному интегральному уравнению (СИУ), допускающему замкнутое решение. С другой стороны, к определяющему СИУ применяется известный численно-аналитический метод решения СИУ [4-6], что позволяет провести сравнительный анализ точного и приближенного решений задачи.

1. Пусть бесконечное упругое клиновидное тело с произвольным углом раствора α $(0<\alpha\le 2\pi)$, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ и находящееся в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy, в цилиндрической системе координат r,ϑ,z занимает область $\Omega=\left\{0\le r<\infty;\, 0\le\vartheta\le\alpha;\, -\infty<z<\infty\right\}$ и обладает модулем сдвига G. При этом в базовой плоскости Oxy введена полярная система координат (r,ϑ) с полюсом в начале координат 0 и с полярной осью Or, совпадающей с положительной полуосью Ox. Пусть далее $U_z=w(r,\vartheta)$ – единственная отличная от нуля компонента смещений точек клиновидного тела Ω в направлении оси Oz, а $\omega=\left\{0\le r<\infty;\, 0\le\vartheta\le\alpha\right\}$ – сечение Ω с плоскостью $z=0$.

Для плоского клина ω рассмотрим следующую смешанную граничную задачу. Пусть на совокупности интервалов $L=\bigcup\limits_{k=1}^{N}(a_k,b_k)$, ($a_k<b_k$, $k=\overline{1,N}$; $b_k<a_{k+1}$, $k=\overline{1,N-1}$) грани $\vartheta=0$ клина ω задана компонента смещений $U_z=w(r,\vartheta)$ в виде функции $f(r)$, на остальной части $L'=[0,\infty)\setminus L$ этой же грани задана компонента касательных напряжений $\tau_{\vartheta z}$ в виде функции $g(r)$, а на грани $\vartheta=\alpha$ клина ω опять задана компонента касательных напряжений $\tau_{\vartheta z}$, но в

виде функции $h(r)$. При этом будем считать, что на каждом интервале (a_k, b_k) системы L задана величина равнодействующей касательных напряжений P_k, т.е.

$$\int_{a_k}^{b_k} \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=0} dr = P_k \quad (k = \overline{1, N}). \tag{1}$$

Так как функция смещений $w(r,\vartheta)$ в области ω является гармонической функцией, а на бесконечности клина напряжения отсутствуют, то при помощи закона Гука описанная смешанная граничная задача математически формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0 \ \left(0 < r < \infty, 0 < \vartheta < \alpha\right) \\ w(r,\vartheta)\big|_{\vartheta=+0} = f(r) \qquad \left(r \in L\right); \\ \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=+0} = \dfrac{G}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \vartheta}\bigg|_{\vartheta=+0} = g(r) \qquad \left(r \in L',\, L' = [0,\infty) \setminus L\right); \\ \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=\alpha-0} = \dfrac{G}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \vartheta}\bigg|_{\vartheta=\alpha-0} = h(r) \qquad \left(0 < r < \infty\right); \\ \tau_{\vartheta z}, \tau_{rz} \to 0 \qquad \left(r \to \infty; 0 < \vartheta < \alpha\right). \end{cases} \tag{2a,f}$$

При этом предполагается, что функции $f'(r)$, $g(r)$ и $h(r)$ принадлежат одновременно классу $L(0,\infty)$ и классу гельдеровских функций на интервале $(0,\infty)$. Предполагается также, что под действием указанных сил клиновидное тело Ω находится в условиях антиплоской деформации.

Решение смешанной граничной задачи (2a,f) сведем к решению СИУ. Полагая

$$\tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=+0} = \mathrm{X}(r) = \begin{cases} \tau(r) \ \ (r \in L); \\ g(r) \ \ \left(r \in L',\, L' = [0,\infty) \setminus L\right) \end{cases} \tag{3a,b}$$

в области ω рассмотрим следующую вспомогательную первую граничную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0 \qquad \left(0 < r < \infty, 0 < \vartheta < \alpha\right) \\ \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=+0} = \dfrac{G}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\bigg|_{\vartheta=+0} = X(r) \quad \left(0 < r < \infty\right); \\ \tau_{\vartheta z}\big|_{\vartheta=\alpha-0} = \dfrac{G}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\bigg|_{\vartheta=\alpha-0} = h(r) \quad \left(0 < r < \infty\right); \\ \tau_{\vartheta z}, \tau_{rz} \to 0 \qquad \left(r \to \infty; 0 < \vartheta < \alpha\right). \end{cases} \tag{4a,e}$$

Решение граничной задачи (4a,e) построим при помощи интегрального преобразования Меллина, для чего вводя в рассмотрение трансформанты Меллина:

$$\overline{w}(p,\vartheta) = \int_0^\infty \omega(r,\vartheta) r^{p-1} dr; \quad \overline{\mathrm{X}}(p) = \int_0^\infty X(r) r^p dr \ ; \quad \overline{h}(p) = \int_0^\infty h(r) r^p dr \qquad \left(0 < \vartheta < \alpha\right) \tag{5a,c}$$

Отметим [7], что если предположить для напряжений порядок $1/r$ на бесконечности и порядок $r^{-\lambda}$ $\left(0 < \lambda < 1\right)$ в окрестности вершины клина $\left(r \to 0\right)$, интегралы (5b,c) будут сходящимися в полосе $\Pi = \left\{\lambda - 1 < \operatorname{Re} p < 0\right\}$, а интеграл (5a) – в некоторой подполосе Π. Отметим еще, что интегралы (5a,c) можно рассматривать в рамках теории обобщенных функций [8].

Далее, применяя к (4a,e) преобразование Меллина и принимая во внимание полосу регулярности Π, придем к следующей граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2\overline{w}}{d\vartheta^2}+p^2\overline{w}=0 \quad (0<\vartheta<\alpha) \\
G\dfrac{d\overline{w}}{d\vartheta}\Big|_{\vartheta=+0}=\overline{\mathrm{X}}(p); \qquad G\dfrac{d\overline{w}}{d\vartheta}\Big|_{\vartheta=\alpha-0}=\overline{h}(p)
\end{cases}
\tag{6a,c}
$$

Легко видеть, что решение граничной задачи (6a,c) представляется формулой

$$
\overline{w}(p,\vartheta)=\frac{1}{pG}\left[\left(\sin(p\vartheta)+\operatorname{ctg}(p\alpha)\cos(p\vartheta)\right)\overline{\mathrm{X}}(p)-\frac{\cos(p\vartheta)}{\sin(p\alpha)}\overline{h}(p)\right] \qquad (0\le\vartheta\le\alpha). \tag{7}
$$

Теперь по формуле обращения преобразования Меллина из (7) для величины $dw(r,0)/dr$ находим

$$
\frac{dw(r,0)}{dr}=\frac{1}{2\pi iG}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{\overline{h}(p)}{\sin(p\alpha)}-\operatorname{ctg}(p\alpha)\overline{\mathrm{X}}(p)\right]r^{-p-1}dp \qquad (\lambda-1<c<0).
$$

Далее, подставляя сюда $\overline{\mathrm{X}}(p)$ и $\overline{h}(p)$ из (5b,c), можем записать $(0<r<\infty, \lambda-1<c<0)$

$$
\frac{dw(r,0)}{dr}=\frac{1}{Gr}\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^\infty h(r_0)dr_0\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{\sin(p\alpha)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp-\int_0^\infty \mathrm{X}(r_0)dr_0\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\operatorname{ctg}(p\alpha)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp\right] \tag{8}
$$

Входящие в (8) внутренние интегралы, понимающиеся в смысле главного значения по Коши, можно вычислить по теории вычетов или сразу их можно вычислить при помощи известных формул, приведенных [9] (стр. 301, ф-ла (13) при $n=1$ и стр. 302, ф-ла (19) при $n=1$). В результате,

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{\sin(p\alpha)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp=-\frac{r^{\pi/\alpha}}{\alpha\left(r_0^{\pi/\alpha}+r^{\pi/\alpha}\right)}, \qquad (\lambda-1<c<0)
$$

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\operatorname{ctg}(p\alpha)\left(\frac{r_0}{r}\right)^p dp=-\frac{r^{\pi/\alpha}}{\alpha\left(r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}\right)}
$$

и формула (8) приобретает вид

$$
\frac{dw(r,0)}{dr}=\frac{r^{\pi/\alpha-1}}{\alpha G}\left[\int_0^\infty\frac{\mathrm{X}(r_0)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}+\int_0^\infty\frac{h(r_0)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}+r^{\pi/\alpha}}\right] \quad (0<r<\infty). \tag{9}
$$

Здесь первый интеграл при $r=r_0$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Теперь, после того, как построено нужное нам решение (9) вспомогательной граничной задачи (4a,e), можно решение исходной смешанной граничной задачи (2a,f) свести к решению сингулярного интегрального уравнения (СИУ). Действительно, исходя из (9), реализуем граничное условие (2b), после чего согласно (3a) относительно неизвестных касательных напряжений $\tau(r)$ на системе интервалов L придем к следующему определяющему СИУ поставленной задачи:

$$
\frac{r^{\pi/\alpha-1}}{\alpha G}\int_L\frac{\tau(r_0)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}=-f'(r)-\frac{r^{\pi/\alpha-1}}{\alpha G}\left[\int_{L'}\frac{g(r_0)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}-r^{\pi/\alpha}}+\int_0^\infty\frac{h(r_0)dr_0}{r_0^{\pi/\alpha}+r^{\pi/\alpha}}\right] \quad (r\in L) \tag{10}
$$

При этом, решение СИУ (10) по (1) и (3a) должно удовлетворять условиям

$$
\int_{a_k}^{b_k}\tau(r_0)dr_0=P_k \qquad \left(k=\overline{1,N}\right) \tag{11}
$$

Введем безразмерные величины

$$x=\left(\frac{r}{a}\right)^{\pi/\alpha},\quad s=\left(\frac{r_0}{a}\right)^{\pi/\alpha};\quad \alpha_k=\left(\frac{a_k}{a}\right)^{\pi/\alpha},\quad \beta_k=\left(\frac{b_k}{a}\right)^{\pi/\alpha};\left(k=\overline{1,N}\right),\quad L_0=\bigcup_{k=1}^{N}(\alpha_k,\beta_k)$$

$$\tau_0(x)=G^{-1}\tau\left(ax^{\alpha/\pi}\right)x^{\alpha/\pi-1};\ g_0(x)=G^{-1}g\left(ax^{\alpha/\pi}\right)x^{\alpha/\pi-1};\ h_0(x)=G^{-1}h\left(ax^{\alpha/\pi}\right)x^{\alpha/\pi-1},\ L_0'=[0,\infty)\setminus L_0$$

где a какой-либо характерный линейный параметр задачи, например, отличная от нуля координата какого-либо конца какого-либо интервала системы L. Тогда СИУ (10) и условия (11) перепишутся, соответственно, в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_0}\frac{\tau_0(s)ds}{s-x}=f_0(x)\qquad (x\in L_0)$$

$$f_0(x)=-x^{\alpha/\pi-1}f'\left(ax^{\alpha/\pi}\right)-\frac{1}{\pi}\left[\int_{L_0'}\frac{g_0(s)ds}{s-x}+\int_0^\infty\frac{h_0(s)ds}{s+x}\right]; \tag{12a,b}$$

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\tau_0(s)ds=P_k^{(0)}\qquad \left(P_k^{(0)}=\frac{\pi P_k}{\alpha aG},\quad k=\overline{1,N}\right). \tag{13}$$

2. СИУ (12a,b) при условиях (13) допускает замкнутое решение [10] (стр. 50, ф-лы (244)– (246)), содержащее интегралы типа Коши со сложными весовыми функциями, которые осложняют их вычисление. Поэтому решение СИУ (12a,b) – (13) построим известным численно-аналитическим методом [4,6]. С этой целью каждый интервал (α_k,β_k) системы L при помощи формул

$$x=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2};\qquad s=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}u+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\qquad \left(k=\overline{1,N},\ -1<t,\ u<1\right)$$

преобразуем в интервал $(-1,1)$, а затем СИУ (12a,b) представим в форме:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_k(u)du}{u-t}+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{m=1\\(m\neq k)}}^{N}\int_{-1}^{1}K_{km}(t,u)\varphi_k(u)du=F_k(t)\qquad \left(k=\overline{1,N};-1<t<1\right)$$

$$\varphi_k(t)=\tau_0\left(\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right);\qquad F_k(t)=f_0\left(\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right); \tag{14a,d}$$

$$K_{km}=\left(u-\frac{\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}t+\frac{\beta_m+\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}-\frac{\beta_k+\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}\right)^{-1}(m\neq k)$$

При этом, условия (13) преобразуются в следующие:

$$\int_{-1}^{1}\varphi_k(t)dt=Q_k^{(0)}\left(Q_k^{(0)}=\frac{2P_k^{(0)}}{\beta_k-\alpha_k},\ k=\overline{1,N}\right) \tag{15}$$

Далее, полагая

$$\varphi_k(t)=\frac{X_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\quad \left(-1<t<1,\ k=\overline{1,N}\right),$$

где функции $X_k(t)$ – из гельдеровского класса функций на отрезке $[-1,1]$, и следуя известной процедуре [6], решение СИУ (14a,d) – (13) сведем к следующей системе систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{n=1}^{M}\frac{X_k(u_n)}{u_n-t_r}+\frac{1}{M}\sum_{\substack{m=1\\(m\neq k)}}^{N}\sum_{n=1}^{M}K_{km}(t_r,u_n)X_m(u_n)=F_k(t_r)\quad \left(k=\overline{1,N},\ r=\overline{1,M-1}\right)\\[2ex] \dfrac{\pi}{M}\displaystyle\sum_{n=1}^{M}X_k(u_n)=Q_k^{(0)}\quad \left(k=\overline{1,N}\right)\end{cases} \tag{16}$$

Здесь M – произвольное натуральное число, а

$$u_n=\cos\frac{(2n-1)\pi}{2M}\quad \left(n=\overline{1,M}\right);\qquad t_r=\cos\frac{\pi r}{M}\quad \left(r=\overline{1,M-1}\right)$$

корни многочленов Чебышева первого рода $T_M(u)$ и второго рода $U_{M-1}(t)$ соответственно, т.е. чебышевские узлы. Отметим, что система (16) состоит из $M \cdot N$ уравнений и содержит столько же неизвестных $X_k(u_n)$ $\left(k=\overline{1,N},\, n=\overline{1,M}\right)$.

В частном случае, когда $N=1$, $g(r)\equiv 0$ и $h(r_0)=Q\delta(r_0-\rho_0)$ $(0<\rho_0<\infty)$ где $\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака, правая часть СИУ (12a,b) упрощаясь, принимает вид

$$f_0(x) = -x^{\alpha/\pi-1} f'\left(ax^{\alpha/\pi}\right) - \frac{Q_0}{\alpha(s_0+x)}; \qquad s_0 = \left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{\pi/\alpha}, \qquad Q_0 = \frac{Q}{aG}.$$

Рассматривая частный случай функции $f(r)=r^p$ $(p=0,1,2,...)$, можно более упростить систему уравнений (16) и провести численный анализ задачи.

В заключение отметим, что полученные здесь результаты можно распространить на соответствующие смешанные граничные задачи стационарной теплопроводности, гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости при потенциальном течении, электростатики и магнетостатики.

Автор благодарит проф. С.М. Мхитаряна за постоянное внимание к работе и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций коплексного переменного. М.: Наука, 1976. 716с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of crack problems, pp. 368-425, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
5. Theocaris P.S., Iokimidis N.I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations.//Quart. Appl Math., vol.XXXV, №.1, pp. 173-185, 1977.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
7. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1977. 402 с.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ. II Спец – курс. М.: Наука, 1965. 327 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. Т. I. М.: Наука, 1969. 344 с.
10. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М. – Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.

Сведения об авторе:

Григорян Марине Самвеловна – магистрант при Институте механики НАН РА международного научно-образовательного центра НАН РА.
Тел.: (374 222) 3 61 36, (374 91) 63 97 58.
E-mail: mechins@sci.am

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ СТРИНГЕРОМ

Григорян Э. Х., Оганисян Г. В.

Рассматривается контактная задача для упругой составной бесконечной пластины, усиленной полубесконечным упругим стрингером, который параллелен линии разнородности составной пластины. Задача сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей. При помощи аппарата обощенного интегрального преобразования Фурье, решение этого интегрального уравнения приводится к решению функционального уравнения относительно трансформантов Фурье искомых функций. Далее дается замкнутое решение этого функционального уравнения в интегральной форме.

Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины h, состоящей из двух, сцепленных меж собою вдоль общей прямолинейной границы, полубесконечных пластин с различными упругими свойствами материалов, на своей верхней поверхности усилена упругим полубесконечным стрингером с достаточно малым постоянным прямоугольным поперечным сечением F_s, с малой постоянной толщиной h_S и шириной d_S, расположенным на линии $y = a$ $(a>0)$.

Предполагается, что упругий бесконечный стрингер жестко сцеплен (приклеен) к верхней полубесконечной пластине, параллелен линии разнородности указанных полубесконечных пластин, и имеет отличные от нее упругие характеристики. Здесь следует отметить, что для ослабления изгибных эффектов в составной пластине необходимо, чтобы упругая составная пластина на своей нижней поверхности была усилена симметрично расположенным стрингером подобного вида, что не вносит изменений в уравнения, это означает, что можно рассматривать составную пластину с одним стрингером[1;2]. Тогда будем предполагать, что вследствие малости толщины h_S, жесткость стрингера на изгиб пренебрежимо мала, так что давлением стрингера на составную пластину можно пренебречь, следовательно под стрингером будут действовать только тангенциальные контактые напряжения, которые сосредоточены вдоль средней линии контактного участка. Иначе говоря, принимается модель одноосного напряженного состояния стрингера в сочетании с моделью контакта по линии. Кроме того, для упругой составной бесконечной пластины предполагается, что во время деформации она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, благодаря чему она деформируется как плоскость [1;2]. При вышеуказанных предположениях требуется найти закон распределения интенсивности тангенциальных контактных усилий, действующих вдоль линии крепления упругого полубес-конечного стрингера с упругой бесконечной составной пластиной, когда контактирующая пара (стрингер-пластина) деформируется сосредоточенной силой $P\delta(x)\delta(y-a)$, приложенной на конце полубесконечного стрингера и равномерно распределенным растягивающим усилием постоянной интенсивности σ_0, приложенным на бесконечности составной пластины.

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений поставленной задачи, заметим, что в горизонтальном направлении стрингер растягивается или сжимается, находясь в одноосном напряженном состоянии. Тогда, дифференциальное уравнение равновесия элемента стрингера будет:

$$\frac{d^2u_s(x)}{dx^2} = \frac{\tau(x)}{E_sF_s} \qquad (-\infty<x<0), \tag{1}$$

при этом граничные условия имеют вид:

$$\left.\frac{du_s(x)}{dx}\right|_{x=-0} = \frac{P}{E_sF_s}\,; \quad \left.\frac{du_s(x)}{dx}\right|_{x\to-\infty} = \frac{\sigma_0}{E}\,. \tag{2}$$

Здесь $u_s(x)$-горизонтальные перемещения точек стрингера на линии $y=a$ при $-\infty < x < 0$; $\tau(x)=d_S\tau(x;a)$, где $\tau(x;a)-$ тангенциальные контактные напряжения на линии

$y=a$ при $-\infty < x < 0$; E_S -модуль упругости, а $F_S = h_S d_S$ – площадь поперечного сечения стрингера; E -модуль упругости составной пластины при $0 \le y < \infty$ и $-\infty < x < \infty$.

Отметим, что условие равновесия стрингера, согласно (1) и (2), будет:

$$\int_{-\infty}^{0} \tau(s)\,ds = P - P_0 \ , \tag{3}$$

где $P_0 = \dfrac{E_S F_S}{E}\sigma_0$ – значение той силы, которая приложена на стрингере при $x \to -\infty$.

Чтобы написать дифференциальное уравнение (1) с условием (2) одним уравнением для всех $x\ (-\infty < x < \infty)$, введем функцию [4;6]:

$$\mathrm{U}_s(x) \triangleq \theta(-x)\frac{du_s(x)}{dx} \qquad (-\infty < x < \infty) \ , \tag{4}$$

где ¯ (x) - единичная ступенчатая функция Хевисайда.

Применив к (4) операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, уравнение (1) с условиями (2), можно записать одним уравнением, при всех $x\ (-\infty < x < \infty)$ следующего вида:

$$\frac{d\mathrm{U}_S(x)}{dx} = \frac{\tau^-(x)}{E_S F_S} - \frac{P\delta(x)}{E_S F_S} \qquad (-\infty < x < \infty) \ , \tag{5}$$

где ¢ (x) -известная дельта-функция Дирака; а $\tau^-(x) = \theta(-x)\tau(x)$.

Нетрудно заметить, что решение дифференциального уравнения (5) можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{U}_S(x) = \frac{1}{E_S F_S}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x-s)\tau^-(s)\mathrm{ds} - \frac{P\theta(x)}{E_S F_S} + \frac{\sigma_0}{E} \qquad (-\infty < x < \infty) \ , \tag{6}$$

а граничные условия (2):

$$\mathrm{U}_S(-0) = \frac{P}{E_S F_S}; \ \mathrm{U}_S(-\infty) = \frac{\sigma_0}{E} \ . \tag{7}$$

Отметим, что условие (3) эквивалентно следующему условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^-(s)\,ds = P - P_0 \ . \tag{8}$$

С другой стороны, для горизонтальной деформации упругой составной бесконечной пластины, когда на полубесконечной пластине $0 \le y < \infty$; $-\infty < x < \infty$ на линии $y=a$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностью $\tau(x)\ (-\infty < x < 0)$, а на составной пластине на бесконечности действует равномерно распределенное растягивающее усилие постоянной интенсивности ±$_0$, имеем:

$$hl\frac{du(x;a)}{dx} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}K(x-s)\tau(s)\,ds + \frac{hl}{E}\sigma_0 \qquad (-\infty<x<\infty) \ , \tag{9}$$

которое при введении функции [4;6]:

$$\mathrm{U}(x;a) \triangleq \theta(x)\frac{du(x;a)}{dx} + \theta(-x)\frac{du(x;a)}{dx} \triangleq \mathrm{U}^+(x;a) + \mathrm{U}^-(x;a) \ , \tag{10}$$

где

$$\mathrm{U}^+(x;a) = \theta(x)\frac{du(x;a)}{dx} \ ; \ \mathrm{U}^-(x;a) = \theta(-x)\frac{du(x;a)}{dx} \ ,$$

можно представить в виде:

$$hl\left[\mathrm{U}^{+}(x;a)+\mathrm{U}^{-}(x;a)\right]=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-s)\tau^{-}(s)ds+\frac{hl}{E}\sigma_0 \qquad (-\infty<x<\infty)\ . \tag{11}$$

Здесь введены следующие обозначения [2]:

$$K(u)=\frac{1}{u}-\frac{d_1u}{u^2+4a^2}+\frac{8a^2d_2u}{\left(u^2+4a^2\right)^2}+\frac{2a^2d_3u\left(u^2-12a^2\right)}{\left(u^2+4a^2\right)^3}\triangleq\frac{1}{u}+K_1(u)\,,$$

$$d_1=\frac{k(3-\nu)\left[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\right]-(3-\nu_1)\left[8-(1+\nu)(3-\nu)\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]}\ ,$$

$$d_2=\frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu};\qquad l=\frac{8\mu}{3-\nu}=\frac{4E}{(1+\nu)(3-\nu)}\ , \tag{12}$$

$$d_3=\frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]};\quad k=\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)}\,,$$

где $u(x;a)$-горизонтальные перемещения точек полубесконечной пластины $0\le y<\infty$; $-\infty<x<\infty$ на линии $y=a$; $(E\ ;\ \mu\ ;\ \nu)$ – упругие характеристики пластины при $0\le y<\infty$; $-\infty<x<\infty$ а $(E_1\ ;\ \mu_1\ ;\ \nu_1)$ – при $-\infty<y\le 0$; $-\infty<x<\infty$; E и E_1 модули упругости; « и «$_1$ -модули сдвига; ¬ и ¬$_1$ – коэффициенты Пуассона пластин.

Теперь, имея ввиду условие контакта

$$\mathrm{U}^{-}(x;a)=\mathrm{U}_s(x) \qquad (-\infty<x<\infty)\ , \tag{13}$$

относительно неизвестных контактных тангенциальных сил с интенсивностью $\tau^{-}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, получим следуюшее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x-s}+\lambda\pi\theta(x-s)+K_1(x-s)\right]\tau^{-}(s)ds=\lambda P\theta(x)-hl\,\mathrm{U}^{+}(x;a), \tag{14}$$

$$\left(\lambda=\frac{hl}{E_SF_S}\ ;\ \ -\infty<x<\infty\right)\ .$$

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода (14), при условии (8). С целью решения сингулярного интегрального уравнения (14) при условии (8), применим к (14) обобщенное интегральное преобразование Фурье, после некоторых преобразованиях и пользуясь формулой свертки, относительно трансформантов Фурье функций $\tau^{-}(x)$ и $\mathrm{U}^{+}(x;a)$, получим следующую краевую задачу Римана в теории аналитических функций:

$$\overline{B}(\sigma)\overline{\tau}^{-}(\sigma)=\lambda P+ihl\sigma\overline{U}^{+}(\sigma) \qquad (-\infty<\sigma<\infty)\,. \tag{15}$$

При этом условие равновесия стрингера (8), в этом случае примет вид $\overline{\tau}^{-}(0)=P-P_0$.

Здесь:

$$\overline{B}(\sigma)=\lambda+|\sigma|+\overline{A}(\sigma)e^{-2a|\sigma|}\ ;\qquad \overline{\tau}^{-}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{-}(x)e^{i\sigma x}dx\,,$$

$$\overline{A}(\sigma)=-d_1|\sigma|+2ad_2\sigma^2-d_3a^2|\sigma|^3\ ;\quad \overline{\mathrm{U}}^{+}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{U}^{+}(x;a)e^{i\sigma x}dx\ , \tag{16}$$

где ± -параметр преобразования Фурье $(-\infty<\pm<\infty)$.

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению функционального уравнения (15) относительно $\bar{\tau}^{-}(\sigma)$ и $\bar{U}^{+}(\sigma)$. Функциональное уравнение (15) можем решить, рассматривая его как краевую задачу Римана в теории аналитических функций, так как $\bar{\tau}^{-}(\sigma)$ и $\bar{U}^{+}(\sigma)$ представляют собой граничные значения аналитических функций $\bar{\tau}^{-}(\alpha)$ и $\bar{U}^{+}(\alpha)$, $(\alpha=\sigma+i\tau)$ регулярных соответственно в нижней и верхней полуплоскостях[5]. Здесь же это уравнение решается несколько иначе [3]. Факторизуем входяшее в (15) ядро $\bar{B}(\sigma)$, представляя его в виде:

$$\bar{B}(\sigma)=|\sigma|\bar{B}_1(\sigma)\bar{B}_2(\sigma);\quad \bar{B}_1(\sigma)=1+\frac{\lambda}{|\sigma|};\quad \bar{B}_2(\sigma)=1+\frac{\bar{A}(\sigma)e^{-2a|\sigma|}}{\lambda+|\sigma|},$$

$$|\sigma|=(\sigma-io)^{1/2}(\sigma+io)^{1/2};\quad \bar{B}_k(\sigma)=\frac{\bar{B}^{+}{}_k(\sigma)}{\bar{B}^{-}{}_k(\sigma)}\quad (k=1,2)\ , \tag{17}$$

где

$$\bar{B}^{\pm}{}_k(\sigma)=exp\left\{\pm\bar{F}_k{}^{\pm}(\sigma)\right\}\ ;\ (\sigma\pm io)^{1/2}=\sigma_+^{1/2}\pm\sigma_-^{1/2}\ ;\ \sigma_\pm^{1/2}=\theta(\pm\sigma)|\sigma|^{1/2}\ ,$$

$$\bar{F}_k{}^{+}(\sigma)=\int_0^\infty F_k(x)e^{i(\sigma+io)}dx\ ;\bar{F}_k{}^{-}(\sigma)=\int_{-\infty}^0 F_k(x)e^{i(\sigma-io)}dx\ ;\ F_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \ln\bar{B}_k(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma. \tag{18}$$

Здесь $\bar{B}^{+}{}_k(\alpha)$-регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$, а $\bar{B}^{-}{}_k(\alpha)$-регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha<0$ $(\alpha=\sigma+i\tau)$, при этом, легко заметить, что $\bar{B}^{\pm}{}_k(\sigma)=O(1)$, при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности. Имея введу (17), функциональное уравнение (15) можно записать в виде:

$$\bar{L}^{-}{}_1(\sigma)\triangleq\frac{(\sigma-io)^{1/2}\bar{\tau}^{-}(\sigma)}{\bar{B}^{-}{}_1(\sigma)\bar{B}^{-}{}_2(\sigma)}=\frac{\lambda P+i\sigma hl\bar{U}^{+}(\sigma)}{(\sigma+io)^{1/2}\bar{B}^{-}{}_1(\sigma)\bar{B}^{-}{}_2(\sigma)}\triangleq\bar{L}_2{}^{-}(\sigma)\quad(-\infty<\sigma<\infty). \tag{19}$$

Теперь, применив к (19) обратное преобразование Фурье, получим равенство:

$$L_1^{-}(x)=L_2^{+}(x)\qquad(-\infty<x<\infty). \tag{20}$$

Но, это равенство (20) имеет место только тогда, когда [3;4;6]:

$$L_1^{-}(x)=L_2^{+}(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\delta^{(k)}(x)\qquad(-\infty<x<\infty), \tag{21}$$

где $\delta^{(n)}(x)$ -n-ая производная дельта-функции Дирака $\delta(x)$.

Далее, применив к (21) обобщенное преобразование Фурье, получим:

$$\bar{L}_1^{-}(\sigma)=\bar{L}_2^{+}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}c_k(-i\sigma)^k\qquad(-\infty<\sigma<\infty). \tag{22}$$

Имея в виду, что $\tau^{-}(x)=O\left(x_-^{-1/2}\right)$ при $x\to-0$; а $U^{+}(x)=O\left(x_+^{-1/2}\right)$ при $x\to+0$, то из свойств интегралов Фурье следует, что $\bar{\tau}^{-}(\sigma)=O\left((\sigma-i0)^{-1/2}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$; а $\sigma\bar{U}^{+}(\sigma)=O\left((\sigma+i0)^{1/2}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$, следовательно с учетом того, что $\bar{L}_1^{-}(\sigma)=\bar{L}_2^{+}(\sigma)=O(1)$ при $|\sigma|\to\infty$, из (22) следует, что $c_k=0\left(k=\overline{1;n}\right)$. Тогда из (19) получим решение функционального уравнения (15) записанное в виде:

$$\bar{\tau}^{-}(\sigma)=\frac{c_0\bar{B}_1{}^{-}(\sigma)\bar{B}_2{}^{-}(\sigma)}{(\sigma-i0)^{1/2}}\qquad(-\infty<\sigma<\infty), \tag{23}$$

где неизвестная постоянная c_0 определяется из условия равновесия стрингера (8), и имеет вид:

$$c_0 = \frac{EP - E_S F_S \sigma_0}{E(1+i)} \sqrt{2\lambda} \quad . \tag{24}$$

Подставляя значения c_0 из (24) в (23), для искомой функции $\bar{\tau}^{-}(\sigma)$ получим:

$$\bar{\tau}^{-}(\sigma) = \frac{EP - E_S F_S \sigma_0}{E(1+i)} \sqrt{2\lambda} \frac{\bar{B}_1^{-}(\sigma) \bar{B}_2^{-}(\sigma)}{(\sigma - i0)^{1/2}} \qquad (-\infty < \sigma < \infty) \ . \tag{25}$$

После пременения в (25) обратное преобразование Фурье, имея в виду, что $\tau^{-}(x) = \theta(-x)\tau(x) \quad (-\infty < x < \infty)$, для неизвестных тангенциальных контактных сил с интенсивностью $\tau(x)$ $(-\infty < x < 0)$ получим:

$$\tau(x) = \frac{EP - E_S F_S \sigma_0}{2\pi E(1+i)} \sqrt{2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{B}_1^{-}(\sigma) \bar{B}_2^{-}(\sigma)}{(\sigma - i0)^{1/2}} e^{-i\sigma x} d\sigma \qquad (-\infty < x < 0) \ . \tag{26}$$

Это и есть замкнутое решение рассматриваемой контактной задачи в интегральной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубес- конечной упругой пластине. //ПМ. Труды Амер. Общ. Инж.-мех. Сер. Е. 1968. №4. С. 124-135.
2. Григорян Э. Х., Оганисян Г. В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т. 62. №3. С.29-43.
3. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Уч. Записки ЕГУ, 1979, №3, с. 29-34.
4. Справочник по специальным функциям. //М.: Наука, 1979. 831 с.
5. Гахов Д. Ф. Краевые задачи. //М.: Физматгиз. 1963, 639 с.
6. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй спец-курс: //М.: Наука, 1965, 327 с.

<u>Сведения об авторах</u>

Григорян Эдвард Хосровович- доктор физ.-мат. наук, профессор. Ереван, Алек Манукян 1, ЕГУ, фак. Математики и механики. Тел: (+374 10) 23-03-89.

Оганисян Гамлет Вараздатович-кандидат физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник, преподаватель. Ереван, Алек Манукян 1, ЕГУ. фак. Математики и механики. Тел: (+374 93) 27-26-26.

КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ КРУГОВОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж.Л.

Исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными торцами и жестко защемленными граничными образующими. Используя систему уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом при наличии жесткого защемления на граничных образующих. На примерах незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек с разными длинами получены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответственных форм колебаний.

1. Постановка задачи. На срединной поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты $(\sim,\ \ )$, где $\sim (0 \le \sim \le l)$ и $(0 \le \ \ \le s)$ являются соответственно длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности (рис. 1). l –длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей окружности. В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек записанные в выбранных криволинейных координатах $\sim$,

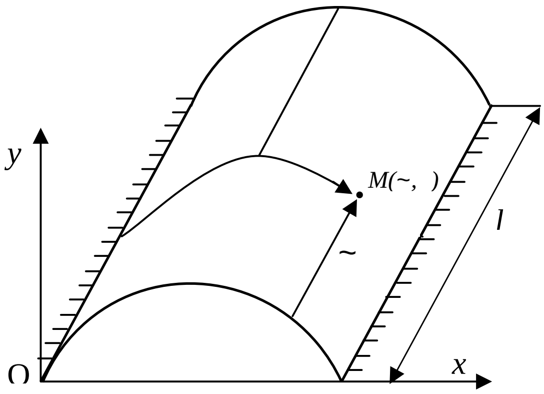


Рис. 1.

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{h^2}{12}n_{ij}+l_{ij}\right)u_j = {}^{a}u_i \ \ , i=\overline{1,3}. \qquad (1)$$

Здесь h –толщина оболочки, (u_1, u_2, u_3) – вектор перемещения, n_{ij} и l_{ij}, $i, j=\overline{1,3}$– дифференциальные операторы, явный вид которых можно найти в [1]. $\lambda=\omega^2\rho$, где ω–угловая частота собственных колебаний, ρ–плотность материала. Граничные условия имеют вид [1]

$$T_1\big|_{\alpha=0,l} = S_{12}+\frac{H}{R}\bigg|_{\alpha=0,l} = N_1+\frac{\partial H}{\partial\beta}\bigg|_{\alpha=0,l} = M_1\big|_{\alpha=0,l}=0 \qquad (2)$$

$$u_1\big|_{\beta=0,s} = u_2\big|_{\beta=0,s} = u_3\big|_{\beta=0,s} = \frac{\partial u_3}{\partial\beta}\bigg|_{\beta=0,s}=0, \qquad (3)$$

где соотношения (2) являются условиями свободного края при $\alpha=0$, а соотношения (3)– условиями жесткого защемления при $\beta=0, \beta=s$. Задача не допускает разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова. В качестве базисных функций используются собственные функции задачи

$$w^{IV}=\theta^4 w, \quad w\big|_{\beta=0,s}=w'\big|_{\beta=0,s}=0,\ 0\le\beta\le s. \qquad (4)$$

Собственным значениям $\bar{\ }^{4}_{m}$, $m=\overline{1,+\infty}$ задачи (4) соответствуют собственные функции

$$w_m(\theta_m\beta)=\sin\frac{\theta_m s}{2}(\mathrm{ch}\theta_m\beta-\cos\theta_m\beta)-\cos\frac{\theta_m s}{2}(\mathrm{sh}\theta_m\beta-\sin\theta_m\beta),\ 0\le\beta\le s, m=\overline{1,+\infty}, \qquad (5)$$

Заметим, что θ_m, $m=\overline{1,+\infty}$ находятся из уравнения $\mathrm{ch}\theta s\cos\theta s=1$. Пусть

$$k=\frac{\pi}{s};\ \ \theta_m=k\,m\,\mu_m,\ \ m\in N;\ \beta_m=\int_0^s w_m''^2(\theta_m\beta)d\beta\Big/\int_0^s w_m'^2(\theta_m\beta)d\beta\ \ . \tag{6}$$

2. Дисперсионные уравнения. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1), спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ соответственно. Представим радиус кривизны цилиндрической оболочки в виде $R^{-1}=kr_0/2$, где $k=\pi/s$, а r_0 безразмерный параметр. Решение системы (1) ищем в виде

$$(u_1,\,u_2,u_3)=\{u_m w_m(\theta_m\beta),\ v_m w_m'(\theta_m\beta),\ w_m(\theta_m\beta)\}\exp(k\chi\alpha),\quad m=\overline{1,+\infty}\,. \tag{7}$$

Здесь $w_m(\theta_m\beta)$ определяется по формуле (5) , u_m,v_m неопределенные коэффициенты, χ – неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (3) выполняются автоматически. Подставим (7) в (1). Из первых двух уравнений имеем

$$\left(c_m+\frac{r_0^2}{4}a^2g_md_m\right)u_m=\frac{r_0\,\text{¡}}{2}\left\{a_m-a^2m_*^2\,\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}}\,l_m+\frac{r_0^2}{4}a^2\,\frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}}\,d_m\right\}, \tag{8}$$

$$\left(c_m+\frac{r_0^2}{4}a^2g_md_m\right)v_{cm}=\frac{r_0m\text{«}_m}{2}\left\{b_m-a^2g_ml_m\right\}, \tag{9}$$

где B_{ij} –коэффициенты упругости. Из третьего уравнения, учитывая соотношения (8) и (9), получим характеристическое уравнение (ср. [2])

$$\begin{aligned}&R_{mm}c_m+\frac{r_0^2}{4}\left\{c_m+m_*^2b_m-\frac{B_{12}}{B_{22}}\chi^2a_m+a^2\left[R_{mm}g_md_m-m_*^2b_m\left(\frac{2(B_{12}+4B_{66})}{B_{22}}\chi^2-\frac{m_*^2(1+\beta_m^2)}{\beta_m^2}\right)\right]+\right.\\&\left.+\frac{r_0^2}{4}a^2d_m(b_m+\frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2)+a^4m_*^2g_ml_m\left(\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\chi^2-\frac{m_*^2}{\beta_m^2}\right)\right\}=0;\end{aligned} \tag{10}$$

$$a_m=\frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}m_*^2+\frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_2^2,\quad b_m=B_1\chi^2-\frac{B_{22}}{B_{11}}m_*^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2,\quad B_1=\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}},$$

$$c_m=\chi^4-B_2m_*^2\chi^2+\left(\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_1^2+\eta_2^2\right)m_*^2\chi^2+(m_*^2-\eta_1^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m_*^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_2^2\right),\ d_m=\frac{4B_{66}}{B_{22}}\chi^2-m_*^2, \tag{11}$$

$$B_2=\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}},\ l_m=\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\chi^2-m_*^2,\ g_m=\frac{B_{22}}{B_{66}}\chi^2-\frac{B_{22}}{B_{11}}m_*^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2,\ a^2=\mu^4k^2,$$

$$R_{mm}=a^2\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\chi^4-\frac{2(B_{12}+2B_{66})m_*^2}{B_{22}}\chi^2+\frac{m_*^4}{\beta_m^2}\right)-\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_3^2,\ \ m_*^2=m^2\mu_m^2\beta_m,\ \ \eta_i^2=\frac{\lambda_i}{B_{66}k^2},\ i=\overline{1,3}.$$

Пусть $\text{¡}_j,\ j=\overline{1,4}$ – попарно различные нули уравнения (10) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_5=-\chi_1,\chi_6=-\chi_2,\chi_7=-\chi_3,\chi_8=-\chi_4$ также попарно различные нули этого уравнения. Пусть $(u_1^{(j)},u_2^{(j)},u_3^{(j)}),\ j=\overline{1,8}$ – нетривиальные решения вида (7) системы (1) при $\chi=\chi_j,\ j=\overline{1,8}$ соответственно. Решение задачи (1)-(3) ищем в виде

$$u_i=\sum\nolimits_{j=1}^{8}w_ju_i^{(j)},\ i=\overline{1,3}\,. \tag{12}$$

Подставляя (12) в граничные условия (2), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(m)}w_j}{c_m^{(j)}+\dfrac{r_0^2}{4}a^2g_m^{(j)}d_m^{(j)}}=0,\quad i=\overline{1,8}\ \ . \tag{13}$$

$$\begin{aligned}M_{1j}^{(m)}=\;&\chi_j^2a_m^{(j)}-\frac{B_{12}}{B_{11}}m_*^2b_m^{(j)}-\frac{B_{12}}{B_{11}}c_m^{(j)}+\frac{r_0^2}{4}a^2\,\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}^2}d_m^{(j)}(m_*^2-\eta_1^2)-\\&-a^2m_*^2\,\frac{B_{22}}{B_{11}}l_m^{(j)}\left(\chi_j^2+\frac{B_{12}}{B_{11}}m_*^2-\frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_1^2\right),\end{aligned}$$

$$M_{2j}^{(m)} = \chi_j \left\{ a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2 \left[4c_m^{(j)} - l_m^{(j)} \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) \right] + \right. \tag{14}$$

$$\left. + a^2 \frac{r_0^2}{4} \left(4b_m^{(j)} + \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} d_m^{(j)} - 4a^2 \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi_j^2 g_m^{(j)} \right) \right\},$$

$$M_{3j}^{(m)} = \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 \chi_j^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{22}} m_*^2 \right) - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right],$$

$$M_{4j}^{(m)} = \chi_j \left\{ \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 \chi_j^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^2 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} m_*^2 \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right] \right\}, \quad M_{5j}^{(m)} = M_{1j}^{(m)} \exp(z_j), \quad M_{6j}^{(m)} = M_{2j}^{(m)} \exp(z_j),$$

$$M_{7j}^{(m)} = M_{3j}^{(m)} \exp(z_j), \quad M_{8j}^{(m)} = M_{4j}^{(m)} \exp(z_j), \; z_j = k¡_j l, \quad j = \overline{1,8} \; .$$

Верхний индекс j в скобках означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j$. Чтобы система (13) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Det} \left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^{8} = m_*^{34} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \, \mathrm{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0 \; . \tag{15}$$

$$\begin{gathered} K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4), \\ x_j = \chi_j / m_*, \; j = \overline{1,8}; \; \eta_{im} = \eta_i / m_*, \; i = \overline{1,3}; \end{gathered} \tag{16}$$

Выражения для m_{ij} не приводятся. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$Det \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0 \, . \tag{17}$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3, заключаем, что уравнение (17) определяет частоты соответствующих типов колебаний. При $ª_1 = ª_2 = ª_3 = ª$ уравнение (9) – характеристическое уравнение системы (1); уравнение (17) – дисперсионное уравнение задачи (1)-(3).

3. Асимптотика дисперсионного уравнения при $r_0 \to 0$. Используя предыдущие формулы, предположим, что $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m = \eta / m_*$. Тогда при $r_0 \to 0$ уравнение (10) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m = \chi^4 - B_2 \chi^2 m_*^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + (m_*^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) = 0 \, , \tag{18}$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66}) m_*^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{m_*^4}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0 \quad . \tag{19}$$

Уравнения (18), (19) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно, когда две противолежащие стороны жестко защемлены. Корни $¡ / m_*$ уравнений (18) и (19) с неположительными действительными частями обозначаются через y_1, y_2 и y_3, y_4 соответственно. Доказывается, что

$$\mathrm{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = N^2(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) \bar{E}_m(\eta_m) \bar{F}_m(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) = 0, \tag{20}$$

$$N(\eta_m) = (y_1 + y_2)(y_1 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)(y_2 + y_4)(y_3 + y_4),$$

$$\bar{E}_m(\eta_m) = K_{2m}^2(\eta_m)(1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + \frac{B_{11}^2}{(B_{12} + B_{66})^2} (8 m_{11} m_{22} m_{21} m_{12} \exp(z_1 + z_2) -$$

$$- (m_{11} m_{22} + m_{21} m_{12})^2 (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) - 4 m_{11}^2 m_{21}^2 [z_1 z_2]^2 -$$

$$- 4 m_{11} m_{21} (m_{11} m_{22} + m_{21} m_{12})(\exp(z_2) - \exp(z_1))[z_1 z_2]), \; m_{11} = R_{11}, \; m_{21} = R_{21}, \; m_{12} = y_1 + y_2,$$

$$[z_1 z_2] = k m_* l (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1), \;\; m_{22} = y_1 y_2 + (B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}) / (B_{11}B_{66}) - \eta_m^2 .$$

$$\bar{F}_m(\eta_m) = K^2_{1m}(\eta_m)(1+\exp(2(z_3+z_4))) + 8m_{33}m_{44}m_{34}m_{43}\exp(z_3+z_4) -$$
$$-(m_{33}m_{44}+m_{34}m_{43})^2(\exp(2z_3)+\exp(2z_4)) - 4m^2_{33}m^2_{43}[z_3z_4] - \tag{21}$$
$$-4m_{33}m_{43}(m_{33}m_{44}+m_{34}m_{43})(\exp(z_4)-\exp(z_3))[z_3z_4],\ m_{33}=R^{(m)}_{33},\ m_{43}=R^{(m)}_{43},$$
$$m_{34}=y_3+y_4,\ m_{44}=y_3y_4+B_{12}/B_{11},\ [z_3z_4]=km_*l(\exp(z_3)-\exp(z_4))/(z_3-z_4)\ ,$$
$$K_{im}\left(\eta_m\right) = (1-\eta^2_m)\left((B_{11}B_{22}-B^2_{12})/(B_{11}B_{66})-\eta^2_m\right) + (-1)^{i-1}\eta^2_m y_1y_2,\ i=2{,}5\ ,$$
$$K_{im}\left(\eta_m\right) = y^2_3y^2_4 + (-1)^{i-1}4\frac{B_{66}}{B_{11}}y_3y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}}\right)^2,\ i=1{,}4\ ,$$
$$K_{3m}(\eta_m) = N_1(\eta) + a^2m^2_*N_2(\eta) + a^4m^4_*N_3(\eta),$$
$$N_1(\eta_m) = B_{22}(B_{11}B_{22}-B^2_{12}) + B_{12}(B_{11}B_{22}-B^2_{12}-B_{66}B_{22}-B_{66}B_{12})\eta^2_m)/B^3_{11},$$
$$N_2(\eta_m) = -\frac{2B_{22}(B_{11}B_{22}-B^2_{12})}{B^3_{11}} - \frac{1}{B_{66}B^3_{11}}(B_{11}B_{22}B^2_{12} - B^4_{12} + 2B_{11}B_{22}B_{12}B_{66} - 6B^3_{12}B_{66} -$$
$$-10B^2_{12}B^2_{66} - 2B_{22}B_{66}B^2_{12} - 8B_{12}B_{22}B^2_{66} - 8B_{12}B^3_{66} - 4B_{11}B_{22}B^2_{66} - 4B_{22}B^3_{66})\eta^2_m +$$
$$+(B_{12}+4B_{66})(B_{11}-B_{66})B_{12}¦^4_m/B^3_{11},$$
$$N_3(\eta_m) = \frac{B^2_{22}(B_{12}+B_{66})}{B^2_{11}B_{66}}\left\{\frac{(B_{12}+4B_{66})^2}{B_{11}B_{22}} - \frac{(B_{12}+4B_{66})}{B_{22}}B_2 + 1 -\right.$$
$$\left.-((B_{12}+4B_{66})(B_{12}B_{22}+B_{12}B_{66}+3B_{22}B_{66}+4B^2_{66}-B_{11}B_{22})\eta^2_m - (B_{12}+4B_{66})^2B_{66}\eta^4_m)/(B_{11}B^2_{22})\right\}$$

Из (20) следует, что при $£_m \to 0$ уравнения (17) распадаются на уравнения

$$\bar{E}_m(\eta_m)=0,\ \ \bar{F}_m(\eta_m)=0,\ \ K_{3m}(\eta_m)=0. \tag{22}$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний в аналогичной задаче для ортотропной прямоугольной пластинки (со свободными и жестко защемленными паралельными сторонами). Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Если y_1, y_2 и y_3, y_4 – корни уравнения (18) и (19) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $m_*l \to \infty$ уравнения (17) преобразуются в уравнение

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|^8_{i,j=1} = N^2(\eta_m)K^2_{1m}(\eta_m)K^2_{2m}(\eta_m)K^2_{3m}(\eta_m) + O(\varepsilon^2_m) + \sum\nolimits_{j=1}^{4}O(\exp(z_j)) = 0. \tag{23}$$

Из (23) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$ и $m_*l \to \infty$ дисперсионное уравнение (17) распадается на уравнения

$$K_{1m}(\eta_m)=0,\quad K_{2m}\left(\eta_m\right)=0,\quad K_{3m}(\eta_m)=0\,. \tag{24}$$

Первые два уравнения (24) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом при наличии жесткого защемления на боковых краях соответственно. Следовательно, при малых ε_m и больших m_*l приближенные значения корней уравнения (17) являются корнями уравнения (24).

4. Асимптотика дисперсионного уравнения при l ì ã. При использовании предыдущих формул будем полагать, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (10)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (17) можно привести к виду

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|^8_{i,j=1} = \left(\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|^4_{i,j=1}\right)^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{4}O(\exp(k\chi_j l)) = 0\,. \tag{25}$$

Откуда следует, что при $m_*l \to \infty$ уравнение (17) преобразуется в уравнение

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|^4_{i,j=1} = 0\quad, \tag{26}$$

которое, при $m \in N$, определяет всевозможные локализованные собственные колебания у свободного торца полубесконечной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих. Если $\varepsilon_m \to 0$ имеем (ср.[3])

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4} = N(\eta_m)K_{1m}(\eta_m)K_{2m}(\eta_m)K_{3m}(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2)\,. \qquad (27)$$

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (20) и (23) дисперсионного уравнения (17) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
2. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Saakyan R.D. The vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges // J. of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. Vol. 72. № 3. P. 312 – 322.
3. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями //Проблемы Прочности и Пластичности. Изд. Нижегородского университета. 2006. Вып. 68. С. 50–160.

<u>Сведения об авторах:</u>

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, доктор физ.-мат. наук**,** Армянский государственный педагогический университет имени Х. Абовяна. Профессор кафедры мат. анализа и теории функций. Ул. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. Тел.*:* (+37410) 64-91-21, (+37491) 706700. *e-mail:* ghulgr@yahoo.com

Срапионян Джанибек Липаритович, соискатель кафедры мат анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна. Тел.: (+37410) 353263, (+37491)770771

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УСЛОВИЯХ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Гулгазарян Л.Г.

Рассматриваются собственные колебания ортотропных оболочек при условиях первой краевой задачи на лицевых поверхностях. Из динамических уравнений трехмерной задачи теории упругости, асимптотическим методом решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, определены асимптотики компонент тензора напряжений и вектора перемещения. Выведены характеристические уравнения для определения частот собственных колебаний. Определены главные значения частот и форм собственных колебаний. Рассмотрен вклад высших приближений и приведены значения частот и форм s=1 приближения.

Для определения напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стержни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Для балок, пластин и оболочек естественно использовать асимптотический метод, поскольку один из их геометрических размеров резко отличается от двух других и при переходе к безразмерным координатам в уравнениях и соотношениях трехмерной задачи появляется малый геометрический параметр.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим собственные колебания ортотропной оболочки $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma;\quad \alpha,\beta\in\Omega_0,\ -h\le\gamma\le h\}$, где Ω_0 – срединная поверхность, α, β – линии кривизны срединной поверхности, γ – прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат [1,2]. Для упрощения выкладок используются компоненты несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [1,2].

На лицевых поверхностях $\gamma=\pm h$ заданы условия

$$\tau_{\alpha\gamma}(h)=0,\ \ \tau_{\beta\gamma}(h)=0,\ \tau_{\gamma\gamma}(h)=0 \tag{1.1}$$

$$\tau_{\alpha\gamma}(-h)=0,\ \ \tau_{\beta\gamma}(-h)=0,\ \tau_{\gamma\gamma}(-h)=0 \tag{1.2}$$

2. Решение внутренней задачи. Для решения поставленной задачи перейдем к безразмерным координатам и перемещениям $\alpha=R\xi$, $\beta=R\eta$, $\gamma=\varepsilon R\zeta=h\zeta$, $U=Ru$, $V=R\text{v}$, $W=Rw$, где R – характерный размер оболочки (наименьший из радиусов кривизны и линейных размеров срединной поверхности), $\varepsilon=h/R$ – малый параметр. Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q_{\alpha\beta}=Q_{jk}(\xi,\eta,\zeta)\exp(i\omega t)\quad (\alpha,\beta,\gamma);\quad j,k=1,2,3 \tag{2.1}$$

где $Q_{\alpha\beta}$ – любая из величин напряжений и перемещений, ω – неизвестная частота собственных колебаний. В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему относительно Q_{jk}. Решение подобных систем складывается из решений внутренней (interior) задачи и пограничных (boundary) слоев [2, 3].

Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического представления [2,3]

$$\begin{gathered}\tau_{jk}^{\text{int}}(\xi,\eta,\zeta)=\varepsilon^{-1+s}\tau_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad j,k=1,2,3;\quad s=\overline{0,N},\quad \omega_*^2=\varepsilon^s(\omega_{*s}^2)\\ \left(u^{\text{int}}(\xi,\eta,\zeta),\text{v}^{\text{int}}(\xi,\eta,\zeta),w^{\text{int}}(\xi,\eta,\zeta)\right)=\varepsilon^s\left(u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\text{v}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),w^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\right)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь и далее $s=\overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах $0,N$. Зная вышеуказанную структуру общего решения, для определения величин $\tau_{jk}^{(s)}, u^{(s)}, (u,\text{v},w)$ внутренней задачи из условий (1.1), (1.2) соответственно будут следовать следующие граничные условия:

$$\tau_{13}^{(s)}(\zeta=1)=-\overline{\tau}_{13b}^{(s)}(\zeta=1)\quad (13,23,33) \tag{2.3}$$

и условия при $\zeta=-1$

$$\tau_{13}^{(s)}(\zeta=-1)=-\overline{\tau}_{13b}^{(s)}(\zeta=-1)\quad (13,23,33) \tag{2.4}$$

О величинах $\overline{\tau}_{jkb}^{(s)}$ будет сказано после построения решения пограничного слоя. Они являются известными функциями, а $\overline{\tau}_{13b}^{(0)}(\zeta)=0 \quad (13,23,33)$.

Отметим, что лишь при асимптотике (2.2) возможно получить непротиворечивую систему для определения $\tau_{jk}^{(s)}$, $u^{(s)}, \mathrm{v}^{(s)}, w^{(s)}$ и удовлетворения условий (1.1), (1.2).

Подставив выражения (2.2) в вышеуказанную систему уравнений и приравняв в каждом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε, для определения неизвестных коэффициентов $Q_{jk}^{(s)}$ разложения (2.2) получим непротиворечивую систему:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(B\tau_{11}^{(s-1)}\right)-k_\beta R\tau_{22}^{(s-1)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A\tau_{21}^{(s-1)}\right)+k_\alpha R\tau_{12}^{(s-1)}+\frac{\partial\tau_{13}^{(s)}}{\partial\zeta}+\\
&+r_1\zeta\frac{\partial\tau_{13}^{(s-1)}}{\partial\zeta}+2r_1\tau_{13}^{(s-1)}+\omega_{*m}^2u^{(s-m)}+(r_1+r_2)\zeta\omega_{*n}^2u^{(s-1-n)}+r_1r_2\zeta^2\omega_{*q}^2u^{(s-2-q)}=0\\
&\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(A\tau_{22}^{(s-1)}\right)-k_\alpha R\tau_{11}^{(s-1)}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(B\tau_{12}^{(s-1)}\right)+k_\beta R\tau_{21}^{(s-1)}+\frac{\partial\tau_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}+r_2\zeta\frac{\partial\tau_{23}^{(s-1)}}{\partial\zeta}+\\
&+2r_2\tau_{23}^{(s-1)}+\omega_{*m}^2\mathrm{v}^{(s-m)}+(r_1+r_2)\zeta\omega_{*n}^2\mathrm{v}^{(s-1-n)}+r_1r_2\zeta^2\omega_{*q}^2\mathrm{v}^{(s-2-q)}=0,\ m=\overline{0,s},\quad n=\overline{0,s-1},\quad q=\overline{0,s-2}\\
&\frac{\partial\tau_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}-r_1\tau_{11}^{(s-1)}-r_2\tau_{22}^{(s-1)}+\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}+k_\beta R\tau_{13}^{(s-1)}+k_\alpha R\tau_{23}^{(s-1)}+\\
&+\omega_{*m}^2w^{(s-m)}+(r_1+r_2)\zeta\omega_{*n}^2w^{(s-1-n)}+r_1r_2\zeta^2\omega_{*q}^2w^{(s-2-q)}=0\\
&\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}+k_\alpha R\mathrm{v}^{(s-1)}+r_1w^{(s-1)}+r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial\xi}+k_\alpha R\mathrm{v}^{(s-2)}+r_1w^{(s-2)}\right)=\\
&=a_{11}\tau_{11}^{(s)}+a_{12}\tau_{22}^{(s)}+a_{13}\tau_{33}^{(s)}+r_1\zeta a_{11}\tau_{11}^{(s-1)}+r_2\zeta a_{12}\tau_{22}^{(s-1)}\\
&\frac{1}{B}\frac{\partial\mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\eta}+k_\beta Ru^{(s-1)}+r_2w^{(s-1)}+r_1\zeta\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\mathrm{v}^{(s-2)}}{\partial\eta}+k_\beta Ru^{(s-2)}+r_2w^{(s-2)}\right)=\\
&=a_{12}\tau_{11}^{(s)}+a_{22}\tau_{22}^{(s)}+a_{23}\tau_{33}^{(s)}+r_1\zeta a_{12}\tau_{11}^{(s-1)}+r_2\zeta a_{22}\tau_{22}^{(s-1)}\\
&\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}+\zeta(r_1+r_2)\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\zeta}+\zeta^2r_1r_2\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial\zeta}=a_{13}\tau_{11}^{(s)}+a_{23}\tau_{22}^{(s)}+a_{33}\tau_{33}^{(s)}+r_1\zeta a_{13}\tau_{11}^{(s-1)}+r_2\zeta a_{23}\tau_{22}^{(s-1)}\\
&\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\eta}-k_\beta R\mathrm{v}^{(s-1)}+r_1\zeta\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial\eta}-k_\beta R\mathrm{v}^{(s-2)}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial\mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\xi}-k_\alpha Ru^{(s-1)}+\\
&+r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\mathrm{v}^{(s-2)}}{\partial\xi}-k_\alpha Ru^{(s-2)}\right)=a_{66}\tau_{12}^{(s)}+r_1\zeta a_{66}\tau_{12}^{(s-1)}\\
&\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}+\zeta(r_1+r_2)\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\zeta}+\zeta^2r_1r_2\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial\zeta}-r_1u^{(s-1)}-\zeta r_1r_2u^{(s-2)}+\\
&+\frac{1}{A}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{r_2\zeta}{A}\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial\xi}=a_{55}\tau_{13}^{(s)}+r_1\zeta a_{55}\tau_{13}^{(s-1)},\quad \tau_{12}^{(s)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)}=\tau_{21}^{(s)}+r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)}\\
&\frac{\partial\mathrm{v}^{(s)}}{\partial\zeta}+\zeta(r_1+r_2)\frac{\partial\mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\zeta}+\zeta^2r_1r_2\frac{\partial\mathrm{v}^{(s-2)}}{\partial\zeta}-r_2\mathrm{v}^{(s-1)}-\zeta r_1r_2\mathrm{v}^{(s-2)}+\frac{1}{B}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}+\\
&+\frac{r_1\zeta}{B}\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial\eta}=a_{44}\tau_{23}^{(s)}+r_2\zeta a_{44}\tau_{23}^{(s-1)},\quad r_1=\frac{R}{R_1},\ r_2=\frac{R}{R_2},\ \omega_*^2=\rho h^2\omega^2
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Систему (2.7) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\tau_{12}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)},\quad \tau_{21}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)}-r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)}\\
&a_{11}\tau_{11}^{(s)}+a_{12}\tau_{22}^{(s)}+a_{13}\tau_{33}^{(s)}=P_{2\tau}^{(s-1)},\qquad a_{12}\tau_{11}^{(s)}+a_{22}\tau_{22}^{(s)}+a_{23}\tau_{33}^{(s)}=P_{3\tau}^{(s-1)}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$\frac{\partial\tau_{33}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_{*m}^2 w^{(s-m)}=P_{4\tau}^{(s-1)},\ \frac{\partial\tau_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_{*m}^2 \mathrm{v}^{(s-m)}=P_{5\tau}^{(s-1)},\ \frac{\partial\tau_{13}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_{*m}^2 u^{(s-m)}=P_{6\tau}^{(s-1)},\ m=\overline{0,s}$$

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}-a_{55}\tau_{13}^{(s)}=P_u^{(s-1)},\ \frac{\partial \mathrm{v}^{(s)}}{\partial\zeta}-a_{44}\tau_{23}^{(s)}=P_{\mathrm{v}}^{(s-1)},\ \frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}-a_{13}\tau_{11}^{(s)}-a_{23}\tau_{22}^{(s)}-a_{33}\tau_{33}^{(s)}=P_w^{(s-1)}$$

где правые части представляют из себя выражения содержащие предыдущие приближения [3].

Используя соотношения (2.6), компоненты тензора напряжений примут вид:

$$\tau_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}-P_u^{(s-1)}\right],\quad \tau_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial \mathrm{v}^{(s)}}{\partial\zeta}-P_{\mathrm{v}}^{(s-1)}\right]$$

$$\tau_{12}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)},\quad \tau_{21}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)}-r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)} \tag{2.7}$$

$$\tau_{11}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_2\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}+\Delta_{23}P_{2\tau}^{(s-1)}+\Delta_1 P_{3\tau}^{(s-1)}-\Delta_2 P_w^{(s-1)}\right]$$

$$(11,22,33;\quad \Delta_2,\Delta_3,\Delta_{12};\quad \Delta_{23},\Delta_1,\Delta_2;\quad \Delta_1,\Delta_{13},\Delta_3)$$

где

$$\Delta_1=a_{13}a_{23}-a_{33}a_{12},\ \Delta_2=a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13},\ \Delta_3=a_{13}a_{12}-a_{11}a_{23} \tag{2.8}$$

$$\Delta_{ij}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}^2,\quad i,j=1,2,3;\ \ \Delta=a_{11}\Delta_{23}+a_{13}\Delta_2+a_{12}\Delta_1$$

Для определения компонент вектора перемещения получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_{*m}^2 u^{(s-m)}=a_{55}P_{6\tau}^{(s-1)}+\frac{\partial P_u^{(s-1)}}{\partial\zeta}\qquad (u,\mathrm{v};a_{55},a_{44};6,5) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta}{\Delta_{12}}\omega_{*m}^2 w^{(s-m)}=F_w^{(s-1)}$$

$$F_w^{(s-1)}=\frac{1}{\Delta_{12}}\left[\Delta P_{4\tau}^{(s-1)}-\Delta_2\frac{\partial P_{2\tau}^{(s-1)}}{\partial\zeta}-\Delta_3\frac{\partial P_{3\tau}^{(s-1)}}{\partial\zeta}+\Delta_{12}\frac{\partial P_w^{(s-1)}}{\partial\zeta}\right]$$

При $s=0$ система (2.9) превращается в систему из независимых уравнений:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_{*0}^2 u^{(0)}=0\qquad (a_{55},a_{44},\Delta/\Delta_{12};u,\mathrm{v},w) \tag{2.10}$$

решениями которых являются:

$$u^{(0)}(\xi,\eta,\zeta)=C_1^{(0)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}\zeta+C_2^{(0)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}\zeta$$
$$(1,3,5;2,4,6;a_{55},a_{44},\Delta/\Delta_{12};u,\mathrm{v},w) \tag{2.11}$$

Подставив (2.11) в (2.7) и удовлетворив граничным условиям (2.3) (2.4), получим три независимые однородные алгебраические системы относительно неизвестных $C_i^{(0)}$. Из условия существования ненулевых решений этих систем вытекают следующие уравнения частот и соответствующие им значения частот:

а) $\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_{*0n1}^{u}=\pi n/\sqrt{a_{55}},\quad n\in Z \qquad (u,\mathrm{v},w;a_{55},a_{44},\sqrt{\Delta/\Delta_{12}})$ (2.12)

б) $\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*0}=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_{*0n2}^{u}=\dfrac{\pi(2n+1)}{2\sqrt{a_{55}}},\quad n\in Z \quad (u,\mathrm{v},w;a_{55},a_{44},\sqrt{\Delta/\Delta_{12}})$ (2.13)

а формы собственных колебаний примут вид

а) $u_n^{(0,u)}=C_{2n}^{(0,u)}(\xi,\eta)\cos\pi n\zeta,\ \ n\in Z \quad (2,4,6;\ u,\mathrm{v},w)$ (2.14)

б) $u_n^{(0,u)}=C_{1n}^{(0,u)}(\xi,\eta)\sin\dfrac{\pi}{2}(2n+1)\zeta,\ \ n\in Z \quad (1,3,5;\ u,\mathrm{v},w)$ (2.15)

Частоты (2.12), (2.13) совпадают с частотами сдвиговых и продольных колебаний ортотропных пластинок при аналогичных граничных условиях [4].

3. О вкладе высших приближений $s\ge 1$**.** Решение при $s\ge 1$ будет зависеть от того, какое из значений частот ω_{*0ni}^{u}, $\omega_{*0ni}^{\mathrm{v}}$, ω_{*0ni}^{w} $i=1,2$ взять за основу вычислений, в частности, при решении уравнений (2.9). Необходимо рассмотреть все случаи. При $s\ge 1$ уравнения становятся неоднородными. Рассмотрим приближение $s=1$. Если $\omega_{*0}=\omega^{u}_{*0n1}$, то из (2.7), (2.10) и граничных условий (2.3), (2.4) следуют

$$\mathrm{v}_n^{(0,u)}=0,\ w_n^{(0,u)}=0,\ \tau_{23}^{(0,u)}=0, \tau_{33}^{(0,u)}=0,\ \tau_{12}^{(0,u)}=0,\ \tau_{21}^{(0,u)}=0,\ \tau_{11}^{(0,u)}=0,\ \tau_{22}^{(0,u)}=0 \qquad (3.1)$$

Система (2.9) преобразуется в систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_n^{(1,u)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}(\omega^u_{*0n})^2 u_n^{(1,u)}+a_{55}(\omega^u_{*1n})^2 u_n^{(0,u)}=F_u^{(0,u)} \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}_n^{(1,u)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}(\omega^u_{*0n})^2 \mathrm{v}_n^{(1,u)}=0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 w_n^{(1,u)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\Delta}{\Delta_{12}}(\omega^u_{*0n})^2 w_n^{(1,u)}=F_w^{(0,u)} \qquad (3.4)$$

где

$$F_u^{(0,u)}=-(r_1+r_2)\frac{\partial u_n^{(0,u)}}{\partial\zeta},\quad F_w^{(0,u)}=\frac{1}{\Delta_{12}}\left[\Delta P_{4\tau}^{(0,u)}-\Delta_2\frac{\partial P_{2\tau}^{(0,u)}}{\partial\zeta}-\Delta_3\frac{\partial P_{3\tau}^{(0,u)}}{\partial\zeta}+\Delta_{12}\frac{\partial P_w^{(0,u)}}{\partial\zeta}\right] \qquad (3.5)$$

Решением уравнения (3.3) при граничных условиях (2.3), (2.4) является

$$\mathrm{v}_n^{(1,u)}=\frac{\sqrt{a_{44}a_{55}}\left(\overline{\tau}_{23b}^{(1,u)}(\zeta=1)\cos\sqrt{a_{44}/a_{55}}\pi n(1+\zeta)-\overline{\tau}_{23b}^{(1,u)}(\zeta=-1)\cos\sqrt{a_{44}/a_{55}}\pi n(1-\zeta)\right)}{\pi n\sin 2\sqrt{a_{44}/a_{55}}\pi n} \qquad (3.6)$$

Решением уравнения (3.4) является

$$w_n^{(1,u)}=C_{5n}^{(1,u)}\sin\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\omega^u_{*0n}\zeta+C_{6n}^{(1,u)}\cos\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_{12}}}\omega^u_{*0n}\zeta+w_0^{(1,u)} \qquad (3.7)$$

где $w_0^{(1,u)}$ – частное решение уравнения (3.4). Удовлетворив граничным условиям (2.3), (2.4) относительно τ_{33} и, учитывая, что определитель полученной системы отличен от нуля, однозначно определятся неизвестные коэффициенты $C_{5n}^{(1,u)}$ и $C_{6n}^{(1,u)}$.

Решение уравнения (3.2) будем искать в виде

$$\begin{aligned}u_n^{(1,u)}&=\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\Big(\frac{1}{\pi}(\cos\pi m\zeta+\sin\pi m\zeta)-\zeta\cos\pi m\zeta\Big)-\\&-\frac{a_{55}}{4}\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=1)(1+\zeta)^2+\frac{a_{55}}{4}\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=-1)(\zeta-1)^2\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Граничные условия (2.3), (2.4) удовлетворяются автоматически. После подстановки в уравнение (3.2), умножая на $\cos\pi k\zeta$ и интегрируя в пределах $[-1;1]$, а также учитывая, что функции $\{\cos\pi k\zeta\}$ составляют ортонормированную систему на этом интервале, определятся значения a_{nk}, $(\omega^u_{*1n1})^2$:

$$a_{nk}=\frac{(-1)^k a_{55}n^2(\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=1)-\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=-1))}{n^2-k^2},\ k\neq n \qquad (3.9)$$

$$(\omega^u_{*1n1})^2=\frac{(-1)^n\pi n(\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=1)-\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=-1))}{C_{2n}^{(0,u)}},\ k=n$$

Умножая полученное после подстановки уравнение на $\sin\pi n\zeta$ и интегрируя в пределах $[-1;1]$, а также учитывая, что функции $\{\sin\pi k\zeta\}$ составляют ортонормированную систему на этом интервале, определятся значения a_{nn}:

$$\begin{aligned}a_{nn}&=\frac{1}{2}\Big((r_1+r_2)C_{2n}^{(0,u)}+(-1)^n a_{55}(\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=1)+\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=-1))+\\&+(-1)^n a_{55}(\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=-1)-\overline{\tau}_{13b}^{(1,u)}(\zeta=1))\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{2n^2}{n^2-k^2}\Big)\end{aligned} \qquad (3.10)$$

Аналогичным образом определятся первые приближения при остальных собственных значениях.

В отличие от пластин, где влияние последующих приближений на значения частот порядка $O(\varepsilon^2)$, эффект оболочки проявляется, начиная с приближения $s=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
3. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т.70. Вып. 1. С.111-125.
4. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т. 109. N4. С.304-309.

Сведения об авторе:

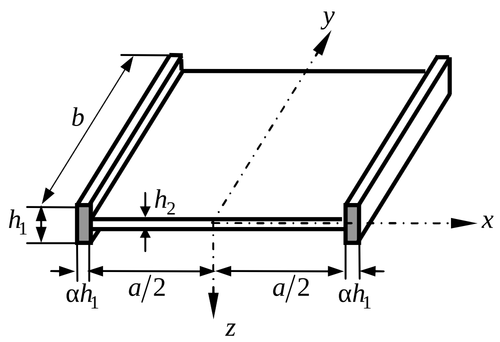
Гулгазарян Лусине Гургеновна – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, доцент кафедры математического анализа и теории функций Армянского государственного педагогического университета им. Х. Абовяна
Адрес: пр. М. Баграмяна 24^{б}, 0019, Ереван, Армения
ул. Тиграна Меца 17, 0010, Ереван, Армения
Тел.:(+37491) 30-25-54, (+37410) 52-48-90, E-mail: lusina@mail.ru

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ИЗГИБЕ

Дарбинян А.З.

Вопросам изгиба пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, посвящена работа [1]. Здесь рассматривается случай одновременного действия на пластинку поперечной нагрузки и температурного поля. Получены решения, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания пластинки на ее противоположных кромках и условиям упругого опирания на свободных краях. Произведена численная реализация задачи. Определено значение температуры, при котором пластинка практически не подвергается изгибу.

Рассматривается прямоугольная изотропная пластина размерами $a \times b \times h_2$, шарнирно опертая по продольным кромкам $y = 0,\ y = b$ и подкрепленная ребрами жесткости сечением $\alpha h_1 \times h_1$ на свободных краях $x = \pm a/2$ (фиг.1). Предполагается, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки $q(y)$ при наличии стационарного температурного поля $T(x, y, z)$.



Фиг.1

Уравнение изгиба пластинки при наличии температурного поля имеет вид [2]

$$D\left(\Delta^2 w(x, y) + \Delta R_e(x, y)\right) = q(y) \tag{1}$$

где

$$R_e(x, y) = \frac{3(1+\nu)}{2h_2^3}\alpha_t \int_{-h_2/2}^{h_2/2} zT(x, y, z)\,dz\,,$$

α_t – коэффициент температурного линейного расширения.

Допустим, что изменение температуры по толщине пластины следует линейному закону и что в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки, температура остается постоянной. Предположим, что верхняя поверхность прямоугольной пластины имеет положительную температуру, равную $T_0 = \text{const}$, нижняя – отрицательную $(-T_0)$. Выбор такого распределения температуры обусловлен тем, что в таком случае изгиб пластины от температурных напряжений будет происходить вверх и, тем самым, противодействовать действию поперечной нагрузки $q(y)$.

В этом случае, $T(x, y, z) = 2zT_0/h_2$ и $R_e(x, y) = \alpha_t T_0 (1+\nu)/(4h_2)$.

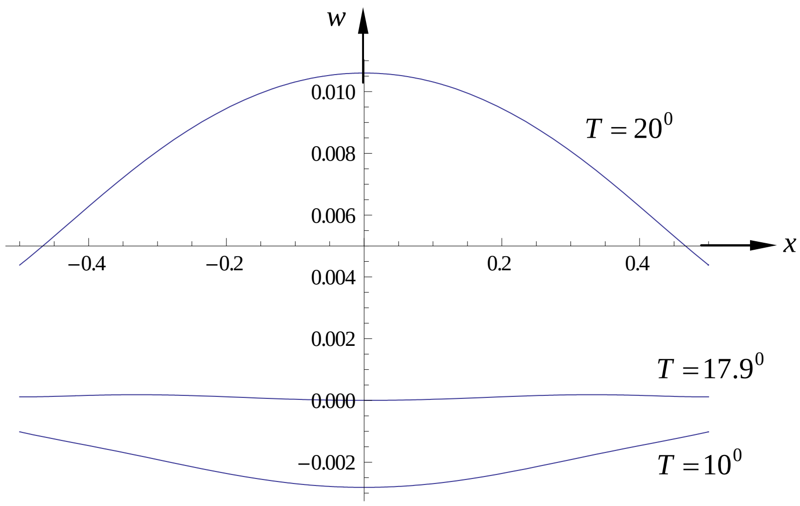
Прогиб $w(x, y)$ представляется в виде [2]

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y)$$

где $w_1(x, y)$ – прогиб от нагрузки $q(y)$, а $w_2(x, y)$ – прогиб от действия температуры, который предполагается изменяющимся по параболическому закону [3]

$$w_2(x, y) = -0.5y(b-y)R_e$$

Граничные условия запишутся в виде:
на кромках $y = 0,\ y = b$ – условия шарнирного опирания



Фиг.2

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_e = 0 \tag{2}$$

на средней линии $x = 0$ – условия симметрии

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{3}$$

на кромке $x = a/2$ – условия упругого опирания на ребра жесткости

$$\begin{gathered} C\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \alpha h_1 q = D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) \end{gathered} \tag{4}$$

где $C = G\alpha h_1^4 \beta$ – жесткость ребра при кручении, $D = Eh_2^3 \big/ 12\left(1-\nu^2\right)$ – цилиндрическая жесткость пластинки, $J = \alpha h_1^4 \big/ 12$ – момент инерции ребра, $\beta = \alpha^2\left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\alpha\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^5}\operatorname{th}\frac{\pi n}{2\alpha}\right]$, E, G, ν – упругие постоянные материала пластинки. Отметим, что в условиях (4) влияние температурных напряжений не учтено.

Разлагая в ряд Фурье

$$y(b-y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\lambda_k y, \qquad q(y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin\lambda_k y$$

где

$$b_k = \frac{2}{b}\int_0^b y(b-y)\sin\lambda_k y\,dy, \qquad q_k = \frac{2}{b}\int_0^b q(y)\sin\lambda_k y\,dy, \qquad \lambda_k = \frac{\pi k}{b},$$

решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), принимаем в виде

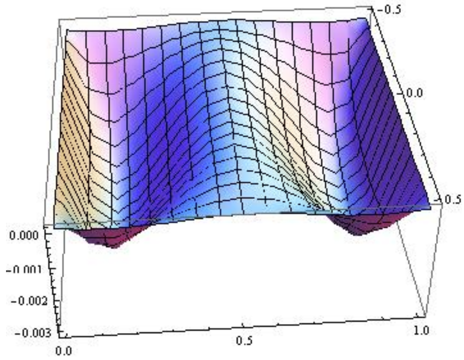
$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{q_k}{D\lambda_k^4} + c_{1k}\cosh\lambda_k x + c_{3k}x\sinh\lambda_k x - 0.5R_e b_k\right]\sin\lambda_k y\,. \tag{5}$$

Коэффициенты c_{1k} и c_{3k} определяются из граничных условий (4). Их выражения здесь не приводятся из-за громоздкости.

Численные расчеты проведены для квадратной пластины $\left(a=b=1м\right)$ при $q=1т/м^2$, изготовленной из стали, для которой принято $E=21\times10^{10}\,н/м^2$, $\alpha_t=1,2\times10^{-5}K^{-1}$, $\nu=0.25$.

Для различных значений температуры построены графики изменения прогибов пластинки на линии $y=0.5b$ (фиг. 2).

Как следует из приведенных графиков, при достаточно высоких значениях температуры ($T=20^0$) прогибы пластинки получаются положительными, т.е. большее влияние на прогибы оказывает изменение температуры. Меньшим значениям температуры ($T=10^0$) соответствуют отрицательные прогибы, здесь влияние поперечной нагрузки более существенно. Можно определить значение температуры, при которой максимальный прогиб пластинки от совместного действия поперечной нагрузки и температуры становится равным нулю. В настоящем примере значение этой температуры получается равным $T=17.9^0$. Пространственный график изменения прогибов при этой температуре показан на фиг. 3.



Фиг. 3

Как следует из графиков, на фиг. 2 и 3 наибольшие значения прогибов на линии $y=0.5b$ получаются равными нулю, а в других точках пластинки они незначительны. Таким образом, соответствующим выбором температуры можно добиться того, чтобы пластинка практически не подвергалась изгибным деформациям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Оптимизация по прочности прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по краям ребрами жесткости. // 6-ая Всесоюзная конф. по композ. матер. Ереван – Ленинакан: 1987. Т.2. С. 51-52.
2. Белубекян М.В., Саргсян М.Г., Саноян Ю.Г. Управление перемещениями в пьезопластинках с помошью электрического поля. //Вестник инженерной академии Армении. 2009. Т.6. №2. С.255-261.
3. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Дарбинян Артавазд Завенович,
старший научный сотрудник Института механики НАН Армении,
Тел.: (374 77)30 48 81

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ТОНКИМ СЛОЕМ

Джилавян С.А., Шахбазян Г.А.

Рассматривается задача дифракции плоской сдвиговой электроупругой волны в пьезоэлектрическом пространстве на полубесконечной трещине. Пьезоэлетрическая среда содержит заземленный тонкий бесконечный металлический слой (электрод). Задача приводится к решению функционального уравнения в теории аналитических функций. Получено замкнутое решение задачи, выражающее поле электроупругих волн в пьезоэлектрическом пространстве. Наличие полубесконечной трещины приводит к распространению поверхностных электроупругих волн.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии, отнесенное к декартовой системе координат Oxyz, когда среда имеет полубесконечную трещину в плоскасти $y = h$ при $x < 0$ и содержит заземлённый тонкий металлический слой. Толщина слоя настолько мала, что пренебрегается жесткость, т.е. слой рассматривается как электрод, занимающий всю плоскость $y = -h$. Ось Oz совпадает с осью симметрии кристалла. Пусть на полубесконечную трещину под углом $\theta_0 (0 < \theta_0 < \pi / 2)$ падает распространяющаяся из бесконечности плоская электроупругая волна сдвига со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала:

$$w_\infty(x, y) = e^{-ikx\cos\theta_0 - iky\sin\theta_0} ,$$

$$\Phi_\infty(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ikx\cos\theta_0 - iky\sin\theta_0} \tag{1}$$

Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих электроупругого поля – временный множитель $e^{-i\omega t}$, t – параметр времени, ω – частота колебаний. Здесь $k = \omega / c$ – волновое число, $c = \sqrt{c_{44}(1+æ)/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны в рассматриваемой среде, $æ = e_{15}{}^2 / \varepsilon_{11} c_{44}$ – коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика; c_{44}, e_{15}, ε_{11} – упругая, пьезоэлектрическая, диэлектрическая постоянные пьезоэлектрического пространства, соответственно, а ρ – плотность.

Пьезоэлектрическая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля, и для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала имеем следующие уравнения [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0$$

$$\Delta\Phi + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w = 0 \qquad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \tag{2}$$

На берегах трещины для амплитуды напряжения σ_{yz} имеем условие $\sigma_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$

при $y = h$, $x < 0$, (3)

а для амплитуд электрического потенциала и составляющего вектора электрической индукции

$$\Phi(x, y)\big|_{y=h+0} = \Phi(x, y)\big|_{y=h-0} , \; D_2(x, y)\big|_{y=h+0} = D_2(x, y)\big|_{y=h-0} , \tag{4}$$

где $D_2(x, y) = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$.

Решения уравнений (2) должны удовлетворять контактным условиям при $y = -h$

$$w\big|_{-h+0} = w\big|_{-h-0} , \; \sigma_{yz}\big|_{-h+0} = \sigma_{yz}\big|_{-h-0} , \; \Phi\big|_{-h} = 0 , \; D_2\big|_{-h+0} - D_2\big|_{-h-0} = -\varepsilon_{11} D_0(x) , \tag{5}$$

$D_0(x)$ определяет разницу электрической индукции.

Введем функции $q^+(x)=q(x)\theta(x)$, $\psi^-(x)=\psi(x)\theta(-x)$, $\theta(x)-$ функция Хевисайда,

$$\sigma_{yz}(x,0)=q^+(x)\ ,\ w\big|_{h+0}-w\big|_{h-0}=\psi^-(x), \qquad (6)$$

т.е. $q^+(x)-$ напряжение при $y=h$, а $\psi^-(x)$ представляет разницу перемещений на $y=h\pm 0$.

Для решения поставленной задачи введем функции

$$u(x,y)=w(x,y)-w_\infty(x,y),\ \ \phi(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi_\infty(x,y) \qquad (7)$$

тогда для напряжения и индукции получим формулы

$$\sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial u}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\phi}{\partial y}-ikc_{44}(1+æ)\sin\theta_0 e^{-ikx\cos\theta_0-iky\sin\theta_0}$$

$$D_2=e_{15}\frac{\partial u}{\partial y}-\varepsilon_{11}\frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad (8)$$

а для определения функций $u(x,y),\ \phi(x,y)$, которые должны удовлетворять и условиям уходящей волны , из (2) получим следующие уравнения:

$$\Delta u+k^2u=0\,,\quad \Delta\phi+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u=0 \qquad (9)$$

Применяя интегральное преобразование по переменной x, получим

$$\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}-(\sigma^2-k^2)\overline{u}=0\,,\quad \frac{d^2\overline{\phi}}{dy^2}-\sigma^2\overline{\phi}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}=0 \qquad (10)$$

где $\overline{u}(\sigma,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{i\sigma x}dx$, $\overline{\phi}(\sigma,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y)e^{i\sigma x}dx$.

Из условий (4), (5), (6), имея в виду (7),(8), применив преобразование Фурье, получим следующие условия:

$$\overline{q}^+(\sigma)=c_{44}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}-2\pi ikc_{44}(1+æ)\sin\theta_0 e^{-iky\sin\theta_0}\delta(\sigma-k\cos\theta_0)\ \text{ при } y=h, \qquad (11)$$

$$e_{15}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\bigg|_{-h+0}-\varepsilon_{11}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}\bigg|_{-h+0}-e_{15}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\bigg|_{-h-0}+\varepsilon_{11}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}\bigg|_{-h-0}=-\varepsilon_{11}\overline{D}_0, \qquad (12)$$

$$\overline{\phi}+2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}e^{-iky\sin\theta_0}\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=0\quad \text{при } y=-h,$$

$$\overline{u}(\sigma,h+0)-\overline{u}(\sigma,h-0)=\overline{\psi}^-(\sigma). \qquad (13)$$

Здесь $\delta(\sigma)-$ функция Дирака.

$$\frac{d\overline{u}}{dy}\bigg|_{h+0}=\frac{d\overline{u}}{dy}\bigg|_{h-0},\ \frac{d\overline{\phi}}{dy}\bigg|_{h+0}=\frac{d\overline{\phi}}{dy}\bigg|_{h-0},\overline{u}\big|_{-h+0}=\overline{u}\big|_{-h-0},$$

$$c_{44}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\bigg|_{-h+0}+e_{15}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}\bigg|_{-h+0}=c_{44}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\bigg|_{-h-0}+e_{15}\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}\bigg|_{-h-0} \qquad (14)$$

Чтобы выполнялись условия уходящей волны, принимается, что $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$ и $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ обходит точки ветвления: $-k$ сверху, а $k-$ снизу [2,3,4].

Ограниченное, удовлетворяющее (13), (14) условиям и представляющее уходящую волну, решение уравнений (10) имеет вид:

при $y>h$ $\qquad \overline{u}(\sigma,y)=A_1(\sigma)e^{-\gamma y}$

$$\overline{\varphi}(\sigma,y)=B_1(\sigma)e^{-|\sigma|y}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{u}(\sigma,y) \qquad (15)$$

при $|y|<h$ $\quad \bar{u}(\sigma,y)=\dfrac{e_{15}}{2c_{44}(1+æ)}\dfrac{e^{-\gamma(y+h)}}{\gamma}\bar{D}_0(\sigma)-\dfrac{1}{2}\bar{\psi}^-(\sigma)e^{\gamma(y-h)}$

$$\bar{\varphi}(\sigma,y)=-\frac{\bar{D}_0(\sigma)}{2|\sigma|}e^{-|\sigma|(y+h)}+\frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}}\bar{\psi}^-(\sigma)e^{|\sigma|(y-h)}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\bar{u}(\sigma,y) \qquad (16)$$

при $y<-h$ $\quad \bar{u}(\sigma,y)=A_2(\sigma)e^{\gamma y}$

$$\bar{\varphi}(\sigma,y)=B_2(\sigma)e^{|\sigma|y}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\bar{u}(\sigma,y) \qquad (17)$$

где $A_{1,2}(\sigma)=\pm\dfrac{1}{2}\bar{\psi}^-(\sigma)e^{\pm\gamma h}+\dfrac{e_{15}}{2c_{44}(1+æ)}\dfrac{e^{\mp\gamma h}}{\gamma}\bar{D}_0(\sigma)$

$$B_{1,2}(\sigma)=-\frac{\bar{D}_0(\sigma)}{2|\sigma|}e^{\mp|\sigma|h}\mp\frac{e_{15}}{2\varepsilon_{11}}\bar{\psi}^-(\sigma)e^{\pm|\sigma|h}, \qquad (18)$$

и из (12) находим

$$\varepsilon_{11}\bar{D}_0(\sigma)=-e_{15}(1+æ)|\sigma|\frac{E(\sigma)}{K(\sigma)}\bar{\psi}^-(\sigma)+4\pi e_{15}(1+æ)k\frac{\cos\theta_0 e^{ikh\sin\theta_0}}{K(k\cos\theta_0)}\delta(\sigma-k\cos\theta_0). \qquad (19)$$

Из условия (11) получим следующее функциональное уравнение относительно $\bar{\psi}^-(\sigma)$ и $\bar{q}^+(\sigma)$:

$$\frac{c_{44}}{2}\sqrt{\sigma^2-k^2}L(\sigma)\bar{\psi}^-(\sigma)+\bar{q}^+(\sigma)+2\pi\lambda\delta(\sigma-k\cos\theta_0)=0 \qquad (20)$$

В приведенных формулах

$$K(\sigma)=1+æ-\frac{æ|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k^2}},\ E(\sigma)=e^{-2\sqrt{\sigma^2-k^2}h}-e^{-2|\sigma|h} \qquad (21)$$

$$L(\sigma)=\frac{K_1(\sigma)K_2(\sigma)}{K(\sigma)},\ K_{1,2}(\sigma)=K(\sigma)\mp M(\sigma)E(\sigma)$$

$$M(\sigma)=\left(æ(1+æ)\frac{|\sigma|}{\sqrt{\sigma^2-k^2}}\right)^{1/2}=\left((1+æ)(1+æ-K(\sigma))\right)^{1/2} \qquad (22)$$

$$\lambda=c_{44}ik(1+æ)(\sin\theta_0 e^{-ikh\sin\theta_0}+iæ\frac{\cos\theta_0 e^{ikh\sin\theta_0}}{K(k\cos\theta_0)}).$$

Здесь $K(\sigma)\to 1$, $K_{1,2}(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$.

Функция $K_1(\sigma)$ имеет нули только если $\sigma=\pm\sigma_1$, где σ_1 – единственный действительный корень уравнения $K_1(\sigma)=0$ при $\sigma>k$. Доказывается, что и функция $K_2(\sigma)$ имеет нули только если $\sigma=\pm\sigma_2$, где уже σ_2 – единственный действительный корень уравнения $f(\sigma)=1$ при $\sigma>k$, $f(\sigma)=-K(\sigma)/M(\sigma)E(\sigma)$, т.к. $f'(\sigma)<0$ при $k<\sigma<\sigma_п$. Таким образом, $k<\sigma_2<\sigma_п<\sigma_1$, где $\sigma_п=k(1+æ)/\sqrt{1+2æ}$. Функция $K(\sigma)$ имеет нули, если только $\sigma=\pm\sigma_п$ [4]. Следовательно, принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления функции $\sqrt{\alpha^2-k^2}$, но и точки $\sigma=-\sigma_1$, $\sigma=-\sigma_п$, $\sigma=-\sigma_2$ сверху, а точки $\sigma=\sigma_1$, $\sigma=\sigma_п$, $\sigma=\sigma_2$ – снизу, тем самым, обеспечивая условие уходящей волны [4,5,6].

В рассматриваемой пьезоэлектрической среде распространяются поверхностные (локализованные) волны. Решение уравнения (20) строится, факторизируя функцию

$\sqrt{\sigma^2 - k^2} L(\sigma)$, представив в виде $\sqrt{\sigma^2 - k^2} L(\sigma) = \sqrt{\sigma + k} L^+(\sigma) \sqrt{\sigma - k} L^-(\sigma)$, где функции $L^\pm(\sigma)$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$ и $\operatorname{Im}\alpha < 0$ соответственно.

Теперь уже уравнение (20) запишем в виде

$$\frac{c_{44}}{2}\sqrt{\sigma - k} L^-(\sigma)\overline{\psi}^-(\sigma) + \frac{\overline{q}^+(\sigma)}{\sqrt{\sigma + k} L^+(\sigma)} + \frac{2\pi\lambda\delta(\sigma - k\cos\theta_0)}{\sqrt{2k}\cos\dfrac{\theta_0}{2} L^+(k\cos\theta_0)} = 0. \tag{23}$$

Методика решения уравнения (23) та же, что и в [3,4,6], имея в виду представление

$$2\pi i\delta(\sigma - k\cos\theta_0) = \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 - i0} - \frac{1}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0},$$

получим следующие решения:

$$\overline{\psi}^-(\sigma) = -\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\lambda}{ic_{44}\cos\dfrac{\theta_0}{2} L^+(k\cos\theta_0)}\frac{1}{\sqrt{\sigma - k} L^-(\sigma)(\sigma - k\cos\theta_0 - i0)}$$

$$\overline{q}^+(\sigma) = \frac{\lambda}{i\sqrt{2k}\cos\dfrac{\theta_0}{2} L^+(k\cos\theta_0)}\frac{\sqrt{\sigma + k} L^+(\sigma)}{\sigma - k\cos\theta_0 + i0} \tag{24}$$

Таким образом, решение поставленной задачи, имея в виду (15)-(19), представляется в виде

$$w(x,y) = w_\infty(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{u}(\sigma,y)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

$$\Phi(x,y) = \Phi_\infty(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi}(\sigma,y)e^{-i\sigma x}d\sigma. \tag{25}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 279 с.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ, естественные науки. 1979. № 3. С. 29-34.
4. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. № 1. С. 38-50.
5. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными полубесконечными трещинами. //В кн.: «Проблемы взаимодейсвия деформированных сред». V-ая Межд. конф. Горис, 2005. С. 163-168.
6. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.56–66.

Сведения об авторах:

Джилавян Самвел Акопович – к.ф.-м.н., ст. научн.сотр кафедры механики, Ереванский госуниверситет, ф-т метематики и механики, (374 10) 54 16 58,E-mail samjilavyan@ysu.am

Шахбазян Гегам Артаваздович – магистрант, ф-т метематики и механики, Ереванский госуниверситет E-mail gegshahbazyan@gmail.com

ВОЛНЫ РИМАНА И СОЛИТОНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ КОССЕРА

Ерофеев В.И., Виноградова Ю.В.

Рассматриваются особенности распространения различных типов волн в нелинейно-упругих и нелинейно-термо-упругих микрополярных (Коссера) средах.

Уравнения динамики среды Коссера имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_i = \sigma_{ji,j} + x_i \\ J\ddot{\varphi}_i = \in_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + y_i \end{cases}, \tag{1}$$

где u_i – компоненты вектора перемещения; φ_i – компоненты вектора поворота; σ_{ij} – тензор напряжений; μ_{ij} – тензор моментных напряжений; x_i – компоненты вектора массовых сил; y_i – компоненты вектора массовых моментов; ρ – плотность; J – мера инерции при вращении; $\in_{ijk}$ – тензор Леви-Чивиты, т.е. антисимметричный тензор.

Пусть в дальнейшем массовые силы и моменты отсутствуют.

Уравнение теплопроводности для микрополярной термоупругой среды идентично этому уравнению для симметричной термоупругости [1]

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa}\dot{\theta} = \eta_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \mathrm{div}\,\dot{u}, \tag{2}$$

где θ – перепад температуры $\theta = T - T_0$; T_0 – температура естественного состояния; η_0 – коэффициент вязкости $\eta_0 = \frac{\nu T_0}{k}$; $\kappa = \frac{k}{c_\varepsilon}$, где k – коэффициент теплопроводности, c_ε – теплопроводность при постоянной деформации

В [2] показано, что система (3) может быть разбита на четыре независимых друг от друга группы уравнений. Каждая из групп уравнений описывает свой тип распространяющихся плоских волн, а именно: нелинейные волны сдвига и вращения, поляризованные в плоскости Oy и в плоскости Oz; термоупругая продольная волна; термоупругая продольно-ротационная волна.

Рассмотрим задачу о распространении термоупругих продольной и ротационной волн в рамках среды Коссера:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = u_{xx}\left(2\mu + \lambda\right)\left[1 + 2u_x\right] - \nu\theta_x \\ J\varphi_{tt} = \varphi_{xx}\left(2\gamma + \beta\right)\left[1 + 2\varphi_x\right] - \chi\theta_x - 4\alpha\varphi \\ \theta_{xx} - \frac{1}{\kappa}\theta_t = \eta_0\left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) u_{xt} \end{cases} \tag{3}$$

Эта система эквивалентна одному нелинейному уравнению относительно продольного перемещения:

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u_{xx}\left(\lambda + 2\mu\right)\left[1 + 2u_x\right] - \rho u_{tt}\right) = \frac{1}{\kappa\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{xx}\left(\lambda + 2\mu\right)\left[1 + 2u_x\right] - \rho u_{tt}\right) + \eta_0 u_{xxt} \tag{4}$$

Рассмотрим два предельных случая: материал слабо проводит тепло ($\kappa \to 0$) и материал обладает идеальной теплопроводностью ($\kappa \to \infty$).

В первом случае уравнение (4) имеет решение в виде простой волны (волны Римана). В среде Коссера она будет эволюционировать по обычному для таких волн сценарию: увеличение крутизны фронта, опрокидывание [3].

В случае идеальной теплопроводности материала уравнение (4) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}\left(1 + 2\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\right) = -\frac{\eta_0 \nu T}{\rho}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}, \qquad (5)$$

где $\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{x}$ – безразмерные величины; 2ε – малый параметр, характеризующий нелинейность среды.

Рассмотрим волну, бегущую в положительном направлении оси x. Для этого введем систему координат: $\xi = \tilde{x} - \tilde{t}$; $\tau = \varepsilon \tilde{t}$

Сделав замену $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = U$, из (5) получим эволюционное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U\frac{\partial U}{\partial \xi} + aU = 0, \qquad (6)$$

отличающееся от уравнения Римана наличием дополнительного (диссипативного) слагаемого. Здесь $\frac{\eta_0 \nu \Lambda}{(\lambda + 2\mu)2\varepsilon} = a$.

Для уравнения (6) запишем характеристическую систему:

$$\frac{d\tau}{aU} = \frac{d\xi}{U} = \frac{dU}{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{d\tau} = -aU \\ \dfrac{d\xi}{d\tau} = U \end{cases} \qquad (7)$$

В неявном виде решение уравнения (6) дается соотношением:

$$\xi = \arcsin(U) - U\frac{e^{at} - 1}{a} \qquad (8)$$

Профиль волны при $t = 0$ получается путем графического сложения функции $\xi = \arcsin(U)$, описывающей форму волны при $t = 0$ и кривой $\xi = -U\frac{e^{at} - 1}{a}$, характеризующей относительные перемещения точек профиля волны в зависимости от амплитуды.

Графические зависимости позволяют сделать вывод о том, что функция U на характеристике L не остается постоянной, и в этом случае характеристики не являются прямыми.

Опрокидывание волны происходит в том случае, когда начальный профиль имеет достаточно большую отрицательную крутизну. Если же волна недостаточно крута, то затухание может предотвратить опрокидывание.

Рассмотрим распространение нелинейной волны сдвига и вращения, поляризованной в плоскости Oz

$$
\begin{cases}
\rho \ddot{u}_3 = u_{3,11}(\mu+\alpha)\left[1+2u_{3,1}\right] + 2\alpha\varphi_{2,1} \\
J\ddot{\varphi}_2 = \varphi_{2,11}(\gamma+\varepsilon)\left[1+2\varphi_{2,1}\right] - 2\alpha u_{3,1} - 2\alpha u_{3,1}^2 - 4\alpha\varphi_2
\end{cases}
\tag{9}
$$

Для анализа стационарных волн в уравнениях системы (3) перейдем к бегущей координате, сделав замену $\xi = x - Vt$. Это позволяет свести систему (9) к уравнению осциллятора с квадратичной нелинейностью:

$$
\frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2} + a\varphi_2 + b\varphi_2^2 = 0 . \tag{10}
$$

Здесь приняты обозначения:

$$
a = \frac{4\alpha\left(V^2 - c_\tau^2\right)}{\left(V^2 - c_t^2\right) J\left[V^2 - c_2^2\right]}, \qquad b = \frac{8\alpha c_3^4}{J\left[V^2 - c_t^2\right]^2\left[V^2 - c_2^2\right]},
$$

где

$c_\tau = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\dfrac{\gamma+\varepsilon}{J}}$ – скорости, с которыми распространялись бы волны сдвига и вращения, если бы они не были связаны между собой; $c_3 = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\rho}}$, $c_t = \sqrt{\dfrac{\mu+\alpha}{\rho}}$ – величины, также имеющие размерность скорости.

Уравнение осциллятора (10) имеет как периодические, так и апериодические решения. Первому классу решений соответствуют нелинейные периодические стационарные волны в исходной системе (9), второму классу решений соответствуют солитоны в исходной системе.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 09-08-00827).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И. Вывод уравнений динамики нелинейной среды Коссера // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 6(1). С.159-162.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Ерофеев Владимир Иванович,

Доктор физ.-мат. наук, профессор, заместитель директора по научной работе Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, профессор Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (Российского национального исследовательского университета), (831) 432 05 76,

E-mail: erf04@sinn.ru

Виноградова Юлия Валерьевна,

Аспирантка Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (Российского национального исследовательского университета).

E-mail: yuvinog@gmail.com

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПСЕВДОСКАЧКА В КАНАЛАХ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

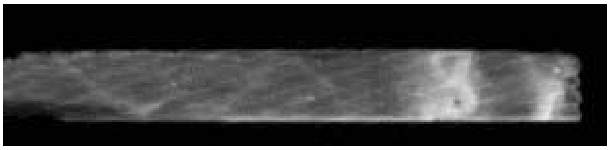
Забайкин В. А., Смоголев А. А.

Изучение псевдоскачковых течений, возникающих при торможении сверхзвукового потока до дозвуковых скоростей в канале, является важной задачей механики жидкости и газа. В то же время большинство таких исследований ведется для стационарных режимов. В работе показана возможность активного управления псевдоскачковыми течениями, используя периодическое воздействие на воздушный поток. Впервые измерена скорость перемещения псевдоскачка в плоском и осесимметричном каналах. Предложены и проверены способы управления течением и режимами горения в сверхзвуковом воздушном потоке, которые могут быть использованы при организации эффективного теплоподвода в камерах сгорания перспективных высокоскоростных двигателей.

Псевдоскачковое течение реализуется в каналах постоянного и переменного сечения при торможении сверхзвукового потока и характерно для воздухозаборников летательных аппаратов, камер сгорания прямоточных двигателей, сверхзвуковых аэродинамических труб и т.п. Несмотря на значительные достижения по изучению псевдоскачка, начало которым было заложено с работы [1], где и предложен данный термин, полного знания по структуре псевдоскачка и физике процессов, происходящих в нем, до сих пор не получено. Особенно это касается вопросов управления, так как хорошо изучены только стационарные состояния псевдоскачка. В то же время практически не исследовано движение псевдоскачка и особенности его перестроения при изменении внешних условий, в том числе при импульсно-периодическом воздействии.

В представленной работе исследовалось поведение и скорость перемещения псевдоскачка в прямоугольном и осесимметричном каналах постоянного сечения. Начальные числа Маха в обоих случаях были близки и равнялись M = 1,9 и M = 2,2. Периодические возмущения создавались путем механического дросселирования выходного сечения каналов, а также энергетическим воздействием от периодического плазмотрона малой мощности и дополнительно от импульсно-периодической детонационной трубки (в осесимметричном канале). Скорость перемещения отдельных структур псевдоскачка определялась двумя способами – по измерениям статического давления на стенке канала, а также применением скоростной шлирен-регистрации на CCD камеру «HighSpeedStar3» с экспозициями 10-50 мкс и скоростью съемки до 2000 кадров в секунду. Необходимо отметить, что в высокоскоростном потоке инерционность датчиков давления может оказать существенное влияние на точность измерений. Поэтому не было ясности о применимости данного метода для определения скорости перемещения псевдоскачка. Кроме того, оптической (теневой) регистрацией в предварительных экспериментах было установлено, что ударно-волновые структуры псевдоскачка нестационарны (рис. 1). Даже при отсутствии внешнего воздействия они совершают небольшие колебания около среднего положения, поэтому при длительных экспозициях ($\tau_{эксп} \sim 10^{-2}$ с) скачки уплотнения, составляющие псевдоскачок, кажутся «размытыми» (рис. 1,***а***). Только короткие экспозиции ($\tau_{эксп} \sim 10^{-5}$ с) позволяют получать «мгновенные» положения псевдоскачка (рис. 1,***б***).

а



б

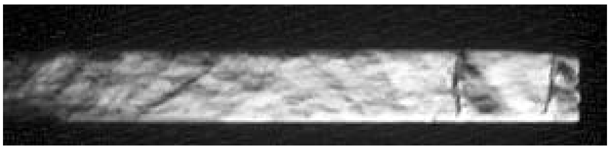


Рис. 1. Вид первых двух ударно-волновых структур псевдоскачка при различных экспозициях. ***а*** – усредненное изображение при $\tau_{эксп} = 10^{-2}$ с, ***б*** – мгновенное изображение при $\tau_{эксп} = 10^{-5}$ с.

Эксперименты проводились на стенде сверхзвукового горения ИТПМ СО РАН. Прямоугольный канал постоянного сечения имел размеры 40×20×565 мм (рис. 2). Боковые стенки закрывались кварцевыми стёклами длиной 150 мм. Верхняя (широкая) стенка снабжена отверстиями диаметром 1 мм для измерения статического давления по стенке канала. Отверстия расположены вдоль центральной линии. Для измерения давлений применялись тензодатчики типа «Сапфир». Воздух подавался через плоское сверхзвуковое сопло с M = 1,9. Механическое воздействие на поток осуществлялось путем периодического дросселирования выходного сечения, и могло изменяться по частоте.

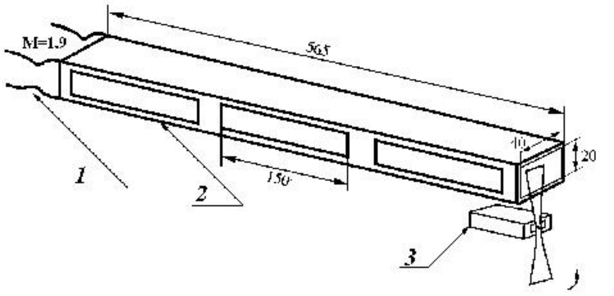


Рис. 2. Схема канала постоянного сечения для исследований способов управления газодинамикой течения. 1 – сверхзвуковое сопло; 2 – канал постоянного сечения с кварцевыми окнами; 3 – устройство для периодического перекрытия выходного сечения.

При единичном воздействии псевдоскачок передвигался верх по потоку, при снятии возмущения – возвращался в прежнее положение. На рис. 3 приведено распределение статического давления по длине канала при частоте дросселирования 12 Гц. Начальное положение псевдоскачка было выбрано таким образом, чтобы его голова находилась в конце второго бокового окна (кривая 1). Максимальное продвижение вверх по потоку соответствует кривой 3, обратное продвижение – кривой 4. Видно, что такой частоте псевдоскачок не успевает вернуться в исходное положение и колеблется вокруг некоторого среднего значения (кривая 2). Минимальная частота механического воздействия для данного канала, при которой псевдоскачок успевал возвращаться в начальное положение, составила ≈1 Гц.

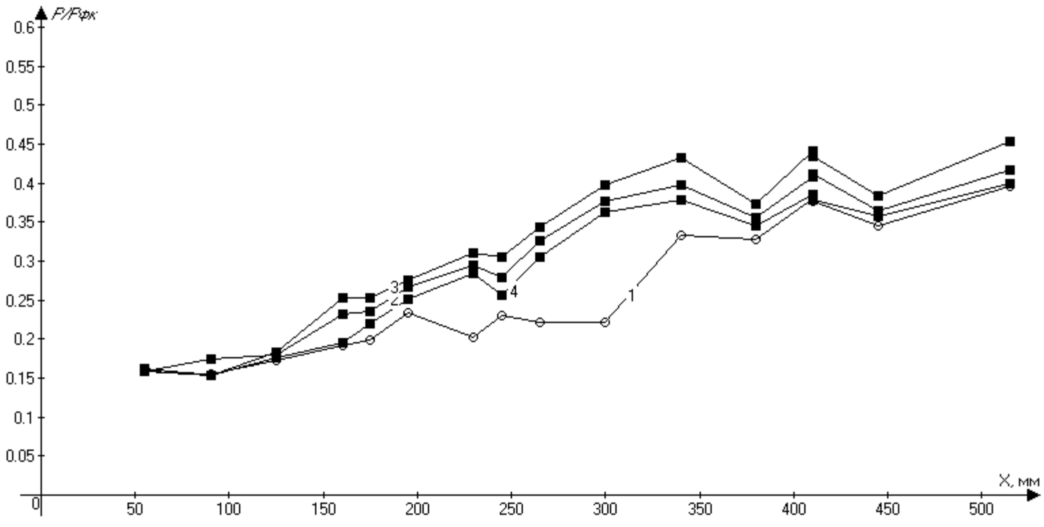


Рис. 3. Распределение статического давления по длине канала без дросселирования (1) и с дросселированием (2, 3, 4); частота дросселирования 12 Гц.

Для определения скорости перемещения головы псевдоскачка, были использованы показания датчиков давления от времени. На рис. 4 представлены зависимости от времени показаний датчиков статического давления, расположенных на различном расстоянии от начала канала. Частота перекрытия канала при этом составляла 2,7 Гц.

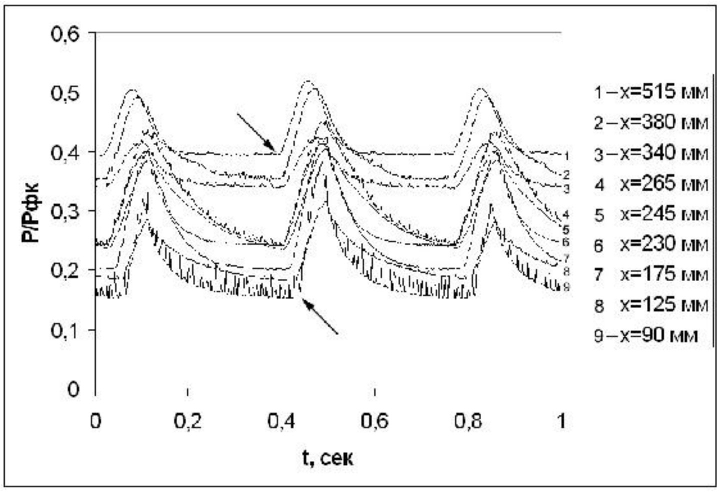


Рис. 4. Показания датчиков давления по времени, частота дросселирования 2,7 Гц.

Скорость перемещения головной части псевдоскачка определялась по началу реагирования датчиков давления на внешнее воздействие (на рис.4 показаны стрелками). В условиях эксперимента зафиксированное значение скорости перемещения волновых структур псевдоскачка вверх по потоку оказалось в пределах U ~ 7 - 25 м/с.

Боковые стенки, закрытые кварцевыми стёклами, позволяли наблюдать структуру псевдоскачка. При этом скоростная шлирен-регистрация дала информацию об особенностях и скорости передвижения псевдоскачка, причём с большей точностью, чем определенная по темпу изменения распределения статического давления. Для этого потребовалась регистрация с временами экспозиции от $5 \cdot 10^{-5}$ до 10^{-6} с. Кроме того, оптическая регистрация оказалась менее чувствительна к сильным электромагнитным помехам, возникавшим при работе импульсно-периодического плазмотрона. В результате экспериментов удалось установить, что псевдоскачок перемещается по каналу как единое целое, причём скорость движения вверх по потоку от 2 до 10 раз превышала скорость обратного перемещения. Скорость перемещения псевдоскачка вверх по потоку, измеренная как по показаниям датчиков давления, так и по данным теневой регистрации, для прямоугольного канала составила 7-25 м/с; вниз по потоку – от 2 до 5 м/с. Эти величины были получены как при механическом дросселировании (в диапазоне частот f=1÷15 Гц), так и при энергетическом воздействии (от одиночного до f=25 Гц), создававшемся импульсно-периодическим плазмотроном (рис. 5).

а ***б***

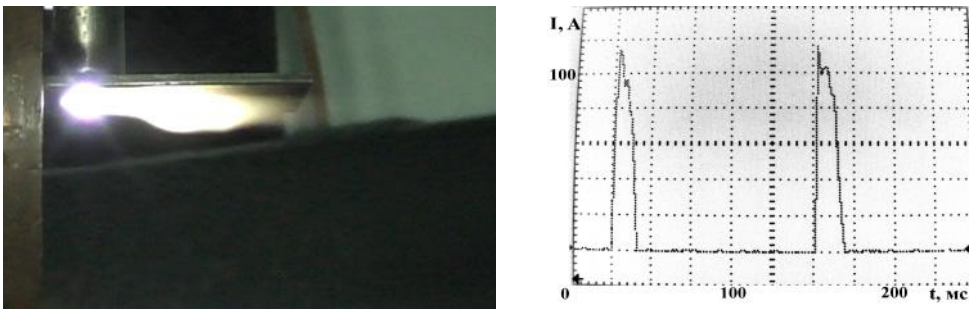
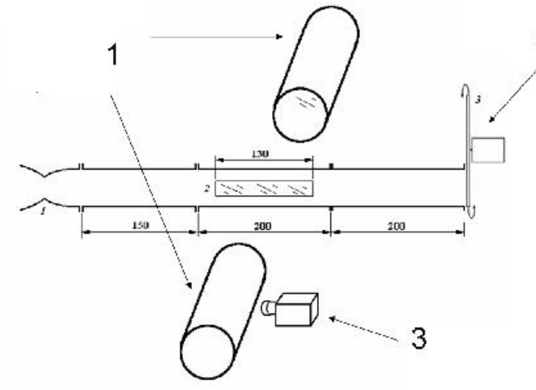


Рис. 5. Работа плазмотрона в сносящем сверхзвуковом потоке (***а***) и форма импульсов тока (***б***).

В экспериментах по исследованию нестационарного псевдоскачкового течения в осесимметричном канале применялись те же методы регистрации. Канал набирался из 3-х секций общей длиной 550 мм (рис. 6) и имел число Маха на входе M=2,2. Частота периодического перекрытия выходного сечения канала механическим дросселем была 4,4 Гц и 12,2 Гц. Сложность оптических наблюдений заключалась в том, что в таком канале высота окон для наблюдений составляла 10 мм, при диаметре канала D=50 мм. Однако реализованная регистрация только осевых частей структур псевдоскачка также позволила определить скорость его перемещения.

а



б

Рис. 6. Схема эксперимента для осесимметричного канала (***а***) и теневая картина фрагмента псевдоскачка, регистрируемая в окне для оптических наблюдений (***б***).
1 – система шлирен-регистрации (прибор ИАБ-451), 2 – устройство механического дросселирования, 3 – скоростная CCD камера.

На рис. 7 и 8 показано перемещение структур псевдоскачка за 1 цикл при движении вверх по каналу (при перекрытии выходного сечения канала) и вниз (при снятии воздействия). Скорость движения определялась исходя из изменения их положения на последовательности кадров. Точки на графиках обозначают среднюю скорость движения структуры псевдоскачка за миллисекунду, предшествующую соответствующей точке. За начало отсчёта по оси времени взято время съёмки первого кадра, на котором становился виден псевдоскачок.

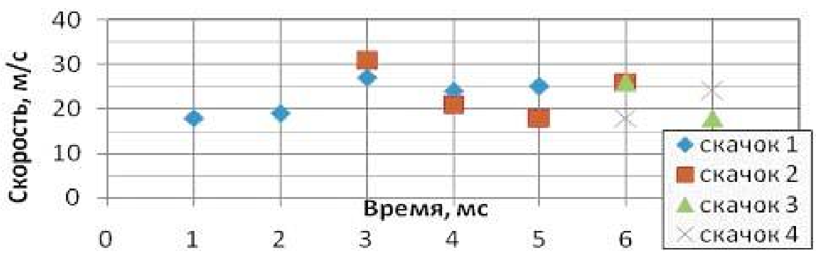


Рис. 7. Скорость движения псевдоскачка вверх по каналу при частоте дросселирования 12,2 Гц.

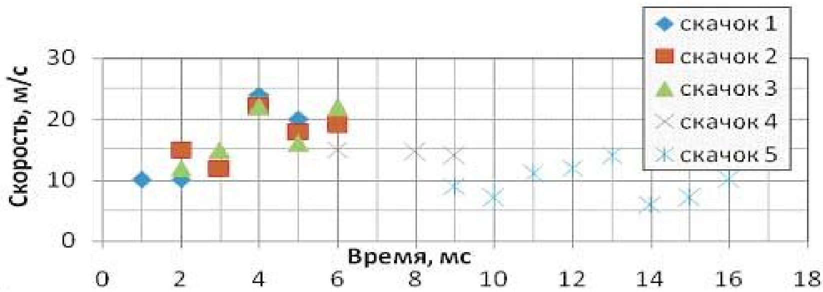


Рис.8. Скорость движения псевдоскачка вниз по каналу при частоте дросселирования 12,2 Гц.

Скорость перемещения псевдоскачка (вверх и вниз по течению) при частотах перекрытия 4,4 и 12,2 Гц оказалась приблизительно в одних и тех же пределах: 10-30 м/с для движения вверх по течению и 5-25 м/с при движении вниз по течению, что одного порядка, но несколько больше, чем для случая плоского канала. Скорее всего это связано с меньшим гидравлическим сопротивлением (потерями на трение) в осесимметричном канале. Движение вверх по течению совершается с большей скоростью, по сравнению с обратным движением, что не противоречит результатам, полученным для канала прямоугольного сечения. Измерения также показали, что во время цикла скорость перемещения псевдоскачка не является постоянной, и имеет максимум в средней части цикла (см. рис. 7,8).

Полученные результаты показали возможность относительно низкочастотного (единицы - десятки герц) воздействия на псевдоскачок для изменения его положения и последующего воздействия на структуру течения. Зарегистрированная скорость перемещения псевдоскачка дала информацию о времени и скорости его отклика на внешнее воздействие. Это позволило начать целенаправленные исследования по импульсно-периодическому управлению процессом горения в каналах постоянного и переменного сечения.

Выводы. Проведены экспериментальные исследования пульсирующих режимов течения с псевдоскачком в плоском и осесимметричном каналах постоянного сечения.

– Показано, что периодическое энергетическое воздействие на воздушный поток в канале приводит к перемещению псевдоскачка как единого целого вверх и вниз по течению.

– При низкой частоте периодического энергоподвода в канал псевдоскачок успевает возвращаться на прежнее место; при повышении частоты/интенсивности воздействия вся область колебаний располагается выше начального положения псевдоскачка.

– Амплитуда колебаний головы псевдоскачка уменьшается при увеличении частоты воздействия.

Впервые определена скорость перемещения псевдоскачка двумя независимыми методами; показана возможность точного определения скорости оптическим методом, в том числе в условиях регистрации только центральной части потока в осесимметричном канале; получено, что скорость перемещения возмущений вверх по потоку лежит в пределах от 7 до 30 м/с; вниз по потоку – от 2 до 25 м/с. Обнаружено, что скорость движения структуры может меняться при движении внутри канала в различные моменты времени.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-08-00998 и по программе фундаментальных исследований РАН, проект № 11.13.

ЛИТЕРАТУРА

1. Neuman E.P., Lustwerk F. Supersonic Diffusers for Wind Tunnels.// Journal Appl. Mech. 1949, vol. 16, 2, p.195–202.

Сведения об авторах:

Забайкин Василий Алексеевич – к.т.н., с.н.с. Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, (383) 330 39 23; E-mail lab2@itam.nsc.ru

Смоголев Андрей Анатольевич – м.н.с. Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, (383) 330 39 23; E-mail lab2@itam.nsc.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ И УТОЧНЕННЫЙ ПРОЧНОСТНОЙ АНАЛИЗ УПЛОТНИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ НАНОСТРУКТУРИРОВАННОГО ТЕРМОРАСШИРЕННОГО ГРАФИТА

Зайцев А. В., Злобин Н. Г., Исаев О. Ю., Смирнов Д. В., Ханов А. М.

Разработана модель начального режима работы изготавливаемых крупносерийными партиями колец из наноструктурированного ТРГ, которая позволила получить новые численные решения краевых задач для уплотнительных элементов и их пакетов методом конечных элементов. Проведена оценка начальной прочности по совокупности критериев с учетом реальных механизмов разрушения (частичной потери несущей способности от растяжения и сжатия в радиальном, окружном и осевом направлениях, от продольного и поперечного сдвига). Полученные из вычислительных экспериментов данные о местах расположения областей, в которых начинается разрушение наноструктурированного ТРГ, согласуются с результатами, наблюдаемыми при эксплуатации кранов с уплотнениями по штоку.

Терморасширенный графит (ТРГ) — уникальный наноструктурированный материал, который вне зависимости от условий эксплуатации (повышенные температуры, термоциклирование, время контакта с агрессивными средами) обладает высокой термо-химической стойкостью, низким коэффициентом трения, высокими упругими свойствами. Уплотнительные элементы (УЭ) из ТРГ очень надежны и не требуют дополнительного уплотнения при эксплуатации, работают при температурах до 560°C и давлении 40,0 МПа. В настоящее время происходит интенсивное внедрение УЭ из ТРГ на предприятиях и промышленных объектах аэрокосмического, металлургического, нефтегазового и химического комплексов, предприятий энергетики и ЖКХ. Традиционные способы отработки УЭ из ТРГ (на натурных конструкциях и опытных образцах) не оправданы вследствие высокого риска возникновения аварий, сопровождающихся серьезным экологическим и экономическим ущербом. Поэтому большое значение приобретают методы математического моделирования поведения ТРГ, с помощью которых можно прогнозировать теплофизико-механические свойства этого материала, описывать поведение, проектировать новые УЭ и пакеты УЭ, оптимально соответствующие условиям нагружения конкретного узла или агрегата [1].

Будем рассматривать кольцевые УЭ и пакеты из двух одинаковых УЭ, каждый из которых является толстостенным, ограниченным по высоте h, однородным трансверсально-изотропным цилиндром с осью симметрии бесконечного порядка z ($0 \le z \le h$), совпадающей с образующей. Поперечные сечения цилиндров ограничены двумя концентрическими окружностями с радиусами a и b ($a < b$).

При построении модели термомеханического поведения УЭ (или пакета УЭ) будем предполагать, что ТРГ является линейно упругим материалом, внешнее термо-силовое воздействие на который приводит к бесконечно малому изменению объема и формы физических точек. Краевая задача состоит из уравнений равновесия

$$\partial\sigma_{rr}/\partial r + (\partial\sigma_{r\theta}/\partial\theta)/r + \partial\sigma_{zr}/\partial z + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = 0\,, \tag{1}$$
$$\partial\sigma_{r\theta}/\partial r + (\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta)/r + \partial\sigma_{z\theta}/\partial z + 2\sigma_{r\theta}/r = 0\,, \quad \partial\sigma_{zr}/\partial r + (\partial\sigma_{\theta z}/\partial\theta)/r + \partial\sigma_{zz}/\partial z + \sigma_{zr}/r = 0$$

в отсутствие массовых сил и геометрических соотношений Коши

$$\varepsilon_{rr} = \partial u_r/\partial r\,, \quad r\varepsilon_{\theta\theta} = \partial u_r/\partial\theta + u_r\,, \quad \varepsilon_{zz} = \partial u_z/\partial z\,, \quad 2\varepsilon_{zr} = \partial u_z/\partial r + \partial u_r/\partial z\,, \tag{2}$$
$$2\varepsilon_{r\theta} = (\partial u_r/\partial\theta - u_\theta)/r + \partial u_\theta/\partial r\,, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \partial u_\theta/\partial z + (\partial u_z/\partial\theta)/r\,,$$

записанных в цилиндрических ортогональных координатах r, θ и z, а также определяющих соотношений

$$\sigma_{rr} = K_{11}\varepsilon_{rr} + K_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + K_{13}\varepsilon_{zz} - \beta_{rr}T\,, \quad \sigma_{\theta\theta} = K_{12}\varepsilon_{rr} + K_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + K_{13}\varepsilon_{zz} - \beta_{\theta\theta}T\,, \tag{3}$$
$$\sigma_{zz} = K_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + K_{33}\varepsilon_{zz} - \beta_{zz}T\,, \quad \sigma_{r\theta} = G\,\varepsilon_{r\theta}\,, \quad \sigma_{zr} = \hat{G}\,\varepsilon_{zr}\,, \quad \sigma_{\theta z} = \hat{G}\,\varepsilon_{\theta z}\,,$$

содержащих следующие множители:

$$K_{11} = E\left(1 - \hat{\nu}^2\right)\Big/D\,, \quad K_{12} = E\left(\nu - \hat{\nu}^2\right)\Big/D\,, \quad K_{13} = E\hat{\nu}\,(1+\nu)/D\,, \quad K_{33} = \hat{E}\left(1 - \nu^2\right)\Big/D\,,$$
$$\beta_{rr} = \beta_{\theta\theta} = \alpha\,(K_{11} + K_{12}) + \hat{\alpha}K_{13}\,, \quad \beta_{zz} = 2\alpha K_{13} + \hat{\alpha}K_{33}\,,$$

а также уравнения Лапласа

$$\lambda\left[\partial(r\,\partial T/\partial r)/\partial r + \left(\partial^2 T/\partial\theta^2\right)\Big/r\right]\Big/r + \hat{\lambda}\,\partial^2 T/\partial z^2 = 0\,, \tag{4}$$

которое описывает стационарное распределение температур T при отсутствии внутренних источников (стоков) теплоты. Здесь $D=(1+\nu)\left(1-\nu-2\hat{\nu}^2\right)$, E и $\hat{E}$, λ и $\hat{\lambda}$, α и $\hat{\alpha}$ — модули Юнга, коэффициенты теплопроводности и линейного термического расширения в плоскости изотропии $r\theta$ и направлении образующей z; G и $\hat{G}$, — поперечный и продольный модули сдвига, ν и $\hat{\nu}$ — коэффициенты Пуассона.

Решение краевой задачи (1) – (4) будет искать численно методом конечных элементов. Тестирование конечноэлементных алгоритмов проводилось на основе сравнения численных с полученными новыми точными аналитическими решениями краевых задач для ограниченных по высоте трансверсально-изотропных толстостенных цилиндрических телах: о стационарном распределении температуры при наличии изотермических боковых поверхностей и равновесии с заданными на внутренней поверхности условиями контакта с трением.

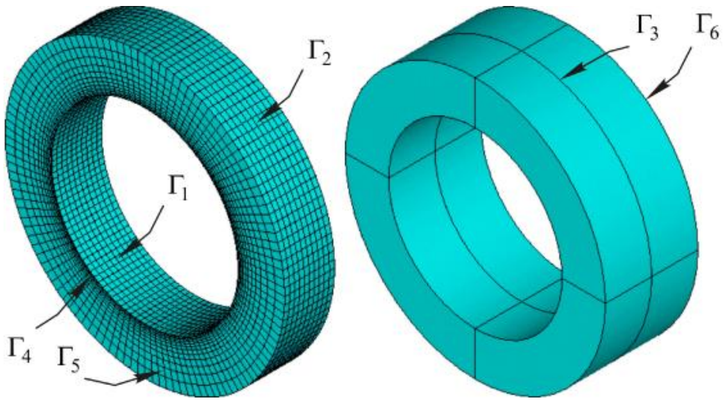


Рис. 1. Дискретизация и схема участков поверхности пакета УЭ

Будем считать, что на изотермических внутренней и внешней боковых поверхностях УЭ и пакета УЭ Γ_1 и Γ_2 (рис. 1) заданы постоянные температуры высокоагрессивных и реакционноспособных газов или жидкостей T_{int} и окружающей среды T_{ext}: $T\,|_{\Gamma_1}=T_{\text{int}}$ и $T\,|_{\Gamma_2}=T_{\text{ext}}$. Внешняя боковая поверхность Γ_2 (рис. 1) соприкасается с внутренней поверхностью сальниковой камеры так, что исключаются радиальные, осевые и окружные перемещения $u_r|_{\Gamma_2}=u_\theta|_{\Gamma_2}=u_z|_{\Gamma_2}=0$. На участке Γ_6 отдельного УЭ или пакета, контактирующем с нажимной втулкой, задано в направлении образующей торцевое давление герметизации $\sigma_{zz}|_{\Gamma_6}=p_{zz}^{\text{front}}$, однородность которого обеспечивается прижимными болтами, и отсутствуют касательные напряжения ($\sigma_{r\theta}|_{\Gamma_6}=\sigma_{z\theta}|_{\Gamma_6}=0$). На участке Γ_4 торцевой поверхности, контактирующей с грандбуксой, ограниченном двумя концентрическими окружностями с радиусами a и d ($a<d$), задано создаваемое рабочими средами однородное давление $\sigma_{zz}|_{\Gamma_4}=p_{zz}^{\text{work}}$, а на участке Γ_5 той же поверхности, но ограниченном окружностями с радиусами d и b ($d<b$) — исключены перемещения u_r, u_z и u_θ ($u_r|_{\Gamma_5}=u_\theta|_{\Gamma_5}=u_z|_{\Gamma_5}=0$). Точки, принадлежащие участкам торцевых поверхностей Γ_6, Γ_4 и Γ_5, закрепляются так, что оказываются не способными свободно перемещаться в своей плоскости ($u_r|_{\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5}=u_\theta|_{\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5}=0$). Предполагая движение штока возвратно-поступательным, зададим однородное распределение осевых перемещений $u_z|_{\Gamma_1}=\pm u_z^{\text{int}}$ на внутренней боковой поверхности Γ_1. На участке Γ_3 поверхности контакта колец, входящих в пакет, предполагается равенство температур и тепловых потоков

$$[\,T\,]^+\Big|_{\Gamma_3}=[\,T\,]^-\Big|_{\Gamma_3}, \quad [\,\partial T/\partial z\,]^+\Big|_{\Gamma_3}=[\,\partial T/\partial z\,]^-\Big|_{\Gamma_3},$$

а также идеальное сопряжение

$$[\,u_i\,]^+\Big|_{\Gamma_3}=[\,u_i\,]^-\Big|_{\Gamma_3}, \quad [(\sigma_{rr}+\sigma_{rz}+\sigma_{r\theta})\,n_r\,]^+\Big|_{\Gamma_3}=[(\sigma_{rr}+\sigma_{rz}+\sigma_{r\theta})\,n_r\,]^-\Big|_{\Gamma_3}$$

или проскальзывание

$$u_r n_r\big|_{\Gamma_3} = 0\,, \quad \sigma_{r\theta}\big|_{\Gamma_3} = \sigma_{z\theta}\big|_{\Gamma_3} = 0\,.$$

Будем рассматривать начальный режим работы изготавливаемых крупносерийными партиями УЭ (используются в кранах с уплотнениями по штоку), внутренний, внешний радиусы и высота которых равны $a = 15{,}0$ мм, $b = 22{,}5$ мм, а $H = 8{,}0$ мм соответственно. При численном решении термоупругих задач в трехмерной постановке методом конечных элементов с использованием пакета ANSYS 9.0 температуры рабочей и окружающей сред принимались равными $T_{\text{int}} = 300$ °C, $T_{\text{int}} = 550$ °C и $T_{\text{ext}} = 20$ °C. Рабочее давление и торцевое давление герметизации на поверхности контакта с нажимной втулкой были равны $p_{zz}^{\text{work}} = 40{,}0$ МПа и $p_{zz}^{\text{front}} = 2\,p_{zz}^{\text{work}}$. Упругие и теплофизические постоянные ТРГ выбрались следующими: $E = 9{,}04$ ГПа, $\hat{E} = 0{,}75$ ГПа, $\nu = 0{,}03$, $\hat{\nu} = 0{,}05$, $G = 0{,}47$ ГПа и $\hat{G} = 0{,}35$ ГПа; $\lambda = 122{,}0$ Вт/(м·K) и $\hat{\lambda} = 87{,}0$ Вт/(м·K) при $T_{\text{int}} = 300$ °C, $\lambda = 90{,}0$ Вт/(м·K) и $\hat{\lambda} = 70{,}0$ Вт/(м·K) при $T_{\text{int}} = 550$ °C [2]; $\alpha = 1{,}21\cdot 10^{-6}$ K^{-1} и $\hat{\alpha} = 2{,}77\cdot 10^{-6}$ K^{-1}.

Были разработаны и программно реализованы комплексы определения значений независимых инвариантов тензоров напряжений [3]

$$j_\sigma^{(1)} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2\,, \quad j_\sigma^{(2)} = \sigma_{zz}\,, \quad j_\sigma^{(3)} = \left[(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2\right]^{1/2}, \quad j_\sigma^{(4)} = \left[\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2\right]^{1/2} \qquad (5)$$

относительно ортогональных преобразований, допустимых над цилиндрически трансверсально-изотропным телом с осью симметрии z бесконечного порядка. Вычисление этих величин, которых в пакете ANSYS 9.0, не предусмотрено.

Результаты, представленные в табл. 1, показывают, что наиболее чувствительными к изменению температуры рабочей среды T_{int} являются первый, третий и четвертый инварианты. Кроме того, изменение условий на поверхности контакта УЭ из наноструктурированного ТРГ с идеального сопряжения на скольжение при одной и той же T_{int} приводит к увеличению максимальных по абсолютной величине значений $j_\sigma^{(1)}$, $j_\sigma^{(3)}$ и $j_\sigma^{(4)}$, а также снижению $j_\sigma^{(2)}$. Обратим внимание на то, что ни одно из приведенных в табл. 1 значений не превосходит критическое $j_{\sigma\,\text{cr}}^{(1)} = 173{,}3$ МПа, $j_{\sigma\,\text{cr}}^{(2)} = 138{,}4$ МПа, $j_{\sigma\,\text{cr}}^{(3)} = 138{,}8$ МПа и $j_{\sigma\,\text{cr}}^{(4)} = 84{,}2$ МПа (эти величины вычислены по экспериментально определенным прочностным постоянным на сжатие и сдвиг в плоскости изотропии: $S^- = 173{,}3$ МПа и $\tau_{\max} = 69{,}4$ МПа; на сжатие в осевом направлении $\hat{S}^- = 138{,}4$ МПа и на продольный сдвиг $\hat{\tau}_{\max} = 59{,}5$ МПа).

Таблица 1.

Максимальные по абсолютной величине (МПа) значения инвариантов тензора напряжений в пакетах УЭ из наноструктурированного ТРГ при возвратно-поступательном движении штока

T_{int}, °C	Движение в сторону нажимной втулки				Движение от нажимной втулки			
	$j_\sigma^{(1)}$	$j_\sigma^{(2)}$	$j_\sigma^{(3)}$	$j_\sigma^{(4)}$	$j_\sigma^{(1)}$	$j_\sigma^{(2)}$	$j_\sigma^{(3)}$	$j_\sigma^{(4)}$
300	6,3	57,4	10,5	73,6	6,5	57,6	10,7	66,1
550	7,2	57,4	12,1	80,5	7,3	57,6	12,3	72,8
Идеальное сопряжение УЭ в пакете					Скольжение на поверхности контакта УЭ в пакете			
300	6,7	57,3	12,2	76,3	7,2	57,1	14,3	78,5

Проанализировав факторы, существенно влияющие на характер распределения независимых инвариантов (5) в точках поперечных сечений УЭ, входящих в пакет (толщина, количество колец в сальниковой камере), были проведены оценка влияния реальных механизмов разрушения на первоначальную прочность и сравнение различных режимов возвратно-поступательного движения штока (движение в сторону нажимной втулки и в противоположном направлении). На рис. 2 представлены распределения третьего и четвертого инвариантов тензора напряжений в уплотнительном кольце из наноструктурированного ТРГ при движении штока в сторону нажимной втулки. Несмотря на то, что максимальные касательные напряжения наблюдаются вблизи поверхности Γ_1 УЭ, контактирующей со штоком, наибольшие значения $j_\sigma^{(3)}$ имеют место на внешней боковой поверхности Γ_2, а $j_\sigma^{(4)}$ — еще и на участке, контактирующем с нажимной втулкой Γ_6.

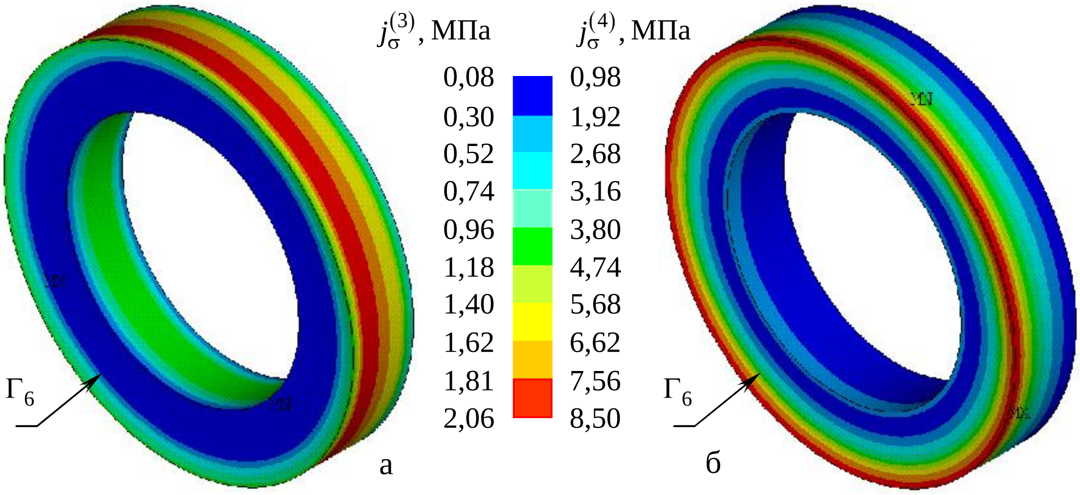


Рис. 2. Распределение третьих $j_\sigma^{(3)}$ (а) и четвертых $j_\sigma^{(4)}$ (б) инвариантов тензора напряжений в уплотнительных кольцах из наноструктурированного ТГР при $T_{\text{int}} = 550$ °С

На рис. 3 представлены распределения третьего инварианта тензора напряжений в пакете из двух УЭ при температуре рабочей среды $T_{\text{int}} = 300$ °С. На границе контакта колец Γ_3 были заданы условия проскальзывания. Как видим, наибольшие значения $j_\sigma^{(3)}$ имеют место на внешней и внутренней боковых поверхностях в областях, примыкающих к нажимной втулке и границе контакта колец в пакете. Поэтому слабое сопротивление ТРГ сдвиговому воздействию в плоскости изотропии является основной причиной наблюдаемой при эксплуатации кранов с уплотнением по штоку потери герметизации и разрушения на отмеченных участках.

Полученные численные решения позволили определить оптимальные давления герметизации, обосновать рекомендации по внесению изменений в существующие конструкции пакетов УЭ, а также разработать основы для создания методик уточненного прочностного анализа для инженеров-конструкторов, учитывающих анизотропию теплофизических, деформационных и прочностных свойств ТРГ и реальные механизмы разрушения. Неожиданный результат — зависимость значений инвариантов от направления

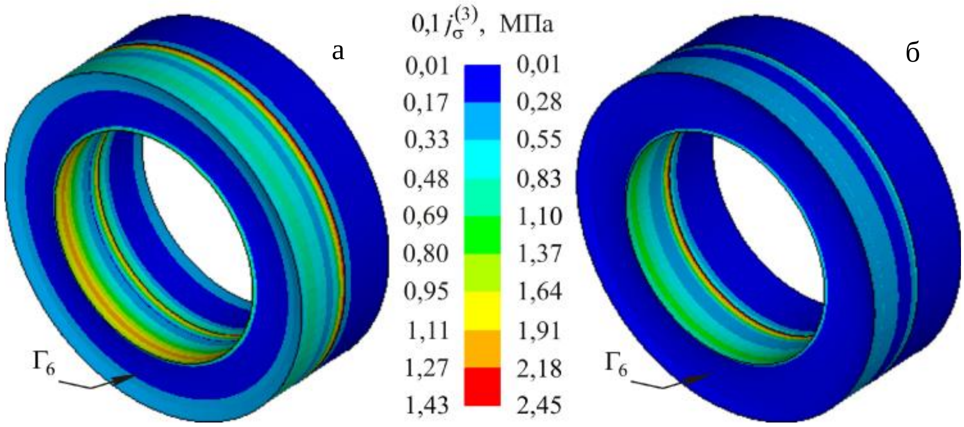


Рис. 3. Распределение третьих инвариантов тензоранапряжений в пакете УЭ из ТРГ при возвратно-поступательном движении штока: от нажимной втулки (а) и в сторону нажимной втулки (б)

движения штока был объяснен на основе анализа полученного авторами нового точного аналитического решения задачи о равновесии ограниченных по длине трансверсально-изотропных цилиндрических тел, на внутренней поверхности которых заданы условия контакта с трением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 10–01–96047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев А.В., Злобин Н.Г., Исаев О.Ю., Смирнов Д.В. Термомеханическая модель эксплуатации пакетов уплотнительных элементов из терморасширенного графита // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации. – 2009: Материалы XII Всероссийск. науч.-техн. конф. – Пермь: ПГТУ, 2009. – С. 327–329.
2. Свойства конструкционных материалов на основе углерода: Справочник / В.Г. Нагорный, А.С. Котосонов, В.С. Островский и др. – М.: Металлургргия, 1975. – 336 с.
3. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

Сведения об авторах

Зайцев Алексей Вячеславович – к.ф-м.н., заместитель декана, доцент кафедры Механика композиционных материалов и конструкций, Пермский государственный технический университет, Аэрокосмический факультет, (342) 239 12 94
E-mail zav@pstu.ru

Злобин Николай Геннадьевич – аспирант кафедры Механика композиционных материалов и конструкций, Пермский государственный технический университет, Аэрокосмический факультет, (342) 239 12 94
E-mail akytergin@mail.ru

Исаев Олег Юрьевич – генеральный директор, ООО «Новомет–Силур», (342) 260 67 04
E-mail isaev@sealur.ru

Смирнов Дмитрий Вениаминович – заместитель генерального директора, ООО «Новомет–Силур», (342) 260 67 00
E-mail smirnov@sealur.ru

Ханов Алмаз Муллаянович – д.т.н., профессор, декан, заведующий кафедрой Конструирование механизмов и сопротивление материалов, Пермский государственный технический университет, Механико-технологического факультет, (342) 219 80 23
E-mail mtf-dekanat@pstu.ru

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ПО ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ И ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Зайцев А. В., Кутергин А. В., Фукалов А. А.

Используя разложения компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщенные степенные ряды, получены новые точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных тяжелых анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, жестко закрепленных по внешней поверхности и находящихся под действием равномерного внутреннего давления. В качестве примера на основе многокритериального подхода, описывающего различные реальные механизмы разрушения, проведена оценка начальной прочности монолитных железобетонных крепей горизонтальных цилиндрических и сферических горных выработок.

В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях нефте-газо-химического комплексов находят применение конструкции и сооружения сферической и цилиндрической формы (монолитные крепи горных выработок, контейнеры для длительного хранения и транспортировки высоко-агрессивных и реакционно-способных веществ, пульпопроводы, облицовки туннелей, реагентопроводы химических производств), изготовленные из упругих анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Поэтому важными и актуальными задачами являются получение новых точных аналитических решений задач о равновесии тяжелых толстостенных анизотропных упругих тел с центральной и осевой симметрией, находящихся под действием равномерно распределенных внутреннего давления, и разработка на основе этих решений инженерных методов уточненного прочностного анализа. Кроме того, получение аналитических зависимостей важно еще и для тестирования численных алгоритмов решения более сложных задач, в которых отдельные элементы конструкций и сооружений имеют аналогичную геометрию и граничные условия, а также для отработки методик эксперимента с тяжелыми телами простейшей геометрии.

Рассмотрим в сферической (ρ, θ и φ) и цилиндрической (ρ, θ и z) системах координат равновесие толстостенных упругих тяжелых анизотропных центрально- и осесимметричных горизонтальных тел, жестко закрепленных по внешним поверхностям и находящихся под действием равномерно распределенных внутренних давлений p. Будем считать, что однородный материал, из которого изготовлены тела, сферически трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра, или обладает цилиндрической ортотропией. Перемещения, напряжения и деформации в точках, принадлежащих сфере (в силу симметрии тела и внешней нагрузки), не зависят от координаты φ, а принадлежащих цилиндру (в силу бесконечной протяженности) — от z; удовлетворяют геометрическим соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \partial_\rho u_\rho , \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \left(\partial_\theta u_\theta + u_\rho\right)/\rho , \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \left(u_\theta \operatorname{ctg}\theta + u_\rho\right)/\rho , \quad \gamma_{\rho\theta} = \partial_\rho u_\theta + \left(\partial_\theta u_\rho - u_\theta\right)/\rho , \tag{1}$$

и уравнениям равновесия в сферических:

$$\partial_\rho \sigma_{\rho\rho} + \left(\partial_\theta \tau_{\rho\theta} + 2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta} \operatorname{ctg}\theta\right)/\rho + F_\rho = 0 , \tag{2}$$

$$\partial_\rho \tau_{\rho\theta} + \left[\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \left(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}\right)\operatorname{ctg}\theta + 3\tau_{\rho\theta}\right]/\rho + F_\theta = 0$$

и цилиндрических координатах:

$$\partial_\rho \sigma_{\rho\rho} + \left(\partial_\theta \sigma_{\rho\theta} + \sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}\right)/\rho + F_\rho = 0 , \quad \partial_\rho \sigma_{\rho\theta} + \left(\partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + 2\sigma_{\rho\theta}\right)/\rho + F_\theta = 0 . \tag{3}$$

Здесь $F_\rho = -\gamma\cos\theta$ и $F_\theta = \gamma\sin\theta$ — компоненты вектора массовых сил, γ — удельный вес материала, а $\partial_x = \partial/\partial x$.

Определяющие соотношения для сферически трансверсально-изотропного

$$\sigma_{\rho\rho} = A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} , \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + H\varepsilon_{\theta\theta} , \quad \sigma_{\rho\theta} = A_{44}\gamma_{\rho\theta} \tag{4}$$

и цилиндрически ортотропного

$$\sigma_{\rho\rho} = K_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + K_{12}\varepsilon_{\theta\theta} , \quad \sigma_{\theta\theta} = K_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + K_{22}\varepsilon_{\theta\theta} , \quad \sigma_{\rho\theta} = G_{\rho\theta}\gamma_{\rho\theta} , \tag{5}$$

$$\sigma_{zz} = E_z \left(\mu_{\rho z}\sigma_{\rho\rho}/E_\rho + \mu_{z\theta}\sigma_{\theta\theta}/E_\theta\right)$$

тел содержат следующие коэффициенты:

$$A_{11}=E_\rho\left(1-\mu_{\theta\varphi}\right)/\nu,\quad A_{12}=E_\theta\mu_{\rho\theta}/\nu,\quad A_{44}=G_{\rho\theta},\quad A_{22}=E_\theta\left(1-\mu_{\rho\theta}^2E_\theta/E_\rho\right)/\left(\nu+\mu_{\theta\varphi}\nu\right),$$

$$A_{23}=E_\theta\left(\mu_{\theta\varphi}+\mu_{\rho\theta}^2E_\theta/E_\rho\right)/\left(\nu+\mu_{\theta\varphi}\nu\right),\quad \nu=1-\mu_{\theta\varphi}-2\mu_{\rho\theta}^2E_\theta/E_\rho,\quad H=A_{22}+A_{23}.$$

$$K_{11}=E_\rho\left(1-\mu_{\theta z}\mu_{z\theta}\right)/D,\quad K_{22}=E_\theta\left(1-\mu_{\rho z}\mu_{z\rho}\right)/D,\quad K_{12}=E_\rho\left(\mu_{\rho\theta}+\mu_{\rho z}\mu_{z\theta}\right)/D,$$

$$D=1-2\mu_{\rho\theta}\mu_{\theta z}\mu_{z\rho}-\mu_{\rho\theta}\mu_{\theta\rho}-\mu_{\theta z}\mu_{z\theta}-\mu_{z\rho}\mu_{\rho z},$$

определяемые модулями Юнга E_ρ, E_θ и E_z в направлениях ρ, θ и z, коэффициентами Пуассона $\mu_{\rho\theta}$, $\mu_{\theta z}$, $\mu_{z\rho}$ и $\mu_{\theta\varphi}$, а также модулем сдвига в диаметральной плоскости $G_{\rho\theta}$.

Последовательная подстановка геометрических соотношений (1) в определяющие (4) и (5), а затем полученного результата — в уравнения равновесия (2) и (3) позволяет записать неоднородные системы дифференциальных уравнений Ламе в частных производных.

Граничные условия на внешней и внутренней поверхностях тяжелого цилиндра и сферы, ограниченных радиусами R и r соответственно, запишем следующим образом:

$$u_\rho\big|_{\rho=R}=0,\quad u_\theta\big|_{\rho=R}=0,\quad \sigma_{\rho\rho}\big|_{\rho=r}=-p,\quad \sigma_{\rho\theta}\big|_{\rho=r}=0. \tag{6}$$

Для любых граничных условий, не нарушающих симметрию задач, раскладывая компоненты вектора перемещений по окружной и радиальной координате в тригонометрические и обобщенные степенные ряды [1, 2], и учитывая однородность граничных условий для $i>0$, получим точные аналитические решения задач о равновесии толстостенной тяжелой трансверсально-изотропной сферы [3]:

$$u_\rho=D_1\rho^{-1/2-s}+D_2\rho^{-1/2+s}+\left(d_2C_2/\rho+d_3C_3\rho^{-1/2+t}+d_4C_4\rho^{-1/2-t}+H_\rho\rho^2\gamma/H_1-C_1\right)\cos\theta, \tag{7}$$

$$u_\theta=\left(C_1+C_2/\rho+C_3\rho^{-1/2+t}+C_4\rho^{-1/2-t}+H_\theta\rho^2\gamma/H_1\right)\sin\theta,$$

где

$$s=\sqrt{1/4+2H_4/A_{11}},\quad H_\rho=H_4-H_3-A_{44},\quad H_\theta=2A_{11}-H_2,\quad H_2=H+2A_{44},$$

$$t=\sqrt{9/4+[H(A_{11}+2A_{44})-2A_{12}(H_3+2A_{44})]/(A_{11}A_{44})},\quad d_2=-H_2/(H_4+A_{44}),$$

$$d_3=[Y+2A_{44}H_3t]/L,\quad d_4=[Y-2A_{44}H_3t]/L,\quad Y=-A_{44}(H_2+H_4+A_{44}),\quad H_3=A_{12}+A_{44},$$

$$H_1=2\left[A_{11}(H-4A_{44})+2A_{44}(H_4-2A_{12})-2A_{12}^2\right],\quad L=2H_3^2-A_{11}H_2,\qquad H_4=H-A_{12}$$

и толстостенного тяжелого ортотропного цилиндра [4]:

$$u_\rho=Q\left(R^{2n}\rho^{-n}-\rho^n\right)+\left[a_1\rho^\beta+a_2\rho^{-\beta}+a_3\ln\rho+a_4+\left(\gamma\Theta\rho^2\right)/G_{\rho\theta}\right]\cos\theta, \tag{8}$$

$$u_\theta=\left\{a_1\alpha_1\rho^\beta+a_2\alpha_2\rho^{-\beta}-a_3\ln\rho-a_4+\left[\gamma\left(\omega_4\Theta-1\right)\rho^2\right]/\left(\omega_3G_{\rho\theta}\right)\right\}\sin\theta,$$

где

$$Q=p/\left(a^{n-1}\Lambda_{11}-a^{-n-1}R^{2n}\Lambda_{21}\right),\quad \beta=\sqrt{K_{22}\left(1/K_{11}+1/G_{\rho\theta}\right)-K_{12}/K_{11}\left(2+K_{12}/G_{\rho\theta}\right)+1},$$

$$\Lambda_{11}=K_{11}n+K_{12},\quad \Lambda_{21}=K_{12}-K_{11}n,\quad \alpha_1=\left[\beta\left(k^2+1\right)+\omega_5\right]/\left(\beta^2-\omega_5\right),$$

$$\alpha_2=\left[-\beta\left(k^2+1\right)+\omega_5\right]/\left(\beta^2-\omega_5\right),\quad \Theta=\left(\omega_3G_{\rho\theta}+\omega_2K_{11}\right)/[K_{11}(\omega_1\omega_3+\omega_2\omega_4)],$$

$$\omega_1=4-m^2-n^2,\quad \omega_2=2q^2+m^2-n^2,\quad \omega_3=3-g^2,\quad \omega_4=2k^2+g^2+3,\quad \omega_5=4-\omega_3,$$

$$m=\sqrt{G_{r\theta}/K_{11}},\quad n=\sqrt{K_{22}/K_{11}},\quad q=\sqrt{K_{12}/K_{11}},\quad g=\sqrt{K_{22}/G_{r\theta}},\quad k=\sqrt{K_{21}/G_{r\theta}}.$$

Постоянные интегрирования D_1, D_2, C_1, C_2, C_3, C_4, a_1, a_2, a_3 и a_4, входящие в выражения (7) и (8), определяются из граничных условий (6) и не приводятся ввиду громоздкости.

Последовательная подстановка (7) и (8) в геометрические (1) и определяющие соотношения (4), (5) позволяет записать выражения для деформаций и напряжений соответственно.

В качестве примера использования полученных аналитических решений может быть проанализирован вклад массовых сил в напряженное состояние железобетонных монолитных крепей подземных сферических и горизонтальных цилиндрических горных выработок, а также проведена оценка начальной прочности этих сооружений по совокупности критериев [5].

В работе [6] были введены независимые величины

$$J_\sigma^I = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}, \quad J_\sigma^{II} = \sigma_{\rho\rho}, \quad J_\sigma^{III} = \sigma_{\rho\theta},$$

и

$$J_\sigma^I = \sigma_{\theta\theta}, \quad J_\sigma^{II} = \sigma_{\rho\rho}, \quad J_\sigma^{III} = \sigma_{zz}, \quad J_\sigma^{IV} = \sigma_{\rho\theta},$$

инвариантные относительно ортогональных преобразований, допустимых над сферически трансверсально-изотропным и ортотропным телами соответственно, и описывающих различные механизмы разрушения от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлении, от сдвигов по поверхности или в плоскости изотропии, а также в диаметральной плоскости.

На рис. 1 и 2 представлены распределения инвариантов тензора напряжений в монолитных железобетонных крепях ($p = 0$ МПа): сферической — вдоль меридиональной θ и обезразмеренной радиальной $\tilde{\rho} = (\rho - r)/(R - r)$ координаты, горизонтальной цилиндрической — вдоль окружной и радиальной координаты $\tilde{\rho}$. Параметры геометрии и упругие модули железобетона ($\gamma = 40$ кН/м^3) были выбраны следующими: $r = 3{,}0$ м, $R = 6{,}0$ м; $E_\theta = 50{,}0$ ГПа, $E_\rho = 35{,}0$ ГПа, $G_{\rho\theta} = 56{,}5$ ГПа, $\mu_{\theta\varphi} = 0{,}075$ и $\mu_{\rho\theta} = 0{,}15$ (сферическая выработка); $r = 3{,}0$ м, $R = 5{,}5$ м; $E_\rho = 40$ ГПа, $E_\theta = 80$ ГПа, $E_z = 53{,}3$ ГПа, $G_{\rho\theta} = 56{,}5$ ГПа, $\mu_{\rho\theta} = 0{,}15$, $\mu_{\rho z} = 0{,}075$ и $\mu_{z\theta} = 0{,}375$ (горизонтальная цилиндрическая выработка). Как видим, в отличие от «классического» решения задачи Ламе для анизотропных сферы и цилиндра [6, 7] компоненты тензора напряжений являются ненулевыми даже при отсутствии внутреннего давления. Это объясняется тем, что полученное новое аналитическое решение (7) и (8) учитывает вклад массовых сил.

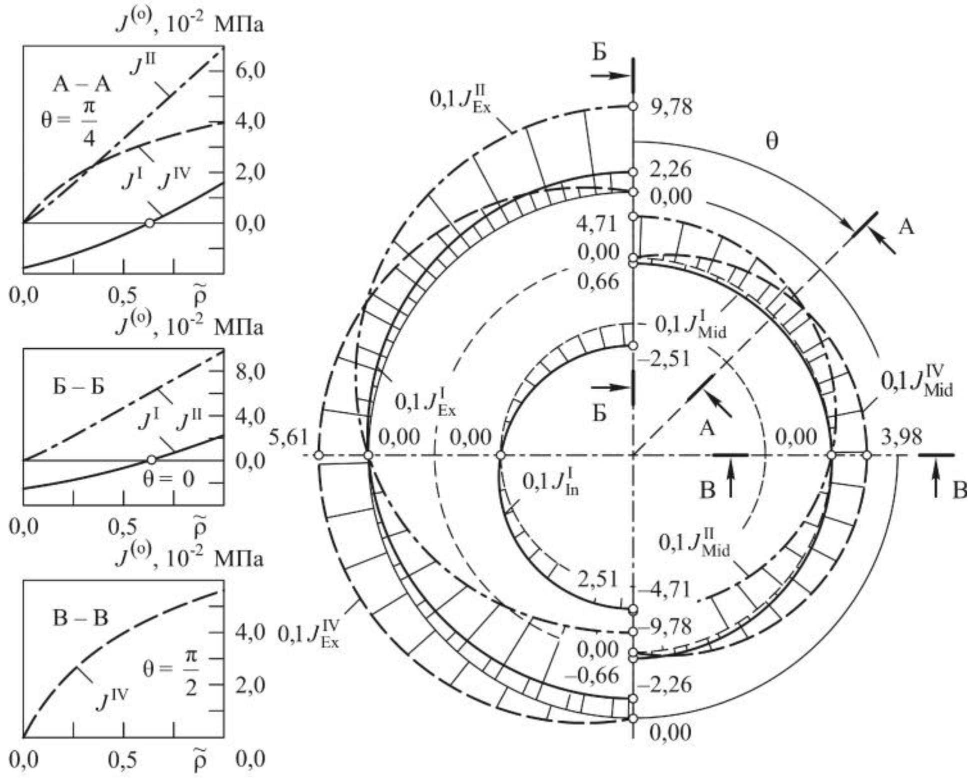


Рис. 1. Распределение инвариантов тензора напряжений (КПа) на закрепленной внешней ($J^{(\bullet)}_{\mathrm{Ex}}$), свободной от нагрузок внутренней ($J^{(\bullet)}_{\mathrm{In}}$) и серединной ($J^{(\bullet)}_{\mathrm{Mid}}$) поверхностях в монолитной крепи сферической горной выработки

На внутренней свободной поверхности (рис. 1 и 2) ненулевым является только первый инвариант тензора напряжений J_σ^I, который в верхней части сооружений всюду монотонно возрастает вдоль $\tilde{\rho}$, а в нижней — всюду монотонно убывает, принимая нулевое значение при $\tilde{\rho}=0{,}63$ и $\tilde{\rho}=0{,}87$ у крепей сферической и цилиндрической горных выработок. Следует отметить, что положение этих точек, разделяющих область положительных и отрицательных значений J_σ^I, не зависит от θ (за исключением диаметральной плоскости, соответствующей $\theta=\pi/2$, где $J_\sigma^I=0{,}00$ КПа). Такой же характер изменения вдоль радиальной координаты в крепях горизонтальных выработок имеет и третий инвариант J_σ^{III} (рис. 2). Точки, в которых происходит смена знака J_σ^{III}, находятся на расстоянии $\tilde{\rho}=0{,}75$ от внутренней поверхности. При изменении радиальной координаты от свободной поверхности к закрепленной J_σ^{II} всюду возрастает по абсолютной величине (рис. 1 и 2). Поскольку свои наибольшие по абсолютной величине значения J_σ^I и J_σ^{II} (сферическая выработка), J_σ^I, J_σ^{II} и J_σ^{III} (цилиндрическая горная выработка) достигают в точках вертикальной диаметральной плоскости, эти точки являются наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения монолитных крепей, от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлении (сферическая горная выработка), в окружном, радиальном и осевом направлениях (цилиндрическая горизонтальная выработка).

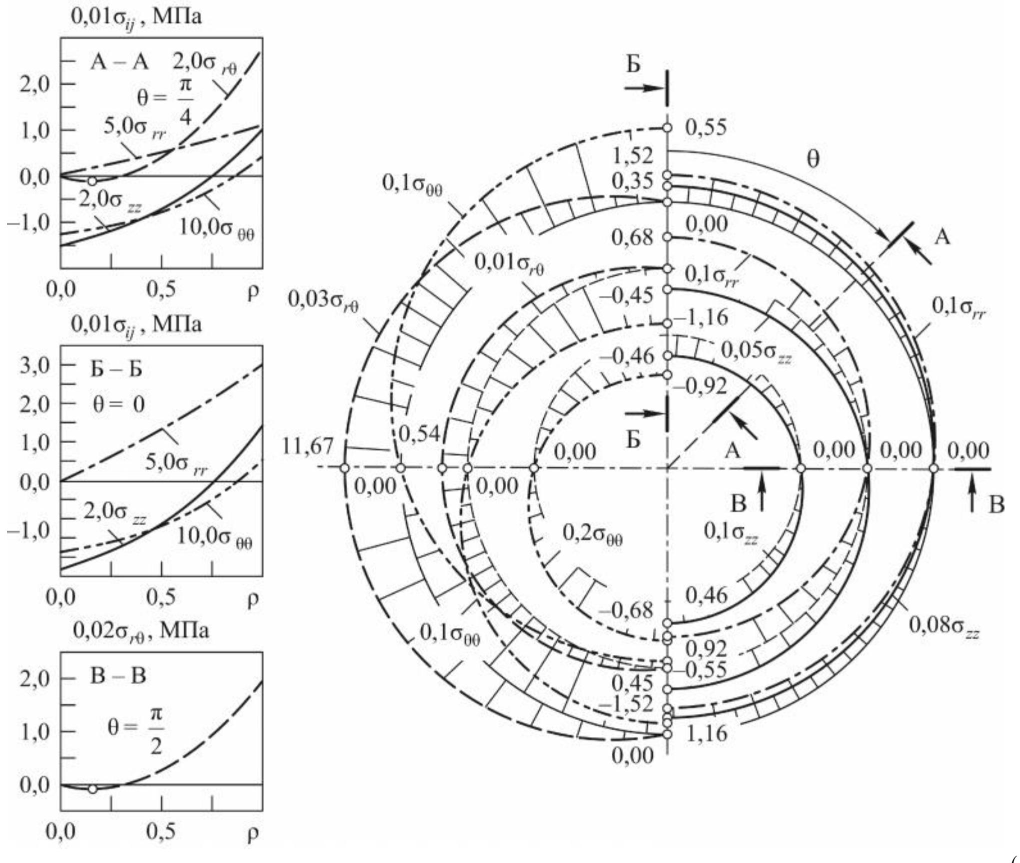


Рис. 2. Распределение инвариантов тензора напряжений (МПа) на закрепленной внешней ($J_{\text{Ex}}^{(\bullet)}$), свободной от нагрузок внутренней ($J_{\text{In}}^{(\bullet)}$) и серединной ($J_{\text{Mid}}^{(\bullet)}$) поверхностях в монолитной крепи горизонтальной цилиндрической горной выработки

Третий J_σ^{III} и четвертый J_σ^{IV} инварианты, которые описывают разрушение от сдвига точек монолитных крепей сферической и горизонтальной цилиндрической горных выработок соответственно, равны нулю в точках, расположенных в вертикальной плоскости (рис. 1 и 2).

J_σ^{III} (рис. 1) и J_σ^{IV} (рис. 2) возрастают по мере увеличения угла θ, достигая своих максимальных значений при $\theta = \pi/2$ (в этой диаметральной плоскости остальные инварианты принимают нулевые значения). J_σ^{III} монотонно изменяет свои значения от нулевого на внутренней до максимального на внешней закрепленной поверхности (рис. 1). J_σ^{IV} (рис. 2) немонотонно возрастают, имеют локальный минимум при $\tilde{\rho} = 0{,}16$ и изменяют свой знак при $\tilde{\rho} = 0{,}34$. Положение этого минимума не зависит от θ за исключением сечения, совпадающего с вертикальной диаметральной плоскостью, в всех точках которого значения четвертого инварианта нулевые.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 07–01–96056).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожевникова Л.Л., Кузнецов Г.Б., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жестко закрепленной по внешнему контуру // Пробл. прочности. 1974. № 9. С. 20–23.
2. Кузнецов Г.Б. Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел. М.: Наука, 1979. 112 с.
3. Зайцев А.В., Кутергин А.В. Упругое равновесие тяжелых горизонтальных и вертикальных ортотропных цилиндрических тел // Неравновесные процессы в сплошных средах (НПСС–2009): Мат. Всероссийск. конф. молодых ученых. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2009. – С. 107–110.
4. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Уточненный прочностной анализ монолитной крепи сферической горной выработки // Неравновесные процессы в сплошных средах (НПСС–2009): Мат. Всероссийск. конф. молодых ученых. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2009. – С. 111–114.
5. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1997. 288 с.
6. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
8. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демьянушко и др. – М.: Машиностроение, 1975. 455 с.

Сведения об авторах:

Зайцев Алексей Вячеславович – к.ф-м.н., доцент кафедры Механика композиционных материалов и конструкций, Пермский государственный технический университет, Аэрокосмический факультет, (342) 239 12 94
E-mail zav@pstu.ru

Кутергин Алексей Владимирович – студент кафедры Механика композиционных материалов и конструкций, Пермский государственный технический университет, Аэрокосмический факультет, (342) 239 12 94
E-mail akytergin@mail.ru

Фукалов Антон Александрович – магистр кафедры Механики композиционных материалов и конструкций, Пермский государственный технический университет, Аэрокосмический факультет, (342) 239 12 94
E-mail mr_aa@mail.ru

МЕТОД ФИКТИВНЫХ НАГРУЗОК В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Звягин А.В., Геворкян А.Г.

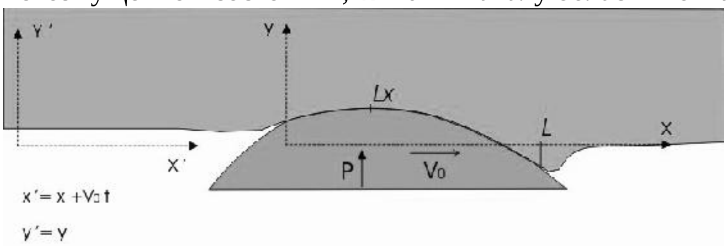
При численном решении многих задач теории упругости можно с успехом использовать методы граничных элементов (МГЭ). Одним из МГЭ является Метод фиктивных нагрузок (МФН). Основу МФН, как и всех МГЭ, составляет представление решения задачи в виде линейной комбинации некоторых базовых решений уравнений теорий упругости, взятых с неопределенными коэффициентами, которые определяются из граничных условий решаемой задачи. МФН можно успешно применить при решении контактных задач теории упругости.

В данной работе продемонстрирован МФН на примере задачи дозвукового движения жесткого штампа по границе упругой полуплоскости. В задаче требуется определить напряженно-деформированное состояние среды и область контакта штампа со средой. В работе приведены результаты численного решения данной задачи в случае штампа с основанием в форме параболы при скоростях движения меньших скорости волн Релея и превосходящих ее.

В случае установившегося движения штампа по границе упругой полуплоскости мы имеем следующую краевую задачу (рис.1):

$$y=0,\quad 0<x<L,\quad u_y=u_0(x),\quad \sigma_{xy}(x)=-k\sigma_{yy}(x);$$
$$y=0,\quad x<0,\, x>L,\quad \sigma_{xy}(x)=0,\quad \sigma_{yy}(x)=0.$$

Система координат (x,y) связана со штампом, $y=0$ соответствует поверхности среды в невозмущенном состоянии, $x=0$ – началу области контакта.



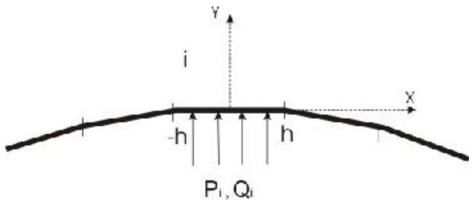


Рис. 1 Рис. 2

Разобьем область контакта на N элементов и положим на каждом элементе нагрузку со стороны штампа, равномерно распределенной (рис. 2). Плотность распределения нормальной нагрузки на i -ом элементе положим равной P_i, касательной нагрузки – Q_i.

Решая задачу с помощью МФН, в качестве базовых решений предлагается использовать две краевые задачи для i -ого элемента.

В **задаче 1** необходимо решить систему уравнений для потенциалов продольных и поперечных волн

$$\alpha^2\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy}=0,\ \beta^2\psi_{,xx}+\psi_{,yy}=0 \tag{1}$$

со следующими краевыми условиями на отрезке $y=0^-, |x|<h$

$$\sigma_{xy}=0,\ \sigma_{yy}=P_i\mu \tag{2}$$

и с граничными условиями на внешности отрезка

$$\sigma_{xy}=0,\ \sigma_{yy}=0. \tag{3}$$

где $\alpha^2 = 1 - \left(\frac{V_o}{a}\right)^2$, $\beta^2 = 1 - \left(\frac{V_o}{b}\right)^2$, $a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Перемещения и напряжения задаются производными потенциалов продольных и поперечных волн

$$u_x = \varphi_{,x} + \psi_{,y}, \quad u_y = \varphi_{,y} - \psi_{,x}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = 2\varphi_{,xy} - (1+\beta^2)\psi_{,xx}, \\
&\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = -(1+\beta^2)\varphi_{,xx} - 2\psi_{,xy}, \\
&\frac{\sigma_{xx}}{\mu} = -\frac{\sigma_{yy}}{\mu} + 2(\alpha^2 - \beta^2)\varphi_{,xx}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Т.к. уравнениям (1) удовлетворяют аналитические функции $\Phi(z_1), \Psi(z_2)$, где $z_1 = x + i\alpha y$, $z_2 = x + i\beta y$, то выражения для перемещений и напряжений (4), (5) можно переписать в следующей форме:

$$u_x = \operatorname{Re}\Phi'(z_1) - \beta \operatorname{Im}\Psi'(z_2), \quad u_y = -\alpha \operatorname{Im}\Phi'(z_1) - \operatorname{Re}\Psi'(z_2); \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = -2\alpha \operatorname{Im}\Phi''(z_1) - (1+\beta^2)\operatorname{Re}\Psi''(z_2), \\
&\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = -(1+\beta^2)\operatorname{Re}\Phi''(z_1) + 2\beta \operatorname{Im}\Psi''(z_2), \\
&\frac{\sigma_{xx}}{\mu} = (1 + 2\alpha^2 - \beta^2)\operatorname{Re}\Phi''(z_1) - 2\beta \operatorname{Im}\Psi''(z_2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Граничному условию $\sigma_{xy} = 0$ можно тождественно удовлетворить выбором функции $\Psi(z_2)$ в форме

$$\Psi(z_2) = \frac{2\alpha}{(1+\beta^2)} i\Phi(z_2). \tag{8}$$

Тогда на границе $y = 0$ второе граничное условие $|x| < h,\ \sigma_{yy}(x) = P_i\mu,\ |x| > h,\ \sigma_{yy}(x) = 0$ примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = \frac{\Delta}{(1+\beta^2)}\operatorname{Re}\Phi'' = f(x), \\
&\Delta = 4\alpha\beta - (1+\beta^2)^2, \quad f(x) = P_i \quad \text{при } |x| < h, \quad f(x) = 0 \ \text{при } |x| > h.
\end{aligned} \tag{9}$$

Полученная задача Дирихле имеет следующее решение:

$$\Phi''(z)=\frac{(1+\beta^2)}{\Delta}\frac{P_i}{\pi i}\ln\frac{z-h}{z+h}=\frac{(1+\beta^2)}{\Delta}\frac{P_i}{\pi}\times$$

$$\times\left(-i\ln\frac{\sqrt{\left(x-h\right)^2+\left(\alpha y\right)^2}}{\sqrt{\left(x+h\right)^2+\left(\alpha y\right)^2}}+\arccos\frac{x-h}{\sqrt{\left(x-h\right)^2+\left(\alpha y\right)^2}}-\arccos\frac{x+h}{\sqrt{\left(x+h\right)^2+\left(\alpha y\right)^2}}\right) \tag{10}$$

Интегрируя выражение (10), находим $\Phi'=\frac{(1+\beta^2)}{\Delta}\frac{P_i}{\pi i}\Big((z-h)\ln\big(z-h\big)-(z+h)\ln\big(z+h\big)\Big)$.
Найденное решение позволяет получить перемещение $u_y\left(x\right)$ на границе $y=0$

$$u_y\left(x\right)=-\alpha\operatorname{Im}\Phi'\left(x\right)-\operatorname{Re}\Psi'\left(x\right)=P_i\alpha\frac{\left(1-\beta^2\right)}{(1+\beta^2)}\operatorname{Im}\Phi'(x)\,. \tag{11}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{yy} будут иметь следующий вид:

$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu}=\frac{\Delta}{(1+\beta^2)}\operatorname{Re}\Phi''=P_i\frac{1}{\pi}\Big(\arg\big(z-h\big)-\arg\big(z+h\big)\Big) \tag{12}$$

Коэффициент влияния самого элемента на себя может быть вычислен предельным переходом $x=0,\quad y\to 0^+$

$$u_y\left(0,0^+\right)=-P_i\alpha\frac{\left(1-\beta^2\right)}{\pi\,\Delta}2h\ln h\,. \tag{13}$$

Для точки границы, стоящей справа на расстоянии $a>h$ от центра данного элемента, коэффициент влияния будет равен

$$u_y\left(x\right)=-P_i\alpha\frac{\left(1-\beta^2\right)}{\pi\,\Delta}\Big((a-h)\ln\big(a-h\big)-(a+h)\ln\big(a+h\big)\Big)\,. \tag{14}$$

Для точки границы стоящей слева на расстоянии $a>h$ от центра данного элемента, коэффициент влияния будет равен

$$u_y\left(x\right)=-P_i\alpha\frac{\left(1-\beta^2\right)}{\pi\,\Delta}\Big(-(a+h)\ln\big(a+h\big)+(a-h)\ln\big(a-h\big)\Big)\,. \tag{15}$$

Как видим, данные величины одинаковы. Влияние определяется только расстоянием.

В **задаче 2** необходимо решить систему уравнений для потенциалов

$$\alpha^2\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy}=0,\ \beta^2\psi_{,xx}+\psi_{,yy}=0, \tag{16}$$

со следующими краевыми условиями на отрезке $y=0^-,|\,x\,|<h$

$$\sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = Q_i \tau \tag{17}$$

и с граничными условиями на внешности отрезка

$$\sigma_{xy} = 0,\ \sigma_{yy} = 0\,. \tag{18}$$

Она решается аналогично. В этом случае имеем следующие выражения для производных функции $\Phi(z)$

$$\Phi''(z) = -\frac{2\beta}{\Delta}\frac{Q_i}{\pi}\ln\frac{z-h}{z+h} \tag{19}$$

$$\Phi' = -\frac{2\beta}{\Delta}\frac{Q_i}{\pi}\Big((z-h)\ln\big(z-h\big) - (z+h)\ln\big(z+h\big)\Big) \tag{20}$$

Перемещение $u_y\left(x\right)$ и компоненты тензора напряжений σ_{xy} на границе $y=0$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{-2\alpha\beta+1+\beta^2}{2\beta}\operatorname{Im}\Phi'(x) = \\ &= -\frac{-2\alpha\beta+1+\beta^2}{\Delta}\frac{Q_i}{\pi}\Big(\big(x-h\big)\arg\big(z-h\big) - \big(x+h\big)\arg\big(z+h\big)\Big) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = -\frac{\Delta}{2\beta}\operatorname{Im}\Phi'' = \frac{Q_i}{\pi}\Big(\arg\big(z-h\big) - \arg\big(z+h\big)\Big)\ . \tag{22}$$

Далее, решение задачи со штампом представляется в виде суммы решений для N элементов

$$u_y(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i u_y^1(x-x_i) + \sum_{i=1}^{n} Q_i u_y^2(x-x_i)\,, \tag{23}$$

где x_i – координата центра соответствующего элемента с номером i, $u_y^1(x), u_y^2(x)$ – перемещения на границе, полученные в **задаче 1** и в **задаче 2**.

Выполнение граничного условия $u_y = u_0(x)$ в центре каждого граничного элемента позволяет написать систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} P_i u_y^1(x_k - x_i) + \sum_{i=1}^{N} Q_i u_y^2(x_k - x_i) = u_0(x_k), \quad k = 1,2,3,\cdots N\ . \tag{24}$$

Второе граничное условие $y=0, \quad 0<x<L, \quad \sigma_{xy}(x) = -k\sigma_{yy}(x)$ дает еще N уравнений

$$\sum_{i=1}^{N}\Big(P_i\cdot\Big(-k\cdot\sigma_{yy}^1\left(x_k - x_i\right)\Big) + Q_i\cdot\sigma_{xy}^2\left(x_k - x_i\right)\Big) = 0, \quad k = 1,2,3,\cdots N \tag{25}$$

где $\sigma^1_{yy}(x), \sigma^2_{xy}(x)$ – компоненты тензора напряжений на границе, полученные в **задаче 1** и в **задаче 2**.

Таким образом, получается система из 2N линейных уравнений с 2N неизвестными, которую можно решить численно методом Гаусса.

Для нахождения параметров L и Lx, где L – длина контакта тела со средой, Lx – вершина параболы, используется условие $\int\limits_0^l \sigma_{yy}\Big|_{y=0} dx = -P$

и условие ограниченности решения в передней точке контакта в случае $V_0 < V_R$ и в задней точке в случае $V_0 > V_R$, где V_0 – скорость движения штампа, V_R – скорость волн Релея [1].

Ниже приведено графическое сравнение численного решения с помощью МФН с аналитическим решением, полученным в [2]. Распределение нормальной нагрузки в области контакта при скорости штампа, не превосходящей скорость волн Релея, представлено на рис.3, при скорости штампа большей скорости волн Релея – на рис. 4.

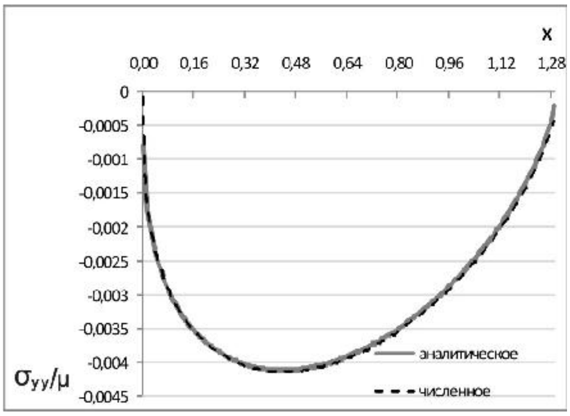


Рис. 3

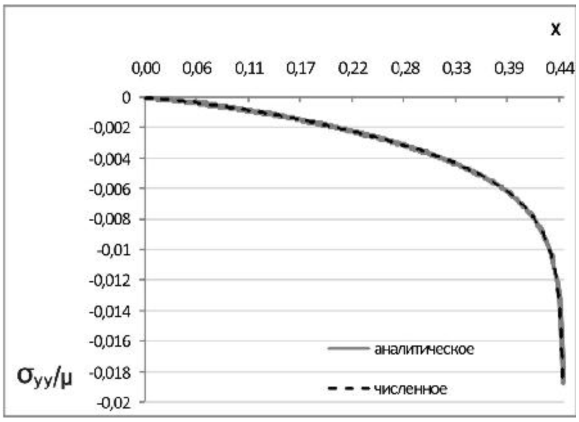


Рис. 4

Как видно из рисунков 3 и 4, численное решение с помощью МФН практически совпадает с аналитическим решением. Таким образом, при численном решении контактных задач теории упругости можно с успехом использовать МФН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264с.
2. Звягин А.В. Дозвуковое движение твердых тел конечных размеров в деформируемой среде и некоторые динамические контактные задачи / Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Москва, 1979. 114с.

__Сведения об авторах:__

Звягин А.В. – МГУ, механико-математический факультет, кафедра газовой и волновой динамики, профессор, доктор физико-математических наук. Тел.: +79165059422

Геворкян А.Г. – МГУ, механико-математический факультет, кафедра газовой и волновой динамики, аспирант. Тел.: +7 (499) 7309119, +79039783396, e-mail: artakius@yandex.ru

ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ ПОВРЕЖДЕННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Зиборов Е.Н., Макарчик Н.С., Соловьев А.Н., Спожакин А.С., Шевцов С.Н.

В работе предложен метод реконструкции трещин в слоистых композиционных материалах, основанный на моделировании их внутренними источниками тепла и измерении температурного портрета тела. С помощью использования теорем взаимности для тела с дефектами и без них, а также некоторых аналитических пробных решений получены формулы для определения номера интерфейсной границы, содержащей дефект и координат внутренней точки дефекта. Второй раздел работы связан с решением актуальной проблемы определения ресурса армированных полимеркомпозитных конструкций, подверженных механическим и климатическим воздействиям (например, лонжероны несущего винта вертолета). Проводится конечно-элементное моделирование в пакете ANSYS представительных объемов композитов и рассчитываются их усталостная прочность. Представлены результаты численных экспериментов по определению дефектов и усталостной прочности композиционных материалов. Проведенные численные расчеты показали высокую точность разработанного метода.

Основой реконструкции внутренних дефектов в упругих и теплопроводных телах могут служить механические или температурные поля, измеренные на поверхности тела. В случае вибрационного воздействия на элементы конструкций внутренние дефекты являются зонами повышенного тепловыделения, и это служит основой их определения с помощью температурного портрета поверхности элемента. Ранее в литературе [1] были разработаны методы такой идентификации для однородных тел, основанные на применении теорем взаимности для поврежденного и неповрежденного состояния с применением набора пробных аналитических решений однородного уравнения теплопроводности. В случае неоднородных тел, например, слоистых композитов, набор таких решений ограничен, однако если рассматривать частный случай дефектов, а именно интерфейсных расслоений, то с помощью этой методики удается провести их частичную реконструкцию.

1. Постановка обратной задачи. Пусть конечное составное упругое теплопроводное тело, занимающее область $V=\bigcup_{l=1}^{L} V_l$ с границей S (подобласти V_l представляют собой слои), совершает колебания под действием некоторой механической нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону с круговой частотой ω, причем тело ослаблено системой трещин $\mathrm{d}=\bigcup_{p=1}^{M}\mathrm{d}_p\left(\mathrm{d}_p=\mathrm{d}_p^{+}\cup\mathrm{d}_p^{-}\right)$, которые расположены на внутренних поверхностях (расслоения). Берега трещин взаимодействуют между собой, в результате чего происходит их разогрев. Таким образом, трещины могут моделироваться неизвестными источниками тепла. Предположим, что через некоторое время после начала колебаний в теле установился стационарный температурный режим, который определяется неизвестным источником тепла $W\left(\underline{s},\omega\right)$. Заметим, что источники тепла имеют компактный носитель, а формулировка прямой задачи по нахождению температуры в рассматриваемом теле определяется краевой задачей несвязанной теории термоупругости, причем для определения распределения температуры в теле получается обобщенное уравнение теплопроводности

$$k^{(l)}\Theta_{,ii}=-W,\ \ i=1,2,3,\ \ l=1,2,...,L\ \ \underline{x}\in V_l \tag{1.1}$$

где $k^{(l)}$ – тензор коэффициентов теплопроводности слоев составного тела.

Краевые условия на внешней границе S, на которой происходит свободный теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру Θ_0

$$\phi=k^{(l)}\Theta_{,i}n_i\,|_S=-h(\Theta-\Theta_0)\,|_S \tag{1.2}$$

При постановке обратной задачи, в которой определяется геометрия «трещины-источника», будем считать, что на границе S известна температура Θ_0

$$\Theta\,|_S=\psi \tag{1.3}$$

2. Регистрация трещин. Трещины в теле могут быть обнаружены по несогласованности между граничными распределениями температуры для тела с "трещинами-источниками" и без них. В качестве меры этой несогласованности введем в рассмотрение линейный функционал

$$F(\Theta^*) = \int_S (k^{(l)}\Theta^*_{,i} n_i \psi - \Theta^* \phi) dS \qquad (2.1)$$

на множестве пробных решений Θ^*, удовлетворяющих однородному уравнению (1.1) в области V без трещин и без источников

$$k^{(l)}\Theta^*_{,ii} = 0, \; \underline{x} \in V \qquad (2.2)$$

Применяя теорему взаимности в термоупругости, нетрудно показать, что

$$\int_{\Gamma^+} W(\underline{x}, \omega)\Theta^* dS = F(\Theta^*) \qquad (2.3)$$

В случае, когда "трещины-источники" отсутствуют, функционал $F(\Theta^*)$ тождественно равен нулю.

Выбор пробных решений и определение местоположения дефекта. Из равенства (2.3) при различном выборе пробных решений может быть получена система уравнений для нахождения носителя $W(x, \omega)$ источников тепла, моделирующих трещины с взаимодействующими берегами. Первым этапом этой процедуры является определение номера интерфейсной границы с дефектом (расстояния от начала координат до этой границы), вторым – координат центра тяжести теплового источника.

В качестве пробных решений, в случае, когда ось Ox_3 направлена перпендикулярно к границам слоев, могут быть использованы следующие линейно независимые решения уравнения (2.2):

$$\Theta_1^* = 1, \; \Theta_2^* = x_1, \; \Theta_3^* = x_2, \; \Theta_4^* = f(x_3) \qquad (2.4)$$

Функция $f(x_3)$ является кусочно-линейной, причем температура по слоям распределена по следующей зависимости:

$$T_i = a_i x_3 + b_i \; \text{ при } x_3 = V_i \qquad (2.5)$$

условия стыковки на интерфейсных границах имеют вид:
равенство температур

$$T_{i+1}\big|_{S_{\text{int}}} = T_i\big|_{S_{\text{int}}} \qquad (2.6)$$

поток тепла от слоя к слою одинаков

$$-k^{(i+1)} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial n} = -k^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial n} \qquad (2.7)$$

Условия (9),(10) определяют следующие зависимости между параметрами a_i, b_i

$$a_{i+1} = a_i \, k^{(i)} / k^{(i+1)}, \; b_{i+1} = b_i - h_i(a_{i+1} - a_i) \qquad (2.8)$$

где h_i – расстояние от начала координат до i-ой интерфейсной границы.
Подставим пробные решения (2.4) используя теорему взаимности в (2.3) и обозначим

$$H_1 = \int_{\Gamma^+} W ds, \quad H_2 = \int_{\Gamma^+} W x_1 ds, \quad H_3 = \int_{\Gamma^+} W x_2 ds, \quad H_4 = \int_{\Gamma^+} W f(x_3) ds \qquad (2.9)$$

тогда координаты внутренней точки («центра тяжести» теплового источника)

$$x_1^0 = \frac{H_2}{H_1}, \; x_2^0 = \frac{H_3}{H_1} \qquad (2.10)$$

а значение пробного решения Θ_4^* на интерфейсной границе $x_3 = c$, содержащей дефект, выразится с помощью отношения H_4 / H_1, таким образом, равенство

$$f(c) = H_4 / H_1 \qquad (2.11)$$

служит уравнением для определения координаты c.

3. Численный пример реконструкции трещин. В качестве численной реализации предложенного метода рассматривается реконструкция «трещины-источника» в трехслойном композитном прямоугольнике размера 0.05×0.003 (м) при толщине слоев 0.001 м в плоской постановке. Неизвестный источник находится на первой интерфейсной границе и определяется отрезком $x_1 \in [0.02, 0.022]$, интенсивность источника задана функцией $W = W_0 \exp(-s(x_3 - h_1)^2)$. На верхней и нижней границах области происходит теплообмен с окружающей средой, на боковых сторонах задана постоянная температура равная температуре внешней среды.

Прямая задача решается с помощью конечно-элементного пакета FlexPDE и моделирует измерение температурного портрета – функций ϕ, ψ (1.2), (1.3). Так на рис.1 (сверху) представлена конечно-элементная модель, содержащая 6911 узлов при квадратичных треугольных элементах, на рис. 1 (снизу) представлено распределение температуры в теле.

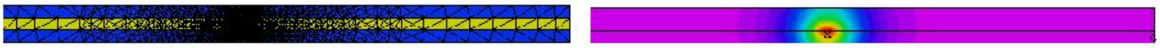


Рис.1.

На рис.2 представлены распределения температуры на верхней (слева) и нижней (справа) сторонах, моделирующие процесс измерения температурного портрета.
Определение координат внутренней точки источника $x_1^0 = 0.021$ с помощью соотношения (16) происходит с погрешностью менее 0.01%, реконструкция интерфейсной границы с помощью соотношений (2.11) представлена графически на рис. 3, в виде пересечения линий a – заданное пробное решение $f(x_3)$ и прямой b – найденное значение температуры (2.11).

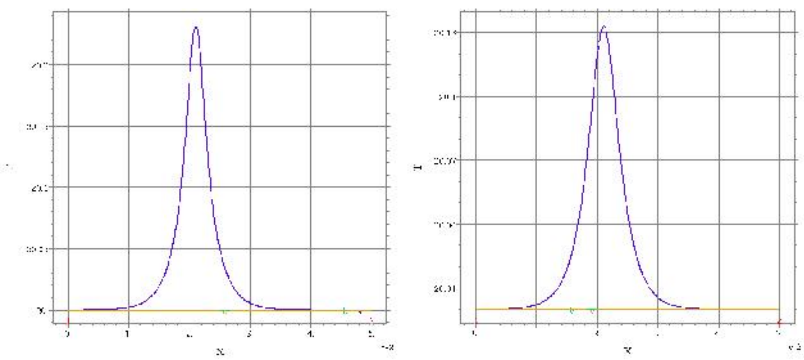


Рис.2.

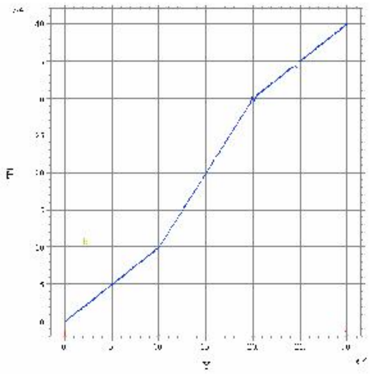


Рис.3.

4. Расчет усталостной прочности композитов. Эксплуатация машин с несущими элементами из полимеркомпозитных материалов приводит к опасному снижению их прочностных и жесткостных свойств. Проблема прогноза ресурса таких элементов имеет большое практическое значение, но далека от своего решения. Изменение прочностных и жесткостных характеристик полимеркомпозитных лонжеронов несущего винта вертолета связана с несколькими факторами, среди которых циклические нагрузки, воздействие окружающей среды (например, эксплуатация в условиях высокой влажности [2]) и др.
В рамках линейной теории упругости [3] рассмотрим композиционный материал, армированный однонаправленными нитями (рис.4 слева), и его представительный объем, содержащий один армирующий элемент (рис.4 справа), будем считать, что армирующие нити и матрица жестко сцеплены.

Один торец элемента (рис.4 справа) жестко закреплен, на другой действует равномерно распредленная нормальная нагрузка, характерная для эксплуатации рассматриваемой конструкции, на боковых поверхностях задаются условия гладкого контакта. Усталостный расчет при многоцикловом растяжении–сжатии проводился при симметричном характере нагружения с использованием теории SN-None в конечно-элементном пакете Ansys WorkBench, основанный на эмпирических S-N кривых.

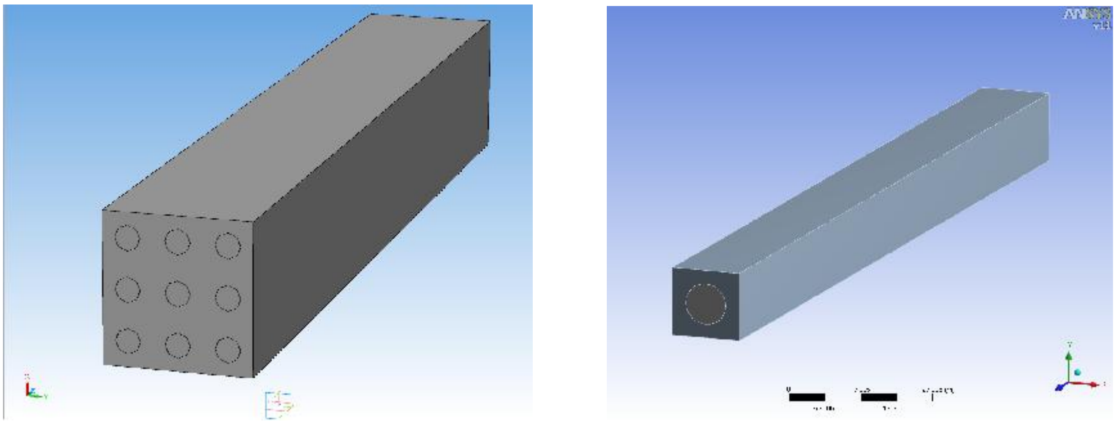
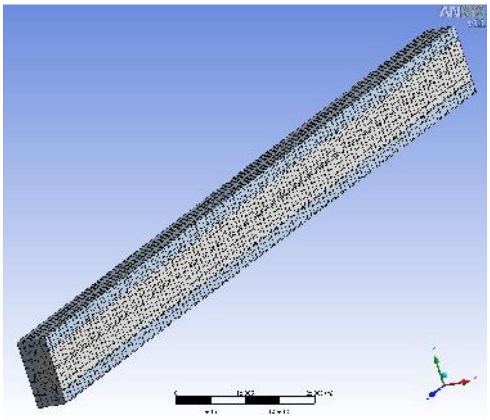


Рис.4. Армированный композит и его представительный объем.

В качестве тестового примера был рассмотрен композитный материал, усталостные кривые которого имеются в стандартных библиотеках программного комплекса. В качестве таких материалов были выбраны конструкционная сталь (армирующие волокна) и алюминий (матрица). Кривые усталости взяты из стандартной библиотеки комплекса ANSYS Workbench, по горизонтальной оси откладывается количество циклов по вертикали напряжение в Па. Модуль упругости и коэффициент Пуассона: для стали: E=2·1011 Па, ν=0,3, для алюминия: E=7,1·1010 Па, ν=0,33.

Сетка конечных элементов с упорядоченным разбиением представлена на рис.5, тип элемента 4-х узловой тетраэдр, размером 10^{-6} м. (количество узлов — 74089, элементов — 14922.).



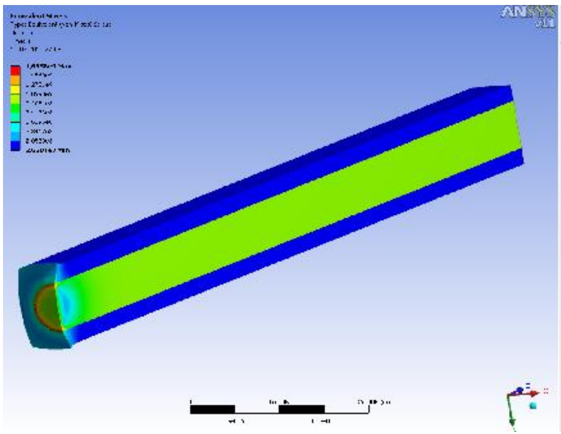
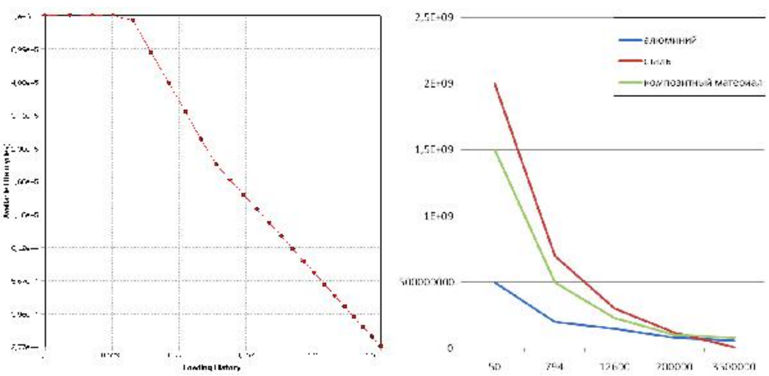


Рис. 5. Рис. 6

На рис. 6 представлено распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу), полученных в результате статического расчета. На рис. 7 представлены результаты расчета усталостных кривых композиционного материала — горизонтальный участок кривой (рис.7 слева) соответствует области не накопления повреждений, кривая для композиционного материала находится между соответствующих кривых для армирующего волокна и матрицы (рис. 7 справа).

Аналогичные результаты получены для полимеркомпозита из стекловолокна (армирующий материал E=8,7·1010 Па, ν=0,22) и эпоксидной смолы (матрица E=2,55·109 Па, ν=0,22) и представлены на рис.8.



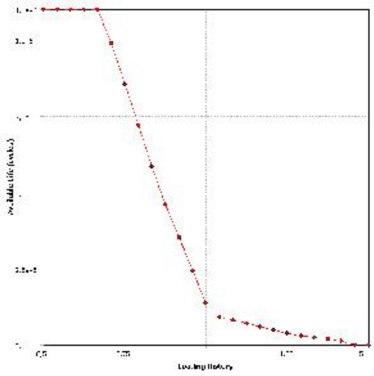


Рис. 7. Кривые усталости композита. Рис. 8.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-08-01296-а, № 10-01-00194-а, № 10-08-00093-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. О реконструкции трещин с взаимодействующими берегами. // Дефектоскопия 2004. № 10. С. 62-69.
2. Kim Hyo Jin, Seo Do Won. Effect of water absorption fatigue on mechanical properties of sisal textile-reinforced composites // International Journal of Fatigue 28 (2006) 1307–1314.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

Сведения об авторах

Соловьев Аркадий Николаевич
Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов», Донской государственный технический университет, профессор кафедры «Математическое моделирование», Южный федеральный университет.
E-mail soloviev@math.rsu.ru

Шевцов Сергей Николаевич
Доктор технических наук, заведующий лабораторией «Машиностроение и высокие технологии», Южный научный центр РАН, профессор кафедры «Авиастроение» Донской государственный технический университет, профессор кафедры «Математическое моделирование», Южный федеральный университет.
E-mail aeroengdstu@list.ru

Зиборов Евгений Николаевич
Аспирант кафедры «Сопротивление материалов», Донской государственный технический университет.

Макарчик Николай Сергевич
Инженер кафедры «Сопротивление материалов», Донской государственный технический университет.

Спожакин Александр Сергеевич
Аспирант кафедры «Сопротивление материалов», Донской государственный технический университет.

КРУПНОГАБАРИТНЫЕ ТРАНСФОРМИРУЕМЫЕ КОСМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: КОНСТРУКЦИИ И МОДЕЛИ

Зимин В.Н.

Разработка крупногабаритных трансформируемых антенн, устанавливаемых на космических аппаратах (КА) связи и дистанционного зондирования Земли, является частью общего направления развития космической техники, связанного с повышением эффективности радиотехнических систем различного назначения. Система антенно-фидерных устройств, входящая в состав бортового ретрансляционного и радиолокационного комплексов, относится к числу важнейших и оказывает первостепенное влияние на проектирование КА, особенно такого класса, как спутники связи, радиолокации или аппараты экологического мониторинга Земли. Применение крупногабаритных антенн с большим коэффициентом усиления позволяет уменьшить требуемую мощность бортовой системы электропитания, резко снизить стоимость наземных станций, входящих в систему связи, повысить информативность и помехозащищенность каналов связи.

Исследование различных вариантов конструктивных решений крупногабаритных трансформируемых космических антенных систем было начато за рубежом и в СССР при подготовке новых космических программ в конце 60-х годов. Ведущими аэрокосмическими фирмами США были предложены несколько вариантов конструкций, отражающих, как правило, опыт фирмы в разработках подобных конструкций. По способу формирования отражающей поверхности крупногабаритные космические антенны можно условно разделить на четыре типа: вантовые, зонтичные, ферменные и надувные. Вантовые конструкции используют жесткий складной периферийный кольцевой обод. Параболические поверхности таких конструкций формируются пространственной системой вант (тросов). Две одинаковые системы тросов, закрепленных на кольцевом силовом ободе, образуют сетчатые параболические поверхности с ячейками треугольной формы. При этом третья система тросов объединяет эти сетчатые поверхности в характерных точках в единую пространственную систему. На одной из сетчатых параболических поверхностей крепится отражающее сетеполотно. Зонтичные антенны, как правило, состоят из жесткой центральной части, к которой крепится система радиальных ребер, поддерживающих отражающую поверхность. Этот тип антенн привлек наибольшее внимание исследователей своей простотой и возможностью создания на их основе различных гибридных конструкций. Зонтичные антенны с жесткими ребрами требуют для своего складывания шарнирных устройств. Зонтичная антенна с гибкими ребрами может быть свернута вокруг центральной части, что обеспечивает малые габариты укладки и малый вес. Антенны ферменной конструкции состоят из трехмерного пространственного каркаса и крепящейся к нему отражающей поверхности. Опорную конструкцию составляют базовые структурные элементы (тетраэдры), благодаря чему несущий силовой каркас приобретает необходимую жесткость и прочность в развернутом состоянии и обеспечивают малые габариты в сложенном состоянии. Каркас состоит из шарнирно соединенных складывающихся и диагональных жестких стержней. Складывающиеся стержни образуют две поверхности, одна из которых является рабочей. К узлам каркаса крепится отражающая поверхность, обычно изготавливаемая из металлической сетки. Началом использования надувных конструкций в космической технике принято считать 60-е годы прошлого столетия, когда в США были выведены на околоземную орбиту спутники связи "Эхо-1" и "Эхо-2". К настоящему времени в России проведены натурные эксперименты:

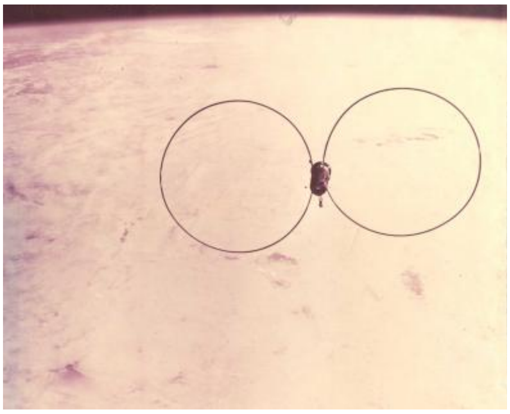


Рис. 1. Грузовой космический корабль «Прогресс-28» с трансформируемыми кольцевыми антеннами ∅ 20 м

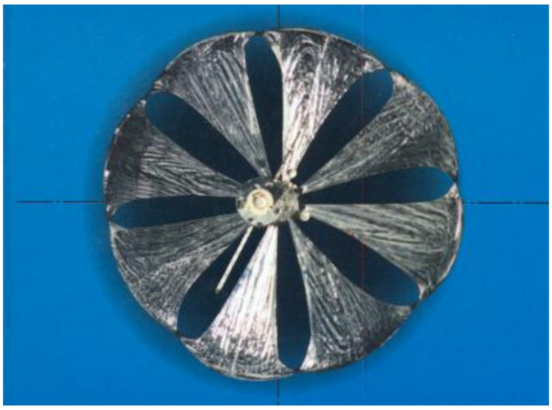


Рис. 2. Грузовой космический корабль «Прогресс М-15» с трансформируемым пленочным отражателем ∅ 10 м

– эксперимент "Модель-2" по развертыванию на орбите крупногабаритных антенных кольцевых контуров диаметром 20 м (грузовой космический корабль (КК) "Прогресс-28"); масса контура 40 кг, рис. 1;

– эксперимент "Знамя-2" по раскрытию на орбите пленочного бескаркасного отражателя диаметром и10 м (КК "Прогресс М-15"); масса пленочного отражателя 4,2 кг, масса агрегата раскрытия с контейнером 40 кг, рис. 2.

Преимущества надувных конструкций из тканевых и пленочных материалов перед конструкциями, выполняемыми по классическим схемам, состоят в том, что на орбиту выводится легкая и компактно уложенная в контейнере система, которая после наполнения ее рабочим газом развертывается и принимает проектную форму. При этом габаритные размеры развернутых надувных конструкций могут достигать внушительных размеров – десятков и сотен метров, что реализовать при раскрытии традиционных механически трансформируемых систем является трудно выполнимой задачей. В сочетании с технологиями отверждения открываются реальные перспективы создания выигрышных по стоимости и массе объектов космической техники различного целевого назначения. Эти технологии пока не заняли надлежащего места в официальной космической индустрии и находятся на стадии разработки и совершенствования.

Для решения актуальных задач по созданию трансформируемых крупногабаритных космических конструкций антенн требуется проведение научных исследований и разработок в части развития методов математического моделирования таких конструкций. Необходимость проведения таких работ диктуется следующими соображениями.

1. Большие трансформируемые антенны, как правило, представляют собой многоэлементные системы, состоящие из десятков, сотен и даже тысяч взаимосвязанных между собой элементов. Конструкции доставляются на космические орбиты в транспортном плотноупакованном состоянии и дальнейшее приведение их в рабочее состояние связано с реализацией процесса раскрытия. Работоспособность таких конструкций определяется, главным образом, тем, насколько велики возникающие в них усилия при развертывании, поэтому обеспечение их надежного раскрытия связано с решением сложных задач механики. Без применения разрабатываемых комплексных моделей по расчету процессов раскрытия складных конструкций невозможно обеспечение высоких показателей надежности функционирования проектируемой механической системы.

2. Наличие протяженных упругих конструкций в составе КА значительно усложняет решение задач ориентации, управления и стабилизации спутника. В силу своих конструктивных особенностей большие антенны имеют малую массу, но значительные моменты инерции в раскрытом состоянии. Упругие колебания конструкции антенн влияют на процессы ориентации, управления и стабилизации КА. Даже при достаточно малых амплитудах эти колебания могут привести к снижению уровня полезного сигнала в радиотехнических системах. Низшие частоты собственных колебаний больших раскрывающихся антенн лежат, как правило, в пределах диапазона чувствительности системы управления КА. Необходима максимально точная информация о формах и реальных частотах колебаний крупногабаритной антенны, чтобы эффективно настроить систему управления спутником. Поэтому одна из важных задач на этапе проектирования таких конструкций – расчет их динамических характеристик. Анализ частот и форм свободных колебаний больших антенных систем позволяет на начальном этапе проектирования конструкции сделать предварительные выводы об эффективности выбранной конструктивно-силовой схемы, скорректировать значения некоторых конструктивных параметров, уточнить компоновку антенны, оценить эффективность применения тех или иных конструкционных материалов.

3. При создании больших космических конструкций значительная роль отводится натурным экспериментам, результаты которых являются основным критерием надежности и функциональной пригодности разрабатываемых конструкций. Для конструкций, функционирующих в космическом пространстве, важными факторами становятся невесомость, отсутствие или значительная разреженность атмосферы. Для воссоздания этих условий в наземных экспериментах требуются дорогостоящие стенды имитации невесомости, уникальные по размерам вакуумные камеры. Проведение полномасштабной экспериментальной отработки таких конструкций оказывается чрезвычайно дорогостоящим делом. Поэтому математический эксперимент, использующий разрабатываемые механические модели больших конструкций антенн с идентифицированными параметрами, является важным этапом проверки и обоснования функциональной пригодности проектируемой системы.

На практике, как правило, динамическое поведение конструкции анализируют с помощью совокупности моделей, каждая из которых нацелена на решение конкретного технического вопроса, либо направлена на определение динамических характеристик конструкции, либо исследует динамику процесса раскрытия конструкции. Таким образом, говоря о модели динамики таких конструкций, мы имеем в виду не одну модель, а совокупность дополняющих и развивающих друг друга моделей – своего рода иерархию моделей. Можно ожидать, что темпы усложнения проектируемых раскрывающихся трансформируемых конструкций и роста их размерности как динамических систем будут постоянно опережать развитие методов и технических средств математического моделирования подобных конструкций. Поэтому на ранних стадиях проектирования при анализе многочисленных вариантов конструктивного исполнения таких конструкций усилия разработчиков направлены на получение упрощенных физических моделей для оценки их работоспособности.

Конструкция кольцевых антенн (рис. 1) представляет собой надувной тор, выполненный из резинотехнической ткани, который находится в токопроводящем рукаве из аримидной ткани. Масса всей конструкции $M_K =$ 25 кг; начальное давление в системе $p_0 =$ 0,1·10^5 Па; конечное давление в системе $p_K = 0{,}012 \cdot 10^5$ Па; радиус рабочего состояния тора R = 10 м; радиус сечения r = 0,07 м; длина L = 62,8 м. В транспортном положении надувной тор укладывается в виде гармошки в контейнер путем перегиба рукава (формирования одноосных зон) и складывания его в виде прямолинейных колен (звеньев) в виде «гармошки» длиной l = 1,5 м и диаметром 0,14 м, рис. 3. Разворачивание происходит при подаче избыточного давления в полость рукава. Оценим характеристики процесса раскрытия конструкции, используя простейшую расчетную схему, рис. 4.

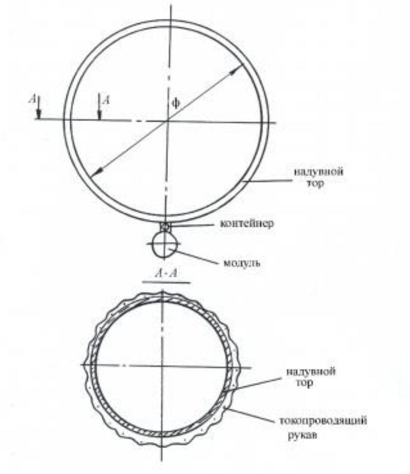


Рис. 3. Трансформируемая кольцевая антенна ∅ 20 м

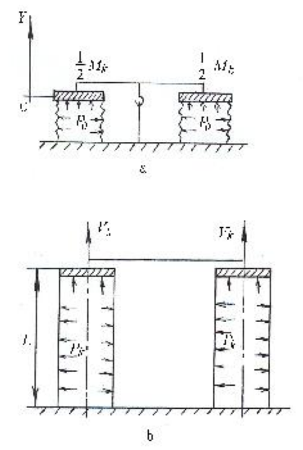


Рис. 4. Простейшая расчетная схема раскрытия надувной антенны

Процесс раскрытия тора моделируется раскрытием системы, состоящей из двух «мягких» цилиндров длиной $L = \pi R$, жестко связанных между собой и сложенных в виде гармошки в начальный момент времени ($t = 0$ с). Вся масса системы M_K сосредоточена в верхних «донышках» цилиндров, по $\frac{1}{2} M_K$ в каждом. Считаем, что при расширении газа давление изменяется по линейному закону от времени (линейная аппроксимация адиабатического закона расширения)

$$p(t) = p_0 - \frac{p_0 - p_K}{t_K} t \,. \tag{1}$$

Конечное время раскрытия t_K определяется временем полного развертывания цилиндров.

Уравнение движения одного цилиндра системы имеет вид, рис. 4.

$$\frac{1}{2} M_K \frac{dv}{dt} = p_0 - \frac{p_0 - p_K}{t_K} t \,, \tag{2}$$

где $p_0 = p_0 \pi r^2$, $p_K = p_K \pi r^2$.

Дважды интегрируя уравнение (2), получим закон движения «донышка» цилиндра в виде

$$y = \frac{2}{M_K} \left(\frac{p_0 t^2}{2} - \frac{p_0 - p_K}{6 t_K} t^3 + C_1 t + C_2 \right).$$

Константы интегрирования определим из начальных условий: при $t = 0 \quad y = 0, \quad \dot{y} = 0$.

Следовательно, константы имеют следующие значения: $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$.

С учетом этого окончательно получаем

$$y = \frac{2}{M_K}\left(\frac{p_0\,t^2}{2} - \frac{p_0 - p_K}{6t_K}t^3\right). \tag{3}$$

В конечный момент времени развертывания длина цилиндра равна L. Из этого условия по (3) определим величину t_K

$$t_K = \sqrt{\frac{3L\,M_K}{2p_0 + p_K}}\,. \tag{4}$$

Из (2) с учетом (4) получим значение скорости «донышка» цилиндра в момент времени t_K

$$v_K = \frac{p_0 - p_K}{M_K}t_K\,.$$

Значение ускорения «донышка» цилиндра в момент времени t_K получим из (2)

$$a_K = \frac{dv}{dt} = \frac{2}{M_K}\,p_K\,.$$

В процессе разворачивания торовой оболочки происходит интенсивное изменение формы каркаса, исчезновение одноосных зон в местах перегиба мягкой оболочки. После развертывания торовая оболочка находится в двухосном напряженно-деформированном состоянии. При расчете реальной конструкции по расчетной модели «гармошка» с использованием алгоритма, построенного на основе принципа принуждения Гаусса, необходимо экспериментально построить жесткостные характеристики модели оболочки как функции внутреннего давления. Общий вид экспериментальной установки представлен на рис. 5. Результаты экспериментов по определению жесткостных характеристик фрагмента торовой оболочки ($\varnothing$ 0,14 м, длина $L = 1$ м), нагруженной внутренним избыточным давлением, приведены на рис. 6. Данные кривые представляют собой осредненные значения серии из 10 экспериментов. Они отражают связь угла раскрытия «колена» φ и момента $M = 2Nl\cos\varphi$, действующего на мягкую оболочку. Кривые построены для начальных углов $\varphi_0^1 = 50^0; \varphi_0^2 = 60^0; \varphi_0^3 = 72^0$ и различных значений давления в оболочке.

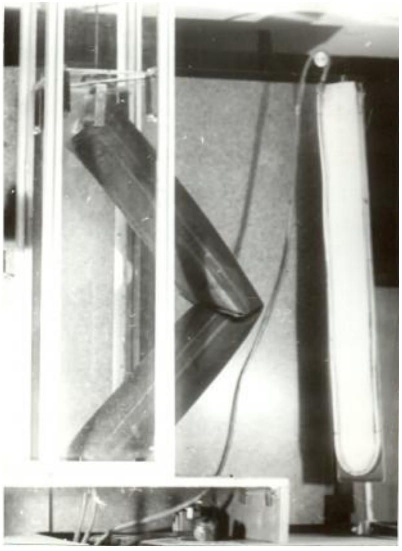


Рис. 5. Экспериментальная установка

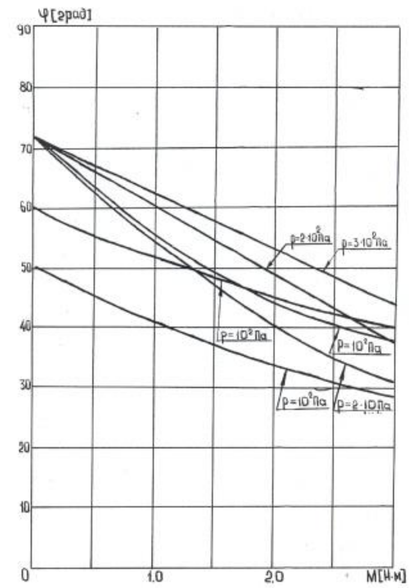


Рис. 6. Жесткостные характеристики фрагмента торовой оболочки

Исчезновение одноосных зон в алгоритме реализовано по расчетной модели удара с использованием штрафных функций. Для уменьшения трудоемкости подбора коэффициентов штрафных функций (большой инерции звеньев («колен»)) воспользуемся результатами простейших экспериментов с фрагментом мягкой оболочки. Эксперименты проводились на той же установке, при помощи которой получены жесткостные характеристики модели мягкой оболочки (аналог жесткостной характеристики пружины). При фиксированном давлении в оболочке изменялась величина нагрузки, действующей на подвижный фланец, рис. 7 а. По стрелочному индикатору определялось смещение фланца мягкой оболочки. Результаты экспериментов по определению изгибной жесткости модели мягкой оболочки (аналог изгибной жесткости балки, рис. 7 б) приведены на рис. 8. Таким образом, из приведенных графиков определяем изгибную жесткость модели оболочки как тангенс угла наклона касательной к кривой

$$EJ = \frac{Gl^3}{y} .$$

Из графиков видно (рис. 6), что при $p > 10^2$ Па зависимость угла раскрытия φ от действующего момента можно считать линейной $M = c\varphi$, где c – константа.

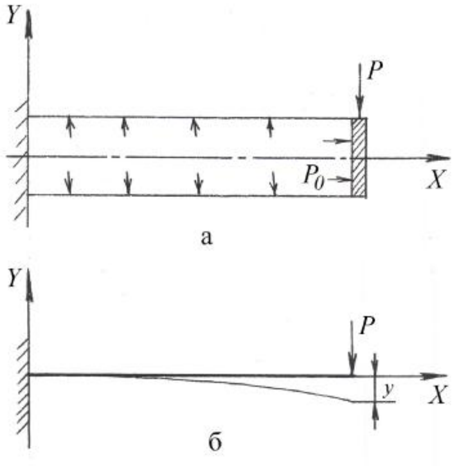


Рис. 7. Определение изгибной жесткости модели мягкой оболочки

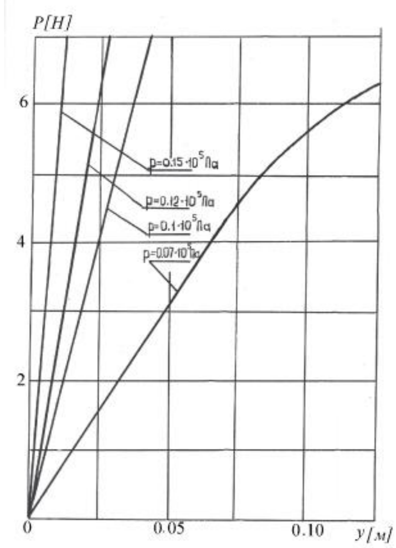


Рис. 8. Изгибная жесткость модели мягкой оболочки

Коэффициенты штрафных функций (параметры штрафа) определяем из следующего соотношения

$$\alpha = \frac{EJ}{cl} ,$$

где EJ – полученная экспериментально изгибная жесткость модели мягкой оболочки (аналог изгибной жесткости балки); c – полученная экспериментально жесткостная характеристика модели оболочки (аналог жесткостной характеристики пружин); l – длина «колена» (звена).

Создание крупногабаритных трансформируемых в условиях полета конструкций антенн является одним из актуальных и трудоемких направлений в развитии современной космической техники. При разработке таких конструкций необходимо использовать достаточно мощные CAD-модели, обеспечивающие моделирование всех этапов развертывания и функционирования в космосе. Это позволит сократить время и стоимость их разработки.

Сведения об авторе

Зимин Владимир Николаевич
Доктор технический наук, директор, Научно-исследовательский институт специального машиностроения Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана.
Адрес: 105005, г. Москва, 2-ая Бауманская ул., МГТУ им. Н.Э.Баумана, директор НИИСМ
Тел.: 8(499)261-21-88, факс: 8(499) 261-36-14
E-mail: sm11@sm.bmstu.ru, niism@sm.bmstu.ru

О КОНТАКТЕ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ И ШТАМПОВ, ИМЕЮЩИХ СЛОЖНЫЙ ПРОФИЛЬ ОСНОВАНИЯ

Казаков К. Е.

Задачи контакта вязкоупругих тел с покрытиями и штампов рассматривались ранее в [1–3]. Их решения строились в виде ряда по некоторой системе ортонормированных полиномов, например по полиномам Лежандра. Однако очевидно, что в случае, когда форма основания штампа задается некоторой осциллирующей функцией, такое представление решения неэффективно. Оно позволяет производить вычисления лишь для штампов, чья форма хорошо описывается конечным достаточно малым числом полиномов. Подход, используемый в данной работе, позволяет вести расчеты для штампов, формы оснований которых описываются осциллирующими функциями. В ней исследуются плоские задачи. Даны их постановки. Получены смешанные интегральные уравнения. С помощью проекционного метода А.В. Манжирова [4] для различных постановок получены аналитические решения в виде рядов.

Исследуем контактную задачу для вязкоупругого слоя с покрытием, лежащего на недеформируемом основании, и жесткого штампа в случае плоской деформации (рис. 1). В поверхность такого основания начиная с момента времени τ_0 вдавливается гладкий жесткий штамп силой $P(t)$ с эксцентриситетом приложения $e(t)$. Область контакта со временем не изменяется, длина линии контакта $2a$, а форма основания штампа задается функцией $g(x)$ ($g(x) \ge 0, \exists \tilde{x} \in [-a,a] : g(\tilde{x}) = 0$). Покрытие считается тонким по сравнению с областью контакта, т.е. его толщина $h << 2a$. Предполагается, что покрытие изготовлено из вязкоупругого стареющего материала, момент изготовления которого τ_1, а нижний слой произвольной толщины H — из вязкоупругого стареющего однородно материала, момент изготовления которого обозначим через τ_2. Предполагается также, что жесткость покрытия меньше жесткости нижнего слоя, или же они имеют один порядок.

Смешанное интегральное уравнение поставленной задачи и дополнительные условия могут быть записаны в следующем виде [1–3, 5, 6]:

$$k_\nu(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)\frac{q(x,t)h}{E_1(t-\tau_1)} + \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi}(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{F}\frac{q(x,t)}{E_2(t-\tau_2)} = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \; -a \le x \le a \qquad (1)$$

$$\int_{-a}^{a} q(\xi,t)\,d\xi = P(t), \; \int_{-a}^{a} \xi q(\xi,t)\,d\xi = M(t), \qquad (2)$$

где $q(x,t)$ — контактное давление под штампом, $M(t) = e(t)P(t)$ — момент приложения силы $P(t)$; $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, $\mathbf{V}_k$ — интегральные операторы Вольтера с ядрами ползучести при растяжении $K^{(k)}(t,\tau) = E_k(\tau)\partial[1/E_k(\tau) + C^{(k)}(t,\tau)]/\partial\tau$, $C^{(k)}(t,\tau)$ — мера ползучести при растяжении, ν_2 и $E_2(t)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя; $E_1(t)$ — модуль упругомгновенной деформации покрытия, k_ν — коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем, $\mathbf{F}$ — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{\rm pl}[(x-\xi)/H]$; $\delta(t)$ — осадка штампа, а $\alpha(t)$ — угол его поворота.

Сделав в (1), (2) замену переменных по формулам

$$x^* = \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{a},$$

$$\delta^*(t^*) = \frac{\delta(t)}{a}, \quad \alpha^*(t^*) = \alpha(t), \quad g^*(x^*) = \frac{g(x)}{a}, \quad q^*(x^*,t^*) = \frac{2(1-\nu_2^2)q(x,t)}{E_2(t-\tau_2)},$$

$$c^*(t^*) = \frac{k_\nu}{1-\nu_2^2}\frac{h}{2a}\frac{E_2(t-\tau_2)}{E_1(t-\tau_1)}, \quad P^*(t^*) = \frac{2P(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2M(t)(1-\nu_2^2)}{E_2(t-\tau_2)a^2},$$

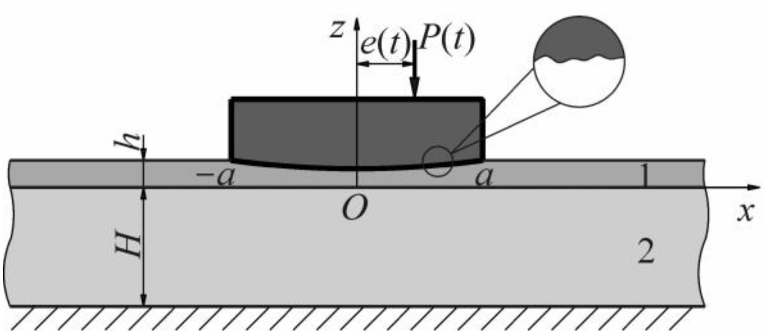


Рис. 1.

$$\mathbf{V}_k^*\phi(x^*,t^*)=\int_1^{t^*}K_k(t^*,\tau^*)\phi(x^*,\tau^*)\,d\tau^*,\quad K_k(t^*,\tau^*)=K^{(k)}(t-\tau_k,\tau-\tau_k)\tau_0,$$

$$\mathbf{F}^*\phi(x^*)=\int_{-1}^{1}k_{\mathrm{pl}}^*(x^*,\xi^*)\phi(\xi^*)\,d\xi^*,\quad k_{\mathrm{pl}}^*(x^*,\xi^*)=\frac{1}{\pi}k_{\mathrm{pl}}\left(\frac{x^*-\xi^*}{\lambda}\right).$$

Тогда, опуская звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q(x,t)+(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{F}q(x,t)=\delta(t)+\alpha(t)x-g(x),\quad -1\le x\le 1, \tag{3}$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^{1}q(\xi,t)\,d\xi=P(t),\quad \int_{-1}^{1}\xi q(\xi,t)\,d\xi=M(t). \tag{4}$$

Таким образом, получено разрешающее двумерное интегральное уравнение (3), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительные условия (4).

Будем искать решение уравнения (3) при условиях (4) в классе функций непрерывных по времени t в гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ (см., например [3, 7]). В качестве базисных функций будем использовать ортонормированные полиномы Лежандра $\{P_k(x)\}$. В отличие от предыдущих работ при подходе, описанном ниже, не придется раскладывать в ряд по полиномам саму функцию формы основания штампа. О другом подходе, основанном на построении специального вида базисных функций, можно прочитать в [8].

Заметим, что гильбертово пространство $L_2[-1,1]$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2[-1,1]=L_2^{(1)}[-1,1]\oplus L_2^{(2)}[-1,1]$, где $L_2^{(1)}[-1,1]$ — евклидово пространство с базисом $\{P_0(x),P_1(x)\}$, а $L_2^{(2)}[-1,1]$ — гильбертово пространство с базисом $\{P_2(x),P_3(x),\ldots\}$. Подынтегральная функция и правая часть (3) представляются в виде алгебраической суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(1)}[-1,1]$ и $L_2^{(2)}[-1,1]$, соответственно, т.е.

$$q(x,t)=q_1(x,t)+q_2(x,t),\quad f(x,t)=f_1(x,t)+f_2(x,t), \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} q_1(x,t)=z_0(t)P_0(x)+z_1(t)P_1(x),\quad f(x,t)=\delta(t)+\alpha(t)x-g(x),\\ f_1(x,t)=[\sqrt{2}\delta(t)-g_0]P_0(x)+[\sqrt{2/3}\,\alpha(t)-g_1]P_1(x),\\ f_2(x,t)=-g_2(x),\quad g(x)=g_0P_0(x)+g_1P_1(x)+g_2(x). \end{gathered} \tag{6}$$

Заметим, что в представлении для $q(x,t)$ известно слагаемое $q_1(x,t)$, функции разложения которого определяются дополнительными условиями (4):

$$z_0(t)=P(t)/\sqrt{2},\quad z_1(t)=\sqrt{3/2}M(t),$$

а слагаемое $q_2(x,t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $f_1(x,t)$, а слагаемое $f_2(x,t)$ задано известной функцией $g(x)$. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как частный случай обобщенной проекционной задачи.

Введем оператор ортогонального проектирования, который отображает $L_2[-1,1]$ на $L_2^{(1)}[-1,1]$:

$$\mathbf{P}_1\phi(x,t) = \int_{-1}^{1}[P_0(x)P_0(\xi) + P_1(x)P_1(\xi)]\phi(\xi,t)\,d\xi\,.$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathbf{P}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$ переводит пространство $L_2[-1,1]$ в $L_2^{(2)}[-1,1]$. Кроме того имеют место следующие соотношения: $\mathbf{P}_k f(x,t) = f_k(x,t)$, $\mathbf{P}_k q(x,t) = q_k(x,t)$. Подействуем на уравнение (3) оператором ортогонального проектирования $\mathbf{P}_2$. Получим уравнение для определения $q_2(x,t)$ с известной правой частью

$$c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q_2(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_2\mathbf{F}q_2(x,t) = -g_2(x) - (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_2\mathbf{F}q_1(x,t). \tag{7}$$

Предположим теперь, что функция $q_2(x,t)$ имеет вид

$$q_2(x,t) = -(\mathbf{I}+\mathbf{N}_1)\left[g_2(x) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_2\mathbf{F}q_1(x,t)\right]/c(t) + q_2^1(x,t)\,. \tag{8}$$

Первое слагаемое в таком представлении известно. Уравнение относительно неизвестной функции $q_2^1(x,t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &c(t)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_1)q_2^1(x,t) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_2\mathbf{F}q_2^1(x,t) = \\ &\quad = (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)(\mathbf{I}+\mathbf{N}_1)\mathbf{P}_2\mathbf{F}\left[g_2(x) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_2\mathbf{F}q_1(x,t)\right]/c(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь гладкость правой части определяется не функцией $g_2(x)$, а оператором $\mathbf{F}$.

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathbf{P}_2\mathbf{F}$, который является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2^{(2)}[-1,1]$ в $L_2^{(2)}[-1,1]$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(2)}[-1,1]$ [9]. Спектральная задача для оператора $\mathbf{P}_2\mathbf{F}$ может быть записана в форме

$$\mathbf{P}_2\mathbf{F}\varphi_k(x) = \gamma_k\varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \sum_{i=2}^{\infty}\varphi_i^{(k)}P_i(x), \quad \sum_{i=2}^{\infty}R_{mi}\varphi_i^{(k)} = \gamma_k\varphi_m^{(k)}, \quad k, m = 2, 3, \ldots$$

$$k(x,\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}R_{ij}P_i(x)P_j(\xi), \quad R_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k(x,\xi)P_i(x)P_j(\xi)\,dx\,d\xi, \quad i,\ j = 0, 1, \ldots,$$

Представив искомую функцию $q_2^1(x,t)$ и известную функцию правой части в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \ldots$) в $L_2^{(2)}[-1,1]$, т.е.

$$\begin{aligned} &q_2^1(x,t) = \sum_{k=2}^{\infty}z_k(t)\varphi_k(x), \\ &(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)(\mathbf{I}+\mathbf{N}_1)\mathbf{P}_2\mathbf{F}\,\frac{g_2(x) + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)\mathbf{P}_2\mathbf{F}q_1(x,t)}{c(t)} = \sum_{k=2}^{\infty}G_k(t)\varphi_k(x), \end{aligned} \tag{10}$$

и подставив эти представления в (9), получим, что неизвестные функции разложения $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \ldots$) можно найти по формуле

$$z_k(t) = (\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{G_k(t)}{c(t)+\gamma_k}\,, \tag{11}$$

$$G_k(t) = \gamma_k(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)(\mathbf{I}+\mathbf{N}_1)\left\{g_k + (\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)[z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}]\right\}/c(t),$$

$$K_k^{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty}R_{0n}\varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty}R_{1n}\varphi_n^{(k)}, \quad g_2(x) = \sum_{k=2}^{\infty}g_k\varphi_k(x), \quad g_k = \int_{-1}^{1}g_2(\xi)\varphi_k(\xi)\,d\xi,$$

$$\mathbf{W}_k\phi(x,t)=\int_1^t R_k^*(t,\tau)\phi(x,\tau)\,d\tau, \quad k=2,3,\ldots,$$

где $R_k^*(t,\tau)$ ($k=2,3,\ldots$) — резольвента ядра $K_k^*(t,\tau)=[c(t)K_1(t,\tau)+\gamma_k K_2(t,\tau)]/[c(t)+\gamma_k]$.
Используя формулы (5)–(11), получим решение исходного интегрального уравнения (3) с дополнительными условиями (4):

$$q(x,t)=z_0(t)P_0(x)+z_1(t)P_1(x)-[g(x)-g_0P_0(x)-g_1P_1(x)](\mathbf{I}+\mathbf{N}_1)/c(t)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{(\mathbf{I}+\mathbf{W}_k)\frac{G_k(t)}{c(t)+\gamma_k}-(\mathbf{I}+\mathbf{N}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{V}_2)[z_0(t)K_k^{(0)}+z_1(t)K_k^{(1)}]/c(t)\right\}\varphi_k(x). \tag{12}$$

Видно, что в решении отдельным слагаемым выделена функция $g_2(x)$, что позволяет производить расчеты для штампов, формы оснований которых описываются осциллирующими функциями. Отметим, что в случае упругого основания с покрытием решение (12) принимает вид

$$q(x,t)=\left[z_0(t)-\frac{g_0}{c}\right]P_0(x)+\left[z_1(t)-\frac{g_1}{c}\right]P_1(x)-\frac{g(x)}{c}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\frac{\gamma_k g_k}{c(c+\gamma_k)}-\frac{z_0(t)K_k^{(0)}+z_1(t)K_k^{(1)}}{c+\gamma_k}\right\}\varphi_k(x).$$

Аналогично можно поставить и решить осесимметричные контактные задачи.

Автор благодарен А.В. Манжирову за постановку задачи, полезные обсуждения и советы.
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00003, 08-01-00553 и 09-08-01180), Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программ №13 ОЭ) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № 3288.2010.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
2. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
3. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
4. Handbook of Integral Equations, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman \& Hall/CRC Press, 2008. 1144 p.
5. Манжиров А.В. Контактные задачи для неоднородно стареющих и вязкоупругих тел // Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. С. 549–565.
6. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. – 456 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
8. Казаков К.Е., Федотов И.А. Контактная задача для оснований с покрытиями и штампов со сложной формой основания // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV международной конференции, гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г. (в печати).
9. Колмагоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 496 с.

Сведения об авторе

Казаков Кирилл Евгеньевич – к.ф.-м.н., научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, (+7 495) 434 3456. E-mail kazakov@ipmnet.ru

МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО СЛОЯ ВО ВНЕШНЕМ ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Казарян К. Б., Казарян Р. А.

В рамках плоской задачи теории упругости рассмотрена задача распространения магнитоупругих волн в упругом трансверсально-изотропном слое, лицевые поверхности которой свободны от механических напряжений. Слой находится под воздействием внешнего постоянного магнитного поля, направление которого совпадает с направлением магнитоупругой волны. Слой имеет свойства идеального проводника. Получено дисперсионное уравнение. В длинноволновом приближении получено уравнение изгибных колебаний тонкой магнитоупругой пластинки.

Задача о распространении периодических волн в упругом слое со свободными границами впервые была решена Рэлеем и Лэмбом [1]. Вопросы о магнитоупругих колебаниях пластин рассматривались во многих работах, в частности, в [2, 3]. К недавно опубликованным работам по колебаниям тонких тел во внешнем магнитном поле можно отнести работы [4,5].

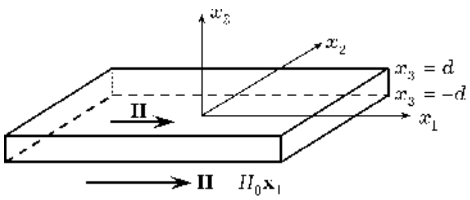


Рис.1

Рассматривается задача о периодических колебаниях упругого слоя толщиной $2d$, заключенного между плоскостями $x_3 = \pm d$, свободными от напряжений. Слой является электропроводным (с бесконечным значением коэффициента электропроводности) и находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H} = \left(H_0;0;0\right)$, направленным вдоль оси x_1 (рис. 1).

Рассматривается плоская задача, когда упругие перемещения и возмущения электромагнитного поля не зависят от переменной x_2.

Закон Гука для трансверсально-изотропной среды имеет вид

$$\sigma_{11} = C_{11}e_{11} + C_{13}e_{33}; \sigma_{33} = C_{13}e_{13} + C_{33}e_{33}; \sigma_{13} = 2C_{44}e_{13} \tag{1}$$

Здесь $e_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1},\ e_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3},\ e_{13} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$ – деформации, а $\vec{u} = \left(u_1;u_2;u_3\right)$ – вектор упругих перемещений, где $u_1 = u_1\left(t, x_1, x_3\right),\ u_2 = 0,\ u_3 = u_3\left(t, x_1, x_3\right)$, C_{ij} – упругие постоянные.

Уравнения Максвелла в упругой среде $-d \le x_3 \le d$ имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\vec{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}\right) \tag{2}$$

Здесь $\vec{e}$ и $\vec{h}$ – векторы напряжений электрической и магнитной полей, c – электродинамическая постоянная, а σ – коэффициент электрической проводимости: для идеального проводника $\sigma = \infty$, поэтому из (2) получим:

$$\vec{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}=-\frac{H_0}{c}\frac{\partial u_3}{\partial t}\vec{x}_2$$
$$\vec{h}=\operatorname{rot}\left(\vec{u}\times\vec{H}\right)=-H_0\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\vec{x}_1+H_0\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\vec{x}_3 \tag{3}$$

Под действием магнитного поля возникает пондеромоторная сила

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{h}\times\vec{H}=\frac{H_0^2}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)\vec{x}_3$$

С учетом этой силы динамические уравнения движения запишутся как

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\frac{H_0^2}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{4}$$

или используя закона Гука (1)

$$C_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+C_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\left(C_{13}+C_{44}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$
$$\left(C_{44}+\frac{H_0^2}{4\pi}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\left(C_{33}+\frac{H_0^2}{4\pi}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\left(C_{13}+C_{44}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{5}$$

На границе раздела $x_3=\pm d$ упругого слоя с вакуумом имеют место следующие граничные условия:

$$\sigma_{13}+T_{13}^{(i)}=T_{13}^{(e)},\ \ x_3=\pm d$$
$$\sigma_{33}+T_{33}^{(i)}=T_{33}^{(e)},\ \ x_3=\pm d \tag{6}$$

Здесь $T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(H_{oi}h_k+H_{oi}h_i-\delta_{ik}\vec{H}\cdot\vec{h}\right)$ – тензор Максвелла, индекс (i) соответствует области $|x_3|<d$, а индекс (e) – области $|x_3|>d$.

Решение системы (5) ищем в виде $u_1\left(t,x_1,x_3\right)=u_{10}\left(x_3\right)e^{i(\omega t-kx_1)}$, $u_3\left(t,x_1,x_3\right)=iu_{30}\left(x_3\right)e^{i(\omega t-kx_1)}$. Получается следующая система дифференциальных уравнений:

$$C_{044}u_{10}''\left(x_3\right)-k^2\left(1-\eta\right)u_{10}\left(x_3\right)+\left(C_{013}+C_{044}\right)k\,u_{30}'\left(x_3\right)=0$$
$$\left(C_{033}+\beta\right)u_{30}''\left(x_3\right)-k^2\left(C_{044}+\beta-\eta\right)u_{30}\left(x_3\right)-k\left(C_{013}+C_{044}\right)u_{10}'\left(x_3\right)=0 \tag{7}$$

где

$$C_{044}=\frac{C_{44}}{C_{11}};\ C_{013}=\frac{C_{13}}{C_{11}};\ C_{033}=\frac{C_{33}}{C_{11}};\ \eta=\frac{\rho\omega^2}{k^2C_{11}};\ \beta=\frac{H_0^2}{4\pi C_{11}}$$

В дальнейшем ограничимся случаем антисимметричных колебаний, которому в случае тонкого слоя соответствуют изгибные колебания. В этом случае решение системы (7) ищем в виде

$$u_{10}\left(x_3\right)=M\,\mathrm{sh}pkx_3,\; u_{30}\left(x_3\right)=N\,\mathrm{ch}pkx_3$$

Это приведет к решению линейной однородной системы

$$\begin{gathered}\left(C_{044}p^2-1+\eta\right)M+p\left(C_{013}+C_{044}\right)N=0\\ \left(C_{013}+C_{044}\right)pM-\left(\left(C_{033}+\beta\right)p^2-C_{044}-\beta+\eta\right)N=0\end{gathered}\tag{8}$$

и к характеристическому уравнению

$$\begin{gathered}\mathrm{C}_{044}(C_{033}+\beta)p^4+p^2\left(\mathrm{C}_{013}^2+2C_{013}\mathrm{C}_{044}+C_{033}(-1+\eta)+\beta(-1+\eta)+C_{044}(-\beta+\eta)\right)-\\ -(C_{044}+(\beta-\eta))(-1+\eta)=0\end{gathered}\tag{9}$$

Если $p=p_s=-p_{5-s}\quad\left(s=1,2\right)$ – корень характеристического уравнения, то из (8) получим

$$M_s=-\left(C_{13}+C_{44}\right)p_s\,;\;\; N_s=C_{044}p_s^2-1+\eta$$

следовательно,

$$u_{10}^{(s)}\left(x_3\right)=-\left(C_{013}+C_{044}\right)p_s\mathrm{sh}\,p_skx_3;\quad u_{30}^{(s)}\left(x_3\right)=\left(C_{044}p^2-1+\eta\right)\mathrm{ch}\,p_skx_3\quad\left(s=1,2\right)$$

Общее решение системы (5) примет

$$\begin{gathered}u_1\left(t,x_1,x_3\right)=-\left(C_{013}+C_{044}\right)\left(A_1p_1\mathrm{sh}\,p_1kx_3+A_2p_2\mathrm{sh}\,p_2kx_3\right)\cdot e^{i\left(\omega t-kx_1\right)}\\ u_3\left(t,x_1,x_3\right)=i\left(A_1\left(C_{044}p_1^2-1+\eta\right)\mathrm{ch}\,p_1kx_3+A_2\left(C_{044}p_2^2-1+\eta\right)\mathrm{ch}\,p_2kx_3\right)e^{i\left(\omega t-kx_1\right)}\end{gathered}\tag{10}$$

Здесь A_i – постоянные интегрирования.

Вектор напряжений магнитного поля в области $\left|x_3\right|>d$ определяется из уравнений Максвелла

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,\vec{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}^{(e)}}{\partial t}\;,\quad \mathrm{div}\;\vec{h}^{(e)}=0\\ \mathrm{rot}\,\vec{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t}\;,\quad \mathrm{div}\;\vec{e}^{(e)}=0\end{gathered}\tag{11}$$

Если ищем решение системы (11) в виде $\vec{e}=\vec{e}_0\left(x_3\right)\exp i\left(\omega t-kx_1\right),\;\vec{h}=h_0\left(x_3\right)\exp i\left(\omega t-kx_1\right)$, то получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\vec{e}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{e}}{\partial t^2}\;,\quad \vec{e}_0''-k^2\left(1-\frac{\omega^2}{k^2c^2}\right)\vec{e}_0=0\\ \vec{h}_0\left(x_3\right)e^{i\left(\omega t-kx_1\right)}=\frac{ic}{\omega}\left(-\frac{\partial e_2}{\partial x_3}\vec{x}_1-\left(\frac{\partial e_3}{\partial x_1}-\frac{\partial e_1}{\partial x_3}\right)\vec{x}_2+\frac{\partial e_2}{\partial x_1}\hat{x}_3\right)\end{gathered}\tag{12}$$

Отсюда $\quad\vec{e}_0=\vec{b}_1e^{-k\nu x_3}+\vec{b}_2e^{k\nu x_3},\quad$ где $\quad\nu^2=1-\dfrac{\omega^2}{k^2c^2},\;\vec{b}_1=\left\{b_{11},b_{12},b_{13}\right\},\;\vec{b}_2=\left\{b_{21},b_{22},b_{23}\right\}$,

b_{ij} – произвольные постоянные.

С учетом условий затухания решений внешней задачи магнитостатики на бесконечности в области $x_3 > d$ $\vec{b}_2 = 0$ и общее решение системы (12) будет $\vec{e}_0 = \vec{b}_1 e^{-k\nu x_3}$. В области $x_3 < -d$ получим $\vec{e}_0 = \vec{b}_2 e^{k\nu x_3}$.

Из (12) получим для $\vec{h}$ в области $x_3 > d$

$$h_{01}(x_3) = \frac{ick\nu}{\omega} e^{-k\nu x_3} \cdot b_{12}; h_{02}(x_3) = \frac{ick}{\omega} e^{-k\nu x_3} \cdot (ib_{13} - \nu b_{11}); h_{03}(x_3) = \frac{ck}{\omega} e^{-k\nu x_3} \cdot b_{12} \quad (13)$$

в области $x_3 < -d$

$$h_{01}(x_3) = -\frac{ick\nu}{\omega} e^{k\nu x_3} \cdot b_{22}; h_{02}(x_3) = \frac{ick}{\omega} e^{k\nu x_3} (ib_{23} + \nu b_{21}); h_{03}(x_3) = \frac{ck}{\omega} e^{k\nu x_3} b_{22} \quad (14)$$

На границе пластинки $x_3 = \pm d$ имеем следующие условия непрерывности компонент электрической и магнитной полей:

$$e_1^{(i)}(\pm d) = e_1^{(e)}(\pm d),\ e_2^{(i)}(\pm d) = e_2^{(e)}(\pm d),\ h_{03}^{(i)}(\pm d) = h_{03}^{(e)}(\pm d) \quad (15)$$

Отсюда получим в области $x_3 > d$

$$\begin{gathered} h_{01}(x_3) = ik\nu H_0 u_{30}(d) e^{-k\nu(x_3 - d)};\ \ h_{02}(x_3) = 0;\ \ h_{03}(x_3) = H_0 k u_{30}(d) e^{-k\nu(x_3 - d)} \\ e_1 = 0;\ e_2 = \frac{H_0 \omega}{c} u_{30}(d) e^{-k\nu(x_3 - d)};\ \ e_3 = 0 \end{gathered} \quad (16)$$

в области $x_3 < -d$

$$\begin{gathered} h_{01}(x_3) = -ik\nu H_0 u_{30}(-d) e^{k\nu(x_3 + d)};\ \ h_{02}(x_3) = 0;\ h_{03}(x_3) = H_0 k u_{30}(-d) e^{k\nu(x_3 + d)} \\ e_1 = 0;\ e_2 = \frac{H_0 \omega}{c} u_{30}(-d) e^{k\nu(x_3 + d)};\ e_3 = 0 \end{gathered} \quad (17)$$

С учетом (1), (3) и (16,17) граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 & x_3 = \pm d \\ C_{13} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{33} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} + \dfrac{H_0}{4\pi}\left(h_1^{(e)}(x_3) - h_1^{(i)}(x_3)\right) = 0 & \end{cases} \quad (18)$$

После подстановки (10) в (18) получается система линейных уравнений относительно A_1 и A_2:

$$\begin{cases} A_1\left(C_{013} p_1^2 + 1 - \eta\right)\mathrm{chp}_1 kd + A_2\left(C_{013} p_2^2 + 1 - \eta\right)\mathrm{chp}_2 kd = 0 \\ A_1\left[\left(C_{013} A + \left(C_{033} + \beta\right) B_1\right) p_1 \mathrm{shp}_1 kd + \beta\nu B_1 \mathrm{chp}_1 kd\right] + \\ + A_2\left[\left(C_{013} A + \left(C_{033} + \beta\right) B_2\right) p_2 \mathrm{shp}_2 kd + \beta\nu B_2 \mathrm{chp}_2 kd\right] = 0 \end{cases} \quad (19)$$

где $A = C_{013} + C_{044};\ B_i = C_{044} p_i^2 - 1 + \eta\ \ (i = 1, 2)$.

Чтобы однородная система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (19) был равен нулю, откуда получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\mathrm{C}_{013} + C_{044})(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)\beta(-1 + \eta)\nu -$$

$$-p_1\left(1+\mathrm{C}_{013}p_2^2-\eta\right)\left(C_{013}^2+C_{013}C_{044}+(C_{033}+\beta)\left(-1+C_{044}p_1^2+\eta\right)\right)\tanh(kdp_1)+ \qquad (20)$$
$$+p_2\left(1+\mathrm{C}_{013}p_1^2-\eta\right)\left(C_{013}^2+C_{013}C_{044}+(C_{033}+\beta)\left(-1+C_{044}p_2^2+\eta\right)\right)\tanh(kdp_2)=0$$

В приближении тонкой пластинки $\mathrm{kd}<<1$ из асимптотического разложения уравнения (20) получим следующее дисперсионное уравнение, определяющее частоту колебаний пластинки:

$$\eta=\frac{\rho\omega^2}{k^2C_{11}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{C_{13}^2}{C_{11}C_{33}}\right)k^2h^2+\frac{H_0^2}{4\pi C_{11}}\left(1+\frac{1}{kh}\right)$$

Это уравнение не содержит параметра трансверсального модуля сдвига C_{44} и по своему виду совпадает с уравнением, полученным для изотропной проводящей пластинки в работе [1,2] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел.

Таким образом, на основе точного решения задачи о магнитоупругих колебаниях упругого трансверсально-изотропного электропроводного слоя в продольном магнитном поле установлено, что в этом приближении тонкой пластинки задача колебаний сводится к задаче магнитоупругих колебаний изотропной пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. Ереванского госуниверситета, 1991. 143 с.
4. Belubekyan M., Chazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized magnetoelastic bending vibration of an electroconductive elastic plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2007. 74. P. 1071–1077.
5. Ghazaryan K., Marzocca P., Milanese A. Selected vibration problems of a conductive plate exposed to a magnetic field // Проблемы механики деформируемого твердого тела: //Сб. науч. статей. Ереван, 2007. С. 118–127.

Сведения об авторах:

Казарян Карен Багратович – ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. E-mail: ghkarren@gmail.com.

Казарян Рафаель А. – старший научный сотрудник Института механики НАН Армении

ВЛИЯНИЕ НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИЧНОСТИ АРМИРОВАНИЯ НА ДЕФОРМАТИВНОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ТРУБ В УСЛОВИЯХ ОСЕВОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Карапетян К.А.

Рассматривается влияние отклонения угла армирования от заданного нулевого его значения $\left(\varphi = 0^o\right)$, обусловленного технологическим процессом изготовления, и изменяющегося в пределах $\varphi = 6 - 8^o$, на деформативность стеклопластиковых труб при осевом растяжении.

Сравнение опубликованных данных показывает, что в ряде случаев численные оценки для одного и того же класса армированных композиционных материалов (АКМ) существенно различаются между собой [1-4]. При этом среди причин, приводящих к указанному разбросу отмечается и отклонение углов армирования АКМ от предусмотренных и, поэтому, при проектировании конструкций предлагается установить жесткие допуски на эти углы [3].

Между тем наблюдения показывают, что, даже при изготовлении опытных трубчатых образцов на основе стеклоткани в лабораторных условиях, величина отклонения угла армирования от заданного (технологическая разориентация армирования) у некеоторых образцов может достигать до 6-8%.

Ниже рассматриваются результаты исследований влияния технологической разориентации армирования на деформативное поведение слоистых стеклопластиковых труб в условиях кратковременного и длительного действия осевой растягивающей нагрузки.

В качестве опытных образцов были использованы трубы с внутренним диаметром 38 мм, толщиной стенки 2,25 мм и длиной 285 мм, изготовленные из стекловолокнистой ткани по технологии, описанной в работе [5]. Трубы были изготовлены таким образом, что направление основы стеклоткани совпадало с направлением их продольной оси $\left(\varphi = 0^o\right)$. Однако, как показали наблюдения , у части труб (около 8% от общего количества) было обнаружено отклонение угла армирования в пределах 6-8%.

При проведении экспериментов, осуществленных через 8 лет после изготовления опытных образцов, трубы были разделены на 2 партии. У труб одной партии направления основы стеклоткани и их оси совпадали $\left(\varphi = 0^o\right)$. У труб другой партии величина угла между этими направлениями составляла $\varphi = 6 - 8^o$.

Для построения диаграмм напряжение – деформация, испытания опытных образцов производили путем ступенчатого повышения растягивающей нагрузки с шагом $\sim\ 0{,}1\Pi_{11}^{+}$ (до уровня напряжения $\sim\ 0{,}8\Pi_{11}^{+}$) и выдержкой под каждой ступенью лишь на время, необходимое для снятия данных с приборов, измеряющих деформации.

В случае ползучести величина приложенного постоянного растягивающего напряжения для всех образцов составляла $0{,}6\Pi_{11}^{+}$. Образцы находились под длительной нагрузкой в течение 76 дней, после чего они разгружались и велись наблюдения за обратимыми деформациями ползучести в течение 55 дней.

При проведении описанных выше экспериментов с помощью механических приборов параллельно измерялись как осевые, так и сдвиговые деформации.

При кратковременных испытаниях повторность опытов в каждом случае испытаний была принята 6-кратной. При этом максимальное значение коэффициента вариации полученных идентичных механических характеристик не превышало 0,11 в случае прочности и 0,14 – в случае деформативных свойств.

В опытах на ползучесть в каждом случае было испытано по 3 образца – близнеца. В этом случае максимальный разброс величин деформационных характеристик по сравнению с их среднеарифметическому значению составил 6,1%.

Следует отметить, что часть полученных в результате проведенных экспериментов данных была проанализирована с определенной точки зрения и опубликована в работах [6 и 7].

Результаты кратковременных испытаний, проведенных в рамках настоящих исследований, показали, что отклонение угла армирования на 8^o от его нулевого значения практически не влияет на прочность тканевых стеклопластиковых труб при осевом растяжении а также на прочность при сдвиге: средние значения этих характеристик можно принять равными $\Pi_{11}^{+} = 142 МПА$, $\Pi_{12} = 47\, МПа$.

На рис. 1 приведены диаграммы напряжение–деформации, полученные при кратковременном испытании трубчатых образцов на осевое растяжение.

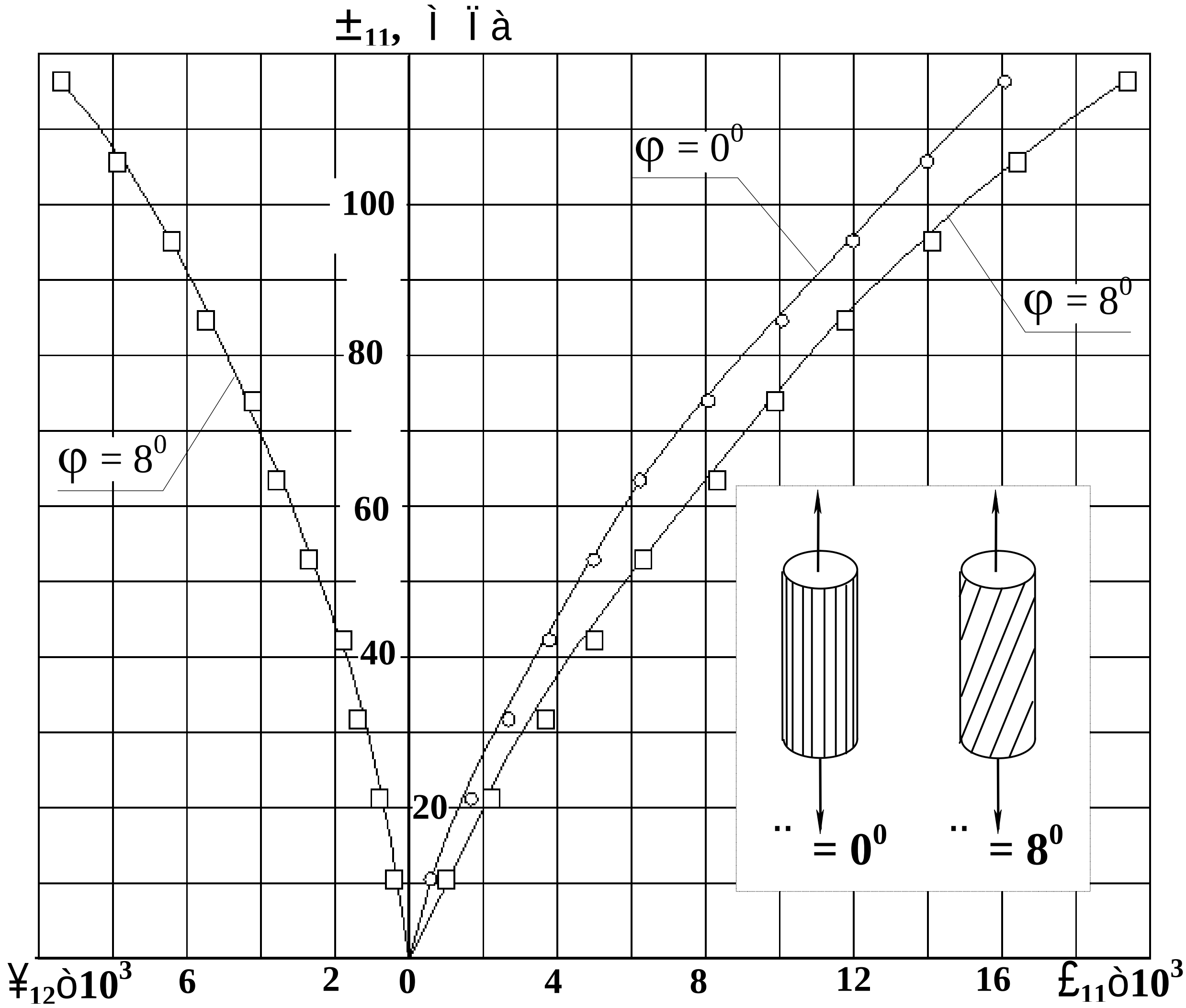


Рис. 1. Кривые деформирования стеклопластиковых труб с углом армирования φ^0**,** подвергнутых осевому растяжению.

Согласно этому рисунку, кривая осевой деформации образцов с $\varphi = 8^o$ приходит ниже соответствующей кривой деформации образцов с $\varphi = 0^o$. При этом величина отношения осевых деформаций образцов с $\varphi = 8^o$ и $\varphi = 0^o$, зафиксированных при одной и той же величине нормального напряжения, практически не зависит от уровня напряжения и составляет 1,2-1,3.

В результате прямых опытов было выявлено, что в случае растяжения труб с углом армирования $\varphi = 8^o$ возникают существенные сопутствующие основным осевым сдвиговые деформации (см. левую часть рис. 1): при уровне напряжения $\sigma_{11}^{+} = 0{,}6\Pi_{11}^{+}$ величина сдвиговых деформаций γ_{12} составляет приблизительно 5,8х10^{-3}, в то время как значение продольных деформаций этих же труб ε_{11} составляет 12,6х10^{-3}. Это означает, что при нагружении аналогичных стеклопластиковых труб растягивающим напряжением $\sigma_{11}^{+} = 0{,}6\Pi_{11}^{+}$ величина угла закручивания на 1м длины составит $13-14^{o}$.

Сравнение приведенных на рис.1 данных также показывает, что значение отношения осевых и сдвиговых деформаций стеклопластиковых труб с углом армирования $\varphi = 8^{o}$ при одном и том же уровне осевого напряжения практически не зависит от уровня напряжений и составляет 2,2 – 2,3.

Кривые ползучести тканевых стеклопластиковых труб, построенные на основе данных длительных опытов в условиях осевого растяжения приведены на рис.2.

Согласно графикам приведенным на рис.2а, сразу после приложения нагрузки продольные деформации ползучести ε_{11}^{Π} стеклопластиковых труб с углом армирования $\varphi = 8^{o}$ развиваются более интенсивно, чем труб с $\varphi = 0^{o}$. Сопоставление же данных этого рисунка показывает, что значение отношения продольных деформаций ползучести труб с $\varphi = 8^{o}$ к аналогичным деформациям труб с $\varphi = 0^{o}$, зафиксированных в один и тот же момент времени, практически не зависит от длительности нахождения образцов под нагрузкой и составляет 1,25 -1,30.

В ряде работ [8; 9; 10 и др.], посвященных экспериментальному исследованияю ползучести нетканевых стеклопластиков, показано, что деформации ползучести стеклопластика в направлении волокон являются существенно затухающими, а в работе [9] приведены данные о практически полной стабилизации деформаций ползучести в течение 30 мин.

Согласно же данным, приведенным на рис. 2а настоящей работы, стабилизация деформаций ползучести при одноосном растяжении трубчатых образцов из тканевого слоистого стеклопластика с углом армирования $\varphi = 0^{o}$ наблюдается через 50 сут. после нагружения.

Отмеченная разница в поведении нетканевого и тканевого стеклопластика при ползучести вдоль рабочих волокон, вероятно, связана со спецификой укладки армирующих компонентов. Прямым подтверждением сказанного может служить сравнение данных, приведенных в вышеуказанной работе [9], с представленными на рис. 2а настоящей работы. Согласно этим данным конечная величина деформации ползучести стеклопластика с углом армирования $\varphi = 0^{o}$ в направлении вдоль армирующих рабочих волокон в первом случае составляет приблизительно 0,5 х10^{-3} при $\sigma_{11}^{+} = 0{,}5\Pi_{11}^{+}$, а во втором случае – 1,64 х10^{-3} при $\sigma_{11}^{+} = 0{,}6\Pi_{11}^{+}$.

В результате длительных опытов установлено, что у тканевых стеклопластиковых труб с углом армирования $\varphi = 8^{o}$, находившихся длительное время в условиях растяжения, возникают существенные сопутствующие сдвиговые деформации ползучести: через 76 суток после нагружения величина сдвиговых деформаций ползучести γ_{12}^{Π} достигает величины 3,93х10^{-3}, в то время как значение продольных деформаций ползучести ε_{11}^{Π} этих же труб составляет 2,10 х10^{-3} (рис. 2б).

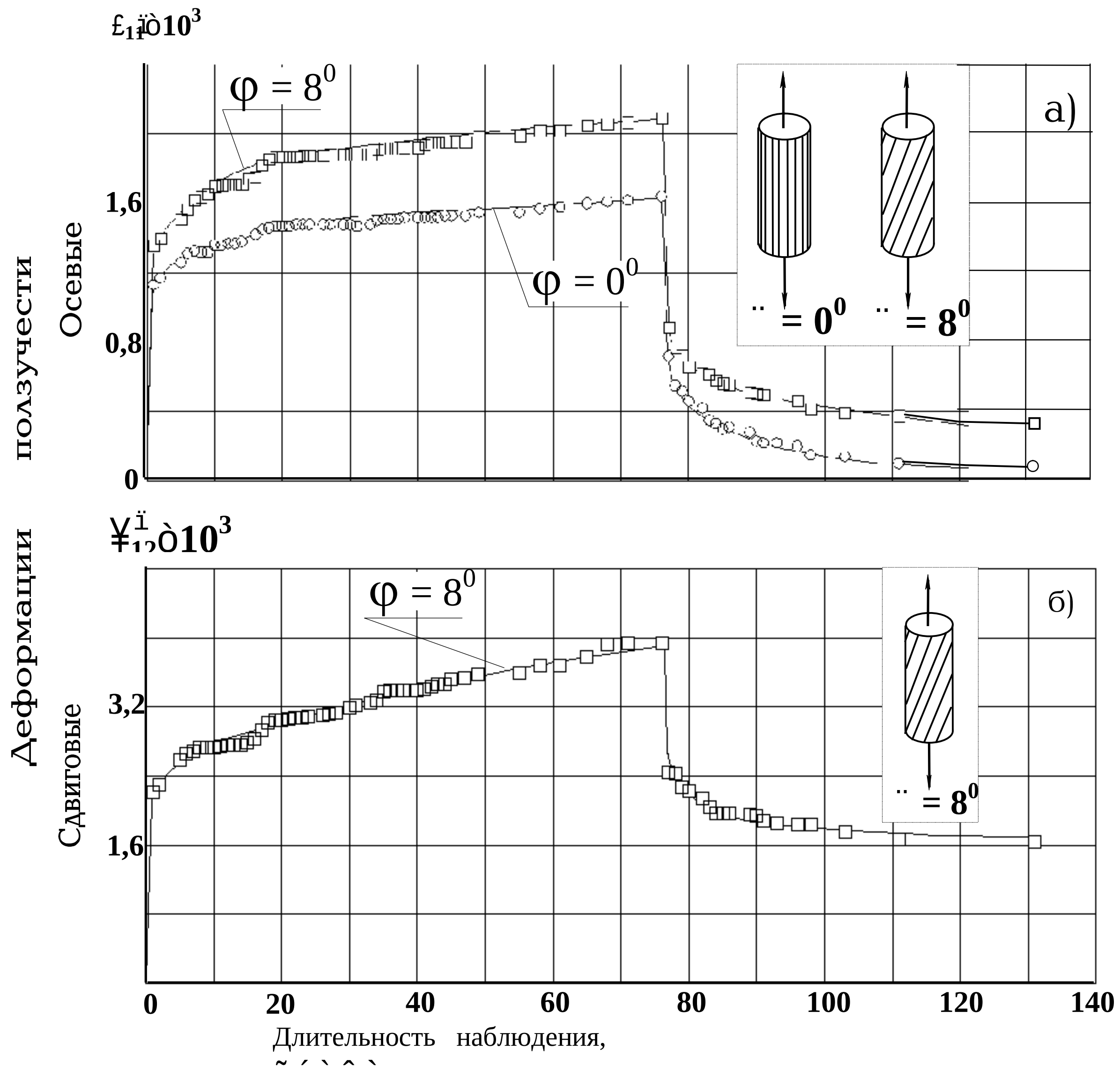


Рис. 2. Кривые осевых (а) и сдвиговых (б) деформаций ползучести стеклопластиковых труб с углом армирования φ^0**,** подвергнутых осевому растяжению.

Также было установлено, что значение отношения осевых и сдвиговых деформаций ползучести стеклопластиковых труб с $\varphi = 8^o$, зафиксированных в один и тот же момент времени наблюдения, практически не зависит от длительности нахождения труб под растягивающей нагрузкой и составляет 0,5-0,6.

Согласно рис.2 после разгружения труб с $\varphi = 0^o$ остаточных деформаций ползучести практически не наблюдается. В случае труб с $\varphi = 8^o$ обратимость продольных деформаций ползучести составляет более чем 80%, а сдвиговых деформаций ползучести – около 60%.

Очевидно, что и в случае осевого растяжения композитных трубчатых образцов, изготовленных путем перекрестной намотки, нарушение симметричности намотки относительно оси труб приведёт к возникновению сопутствующих основных осевых сдвиговых деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдман А. Я., Савельева Н.Ф. О напряженном состоянии и некоторых особенностях разрушения образцов стеклопластиков при растяжении под углом к направлению армирования. //Механика полимеров. 1967. № 6.
2. Розе А.В. Влияние межслойной жесткости и прочности при плоском нагружении материалов, армированных волокнами. //Механика полимеров. 1970. № 5.
3. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Жигун Н.Г., Гуняев Г.М. Конструкционные особенности материалов, армированных высокомодульными волокнами. //Механика полимеров. 1971. № 4.
4. Chiao C.C., Chiao T.T. Azamid Fibers and Composites. Preprint UCRL- 80400. California: Livermore, 1977. 120p.
5. Карапетян К.А., Саркисян Н.Е., Хачикян А.Г. Прочность и деформативность слоистых пластиков при сложном нагружении. //Изв АН и ГИУ Армении. ТН. L.I. 1998.№2.
6. Карапетян К.А. Влияние начальной разориентации армирования на ползучесть стеклопластиковых труб при одноосном растяжении. // Сб. материалов Годичной научной конференции Государственного Инженерного Универститета Армении, Т.1. Ереван, 2004.
7. Карапетян К.А. Влияние начальной разориентации армирования на механическое поведение слоистых стеклопластиков при статических нагружениях. //Докл. НАН Армении. 2005.Т.105. № 3.
8. Малинин Н.И. О ползучести пластмасс. Ползучесть и длительная прочность. Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, 1963.
9. Мартиросян М.М. О кратковременной ползучести стеклопластика СВАМ. //Механика полимеров. 1965. № 2.
10. Bott T.R., Borher A.J. Greep in glass fiber reinforced plastics. Industr. and Enging. Chem, 59, № 57, 1967.

<u>Сведения об авторах:</u>

Карапетян Корюн Ашотович,
Доктор технических наук, зав. лабораторией экспериментальных исследований
Института механики НАН РА,
Тел.: (374 10) 52 48 90
E-mail Koryan@mechins.sci.am, koryun.karapetyan@gmail.com

ВЛИЯНИЕ УСТАЛОСТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА СТОЙКОСТЬ МЕТАЛЛОРЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

Каширская Е.Н.

Предлагается обобщенный подход для описания усталостных разрушений в режущем инструменте на основе теории случайных точечных процессов.

1. Режущие инструменты работают при напряжениях, изменяющихся во времени, под действием которых в материале могут накапливаться необратимые механические изменения. Разрушение при переменных напряжениях возможно при значительно меньших уровнях напряжений, чем при статическом нагружении. Если уровень переменных напряжений превосходит определенный предел, то при достаточно большом количестве циклов в результате накопления необратимых механических изменений в наиболее напряженном месте образуются субмикроскопические усталостные трещины, являющиеся предвестниками катастрофического износа. Действующим на инструмент нагрузкам и характеристикам прочности свойственно значительное рассеяние.

2. Взаимодействие режущего инструмента и материала рассматривается как точечный контакт твердых микровключений включений в обрабатываемом материале с режущей кромкой инструмента. Активным фактором воздействия на режущий инструмент являются точечные микровключения в обрабатываемом материале, которые играют роль абразивов. До недавнего времени отсутствовали достоверные данные как о плотности таких включений в единице объема материала, так и о распределении их по размерам. Мы предлагает рассматривать распределение абразивных включение как распределение Пуассона в объеме, когда число включений пропорционально только объему и не зависит от геометрии этого объема. Распределение размеров абразивных включений по величине будем считать показательным или логнормальным с «тяжелыми хвостами». Такой подход позволяет рассчитывать число ударов абразивных частиц о режущую кромку инструмента в единицу времени. Сила этих ударов может быть различна и определяется размерами включений и скоростью обработки.

3. Мы рассматриваем два принципиально возможных механизма воздействия абразивных включений на режущую кромку инструмента. Первый механизм – без последействия, когда интегральная сила воздействия микровключений пропорциональна их общей массе и скорости резания. Второй механизм – с последействием, когда в режущем инструменте возникают и накапливаются дефекты (сколы, трещины), которые в дальнейшем под действием внешних сил могут расти и развиваться, ухудшая качество инструмента.

4. Рассмотрим первый механизм. Частота ударов пропорциональна частоте вращения. При увеличении частоты вращения увеличивается энергия удара и одновременно увеличивается число ударов, энергия которых выше критической, приводящей к разрушению режущей кромки. Это связано с тем, что при увеличении скорости в этот процесс включается все большее число вкраплений более мелкого размера. Их совокупное действие добавляется к воздействию более крупных включений, активность которых проявлялась на низких скоростях. Это связано с показательным распределением размеров вкраплений.

5. При втором механизме контактное взаимодействие режущего инструмента и микровключений обрабатываемого материала аналогично первому механизму, однако накопленное число дефектов, которое приводит к разрушению режущего инструмента, не является линейной функцией от числа включений в обрабатываемом материале. Отдельные такие воздействия конечного числа особенно крупных включений в обрабатываемом материале приводят к нарушению структуры инструмента, а именно: появлению большого числа микротрещин или локальному перегреву, меняющему структуру инструментального материала. Это приводит к тому, что такого сорта дефекты в дальнейшем в результате более мелких воздействий могут увеличиваться в своих размерах (а число мелких воздействий гораздо больше, чем крупных). Процесс накопления повреждений носит нелинейный характер, а именно динамика накопления повреждений в материале режущего инструмента идет гораздо интенсивнее (по степенной или показательной зависимости), чем в случае простого аддитивного накопления повреждений. Подобный подход рассматривался в технической физике при воздействии на конструкционные материалы частиц с высокой энергией, когда при взаимодействии таких частиц с исследуемым материалом возникает не один дефект, а целая цепочка более мелких дефектов, например, в виде стохастического дерева. Последующие столкновения частиц должны значительно сильнее воздействовать на уже нарушенную структуру режущего инструмента. В итоге мы получаем модель, в которой накопленное число дефектов зависит не только от числа текущих внешних воздействий, но и от числа уже существующих в инструменте накопленных дефектов. В этой модели мы считаем, что накопление дефектов в режущем инструменте зависит как от интенсивности внешних воздействий, так и от числа уже существующих в режущем инструменте дефектов, накопленных к текущему моменту времени. В результате воздействия описываемого механизма разрушение режущего инструмента идет более быстрыми темпами.

6. В основе описания процесса разрушении режущего инструмента по первому и второму механизму лежат случайные последовательности событий столкновений абразивных вкраплений обрабатываемого материала с режущей кромкой инструмента.
В зависимости от выбранной модели функция распределения длительности интервалов между последовательными событиями воздействия на режущий инструмент может быть различной. Классическое описание последовательности событий опирается на показательное распределение длительности интервала между двумя последовательными событиями, функция распределении которого представлена формулой (1):

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad (6.1)$$

где t – время,

λ – средняя интенсивность потока событий (число событий в единицу времени),

$1/\lambda$ – средняя длина интервала между двумя последовательными событиями.

Второй вариант функции распределения длительности интервалов между двумя последовательными событиями основан на неоднородном во времени процессе Пуассона:

$$F(t) = 1 - e^{(-\lambda t)^{\alpha}}, \qquad (6.2)$$

где α – показатель степени.

Это распределение используется в первой модели, а α характеризует уменьшение среднего интервала между событиями при увеличении скорости резания (появляется больше абразивных центров, которые воздействуют на режущий инструмент).

И, наконец, третий вариант:

$$F(t) = 1 - e^{\left(-\lambda i^{\beta} t\right)}, \qquad (6.3)$$

где показатель степени β принадлежит промежутку [0,1] и характеризует механизм накопления дефектов в режущем инструменте – числа *i*.

В основе этого распределения длительности интервалов между последовательными событиями лежит представление об уменьшении средней величины интервала по мере того, как увеличивается число дефектов в режущем инструменте.

7. Результирующее воздействие абразивных микровключений на режущую кромку инструмента рассматривается как суммарное действие случайных событий, происходящих через случайные интервалы времени, распределение длительности между которыми подчиняется указанным законам. Для этих целей мы вводим функцию накопления, которая равна числу накопленных случайных событий от момента времени t=0 до текущего момента t. Очевидно, что такое событие имеет свой относительный вес в процессе, так как абразивные микровключения имеют свое распределение.

8. Для перехода от закона распределения длительностей интервалов между последовательными событиями к закону распределения общего числа произошедших событий на длительном временном интервале от 0 до t, приводящем к разрушению инструмента, необходимо получить распределение длительности интервала от начала процесса в момент времени t=0 до появления i-ого события, при этом события нумеруются, начиная с первого.

Это распределение получается с помощью свертки распределений длительности интервалов всех последовательных событий с 1-го до i-ого, то есть свертки i-1 интервалов:

$$F(i,t) = F(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_i \le t) = F_1(\tau_1 \le t) \times F_2(\tau_2 \le t) \times \ldots \times F_i(\tau_i \le t), \qquad (8.1)$$

где τ_i – интервал времени между двумя последовательными событиями.

Полученная функция распределения соответствует вероятности того, что к моменту времени t произошло i событий, а $1-F(t)$ – вероятность того, что i-ое событие еще не произошло. Отсюда сразу следует, что функция накопления событий (функция восстановления) равна сумме вероятностей уже произошедших событий:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(i,t). \qquad (8.2)$$

9. В зависимости от функции распределения длительности интервала $F(t)$ между двумя последовательными событиями, которое мы предложили выше, функция $M(t)$ может себя вести как линейная функция, как степенная или экспоненциальная, что позволяет моделировать различные механизмы воздействия на режущий инструмент абразивными микровкраплениями в обрабатываемом материале. При более детальном рассмотрении этого процесса с помощью функции накопления события $F(t)$ имеется возможность учитывать размеры абразивных центров вместо рассматриваемых единичных точечных событий.

10. Переход к усталостным напряжениям в режущем инструменте производится установлением критического напряжения в режущем инструменте, определяемого числом столкновений режущей кромки с микрочастицами в обрабатываемом материале, зависящим от режима резания. При больших скоростях обработки материала число реальных соударений N, в которые входят соударения с малыми абразивными частицами, возрастает по экспоненциальному закону, что находит отражение в резком ухудшении свойств режущей кромки инструмента. Этот механизм формирования усталостной прочности в режущем инструменте приводит в явно выраженной убывающей функции $\pm = f(N)$, что соответствует уменьшению времени службы режущего инструмента (периода стойкости).

11. В настоящей работе основным механизмом усталостной прочности инструмента считаем только воздействие абразивных включений в обрабатываемом материале. Другие механизмы, а именно: окисление, дислокации, микротрещины и прочие концентраторы напряжений – в работе не рассматриваются в силу того, что их роль незначительна в реальных конструкционных материалах, требующих механической обработки. Теоретические исследования, представленные в работе, дают возможность установить зависимость времени безотказной работы инструмента от скорости резания. К сожалению, теоретические предпосылки говорят об уменьшении времени безотказной работы инструмента при увеличении скорости резания, причем, время службы инструмента (стойкость) резко уменьшается в связи с наступлением предела выносливости. Дальнейшая аналитическая разработка модели позволит установить функциональную зависимость стойкости режущего инструмента от режимов резания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Р.А. О разрушении в условиях усталости // Проблемы теории трещин и механика разрушения. Л.: ЛГУ, 1986. С. 3–7.
2. Арутюнян Р.А. Проблема усталости и вероятностные методы ее решения. // Вестник РФФИ. 2006. Т.46. № 2. С. 45-58.
3. Богданофф Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений. /Пер с англ. – М.: Мир, 1989. 343 с.
4. Иванов С.А. Стохастические фракталы в информатике. М.: Паруса, 2003. 13 с.
5. Каширская Е.Н., Холопов В.А. Управление инструментообеспечением в многономенклатурном мелкосерийном производстве на основе корректировки стойкости. // Вестник МГУПИ. 2006. № 2. С. 123-132.
6. Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий. /Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. 312 с.
7. Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. /Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 391 с.

Сведения об авторе:

Каширская Елизавета Натановна – профессор кафедры комплексной защиты объектов информатизации, Всероссийская государственная налоговая академия Министерства финансов РФ.

Тел.: +7 (925) 886 3436.

E-mail: liza.kashirskaya@gmail.com

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, УСИЛЕННОЙ РАЗНОРОДНЫМИ СТРИНГЕРАМИ РАЗЛИЧНЫХ ДЛИН ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСЛОЕК

Керопян А. В.

В работе рассматривается задача для упругой полуплоскости, которое вдоль своей границы усилена разнородными стрингерами в виде тонких упругих накладок, состоящих из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска с различными упругими характеристиками. Контактное взаимодействие между стрингерами и полуплоскостью во всех участках осуществляется через слой клея с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками. Задача определения контактных напряжений при помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье сведена к решению систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода на различных интервалах, которые в банаховом пространстве B можно решать методом последовательных приближений при всех допустимых значениях характерных параметров задачи. Выяснен характер и поведения контактных напряжений в конечном и полубесконченых участках, а также рассмотрены некоторые возможные частные случаи.

Рассматриваемая задача в случае однородных стрингеров рассмотрена в работе [1]. При отсутствии прослоек задача рассмотрена в работе [2].

§1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E или модуль сдвига G, коэффицент Пуассона ν) усилена на границе $y=0$ (в плоскости xoy) разнородными стрингерами малой толщины h и с модулями упругости E_1 при $|x|>b$, и E_2 при $|x|<a$. Контактное взаимодействие между стрингерами и деформируемым основанием во всех участках осуществляется через тонкий слой клея с характеристиками (E_k, ν_k, h_k). Задача заключается в определении контактных напряжений, когда на краях стрингеров, т. е. в точках $x=\pm a$, $x=\pm b$ приложены горизонтальные силы P, а в точках $x=\pm c$ –горизонтальные силы Q ($c>b>a$).

Для стрингеров принимается модель контакта по линии, а для слоя клея – условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингерами действуют только касательные контактные напряжения [1, 3–5].

Согласно вышепринятой модели, из условия равновесия элемента стрингеров получим дифференциальные уравнения равновесия стингеров, которые с помощью обобщенных функций запишем в виде уравнения [1,2] :

$$\frac{dU^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1 h}+\frac{\tau_0(x)}{E_2 h}-\frac{P[\delta(x-a)-\delta(x+a)]}{E_2 h}+ \\ +\frac{P[\delta(x-b)-\delta(x+b)]}{E_1 h}-\frac{Q[\delta(x-c)-\delta(x+c)]}{E_1 h}. \tag{1.1}$$

Здесь

$$U^{(1)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x+a)-\theta(x-a)+\theta(x-b)\right]du^{(1)}/dx, \tag{1.2}$$

$$\tau_1(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]\tau(x),\quad \tau_0(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\tau(x),\quad \tau(x)=\tau_0(x)+\tau_1(x),$$

где $u^{(1)}(x)$ –горизонтальные перемещения точек стрингеров, $\tau(x)$ –интенсивность контактных напряжений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная.

В дальнейшем, для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1–4].

Предполагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь условие [1, 3–5] :

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k\tau(x),\qquad x\in(-\infty,-b]\cup[-a,a]\cup[b,+\infty), \tag{1.3}$$

которое в обобщенных функциях представим так:

$$U^{(1)}(x)=U^{(2)}(x)+k\tau^*(x), \tag{1.4}$$

где $\tau^*(x)=\tau'(x)+\tau(a)\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]-\tau(b)\left[\delta(x-b)+\delta(x+b)\right]$, $\tau(a)$, $\tau(b)$ – значения $\tau(x)$ в точках $x=a$ и $x=b$ при учете $\tau(-x)=-\tau(x)$, $k=h_k/G_k$, $G_k=E_k/2(1+\nu_k)$, штрих означает дифференцирование по x, $u^{(2)}(x,0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

Для деформации граничных точек упругой полуплоскости имеем [1–4]:

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=U^{(2)}(x)+G_u(x)=\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(s)}{s-x}ds\,. \tag{1.5}$$

Здесь

$$U^{(2)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)+\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(2)}/dx\,, \tag{1.6}$$

$$G_u(x)=[\theta(x+b)-\theta(x+a)+\theta(x-a)-\theta(x-b)]g_u(x)\,,\ \ g_u(x)=d\,u^{(2)}/d\,x,\ x\in(-b,-a)\cup(a,b),$$

$$A=E/2(1-\nu^2)=2G\left(1-\chi^2\right),\ \chi^2=\left(1-2\nu\right)/2\left(1-\nu\right).$$

Теперь, применив к (1.1), (1.4) и (1.5) обобщенное преобразование Фурье, получим следующее функциональное уравнение на действительной оси :

$$\left(\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2\right)\overline{\tau}_1(\sigma)+\left(\lambda_2^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2\right)\overline{\tau}_0(\sigma)=\frac{i\sigma}{k}\overline{G}_u(\sigma)+\overline{f}_\beta(\sigma),-\infty<\sigma<\infty, \tag{1.7}$$

Здесь $\qquad \lambda_j^2=1/kE_jh\left(j=1,2\right),\ \ \beta=1/2kA,\ \ \overline{\tau}_i(\sigma)=F\left[\tau_i(x)\right]\ \ (i=0,1).$ (1.8)

$$\overline{f}_\beta(\sigma)=2i\lambda_2^2P\sin a\sigma-2i\lambda_1^2P\sin b\sigma+2i\lambda_1^2Q\sin c\sigma-2i\sigma\tau(a)\cos a\sigma+2i\sigma\tau(b)\cos b\sigma.$$

Уравнение (1.7) запишем в двух видах:

$$\left(\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2\right)\overline{\tau}(\sigma)+\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\overline{\tau}_0(\sigma)=\frac{i\sigma}{k}\overline{G}_u(\sigma)+\overline{f}_\beta(\sigma), \tag{1.9}$$

$$\left(\lambda_2^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2\right)\overline{\tau}(\sigma)+\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\overline{\tau}_1(\sigma)=\frac{i\sigma}{k}\overline{G}_u(\sigma)+\overline{f}_\beta(\sigma),\ -\infty<\sigma<\infty. \tag{1.10}$$

Таким образом, задача сведена к решению функциональных уравнений типа (1.9), (1.10). Для определенности рассмотрим уравнение (1.9).

§2. Сведение уравнения (1.9) к системе интегральных уравнений и её исследование. Запишем уравнение (1.9) в виде:

$$\overline{\tau}(\sigma)+\frac{\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\overline{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2}=\frac{i\sigma\overline{G}_u(\sigma)}{k\left(\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2\right)}+\overline{g}_{\beta_1}(\sigma),\ -\infty<\sigma<\infty, \tag{2.1}$$

которое после обратного преобразования Фурье представим так:

$$\tau(x)+\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a}K_{\beta_1}(x-s)\tau_0(s)\,ds+2\beta\int_{-\infty}^{\infty}K'_{\beta_1}(x-s)G_u^*(s)\,ds=g_{\beta_1}(x),\ -\infty<x<\infty \tag{2.2}$$

Здесь

$$K_{\beta_1}(x)=F^{-1}\left[\overline{K}_{\beta_1}(\sigma)\right],\ \ \tau(x)=F^{-1}\left[\overline{\tau}(\sigma)\right],\ \ G_u^*(x)=F^{-1}\left[\overline{G}_u^*(\sigma)\right] \tag{2.3}$$

$$\overline{K}_{\beta_1}(\sigma)=\frac{1}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2},\quad K'_{\beta_1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i\sigma e^{-i\sigma x}d\sigma}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2},\qquad G_u^*(x)=AG_u(x)$$

$$g_{\beta_1}(x)=F^{-1}\left[\overline{g}_{\beta_1}(\sigma)\right]=P\lambda_2^2\left[K_{\beta_1}(x-a)-K_{\beta_1}(x+a)\right]+$$

$$+P\lambda_1^2\left[K_{\beta_1}(x-b)-K_{\beta_1}(x+b)\right]+Q\lambda_1^2\left[K_{\beta_1}(x-c)-K_{\beta_1}(x+c)\right]+$$

$$+\tau(a)\left[K'_{\beta_1}(x-a)+K'_{\beta_1}(x+a)\right]-\tau(b)\left[K'_{\beta_1}(x-b)+K'_{\beta_1}(x+b)\right].$$

При рассмотрении уравнения (1.10), вместо $K_{\beta_1}(x)$ и $g_{\beta_1}(x)$ следует принять обозначения $K_{\beta_2}(x)=F^{-1}\left[\overline{K}_{\beta_2}(\sigma)\right]$ и $g_{\beta_2}(x)=F^{-1}\left[\overline{g}_{\beta_2}(\sigma)\right]$, что соответствует с изменением параметра $\lambda_j^2\ \left(j=1,2\right)$ при $j=2$.

Далее, из (2.2) будем иметь:

$$\tau(x)+\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a}K_{\beta_1}(x-s)\tau(s)\,d\,s+2\beta\int_{a}^{b}[K'_{\beta_1}(x-s)+K'_{\beta_1}(x+s)]g_u^*(s)\,d\,s=g_{\beta_1}(x),\ \ x\in(-a,a),$$

$$2\beta\int_a^b [K'_{\beta_1}(x-s)+K'_{\beta_1}(x+s)]g_u^*(s)\,d\,s+\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a} K_{\beta_1}(x-s)\tau(s)\,d\,s=g_{\beta_1}(x)\ ,\quad x\in(a,b), \qquad (2.4)$$

при условиях

$$\int_{-a}^{a}\tau(s)\,ds=0,\qquad \int_b^{\infty}\tau(s)\,ds=Q-P\ , \qquad (2.5)$$

причем теперь (2.2) запишем так:

$$\tau(x)=\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\int_{-a}^{a}K_{\beta_1}(x-s)\tau(s)\,ds-2\beta\int_a^b[K'_{\beta_1}(x-s)+K'_{\beta_1}(x+s)]g_u^*(s)\,ds+g_{\beta_1}(x),\ -\infty<x<\infty \qquad (2.6)$$

При получении (2.4), (2.6) имелось в виду, что $\tau(x)=\tau_0(x)$ при $x\in(-a,a)$, $\tau(x)=0$ при $x\in(-b,-a)\cup(a,b)$, $G_u^*(x)=0$ при $x\notin(-b,-a)\cup(a,b)$, а также $\tau(-x)=-\tau(x)$, $g_u^*(-x)=g_u^*(x)$.

Теперь отметим некоторые возможные случаи, которые непосредственно можно получить из (2.4) и (2.6) подстановками: а) при $\lambda_2^2=\lambda_1^2=\lambda^2$ (случай однородных стрингеров, т.е. $E_2=E_1$) [1], б) при $k=0$ [2], в) при $a\to 0$ (случай с двумя полубесконечными стрингерами) [4], г) при $b\to a$ с учетом неизвестной $P=X$, случай кусочно-однородного бесконечного стрингера, д) при $k=0$, $a\to b$ и $\lambda_1^2=\lambda_2^2=\lambda_1=\mathrm{A}/E_1h$ (будем иметь решение известной задачи Мелана), и т.д., которые будут задавать основные разрешающие уравнения соответствующих задач при приложенных здесь силах.

Теперь приступим к решению системы интегральных уравнений (2.4). Для этого заметим, что имеют место представления [1,3, 4]:

$$K_{\beta_1}(x)=\frac{\gamma_1}{\pi}\ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)+\gamma_1R(x),\qquad K'_{\beta_1}(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x+\gamma_1R_\beta(x), \qquad (2.7)$$

$$K''_{\beta_1}(x)=-\delta(x)+\gamma_1R_\beta{}'(x),$$

где

$$b_1=\frac{\lambda_1^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}},\quad b_2=\frac{\lambda_1^2}{\beta-\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}},\quad \gamma_1=\frac{1}{b_2-b_1}=\frac{1}{2\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}}, \qquad (2.8)$$

$$R(x)=R_{b_1}(x)-R_{b_2}(x),\qquad R_\beta(x)=R_{\beta_1}(x)-R_{\beta_2}(x),$$

$R_{b_j}(x)$ и $R_{\beta_j}(x)$, $j=1,2$, определяются как в [1,3], $\delta(x)$– функция Дирака , Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x.

Следует отметить, что в (2.7) функции $R(x)$ и $R_\beta(x)$, характеризующие регулярные части ядер $K_{\beta_1}(x)$ и $K'_{\beta_1}(x)$, обладают тем свойством, что они имеют суммируемые квадратом производные на отрезках $[-a,a]$ и $[a,b]$.

Из (2.7) следует, что $K_{\beta_1}(x)$ – непрерывная функция, а ее значение в точке $x=0$ конечно, причем $K_{\beta_1}(0)=(\gamma_1/\pi)\ln(b_2/b_1)$. Отметим, что $K_{\beta_1}(x)\sim x^{-2}$ при $|x|\to\infty$.

Теперь используя соотношения (2.7), систему (2.4) после дифференцирования второго из них запишем в виде:

$$\tau(x)+\gamma_1\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a}R(x-s)\tau(s)\,ds+2\beta\gamma_1\int_a^b\left[R_\beta(x-s)+R_\beta(x+s)\right]g_u^*(s)\,ds=f_1(x),\quad x\in(-a,a) \qquad (2.9)$$

$$g_u^*(x)-\frac{\gamma_1}{2\beta}\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_{-a}^{a}R_\beta(x-s)\tau(s)\,ds-\gamma_1\int_a^b\left[R'_\beta(x-s)+R'_\beta(x+s)\right]g_u^*(s)\,ds=f_2(x),\quad x\in(a,b)$$

где имеют место представления [1,3]:

$$R'(x)=\frac{(b_1-b_2)}{2}\operatorname{sgn}x+\overline{R}_2(x),\quad R'_\beta(x)=\frac{(b_2^2-b_1^2)}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}+\widetilde{R}(x),\tag{2.10}$$

$$K''_{\beta_1}(x)=-\delta(x)+\frac{2\beta}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}+\gamma_1\widetilde{R}(x).$$

Здесь $\widetilde{R}(x)$– дифференцируемая функция и вместе с $\overline{R}_2(x)$ определяются как в [3], а $f_1(x)=g_{\beta_1}(x)$, $f_2(x)=-(1/2\beta)g'_{\beta_1}(x)$.

Таким образом, задача сводится к решению системы (2.9). Далее, согласно (2.6) и первого из (2.9), легко заметить, что $\tau(x)$ – непрерывная функция, а в точках $x=\pm a$, $x=\pm b$ и $x=\pm c$ принимает конечные значения. После решения системы (2.9), значения $\tau(x)$ при $|x|>b$ будут определяться из (2.6) при требовании $|x|>b$.

Теперь, систему (2.9) представим в виде :

$$\varphi=K\varphi+f\tag{2.11}$$

где

$$\varphi=\begin{pmatrix}\tau\\ g_u^*\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}\gamma_1(\lambda_1^2-\lambda_2^2)k_{11} & 2\beta\gamma_1k_{12}\\ \frac{\gamma_1}{2\beta}(\lambda_2^2-\lambda_1^2)k_{21} & \gamma_1k_{22}\end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered}k_{11}\tau=\int_{-a}^{a}R(x-s)\tau(s)\,ds,\quad k_{12}g_u^*=-\int_{a}^{b}\left[R_\beta(x-s)+R_\beta(x+s)\right]g_u^*(s)\,ds,\\ k_{21}\tau=\int_{-a}^{a}R_\beta(x-s)\tau(s)\,ds,\quad k_{22}g_u^*=\int_{a}^{b}\left[R'_\beta(x-s)+R'_\beta(x+s)\right]g_u^*(s)\,ds.\end{gathered}\tag{2.12}$$

Далее, рассмотрим уравнение (2.11) в банаховом пространстве B [6] вектор-функции $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, где $x_1\in L_1(-a,a)$, $x_2\in L_1(a,b)$, и с нормой $\|X\|=\max\left\{\|x_1\|_{L_1(-a,a)},\|x_2\|_{L_1(a,b)}\right\}$.

Очевидно, что оператор K действует в пространстве B и является фредгольмовым .Тогда операторное уравнение (2.11) в указанном пространстве можно решать методом последовательных приближений, если $\|K\|<1$, а решение запишется в виде

$$\varphi=(I-K)^{-1}f=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nK^nf.$$

Далее исследования показывают, что норму оператора K :

$$\|K\|=\max\left\{\left|\gamma_1(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\right|\|k_{11}\|_{L_1(-a,a)}+2|\beta\gamma_1|\,\|k_{12}\|_{L_1(-a,a)},\ \left|\frac{\gamma_1}{2\beta}(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\right|\|k_{21}\|_{L_1(a,b)}+|\gamma_1|\,\|k_{22}\|_{L_1(a,b)}\right\}$$

при $\left|1-\lambda_2^2/\lambda_1^2\right|<1-\left[\pi\sqrt{1-\lambda_1^2/\beta^2}\right]^{-1}\ln\left(1+\sqrt{1-\lambda_1^2/\beta^2}\right)\Big/\left(1-\sqrt{1-\lambda_1^2/\beta^2}\right)$.

можно сделать меньше единицы. Это означает, что при $\|K\|<1$ уравнение (2.11) и следовательно, систему (2.9) в пространстве B можно решать методом последовательных приближений .

Поступая аналогичным образом с уравнением (1.10), для ее разрешимости получим условие разрешимости в виде:

$$\left|1-\lambda_1^2/\lambda_2^2\right|<1-\left[\pi\sqrt{1-\lambda_2^2/\beta^2}\right]^{-1}\ln\left(1+\sqrt{1-\lambda_2^2/\beta^2}\right)\Big/\left(1-\sqrt{1-\lambda_2^2/\beta^2}\right).$$

Из этих неравенств следует, что задачу в пространстве B можно решать методом последовательных приближений при всех допустимых значениях характерных параметров задачи $0<\lambda_j^2<\beta^2<\infty$ $(j=1,2)$.

При получении этих неравенств имелось в виду, что

$$\int_0^\infty K_{\beta_j}(x)\,dx = \frac{1}{2\lambda_j^2}, \quad \int_0^\infty K'_{\beta_j}(x)\,dx = \frac{1}{2\beta\pi\sqrt{1-\lambda_j^2/\beta^2}}\ln\left(1+\frac{b_2-b_1}{b_1}\right), \quad 0<b_2\le 2b_1,$$

$$\int_0^\infty K''_{\beta_j}(x)\,dx = \frac{1}{2}, \qquad K'_{\beta_j}(x)<0, \quad 0<x<\infty, \quad j=1,2.$$

Далее, из (2.1) в силу разложения $\bar{K}_\beta(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$, получим, что $\tau(x)=F^{-1}\left[\bar{\tau}(\sigma)\right]$ при $|x|\to\infty$ имеет степенной порядок $O\left(x^{-3}\right)$.

Значение $\tau(x)$ в точке $x=a$ можно получить из (2.6), подставляя $x=a$, а в точке $x=b$ – из второго условия (2.5). Отметим, что такое поведение $\tau(x)$ обусловлено наличием прослоек материала склеивания в контактных участках. При отсутствии прослоек в концевых точках $x=a$ и $x=b$ стрингеров $\tau(x)$ имеет корневую особенность [2] .

ЛИТЕРАТУРА

1. Керопян А.В. Контактные задачи о передаче нагрузки от стрингеров различных длин к упругой полуплоскости или к бесконечной пластине при наличии сдвигов. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред.// Тр. VI Междунар. конф. Ереван: Изд. НАН РА, 2008. С. 246-252.
2. Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А. Об одной задаче для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе упругими накладками.// Ученые записки ЕГУ. 1984. №1. С. 46-51.
3. Керопян А.В. Об одном классе контактных задач для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склееным упругими разнародными стрингерами. // Ученые записки ЕГУ. 2008. №3. С. 49-58.
4. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками. //Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 180-184.
5. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. – Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol. XXIII, 1970, p. 521.
6. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

<u>Сведения об авторе</u>:

Керопян Агаси Вачаганович,
Кандидат физ-мат. наук, доцент кафедры механики ЕГУ.
Адрес: Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел. 551148(раб.), 461941 (дом),
E-mail: agas50@ysu.am

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПРИ УЧЁТЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА И ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Методом коллокаций решается задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига. Применяется уточнённая теория анизотропных пластин С.А.Амбарцумяна [1]. Рассматриваются два варианта краевых условий. Приводятся безразмерные критические значения нагрузок. Анализируя полученные результаты, делаются количественные и качественные заключения.

В классической постановке (без учета влияния поперечного сдвига) решение рассматриваемых задач можно найти в [2].

1. Рассмотрим пластинку-полосу постоянной толщины h и ширины l. Начало координат поместим на одной кромке. Ось $0x$ направим по ширине пластинки-полосы, а ось $0z$ – перпендикулярно к ней. Материал ортотропен и его главные направления параллельны координатным осям.

Пусть вдоль одного края пластинки-полосы приложены равномерно распределенные силы P, а вдоль оси $0x$ действует собственный вес постоянной интенсивности q. Применяемый метод и схема решения позволяют расмотреть еще и случай объемной силы другого характера и переменной интенсивности.

Для простоты положим:

$$P = kql \ , \tag{1.1}$$

где параметр «k» может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Представление (1.1) удобно тем, что позволяет в качестве искомой величины считать критические значения одного из параметров k или q, между которыми существует определенная зависимость. Очевидно, при $k=0$ внешние силы P отсутствуют и потеря устойчивости происходит лишь под действием собственного веса. При $k \neq 0$ пластинка-полоса теряет устойчивость под совместным действием внешних сил и собственного веса. При $k \to \infty$ критическое значение $q_{\text{кр}} \to 0$, а их произведение стремится к конечной величине $P_{\text{кр}}$. В этом случае влияние собственного веса пренебрегается. Очевидно, возможны и случаи с отрицательными значениями k, что может иметь место при очень больших значениях l или q.

В рамках уточненной теории [1] имеем:

$$\begin{gathered}
T_x = -q\left(kl + x\right), \ N_x = \frac{h^3}{12}\varphi \ , \ \tilde{Z} = -\left(ql + x\right)\frac{d^2 w}{dx^2} \ , \\
M_x = -\frac{B_{11}h^3}{12}\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{h^5}{120}\chi\frac{d\varphi}{dx}, \ \chi = \frac{B_{11}}{B_{55}} \ , \\
u_x = -z\frac{dw}{dx} + \frac{zh^2}{24B_{55}}\left(3 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)\varphi
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь T_x – продольное усилие начального состояния, N_x и M_x – перерезывающая сила и изгибающий момент, которые возникают после потери устойчивости пластинки-полосы. $\tilde{Z}$ – нормальная составляющая фиктивной нагрузки, φ – функция, характеризующая распределение касательных напряжений τ_{xz}, u_x – перемещение по оси $0x$, вызванное вследствие потери устойчивости, B_{ij} – механические параметры материала, w – прогиб пластинки-полосы.

После выпучивания состояние пластинки-полосы описывается уравнениями [1]:

$$\frac{dN_x}{dx} = -\tilde{Z} \ , \ \frac{dM_x}{dx} = N_x \, . \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) уравнения (1.3) приводятся к системе относительно w и φ:

$$\frac{d\varphi}{dx} - \frac{12q}{h^3}\left(kl + x\right)\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \ , \ \varphi - \frac{\chi h^2}{10}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B_{11}\frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \tag{1.4}$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$u_x = h\bar{u}_x\,,\ \ w = h\bar{w},\ x = l\bar{x}\,,\ \frac{h}{l} = S\,,\ \frac{\chi S^2}{10} = \alpha\,,\ q = \frac{B_{11}\bar{q}S^3}{12}\,,$$
$$T_x = B_{11}h\bar{T}_x\,,\ N_x = B_{11}h\bar{N}_x\,,\ M_x = B_{11}h^2\bar{M}_x\,,\ P = \frac{B_{11}\bar{P}S^3 l}{12}\,,\ \left(\bar{P} = k\bar{q}\right). \tag{1.5}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (1.4) и имея в виду первое уравнение этой системы, приходим к следующему разрешающему дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно безразмерного прогиба $\bar{w}$:

$$\left[1-\alpha\bar{q}\left(k+\bar{x}\right)\right]\frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4} - 2\alpha\bar{q}\,\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + \bar{q}\left(k+\bar{x}\right)\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0\,. \tag{1.6}$$

К этому уравнению следует присоединить соответствующие краевые условия.

2. Рассмотрим случай, когда край пластинки-полосы $\bar{x} = 0$ зещемлен, а край $\bar{x} = 1$ шарнирно оперт.

Имея в виду первое уравнение системы (1.4), с учетом обозначений (1.5) для безразмерного изгибающего момента получим выражение

$$\bar{M}_x = -\frac{S^2}{12}\left[1-\alpha\bar{q}\left(k+\bar{x}\right)\right]\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\ . \tag{2.1}$$

Следовательно, условия шарнирного опирания края $\bar{x} = 1$ будут:

$$\bar{w} = 0\ ,\ \ \frac{d^2 w}{d\bar{x}^2} = 0\ ,\ \ \left(M_x\big|_{x=l} = 0\right). \tag{2.2}$$

При потере устойчивости для безразмерного продольного перемещения с учетом (1.5) имеем:

$$\bar{u}_x = -\frac{z}{l}\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{zh}{24B_{55}}\left(3-4\frac{z^2}{h^2}\right)\varphi\,. \tag{2.3}$$

Интегрировав первое уравнение системы (1.4), получим

$$\varphi = C + \frac{B_{11}h}{l^3}\bar{q}\left[\left(k+\bar{x}\right)\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{w}\right]. \tag{2.4}$$

Здесь C – постоянная интегрирования. Ее значение следует определить из условий начального состояния пластинки-полосы, когда она еще не теряла устойчивость. Тогда

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \equiv \bar{w} \equiv 0\,. \tag{2.5}$$

Поскольку в плоском состоянии перерезывающая сила отсутствует, то

$$N_x^0 = \frac{Ch^3}{12} = 0 \Rightarrow C = 0\,. \tag{2.6}$$

Имея в виду это обстоятельство, из (2.3) получим

$$\bar{u}_x = -\frac{z}{l}\left\{\left[1-\frac{5a\bar{q}}{12}\left(3-4\frac{z^2}{h^2}\right)\left(k+\bar{x}\right)\right]\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{5a\bar{q}}{12}\left(3-4\frac{z^2}{h^2}\right)\bar{w}\right\}. \tag{2.7}$$

В сечении защемления $\bar{w} = 0$, в силу чего условия защемления будут:

$$\text{при}\ \ \bar{x} = 0\quad \bar{w} = 0\ ,\ \ \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0\,. \tag{2.8}$$

Таким образом, по теории [1], в отличие от обычной задачи изгиба, в задаче устойчивости пластинки-полосы удается условия защемления удовлетворять во всех точках сечения (для всех z).

Безразмерный прогиб удобно представить в виде

$$\bar{w} = \sum_{i=2}^{n} a_i \bar{x}^i\ , \tag{2.9}$$

при котором условия защемления края $\bar{x}=0$ (2.5) удовлетворяются автоматически. Здесь a_i – неизвестные коэффициенты. Необходимо составить систему $n-1$ однородных алгебраических уравнений и критическую интенсивность $\bar{q}_{\text{кр}}$ определить как наименьший корень условия существования нетривиальных решений этой системы. Два уравнения получатся из условий шарнирного опирания края $\bar{x}=1$ (2.2), а остальные – из разрешающего уравнения (1.6), записанного во внутренних точках интервала 0–1. Для этого необходимо пластинку-полосу разделить на $n-2$ части.

Удобно вычисления проводить для конкретных значений χ и k. Очевидно, для разных чисел n получатся различные значения $\bar{q}_{\text{кр}}$. Вычисления следует прекратить при наступлении практической сходимости по n.

3. Пусть край пластинки-полосы $\bar{x}=0$ защемлен, а край $\bar{x}=1$ свободен. Подставляя выражение (2.4) во второе уравнение системы (1.4), с учетом (2.6) и обозначений (1.5), приходим к разрешающему уравнению третьего порядка относительно безразмерного прогиба $\bar{w}$:

$$\left[1-\alpha\bar{q}\left(k+\bar{x}\right)\right]\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3}-\alpha\bar{q}\,\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}+\bar{q}\left[\left(k+\bar{x}\right)\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}-w\right]=0\,. \tag{3.1}$$

Переход от уравнения (1.6) к уравнению (3.1) обусловлен удобством реализации решения задачи. Удобно безразмерный прогиб пластинки-полосы также представить в виде (2.9), который удовлетворяет условиям защемленного края $\bar{x}=0$ (2.8). Вычисления следует проводить подобно случаю, рассмотренному в предыдущем пункте. При этом одно уравнение разрешающей системы однородных алгебраических уравнений получится из условия свободного края

$$\left.\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\right|_{\bar{x}=1}=0 \qquad \left(M_x\big|_{x=l}=0\right). \tag{3.2}$$

Остальные же $n-2$ уравнения получатся из уравнения (3.1), записанного в промежуточных точках интервала 0–1.

Аналогичным способом рассмотренные задачи можно решать и в случае переменной интенсивности собственного веса (или объемной силы другого характера).

Относительная поправка вычислена по формуле:

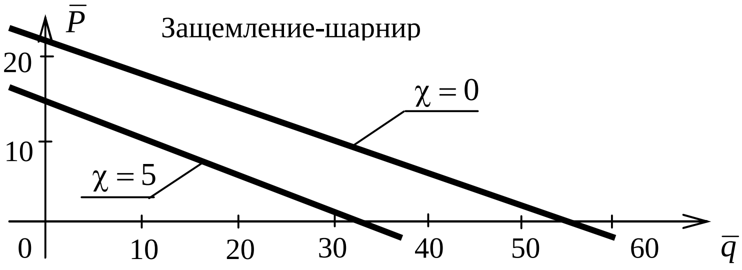
$$\Delta=\frac{\bar{q}_{\text{кл}}-\bar{q}}{q_{\text{кл}}}100\%\,. \tag{3.3}$$

На рис. 1 и 2 приведены графики зависимости $\bar{P}\sim\bar{q}$ при двух значениях параметра χ.

Известно [4], что критическое значение сжимающей сосредоточенной силы стержня при пренебрежении собственным весом и влиянием поперечного сдвига можно определить единой формулой, в которой вместо истинной длины l фигурирует приведённая длина $l_0=\mu l$. Коэффициент приведения длины μ зависит от краевых условий стержня. Пользуясь этим понятием, в случае $k=100$, $\chi=0$ имеем:

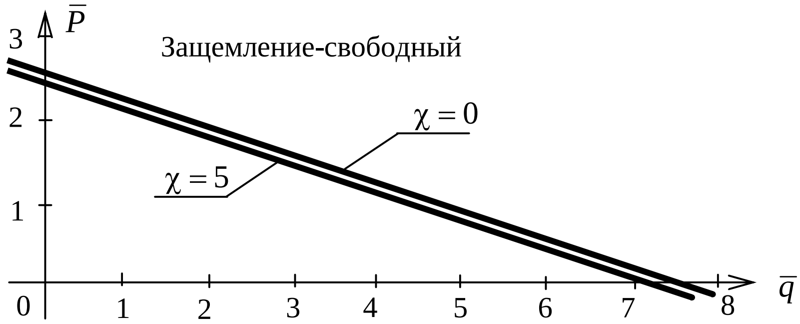
$$\frac{\bar{P}_{\text{з-ш}}}{\bar{P}_{\text{з-св.}}}=\frac{\bar{q}_{\text{з-ш}}}{\bar{q}_{\text{з-св.}}}=8{,}197\,. \tag{3.4}$$

Здесь индекс «з-ш» означает «защемление-шарнирное опирание», а индекс «з-св.»- защемление-свободный. Пользуясь данными вычислений, представлены значения отношения $\bar{q}_{\text{з-ш}}/\bar{q}_{\text{з-св}}$ для некоторых k и χ.



$$\bar{P} = 20{,}18 - 0{,}35\bar{q},\ (\chi = 0);\ \ \bar{P} = 14{,}38 - 0{,}46\bar{q},\ (\chi = 5)$$

Рис.1



$$\bar{P} = 2{,}46 - 0{,}31\bar{q},\ (\chi = 0);\ \bar{P} = 2{,}34 - 0{,}32\bar{q},\ (\chi = 5)$$

Рис.2

В заключение отметим, что полученные результаты при $\chi = 0$, т.е. в классической постановке, когда влияние поперечного сдвига не учитывается, совпадают с соответствующими результатами [2], [4].

Из рис. 1, 2 приходим к следующим заключениям:

1.Процесс вычисления критических значений интенсивности собственного веса $\bar{q}$ в случае, когда верхний край пластинки-полосы свободен, достигается быстрее (при сравнительно меньшем значении n), чем в случае шарнирного опирания этого края. Это объясняется тем, что из четырех краевых условий в первом случае автоматически удовлетворяется три, а во втором случае – только два условия.

2. С возрастанием доли сосредоточенной силы (с ростом значения параметра k) сходимость процесса вычислений в рассмотренных двух случаях улучшается.

3. Как и следовало ожидать, с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала (с возрастанием параметра χ) критические значения $\bar{q}$ в обоих случаях краевых условий и любого отношения внешней силы P и собственного веса ql (значения параметра k) уменьшаются.

4. При одинаковых значениях параметров χ и k как критические значения $\bar{q}$, так и относительная поправка Δ (3.3) в случае «защемление-свободный» намного меньше, чем в случае «защемление-шарнир».

5. С возрастанием доли собственного веса (с уменьшением параметра k) влияние поперечного сдвига для двух случаев краевых условий увеличивается. Например, значения относительной поправки Δ при $k = 0$ для всех рассмотренных значений χ примерно в полтора раза больше, чем при $k = 100$.

6. Зависимость между критическими значениями сосредоточенной силы $\bar{P}$ и интенсивности собственного веса $\bar{q}$ является линейной (рис.1, 2).

7. Участки графиков рис. 3 и 4 $\bar{q} < 0$ и $\bar{P} < 0$ имеют определенный физический смысл. При потере устойчивости случаю очень больших сжимающих сил $\bar{P}$ соответствуют растягивающие объемные силы $\bar{q}$ и наоборот.

8. Известно [2], что в задачах устойчивости влияние собственного веса можно эквивалентным образом заменить действием сосредоточенной силы определенной величины, приложенной к верхнему концу колонны. В рамках классической теории пластин (χ =0), когда верхний конец пластинки-полосы свободен от связей, величина эквивалентной сосредоточенной силы составляет 0,31 часть собственного веса. При учете влияния поперечного сдвига, как видно из рис. 4, это соотношение практически не меняется. Например, когда χ =5, оно становится равным 0,32.

В случае же шарнирного опирания верхнего края пластинки-полосы в рамках классической теории пластин (χ =0) эквивалентная сосредоточенная сила составляет уже 0,35 часть собственного веса и при учете поперечного сдвига она заметно увеличивается. Например, когда χ =5, она становится равной 0,46 (рис. 1).

9. Полученные данные показывают, что способ приведения длины применим только в случае пренебрежения собственным весом и влиянием поперечного сдвига. С уменьшением доли сосредоточенной силы и относительного модуля поперечного сдвига материала, погрешность, вносимая применением способа приведенной длины, существенно увеличивается. Например, при $k = 0$, $\chi = 5$ для отношения (3.4) вместо 8,197 получается значение 4,342, т.е. в 1,89 раза меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматлит, 1963. 879 с.
3. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates// Trans ASME-1945-67. P. A69-A77.
4. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов. М.: ИНФРА-М, 2003. 478 с.

Сведения об авторах:

Киракосян Размик Макарович– доктор техн.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б} , тел.: (+37410) 568188;
E-mail: Kiraz@freenet.am

Степанян Сейран Павлович – кандидат физ.-мат.наук, доцент Кафедры числ.анализа и мат.моделирования факультета информ. и прикл. математики Ереванского госуниверситета.
Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.:(+37410) 55-90-96;
E-mail: SEYRANSTEP@yahoo.com.

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН СФЕРИЧЕСКИМИ ОБОЛОЧКАМИ

Ковалева Е.Д.

Изучаются вопросы применимости асимптотических методов в задачах рассеяния стационарных акустических волн упругими сферическими оболочками в зависимости от относительной толщины. Используется процедура построения приближенного решения, основанная на сращивании разложений для трех различных асимптотических моделей взаимодействия упругой сферы с акустической средой. В окрестности нулевой частоты применяется уточненная теория оболочек Кирхгофа–Лява, которая является длинноволновым низкочастотным приближением уравнений теории упругости. В окрестности толщинных резонансов используется длинноволновые высокочастотные приближения уравнений теории упругости. Вне окрестности нулевой частоты и окрестности частот толщинных резонансов колебания оболочки являются коротковолновыми, и используется модель типа плоского слоя. При достаточно малых значениях относительной толщины показано, что модель типа плоского слоя имеет области согласования, как с уточненной теорией оболочек Кирхгофа–Лява, так и длинноволновыми высокочастотными приближениями. В зависимости от относительной толщины оболочки определены границы применимости данных асимптотических моделей. Сравнение соответствующих данных асимптотических решений с точным решением показало для оболочек средней относительной толщины, что предложенный подход применим в частотной области значительно меньше первой частоты толщинного резонанса.

1. Пусть плоская акустическая волна $p_i = p_0 \exp\left[-i(k\xi + \omega t)\right]$ падает на сферическую оболочку и рассеивается ей. Введем следующие параметры, характеризующие процесс рассеяния: $\kappa = \rho/\rho_1$, $\beta_i = c_i / c \quad (i = 1,2)$, $\gamma = c_2/c_1$, $k = \omega / c$. Здесь c_1, c_2 – скорости волн расширения и сдвига в оболочке, соответственно, ρ_1 – плотность материала оболочки, c – скорость звука в жидкости, ρ – плотность жидкости, ω – круговая частота, p_i **–** давление в падающей волне. Пусть (r,θ) – сферические координаты (решение задачи не зависит от угловой координаты вдоль параллели), r – сферический радиус, угол θ отсчитывается от положительного направления оси ξ (навстречу распространению волны), a и b – внешний и внутренний радиусы оболочки, соответственно, $R = 0,5(a+b)$ – радиус срединной поверхности оболочки, $h = 0,5(a-b)$ – полутолщина оболочки, $\eta = h/R$ – малый параметр, $x = ka$ – волновой радиус.

Давление в падающей волне p_i и рассеянное давление p_s должны удовлетворять уравнению Гельмгольца $\Delta p + k^2 p = 0$, где Δ – оператор Лапласа в сферической системе координат. Представим давление в падающей волне p_i в виде [6] $p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n j_n(kr) P_n(\cos\theta)$. Здесь имеем $E_n = 2n+1$, j_n – сферическая функция Бесселя, P_n – полином Лежандра, $h_n^{(1)}$ – сферическая функция Ханкеля первого рода. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен. Рассеянное давление p_s в случае нормального падения будем искать в виде [4,7]:

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) . \tag{1}$$

В этом случае рассеянное давление p_s автоматически удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию излучения на бесконечности. Коэффициенты B_n определяются из контактной задачи для уравнений, описывающих движение оболочки. Если для описания движения оболочки применяются трехмерные уравнения теории упругости, то имеем

$$u_r \big|_{r=a} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(p_i + p_s\right)\Bigg|_{r=a}, \quad \sigma_r \big|_{r=a} = -\left(p_i + p_s\right)\big|_{r=a}, \quad \sigma_{r\theta}\big|_{r=a} = \sigma_r \big|_{r=b} = \sigma_{r\theta}\big|_{r=b} = 0, \tag{2}$$

где σ_r, $\sigma_{r\theta}$ – напряжения, u_r – радиальное перемещение точек оболочки.

2. Уточненную теорию Кирхгофа–Лява [1] можно использовать для аппроксимации решения в окрестности нулевой частоты. Уравнения уточненной асимптотической модели в перемещениях и условие непротекания можно записать в виде [4,7]:

$$\frac{\partial\Phi(u)}{\partial\theta}+(1-\nu)\,u+(1+\nu)\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{1}{3}\eta^2\left[\frac{\partial\Phi(\gamma_1)}{\partial\theta}+(1-\nu)\gamma_1\right]+\frac{1-\nu}{2}R^2\frac{\omega_{\rm tg}^2}{c_2^2}u+\frac{\nu(1+\nu)R}{2E}\frac{\partial m}{\partial\theta}=0, \qquad (3)$$

$$(1+\nu)\left(\Phi(u)+2w\right)+\frac{1}{3}\eta^2\left[\Delta_0\Phi(\gamma_1)+(1-\nu)\Phi(\gamma_1)\right]-\frac{1-\nu}{2}R^2\frac{\omega_{\rm tr}^2}{c_2^2}w+\frac{\nu(1+\nu)R}{E}m+\frac{\left(1-\nu^2\right)R^2}{2Eh}Z=0,$$

$$w+\frac{\nu\eta^2}{2(1-\nu)}\Delta_0 w-\frac{\nu\eta}{(1-\nu)}\Phi(u)=\frac{1}{\rho\omega^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(p_i+p_s\right)\Big|_{r=a}.$$

Здесь $\gamma_1=\dfrac{\partial w}{\partial\theta}-u,\quad k_0=\operatorname{ctg}\theta,\quad \Delta_0=\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+k_0\dfrac{\partial}{\partial\theta},\quad \Phi(f)=\dfrac{\partial f}{\partial\theta}+k_0 f\,,\qquad z=\omega h/c_2\,,$

$$Z=\left(1-\frac{8-3\nu}{10(1-\nu)}\eta^2\Delta_0\right)\left(p_i+p_s\right)\Big|_{r=a},\quad m=-\left(p_i+p_s\right)\Big|_{r=a}, \qquad (4)$$

$$\omega_{\rm tg}^2u=\omega^2\left[u+\eta^2\left(C_0+C_1z^2+C_2z^4\right)\partial\Phi(u)/\partial\theta\right],\quad \omega_{\rm tr}^2w=\omega^2\left[w+\eta^2A_0\Delta_0w-z^2\left(A_1w+\eta^2A_2\Delta_0w\right)\right],$$

u – тангенциальное перемещение вдоль оси θ, w – прогиб, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, значения A_i и C_i даны в [1]. Из системы (3) – (4) находим B_n [4,7]

$$B_n=-\frac{j_n'(x)d_1+Q\,j_n(x)}{h_n^{(1)\prime}(x)d_1+Q\,h_n^{(1)}(x)},\qquad Q=\frac{\kappa kR}{2(1+\nu)}\beta_2^{-2}\left(b_2d_2+b_1d_3\right). \qquad (5)$$

3. Длинноволновое высокочастотное приближение уравнений теории упругости [3,4] описывает резонансы малых номеров волн типа Лэмба высших порядков. Это приближение применяется для описания решений в окрестности частот толщинных резонансов. Здесь выделяются два типа движений, а именно, поперечное и тангенциальное длинноволновые высокочастотные приближения. Поперечное приближение используется в окрестности частот толщинных резонансов растяжения–сжатия, т.е., в области $\left|z-\Lambda_{\rm st}\right|<<1$, где $\Lambda_{\rm st}=\pi m/\gamma$ для антисимметричных мод и $\Lambda_{\rm st}=\pi(m-0{,}5)/\gamma$ для симметричных мод. В окрестности частот толщинных резонансов сдвига применяется тангенциальное длинноволновое высокочастотное приближение, т.е. в области $\left|z-\Lambda_{\rm sh}\right|<<1$, где для антисимметричных мод $\Lambda_{\rm sh}=\pi(2m-1)/2$ и для симметричных мод $\Lambda_{\rm sh}=\pi m$, $m=1,2,\ldots$. В этом случае разрешающее уравнение и условие непротекания принимают вид:

$$\eta^2\left(P\frac{\partial}{\partial\theta}D_1u+P_R^0u\right)+\left(z^2-\Lambda_{\rm sh}^2\right)u=\frac{2(-1)^{m+1}h\gamma}{\Lambda_{\rm sh}\rho_1c_2^2}\eta\frac{\partial\left(p_i+p_s\right)}{\partial\theta}\begin{Bmatrix}\operatorname{ctg}(\gamma\;\Lambda_{\rm sh})\\ \operatorname{tg}(\gamma\;\Lambda_{\rm sh})\end{Bmatrix}, \qquad (6)$$

$$\frac{2(-1)^m\gamma}{\Lambda_{\rm sh}}\eta D_1u\begin{Bmatrix}\operatorname{ctg}(\gamma\;\Lambda_{\rm sh})\\ \operatorname{tg}(\gamma\;\Lambda_{\rm sh})\end{Bmatrix}=\frac{1}{\rho c^2k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(p_i+p_s\right)\Big|_{r=a},\quad P=1\pm\frac{8\gamma}{\Lambda_{\rm sh}}\begin{Bmatrix}\operatorname{ctg}(\gamma\Lambda_{\rm sh})\\ \operatorname{tg}(\gamma\Lambda_{\rm sh})\end{Bmatrix},$$

где $k_0=\operatorname{ctg}\theta,\quad \Delta_0=\partial^2/\partial\theta^2+k_0\partial/\partial\theta,\quad \Phi(f)=\partial f/\partial\theta+k_0f\,,\ P_R^0=-6\,,\ D_1u=\Phi(u)\,.$

Здесь верхний (нижний) знак и верхнее (нижнее) выражение в фигурных скобках соответствует антисимметричным (симметричным) модам, u – тангенциальное перемещение в направлении оси θ. Для антисимметричного тангенциального приближения имеем [4,7]:

$$B_n=-\frac{S\,j_n'(x)-4n(n+1)h\kappa\beta_1^{-2}\Omega k\,j_n(x)}{Sh_n^{(1)\prime}(x)-4n(n+1)h\kappa\beta_1^{-2}\Omega k\,h_n^{(1)}(x)}, \qquad (7)$$

$$S=-Pn(n+1)+P_R^0+\eta^{-2}\left(z^2-\Lambda_{\rm sh}^2\right),\qquad \Omega=\operatorname{ctg}^2(\gamma\;\Lambda_{\rm sh})/\Lambda_{\rm sh}^2\,.$$

4. Вне окрестности нулевой частоты и частот толщинных резонансов применяется модель типа плоского слоя [2], эффективно описывающая коротковолновые колебания тела. Эта модель применяется в области, когда длина волны деформации мала по сравнению с радиусом срединной поверхности, и, следовательно, когда можно пренебречь кривизной оболочки. В рамках этой модели в уравнениях теории упругости, записанных в сферических координатах, сохраняются только старшие производные, а радиальная координата замораживается на срединной поверхности. Коэффициенты B_n определяются следующим образом [4,7]:

$$B_n = -\frac{j_n'(x)d_1 - 2k^3R^3\kappa\, j_n(x)d_2}{h_n^{(1)\prime}(x)d_1 - 2k^3R^3\kappa h_n^{(1)}(x)d_2}, \tag{8}$$

$$d_1 = 4D_sD_a, \qquad d_2 = \alpha_1\left(\mathrm{sh}(\alpha_1\eta)\,\mathrm{sh}(\alpha_2\eta)D_a + \mathrm{ch}(\alpha_1\eta)\,\mathrm{ch}(\alpha_2\eta)D_s\right), \quad n_1 = n + 1/2,$$

$$\alpha_i = \sqrt{n_1^2 - \beta_i^{-2}k^2R^2}\ (i = 1,2); \quad D_s = \gamma_0^4\mathrm{ch}(\alpha_1\eta)\,\mathrm{sh}(\alpha_2\eta) - 4\beta_2^4 n_1^2\alpha_1\alpha_2\mathrm{sh}(\alpha_1\eta)\,\mathrm{ch}(\alpha_2\eta),$$

$$\gamma_0^2 = 2n_1^2\beta_2^2 - k^2R^2, \qquad D_a = \gamma_0^4\mathrm{sh}(\alpha_1\eta)\,\mathrm{ch}(\alpha_2\eta) - 4\beta_2^4n_1^2\alpha_1\alpha_2\mathrm{ch}(\alpha_1\eta)\,\mathrm{sh}(\alpha_2\eta).$$

5. Используя современные информационные технологии для обработки большого объема базы данных, осуществим численное моделирование на основе трех приведенных асимптотических приближений. Резонансные компоненты парциальных мод ζ_n и функция формы p в дальнем поле в случае рассеяния назад ($\theta = 0$) имеют вид [4,7]

$$\zeta_n = \left(4n_1 / x\right)\cdot\left|\, B_n + j_n(x)/h_n^{(1)\prime}\,\right|, \qquad\qquad p = \left|\left(2n_1/x\right)\sum_{n=0}^{\infty} G_nE_nB_n(-1)^n\right|. \tag{9}$$

Относительную толщину оболочки будем характеризовать безразмерным параметром относительной толщины μ, величина которого связана с параметром тонкостенности η соотношением $\mu = (a-b)/a = 2\eta/(1+\eta)$. Как показано в работах [4,5,7], упомянутые три модели для относительно тонких оболочек $\mu \le 1/9$ имеют области согласования, следовательно, сращивая асимптотические решения, можно осуществить синтез рассеянного давления в широком частотном диапазоне при различных параметрах оболочки и характеристиках акустической среды.

Поведение областей согласования для относительно толстой оболочки $\mu = 0,2$ характеризуют данные рис. 1−3 при следующих параметрах задачи:

$c_1 = 5960$ м/с, $c_2 = 3240$ м/с, $c = 1493$ м/с, $\rho = 1000$ кг/м^3, $\rho_1 = 7700$ кг/м^3.

На рис. 1 представлены резонансные компоненты для волны типа Лэмба S_0, вычисленные по уточненной теории Кирхгофа–Лява и модели типа плоского слоя. Аналогичное сравнение представлено на рис. 2 для волны, порожденной жидкостью A, которая, начиная с $n = 5$, сменяется волной типа Лэмба A_0. Здесь же представлено и точное решение [8].

Как принято в резонансной теории рассеяния [6], дискретный номер моды n на рис. 3 соответствует волновому числу периферических волн. На рисунке изображен график величины $\Delta n = \left| n^{\mathrm{app}} - n^{\mathrm{ex}} \right|$, где n^{ex} соответствует точному решению [8], n^{app} – уточненной теории Кирхгофа–Лява или моделью плоского слоя (для волны S_0 – рис. 1а и для волн A, волны порожденной жидкостью, и A_0 (начиная с $n = 5$) – рис. 1б) и длинноволновому высокочастотному приближению или модели типа плоского слоя (для волны A_1 – рис. 1в). Области согласования расположены вблизи точек пересечения кривых соответствующих различным асимптотическим моделям. Значения Δn, вычисленные в этих точках, определяют максимальные погрешности приближения. Неравенство $\Delta n < 1$ означает, что погрешность не превышает расстояния между соседними резонансными частотами. Однако для хорошего приближения необходимо выполнение условия $\Delta n \ll 1$.

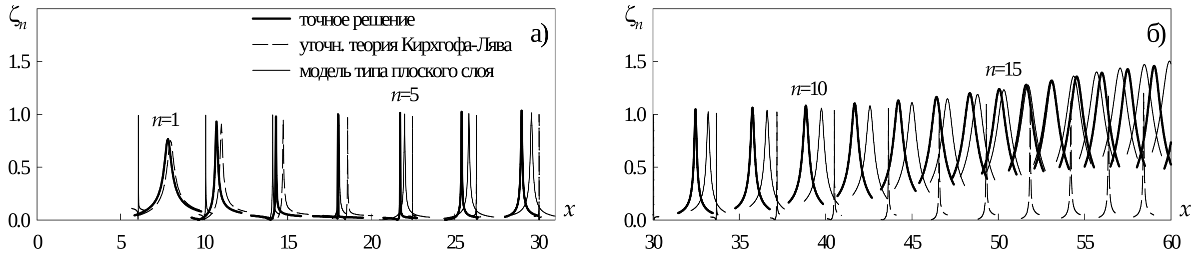


Рис. 1. Резонансные компоненты парциальных мод для волны S_0

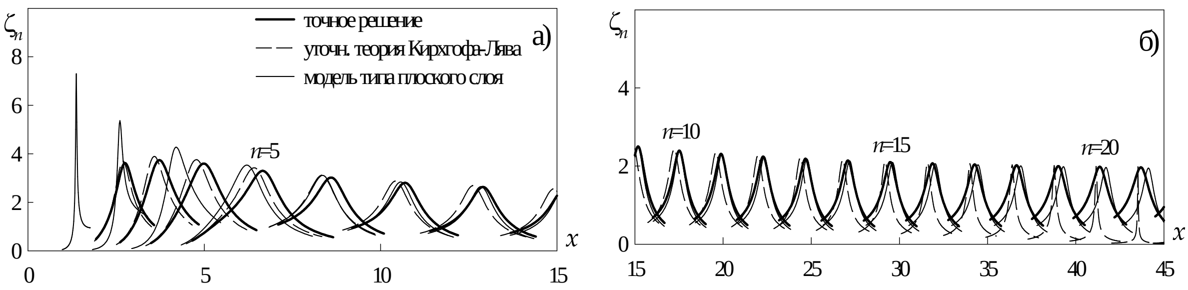


Рис. 2. Резонансные компоненты парциальных мод для волн A и A_0

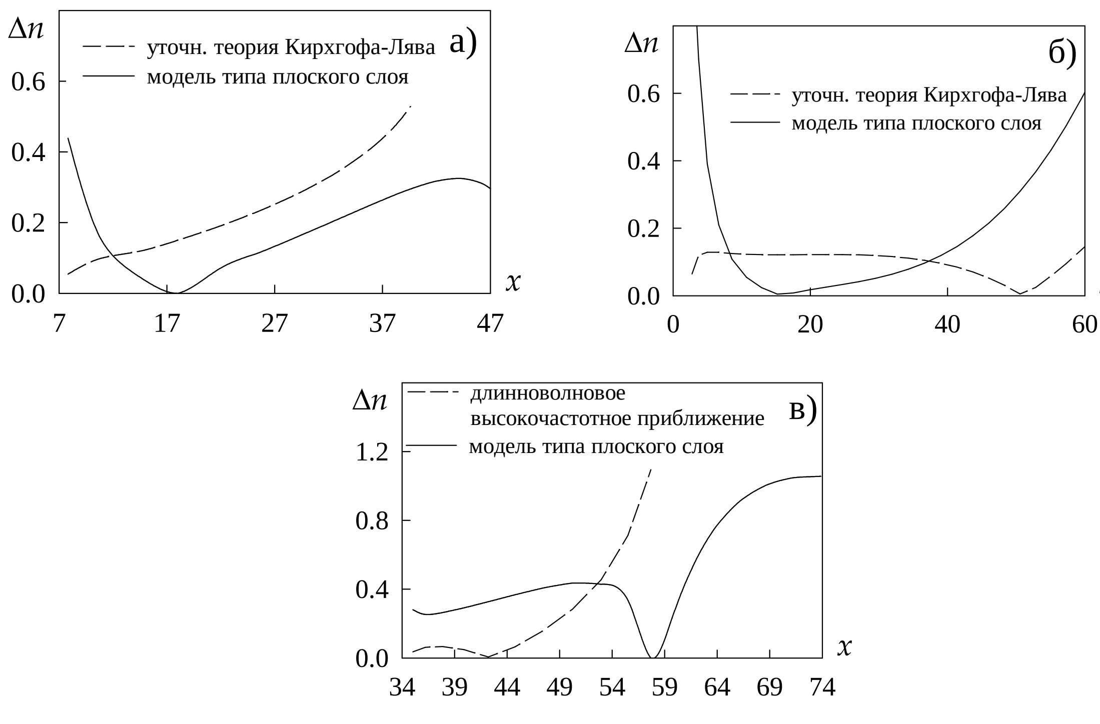


Рис. 3. Погрешности аппроксимации дисперсионных кривых

Данные, приведенные на рис. 3а и рис. 3б, указывают на существование узкой области согласования между уточненной теорией Кирхгофа–Лява и моделью плоского слоя. Кроме того, они показывают, что область применения модели плоского слоя ограничена сверху значением $x = 30$, которое значительно меньше, чем величина первого толщинного резонанса $x = 35$. Дело в том, что для значений волнового радиуса $x > 30$ (для мод больших номеров) использование модели типа плоского слоя приводит к значительным погрешностям. Материалы, приведенные на рис. 3в, указывают на отсутствие существования области согласования между длинноволновым высокочастотным приближением и моделью плоского слоя, несмотря на тот факт, что длинноволновое высокочастотное приближение вполне приемлемо описывает семь первых толщинных резонансов.

Следовательно, для оболочек средней относительной толщины синтез функции формы рассеянного давления возможен в области частот значительно меньше, чем частота первого толщинного резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев В.А. Применение уточненной асимптотической модели в задаче рассеяния плоской акустической волны сферической оболочкой // Изв. РАН. МТТ. 2002. №2.
2. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Ковалев В.А. Развитие приближения типа плоского слоя в задаче рассеяния акустических волн цилиндрической оболочкой //Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3.
3. Ковалев В.А. Об использовании длинноволнового высокочастотного асимптотического приближения в задаче рассеяния акустических волн упругими оболочками //Сб. науч.тр. Матем. модел. и управл. в сложных системах. М.: Изд. МГАПИ, 2002.Вып. 5.
4. Ковалев В.А. Сращивание асимптотических приближений в задачах рассеяния акустических волн упругой сферической оболочкой // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4.
5. Ковалев В.А. Синтез акустического давления, рассеянного упругой цилиндрической оболочкой, основанный на сращивании асимптотических приближений // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4.
6. Векслер Н.Д. Акустическая спектроскопия. Таллинн: Валгус, 1989. 323 с.
7. Ковалев В.А., Ковалева Е.Д. Математическое моделирование в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками с помощью асимптотических методов // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. №6 (65). 2008.
8. Goodman R.R., Stern K. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. America. V. 34. № 3. 1962.

<u>Сведения об авторе:</u>

Ковалева Елена Дмитриевна – доцент кафедры информатики и информационных систем, Московский городской университет управления Правительства Москвы, к.ф.-м.н., доцент, (495) 957 91 13, **E-mail:** kovaleva_ed@mail.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.

Представляемая работа посвящена построению непрерывных групп симметрий, предложенных в 1959 г. Д.Д. Ивлевым трехмерных гиперболических уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности (текучесть описывается критерием Треска и соответствует ребру призмы Кулона−Треска), сформулированных в изостатической системе координат, и исследованию соответствующих алгебр симметрий. С помощью стандартных алгоритмов группового анализа дифференциальных уравнений вычислена группа симметрий указанной системы уравнений в частных производных.

1. Постранственные уравнения теории пластичности (течение на ребре призмы Кулона−Треска). Для ребра призмы Кулона−Треска, определяемого условием "полной пластичности" $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ (σ_1, σ_2, σ_3 − главные нормальные напряжения; k − предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия, полученные Д.Д. Ивлевым в 1959 г. [1], можно представить в форме одного векторного уравнения (см. [2])

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k \ \mathrm{div}\ (\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{n}$− единичное веторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Для разрешимости уравнения (1) в зоне пластического течения необходима расслоенность векторного поля $\mathbf{n}$, т.е. выполнение условия Якоби $\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{n} = 0$.

Это условие позволяет нам ввести 2/3-ортогональные криволинейные координаты ω^j ($j = 1, 2, 3$), определяемые по векторному полю $\mathbf{n}$ так, что поверхности $\omega^3 = \mathrm{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$. Расслоенное статически допустимое поле напряжений порождает каноническое отображение некоторой области пространства на область пластического течения [2].

Искомое каноническое преобразование координат имеет форму

$$x_i = f_i(\omega^1,\omega^2,\omega^3) \quad (i = 1,2,3), \tag{2}$$

где x_i − пространственные декартовы координаты, ω^j − канонические изостатические координаты. Функции f_i в (2) должны удовлетворять следующей существенно нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0,\\
\left(\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^2}-\frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\right)\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^2}-\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^2}-\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\right)\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3}-1=0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Левые части системы дифференциальных уравнений в частных производных (3) обозначим соответственно через E_1, E_2 и E_3. Геометрические группы симметрий уравнений осесимметричной задачи, представленных в сетке линий главных нормальных напряжений, вычислены в [3]. В этой работе был получен наиболее общий вид инфинитезимального оператора группы симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных осесимметричной задачи, который зависит от пяти произвольных постоянных.

2. Генераторы однопараметрических групп преобразований. Формулы продолжения. Поставим задачу об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (3) будет инвариантной. Такие группы, как известно, будут являться также группами симметрии этой системы. Мы будем придерживаться терминологии и обозначений методов группового анализа, принятых в монографии [4]. Рассмотрим непрерывную однопараметрическую группу (группу Ли) преобразования зависимых и независимых переменных в форме разложения по степеням ε

$$\begin{gathered}
\tilde\omega^i = \omega^i(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3,\varepsilon) = \omega^i + \varepsilon\,\Xi^i(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3) + \ldots,\\
\tilde f_i = \mathrm{F}_i(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3,\varepsilon) = f_i + \varepsilon\,\mathrm{H}^i(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3) + \ldots,
\end{gathered} \tag{4}$$

где ε – параметр группы преобразований. Преобразования (4) предполагаются обратимыми. При $\varepsilon = 0$ получается тождественное преобразование. Последовательное выполнение двух преобразований равносильно применению третьего преобразования того же вида (4). Ясно, что для общего однопараметрического семейства точечных преобразований это свойство может не выполняться. Именно оно является ключевым признаком, отличающим произвольное однопараметрическое семейство преобразований от однопараметрической группы преобразований. Явно выписанные члены определяют инфинитезимальное преобразование (4).

Группа преобразований индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами

$$\varsigma = (\Xi^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3),\ \Xi^2(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3),\ \Xi^3(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3),\ \mathrm{H}^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3),$$
$$\mathrm{H}^2(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3),\ \mathrm{H}^3(\omega^1,\omega^2,\omega^3, f_1, f_2, f_3)) \qquad (5)$$

Составим инфинитезимальный оператор (инфинитезимальный генератор) однопараметрической группы преобразований (4)

$$\varsigma\cdot\partial = \Xi^1\frac{\partial}{\partial\omega^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \Xi^3\frac{\partial}{\partial\omega^3} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f_1} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial f_2} + \mathrm{H}^3\frac{\partial}{\partial f_3}\ , \qquad (6)$$

где Ξ^1, Ξ^2, Ξ^3, H^1, H^2, H^3 зависят от переменных ω^1, ω^2, ω^3, f_1, f_2, f_3.

Рассмотрим далее один раз продолженную группу и ее касательное векторное поле $\underset{1}{\varsigma}$.

Инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид

$$\begin{aligned}\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial = {}&\Xi^1\frac{\partial}{\partial\omega^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \Xi^3\frac{\partial}{\partial\omega^3} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f_1} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial f_2} + \mathrm{H}^3\frac{\partial}{\partial f_3} + \mathrm{H}^1_1\frac{\partial}{\partial p^1_1} + \mathrm{H}^1_2\frac{\partial}{\partial p^1_2} + \\ &+\mathrm{H}^1_3\frac{\partial}{\partial p^1_3} + \mathrm{H}^2_1\frac{\partial}{\partial p^2_1} + \mathrm{H}^2_2\frac{\partial}{\partial p^2_2} + \mathrm{H}^2_3\frac{\partial}{\partial p^2_3} + \mathrm{H}^3_1\frac{\partial}{\partial p^3_1} + \mathrm{H}^3_2\frac{\partial}{\partial p^3_2} + \mathrm{H}^3_3\frac{\partial}{\partial p^3_3},\end{aligned} \qquad (7)$$

где через p^i_j обозначены частные производные $\partial f_i / \partial\omega^j$, а дополнительные координаты один раз продолженного инфинитезимального оператор H^l_j выражаются согласно формулам первого приближения [4, с. 58]

$$\mathrm{H}^l_j = \left(\frac{\partial \mathrm{H}^l}{\partial\omega^j}\right)_{expl} + \frac{\partial f_s}{\partial\omega^j}\frac{\partial \mathrm{H}^l}{\partial f_s} - \frac{\partial f_l}{\partial\omega^s}\left(\left(\frac{\partial\Xi^s}{\partial\omega^j}\right)_{expl} + \frac{\partial f_r}{\partial\omega^j}\frac{\partial\Xi^s}{\partial f_r}\right) \qquad (l, j = 1, 2, 3). \qquad (8)$$

Формулы первого продолжения (8) постоянно используются при поиске симметрии, поэтому представляется необходимым дать развернутую запись дополнительных координат H^l_j $(l, j = 1, 2, 3)$ для случая систем типа 3 х 3 :

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_1 = {}&\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\omega^1} + p^1_1\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1} + p^2_1\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_2} + p^3_1\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_3} - p^1_1\left(\frac{\partial\Xi^1}{\partial\omega^1} + p^1_1\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_1} + p^2_1\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_2} + p^3_1\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_3}\right) - \\ &-p^1_2\left(\frac{\partial\Xi^2}{\partial\omega^1} + p^1_1\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_1} + p^2_1\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_2} + p^3_1\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_3}\right) - p^1_3\left(\frac{\partial\Xi^3}{\partial\omega^1} + p^1_1\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_1} + p^2_1\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_2} + p^3_1\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_2 = {}&\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\omega^2} + p^1_2\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1} + p^2_2\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_2} + p^3_2\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_3} - p^1_1\left(\frac{\partial\Xi^1}{\partial\omega^2} + p^1_2\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_1} + p^2_2\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_2} + p^3_2\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_3}\right) - \\ &-p^1_2\left(\frac{\partial\Xi^2}{\partial\omega^2} + p^1_2\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_1} + p^2_2\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_2} + p^3_2\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_3}\right) - p^1_3\left(\frac{\partial\Xi^3}{\partial\omega^2} + p^1_2\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_1} + p^2_2\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_2} + p^3_2\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_3 = {}&\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\omega^3} + p^1_3\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1} + p^2_3\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_2} + p^3_3\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_3} - p^1_1\left(\frac{\partial\Xi^1}{\partial\omega^3} + p^1_3\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_1} + p^2_3\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_2} + p^3_3\frac{\partial\Xi^1}{\partial f_3}\right) - \\ &-p^1_2\left(\frac{\partial\Xi^2}{\partial\omega^3} + p^1_3\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_1} + p^2_3\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_2} + p^3_3\frac{\partial\Xi^2}{\partial f_3}\right) - p^1_3\left(\frac{\partial\Xi^3}{\partial\omega^3} + p^1_3\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_1} + p^2_3\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_2} + p^3_3\frac{\partial\Xi^3}{\partial f_3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_1^2 &= \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_3} - p_1^2 \left(\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_3} \right) - \\
&- p_2^2 \left(\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_3} \right) - p_3^2 \left(\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_3} \right), \\
\mathrm{H}_2^2 &= \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_3} - p_1^2 \left(\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_3} \right) - \\
&- p_2^2 \left(\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_3} \right) - p_3^2 \left(\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_3} \right), \\
\mathrm{H}_3^2 &= \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_3} - p_1^2 \left(\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_3} \right) - \\
&- p_2^2 \left(\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_3} \right) - p_3^2 \left(\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_3} \right), \\
\mathrm{H}_1^3 &= \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_3} - p_1^3 \left(\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_3} \right) - \\
&- p_2^3 \left(\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_3} \right) - p_3^3 \left(\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^1} + p_1^1 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_1} + p_1^2 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_2} + p_1^3 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_3} \right), \\
\mathrm{H}_2^3 &= \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_3} - p_1^3 \left(\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_3} \right) - \\
&- p_2^3 \left(\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_3} \right) - p_3^3 \left(\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^2} + p_2^1 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_1} + p_2^2 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_2} + p_2^3 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_3} \right), \\
\mathrm{H}_3^3 &= \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_3} - p_1^3 \left(\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f_3} \right) - \\
&- p_2^3 \left(\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f_3} \right) - p_3^3 \left(\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^3} + p_3^1 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_1} + p_3^2 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_2} + p_3^3 \frac{\partial \Xi^3}{\partial f_3} \right).
\end{aligned}$$

Можно придать формулам для вычисления дополнительных координат инфинитезимального оператора H_j^l несколько иную форму, отражающую их рекуррентный характер, если ввести *усеченный* оператор $\underset{1\ j}{D}$ "полного" дифференцирования переменной с индексом j: $\quad \mathrm{H}_j^l = \underset{1\ j}{D}(\mathrm{H}^l) - p_s^l \underset{1\ j}{D}(\Xi^s), \qquad \underset{1\ j}{D} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega^j} \right)_{expl} + p_j^k \frac{\partial}{\partial f_k}.$

Если замена переменных в соответствии с формулами группового преобразования (4) по обычным формулам дифференциального исчисления преобразует систему дифференциальных уравнений (3) в эквивалентную систему в точности того же самого вида, то группу преобразований (4) называют группой инвариантности системы дифференциальных уравнений (3). Говорят также, что система дифференциальных уравнений в частных производных (3) допускает группу (4) (и ее инфинитезимальный оператор $(\varsigma \cdot \partial)$). Допускаемая данной системой дифференциальных уравнений группа характеризует ее свойства симметрии и может использоваться для построения ее точных частных решений.

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы, относительно которой дифференциальные уравнения (3) инвариантны, обладает одним важным свойством: если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия того, что сами уравнения выполняются (т.е. $\mathrm{E}_i = 0$), то должны получаться тождественно нулевые выражения.

Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального генератора $(\varsigma \cdot \partial)$, соответствующей группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных, а, следовательно, и ее группы симметрий. На практике, после проведения так называемой процедуры расщепления, он дает большое количество сравнительно элементарных дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять координаты инфинитезимального оператора группы.

3. Инфинитезимальный генератор группы симметрий пространственных уравнений математической теории пластичности. Применим инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы $\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial$ к левым частям системы дифференциальных уравнений (3):

$$
\begin{aligned}
(\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathrm{E}_1 &= \mathrm{H}_1^1 p_3^1 + \mathrm{H}_3^1 p_1^1 + \mathrm{H}_1^2 p_3^2 + \mathrm{H}_3^2 p_1^2 + \mathrm{H}_1^3 p_3^3 + \mathrm{H}_3^3 p_1^3, \\
(\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathrm{E}_2 &= \mathrm{H}_2^1 p_3^1 + \mathrm{H}_3^1 p_2^1 + \mathrm{H}_2^2 p_3^2 + \mathrm{H}_3^2 p_2^2 + \mathrm{H}_2^3 p_3^3 + \mathrm{H}_3^3 p_2^3, \\
(\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathrm{E}_3 &= \mathrm{H}_1^2 p_2^3 p_3^1 - \mathrm{H}_1^3 p_2^2 p_3^1 + \mathrm{H}_1^3 p_2^1 p_3^2 - \mathrm{H}_1^1 p_2^3 p_3^2 + \mathrm{H}_1^1 p_2^2 p_3^3 - \mathrm{H}_1^2 p_2^1 p_3^3 + \\
&+ \mathrm{H}_2^3 p_1^2 p_3^1 - \mathrm{H}_2^2 p_1^3 p_3^1 + \mathrm{H}_2^1 p_1^3 p_3^2 - \mathrm{H}_2^3 p_1^1 p_3^2 + \mathrm{H}_2^2 p_1^1 p_3^3 - \mathrm{H}_2^1 p_1^2 p_3^3 + \\
&+ \mathrm{H}_3^1 p_1^2 p_2^3 - \mathrm{H}_3^1 p_1^3 p_2^2 + \mathrm{H}_3^2 p_1^3 p_2^1 - \mathrm{H}_3^2 p_1^1 p_2^3 + \mathrm{H}_3^3 p_1^1 p_2^2 - \mathrm{H}_3^3 p_1^2 p_2^1.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Найдем условия, при которых тождественно выполняются равенства $(\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathrm{E}_i = 0$, если выполнены $\mathrm{E}_i = 0$. Для этого преобразуем выражения (9), используя указанные выше формулы для величин H_j^l. Преобразования подобного вида по причине значительного объема вычислительной работы выполняются с помощью пакета символьных вычислений Maple V.

Рассмотрим систему уравнений (3) (т.е. $\mathrm{E}_i = 0$) как систему линейных уравнений относительно частных производных по независимой переменной ω^3: $\partial f_1 / \partial\omega^3$, $\partial f_2 / \partial\omega^3$, $\partial f_3 / \partial\omega^3$, разрешая которую получим следующую нормальную по переменной ω^3 форму Коши:

$$
p_3^1 = \frac{\partial f_1}{\partial\omega^3} = \frac{p_1^2 p_2^3 - p_1^3 p_2^2}{\Delta}, \qquad p_3^2 = \frac{\partial f_2}{\partial\omega^3} = \frac{p_1^3 p_2^1 - p_1^1 p_2^3}{\Delta}, \qquad p_3^3 = \frac{\partial f_3}{\partial\omega^3} = \frac{p_1^1 p_2^2 - p_1^2 p_2^1}{\Delta}, \tag{10}
$$

$$
\Delta = (p_1^2 p_2^3)^2 + (p_1^3 p_2^2)^2 + (p_1^2 p_2^1)^2 + (p_1^3 p_2^1)^2 + (p_1^1 p_2^2)^2 + (p_1^1 p_2^3)^2 - 2 p_1^2 p_2^3 p_1^3 p_2^2 - 2 p_1^2 p_2^1 p_1^1 p_2^2 - 2 p_1^3 p_2^1 p_1^1 p_2^3.
$$

Заметим, что система уравнений (3) не имеет нормальной формы ни по переменной ω^1, ни по переменной ω^2. Подставляя в (9) значения производных согласно (10), приходим к равенствам $(\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathrm{E}_i = 0$, в которых уже учтены условия $\mathrm{E}_i = 0$. Поэтому условия $(\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathrm{E}_i = 0$ могут быть приведены к условиям равенства нулю некоторых степенных многочленов от свободных частных производных p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_2^1, p_2^2, p_2^3.

Тождественное по свободным частным производным выполнение условий $(\underset{1}{\varsigma} \cdot \partial)\mathrm{E}_i = 0$, таким образом, приводит к ряду уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов трех степенных многочленов от свободных частных производных. Производя необходимые вычисления, находим, что все существенные уравнения, которые являются определяющими уравнениями полной группы непрерывных симметрий системы уравнений (3)

$$
3\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1} - \frac{\partial \Xi^1}{\partial\omega^1} - \frac{\partial \Xi^2}{\partial\omega^2} - \frac{\partial \Xi^3}{\partial\omega^3} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_3} = \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1}, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_2} = \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1}, \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_2} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_3} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_1} + \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_3} = 0,
$$

$$
\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_1} + \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_2} = 0, \ \frac{\partial \Xi^1}{\partial\omega^3} = \frac{\partial \Xi^1}{\partial f^1} = \frac{\partial \Xi^1}{\partial f^2} = \frac{\partial \Xi^1}{\partial f^3} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial\omega^3} = \frac{\partial \Xi^2}{\partial f^1} = \frac{\partial \Xi^2}{\partial f^2} = \frac{\partial \Xi^2}{\partial f^3} = 0, \ \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\omega^1} = \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\omega^2} = \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\omega^3} = 0,
$$

$$
\frac{\partial \Xi^3}{\partial\omega^1} = \frac{\partial \Xi^3}{\partial\omega^2} = \frac{\partial \Xi^3}{\partial f^1} = \frac{\partial \Xi^3}{\partial f^2} = \frac{\partial \Xi^3}{\partial f^3} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial\omega^1} = \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial\omega^2} = \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial\omega^3} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial\omega^1} = \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial\omega^2} = \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial\omega^3} = 0. \tag{11}
$$

В результате их анализа можно показать, что инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (3) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\varsigma\cdot\partial = {} & C_1\left(3\omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3}+f_1\frac{\partial}{\partial f_1}+f_2\frac{\partial}{\partial f_2}+f_3\frac{\partial}{\partial f_3}\right)+C_2\left(\omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3}-\frac{\omega^1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\frac{\omega^2}{2}\frac{\partial}{\partial\omega^2}\right)+C_3\frac{\partial}{\partial\omega^3}+B_1\frac{\partial}{\partial f_1}+B_2\frac{\partial}{\partial f_2}+ \\ & +B_3\frac{\partial}{\partial f_3}+A_1\left(f_3\frac{\partial}{\partial f_2}-f_2\frac{\partial}{\partial f_3}\right)+A_2\left(f_1\frac{\partial}{\partial f_3}-f_3\frac{\partial}{\partial f_1}\right)+A_3\left(f_2\frac{\partial}{\partial f_1}-f_1\frac{\partial}{\partial f_2}\right)+\frac{\partial L(\omega^1,\omega^2)}{\partial\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\frac{\partial L(\omega^1,\omega^2)}{\partial\omega^1}\frac{\partial}{\partial\omega^2}.\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрии системы дифференциальных уравнений (3) зависит от девяти произвольных постоянных и одной произвольной функции $L = L(\omega^1,\omega^2)$. Заметим, что для наиболее общего двумерного однопараметрического преобразования $\tilde{\omega}^1 = \omega^1 + \varepsilon\Xi^1(\omega^1,\omega^2) + \ldots$, $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 + \varepsilon\Xi^2(\omega^1,\omega^2) + \ldots$, инфинитезимально сохраняющего площадь, т.е. с якобианом, равным единице с точностью $o(\varepsilon)$, инфинитезимальные образующие должны иметь вид $\Xi^1 = \partial L/\partial\omega^2$, $\Xi^2 = -\partial L/\partial\omega^1$, где $L(\omega^1,\omega^2)$ – произвольная функция. Инфинитезимальный оператор, соответствующий "конечномерной" части (12), получающейся при $L(\omega^1,\omega^2) = 0$, симметричен по переменным f_i, а по переменным ω^j нет. Более симметричная "конечномерная" форма получается, если положить $L(\omega^1,\omega^2) = C_5\omega^2 - C_6\omega^1 + C_7\omega^1\omega^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях// Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. 3. (см. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001.)
2. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.). Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
3. Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 4(34). 2004.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

Сведения об авторах:

Ковалев Владимир Александрович – заведующий кафедрой прикладной математики, Московский городской университет управления Правительства Москвы, д.ф.-м.н., профессор, 7 (495) 957-91-13. E-mail: vlad_koval@mail.ru

Радаев Юрий Николаевич–заведующий кафедрой механики сплошных сред, Самарский государственный университет, д.ф.-м.н., профессор, 7 (846) 334-54-41. E-mail: radayev@ssu.samara.ru

АЛГЕБРА СИММЕТРИЙ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.

Определена оптимальная система одномерных подалгебр одной естественной конечномерной подалгебры алгебры симметрий дифференциальных уравнений математической теории пластичности, насчитывающая в общей сложности 150 элементов и включающая 1 трехпараметрический элемент, 9 двухпараметрических, 45 однопараметрических элементов и 95 индивидуальных элементов. Трехмерные уравнения Д.Д. Ивлева обладают, следовательно, достаточно высокой степенью симметрии, что может в дальнейшем позволить получить ряд новых точных решений, описывающих трехмерное пластическое течение идеально пластических тел при условии полной пластичности. Показано, что алгебра симметрий уравнений плоской задачи имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из 1 двухпараметрического, 7 однопараметрических и 19 индивидуальных инфинитезимальных генераторов (всего 27 элементов). Установлено, что алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из 1 однопараметрического и 20 индивидуальных инфинитезимальных генераторов (всего 21 элемент).

1. Алгебра симметрий пространственных уравнений теории пластичности. С однопараметрической группой Ли, допускаемой системой дифференциальных уравнений частных производных математической теории пластичности [1–3], тесно связана алгебра Ли допускаемых инфинитезимальных операторов. Линейное пространство инфинитезимальных операторов и базисные инфинитезимальные операторы получаются в результате решения определяющих уравнений для группы симметрий (см. работу [3], формула (11)).

Рассмотрим инфинитезимальные операторы

$$
\begin{gathered}
(\mathsf{s}_1\cdot\partial)=3\mu^3\frac{\partial}{\partial\mu^3}+f_1\frac{\partial}{\partial f_1}+f_2\frac{\partial}{\partial f_2}+f_3\frac{\partial}{\partial f_3},\quad (\mathsf{s}_2\cdot\partial)=\mu^3\frac{\partial}{\partial\mu^3}-\frac{\mu^1}{2}\frac{\partial}{\partial\mu^1}-\frac{\mu^2}{2}\frac{\partial}{\partial\mu^2},\quad (\mathsf{s}_3\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial\mu^3},\\
(\mathsf{s}_4\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_1},\quad (\mathsf{s}_5\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_2},\quad (\mathsf{s}_6\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_3},\quad (\mathsf{s}_7\cdot\partial)=f_3\frac{\partial}{\partial f_2}-f_2\frac{\partial}{\partial f_3},\quad (\mathsf{s}_8\cdot\partial)=f_1\frac{\partial}{\partial f_3}-f_3\frac{\partial}{\partial f_1},\\
(\mathsf{s}_9\cdot\partial)=f_2\frac{\partial}{\partial f_1}-f_1\frac{\partial}{\partial f_2},\quad (\mathsf{s}_{10}\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial\mu^1},\quad (\mathsf{s}_{11}\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial\mu^2},\quad (\mathsf{s}_{12}\cdot\partial)=\mu^1\frac{\partial}{\partial\mu^1}-\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

В приведенном списке инфинитезимальные операторы $(\mathsf{s}_4\cdot\partial)$, $(\mathsf{s}_5\cdot\partial)$, $(\mathsf{s}_6\cdot\partial)$ соответствуют группам переносов вдоль декартовых осей x_1, x_2, x_3; инфинитезимальные операторы $(\mathsf{s}_7\cdot\partial)$, $(\mathsf{s}_8\cdot\partial)$, $(\mathsf{s}_9\cdot\partial)$ соответствуют группам поворотов вокруг координатных осей x_1, x_2, x_3; инфинитезимальные операторы $(\mathsf{s}_3\cdot\partial)$, $(\mathsf{s}_{10}\cdot\partial)$, $(\mathsf{s}_{11}\cdot\partial)$ отвечают группам трансляций изостатических координат μ_1, μ_2, μ_3; инфинитезимальный оператор $(\mathsf{s}_{12}\cdot\partial)$ определяет группу, инфинитезимально сохраняющую площадь двумерного плоского элемента; инфинитезимальный оператор $(\mathsf{s}_1\cdot\partial)$ отвечают группе совместных растяжений координат μ_3, x_1, x_2, x_3 в подходящих пропорциях; инфинитезимальный оператор $(\mathsf{s}_2\cdot\partial)$ соответствует группе совместных растяжений-сжатий изостатических координат μ_1, μ_2, μ_3 в подходящих пропорциях.

Можно показать, что $(\mathsf{s}_j\cdot\partial)$ ($j=\overline{1,12}$) линейно независимы. Двенадцатимерное линейное пространство с базисом из инфинитезимальных операторов (1) наделяется стандартной алгебраической структурой с помощью билинейной операции коммутации операторов (скобки Пуассона операторов) [4, с. 87] согласно

$$
[(\mathsf{s}'\cdot\partial),(\mathsf{s}''\cdot\partial)]=[\mathsf{s}',\mathsf{s}'']\cdot\partial, \tag{2}
$$

где коммутатор касательных векторных полей $[\mathsf{s}',\mathsf{s}'']$, в свою очередь, определяется равенством $[\mathsf{s}',\mathsf{s}'']=(\mathsf{s}'\cdot\partial)\mathsf{s}''-(\mathsf{s}''\cdot\partial)\mathsf{s}'$. Коммутатор инфинитезимальных операторов антисимметричен $[(\mathsf{s}'\cdot\partial),(\mathsf{s}''\cdot\partial)]=-[(\mathsf{s}''\cdot\partial),(\mathsf{s}'\cdot\partial)]$ и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[(s'\cdot\partial),(s''\cdot\partial)],(s'''\cdot\partial)]+[[(s''\cdot\partial),(s'''\cdot\partial)],(s'\cdot\partial)]+[[(s'''\cdot\partial),(s'\cdot\partial)],(s''\cdot\partial)]=0.$$

То же самое можно сказать и о коммутаторе касательных векторных полей

$$[s',s'']=-[s'',s'],\qquad [[s',s''],s''']+[[s'',s'''],s']+[[s''',s'],s'']=0.$$

Заметим также, что выполняется свойство $(s'\cdot\partial)(s''\cdot\partial)-(s''\cdot\partial)(s'\cdot\partial)=[s',s'']\cdot\partial.$

Это свойство можно принять в качестве определения коммутатора двух инфинитезимальных операторов. Чтобы доказать, что линейная оболочка операторов (1) образует алгебру Ли, необходимо составить таблицу коммутаторов базисных инфинитезимальных операторов $(s_j\cdot\partial)$ $(j=\overline{1,12})$, проверив при этом, что коммутаторы $[(s_i\cdot\partial),(s_j\cdot\partial)]$ снова можно разложить по базису $(s_k\cdot\partial)$

$$[(s_i\cdot\partial),(s_j\cdot\partial)]=C^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}(s_k\cdot\partial). \tag{3}$$

Символы $C^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$ в разложении (3) называются структурными константами алгебры Ли в базисе $(s_j\cdot\partial)$. Они имеют смысл только в том случае, когда алгебра Ли имеет конечную размерность; алгебра Ли, связанная с группой, допускаемой данной системой дифференциальных уравнений, в принципе, может оказаться бесконечномерной. Нетрудно проверить, что при переходе к другому базису в пространстве инфинитезимальных операторов символы $C^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$ преобразуются как компоненты тензора третьего ранга и, следовательно образуют тензор C, который называется структурным тензором алгебры Ли.

Таблица коммутаторов, приведенная ниже, показывает, что инфинитезимальные операторы (1) действительно определяют подалгебру L^{12} алгебры симметрий системы пространственных уравнений математической теории пластичности. Подобные таблицы обычно составляется так, чтобы на пересечении строки с номером i и столбца с номером j находился коммутатор $[(s_i\cdot\partial),(s_j\cdot\partial)]$.

Итак, коммутатор любых двух базисных операторов есть линейная комбинация операторов, составляющих базис. Этот факт является проявлением следующего общего результата [4, с. 98]: множество всех инфинитезимальных операторов, допускаемых данной системой дифференциальных уравнений в частных производных, образует алгебру Ли. Поскольку, если система допускает операторы $(s'\cdot\partial)$ и $(s''\cdot\partial)$, то она допускает и их коммутатор $[(s'\cdot\partial),(s''\cdot\partial)]$. Ясно, что в результате решения определяющих уравнений мы получаем базис алгебры Ли, связанной с группой, допускаемой данной системой дифференциальных уравнений. Поэтому можно вести речь об алгебре, допускаемой данной системой дифференциальных уравнений, вместо допускаемой группы. Эту алгебру мы будем называть также алгеброй симметрий.

Структурные константы рассматриваемой алгебры Ли L^{12} легко определяются на основании приведенной таблицы:

$$C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 13}=-3,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 14}=-1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 15}=-1,\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 16}=-1;\quad C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 23}=-1,\quad C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot 2\underline{10}}=1/2,\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot 2\underline{11}}=1/2;$$

$$C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 31}=3,\quad C^{3\cdot\cdot}_{\cdot 32}=1;\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 41}=1,\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 48}=1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 49}=-1;\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 51}=1,\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 57}=-1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 59}=1;$$

$$C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 61}=1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 67}=1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 68}=-1;\quad C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 75}=1,\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 76}=-1,\quad C^{9\cdot\cdot}_{\cdot 78}=1,\quad C^{8\cdot\cdot}_{\cdot 79}=-1;$$

$$C^{6\cdot\cdot}_{\cdot 84}=-1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 86}=1,\quad C^{9\cdot\cdot}_{\cdot 87}=-1,\quad C^{7\cdot\cdot}_{\cdot 89}=1;\quad C^{5\cdot\cdot}_{\cdot 94}=1,\quad C^{4\cdot\cdot}_{\cdot 95}=-1,\quad C^{8\cdot\cdot}_{\cdot 97}=1,\quad C^{7\cdot\cdot}_{\cdot 98}=-1;$$

$$C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot\underline{10}2}=-1/2,\quad C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot\underline{10}\underline{12}}=1;\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot\underline{11}2}=-1/2,\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot\underline{11}\underline{12}}=-1;\quad C^{\underline{10}\cdot\cdot}_{\cdot\underline{12}\underline{10}}=-1,\quad C^{\underline{11}\cdot\cdot}_{\cdot\underline{12}\underline{11}}=1.$$

	$(s_1\cdot\partial)$	$(s_2\cdot\partial)$	$(s_3\cdot\partial)$	$(s_4\cdot\partial)$	$(s_5\cdot\partial)$	$(s_6\cdot\partial)$	$(s_7\cdot\partial)$	$(s_8\cdot\partial)$	$(s_9\cdot\partial)$	$(s_{10}\cdot\partial)$	$(s_{11}\cdot\partial)$	$(s_{12}\cdot\partial)$
$(s_1\cdot\partial)$	0	0	$-3(s_3\cdot\partial)$	$-(s_4\cdot\partial)$	$-(s_5\cdot\partial)$	$-(s_6\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0
$(s_2\cdot\partial)$	0	0	$-(s_3\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(s_{10}\cdot\partial)$	$\frac{1}{2}(s_{11}\cdot\partial)$	0
$(s_3\cdot\partial)$	$3(s_3\cdot\partial)$	$(s_3\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$(s_4\cdot\partial)$	$(s_4\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	$(s_6\cdot\partial)$	$-(s_5\cdot\partial)$	0	0	0
$(s_5\cdot\partial)$	$(s_5\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	$-(s_6\cdot\partial)$	0	$(s_4\cdot\partial)$	0	0	0
$(s_6\cdot\partial)$	$(s_6\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	$(s_5\cdot\partial)$	$-(s_4\cdot\partial)$	0	0	0	0
$(s_7\cdot\partial)$	0	0	0	0	$(s_6\cdot\partial)$	$-(s_5\cdot\partial)$	0	$(s_9\cdot\partial)$	$-(s_8\cdot\partial)$	0	0	0
$(s_8\cdot\partial)$	0	0	0	$-(s_6\cdot\partial)$	0	$(s_4\cdot\partial)$	$-(s_9\cdot\partial)$	0	$(s_7\cdot\partial)$	0	0	0
$(s_9\cdot\partial)$	0	0	0	$(s_5\cdot\partial)$	$-(s_4\cdot\partial)$	0	$(s_8\cdot\partial)$	$-(s_7\cdot\partial)$	0	0	0	0
$(s_{10}\cdot\partial)$	0	$-\frac{1}{2}(s_{10}\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$(s_{10}\cdot\partial)$
$(s_{11}\cdot\partial)$	0	$-\frac{1}{2}(s_{11}\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-(s_{11}\cdot\partial)$
$(s_{12}\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-(s_{10}\cdot\partial)$	$(s_{11}\cdot\partial)$	0

Таблица коммутаторов инфинитезимальных операторов (1), определяющих естественную конечномерную подалгебру алгебры непрерывных симметрий системы пространственных уравнений математической теории пластичности

2. Оптимальная система одномерных подалгебр. Как известно из публикаций [5, 6], алгебра симметрий уравнений плоской задачи имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из 1 двухпараметрического, 7 однопараметрических и 19 индивидуальных инфинитезимальных генераторов (всего 27 элементов). Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из 1 однопараметрического и 20 индивидуальных инфинитезимальных генераторов (всего 21 элемент).

Построение оптимальной системы одномерных подалгебр алгебры симметрий L^{12} мы осуществим с помощью "интуитивного" подхода. Он состоит в том, что инфинитезимальный генератор группы симметрий (точнее, коэффициенты в его разложении по базисным операторам) подвергается в какой-либо последовательности различным преобразованиям из списка внутренних автомофизмов так, чтобы "упростить" его настолько, насколько это представляется возможным (в частности, стремясь привести к нулевому значению как можно больше из указанных коэффициентов). Далее выбираем из каждого класса подобных инфинитезимальных операторов (т.е. из класса операторов, переводящихся друг в друга внутренними автоморфизмами,) по одному простейшему представителю и формируем оптимальную систему n_1 одномерных подалгебр.

Оптимальная система одномерных подалгебр естественной конечномерной алгебры симметрий L^{12} системы пространственных уравнений математической теории пластичности (см. [3], система (3)) имеет вид:

$$(s_1\cdot\partial)+D_1(s_2\cdot\partial)+D_2(s_7\cdot\partial)+D_3(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_2\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)+D_1(s_7\cdot\partial)+D_2(s_{12}\cdot\partial),$$
$$(s_2\cdot\partial)+D_1(s_7\cdot\partial)+D_2(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_1\cdot\partial)-3(s_2\cdot\partial)\pm(s_3\cdot\partial)+D_1(s_7\cdot\partial)+D_2(s_{12}\cdot\partial),$$
$$(s_3\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)+D(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)+D(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)+D(s_{12}\cdot\partial),$$
$$(s_3\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial)\pm(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_7\cdot\partial)+D(s_{12}\cdot\partial),\quad (s_{12}\cdot\partial),$$
$$(s_1\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)+D_1((s_2\cdot\partial)+\frac{1}{2}(s_{12}\cdot\partial))+D_2(s_7\cdot\partial),\quad (s_2\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)+\frac{1}{2}(s_{12}\cdot\partial)+D(s_7\cdot\partial),$$
$$(s_2\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)+\frac{1}{2}(s_{12}\cdot\partial)+D(s_7\cdot\partial),\quad (s_1\cdot\partial)-3(s_2\cdot\partial)\pm(s_3\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)-\frac{3}{2}(s_{12}\cdot\partial)+D(s_7\cdot\partial)),$$
$$(s_1\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial)+D_1((s_2\cdot\partial)-\frac{1}{2}(s_{12}\cdot\partial))+D_2(s_7\cdot\partial),\quad (s_2\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial)-\frac{1}{2}(s_{12}\cdot\partial)+D(s_7\cdot\partial),$$
$$(s_2\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial)-\frac{1}{2}(s_{12}\cdot\partial)+D(s_7\cdot\partial),\quad (s_1\cdot\partial)-3(s_2\cdot\partial)\pm(s_3\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial)+\frac{3}{2}(s_{12}\cdot\partial)+D(s_7\cdot\partial)),$$
$$(s_1\cdot\partial)+D(s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)+D((s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial)),$$
$$(s_3\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),$$
$$(s_3\cdot\partial)\pm(s\cdot\partial)+D((s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial)),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),$$
$$(s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_{10}\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial),$$
$$(s_3\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial),$$
$$(s_4\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial),\quad (s_7\cdot\partial)\pm(s_{10}\cdot\partial),\quad (s_{10}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),$$
$$(s_3\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial)\pm(s_7\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial)\pm(s_4\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),$$
$$(s_3\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_7\cdot\partial)\pm(s_{11}\cdot\partial),\quad (s_{11}\cdot\partial),\quad (s_3\cdot\partial),\quad (s_4\cdot\partial).$$

В этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо. В каждом элементе списка один из базисных операторов $(s_j\cdot\partial)$ может быть замещен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии рассматриваемой системы дифференциальных уравнений в частных производных. В списке присутствуют один инфинитезимальный оператор, зависящий от трех произвольных постоянных; 9 инфинитезимальных операторов, зависящих от двух произвольных постоянных; 45 инфинитезимальных операторов, зависящих от одной произвольной постоянной; 95

индивидуальных инфинитезимальных операторов. Все это указывает на высокую степень симметрии системы пространственных уравнений математической теории пластичности .

Оптимальная система n_1 используется для редукции системы пространственных уравнений математической теории пластичности, которая является системой дифференциальных уравнений в частных производных, к системам, содержащим лишь две независимые переменные, которые, в свою очередь, могут быть также подвергнуты групповому анализу с целью их дальнейшей редукции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях// Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. 3.
2. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Геометрические симметрии трехмерных уравнений математической теории пластичности./ Статья приведена в данном сборнике.
3. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.). Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
5. Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности //Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2004.
6. Радаев Ю.Н. Группы симметрий дифференциальных уравнений плоской задачи математической теории пластичности //Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 4(44). 2006.

Сведения об авторах:

Ковалев Владимир Александрович – заведующий кафедрой прикладной математики, Московский городской университет управления Правительства Москвы, д.ф.-м.н., профессор, 7 (495) 957-91-13. E-mail: vlad_koval@mail.ru

Радаев Юрий Николаевич – заведующий кафедрой механики сплошных сред, Самарский государственный университет, д.ф.-м.н., профессор, 7 (846) 334-54-41. E-mail: radayev@ssu.samara.ru

СДВИГОВАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
И РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Коврижных А.М.

Предлагается сдвиговая модель накопления повреждений при деформировании твердых тел. Считается, что необратимая деформация является результатом сдвигов в определенных плоскостях. В перпендикулярных к этим плоскостям направлениях происходит изменение нормальной деформации пропорционально соответствующему сдвигу [1, 2]. Такой подход позволяет учитывать развитие трещин и пор на фоне растущих деформаций ползучести без применения кинетического уравнения поврежденности Качанова-Работнова [3, 4]. Разрушение материала начинается при достижении максимальным сдвигом критической величины, что приводит к потере сдвиговой прочности. С применением модели, основанной на максимальном касательном напряжении и степенном законе, решены задачи о деформировании и разрушении упруго-ползучего тела в стадиях неустановившейся и установившейся ползучести. Рассматриваются цилиндрическая и сферическая полости в неограниченном теле под действием внутреннего давления, чистый изгиб стержня прямоугольного поперечного сечения и кручение круглого стержня. Для рассмотренных элементов конструкций определены напряжения, деформации ползучести, времена начала и полного разрушения, положение фронта разрушения и скорость его распространения в любой момент времени.

1. Деформирование и разрушение цилиндрической и сферической полостей в условиях ползучести. Рассмотрим сначала плоскую деформацию материала вокруг цилиндрической полости радиуса $r = a$ в неограниченном теле. Обозначим σ_r, σ_θ, σ_z – радиальное, тангенциальное и осевое напряжение соответственно. На поверхности $r = a$ действует постоянное давление $\sigma_r = -p$, а при $r \to \infty$ материал не нагружен $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$. В упругой задаче имеет место неравенство $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$, и поэтому, необратимая деформация ползучести будет представлять собой сдвиг в направлении действия $\tau_{\max} = (\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ [1]. Будем считать, что этот сдвиг и скорость его изменения в условиях ползучести связаны с максимальным касательным напряжением степенным законом:

$$\gamma_c = \Omega(t)\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2}\right)^n, \quad \dot{\gamma}_c = \frac{d\Omega(t)}{dt}\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2}\right)^n. \tag{1.1}$$

Проектируя сдвиг γ_c на главные оси напряжений и учитывая упругие деформации, получим:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\gamma_c}{2} + \frac{1-\nu}{2G}\sigma_\theta - \frac{\nu}{2G}\sigma_r, \; \varepsilon_r = -\frac{\gamma_c}{2} + \frac{1-\nu}{2G}\sigma_r - \frac{\nu}{2G}\sigma_\theta. \tag{1.2}$$

Если в (1.2) не учитывать упругие деформации то, применяя (1.1), граничные условия для напряжения σ_r, уравнение равновесия и условие совместности деформаций, определим:

$$\sigma_\theta = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{2/n}\left(1-\frac{2}{n}\right), \; \sigma_r = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{2/n}, \; \gamma_c = \Omega(t)\frac{p^n a^2}{n^n r^2}. \tag{1.3}$$

Для учета упругих деформаций перейдем к безразмерным величинам:

$$\gamma = \frac{G}{p}\gamma_c, \; \tau = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2p}, \; \tilde{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{p}, \; \tilde{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{p}, \; \tilde{t} = G p^{n-1}\Omega(t), \; \tilde{r} = r/a. \tag{1.4}$$

Выражая из (1.1) $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ через γ_c, учитывая определяющие соотношения (1.2), уравнения равновесия и совместности деформаций, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{r}} + \frac{2(1-\nu)}{n\gamma}\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n}\frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{r}} + \frac{2\gamma}{\tilde{r}} + \frac{4(1-\nu)}{\tilde{r}}\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n} = 0. \tag{1.5}$$

При $n \to \infty$ из (1.5) как частный случай следует уравнение, полученное в [5] для идеального упруго-ползучего тела. Найдем решение (1.5) для γ и $\tau = (\gamma/\tilde{t})^{1/n}$, которое совпадает с упругим при $\tilde{t} = 0$ и с решением (1.3) при $\tilde{t} \to \infty$:

$$\gamma + 2(1-\nu)\left(\frac{\gamma}{\tilde{t}}\right)^{1/n} = \left[2(1-\nu) + \frac{\tilde{t}}{n^n}\right]\frac{1}{\tilde{r}^2}, \tag{1.6}$$

Степенной закон для безразмерных переменных имеет вид $\gamma = \tilde{t}\tau^n$. При заданных значениях независимых переменных $\tilde{r}$, $\tilde{t}$ и величинах ν, n из (1.6) можно определить γ и τ. Далее из уравнения равновесия, учитывая граничное условие $\tilde\sigma_r = -1$ при $\tilde r = 1$, путем численного интегрирования по $\tilde r$ можно определить $\tilde\sigma_r$ и $\tilde\sigma_\theta$.

Определим время начала разрушения цилиндрической полости, положение фронта разрушения $r = c$ и скорость его распространения без учета упругих деформаций. При нагружении полости постоянным внутренним давлением происходит рост деформаций ползучести и при $t = t_0$, когда $\gamma_c = \gamma_*$ ее контур $r = a$ разрушается. Время начала разрушения t_0 определим из (1.3)

$$\Omega(t_0) = \Omega_0 = \gamma_* \frac{n^n}{p^n}, \quad t_0 = \Omega^{-1}(\Omega_0).$$

Из (1.3) и (1.2) определим скорость радиального перемещения произвольной точки в зоне ползучести $r \ge c > a$ при $t > t_0$

$$\gamma_c = \frac{d\Omega(t)}{dt}\frac{p^n c^2}{n^n r^2} = 2\frac{\dot u}{r}, \quad \dot u = \frac{d\Omega(t)}{dt}\frac{p^n c^2}{2n^n r}. \tag{1.7}$$

Решение для напряжений получается из (1.3) заменой a на c. При $t > t_0$ имеются две зоны: $r > c$ – зона ползучести и $a < r \le c$ – зона разрушения. Учитывая (1.2) на фронте разрушения при $r = c$, получим $\dot u = \gamma_* \dot c / 2$, с другой стороны имеем (1.7). Потребовав непрерывность радиальной скорости $\dot u$ на фронте разрушения в произвольный момент времени, получим уравнение:

$$d\Omega(t) = \frac{\gamma_* n^n}{p^n}\frac{dc}{c}. \tag{1.8}$$

Интегрируя (1.8), и учитывая, что при $t = t_0$, $c = a$, получим:

$$\Omega(t) = \Omega_0\left(1 + \ln\frac{c}{a}\right), \ \frac{c}{a} = \exp\left(\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} - 1\right), \quad \frac{dc}{dt} = \frac{a}{\Omega_0}\exp\left(\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} - 1\right)\frac{d\Omega(t)}{dt}. \tag{1.9}$$

Ниже рассмотрим деформирование и разрушение сферической полости при постоянном внутреннем давлении. Из анализа упругого решения следует, что $\sigma_\theta = \sigma_\varphi > \sigma_r$, и поэтому деформация ползучести является результатом сдвигов в направлениях главных касательных напряжений $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ и $(\sigma_\varphi - \sigma_r)/2$ [1]. Такое напряженное состояние будем называть состоянием полной ползучести. В этом случае определяющие соотношения имеют вид:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\gamma_c}{2} + \frac{1-\nu}{E}\sigma_\theta - \frac{\nu}{E}\sigma_r, \ \varepsilon_r = -\gamma_c - \frac{2\nu}{E}\sigma_\theta + \frac{1}{E}\sigma_\theta. \tag{1.10}$$

Для сдвига γ_c имеем степенной закон (1.1). Когда упругими деформациями можно пренебречь, дифференцируя (1.10) по времени, получим: $2\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = \gamma_c$. Подставляя значения ε_θ и ε_r в условие совместности скоростей деформаций, получим уравнение для γ_c и его общее решение:

$$\frac{\partial\gamma_c}{\partial r} + \frac{3\gamma_c}{2r} = 0, \quad \gamma_c = \frac{C(t)}{r^3}.$$

Подставляя найденное решение в (1.1), определим $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2$. Затем, применяя уравнение равновесия и учитывая граничные условия для напряжения σ_r, определим напряжения и γ_c:

$$\sigma_\theta = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{3/n}\left(1 - \frac{3}{2n}\right), \ \sigma_r = -p\left(\frac{a}{r}\right)^{3/n}, \ \gamma_c = \Omega(t)\left(\frac{3p}{4n}\right)^n\frac{a^3}{r^3}. \tag{1.11}$$

Ниже для решения этой задачи с учетом упругих деформаций перейдем к безразмерным величинам, которые определяются из (1.4) с заменой G на E. Выражая из (1.1) $(\sigma_\theta - \sigma_r)/2$ через γ_c, учитывая определяющие соотношения (1.10), уравнение равновесия и условие совместности деформаций, получим следующее дифференциальное уравнение для γ

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\tilde r} + \frac{4(1-\nu)}{n\gamma}\left(\frac{\gamma}{\tilde t}\right)^{1/n}\frac{\partial\gamma}{\partial\tilde r} + \frac{3\gamma}{\tilde r} + \frac{12(1-\nu)}{\tilde r}\left(\frac{\gamma}{\tilde t}\right)^{1/n} = 0, \tag{1.12}$$

При $n \to \infty$ из (1.12) как частный случай следует уравнение, полученное в [5] для идеального упруго-ползучего тела. Решая (1.12), найдем интегралы для γ и $\beta = (\gamma/\tilde t)^{1/n}$, которые при $\tilde t = 0$ совпадают с упругим решением, а при $\tilde t \to \infty$ с решением (1.11):

$$\text{¥} + 4(1-\text{¬})\left(\frac{\text{¥}}{\tilde{t}}\right)^{1/n} = \left[3(1-\text{¬}) + \tilde{t}\left(\frac{3}{4n}\right)^{n}\right]\frac{1}{\tilde{r}^{3}}. \tag{1.13}$$

При заданных значениях независимых переменных $\tilde{r}$, $\tilde{t}$ и величинах ¬ , n из (1.13) можно определить ¥ и ². Далее из уравнения равновесия и граничного условия $\tilde{\pm}_r = -1$ при $\tilde{r} = 1$, путем численного интегрирования по $\tilde{r}$ можно определить $\tilde{\pm}_r$ и $\tilde{\pm}_{–}$.

Определим время начала разрушения сферической полости t_0 , без учета упругих деформаций. Разрушение сферической полости начинается с ее контура $r = a$ при $t = t_0$, когда $\text{¥}_c = \text{¥}_*$. В результате из (1.11) имеем

$$\mathrm{t}\,(t_0) = \mathrm{t}_0 = \text{¥}_*\left(\frac{4n}{3p}\right)^{n}, \quad t_0 = \mathrm{t}^{-1}(\mathrm{t}_0). \tag{1.14}$$

Из условия непрерывности радиальной скорости точек фронта разрушения получим формулы (1.9), в которых для сферической полости t_0 определяется из (1.14).

2. Чистый изгиб стержня прямоугольного поперечного сечения. Продольная деформация стержня нагруженного изгибающим моментом M в условиях ползучести записывается в виде

$$\text{£}_z = \text{£}_e + \text{£}_c = y(\text{©}_e + \text{©}_c) = \frac{\pm_z}{E} + \Omega(t)\pm_z^{\,n}, \tag{2.1}$$

где £_e и £_c – упругая деформация и деформация ползучести, ©_e и ©_c – кривизны изогнутой оси балки, обусловленные упругостью и ползучестью соответственно. Учитывая, что при $t=0$, $\Omega(t) = 0$, а при $\mathrm{t}\,(t) \to \infty$ упругой деформацией можно пренебречь, определим ©_e и ©_c:

$$\kappa_e = \frac{M}{EI_x},\ \kappa_c = \Omega(t)\left(\frac{M}{I_{nx}}\right)^{n},\ I_x = \frac{4bh^3}{3},\ I_{nx} = \frac{4nbh^{2+1/n}}{2n+1}. \tag{2.2}$$

где M – изгибающий момент, E – упругий модуль, I_x, I_{nx} – момент и обобщенный момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси x. Введем безразмерные величины:

$$\sigma = \frac{\sigma_z}{M/W_x},\ e = \frac{E\varepsilon_c}{M/W_x},\ \tilde{t} = E\Omega(t)\left(\frac{M}{W_x}\right)^{n-1},\ \tilde{y} = \frac{y}{h}, \tag{2.3}$$

где $W_x = I_x/h$ – осевой момент сопротивления. Учитывая вышеизложенное, получим уравнение для определения безразмерного продольного напряжения

$$\sigma + \tilde{t}\sigma^{n} = \tilde{y}\left[1 + \tilde{t}\left(\frac{2n+1}{3n}\right)^{n}\right]. \tag{2.4}$$

Задавая $\tilde{t}$, $\tilde{y}$ и n, можно из (2.4) определить $\pm(\tilde{y}, \tilde{t})$, а затем $e = \tilde{t}\pm^{n}$.

Рассмотрим теперь определение времени начала и полного разрушения балки при чистом изгибе в условиях ползучести. Если не учитывать упругие деформации, то из гипотезы плоских сечений и степенного закона имеем следующие соотношения:

$$\text{£}_c = y\text{©}_c,\ \kappa_c = \Omega(t)\left(\frac{M}{I_{nx}}\right)^{n},\ d\kappa_c = d\Omega(t)\left(\frac{M}{I_{nx}}\right)^{n}. \tag{2.5}$$

До начала разрушения наибольшее значение деформации £_c достигается при $y = h_0$. Время начала разрушения определим из (2.5) и условия, что $\text{£}_c = \text{£}_G$ при $t = t_0$:

$$\text{©}_c = \text{£}_*/h_0 = \mathrm{t}\,(t_0)\left(\frac{M}{I_{nx}}\right)^{n},\ \mathrm{t}\,(t_0) = \mathrm{t}_0 = \frac{\text{£}_*(4nb)^{n}h_0^{2n}}{(2n+1)^{n}M^{n}},\ t_0 = \mathrm{t}^{-1}(\mathrm{t}_0). \tag{2.6}$$

Предположим, что при ползучести материал одинаково сопротивляется разрушению при растяжении и сжатии. В рассматриваемом случае нейтральный слой балки будет неподвижным и с двух сторон $y = \pm h(t)$ при $t = t_0$ начинается движение двух фронтов разрушения, которые одновременно является и свободными границами балки. На фронте разрушения в произвольный момент времени с одной стороны имеем $d\kappa_c = -\varepsilon_* dh / h^2$, с другой стороны последнее равенство (2.5). В результате получим дифференциальное уравнение для Ω(t):

$$d\Omega(t) = -\frac{\varepsilon_*(4nb)^n h^{2n-1} dh}{(2n+1)^n M^n}\,. \tag{2.7}$$

Интегрируя (2.7), и учитывая, что при $t = t_0$, $h(t_0) = h_0$, получим:

$$\Omega(t) = \Omega_0\left[1 + \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{h^{2n}}{h_0^{2n}}\right)\right], \quad \frac{h(t)}{h_0} = \left[1 + 2n\frac{\Omega_0 - \Omega(t)}{\Omega_0}\right]^{\frac{1}{2n}}. \tag{2.8}$$

Время полного разрушения балки определим из (2.8) при $h = 0$. Скорость распространения фронта разрушения находится дифференцированием по времени второго равенства (2.8).

3. Деформирование и разрушение круглого стержня при кручении в условиях ползучести. Обозначим z, ¯ – осевое и тангенциальное направления соответственно. При закручивании стержня моментом M_z имеем:

$$¥_z = \frac{²_z}{«} + ¥_c = \frac{²_z}{«} + \text{t}\,(t)²_z^n = r(\mu_e + \mu_c), \tag{3.1}$$

где $²_z = ²_{z¯}$, $¥_z = ¥_{z¯}$ – сдвиговая деформация, $¥_c = ¥_{z¯}^c$ - сдвиговая деформация, вызванная ползучестью, μ_e и μ_c – две составляющие угла закручивания, обусловленные соответственно упругостью и ползучестью стержня при кручении. Учитывая, что при $t = 0$, $\Omega(t) = 0$, $\tau_z = \mu r\omega_e$, а при $\text{t}\,(t) \to \infty$ упругой деформацией можно пренебречь, определим μ_e и μ_c:

$$\omega_e = \frac{M_z}{\mu I_r},\ \omega_c(t) = \Omega(t)\left(\frac{M_z}{I_{nr}}\right)^n,\ I_r = \frac{\pi a^4}{2}, I_{nr} = \frac{2\pi a^{3+1/n}}{3+1/n}\,. \tag{3.2}$$

где « – упругий модуль сдвига, I_r, I_{nr} – полярный момент и обобщенный полярный момент инерции. Введем безразмерные величины:

$$\tau = \frac{\tau_z}{M_z/W_r},\ \gamma = \frac{\mu\gamma_c}{M_z/W_r},\ \tilde{t} = \mu\Omega(t)\left(\frac{M_z}{W_r}\right)^{n-1},\ \tilde{y} = \frac{y}{h}, \tag{3.3}$$

где $W_r = I_r / a$ – полярный момент сопротивления. Учитывая вышеизложенное, получим уравнение для определения безразмерного касательного напряжения

$$\tau + \tilde{t}\tau^n = \tilde{r}\left[1 + \tilde{t}\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n\right]. \tag{3.4}$$

Задавая $\tilde{t}, \tilde{r}$ и n, можно из (3.4) определить $\tau(\tilde{r}, \tilde{t})$, а затем $\gamma = \tilde{t}\tau^n$.

Рассмотрим теперь разрушение круглого стержня при кручении в условиях ползучести без учета упругих деформаций. Определим времена начала и полного разрушения стержня. Пусть a_0, a – начальный и текущий радиусы стержня. При разрушении текущий радиус $r = a(t)$ совпадает с фронтом разрушения, движущимся к центру стержня. Так как угол закручивания $\mu_c(t)$ на единицу длины стержня от r не зависит, а зависит только от t, то имеем:

$$\gamma_c = r\omega_c(t), \quad \dot{\gamma}_c = r\dot{\omega}_c, \quad \omega_c(t) = \Omega(t)\left(\frac{M_z}{I_{nr}}\right)^n. \tag{3.5}$$

Деформация ползучести γ_c наибольшее значение принимает при $r = a$, поэтому разрушение начинается с поверхности стержня $r = a_0$ при $t = t_0$, где t_0 – время начала разрушения. Таким образом, из (3.7) получим:

$$\frac{\gamma_*}{a_0} = \Omega(t_0)\left(\frac{M_z}{I_{nr}}\right)^n, \quad \Omega(t_0) = \Omega_0 = \frac{\gamma_* a_0^{3n}}{M^n}\left(\frac{2\pi}{3+1/n}\right)^n, \quad t_0 = \Omega^{-1}(\Omega_0).\,. \tag{3.6}$$

При $t \geq t_0$ поверхность стержня $r = a(t)$ разрушается и с увеличением времени увеличивается угол закручивания. Из (3.5) следует:

$$d\omega_c = d\Omega(t)\left(\frac{3+1/n}{2\pi}\right)^n \frac{M_z^n}{a^{3n+1}}\,. \qquad (3.7)$$

С другой стороны из первой формулы (3.5) определим изменение угла закручивания на фронте разрушения $d\omega_c = -\gamma_* da/a^2$. Из (3.7) и условия непрерывности скорости изменения угла закручивания на фронте разрушения и в зоне ползучести получим дифференциальное уравнение для определения Ω(t):

$$d\Omega(t) = -\frac{\gamma_*}{M_z^n}\left(\frac{2\pi}{3+1/n}\right)^n a^{3n-1}da\,.$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что при $t = t_0$, $a = a_0$ получим

$$\Omega(t) = \Omega_0\left[1+\frac{1}{3n}\left(1-\frac{a^{3n}}{a_0^{3n}}\right)\right],\; a = a_0\left[1+3n\frac{\Omega_0-\Omega(t)}{\Omega_0}\right]^{\frac{1}{3n}}. \qquad (3.8)$$

Время полного разрушения стержня при кручении определим из (3.8) при $a = 0$. Скорость распространения фронта разрушения находится дифференцированием по времени второго равенства (3.8).

Заключение. В задачах о деформировании и разрушении цилиндрической и сферической полостей под действием внутреннего давления при установившейся и неустановившейся ползучести получены новые решения для определения деформаций ползучести, положения фронта разрушения и скорости его распространения. В задачах о чистом изгибе стержня прямоугольного поперечного сечения и о кручении круглого стержня определены напряжения, деформации ползучести, времена начала и полного разрушения. Для установившейся ползучести отношение времени полного разрушения к времени начала разрушения стержня при кручении совпадает с результатом, полученным в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекта № 08 - 08 - 00113).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коврижных А.М. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении //Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4.
2. Коврижных А.М. К теории пластичности учитывающей вид напряженного состояния при сложном нагружении //Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6.
3. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматлит, 1960.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
5. Коврижных А.М. Деформирование и разрушение бортов карьеров и подземных сооружений в условиях ползучести // Физ.-техн. пробл. разраб. полезных ископаемых. 2009. № 6.

<u>Сведения об авторе</u>

Коврижных Александр Михайлович – ведущий научный сотрудник Института горного дела Сибирского отделения РАН, (383) 332 90 00, (383) 217 03 37, E-mail amkovr@mail.ru

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И АНИЗОТРОПИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД ТИПА КВАРЦЕВАЯ МАТРИЦА – БИОТИТ

Колесников В.И., Бардушкин В.В., Сычёв А.П., Чекасина И.И., Яковлев В.Б.

Проведено численное моделирование зависимости эффективных упругих характеристик материалов типа кварцевая матрица – биотит от концентрации и формы включений. Кристаллиты кварца имели изометричную форму, включения биотита моделировались в форме эллипсоидов вращения с главной полуосью, ориентированной в направлении оси *z*. Рассматривалась изотропная функция распределения ориентаций (ФРО) для кварца, для включений использовалась осевая ФРО в направлении оси *z*, совпадающая с осью 6-го порядка биотита. По вычисленным эффективным упругим модулям были определены зависимости параметра анизотропии в направлении оси *z*.

Моделирование физико-механических свойств горных пород (в частности, их анизотропии) имеет большое значение при решении и интерпретации большого круга геолого-геофизических задач как фундаментального, так и прикладного характера. К ним относятся задачи реконструкции палеотектонического напряжённо-деформированного состояния горных массивов, предсказания землетрясений и извержений вулканов, учёта искривления траекторий сверхглубоких скважин, обоснования выбора мест строительства глубинных хранилищ радиоактивных (химических) отходов и оценки риска их хранения [1, 2]. Одним из основных факторов, влияющих на физико-механические свойства геоматериалов, является их минеральный состав. Однако эти свойства в значительной степени обусловлены и другими факторами, важнейшими из которых являются текстура формы включений (зёрна породообразующих минералов, поры, трещины и т.п.), их ориентация в пространстве материала, кристаллографическая текстура, а также концентрация элементов неоднородности. Оценка степени влияния на петрофизические характеристики каждого из указанных факторов даёт возможность сопоставлять и комплексно анализировать экспериментальные данные, чтобы в дальнейшем прогнозировать возможность их проявления в реальном геологическом разрезе [2-4].

Решение этих задач требует использования теоретических методов прогнозирования физико-механических свойств горных пород, позволяющих учитывать все эти факторы одновременно. Одним из подобных методов является метод обобщённого сингулярного приближения теории случайных полей [2-5]. Физический смысл такого приближения заключается в предположении однородности полей напряжений и деформаций в пределах неоднородности. Именно этим методом были проведены вычисления данной работы. В качестве объекта моделирования был выбран кварц (самый распространённый в земной коре минерал), содержащий включения из биотита. Основное расчётное соотношение для эффективных свойств в рамках обобщённого сингулярного приближения имеет вид (индексы опущены, угловые скобки определяют процедуру усреднения) [5]:

$$c^* = < c(\mathbf{r})(I - gc''(\mathbf{r}))^{-1} >< (I - gc''(\mathbf{r}))^{-1} >^{-1},$$

где c – тензор модулей упругости; I – единичный тензор четвёртого ранга; двумя штрихами обозначена разность между соответствующими параметрами неоднородной среды и однородного тела сравнения $c''(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r}) - c^{\mathrm{c}}$ (верхним индексом «с» обозначаются характеристики тела сравнения); тензор $g = g_{ijkl}$ – интеграл от сингулярной составляющей второй производной тензора Грина уравнений равновесия (по индексам, заключённым в выражении для тензора g_{ijkl} в круглые скобки, осуществляется операция симметризации):

$$g_{ijkl} = a_{i)(kl)(j}, \; a_{imjn} = -\frac{1}{4\pi}\int n_n n_m t_{ij}^{-1}\,\mathrm{d}\Omega,$$

где $d\Omega = \sin\theta\, d\theta d\varphi$, t_{ij}^{-1} – элементы матрицы, обратной матрице T с элементами $t_{ij} = c^{\mathrm{c}}_{injm} n_n n_m$, а n_n и n_m – компоненты вектора внешней нормали к поверхности включения. Для включений эллипсоидальной формы с главными полуосями l_1, l_2 и l_3 эти компоненты определяются соотношениями $n_1 = \frac{1}{l_1}\sin\theta\cos\varphi$, $n_2 = \frac{1}{l_2}\sin\theta\sin\varphi$, $n_3 = \frac{1}{l_3}\cos\theta$.

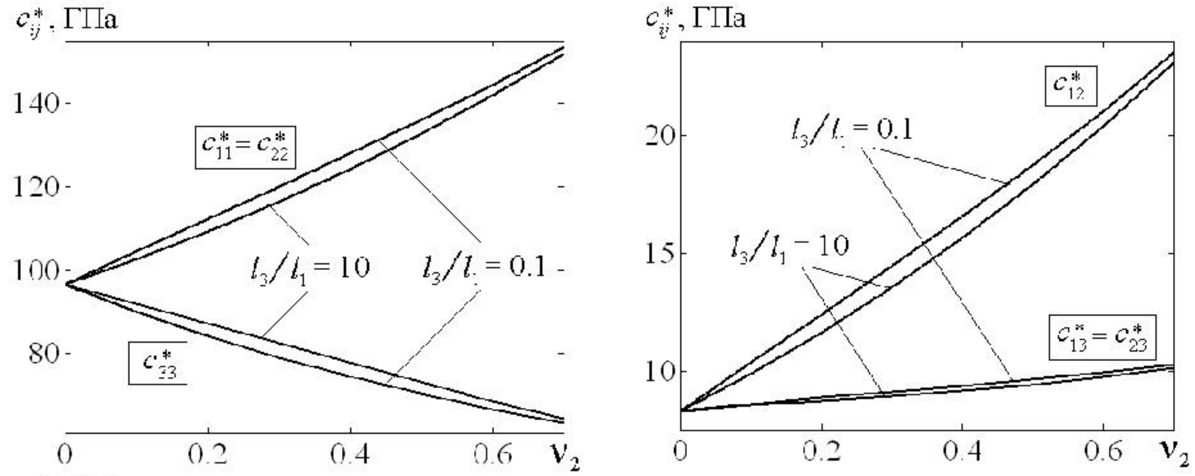
Процесс формирования поликристаллических материалов приводит к тому, что их свойства отличаются в различных направлениях, т.е. происходит формирование поликристаллической текстуры. При этом для многокомпонентных поликристаллов следует учитывать, что ансамбль кристаллитов одного материала может иметь одну текстуру, а ансамбль кристаллитов другого – иную. Ориентация кристаллитов может быть определена при помощи вращений $\mathbf{q} = \{\varphi_1, \Phi, \varphi_2\}$, задаваемых углами Эйлера φ_1, Φ и φ_2 ($0 \le \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$, $0 \le \Phi \le \pi$). Математически кристаллографическая текстура описывается при помощи функции распределения ориентаций кристаллографических осей кристаллитов (ФРО). Если принять, что кристаллиты каждого из компонентов отличаются друг от друга только ориентировкой кристаллографических осей, то процедура усреднения сводится к интегрированию по всевозможным углам Эйлера с ФРО $f_1(\mathbf{q}) = f_1(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$ и $f_2(\mathbf{q}) = f_2(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$ для компонентов «1» и «2» соответственно [5]. При этом для некоторой случайной (тензорной) величины $a(\mathbf{r})$ в двухкомпонентном материале получаем:

$$< a(\mathbf{r}) > = \frac{\nu_1}{8\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\mathbf{q}) a_1(\mathbf{q})\,\mathrm{d}\mathbf{q} + \frac{\nu_2}{8\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\mathbf{q}) a_2(\mathbf{q})\,\mathrm{d}\mathbf{q},$$

где ν_1 и ν_2 – объёмные доли компонентов ($\nu_1 + \nu_2 = 1$); $a_1(\mathbf{q}) = a_1(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$ и $a_2(\mathbf{q}) = a_2(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$ – величины, относящиеся к соответствующим компонентам; $d\mathbf{q} = \sin\Phi d\Phi d\varphi_1 d\varphi_2$.

В работе проведено моделирование эффективных физико-механических характеристик неоднородных материалов типа кварцевая матрица – биотит. Рассматривалась среда, состоящая из кристаллитов кварца изометричной формы, описываемых изотропной текстурной функцией $f_1(\varphi_1, \Phi, \varphi_2) \equiv 1$, с включениями биотита в форме эллипсоидов вращения с главными полуосями $l_1 = l_2 \ne l_3$ и ФРО вида $f_2(\varphi_1, \Phi, \varphi_2) = \delta(\Phi)$ ($\delta(\Phi)$ – дельта-функция Дирака), характеризующей совпадение направлений осей 6-го порядка кристаллитов биотита с осью z лабораторной системы координат. При расчётах были взяты следующие значения отличных от нуля компонент тензора модулей упругости минералов $c = \left\| c_{ij} \right\|$, ГПа ($i, j = 1, 2, \ldots, 6$): для кварца $c_{11} = c_{22} = 86{,}74$, $c_{33} = 107{,}20$, $c_{44} = c_{55} = 57{,}94$, $c_{66} = 39{,}88$, $c_{12} = c_{21} = 6{,}99$, $c_{13} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = 11{,}91$, $c_{14} = c_{41} = -c_{24} = -c_{42} = -c_{56} = -c_{65} = 17{,}91$; для биотита $c_{11} = c_{22} = 186{,}0$, $c_{33} = 54{,}0$, $c_{44} = c_{55} = 5{,}8$, $c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} = 76{,}8$, $c_{12} = c_{21} = 32{,}4$, $c_{13} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = 11{,}6$. Параметры тела сравнения принимались равными параметрам матрицы [6].

Исследовано влияние формы и концентрации кристаллических включений биотита в изотропной кварцевой матрице на модули упругости и анизотропию упругих свойств материала. На рис. 1 приведены результаты модельных расчётов ненулевых компонент (в матричной форме записи) c^*_{ij} тензора эффективных модулей упругости от концентрации ν_2 биотита для включений в форме дисков $\frac{l_3}{l_1} = 0{,}1$ и игл $\frac{l_3}{l_1} = 10$. Исследования показали, что изменение формы биотитовых включений варьирует значения эффективных модулей упругости породы меньше, чем изменение их концентрации.



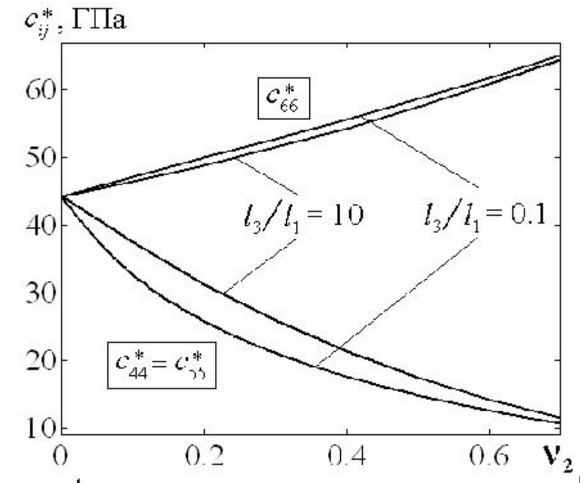
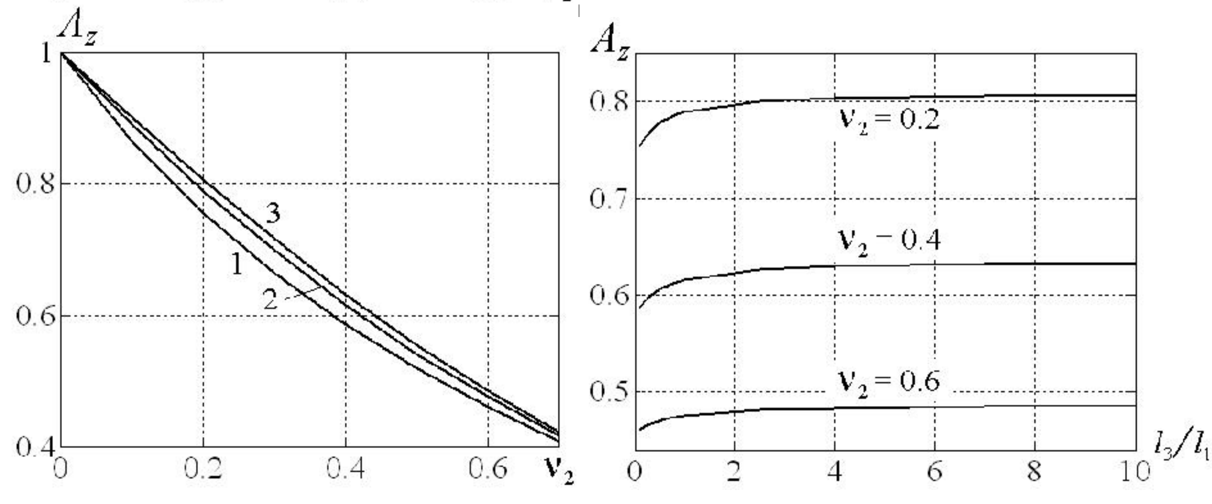


Рис. 1. Зависимости отличных от нуля компонент тензора эффективных модулей упругости c_{ij}^* неоднородных материалов типа кварцевая матрица – биотит от концентрации ν_2 и формы $\frac{l_3}{l_1}$ включений биотита



а *б*

Рис. 2. Зависимости параметра анизотропии A_z материалов типа кварцевая матрица – биотит от концентрации ν_2 и формы l_3/l_1 включений биотита

На рис. 2 представлены расчётные зависимости параметра анизотропии материала $A_z = \dfrac{c_{33}^* - c_{23}^*}{2c_{66}^*}$ в направлении оси *z*. При этом на рис. 2*а* показано изменение A_z при увеличении объёмной доли ν_2 биотита для разной формы включений (кривая 1 – $\dfrac{l_3}{l_1} = 0{,}1$; кривая 2 – $\dfrac{l_3}{l_1} = 1$;

кривая 3 – $\frac{l_3}{l_1} = 10$). Точка $\nu_2 = 0$ на этом рисунке соответствует поликристаллическому материалу, в котором отсутствуют биотитовые включения. В этой точке параметры анизотропии равны единице, что определяет изотропию эффективных упругих свойств «чистого» кварцевого поликристалла с изотропной ФРО. На рис. 2*б* представлены расчётные зависимости параметра анизотропии A_z композитного материала при вариации формы включений биотита для разных фиксированных значений их концентрации ν_2 .

Исследования показали, что зависимости параметра анизотропии A_z как от изменения концентрации включений, так и от вариации их формы имеют нелинейный характер. При этом форма включений в виде дисков варьирует параметр анизотропии больше, чем веретенообразная (относительно сферической формы). Анизотропия материала сильнее изменяется с увеличением концентрации биотита, чем при вариации формы биотитовых включений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров К.С., Продайвода Г.Т. Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 354 с.
2. Соболев Г.А., Никитин А.Н., Савёлова Т.И., Яковлев В.Б. Теоретико-экспериментальный подход к исследованию микро- и макросвойств и состояния горных пород (возможное направление развития моделей очага землетрясений) // Физика Земли. 2001. № 1. С. 6-15.
3. Колесников В.И., Бардушкин В.В., Никитин А.Н., Сычёв А.П., Яковлев В.Б. Механические свойства оливиносодержащих пород при высоких давлениях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2004. № 3. С. 11-18.
4. Колесников В.И., Чекасина И.И., Бардушкин В.В., Сычёв А.П., Яковлев В.Б. Моделирование текстурообразования в оливиносодержащих породах при высоких давлениях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2008. № 3. С. 36-41.
5. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
6. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наукова думка, 1989. 207 с.

Сведения об авторах

Колесников Владимир Иванович – академик РАН, доктор технических наук, профессор, ректор Ростовского государственного университета путей сообщения, (863) 245 06 13

E-mail: rek@rgups.ru

Бардушкин Владимир Валентинович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Высшая математика №2» Московского государственного института электронной техники (технического университета), (499) 720 87 39

E-mail: bardushkin@mail.ru

Сычёв Александр Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. лаб. «Транспорта, энергетики и новых композиционных материалов» Южного научного центра РАН, (863) 272 63 49, (863) 259 53 48

E-mail: Sap@rgups.ru

Чекасина Ирина Игоревна – аспирант кафедры «Высшая математика №2» Московского государственного института электронной техники (технического университета), (499) 720 87 39

E-mail: irina.chekasina@mail.ru

Яковлев Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, декан вечернего факультета Московского государственного института электронной техники (технического университета), (499) 720 87 81

E-mail: yakovlev@miee.ru

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТОНКИХ ОБОЛОЧКАХ

Коссович Л.Ю., Кириллова И.В.

Работа посвящена математическому моделированию процесса распространения нестационарных волн в тонких оболочках асимптотическими методами на основе точных трехмерных уравнений теории упругости. Рассмотрены продольные воздействия тангенциального, изгибающего и нормального типов. Использована асимптотическая модель распространения волн в полубесконечной оболочке вращения: применены двумерные составляющие Кирхгофа-Лява (тангенциальная и изгибная), решения для квазиплоской задачи теории упругости, параболический погранслой в окрестности квазифронта и гиперболический погранслой в окрестности фронта волны расширения и эллиптический погранслой вблизи фронта поверхностной волны Рэлея.

Задача о нестационарных волнах в однородной цилиндрической оболочке является базовой для понимания волновых процессов, как в оболочках вращения произвольного очертания, так и в составных конструкциях. Если нестационарные волны инициируются ударными воздействиями на торец, то тип нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) определяется видом граничного воздействия. В работе [1] приведена классификация граничных условий, определяющих разные виды нестационарного НДС. Выделены ударные воздействия типа *LT* (продольное, тангенциального типа), *LM* (продольное, изгибающего типа) и *NW* (нормальный тип воздействия). В каждом случае воздействия сначала формируется первичная волна, инициированная непосредственно торцевой поверхностью и несущая на своем фронте разрыв, определенный ударным характером воздействия. В случае нагрузки *LT*-типа разрыв имеется на фронте первичной волны, являющейся волной расширения. В случае нагрузки *LM*- типа разрыв также имеется на фронте первичной волны расширения. В случае нагрузки *NW*- типа разрыв переносится волной сдвига. Указанные первичные волны, взаимодействуя с лицевыми поверхностями, инициируют отраженные от них волны, которые, в свою очередь, отражаются от противоположных поверхностей и число таких волн растет со временем, образуя пакеты волн. Таким образом, три рассмотренных типа пакетов волн связаны непосредственно с тремя типами граничных воздействий.

Рассмотрим оболочку вращения (Рис.1). Отнесем срединную поверхность координатной системе (α,Θ,z), где α – длина дуги вдоль образующей, Θ – угол в окружном направлении, z – координата внешней нормали срединной поверхности.

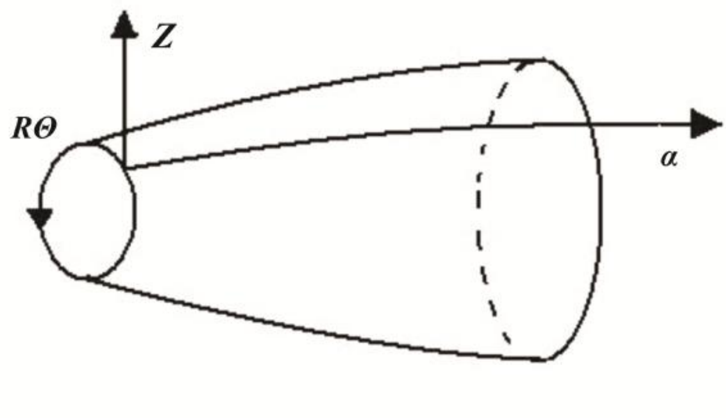


Рис. 1

Изучаются три типа воздействия.

В случае *LT*-нагружения мы имеем ненулевое значение продольного нормального усилия. Например, граничные условия

$$\sigma_{11} = IH(t)f(\theta), \quad v_2 = v_3 = 0 \text{ при } \alpha = 0,$$
$$f(\theta) = \cos(m\theta) \text{ или } f(\theta) = -\sin(m\theta)$$

($H(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда, I – амплитуда, σ_{ij} - напряжения, v_i - перемещения, t - время) соответствуют этой нагрузке.

В случае *LM*-нагружения мы имеем на торце ненулевой изгибающий момент. Граничные условия такого типа имеют вид:

$$\sigma_{11} = IH(t)f(\theta), \qquad v_2 = v_3 = 0 \ \text{при} \ \alpha = 0 .$$

В случае *NW*-нагружения мы имеем на торце ненулевое значение перерезывающей силы. Пример граничных условий:

$$\sigma_{13} = IH(t)f(\theta), \qquad v_1 = v_2 = 0 \ \text{при} \ \alpha = 0 .$$

Рассматриваем только однородные начальные условия

$$v_i = \partial v_i / \partial t = 0 \ \ \text{при} \ \ t = 0$$

и примем, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \ \text{при} \ z = \pm h ,$$

h - толщина оболочки.

Мы также предположим, что упругие волны не достигают второго края оболочки, и ограничим себя тем случаем, когда расстояние, пройденное фронтом, соизмеримо с характерным значением радиусов кривизны.

Выпишем уравнения движения и закона Гука для оболочки вращения.

$$H_2 \frac{\partial \pm_{11}}{\partial \sim} + \frac{H_1}{A}\frac{\partial \pm_{12}}{\partial \text{¯}} + H_1H_2\frac{\partial \pm_{13}}{\partial z} + \frac{A'H_1}{A}(\pm_{11} - \pm_{22}) + \left(2\frac{H_2}{R_1} + \frac{H_1}{R_2}\right)\pm_{13} - {}^\circ H_1H_2\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0 ,$$

$$H_2 \frac{\partial \pm_{12}}{\partial \sim} + \frac{H_1}{A}\frac{\partial \pm_{22}}{\partial \text{¯}} + H_1H_2\frac{\partial \pm_{23}}{\partial z} + 2\frac{A'H_1}{A}\pm_{12} + \left(\frac{H_2}{R_1} + 2\frac{H_1}{R_2}\right)\pm_{23} - {}^\circ H_1H_2\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$H_2 \frac{\partial \pm_{13}}{\partial \sim} + \frac{H_1}{A}\frac{\partial \pm_{23}}{\partial \text{¯}} + H_1H_2\frac{\partial \pm_{33}}{\partial z} - \frac{H_2}{R_1}\pm_{11} - \frac{H_1}{R_2}\pm_{22} + \left(\frac{H_1}{R_2} + \frac{H_2}{R_1}\right)\pm_{33} + \frac{A'H_1}{A}\pm_{13} - {}^\circ H_1H_2\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0,$$

где $H_1 = 1 + z/R_1$, $H_2 = 1 + z/R_2$, R_1, R_2 - главные радиусы кривизны срединной поверхности, $A_1 = 1$, $A_2 = A(\sim)$ - расстояние до оси вращения, штрихом обозначена производная по $\sim$, ${}^\circ$ - плотность материала оболочки.

Уравнения, выражающие закон Гука:

$$\pm_{11} = \frac{E}{(1+\neg)}\left[\frac{k_2}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial \sim} + k_1\left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{AH_2}\frac{\partial v_2}{\partial \text{¯}} + \frac{A'}{AH_2}v_1\right) + \left(\frac{k_2}{H_1R_1} + \frac{k_1}{H_2R_2}\right)v_3\right],$$

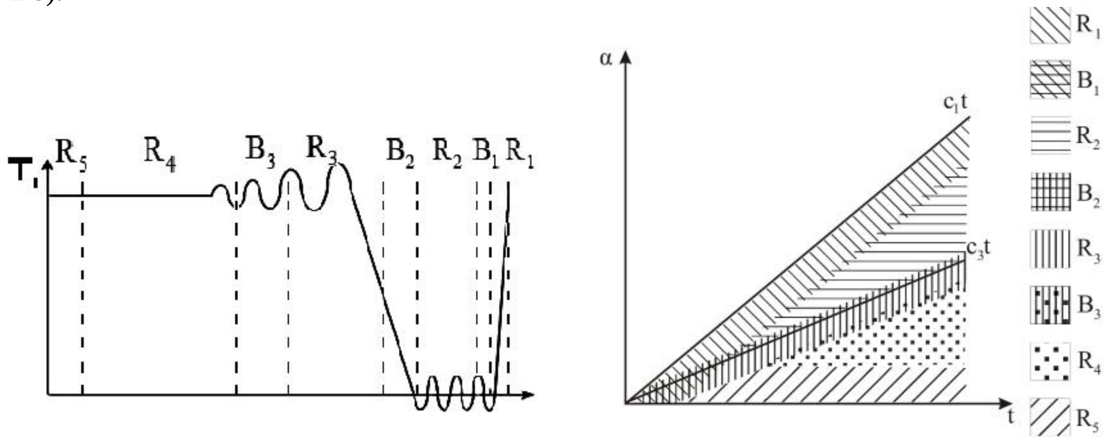
$$\pm_{11} = \frac{E}{(1+\neg)}\left[k_1\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial \sim} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) + k_2\left(\frac{1}{AH_2}\frac{\partial v_2}{\partial \text{¯}} + \frac{A'}{AH_2}v_1\right) + \left(\frac{k_1}{H_1R_1} + \frac{k_2}{H_2R_2}\right)v_3\right],$$

$$\pm_{33} = \frac{E}{(1+\neg)}\left[k_1\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial \sim} + \frac{1}{AH_2}\frac{\partial v_2}{\partial \text{¯}} + \frac{A'}{AH_2}v_1\right) + k_2\frac{\partial v_3}{\partial z} + k_1\left(\frac{1}{H_1R_1} + \frac{1}{H_2R_2}\right)v_3\right],$$

$$\pm_{13} = \frac{E}{2(1+\neg)}\left[\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_3}{\partial \sim} - \frac{1}{H_1R_1}v_1\right], \ \pm_{12} = \frac{E}{2(1+\neg)}\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_2}{\partial \sim} + \frac{1}{AH_2}\frac{\partial v_1}{\partial \text{¯}} - \frac{A'}{AH_2}v_2\right],$$

$$\pm_{23} = \frac{E}{2(1+\neg)}\left[\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{AH_2}\frac{\partial v_3}{\partial \text{¯}} - \frac{1}{H_2R_2}v_2\right], \ k_1 = \frac{\neg}{1-2\neg}, \quad k_2 = \frac{1-\neg}{1-2\neg} .$$

При *LT* - нагружении приведем схему решения для продольного усилия T_1 в цилиндрической оболочке (рис. 2 a) и схему областей применимости приближенных теорий (рис. 2 b).



a b

Рис.2

На рис. 2 a, 2 b применяются следующие обозначения для приближенных теорий: R_1 – гиперболический погранслой в окрестности фронта волны расширения, R_2 – квазиплоская квазисимметричная задача теории упругости, R_3 – параболический погранслой в окрестности квазифронта, R_4 – тангенциальное длинноволновое приближение (безмоментная составляющая теории Кирхгофа – Лява), R_5 – наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана; B_1, B_2, B_3 – области согласования.

Результаты исследований, приведенные в работе [2-4], показали, что область согласования B_3 между безмоментной составляющей R_4 и погранслоем R_3 определяется асимптотическим неравенством

$$\eta^{1-p} + \eta^{4/3-2p} + \eta^{2/3} << \left(c_3 t - \alpha\right)/R << 1\,,$$

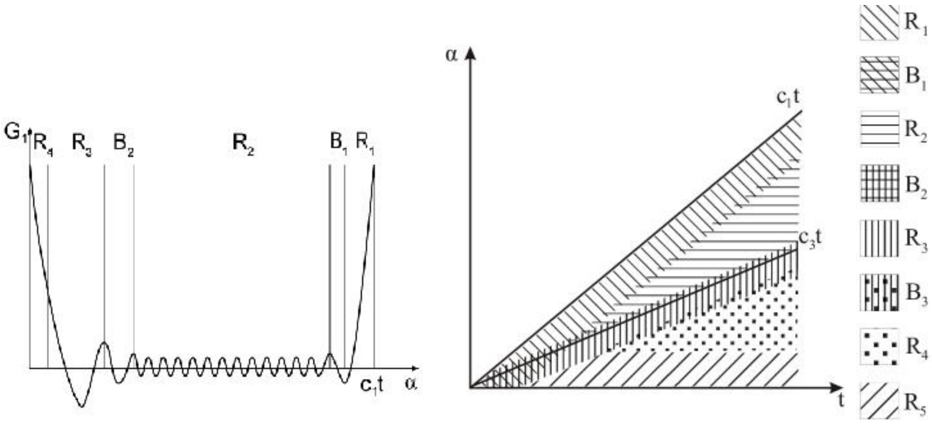
где $\eta = h/R$ – малый параметр тонкостенности оболочки, R – характерное значение радиуса оболочки, p – показатель изменяемости торцевой нагрузки по окружной координате, c_3 – скорость безмоментных волн. Из результатов работ [3, 4] следует, что область согласования B_2 между параболическим погранслоем R_3 и коротковолновой составляющей R_2 определяется следующим асимптотическим неравенством:

$$\eta^{2/3} << \left(\alpha - c_3 t\right)/R << 1\,.$$

В работах [6, 7] найдено расположение области согласования между коротковолновой составляющей и гиперболическим погранслоем R_1:

$$\eta^2 << \left(c_1 t - \alpha\right)/R << \eta\,.$$

В случае LM - нагружения [5] схема решения для изгибающего момента G_1 и схема области применимости приближенных теорий в случае малой изменяемости по окружной координате изображены на рис. 3 a, рис. 3 b.



a b

Рис. 3

Применяются следующие обозначения: R_1 – гиперболический погранслой в окрестности фронта волны расширения, R_2 – квазиплоская квазиантисимметричная задача теории упругости, R_3 – поперечное длинноволновое приближение (изгибная составляющая теории Кирхгофа–Лява), R_4 – наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана, B_1 и B_2 – области согласования.

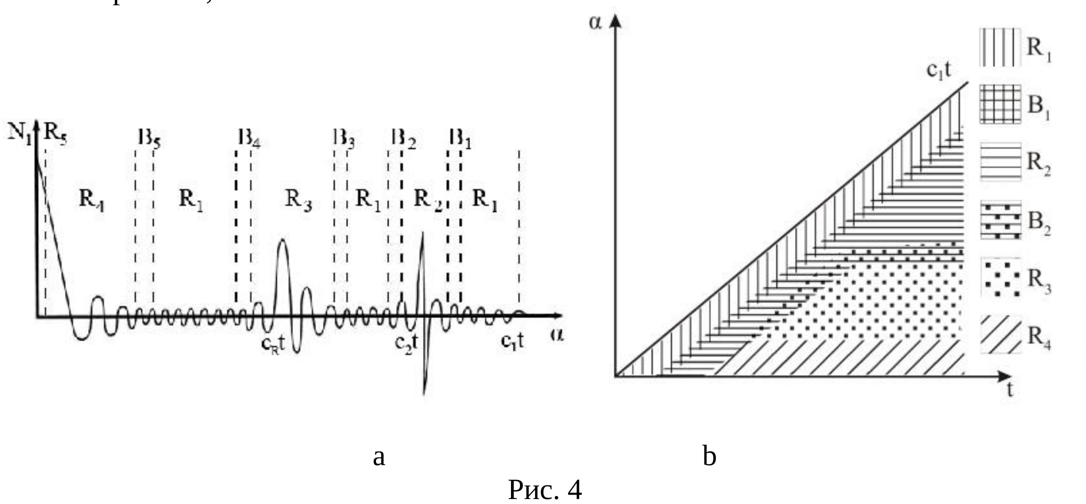
Исследования работы [3] с учетом выделения в рассматриваемом типе НДС вместо динамического погранслоя – погранслоя в окрестности фронта волны расширения и квазиплоской задачи [4], показали, что B_2 определяется следующим асимптотическим неравенством:

$$\eta^{1/2}\left(c_3 t/R\right)^2 + \eta^{1-p}\, c_3 t/R \ll \xi_0 \ll \eta^{1/4}\left(c_3 t/R\right)^{3/4} ,$$

а область B_1 определяется неравенством $\eta^2 \ll \left(c_1 t - \alpha\right)/R \ll \eta$.

Отметим, что приведенные схемы асимптотического разделения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями изменяемости полностью согласуются с выводами [8, 9] о действии принципа Сен-Венана в динамике пластин и оболочек.

В случае NW - нагружения на торец и нормального воздействия на лицевые поверхности схема решения [9-12] для перерезывающей силы N_1 и схема областей применимости приближенных теорий в случае малой изменяемости по окружной координате изображены на рис. 4 a, 4 b.



a b

Рис. 4

Применяются следующие обозначения: R_1 – квазиплоская квазисимметричная задача теории упругости, R_2 – погранслой в окрестности фронта волны сдвига, R_3 – погранслой в окрестности фронта поверхностных волн Релея, R_4 – поперечное длинноволновое приближение (изгибная составляющая теории Кирхгофа–Лява), R_5 – наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен–Венана, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 – области согласования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates. Intern. J.Solids and Structures. 1969. №6. P.607-627.
2. Коссович Л.Ю. Асимптотический анализ нестационарного НДС составных и подкрепленных оболочек при ударных торцевых воздействиях. Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы 5-й Рос. конф. с международным участием. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. С. 199-210.
3. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов. Изд-во Сарат.ун-та, 1986. 176 с.
4. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. L.: Acad. Press, 1998. 226 p.
5. Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д. Асимптотический анализ нестационарных, упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях. Изв. Сарат. ун-та. 2001. Т.I. № 2. С.111-131.
6. Кириллова И.В. Области согласования динамического погранслоя и коротковолнового высокочастотного приближения. Математическое моделирование и управление в технических системах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1998. Вып. 2. С. 3-11.
7. Кириллова И.В. Области применимости погранслоев в окрестностях фронтов волн в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны. Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 117-125.
8. Новожилов В.В., Слепян Л.И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней. ПММ. 1965. Т.29. Вып.2. С.261-281.
9. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя. Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. №9. С.10-22.
10. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Поле Релея в бесконечном упругом слое. Математика, механика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып.5. С.159-161.
11. Кушеккалиев А.Н. Решение задач о распространении волн в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке при нормальных воздействиях. Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2002. Вып. 14. С. 106-115.
12. Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Гиперболические погранслои в составных цилиндрических оболочках. Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 89-101.

Сведения об авторах

Коссович Леонид Юрьевич - д.ф.-м.н., профессор. Ректор Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (СГУ), заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики механико-математического факультета СГУ. Телефон рабочий: +7(8452)261696. Факс:+7 (8452)511635. E-mail: rector@sgu.ru

Кириллова Ирина Васильевна - к.ф.-м.н., доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики механико-математического факультета СГУ. Директор образовательно-научного института наноструктур и биосистем СГУ. Телефон рабочий: +7(8452)210750. Факс: +7 (8452) 511527. E-mail: iv@info.sgu.ru

ТЕРМОМЕХАНИКА ПРОСТРАНСТВЕННО АРМИРОВАННЫХ И ТЕРМОРАЗЛАГАЮЩИХСЯ КОМПОЗИТОВ [1)]

Кувыркин Г.Н., Головин Н.Н., Зарубин В.С.

С единых термодинамических позиций рассматриваются особенности термодеформирования пространственно армированных и терморазлагающихся композитных материалов на основе углерода. Формулируется основная система уравнений. Предлагается подход к идентификации характеристик компонентов пространственно армированных композитов. Приводятся результаты численного моделирования полей температур и термонапряжений в конструкциях.

Композитный материал – углерод-углеродные композит (УУК) и углепластик (УП) – будем рассматривать как сплошную среду, представляющую собой M химически не взаимодействующих между собой континуумов, каждый из которых относится к своему компоненту смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью [1]. Термомеханика многокомпонентной смеси строится на основе физических законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения и энергии, записанных для каждого компонента, а также второго закона термодинамики, записанного для смеси в целом, и определяется тремя термодинамическими функциями [2, 3]:

– свободной энергией $\rho A = \sum\limits_{\alpha=1}^{M} \rho_\alpha A_\alpha$,

$$A_\alpha = A_\alpha\left(\varepsilon_{ij}^{\alpha}, \ldots, \varepsilon_{ij}^{\alpha}, T_\alpha, \ldots, T_M, T_{\alpha,i}, U_i^{\nu} - U_i^{\alpha}, U_i^{M} - U_i^{\alpha}, \chi_{ij}^{\alpha}, \ldots, \chi_{ij}^{M}\right), \quad i, j = 1,2,3;$$

– энтропией $\rho S = \sum\limits_{\alpha=1}^{M} \rho_\alpha S_\alpha$,

$$S_\alpha = S_\alpha\left(\varepsilon_{ij}^{\alpha}, \ldots, \varepsilon_{ij}^{\alpha}, T_\alpha, \ldots, T_M, T_{\alpha,i}, U_i^{\nu} - U_i^{\alpha}, U_i^{M} - U_i^{\alpha}, \chi_{ij}^{\alpha}, \ldots, \chi_{ij}^{M}\right);$$

– вектором плотности теплового потока с компонентами $q_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{M} q_i^{\alpha}$,

$$q_\alpha = q_\alpha\left(\varepsilon_{ij}^{\alpha}, \ldots, \varepsilon_{ij}^{\alpha}, T_\alpha, \ldots, T_M, T_{\alpha,i}, U_i^{\nu} - U_i^{\alpha}, U_i^{M} - U_i^{\alpha}, \chi_{ij}^{\alpha}, \ldots, \chi_{ij}^{M}\right),$$

в качестве аргументов которых принимаются температуры и компоненты тензоров деформаций, градиентов температуры и разности компонентов векторов перемещений U_i^{α} компонентов композита и компоненты структурных параметров χ_{ij}^{α}, причём α, ν – номера компонентов композита.

В каждой точке смеси выполняется:

– закон сохранения массы α - компонента композита

$$\dot{\rho}_\alpha + (\rho_\alpha \upsilon_i^{\alpha})_{,i} = m_\alpha;$$

– закон сохранения количества движения α - компонента композита

$$\rho_\alpha F_i^{\alpha} + P_i^{\alpha} - \rho_\alpha \frac{D^{\alpha}\upsilon_i^{\alpha}}{Dt} + \sigma_{ij,j}^{\alpha} = 0;$$

– закон сохранения момента количества движения α - компонента композита

$$\sigma_{ij}^{\alpha} + L_{ij}^{\alpha} = \sigma_{ji}^{\alpha} + L_{ji}^{\alpha};$$

– закон сохранения энергии α - компонента композита

$$\rho_\alpha \upsilon_i^{\alpha} \frac{D^{\alpha}\upsilon_i^{\alpha}}{Dt} + \rho_\alpha \frac{D^{\alpha}u_\alpha}{Dt} = \rho_\alpha r_\alpha - q_{i,i}^{\alpha} + \psi^{\alpha} + \rho_\alpha F_i^{\alpha}\upsilon_i^{\alpha} + P_i^{\alpha}\upsilon_i^{\alpha} + +L_{ij}^{\alpha}\varpi_{ij}^{\alpha} + \theta^{\alpha} + \sigma_{ij}^{\alpha}\upsilon_{i,j}^{\alpha} + \sigma_{ij,j}^{\alpha}\upsilon_i^{\alpha};$$

– второй закон термодинамики для композита

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\left[\frac{D^{\alpha}(\rho_\alpha S_\alpha)}{Dt} - \frac{\rho_\alpha r_\alpha}{T_\alpha} + \frac{q_{i,i}^{\alpha}}{T_\alpha} + q_i^{\alpha}\frac{T_{\alpha,i}}{T_\alpha^{2}}\right] \geq 0,$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 08-08-00615а, 09-08-00699а и гранта Президента РФ о поддержке ведущих научных школ НШ-4046.2010.8.

где m – удельное производство массы; v_i – компоненты вектора скорости; F_i и P_i – компоненты векторов массовых и объёмных сил; L_{ij} – компоненты тензора, обусловленного межкомпонентным взаимодействием; r и ψ – удельные тепловыделение и количество теплоты, переданное за счёт межкомпонентного взаимодействия; ω_{ij} – компоненты тензора скорости сдвига; θ^α – удельное количество теплоты, переданное за счёт механического взаимодействия компонентов композита; u – удельная внутренняя энергия; кроме того, используется следующее обозначение: $\dfrac{D^\alpha(\ )}{Dt} = \dot{(\ )} + v_i^\alpha (\ )_{,i}$.

Изменение структурных параметров описывается кинетическими уравнениями

$$\frac{D^\alpha \chi_{ij}^\alpha}{Dt} = \Omega\left(\varepsilon_{ij}^\alpha, \ldots, \varepsilon_{ij}^\alpha, T_\alpha, \ldots, T_M, T_{\alpha,i}, U_i^\nu - U_i^\alpha, U_i^M - U_i^\alpha, \chi_{ij}^\alpha, \ldots, \chi_{ij}^M\right).$$

Представим функции механического и теплообменного взаимодействия компонентов в виде

$$\Theta^\alpha = P_i^{\alpha\nu}(v_i^\nu - v_i^\alpha) + \ldots + P_i^{\alpha M}(v_i^M - v_i^\alpha)\ ;\ \ \psi^\alpha = \beta^{\alpha\nu}(T_\nu - T_\alpha) + \ldots + \beta^{\alpha M}(T_M - T_\alpha),$$

причем $P_i^\alpha = P_i^{\alpha\nu} + \ldots + P_i^{\alpha M}$, а $\beta^{\alpha\nu}$ – коэффициент межкомпонентного теплообмена.

Воспользовавшись для α-компонента композита связью между внутренней и свободной энергиями $u_\alpha = A_\alpha + T_\alpha S_\alpha$, проведя некоторые преобразования и упрощения [4 – 6], получим основную систему уравнений для двухкомпонентных композитов на основе углерода, включающую в себя:

– уравнения нестационарной теплопроводности УУК

$$\rho_\alpha c_\alpha \dot{T}_\alpha = \left(\lambda_{ij_\alpha} T_{\alpha,j}\right)_{,i} + \beta^{\alpha\gamma}\left(T_\gamma - T_\alpha\right) + \rho_\alpha r_\alpha\,, \quad \alpha,\gamma = 1{,}2, \quad \alpha \neq \gamma\ ; \tag{1}$$

–уравнения нестационарной теплопроводности для УП

$$\begin{cases} \left[(1-\pi)C_k\rho_k + \pi C_g \dfrac{p_g}{R_g T}\right]\dot{T} = \left(f\lambda_{kij}T_{,j}\right)_{,i} + C_g \pi K_{kli} p_{g,j} T_{,i} + (1-\pi)\rho_k r_k; \\ \dfrac{1}{R_g T}\dot{p}_g = \left(K_{kij}\, p_{g,j}\right)_{,i} + \dfrac{\dot{T}}{R_g T} p_g + \dfrac{m_g}{\pi}; \end{cases} \tag{2}$$

– уравнения равновесия

$$(1-\pi)\sigma_{ij,j} + \pi\delta_{ij} p_{g,j} + \rho_k (1-\pi) F_i^{(1)} + \frac{p_g \pi}{R_g T} F_i^{(2)} = 0\ ; \tag{3}$$

– физические соотношения

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl}^\alpha + C_{ijkl}^\nu\right)\varepsilon_{kl} - H_{ijkl}^\alpha \chi_{kl}^\alpha - H_{ijkl}^\nu \chi_{kl}^\nu - Q_{ij}^\alpha\left(T_\alpha - T_0\right) - Q_{ij}^\nu\left(T_\nu - T_0\right),$$
$$\alpha,\gamma = 1{,}2, \quad \alpha \neq \gamma \tag{4}$$

где индексы g и k обозначают соответственно параметры газовой фазы и пористого каркаса УП; π и f – объёмная и поверхностная пористости каркаса УП; p_g и R_g – давление и газовая постоянная продуктов терморазложения УП; K_{kij} – компоненты тензора проницаемости пористого каркаса УП; Q_{ij}^α – компоненты тензора, связывающего напряжения с температурой α-компонента композита; T_0 – температура естественного состояния. Соотношения (1) – (4) должны быть дополнены геометрическими соотношениями Коши и соответствующими краевыми условиями.

Будем рассматривать пространственно армированные УУК как двухкомпонентные материалы, состоящие из изотропной матрицы и упругих армирующих элементов (рис. 1), ориентированных в нескольких направлениях. В этом случае уравнения (4), без учёта структурных параметров, могут быть записаны в виде

$$\sigma_{ij}=\left[\lambda^{\alpha}\delta_{ij}\delta_{kl}+G^{\alpha}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)+\sum_{n=1}^{N}C^{\nu_n}_{pqrs}l^n_{ip}l^n_{jq}l^n_{kr}l^n_{ls}\right]\varepsilon_{kl}-$$

$$-K^{\alpha}\alpha^{\alpha}\delta_{ij}\left(T_{\alpha}-T_0\right)-\sum_{n=1}^{N}Q^{\nu_n}_{pq}l^n_{ip}l^n_{jq}\left(T_{\nu}-T_0\right),\ \alpha\neq\nu\ , \qquad (5)$$

где λ^{α}, G^{α}, K^{α} и α^{α} – коэффициенты Ламе, модуль объёмного сжатия и температурный коэффициент линейного расширения изотропной матрицы; δ_{ij} – компоненты тензора Кронекера; N – количество армирующих элементов; $C^{\nu_r}_{ijkl}$ – компоненты тензора упругости r-го армирующего элемента в собственной системе координат; l^r_{ij} – компоненты матрицы направляющих косинусов r r-го армирующего элемента.

Для описания нелинейного деформирования пространственно армированных УУК предположим, что изменение тензорных внутренних структурных параметров компонентов композита χ^{α}_{ij} и χ^{ν}_{ij} в уравнениях (4) определяется кинетическими уравнениями

$$\tau^{\alpha}\frac{d\chi^{\alpha}_{ij}}{dz_{\alpha}}+\chi^{\alpha}_{ij}=\overline{\chi}^{\alpha}_{ij},\quad \tau^{\nu}\frac{d\chi^{\nu}_{ij}}{dz_{\nu}}+\chi^{\nu}_{ij}=\overline{\chi}^{\nu}_{ij},$$

где τ^{α} и τ^{ν} – времена релаксации; $\overline{\chi}^{\alpha}_{ij}$ и $\overline{\chi}^{\nu}_{ij}$ – установившиеся значения структурных параметров; dz_{α} и dz_{ν} – внутренние времена, связанные с процессами накопления повреждений [7, 8]. Очевидно, что

$$\chi^{\alpha}_{ij}=\int_0^{z_{\alpha}}\frac{\overline{\chi}^{\alpha}_{ij}}{\tau^{\alpha}}\exp\left(-\frac{z_{\alpha}-z'_{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right)dz'_{\alpha},\quad \chi^{\nu}_{ij}=\int_0^{z_{\nu}}\frac{\overline{\chi}^{\nu}_{ij}}{\tau^{\nu}}\exp\left(-\frac{z_{\nu}-z'_{\nu}}{\tau^{\nu}}\right)dz'_{\nu}\,.$$

Полагая $\overline{\chi}^{\alpha}_{ij}=\overline{\chi}^{\nu}_{ij}=\varepsilon_{ij}$, перепишем (5) в виде

$$\sigma_{ij}=C^{\alpha}_{ijkl}\int_0^{z_{\alpha}}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_{\alpha}}\exp\left(-\frac{z_{\alpha}-z'_{\alpha}}{\tau^{\alpha}}\right)dz'_{\alpha}+C^{\nu}_{ijkl}\int_0^{z_{\nu}}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_{\nu}}\exp\left(-\frac{z_{\nu}-z'_{\nu}}{\tau^{\nu}}\right)dz'_{\nu}-$$

$$-Q^{\alpha}_{ij}\left(T_{\alpha}-T_0\right)-Q^{\nu}_{ij}\left(T_{\nu}-T_0\right),\quad \alpha,\nu=1,2,\quad \alpha\neq\nu.$$

Вводя в рассмотрение N армирующих элементов, перепишем последнее выражение в общем виде

$$\sigma_{ij}=\int_0^{z_{\alpha}}C^{\alpha}_{ijkl}\left(z_{\alpha}-z'_{\alpha}\right)\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_{\alpha}}dz'_{\alpha}+\sum_{r=1}^{N}C^{\nu_r}_{mnpq}\left(z_{\nu_r}-z'_{\nu_r}\right)\times$$

$$\times l^{\nu_r}_{im}l^{\nu_r}_{jn}l^{\nu_r}_{kp}l^{\nu_r}_{lq}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_{\nu_r}}dz'_{\nu_r}-Q^{\alpha}_{ij}\left(T_{\alpha}-T_0\right)-\sum_{r=1}^{N}Q^{\nu_r}_{mn}l^{\nu_r}_{im}l^{\nu_r}_{jn}\left(T_{\nu}-T_0\right),\ \alpha\neq\nu\,.$$

Если n_{α} и n_{ν} – количество аппроксимирующих слагаемых, то выражения для переменных тензоров механических характеристик матрицы и волокна можно предложить в виде

$$C^{\alpha}_{ijkl}\left(z_{\alpha}-z'_{\alpha}\right)=C^{\alpha}_{ijkl}\sum_{s=1}^{n_{\alpha}}B^{\alpha}_s\exp\left(-\frac{z_{\alpha}-z'_{\alpha}}{\tau^{\alpha}_s}\right);\quad C^{\nu_r}_{ijkl}\left(z_{\nu_r}-z'_{\nu_r}\right)=C^{\nu_r}_{ijkl}\sum_{s=1}^{n_{\nu}}B^{\nu_r}_s\exp\left(-\frac{z_{\nu_r}-z'_{\nu_r}}{\tau^{\nu}_s}\right).$$

Рассмотрим следующий частный случай определяющих соотношений:

$$\sigma_{ij}=C^{\alpha}_{ijkl}\int_0^{z_{\alpha}}S^{\alpha}\left[-\frac{1}{\tau^{\alpha}_1}\exp\left(-\frac{z_{\alpha}-z'_{\alpha}}{\tau^{\alpha}_1}\right)+\frac{1}{\tau^{\alpha}_2}\exp\left(-\frac{z_{\alpha}-z'_{\alpha}}{\tau^{\alpha}_2}\right)\right]\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_{\alpha}}dz'_{\alpha}+$$

$$+\sum_{r=1}^{N}C^{\nu_r}_{mnpq}l^{\nu_r}_{im}l^{\nu_r}_{jn}l^{\nu_r}_{kp}l^{\nu_r}_{lq}\int_0^{z_{\nu_r}}R^{\nu_r}\exp\left(-\frac{z_{\nu_r}-z'_{\nu_r}}{\tau^{\nu_r}}\right)\left(1-\frac{z_{\nu_r}-z'_{\nu_r}}{\tau^{\nu_r}}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_{\nu_r}}dz'_{\nu_r}-Q^{\alpha}_{ij}\left(T_{\alpha}-T_0\right)-\sum_{r=1}^{N}Q^{\nu_r}_{mn}l^{\nu_r}_{im}l^{\nu_r}_{jn}\left(T_{\nu}-T_0\right),\quad \alpha\neq\nu\,. \qquad (6)$$

Приращения внутренних времен определяются выражениями

$$dz_{\alpha}^{2} = \frac{1}{2}F_{\alpha}^{2}\,d\varepsilon_{ij}\,d\varepsilon_{ij}; \quad dz_{\nu_r}^{2} = \frac{1}{2}F_{\nu_r}^{2}\left(d\varepsilon_{rr}\right)^{2} = \frac{1}{2}F_{\nu_r}^{2}\,l_{ri}^{\nu_r} l_{rj}^{\nu_r}\varepsilon_{ij}\,l_{rk}^{\nu_r} l_{rl}^{\nu_r}\varepsilon_{kl}, \quad !\sum_{r}, \qquad (7)$$

где символ $!\sum\limits_{r}$ отменяет суммирование по соответствующему индексу. Для учета разносопротивляемости материала растяжению и сжатию используются соотношения

$$\{X^{\alpha}\} = [S^{\alpha},\, \tau_1^{\alpha},\, \tau_2^{\alpha},\, F_{\alpha}]^{T} = \frac{\{X^{\alpha}\}^{+} + \{X^{\alpha}\}^{-}}{2} + \operatorname{sign}\left(\dot{\varepsilon}_{ii}\right)\frac{\{X^{\alpha}\}^{+} - \{X^{\alpha}\}^{-}}{2};$$

$$\{X^{\nu_r}\} = [R^{\nu_r},\, \tau^{\nu_r},\, F_{\nu_r}]^{T} = \frac{\{X^{\nu_r}\}^{+} + \{X^{\nu_r}\}^{-}}{2} + \operatorname{sign}\left(l_{ri}^{\nu_r} l_{rj}^{\nu_r}\dot{\varepsilon}_{ij}\right)\frac{\{X^{\nu_r}\}^{+} - \{X^{\nu_r}\}^{-}}{2}, \quad !\sum_{r},$$

где $\{\ \}^{+}$ означает величину, определенную при растяжении, а $\{\ \}^{-}$ – при сжатии, в качестве критерия растяжения или сжатия используются знак скорости изменения объема – для матрицы и знак скорости деформации вдоль соответствующего армирующего элемента – для наполнителя.

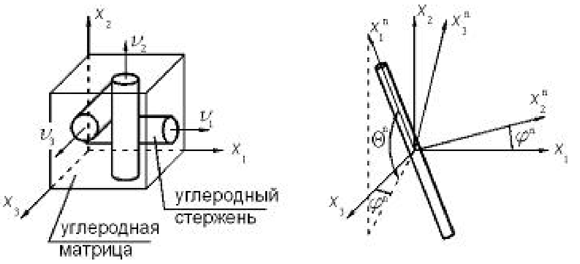


Рис. 1

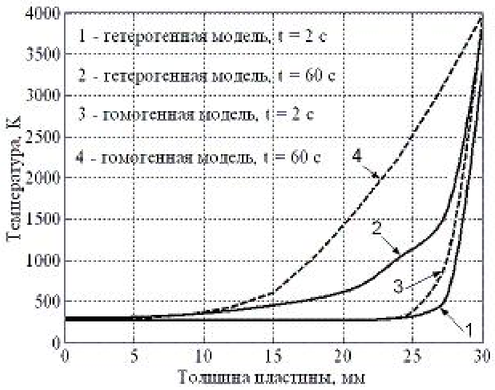


Рис. 3

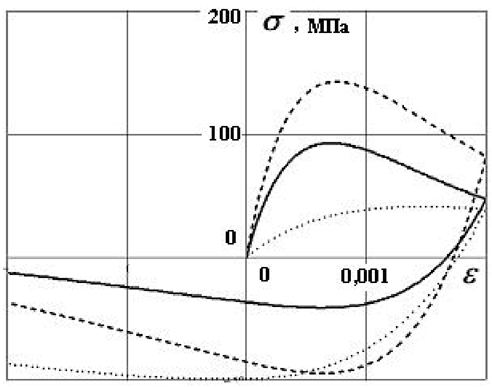


Рис. 2

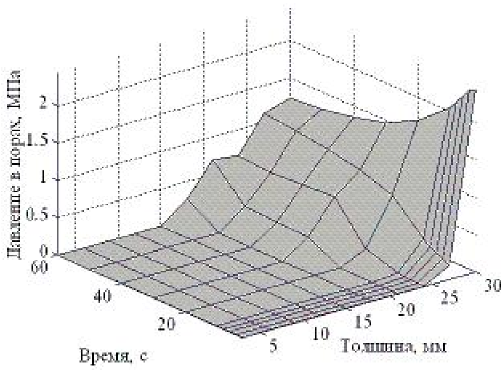


Рис. 4

Определение упругих характеристик и параметров модели $\{X^{\alpha}\}^{+}$, $\{X^{\alpha}\}^{-}$, $\{X^{\nu_r}\}^{+}$, $\{X^{\nu_r}\}^{-}$ осуществляется на базе информации, получаемой из одноосных испытаний на растяжение и сжатие в характерных направлениях аналогично описанному в [4, 9] путем численной минимизации норм рассогласования теоретических и экспериментально определённых характеристик УУК. Соотношения (6) и (7) представляют собой эндохронную модель неупругого деформирования пространственно армированных композитов [10].

На рис. 2 в качестве примера представлены расчётные диаграммы циклического деформирования модельного ортотропного разносопротивляющегося растяжению и сжатию пространственно армированного УУК, причём сплошными, штриховыми и пунктирными линиями здесь представлены зависимости между напряжениями и деформациями в главных направлениях ортотропии.

Численное моделирование термонагруженных элементов конструкций из композитных материалов с учетом различия характеристик их компонентов производится с помощью конечноэлементных программных комплексов «МАРАТ/Composite» и «ORTOPLASCON/Composite» [11].

На рис. 3 и 4 представлены результаты численного моделирования температурных полей в пластине, выполненной из терморазлагающегося УП типа П5-13 [12]. На одной из её поверхностей (с координатой $x = 30$ мм) заданы условия конвективного теплообмена с параметрами $\tilde{\alpha} = 20$ кВт/(м^2·К) и $\tilde{T}_\infty = 4000$ К численного решения данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crain R.E., Green A.E., Naghdi R.M. A Mixture of Viscous Elastic Materials with Different Constituent Temperatures. //Quart. Journ. Mech. Appl. Math. Vol. XXIII, Pt. 2. 1970. P. 172-184.
2. Кувыркин Г.Н. Термомеханика деформируемого твёрдого тела при высокоинтенсивном термонагружении. М.: Изд-во МГТУ, 1993. 142 с.
3. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
4. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Термомеханическая модель нелинейного деформирования пространственно армированных углерод-углеродных композитов. //Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 2. С. 61-67.
5. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Численное моделирование нестационарных температурных полей в конструкциях из композитных материалов при высокоинтенсивном нагружении. Теплопроводность, теплоизоляция: //Тр. II Российской нац. конф. по теплообмену. М., 1998. С.57-60.
6. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Особенности численного моделирования температурных полей в конструкциях из композитных материалов. Теплопроводность, теплоизоляция: Тр. III Российской нац. конф. по теплообмену. М.: 2002. С.90-93.
7. Бажант З. Эндохронная теория неупругости и инкрементальная теория пластичности. Механика деформируемых твердых тел: Направления развития. /Сб. статей. М.: Мир, 1983. С.189-229.
8. Сарбаев Б.С. Феноменологическая модель пластического деформирования волокнистых композитов. Автореф. дисс. доктора техн. наук. М.: 1996. 32 с.
9. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Идентификация механических характеристик компонентов пространственно армированных углерод–углеродных композитов. //Научные труды I Международного семинара «Актуальные проблемы прочности» им. В.А.Лихачёва и XXXIII семинара «Актуальные проблемы прочности», 15-18 октября 1997. Новгород: Изд-во: Новгородского государственного университета, 1997. Т. 1, Часть 2. С.350-355.
10. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Эндохронная модель неупругого деформирования пространственно армированных углерод-углеродных композитов. Научные труды V Международного семинара «Современные проблемы прочности» им. В.А.Лихачёва. Т. 1. Великий Новгород, 2001. С.8–12.
11. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Проблемы численного моделирования полей температур и напряжений в конструкциях сопловых блоков РДТТ.// Инж.-физ. журнал. 2000. Т. 73. № 1. С.145-154.
12. Назаров Г.И., Сушкин В.В. Теплостойкие пластмассы: Справочник. М.: Машиностроение, 1980. 208с.

Сведения об авторах:

Кувыркин Георгий Николаевич – заведующий кафедрой «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, факультет «Фундаментальные науки», (499)263-6326
E-mail: fn2@bmstu.ru

Головин Николай Николаевич – старший научный сотрудник кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, факультет «Фундаментальные науки», (499)263-6326
E-mail: n_n_golovin@yauza.ru

Зарубин Владимир Степанович – профессор кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, факультет «Фундаментальные науки», (499)263-6326
E-mail: fn2@bmstu.ru

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСТУЩИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Кузнецов С.И.

В статье проведен анализ двух различных методов решения задач нелинейной теории упругости. Первый метод заключается в использовании универсальных решений Эриксена, а второй — в поиске минимума энергетического функционала, порождаемого потенциалом упругой энергии Муни-Ривлина. Предложен способ экспериментального определения соответствующих материальных констант.

1. Введение. В теоретических исследованиях и прикладных расчетах имеются задачи, при решении которых необходимо учитывать конечные деформации исследуемых объектов. В настоящее время существует множество математических моделей, описывающих поведение сплошных сред при конечных деформациях. В данной статье мы будем рассматривать гиперупругие тела — тела, для которых определен потенциал упругой энергии w.

Существует два подхода к решению краевых задач. Первый заключается в решении системы дифференциальных уравнений в частных производных, а второй — в нахождении минимума энергетического функционала.

К несжимаемым материалам относятся такие среды, произвольный элементарный объем которых не меняется в процессе деформации. Математически это выражается следующим образом:

$$I_3(\mathbf{G}) = 0, \tag{1}$$

где $I_3(\mathbf{G})$ — третий инвариант меры деформации Коши-Грина $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G} = \left(\overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{R}\right) \cdot \left(\overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{R}\right)^T .$$

Здесь $\overset{0}{\nabla}$ — набла-оператор в системе координат, связанный с отсчетной конфигурацией, $\mathbf{R}$ — радиус вектор точки в актуальной конфигурации, а $\left(\overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{R}\right)$— градиент места [4].

Упругий потенциал Муни-Ривлина имеет следующий вид:

$$w(I_1, I_2) = \frac{1}{4}\mu\left[(1+\beta)(I_1(\mathbf{G}) - 3) + (1-\beta)(I_2(\mathbf{G}) - 3)\right], \tag{2}$$
$$\mu > 0, \quad -1 \le \beta \le 1,$$

где $I_1(\mathbf{G})$ и — первый и второй инвариант меры деформации Коши-Грина, а μ и β — константы материала. При $\beta = 0$ приходим к частному случаю — «неогукову» потенциалу.

Основной трудностью, возникающей в приложениях, является недостаточное количество экспериментальных данных для определения констант материала. В данной статье предложен способ экспериментального определения упругих констант.

2. Аналитический подход. Рассмотрим полый шар, внутренний радиус которого в недеформированном состоянии равен r_0, а внешний – r_1. Пусть массовые силы отсутствуют. Внешняя поверхность шара свободна от напряжений, а на внутреннюю действует давление p_0.

Полагаем, что при деформировании шара соблюдается центральная симметрия. В этом случае решение известно [4, с. 291]. Радиально-симметричное преобразование рассматриваемого тела определяется универсальной деформацией Эриксена:

$$R^3 = r^3 + A. \tag{3}$$

Соответствующие компоненты тензора напряжений вычисляются по формулам:

$$\sigma_{rr} = -p_0 + 4\int_{R_0}^{R} \frac{R^6 - r^6}{R^4 r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial I_1} + \frac{R^2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial I_2}\right), \tag{4}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2R}\frac{d}{dR}R^2\sigma_{rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\varphi\vartheta} = 0.$$

При подстановке потенциала Муни-Ривлина (2) в соотношение (4) получим

$$\sigma_{rr}(r)=-p_0+\mu(1+\beta)\int_{r_0}^{r}\frac{(\xi^3+A)^2-\xi^6}{(\xi^3+A)^{\frac{7}{3}}}d\xi+\mu(1-\beta)\int_{r_0}^{r}\frac{(\xi^3+A)^2-\xi^6}{\xi^2(\xi^3+A)^{\frac{5}{3}}}d\xi. \tag{5}$$

Интегралы, присутствующие в выражении (5), вычисляются в замкнутом виде:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{(\xi^3+A)^2-\xi^6}{(\xi^3+A)^{\frac{7}{3}}}d\xi=\left.\frac{\xi(4A+5\xi^3)}{4(\xi^3+A)^{\frac{4}{3}}}\right|_{r_0}^{r},\quad \int_{r_0}^{r}\frac{(\xi^3+A)^2-\xi^6}{\xi^2(\xi^3+A)^{\frac{5}{3}}}d\xi=-\left.\frac{\xi^3+2A}{2\xi(\xi^3+A)^{\frac{2}{3}}}\right|_{r_0}^{r}.$$

Значение константы A можно найти из граничных условий:

$$\sigma_{rr}(r)\big|_{r=r_0}=-p_0,\qquad \sigma_{rr}(r)\big|_{r=r_1}=0. \tag{6}$$

Подставив выражение для напряжения (5) в соотношение (6), получим уравнение, из которого может быть определена константа A.

$$-p_0+\mu(1+\beta)\left.\frac{\xi(4A+5\xi^3)}{4(\xi^3+A)^{\frac{4}{3}}}\right|_{r_0}^{r}-\mu(1-\beta)\left.\frac{\xi^3+2A}{2\xi(\xi^3+A)^{\frac{2}{3}}}\right|_{r_0}^{r}=0. \tag{7}$$

Следует отметить, что из формулы (7) не всегда можно вывести однозначную зависимость $A(p_0)$. Более того, при значениях параметра β, близких к 1 одной величине p_0 соответствуют либо два значения A либо ни одного. Однако, что для подавляющего большинства материалов константы μ и β таковы, что любому давлению p_0 соответствует не более одного значения A.

3. Вариационный подход. Теперь построим решение рассматриваемой задачи, используя вариационный принцип Лагранжа. Потенциальная энергия шара для модели Муни-Ривлина в условиях центральной симметрии определяется следующим выражением:

$$W=4\pi\int_{r_0}^{r_1}w(r)r^2dr=$$

$$=4\pi\int_{r_0}^{r_1}\left[C_1\left(R'^2(r)+2\frac{R^2(r)}{r^2}-3\right)+C_2\left(2R'^2(r)\frac{R^2(r)}{r^2}+\frac{R^4(r)}{r^4}-3\right)\right]r^2dr,$$

$$C_1=\frac{1}{4}\mu(1+\beta),\ \ C_2=\frac{1}{4}\mu(1-\beta),$$

где $R(r)$ — место точки r в актуальной конфигурации.

Условие несжимаемости (1) может быть сформулировано в виде:

$$R'^2(r)\frac{R^4(r)}{r^4}-1=0. \tag{8}$$

Условный минимум будем искать, используя метод штрафов [2]. Для этого включим в целевой функционал условие (8) с коэффициентом $\frac{1}{D}$, где D достаточно мало. Таким образом, чтобы решить задачу, необходимо найти минимум функционала

$$J[f]=4\pi\int_{r_0}^{r_1}\left[C_1\left(f'^2(r)+2\frac{f^2(r)}{r^2}-3\right)+\right.$$

$$\left.+C_2\left(2f'^2(r)\frac{f^2(r)}{r^2}+\frac{f^4(r)}{r^4}-3\right)+\frac{1}{D}\left(R'^2(r)\frac{R^4(r)}{r^4}-1\right)\right]r^2dr. \tag{9}$$

Для этого воспользуемся численной процедурой, а именно разобьем отрезок $r\in[r_0,r_1]$ на n интервалов:

$$[r_0,r_1]=\bigcup_{i=1}^{n}[r_{i-1},r_i],\qquad r_i-r_{i-1}=h_i,\qquad i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

а функцию $f(r)$ аппроксимируем следующим выражением:

$$f(r)=\sum_{i=1}^{n} f_i e_i(r), \tag{11}$$

где f_i — числовые коэффициенты. Функции $e_i(r)$ определяются следующим равенством:

$$e_i(r)=\begin{cases} 0, & x\notin[r_{i-1},r_{i+1}],\\ \dfrac{r-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}}, & x\in[r_{i-1},r_i],\\ \dfrac{r_{i+1}-r}{r_{i+1}-r_i}, & x\in[r_i,r_{i+1}]. \end{cases}$$

Для отыскания минимума функционала (9) подставляем аппроксимацию (11) в выражение (9) и находим частные производные получившейся функции по f_i. В результате приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой получаем численно, например используя метод Ньютона [1].

Функционал (9) можно использовать и для случая, когда рассматриваемое тело состоит из сжимаемого материала. В этом случае потенциал Муни-Ривлина принимает вид:

$$W(I_1,I_2)=C_1(I_1(\mathbf{G})-3)+C_1(I_2(\mathbf{G})-3)+\frac{1}{D}(I_3(\mathbf{G})-1),$$

где D — коэффициент сжимаемости материала. В предельном случае при $D\to 0$ решение, полученное численно, будет стремиться к аналитическому решению соответствующей задачи о несжимаемом шаре. В этом можно убедиться, проведя соответствующие расчеты.

Изложенная процедура позволяет расширить класс решаемых задач на несжимаемые материалы. Аналитическое решение используется для контроля численного алгоритма и определения радиуса разбиения в выражении (10).

4. Методика экспериментального определения материальных констант. Определить значения материальных констант предлагается с помощью следующего эксперимента. На рис.1. изображена схема экспериментальной установки. Полый шар 1, изготовленный из исследуемого материала, помещен внутрь сферы 2 радиуса R_S. Внешний и внутренний радиусы шара равны r_0 и r_1 соответственно. Внутри шара 1 с помощью компрессора *K* создается давление, измеряемое манометром *M*. На поверхность исследуемого тела напылен тонкий проводящий слой. Шар и сфера включены в цепь с катушкой индуктивности *L*. Система из сферы 1 и проводящего слоя 3 шара представляет собой сферический конденсатор, а цепь — колебательный контур. Собственную частоту ν колебаний данного контура можно измерить с помощью частотомера *F*.

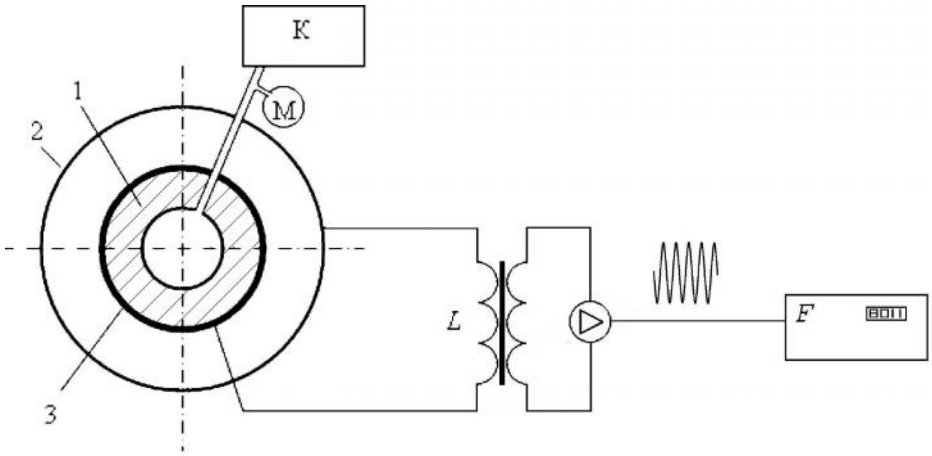


Рис 1. Схема экспериментальной установки

Измерив частоту ν и воспользовавшись формулой вычисления емкости сферического конденсатора, можно найти внешний радиус исследуемого шара

$$R = \frac{R_S}{4\pi^3 \varepsilon_0 \nu^2 L R_S + 1}.$$

В процессе эксперимента проводится серия из n измерений. Пусть давление внутри шара 1 во время i-го измерения равнялось , а вычисленное значение константы A было равно A_i. Тогда подставив полученные данные в выражение (7) и проведя некоторые преобразования, получим следующие равенства:

$$-\frac{1}{\mu} p_i + \beta \left. \frac{(2\xi^3 + 4A_i)(\xi^3 + A_i)^{\frac{2}{3}} + \xi^2 (4A_i + 5\xi^3)}{4\xi(\xi^3 + A_i)^{\frac{4}{3}}} \right|_{r_0}^{r_1} =$$

$$= \left. \frac{(2\xi^3 + 4A_i)(\xi^3 + A_i)^{\frac{2}{3}} - \xi^2 (4A_i + 5\xi^3)}{4\xi(\xi^3 + A_i)^{\frac{4}{3}}} \right|_{r_0}^{r_1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Далее, используя метод наименьших квадратов [3], можно определить средние значения для $\frac{1}{\mu}$ и β. Затем, вычислив дисперсию полученных величин, можно оценить значения материальных констант.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00553-а, 09-08-01194-а). Автор благодарит профессора Манжирова А.В. за помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
2. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. М.: Высшая школа,1983. 512 с.
3. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск.: Раско, 1991. 272 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, Физматлит, 1980. 512 с.

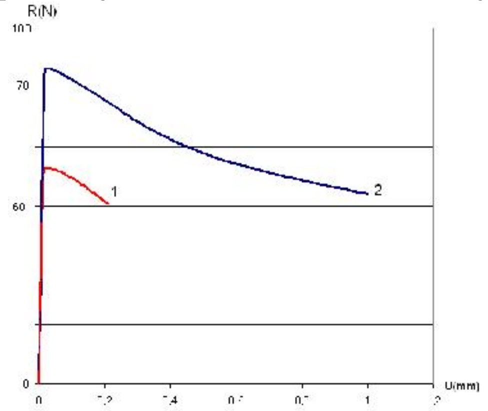
Сведения об авторе:
Кузнецов Сергей Игоревич — аспирант Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э.Баумана.
E-mail: k_s_i@bk.ru

О ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ И РАЗДЕЛЬНОМ ДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОГО ПОЛЯ И МЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

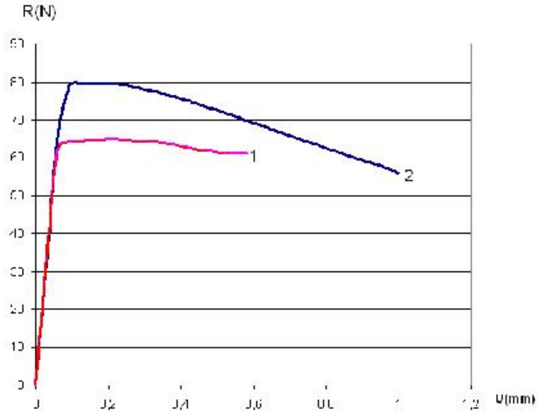
Кукуджанов В.Н., Коломиец-Романенко А.В.

Рассмотрен материал, состоящий из периодических распределенных представительных элементов, содержащих дефекты различного типа (цилиндрические микропоры, плоские микротрещины). Исследовано одновременное и раздельное электротермодинамическое воздействие с учетом изменения в материале структуры микродефектов. Основным результатом исследования является обнаружение на начальном этапе схлопывания и зарастания микродефектов в материале при пропускании электрического тока и локализации термонапряжений между дефектами, что приводит к упрочнению материала. На следующем этапе из-за локализации температуры в окрестности концов микротрещин и выплавления материала происходит увеличение его пористости. Показано, что на образовавшихся круговых цилиндрических дефектах под воздействием электрического тока возникает слабая концентрация температуры, в то время как для плоских разрезов (микротрещин) эта концентрация существенна. Дальнейшее воздействие электрическим током на представительный элемент с цилиндрическими дефектами не приводит к их закрытию вследствие малости сжимающих перемещений. Такой результат повторяется и на образце с упорядоченной структурой представительных элементов. Это явление приводит к увеличению прочности образца, а за счет термического воздействия электрического тока приводит к температурному разупрочнению исследуемого материала. В материале с упорядоченной структурой дефектов, при одновременном действии электрического поля и растяжения происходит разупрочнение и увеличение площадки текучести. Полученные результаты проясняют механизм изменения свойств термоэлектропластической модели, что позволяет вносить определенные рекомендации в технологические процессы.

Исследовано термоэлектродинамическое воздействие с учетом изменения в материале структуры микродефектов. Рассмотрен представительный элемент материала, содержащий дефект в виде разреза. В работе [1] уже был рассмотрен материал, состоящий из периодических распределенных представительных элементов, содержащих дефекты различного типа (цилиндрические микропоры, плоские микротрещины), и было показано, что для получения качественного результата достаточно рассматривать изолированный представительный элемент (фиг. 1). Основным результатом исследования является сравнение изменения механических свойств материала с дефектами при одновременном и раздельном действии электрического тока и механического растяжения. С другой стороны, из-за локализации температуры в окрестности дефекта и последующего охлаждения возникает пластическое течение в этой области, что приводит к уменьшению предела текучести эффективного материала и увеличению максимально допустимой пластической деформации.



а) для изолированного представительного элемента



б) для материала с упорядоченной структурой представительных элементов

Фиг. 1 ***Кривые деформирования при растяжении до и после обработки электрическим током***
(1 – исходное состояние, 2 – измененная структура)

Задача решается в несколько этапов. На первоначальном этапе рассматривается термоэлектрическая задача, где результатом является образование цилиндрических дефектов из дефекта в виде разреза при пропускании электрического тока и получение распределения температуры в представительном элементе [2]. Для расчета электрического тока в токопроводящем материале используется уравнение Максвелла сохранения заряда.

Принимая, что постоянный ток находится в установившемся режиме, уравнение Максвелла сохранения заряда имеет вид:

$$\int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}dS = \int_V r_c dV\,, \tag{1}$$

где V - произвольный объем с поверхностью S; $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к S; $\mathbf{J}$ - плотность тока и r_c - внутренний объемный источник тока на единицу объема. Плотность электрического тока определяется законом Ома:

$$\mathbf{J} = \sigma^E\cdot\mathbf{E} = -\sigma^E\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}(x)$ - интенсивность электрического поля, определенная как отрицательный градиент электрического потенциала $\mathbf{E} = -\partial\varphi/\partial x$, φ - электрический потенциал, $\sigma^E(\theta)$ - матрица электропроводности, θ - температура. Закон Джоуля-Ленца, описывающий интенсивность электрической энергии, рассеиваемой током, который течет по проводнику:

$$P_{ec} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\cdot\sigma^E\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\,. \tag{3}$$

Количество электрической энергии, выделяемой в качестве внутреннего тепла, равно

$$r_c = \eta_v P_{ec}\,, \tag{4}$$

где η_v - соответствующий коэффициент преобразования электрической энергии в тепловую. Использование закона Ома в уравнении сохранения заряда, записанное в вариационной форме, дает уравнение баланса энергии в вариационной форме:

$$\int_V \frac{\partial\delta\varphi}{\partial\mathbf{x}}\cdot\sigma^E\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}dV = \int_S \delta\varphi JdS + \int_V \delta\varphi r_c dV \tag{5}$$

Уравнение баланса энергии для определения распределения температуры в представительном элементе в вариационной форме имеет вид:

$$\int_V \rho\dot{U}\delta\theta\, dV + \int_V \frac{\partial\delta\theta}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{x}}dV = \int_V \delta\theta\, rdV + \int_S \delta\theta qdS \tag{6}$$

где $\dot{U}$ – материальная производная внутренней энергии, $\mathbf{k}$ – матрица теплопроводности материала, $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\theta)$.

Граничные условия при решении термоэлектрической задачи имеют вид:

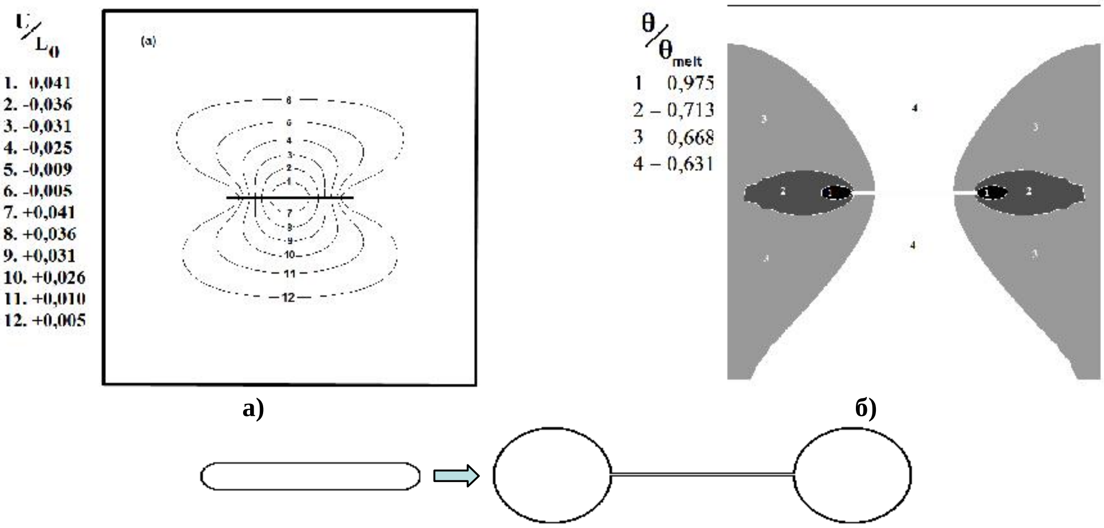
$$\varphi(x, l_0) = \varphi_0\,,\ \varphi(x,0) = 0 \tag{7}$$

Условие конвективного теплообмена с внешней средой:

$$q = h(\theta - \theta_0) \tag{8}$$

где $h = h(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}\in S$ – коэффициент конвективного теплообмена, θ_0 – температура внешней среды. На этапе решения термоэлектрической задачи принимается условие теплоизоляции: $h \approx 0 \Rightarrow q = q(\mathbf{x}, t) = 0$.

Из полученного решения поставленной задачи МКЭ следует, что при действии электрического тока плоские дефекты в виде разреза ”*залечиваются*”, а в кончиках трещин за счет концентрации температуры и плавления образуется круговая пора, на границе которой выполняется условие выплавления. Таким образом, из образца с упорядоченной структурой плоских дефектов в виде разрезов получается материал с упорядоченной структурой цилиндрических дефектов. Дальнейшее воздействие электрическим током на представительный элемент с цилиндрическими дефектами не приводит к их закрытию вследствие малости сжимающих перемещений (фиг. 2).



Фиг. 2 ***Схема образования структуры цилиндрических дефектов из периодической структуры дефектов в виде разрезов***
(***а)*** *– поле перемещений вдоль вертикальной оси представительного элемента с плоским дефектом в виде разреза,* ***б)*** *- поле температур для представительного элемента с плоским дефектом в виде разреза)*

Тензор полных деформаций образца термопластического материала равен:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}^{th}, \qquad (9)$$

где, $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ – тензоры упругих, пластических и температурных деформаций. Тепловое расширение в дифференциальной форме имеет вид:

$$d\varepsilon^{th} = \sim(\bar{\ })d\bar{\ }, \qquad (10)$$

где $\sim$ – коэффициент термического расширения.
Условие пластичности принимается по Мизесу:

$$\pm_Y = \sqrt{3/2\, \mathbf{S} : \mathbf{S}}, \qquad (11)$$

где $\pm_Y = \pm_Y(\bar{\ })$ – предел текучести.
Для решения задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) представительного элемента в процессе охлаждения используются уравнения баланса энергии (6) или уравнение для задачи изотермического растяжения, которое имеет вид:

$$\int_V \pm : ¢D dV = \int_V f^T \cdot ¢v dV + \int_S t^T \cdot ¢v dS, \qquad (12)$$

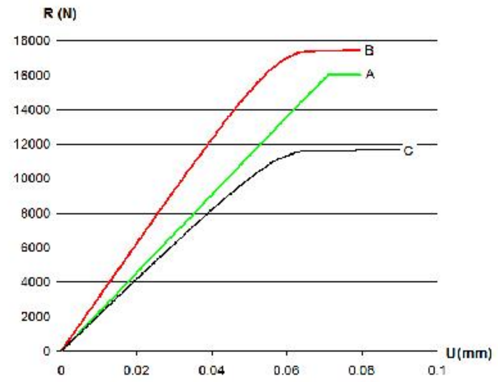
где $D = d^2U / d£^2$, f^T – плотность объемных сил, t^T – плотность поверхностных сил, $¢v$ – изменение скорости материальных частиц.
Граничные условия при решении задачи охлаждения можно принимать в виде отсутствия напряжений или условия жесткого закрепления:

$$\sigma(x, y)\big|_S = 0 \text{ или } u(x, y)\big|_S = 0 \qquad (13)$$

Условие конвективного теплообмена (8) в задаче охлаждения принимается с учетом, что $h = \mathrm{const}$.
Граничные условия при решении задачи растяжения представительного элемента имеют вид:

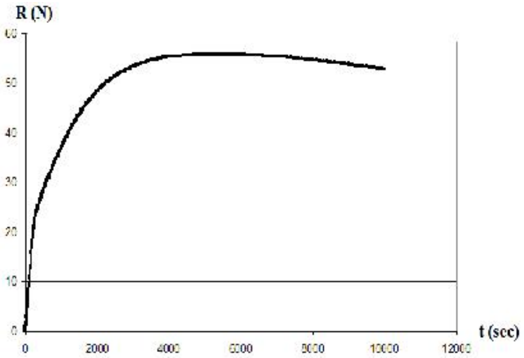
$$u(x, l_0) = u_0,\ u(x, 0) = 0 \text{ и } h = 0. \qquad (14)$$

Распределение температуры в изолированном представительном элементе, полученное на предыдущем этапе, является начальным условием в задаче охлаждения. НДС в элементе, полученное после процесса охлаждения есть начальное условие в задаче изотермического растяжения элемента с цилиндрическими дефектами.
Из приведенного расчета определяется усредненная диаграмма растяжения для материала при наличии дефектов (фиг. 3), где А – сплошной материал при предварительном воздействии тока, В – материал с дефектами без предварительного воздействия током, С – материал с дефектами при предварительном воздействии тока.

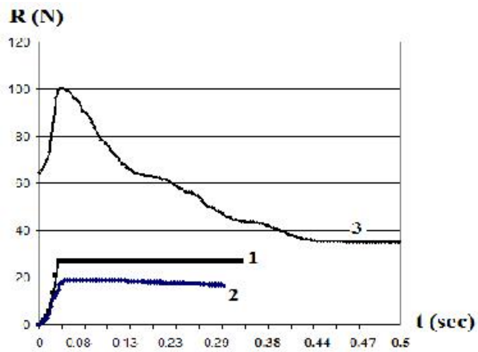


Фиг. 3. ***Диаграммы растяжения материалов с дефектами и сплошного материала при предварительном воздействии электрического тока и без первоначальной обработки током***

На этапе охлаждения в изолированном представительном элементе в окрестностях цилиндрических дефектов возникают пластические деформации (фиг. 4), что приводит к улучшению пластических свойств материала, но при этом предел текучести выше, чем в исходном состоянии (фиг. 5), где 1 – бездефектный представительный элемент, 2 – с дефектами в виде разреза, 3 – с цилиндрическими дефектами, кривая растяжения получена после процесса охлаждения. Кривая 3 берет начало в момент окончания процесса охлаждения и ее начальной точкой является состояние, отвечающее конечной точке кривой на фиг. 4. Таким образом, рассмотренный процесс приводит к увеличению прочности материала при одновременном увеличении площадки текучести.



Фиг. 4. ***Кривая деформирования для представительного элемента с цилиндрическими дефектами при охлаждении***



Фиг. 5. ***Диаграммы растяжения материалов с дефектами и сплошного материала*** *(1 и 2 – исходное состояние без обработки электрическим током, 3 - при предварительном воздействии электрического тока)*

Выводы.

- При пропускании электрического тока через образец *с плоскими дефектами в виде разрезов* происходит **схлопывание** дефектов и вследствие *локализации температурного поля* у концентраторов дефектов образуется структура *цилиндрических* дефектов.
- Под воздействием электрического тока вокруг *цилиндрических* дефектов возникают **сжимающие** напряжения, **но** величина этих напряжений **слишком мала** для полного залечивания дефекта.
- В материале *с упорядоченной структурой дефектов*, при взаимодействии с электромагнитным полем происходит **разупрочнение и увеличение площадки текучести.**
- В процессе охлаждения достигаются пластические деформации в окрестности дефектов, что приводит на этой стадии к **разупрочнению материала** и **увеличению допустимой деформации** при растяжении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00270-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов В.Н., Коломиец-Романенко А.В. Исследование влияния динамического воздействия электрического тока на механические свойства материалов с упорядоченной структурой дефектов // Изв. РАН. МТТ. 2010. N3. С. 188-199.
2. Кукуджанов В.Н., Коломиец-Романенко А.В. Исследование механических свойств материалов с упорядоченной структурой дефектов при динамическом воздействии электрическим током // Материалы VIII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2010) 25-31 мая 2010, Алушта, Крым, М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ. 2010. С. 503-506.

Сведения об авторах:

Кукуджанов Владимир Николаевич – главный научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Учреждение Российской академии наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, профессор, иностранный член НАН Республики Армения, (495) 434 46 39
E-mail: kukudz@ipmnet.ru, http://ipmnet.ru/~kukudz

Коломиец-Романенко Андрей Валерьевич – программист лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Учреждение Российской академии наук, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, (495) 434 34 56
E-mail: oracle04_08_84@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ

Локощенко А.М.

В середине XX века двое выдающихся советских ученых - Л.М.Качанов и Ю.Н.Работнов – впервые в мире ввели в теоретическое рассмотрение новый параметр: зависящий от времени t структурный параметр $\omega(t)$. Этот параметр характеризует степень повреждённости материала, накапливающейся в процессе ползучести. В начале процесса ползучести принимается условие $\omega(0)=0$, разрушению образца при $t=t^*$ соответствует значение $\omega^*=\omega(t^*)=1$. В [1] Ю.Н.Работнов предложил использовать для описания ползучести и длительной прочности конструкционных металлов механическое уравнение состояния, в которое входят не один, а несколько структурных параметров, а также систему кинетических уравнений для их определения. В данной статье рассмотрены возможности обобщения и конкретизации этой кинетической теории при моделировании различных особенностей процесса ползучести и длительной прочности металлов [2].

1. Зависимость предельной поврежденности при растяжении от напряжения

В Институте механики МГУ был разработан новый метод измерения структурных изменений в металле непосредственно в ходе высокотемпературной ползучести без охлаждения и разгрузки образцов [3]. Для достижения этой цели необходимо проводить измерение электрического сопротивления $R(t)$ цилиндрических образцов при одноосном растяжении и сопоставлять эти данные с результатами измерения длины $l(t)$ испытываемых образцов при тех же значениях времени t.

В процессе испытания цилиндрических образцов на растяжение их электросопротивление увеличивается по двум причинам. Первая причина заключается в увеличении длины и соответствующем уменьшении поперечных размеров образца. Вторая причина увеличения R объясняется изменением структуры материала, характеризуемым образованием пор и микротрещин, их накоплением и слиянием, вплоть до образования магистральных трещин. Здесь предполагается, что эти два фактора действуют независимо друг от друга.

Основное внимание уделялось измерению величины $\Delta R(t)$, которая характеризует приращение электросопротивления образца, вызываемое изменением его структуры в процессе ползучести. В качестве меры повреждённости материала в [3] принято отношение

$$\omega(t)=\Delta R(t)/R_0,$$

где R_0 – электросопротивление ненагруженного образца при температуре испытаний. Особый интерес представляет убывающий характер зависимости предельной поврежденности ω^*, соответствующей разрушенному образцу, от уровня номинального растягивающего напряжения σ_0.

После разрушения испытанных образцов было проведено металлографическое исследование структуры образцов [4]. В результате продольного разрезания образцов и последующего их травления было обнаружено большое количество микротрещин, расположенных по границам зерен. Для количественного определения повреждённости материала испытанных образцов на каждом микрошлифе выбиралась поперечная дорожка в форме прямоугольника, у которого одна сторона совпадала с диаметром D образца, а другая (вдоль оси образца) имела произвольный размер H. Сумма длин всех поперечных межзёренных границ внутри прямоугольной дорожки, перпендикулярных к направлению растяжения, составляет HD/d, где d – средний диаметр зерна. Вычислялась a – сумма длин проекций всех микротрещин на направление диаметра образца. Под повреждённостью Ω^* понимается отношение суммарной длины поперечных границ между зернами, занятых порами и микротрещинами, к длине всех поперечных границ между зернами: $\Omega^*=ad/HD$. Измерения Ω^* показали монотонно убывающий характер зависимости $\Omega^*(\sigma_0)$.

Для аналитического описания полученных результатов использовано обобщение подхода Броберга, в котором вводится эффективное напряжение $s(t)=\sigma_0/\left(1-\omega(t)\right)$. В качестве времени до разрушения t^* принимается значение времени t, при котором скорость возрастания эффективного напряжения $\dot{s}$ стремится к бесконечности. Анализ системы уравнений

$$\dot{\varepsilon} = G'(s) + H(s), \;\; \dot{\Omega} = g'(s)\dot{s} + h(s)$$

(все функции – монотонно возрастающие) при определенных предположениях приводит к следующему соотношению:

$$\Omega^* = 1 - \sqrt{\sigma_0 \cdot g'(s^*)} \, .$$

Отсюда следует подтверждение экспериментальных результатов: величина Ω^* всегда меньше 1, кроме того, зависимость $\Omega^*(\sigma_0)$ имеет монотонно убывающий характер.

2. Моделирование ползучести и длительной прочности металлов в агрессивных средах

В Институте механики МГУ проведен цикл систематических экспериментально-теоретических исследований, посвященных моделированию ползучести и длительной прочности металлов в агрессивных средах. В этих исследованиях разработаны новые методы описания влияния окружающей среды на характеристики высокотемпературного деформирования и разрушения металлов. Они основаны на применении теории Ю.Н.Работнова с использованием двух кинетических параметров: один из них – поврежденность материала ω, в качестве второго параметра принимаются толщина разрушенного поверхностного слоя δ или концентрация специфических характеристик окружающей среды в металле c.

2.1. *Анализ масштабного эффекта ползучести и длительной прочности с помощью введения поверхностного разрушенного слоя*

Проведено исследование масштабного эффекта, согласно которому уменьшение поперечных размеров конструкционных элементов от 1-2 мм до 0.15-0.2 мм приводит к увеличению скоростей ползучести $\dot{p}$ и уменьшению предельных деформаций ползучести p^* и времен до разрушения t^* в несколько раз. Этот эффект необходимо учитывать при проектировании ответственных тонкостенных конструкций. В [5] предложены методы оценки влияния поперечных размеров образцов на характеристики ползучести и длительной прочности, которые основаны на учете различной роли поверхностных и внутренних слоев металла в реальных испытаниях. Длительная прочность определяется в результате решения системы двух кинетических уравнений

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}(\sigma, \omega, \delta), \qquad \dot{\delta} = \dot{\delta}(\sigma, \omega, \delta), \tag{1}$$

дополненных начальными значениями и условием разрушения

$$\omega(t=0) = 0, \quad \delta(t=0) = 0, \quad \omega(t=t^*) = 1.$$

Дополнительно к (1) была предложена система уравнений для моделирования масштабного эффекта ползучести. В [5] были введены понятия сильного и слабого масштабных эффектов длительной прочности. С помощью конкретизации видов зависимостей (1) в [5] описаны результаты различных испытаний.

2.2.Влияние диффузионного процесса на ползучесть и длительную прочность

В [5] предложен новый подход в моделировании влияния диффузионного процесса на ползучесть и длительную прочность. Основа этого подхода заключается во введении диффузионного фронта, разделяющего невозмущенную и возмущенную области рассматриваемого тела, и определении движения границы между этими областями. Показаны высокая точность и эффективность предлагаемого метода. Этот метод позволяет представить решение уравнения диффузии в удобной для анализа форме. Получена система уравнений, описывающих взаимодействие диффузионного фронта и фронта разрушения в процессе ползучести. В [5] приведены решения типичных задач при различных граничных условиях. Предложен упрощенный вариант данного метода, в котором накопление поврежденности материала во времени зависит от интегрально среднего (в объеме тела) значения концентрации химических элементов окружающей среды в металле. Предложен критерий длительной прочности, связывающий времена до разрушения в присутствии и отсутствии агрессивной окружающей среды.

2.3. Вероятностная модель ползучести и длительной прочности

В данной модели рассматриваемое тело представляется состоящим из большого количества структурных элементов [6]. Для описания эффекта длительной прочности вводится понятие вероятности разрушения структурного элемента. Данная вероятность является функцией инвариантов тензора напряжений и концентрации элементов среды. Вследствие воздействия агрессивной окружающей среды и неравномерного поля напряжений отдельные структурные элементы разрушаются раньше остальных, вызывая перераспределение нагрузки на оставшиеся элементы. Для изучения полученного разрыхления материала, характеризующего его поврежденность, вводится параметр плотности неразрушенных структурных элементов и рассматривается кинетическое уравнение для описания его изменения во времени. Для рассмотрения длительного разрушения тела в целом вводится движущаяся поверхность разрушения, отделяющая разрушенные области от неразрушенных. В качестве критерия разрушения тела принимается условие стремления скорости движения поверхности разрушения к бесконечности. В качестве кинетического уравнения для концентрации элементов окружающей среды в материале принимается уравнение диффузии. Для скорости ползучести принимается дробно-степенное соотношение, учитывающее вторую и третью стадии ползучести.

В монографии [5] рассмотрено применение предложенных моделей при анализе наблюдаемых в экспериментах особенностей деформирования и разрушения. В качестве примеров рассмотрены масштабный эффект ползучести и длительной прочности, влияние предварительного окисления на последующую ползучесть, учет анизотропии и др. Показано, что применение предложенных подходов приводит к уменьшению суммарного разброса экспериментальных и теоретических характеристик (по сравнению со стандартными моделями) в 2-3 раза, а в ряде случаев – в 10-15 раз.

3. Длительная прочность при сложном напряженном состоянии

Проведен анализ известных результатов испытаний с помощью кинетической теории длительной прочности. Отмечено, что описание многих результатов (в частности, испытаний при нестационарных нагружениях) с помощью скалярного параметра поврежденности, как правило, невозможно. Использование тензорного параметра затруднительно из-за необходимости определения большого количества материальных функций и констант. В данной статье рассмотрены возможности векторного представления параметра поврежденности при моделировании длительной прочности в случае стационарного и нестационарного сложных напряженных состояний. Выполнено обобщение известных моделей с помощью введения коэффициента прочностной анизотропии материала и учета компонентов вектора поврежденности, накапливаемых в процессе кратковременного квазистатического нагружения. Показано, что коэффициенты прочностной анизотропии, вычисленные с помощью критериального и кинетического подходов, мало различаются между собой [7]. На основе кинетического подхода впервые описаны результаты испытаний, в которых время разрушения при стационарном сложном напряженном состоянии зависит от программы кратковременного нагружения [8, 9]. Отмечено, что добавление к осевому напряжению в трубчатых образцах поперечного напряжения того же уровня приводит к уменьшению времени до разрушения в 1,5-3,0 раза; предложен ряд систем кинетических уравнений для описания этого результата [9]. Отмечено, что при одновременном растяжении и кручении трубчатых образцов циклическое изменение знака касательного напряжения приводит к увеличению времени разрушения в 1,8-3,3 раза; с помощью кинетического подхода показана возможность описания этого экспериментального результата. Показано, что все предложенные модели приводят к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен разрушения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 08-08-00007 и 08-08-00142).

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
3. Локощенко А.М. Новый метод измерения поврежденности металлов при ползучести // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 5. С. 108-122.
4. Локощенко А.М. Исследование поврежденности материала при ползучести и длительной прочности // Прикл. мех. и техн. физ. 1982. № 6. С. 129-133.
5. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. М.: Изд-во Московского университета, 2000. 178 с.
6. Кулагин Д.А., Локощенко А.М. Моделирование влияния агрессивной окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов при сложном напряженном состоянии // Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 188-199.
7. Локощенко А.М., Назаров В.В. Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двухосном растяжении // Авиационно-космическая техника и технология. Харьков. 2005. № 10(26). С. 73-78.
8. Локощенко А.М. Исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью кинетического подхода // В сб.: «Вопросы долговременной прочности энергетического оборудования». Труды ЦКТИ, Ленинград.1986. Вып. 230. С. 107-109.
9. Локощенко А.М., Назаров В.В. Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии // Прикладная механика и техническая физика. 2009. № 4. С.150-157.

<u>Сведения об авторе:</u>

Локощенко Александр Михайлович
доктор физ.-мат. наук, заместитель директора, профессор, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, лаборатория ползучести и длительной прочности, 119992, Москва, Мичуринский пр. д.1,
тел. (495)9395308; e-mail: loko@imec.msu.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОСАДКИ ЦИЛИНДРОВ

Локощенко А.М., Тerауд В.В.

Рассматривается задача осадки кругового цилиндра двумя жесткими штампами, движущимися навстречу друг другу, в условиях ползучести при высокой температуре. Теоретическое решение этой задачи рассматривается с учетом физической и геометрической нелинейности. Экспериментальное исследование проводилось на высокотемпературном прессе в Институте механики Московского Государственного Университета. Дополнительно для измерения свойств материала была проведена серия экспериментов для определения характеристик ползучести материала цилиндров при высокой температуре. В результате было установлено, что при осаживании цилиндра до некоторой заданной высоты разными кинематически – силовыми программами можно сэкономить до 20% энергии.

1. Теоретическое решение задачи об осадке цилиндра.

Рассматривается осадка сплошного цилиндра высотой $2H_0$ и радиусом R_0 с помощью двух плит, движущихся навстречу друг другу с взаимной скоростью $2w$ вдоль продольной оси *z*. На торцах цилиндра принимается закон трения Кулона с коэффициентом трения «. В качестве зависимости скорости установившейся ползучести $\dot{p}_0$ от напряжения ± использовалась дробная зависимость:

$$\dot{p}_0 = A\left[\pm /(\pm_b - \pm)\right]^n \tag{1}$$

В [1] приведены результаты вычисления всех основных параметров задачи при двух программах нагружения, обеспечивающих уменьшение высоты цилиндра от H_0 до H_1 за время t_1. Осадка производилась при постоянной скорости сближения торцов цилиндра или при постоянной сжимающей силе. В случае не меняющейся во времени силы P_0, сжимающей торцы цилиндра, основные зависимости принимают следующий вид:

$$H(t) = H_0 - \int_0^t w dt\,,\; t(H) = \int_H^{H_0} \left(\frac{(H)}{P_0}\right)^n \frac{dH}{H}\,,\; t_1 = t(H_1)\,,\; w(t) = AH\left(\frac{(H)}{P_0} - 1\right)^{-n}, \tag{2}$$

$$(H) = \begin{cases} 2®\pm_b \left[-\dfrac{H}{«} R_0 \sqrt{\dfrac{H_0}{H}} - \left(\dfrac{H}{«}\right)^2 + \left(\dfrac{H}{«}\right)^2 \exp\left(\dfrac{«}{H} R_0 \sqrt{\dfrac{H_0}{H}}\right)\right] \text{ при } « > 0, \\ 2®\pm_b R_0^2 \dfrac{H_0}{H} \text{ при } « = 0. \end{cases}$$

При этом принимается, что характеристики ползучести материала цилиндра при растяжении и сжатии совпадают.

2. Экспериментальное определение констант в законе ползучести материала цилиндра.

При исследовании ползучести алюминиевого сплава Д16Т в условиях одноосного растяжения использовались цилиндры с начальной величиной рабочей длины $l_0 = 28$мм и начальным диаметром $d_0 = 5$мм. Рабочая температура испытаний – 400^{O}C.

Было проведено десять экспериментов. В табл.1 приведены значения напряжений и установившихся скоростей деформации ползучести. Эти данные аппроксимировались теоретической зависимостью (1), получены следующие константы уравнения (1):

$$A = 4.3 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1},\ \pm_b = 88.3\,\text{МПа},\ n = 5.7 \tag{3}$$

Табл. 1. Данные экспериментов при одноосном растяжении

± [МПа]	29,4	29,4	39,2	39,2	44,1	44,1	44,1	49	49	58,8
$\dot{p}_0$ [сек$^{-1}$]	2,63E-06	8,30E-06	2,23E-04	2,66E-04	1,74E-04	7,71E-04	3,99E-04	3,56E-03	2,20E-03	6,81E-03

3. Экспериментальное исследование осадки цилиндра.

Для экспериментальной проверки полученных теоретических результатов был использован цилиндр с размерами $2R_0 = 39\,\text{мм}$ и $2H_0 = 39\,\text{мм}$. Этот цилиндр был изготовлен из той же партии алюминиевого сплава Д16Т, которая исследовалась в п.3. Осадка цилиндра происходила по программе $P(t) = \text{const} = 72$ кН при температуре 400^{O}C до уровня $(H_0 - H_1)/H_0 = 0.47$ за время $t_1 = 740$ сек. Бойки и прилегающие к ним торцевые поверхности цилиндра предварительно шлифовались алмазным порошком размерами $10\,\text{мкм}$. Для дополнительного уменьшения трения на торцевой поверхности, между цилиндром и бойком была применена специальная высокотемпературная смазка Molykote P37.

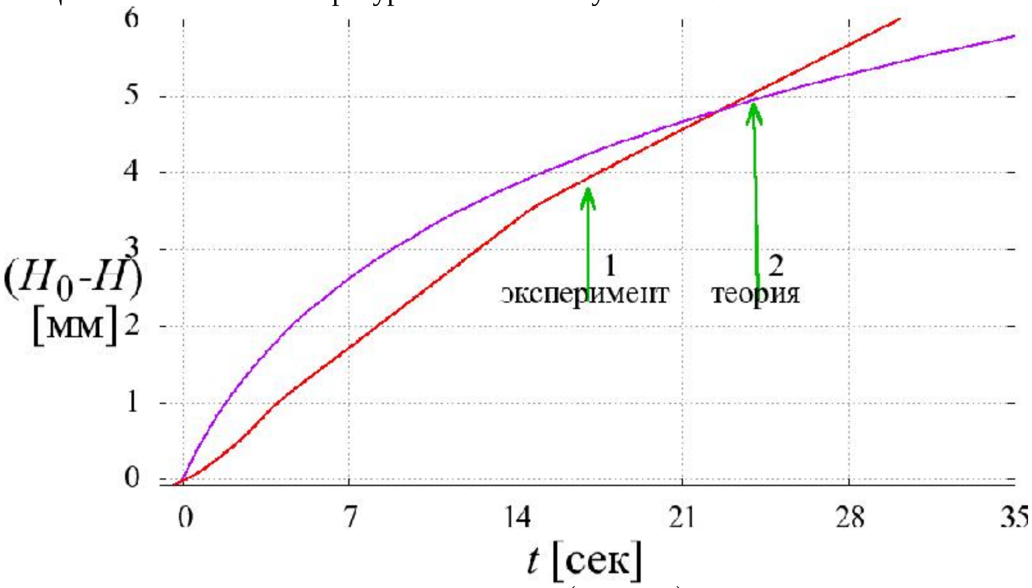


Рис. 1. Начальный участок зависимости $(H_0 - H)$ от времени t

В результате испытания получена величина осадки: $(H_0 - H_1)/H_0 = 47\%$ (начальный участок зависимости $(H_0 - H)$ от времени t приведен виде кривой 1 на рис. 1). Теоретическое решение задачи (2) при тех же значениях t_1 и P_0 показало: $(H_0 - H_1)/H_0 = 37\%$ (кривая 2 рис. 1). При этом начальный участок экспериментальной кривой практически совпадает с начальным участком теоретической кривой. При увеличении времени t теоретическая зависимость проходит ниже экспериментальной, это различие можно объяснить образованием бочкообразной формы исходного цилиндра, которое в данном теоретическом решении не учитывалось. При фиксировании t_1 и $(H_0 - H_1)/H_0$ теоретическое значение усилия сжатия составило $\text{P}_0 = 93\ \text{kH}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-08-00007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Локощенко А.М., Демин В.А., Носов В.В (Тераyд В.В). Осадка кругового цилиндра в условиях установившейся ползучести. // Изв. ВУЗов. Машиностроение. 2007. №4. С.3-10.

Сведения об авторах:

Локощенко Александр Михайлович – док. физ.-мат. наук., зам. директора Института механики МГУ, Московский государственный Университет, (495) 9395308; E-mail loko@imec.msu.ru

Тераyд Валентин Викторович – аспирант МГИУ, кафедра прикладной математики и технической Физики, (495) 9395278; E-mail ldrnww@gmail.com

CONTENTS AND ABSTRACTS

According to the exercises K_{Δ}^{ω}–stability are being described the task of M. A. Aizermana that doing the task at the generalization condition The task of Aizermana insufficient for paying availability at all. So as for necking the second order: $\ddot{x}+\phi(x)\dot{x}+f(x)=0$ at the different $\phi(x)$ and $f(x)$ the construction of the function Lyapunov through which follow steadiness decision necking.

In this problem is considered the system from two dynamic objects, which realize plane motion and is required build optimal controls, providing transition of objects from arbitrary initial difference states in given final difference states at final time and excluding of collision in process of the joint motion.

The stability of the rectangular plate of the piecewise constant thickness, prepared from the composite material, hinge supported on two opposite longitudinal sides and free or hinge supported on the end edges, under the action of the evenly distributed compressive load, applied along the longitudinal sides of plate is examined. The optimum values of the geometric and physical parameters of plate, which ensure the maximum value of critical load with the fixed weight, equal to the weight of the plate of a constant thickness, and its assigned overall dimensions are determined.

In the paper a contact problem for a semi–infinite plate, fastened by two semi–infinite and one finite stringers is considered. The infinite plate is deformed under the action of the forces, applied on the infinity. With the help of Fourier transformation, the problem is reduced to the solution of the singular integral equations system relative to the deformation of the intermediate interval among the stringers and stresses acting under the finite stringer.

The plane contact problem on stamping of rigid punch into free side of compound infinite wedge, consisting of three elastic materials is researched. This problem considered under linear theory of elasticity. It is assumed that only normal stress is acting under punch, the continuity condition is satisfied along the splice line, and the second side is rigidly clamped.

On the basis of equations of space problem of elasticity theory for incompressible material, forced vibrations of rectangular plate are considered. It is regarded that on one face surface the vector of displacement is given which in time is changing harmonically, and on opposite face surface the mixed conditions are given.General asymptotic solutions of formulated problems are derived.In special cases mathematically exact solutions are derived.

parameters. Used the asymptotic method of integrating three-dimensional equations of micropolar elasticity theory in this case for an orthotropic body. Based on this internal problem, obtain general two-dimensional equations of bending of orthotropic micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements and rotations; with constrained rotation, <<with small shift rigidity>>.In the future we will build boundary layer task micropolar orthotropic plate and examine the interaction of internal (two-dimensional) problem with a boundary layer problem.

The plane strain state of compound half-plane, containing absolutely rigid thin inclusion at the junction line of different materials, is considered. The one side of inclusion is coupled with matrix rigidly, and the other is considered under conditions of smooth contact. It is assumed that the compound plane is deformed under action of absolutely rigid punch, pressed in free bound of half-plane. The system of singular integral equations for problem is deduced. The behavior of unknown functions at the end-points of inclusion is analyzed depending on physical parameters. The solution of problem is built by the method of orthogonal polynomials.

In this article the exact solution of mixed problem for orthotropic plane, which contains the absolutely rigid thin inclusion on one of the principal direction and when one of the long side of inclusion wholly coupled with plane, and the other side is torn off the matrix is built.

It is considered the two-dimensional equations and boundary conditions generalized plane strained state micropolar theory of elasticity of an orthotropic material in a thin rectangular area. We introduce the dimensionless coordinates, the dimensionless quantities and the dimensionless physical parameters defining the problem. The result is a singularly - perturbed with a small parameter (dimensionless half-rectangle) boundary value problem. Three separate versions of the values of the dimensionless physical parameters are considered. The asymptotic method is used.

Problem of bend of a bar of finite length on elastic semi-space is considered in the framework of Timoshenko's theory when apart from vertical forces axial tangent forces are applied on the bend flexure of the bar.

Considered axissymetric stress state of the infinite hollow cylinder when on the inner surface of the cylinder acts uniformly moving circular stamp and the outer surface is free of loads or rigidly clamped. The behavior of the contact stresses, acting under the stamp, in dependence on the physical and geometrical parameters of the cylinder is studied.

In the paper the results of asymptotic methods of dynamic problem investigation for thin elastic plates and shells are used in the case of elastic and viscoelastic two-layer plates. The base of

(square and cubic) and geometrical (cubic). It is shown that the account of aerodynamic nonlinearity (especially its asymmetrical square part) brings to the appearance of new types of dependences "amplitude-speed" as in up to critical stage, and the post-critical speeds.

We combine physical and mathematical simulation of the processes of impact and penetration of cylindrical rods to develop a computational-experimental method for identifying strain and strength characteristics of ground media in a wide range of pressure. The method of solving the oblique penetration problem on the basis of the plane section hypothesis is proposed. The results of verification show that one describes reasonably well both the resistance forces and the impact-induced trajectory deviation from the initial direction for a body of revolution. It is shown that, in comparison to the local interaction models known previously, the new algorithm provides a significant increase in the reliability of calculations of the oblique impact parameters and the penetration of bodies, which is due to taking into account the nonlinear dependences of the pressure on density and the yield strength on pressure, the irreversibility of bulk unloading, the separation character of the flow, and the unloading action of the free surface.

The plane elasticity theory problem for convex polygon weakened by unknown equi- strong holes is considered. It is supposed that absolutely smooth rigid stamps with rectilinear bases are attached to each link of the external boundary of broken line. External concentrated forces applied to the stamps acted perpendicularly to the boundary. Under the action of these forces the stamps are moved only forward. The unknown contours are free from external forces. At each link of broken line of the boundary the normal displacements are constant and tangential stresses are equal to zero. It is required to define the unknown boundaries of equi- strong holes and the body stressed state.

A problem on the questions of the interaction of periodic system of cracks, situated on one direct in the elastic infinite plate with thin walled inclusions is considered. With this the thin walled inclusions are interpreted in the form of linearly deformed continuously distributed springs of definite rigidness under the tension, connecting on the some parts of the cracks edges.

The equations of the cubic symmetry materials for class 23 are received in the analogy with known equations of the quasihiperbolic approximation of piezoelastic materials of the hexagonal symmetry. The solution of the problems of the reflection from semispace boundary are bringing on that equations base.

The reflection and refraction of a flat electroelastic shear wave at the smooth contact from border of a rhombic piezoelectric crystal of a class 222 and elastic dielectric izotrop media is considered. Are determined peak coeffition of arising waves. Is shown, that in a crystal there are accompanying superficial waves.

normal wave is present, the conditions are obtained, under which the piezomagnetic medium is not disturbed.

On stressed state of a composite in form of a package composed of an arbitrary number of elastic circular cylinders under antiplane deformation
With application of Fourier series problem of determination of components of stress-strained state of a composite under antiplane deformation is considered when the composite is composed of finite number of circular cylinders.

A modified rectangular finite-elements method for solving the tasks of plate bending
Modification of rectangular finite-elements method for solving tasks of plate banding is suggested that enhances opportunity to take into account the continuity of bending, torsional moments and transection forces static and cinematic boundary conditions for all the points of contour of average plane of the plate

Static stability of variable thickness ortotrope strips with account of transverse shear
Static stability of variable thickness ortotrope strips with account of transverse shear at various boundary conditions is considered. The obtained set of stability equations solved numerically by Ritz's and collocation methods in various laws of variation of thickness and elastic constants. The results of calculation in some cases compared with known exact solutions.

About the asymptotic analysis of solutions of correct and "incorrect on Adamar" problems for the elliptic equations of mathematical physics (Thermal conductivity)
By the asymptotic method are solved classically correct and "not correct on Adamars" problems of Dirichlet and Neumann for the elliptic equations of Poissons (and Laplase). By the deduced decisions it is revealed existing mutually and unequivocally communication between classically correct and not correct boundary conditions with any in advance chosen asymptotic accuracy. It is proved that at set on longitudinal borders of a strip (or plates) the infinite sizes algebraic multinomials the boundary conditions, the received decisions of boundary problems mathematical exact, continuous and unique. The decision of classically correct problem identically coincidenses with the decision corresponding "not correct on Adamars" problems.

To definition of shear deformation of metal materials under creep conditions
The construction technique of uniaxial diagrams on torsion at final deformations by results of tests of solid round samples (non-uniform stress state) using kinetic creep equations and damageability in the power form is offered. Materials in which initial curves of creep at constant stress and temperatures in normalized variables are geometrically similar are investigated. For such materials intensity of deformation process is estimated by capacity of the specific energy dissipated in the creep process and the measure of material damage is the value of normalized power of irreversible creep deformations. Results of experimental researches in field of stretching till torsion at constant intensity of stress up to destruction with processing by the offered technique are given. The considered kinetic equations were approved at torsion of solid round samples of aluminum alloys AMG-6M and AK4-1T with constant rate of a corner of a twisting. Satisfactory compliance of the experimental and settlement data is obtained.

Study of Contact and Internal Stresses in Metal-Metalloid Coatings at Friction
The thin metal-metalloid coatings have high hardness, hence, high wear resistance; that's why they can be used in tribology. The study of frictional contact of such coatings is important for

A problem of diffraction of shear plane wave in piezoelectric media containing parallel semi-infinite crack and infinite metallic thin layer(electrod) is considered. The problem id reduced to solving functional equations of Riemmann's problem of the theory analytic functions. The problem closed solution expressing the wave elctroelastic field in piezoelectric space. It is shown that existence of semi – infinite crack leads to appearance of surface waves.

Riemann waves and solitons in nonlinear Cosserat media
The possibility of formation of solitons and their periodic analogue is considered in the problem of propagation of nonlinear shear and rotation wave. In the problem of propagation of a nonlinear thermo elastic longitudinal and rotational wave study of evolution of a Riemann wave in the medium without damping in a medium with damping. Results depending on the coordinates of points overturning Riemann waves on the parameters of the material were found.

Experimental research of non-stationary pseudoshock waves in channels of uniform cross-section
Studying shock-wave flows arising at supersonic flow deceleration till subsonic speed in the channel is the important problem of fluid mechanics. At the same time, the majority of such researches are conducted for stationary regimes. In this work possibility of active control of shock-wave flows is shown, using periodic influence on an air stream. For the first time speed of pseudoshock moving in plane and axisymmetric channels is measured. The ways of flow control and burning regimes in a supersonic air stream which can be used at the organization of effective heat supply in combustion chambers of perspective high-speed engines have been proposed and tested.

Mathematical model for usage and refined strength analysis of nanostructured flexible graphite o-ring seals
A mathematical model for thermoelastic deformation of seals is developed taking into account a cylindrical nature of anisotropy type of flexible graphite, experimental data for elastic, strength and thermophysical characteristics of materials (the properties differ in radial, hoop and generatrix directions). An initial operation mode of O-ring seals, produced on a large scale and used for rod seal in the gland cocks, has been considered. The influence of thermoforce loading conditions on the character of stress-strain distributions along cross-sections of seals and seal packs has been investigated using numerical FEM solutions of 3D stationary boundary value problems. Estimation of real damage mechanisms (i.e. damage from tension or compression in radial, hoop and axial directions, and from transversal and antiplane shear) affection on initial strength, a comparison of different loading modes (i.e. reciprocating motion in sealing bush or opposite direction, and torsion of the rod), height and conditions on contact surfaces (i.e. ideal contact, friction or slip) between seals on the maximum values of radial, hoop, axial and shear stresses have been calculated. The locations of damaged domains obtained from computational experiments are in a good agreement with the results of O-ring seals experience.

Elastic equilibrium state of heavy anisotropic axial- and central-symmetric bodies which are fixed on the external surfaces
Using decomposition of hoop and radial components of displacement vector to the trigonometrical and generalized power series, the new exact analytical solutions to problems on equilibrium state of thick-walled heavy anisotropic central- and axial-symmetric bodies, which are fixed on the external surfaces and are subject to the action of uniform internal lateral pressure, are obtained. The estimation of an initial strength of cylindrical and spherical solid-cast mine working supports is carried out on the basis of a multicriteria approach taking into account real damage mechanisms (i.e. damage from tension or compression in radial, hoop and

axial directions, and from transversal and antiplane shear) of anisotropic axial- and central-symmetric bodies.

Methods of boundary elements (MBE) can be successfully used when computating many problems of elasticity theory. One of the MBE is called the Method of fictitious loadings (MFL). The basis of the MFL, as well as MBE, is constituted by the presentation of any solution as linear combination of some basic solutions of the elasticity theory with indeterminated coefficients which are determined from boundary conditions of the concrete problem. The MFL can be successfully used when computating contact problems of elasticity theory. The demonstration of the MFL as an example of a problem of a hard stamp subsonic movement on border of an elastic semi-surface is given in this article. In this problem it's required to determine the deflected mode of elastic environment and to find a contact region of stamp with environment. In this article numerical solution results are produced, where the stamp has a foundation like a parabola when the velocity is less than the Rayleigh wave velocity and vice versa.

In this paper we propose a method for reconstruction of cracks in layered composites based on modeling of their internal heat sources and measuring the temperature of a portrait of the body. By using the reciprocity theorem for a body with defects and without them, as well as some analytic test solutions, formulas for determining the rates interface boundary containing the defect and the coordinates of an interior point of the defect are obtained. The second section of the work associated with the decision of the urgent problem of determining the resource polymer composite reinforced structures subjected to mechanical and climatic influences (such as helicopter rotor blades.). A finite-element modeling package ANSYS representative volume of the composites and calculated their fatigue strength. The results of numerical experiments to determine the defects and fatigue strength of composite materials. The numerical calculations have shown high accuracy of the method.

Large-area antennae of multipurpose on-board radio-engineering equipment as well as large-size solar batteries for space vehicles power supply belong to most important systems that have a great influence on Earth satellite development.Large-dimensioned structures are delivered into the orbit in folded state. There they are deployed into the working state. Reliability of the deploy requires solution of complicated tasks of mechanics. So, only application of considered complex models for folded structure deploy can provide a high reliability of large transformable space system.

The problem of contact interaction between a foundation with a coating and a rigid punch whose surface is described by a certain function was studied in [1–3]. The solution of this problem was obtained as a series in normed polynomials, for example Legendre polynomials. Soon it became clear that, in the cases where the punch base shape is described by oscillating functions the solution representation as a series in classical orthogonal polynomials is inefficient. It allows us to perform calculations only for punches whose base shape is well described by a finite small number of polynomials. The approach described in this paper allows us to perform calculations for a punches, whose base forms are described by oscillating functions. We consider plane contact problems. We present the statements of the problems and derive their basic mixed integral equation. The solution of this equation is constructed by using the Manzhirov generalized projection method [4].

Magnetoelastic vibrations of perfect conductive transversely isotropic elastic layer in external longitudinal magnetic field
Within the framework of elasticity theory plane problem, the propagation of magnetoelastic waves in an transversely isotropic layer is considered. The layer surfaces are free from mechanical stresses. The layer is immersed in external constant magnetic field, direction of which coincides with direction of magnetoelastic wave. The layer has properties of perfect conductor.The dispersion equation is derived and in long wave approximation the equation of bending vibration of thin magnetoelastic plate is derived.

The influence of symmetry infringement of the reinforcement on deformative behavior of glassplastic tubes under the axial tension
The influence of angle deviation from the given zero ($\varphi=0^0$) , caused by technological process and changing within limits $\varphi=6\text{-}8^0$, on the deformativibility of glassplastic tubes under the axial tension is considered. It is revealed that the relation of the axial deformations of samples with $\varphi=8^0$ and $\varphi=0^0$ practically doesn't depend on the level of stress under the short time tests and the duration of observation in case of creep. A qualitatively analogous phenomenon was detected in case of the relation shear and axial deformations for tubes with the deviating reinforcement, too.

Effect of fatigue stress on resistance metal cutting tools
Proposed a generalized approach to describe the fatigue failure in the cutting tool that based on the theory of random point processes.

Contact Problem for the Elastic Half-Plane Strengthened by Heterogeneous Elastic Stringers of different length in the presence of the interlayer
This work observes contact problem for the elastic half-plane strengthened by the heterogeneous elastic stringers (overlays) which consists of two semi-infinite pieces and one separated finite piece with another elastic characteristics. It is supposed that contact interaction in all parts is realized through a thin layer of glue (another physicomechanical characteristics) and stringers are deformed under the action of horizontal forces. Using generalized Fourier transforms the determinational problem of unknown contact stresses are reduced to the systems of integral equations Fredholm second kind within the different intervals, which in the case of all admitable values characteristic parametrs of problem in the space of Banach may be solved by the method of successive approximations. The particular cases are observed and the character of the change contact stresses is illustrated in the different contact parts.

On the stability of orthotropic plate-layer, taking into account its own weight and trnansvers shear
The collocation method is used to solve the problem of stability of an orthotropic plate-layer, taking into account its own weight and transverse shear S.A.Ambartsumian's precised theory of anisotropic plates is used. We consider two variants of boundary conditions. We present the dimensionless critical values of loads. Qualitative and quantitative conclusions. analyzing the results are made.

Application of an asymptotic approach to problems of scattering acoustic waves by elastic spherical shells

Application of asymptotic models to problems of scattering of stationary acoustic waves by elastic spherical shells for different value of the relative thickness is considered. A procedure is proposed for constructing an approximate solution, based on matching the expansions of three different asymptotic models of the interaction of the elastic shell with the acoustic medium. In the vicinities of zero frequency the refined Kirchhoff-Love theory of long-wave low-frequency approximation of the elasticity equations is applied. In the vicinities thickness resonance frequency long-wave high-frequency approximations are employed. Outside the vicinities of zero spherical and thickness resonance frequency vibrations of a shell correspond to short-wave motions. Here a flat layer model is used. It is shown for enough small value of the relative thickness that the flat layer model has overlap regions both the refined Kirchhoff-Love theory and the theories associated with long-wave high-frequency approximations. The boundary of the field application of asymptotic models in dependence from value the relative thickness of the spherical shell is obtained. A comparison of numerical data corresponding to asymptotic and exact solutions for middle value the relative thickness shows that the proposed procedure is applicable in frequency regions to first the frequency thickness resonance.

Group analysis of the non-linear system of partial differential equations describing three-dimensional perfectly plastic equilibrium state is carried out. The Tresca yielding criterion is employed to formulate the system to be analysed. Stress state is presumed correspond to an edge of the Tresca prism thus allowing formally consider the static equations independently on the flow rule. The system of static equilibrium equations is represented in the stress principal lines co-ordinate net (isostatic net). By the aid of the standard algorithms of the group analysis of the partial differential equations the symmetry group of this system is obtained.

The corresponding Lie algebra and a first order optimal system of subalgebras of the symmetry group of three-dimensional partial differential equations of the mathematical theory of plasticity are studied. The optimal system in the three-dimensional case is shown consist of 1 three-parametric, 9 two-parametric, 45 one-parametric and 95 individual infinitesimal generators. It is proved that plane strain equations determine the seven-dimensional Lie algebra; a first order optimal system of its subalgebras consists of 1 two-parametric4., 7 one-parametric and 19 individual infinitesimal generators. In the case of axial symmetry the system of partial differential equations is characterized by the five-dimensional Lie algebra; a first order optimal system of its subalgebras consists of 1 one-parametric and 20 individual infinitesimal generators.

Shear model for accumulation of damage in solid bodies under irreversible strain is proposed. Irreversible strain is believed to be formed under in-plane shears. Normal strain varies proportionally to a respective shear at directions, normal to shear planes [1, 2]. This approach makes it possible to give due consideration of the fracturing and pore development without applying Kachanov –Rabotnov kinetic equation for damage [3, 4]. Material failure is initiated when the maximum shear reaches the critical value and results in the shear-strength loss. The model, based on the maximum shear stress and the exponential law, provided the grounds to solve the problems on strain and failure of an elastic-creeping body at the stages of nonstationary and stationary creep. The study objects are cylindrical and spherical cavities in an infinite body under internal pressure, pure bending of a rectangular cross section bar, and torsion of a round bar. Stresses, creep strains, fracture start time and complete failure time, as well as the fracture front's position and velocity any time are determined for the considered structural elements.

Numerical modeling of dependence of effective elastic characteristics of materials quartz matrix – biotit type from concentration and the shape of inclusion has been spent. Quartz crystallites have isometric shapes, inclusions of biotit were modeled by ellipsoids of revolution with a main semiaxis oriented in *z* direction. Isotropic orientations distribution function (ODF) was considered for quartz crystallites, axial ODF in *z* direction (coaxial with 6th order axis of biotit) was used for biotit inclusions. The calculated effective elastic modules were used for the determination of the parameter of anisotropy in *z* direction.

The paper devoted to mathematical modeling of transient wave propagation in thin shell by asymptotic methods based on exact three-dimensional elasticity. Longitudinal actions of tangential, bending and normal types are considered. An asymptotic model of wave propagation in a semi-infinite shell of rotation is used, which employs the two-dimensional Kirchhoff-Love (tangential and flexural) components, the solutions of the quasiplane problem of elasticity, the parabolic boundary layer near the quasifront, and the hyperbolic boundary layer near the expansion wave front.

The features of thermodeformation space reinforced and thermodecaying composite materials on the basis of carbon are stated from uniform thermodynamic positions. The basic system of the defining equations is formulated. The approach to identification of characteristics of components of space reinforced composites is offered. Results of numerical modeling the temperature fields and stresses in structures are presented.

At this paper two methods for solving of problems for hyperelastic bodies are considering. The first method is to use the Ericsen universal deformations. The second method is to find minimum of energy functional. The Mooney-Rivlin potential for incompressible material is used. The experimental method for identification the material constants is proposed.

The properties material consisted from periodical representative elements with microdefects (cylindrical micropores, flat microcracks) is investigated. Firstly the separate elements is considered. The simultaneous and separate loading of thermoelectrical and mechanical is considered taking into account microdefects of material. The main defect is finding closing of the cracks under electric pulse on the first stage of loading and after due to thermomechanical localization on the ands of cracks and melting the material leads to increasing its porosity. It is shown that the presence of circular cylindrical defects under the influence of an electric current appears weak concentration of temperature, while for planar cuts (microcracks), this concentration is very essential. A further electric shocks to the representative element with cylindrical defects does not lead to their closure due to the small compressive displacement. This result is repeated for the sample with an ordered structure of representative elements. This phenomenon leads to an increase of the strength of the sample, but due to the application of electric current it leads to simultaneously thermal softening of the material. The material

ordered structure of the defects under simultaneous action of electric field and the tension is softening and the increase in the yield plateau. These results clarify the mechanism of change of material properties of termoelektroplastic model.

Yu.N.Rabotnov has formulated the theory of metals creep in his monograph [1]. This theory is founded on state equation with structure parameters, which are determinated by systems of kinetic equations. Below some problems are considered, which are connected with new special kinds of kinetic equations for circumscription of experimental data. The method is suggested of measuring of structural damage, which is accumulated in metals during a high-temperature creep process in uniaxial extension. A new approach is suggested for the modeling of creep and creep rupture of metals under the simultaneous influence of mechanical loads at a complex stress state and an environment. The possibilities of vectorial interpretation of damage parameters are considered for modeling of creep rupture at stationary and unstationary complex stress states.

We considered some problems of a circular cylinder, when it is pressed between two meeting rigid die tools under high temperature creep. The theoretical solution proposed takes in account nonlinearity of its physical and geometric properties. Experimental study was carried out on a high temperature press in Mechanics Institute at the Lomonosov Moscow State University. Additional experimental tests allowed to find creep characteristics of the cylinder material under high temperature. It has been as a result established that at shortening the cylinder to some set height different kinematic– power programs it is possible to save about 20 % of energy.

О Г Л А В Л Е Н И Е