НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Труды II международной конференции

4-8 октября, Дилижан, Армения

ТОМ 2

ЕРЕВАН – 2010

Министерство науки и образования Армении
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела
Институт механики НАН РА
Институт проблем механики РАН им. А.Ю.Ишлинского
Ереванский государственный университет архитектуры и строительства
Ереванский государственный университет
Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна
Государственный аграрный университет Армении

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н.Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Дизайн обложки: к.ф.-м.н. Д.М.Минасян

Редактор: Ж.А.Авдалян

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

II միջազգային գիտաժողովի նյութեր

4-8 հոկտեմբերի 2010, Դիլիջան, Հայաստան

ՀԱՏՈՐ 2

ԵՐԵՎԱՆ –2010

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Proceedings of the Second International Conference
4-8 October 2010, Dilijan, Armenia

VOLUME 2

YEREVAN – 2010

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА[1]

Мамонтов А. Е.

Рассматриваются несколько начально-краевых задач для уравнений Эйлера, описывающих течения идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области: задача NP с условием непротекания на границе и так называемые задачи протекания, описывающие течения жидкости сквозь область, с различными вариантами краевых условий (что приводит к трем задачам, называемым TF.I, TF.II и TF.III). Нас интересуют теоремы о глобальном (т. е. «в целом» по времени и входным данным) существовании и единственности решений этих задач в как можно более широких классах. Такой интерес стимулируется известной проблемой глобальной разрешимости трехмерных уравнений Эйлера, для которых решения становятся негладкими, даже если в начальный момент времени они были гладкими, так что названная проблема, по-видимому, может получить свое решение лишь в классах крайне нерегулярных решений. Другими словами, необходимо изучение негладких решений уравнений Эйлера и доказательство их существования и единственности. В настоящей работе предлагаются два результата. Первый результат состоит в единственности решений задач NP, TF.II и TF.III (при любой размерности течения) в классах с неограниченным вихрем. Эти классы формулируются с помощью пространств Орлича и удобны для приложений, поскольку представлены в достаточно прозрачной форме (по сравнению с ранее известными результатами). Второй результат состоит в глобальной теореме существования для двумерной задачи TF.I в классах решений с неограниченным вихрем из пространств Лебега L_p с $p>4/3$. Применяемые в данной работе методы обнаруживают интересные связи изучаемых задач с теорией интегральных преобразований.

Введение. Рассмотрим уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

описывающие нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости, p – давление, $\mathbf{f}$ – вектор (известных) внешних сил, все эти величины – функции времени t и пространственных переменных $\mathbf{x}\in R^n$, $n\in\mathbf{N}$, операторы ∇, div действуют по $\mathbf{x}$. Несмотря на упрощенность модели (1) с позиций механики, она оказалась непростой с математических позиций. Опуская обзор массы известных результатов, отметим, что до сих пор не решена проблема глобальной разрешимости каких-либо краевых задач для (1) в случае трехмерных движений общего характера. Чаще всего для (1) рассматриваются задача Коши в $R^n\times(0,T)$ с данными

$$\mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \tag{2}$$

и задача непротекания в $Q_T=\Omega\times(0,T)$ (где $\Omega\subset R^n$ – ограниченная область) с данными (2) и

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \tag{3}$$

(здесь $T>0$ – заданное число, а $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$). Именно с этими двумя задачами связано большинство результатов, касающихся глобальной разрешимости уравнений (1) и оптимальных классов единственности. Последний вопрос (единственность в наиболее широких классах) особенно актуален в связи с тем, что проблема глобальной разрешимости трехмерных уравнений (1), по-видимому, имеет перспективы только в классах достаточно нерегулярных решений.

В проблеме единственности размерность n течения несущественна. Чаще всего классы единственности формулируются в терминах вихря $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Наиболее сильный из результатов в этой области получен в [1], где показана единственность решений задачи непротекания

NP={(1),(2),(3)}

с вихрем из специальным образом нормированных шкал L_p (см. также результат [2] в пространствах Бесова).

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00447), программы ФАО Минобрнауки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.4918) и Сибирского отделения РАН (Лаврентьевский конкурс, проект 4.3).

Одна из целей настоящей работы – дать аналогичный ответ в терминах пространств Орлича (что приводит к более прозрачным и легко проверяемым условиям), а также распространить его на задачи протекания жидкости сквозь заданную область.

В задачах протекания граница $\partial\Omega$ области течения разбивается на участки: втекания Γ_1, вытекания Γ_2 и непроницаемый Γ_0, на которых

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\mathsf{d}_0\times(0,T)} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\mathsf{d}_1\times(0,T)} = g_1 < 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\mathsf{d}_2\times(0,T)} > 0 \tag{6}$$

(задается только знак) или

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\mathsf{d}_2\times(0,T)} = g_2 > 0 \tag{7}$$

(задается точное значение). При этом требуются дополнительные условия, выбор которых приводит к различным типам задач протекания (в их классификации мы будем следовать [3]). Наиболее распространенная из них – задача протекания I рода, в которой на входе задается касательная составляющая вихря

$$\boldsymbol{\omega}_{\pm}\big|_{\mathsf{d}_1\times(0,T)} = \mathbf{h} \tag{8}$$

($\mathbf{h}$ – касательное поле, а индекс $\pm$ означает касательную составляющую), что приводит к задаче

TF.I={(1),(2),(4),(5),(7),(8)}.

В случае $n = 2$, когда задача может рассматриваться как трехмерная в цилиндре бесконечной высоты, а $\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$, условие (8) означает задание на $\partial\Omega$ скалярного вихря ω. Несмотря на то, что задача TF.I наиболее исследована среди задач протекания (особенно в плане глобальных результатов), она имеет два существенных недостатка: трудности в физической интерпретации и повышенные требования к классам единственности решений.

В задаче протекания II рода на входе задается полный вектор скорости, т.е. в дополнение к (5) задается:

$$\mathbf{u}_{\pm}\big|_{\mathsf{d}_1\times(0,T)} = \mathbf{r}, \tag{9}$$

а на выходе (вместо (7)) задается давление:

$$p\big|_{\mathsf{d}_2\times(0,T)} = p_*. \tag{10}$$

В результате получается задача

TF.II={(1),(2),(4),(5),(6),(9),(10)}.

Наконец, задача протекания III рода отличается от II тем, что на выходе вместо (10) задается (7), что дает задачу

TF.III={(1),(2),(4),(5),(7),(9)}.

Единственность в терминах $\nabla\otimes\mathbf{u}$. Пусть Ω – ограниченная область в R^n с границей, достаточно гладкой (чтобы была верна формула Гаусса–Остроградского), и задано число $T > 0$. Будем, как и в [1], рассматривать решения (1) класса

$$\nabla\otimes\mathbf{u},\ \mathbf{u}_t \in L_\infty\big(0,T,L_r(\,\mathrm{t}\,)\big), \quad \forall r < +\infty. \tag{11}$$

В этом случае уравнения могут рассматриваться почти всюду, а все краевые условия принимаются по непрерывности. Если $(\mathbf{u}_1, p_1)$ и $(\mathbf{u}_2, p_2)$ – решения (1) класса (11), то для их разности $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ в рамках задач NP, TF.II и TF.III получается неравенство

$$\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x} \le 2\int_0^t d\tau \int_\Omega |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{D}(\mathbf{u}_2)|\,d\mathbf{x}. \tag{12}$$

Таким образом, единственность в трех названных краевых задачах сводится к неравенству типа Гроноулла

$$\int_{\Omega} \psi(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \le \int_0^t \int_{\Omega} g(s,\mathbf{x})\,\psi(s,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}ds, \tag{13}$$

где $\psi \ge 0$, $g \ge 0$, и нужно доказать $\psi = 0$ при минимальных ограничениях на g. В [1] результат для (13) получен в терминах шкал L_p, т.е. при условии вида

$$\|g\|_{L_\infty(0,T,L_r(\Omega))} \le \theta(r), \quad r >> 1 \tag{14}$$

со специальными (достаточно громоздкими) требованиями на рост θ, что и дало соответствующий ответ на исходный вопрос о единственности для задачи NP. Идея нашей работы в том, что результат для (13) (а следовательно, и для системы (1)) может быть получен в более удобных терминах пространств Орлича.

Напомним, что так называемые N-функции *M* (выпуклые четные функции, заданные на *R* и растущие на ∞ быстрее первой степени) порождают класс Орлича $K_M(\Omega) = \left\{ u \,\middle|\, \int_{\Omega} M(u(x))\,dx < \infty \right\}$ и его линейную оболочку – пространство Орлича $L_M(\Omega)$. В случае $M(s) = s^p$ это пространства L_p, а для нестепенных *M* эти классы позволяют более точно описывать свойства функций в Ω. В частности, в [4] получено следующее исчерпывающее решение проблемы типа Гронуолла (13): требуемое соотношение $\psi = 0$ следует из (13), если $g \in K_{\Phi}(Q_T)$ с $\Phi \in K$, где класс K состоит из достаточно быстро растущих функций, а именно таких, что

$$\int^{+\infty} \frac{\ln M(s)}{s^2} ds = +\infty. \tag{15}$$

Если же $\Phi \notin K$, то строится контрпример, т.е. $\psi \ne 0$, $g \in K_{\Phi}(Q_T)$, удовлетворяющие (13).

Этот результат мгновенно влечет теорему единственности для задач NP, TF.II и TF.III в классе

$$\nabla \otimes \mathbf{u} \in K_{\Phi}(Q_T), \quad \Phi \in K. \tag{16}$$

Единственность в терминах вихря. Для перевода класса (16) «на язык вихря» нужно изучить поведение отображения $A : \boldsymbol{\omega} \mapsto \nabla \otimes \mathbf{u}$ в пространствах Орлича. В L_p оно хорошо известно, по крайней мере, для задач NP и TF.III – в этом случае *A* есть оператор решения задачи

$$\mathrm{rot}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = g_0, \tag{17}$$

где $g_0 = 0$ в задаче NP, а в TF.III соответственно

$$g_0 = 0 \quad \text{на } \mathrm{d}_0, \quad g_0 = g_k \quad \text{на } \mathrm{d}_k, \quad k = 1,2. \tag{18}$$

Например, в задаче NP получим $\|A\|_{L(L_r)} \le Cr$ (для простоты далее считаем Ω односвязной). Поэтому естественно воспользоваться экстраполяционными результатами, полученными в [5], с тем, чтобы свойства *A* в пространствах Орлича получить как автоматическое следствие его свойств в L_r (не вдаваясь в природу *A*). В результате получаем $A \in L(L_M, L_\Phi)$, где (M, Φ) – пара произвольных достаточно быстро растущих N-функций, связанных соотношением $M = \mathbf{S}[\Phi]$, где

$$\mathbf{S}[\Phi](v) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\Phi(vs)\,ds. \tag{19}$$

При соответствии $M = \mathbf{S}[\Phi]$ условие $\Phi \in K$, использованное в (16), переходит в $M \in K_1$, где класс K_1 состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$\int^{+\infty} \frac{\ln\ln M(s)}{s^2} ds = +\infty. \qquad (20)$$

Исследование задачи TF.III проводится аналогично. В итоге получаем следующий результат:

Теорема. *Задачи NP, TF.II и TF.III могут иметь не более 1 решения в классе (16). В частности, для односвязных областей задачи NP и TF.III (в последнем случае достаточно, например,* $g_0 \in L_\infty\left(0,T,W^1_\infty\left(\partial\Omega\right)\right)$ *– см. (18)) не могут иметь более 1 решения в классе*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in L_\infty\left(0,T,L_M\left(\Omega\right)\right), \quad M \in K_1 \qquad (21)$$

(см. (20)). Единственность давления, как обычно, понимается с точностью до аддитивной константы.

Формулировка единственности в терминах вихря оказалась возможной как раз в тех двух задачах (NP и TF.III), в которых имеются (естественно, только при $n = 2$, причем для задачи TF.III – локально по начальным данным) глобальные по времени результаты о существовании решений, так что в этих задачах (после обобщений известных теорем существования) получается результат о глобальном существовании и единственности решений в классе (21) для случая $n = 2$. В остальных случаях результат теоремы условный в том плане, что единственность утверждается без соответствующих результатов о глобальном существовании.

В задаче TF.I, несмотря на развитую (опять же двумерную) глобальную теорию, для доказательства единственности требуется на порядок большая гладкость, чем в теореме (поэтому здесь она не изучается в плане единственности решений). Как обойти эту трудность, пока неясно. Впрочем, именно для задачи TF.I удается получить следующий результат о существовании решений:

Глобальное существование нерегулярных решений двумерной задачи TF.I. Рассмотрим задачу TF.I в случае плоских течений, т.е. для системы (1) ставятся начально-краевые условия (2), (4), (5), (7) и условие (8), принимающее вид

$$\omega\big|_{\Gamma_1\times(0,T)} = \omega_1 \qquad (22)$$

(ω – скалярный вихрь). В работах [6,7] эта задача была подробно изучена, но лишь для достаточно гладких решений и входных данных. В данном разделе предлагается теорема существования в классе $\{\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in L_\sim\}$ с $\sim\, > 4/3$. Более точно, на входные данные налагаются требования (здесь $4/3 < \sim\, < 2$):

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_0 \in L_{\frac{2\alpha}{2-\alpha}}(\Omega), \quad \mathrm{div}\mathbf{u}_0 = 0, \quad \omega_0 = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}_0 \in L_\alpha(\Omega), \\
g_0 \in L_2(0,T,W^{1-1/\alpha}_\alpha(\partial\Omega)) \cap L_\infty((0,T)\times\Gamma_1), \quad \oint_{\partial\Omega} g_0\,ds = 0 \quad \text{при п.в. } t \in (0,T), \qquad (23) \\
\omega_1 \in L_\alpha((0,T)\times\Gamma_1), \quad \mathbf{f} \in L_1(0,T,W^1_\alpha(\Omega)), \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{f} \in L_1(0,T,L_\alpha(\Omega)).
\end{gathered}$$

Теорема. *При условиях (23) задача (1), (2), (4), (5), (7), (22) имеет решение* $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\Phi$ *, где* $\mathbf{v} \in L_2(0,T,L_{\frac{2\sim}{2-\sim}}(\Omega))$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \in L_\infty(0,T,L_\sim(\Omega))$, $\Delta\Phi = 0$, $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_0$, *с выполнением стандартного интегрального тождества*.

Основная идея доказательства теоремы – использование регуляризации входных данных вместо использовавшегося в [7] метода исчезающей вязкости (не позволявшего получить оценки приближенных решений равномерно по исчезающей вязкости в случае неограниченного вихря), при этом приближенные решения (гладкие) строятся на основе результатов [6].

В заключение отметим, что представленные в настоящей работе результаты более подробно изложены в [8,9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Yudovich V.I. Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid.// Math. Res. Let.. 1995. V. 2. P. 27–38.
2. Vishik M. Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type. //Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4). 1999. V. 32. № 6. P.769-812.
3. Кажихов А.В., Рагулин В.В. Нестационарные задачи о протекании идеальной жидкости сквозь ограниченную область.// ДАН СССР. 1980. Т. 250. № 6. С. 1344-1347.
4. Кажихов А.В., Мамонтов А.Е. Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлича. //Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39. № 4. С. 831- 850.
5. Мамонтов А.Е. Интегральные представления и преобразования N-функций. II. //Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 4. С. 811-830.
6. Юдович В.И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область. //Мат. сб., 1964. Т. 64 (106). №4. С. 562-588.
7. Алексеев Г.В. О разрешимости неоднородной краевой задачи для двумерных нестационарных уравнений динамики идеальной жидкости. Динамика жидкости со своб. границами (Динамика сплошной среды, вып. 24). Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 1976. С. 15-35.
8. Mamontov A.E. On the uniqueness of solutions to boundary value problems for non-stationary Euler equations, in the book: New Directions in Mathematical Fluid Mechanics (The Alexander V. Kazhikhov Memorial Volume); Series: Advances in Mathematical Fluid Mechanics; 2009, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, P. 281-299. Ed.: A.V.Fursikov, G.P.Galdi and V.V.Pukhnachev.
9. Мамонтов А.Е., Уваровская М.И. О глобальной разрешимости двумерной задачи протекания для уравнений Эйлера с неограниченным вихрем на входе. //Вестник Новосиб. гос. ун-та, сер. «Матем., Мех., Инф.». 2010. в печати.

Сведения об авторе:

Мамонтов Александр Евгеньевич – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Тел.: +7 (383) 3333 199
E-mail: mamontov_a@ngs.ru

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Манукян В. Ф.

Рассматривается задача распространения трехмерных магнитоупругих волн вдоль границы полупространства. Задача исследуется для модели изотропного идеально проводящего материала. Получено и решено дисперсионное уравнение.

1. Рассмотрим полупространство из идеально проводящего изотропного материала. Предполагается, что координатные оси x и z лежат в плоскости, ограничивающей полупространство, а ось y направлена перпендикулярно к этой плоскости в глубь полупространства. В таком случае полупространство в декартовой координатной системе занимает область ($-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $0 \le y < \infty$).

Система трехмерных уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид:

$$\begin{gathered} c_t^2 \Delta u + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\vec{u} + \frac{R_x}{\rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c_t^2 \Delta w + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\vec{u} + \frac{R_z}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ c_t^2 \Delta v + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\vec{u} + \frac{R_y}{\rho} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь u, v, w – проекции вектора перемещения $\vec{u}$ на оси координат x, y, z, соответственно, ρ – плотность материала среды, R_x, R_y, R_z – проекции вектора объемной силы $\vec{R}$; c_l и c_t – скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно.

Для идельного проводника выражение для объемной пондермоторной силы имеет вид [1,2]

$$\vec{R} = \frac{\mu}{4\pi}\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\vec{u}\times\vec{H}_0\right)\right]\times\vec{H}_0, \tag{1.2}$$

где $\vec{H}_0$ – вектор магнитной индукции в начальном невозмущенном состоянии, μ – магнитная пронициаемость среды. Пусть среда в невозмущенном состоянии находится в постоянном магнитном поле:

$$H_{0x} = 0,\ H_{0z} = 0,\ H_{0y} \equiv H_0 \ne 0\,. \tag{1.3}$$

В таком случае, учитывая (1.2) и (1.3), для компонент объемной силы получаем

$$R_x = \frac{\mu H_0^2}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right),\ R_y = 0\,, R_z = \frac{\mu H_0^2}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right). \tag{1.4}$$

Следуя [3], представим компоненты упругих перемещений в виде

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z},\ w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4) и (1.5) в первые две уравнения (1.1), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(c_l^2 + v^2\right)\Delta_2\varphi + \left(c_t^2 + v^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[c_t^2\Delta\psi + v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(c_l^2 + v^2\right)\Delta_2\varphi + \left(c_t^2 + v^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[c_t^2\Delta\psi + v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right] = 0, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $v^2 = \dfrac{\mu H_0^2}{4\pi\rho}$.

Уравнения (1.6) будут удовлетворены, если положить

$$\left(c_l^2+v^2\right)\Delta_2\varphi+\left(c_t^2+v^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\left(c_l^2-c_t^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}=0\,, \tag{1.7}$$

$$c_t^2\Delta\psi+v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0\,. \tag{1.8}$$

Из (1.7) получим:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1+\chi}{1-\theta}\left(\Delta_2\varphi+\frac{\theta+\chi}{1+\chi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{1}{\left(c_l^2+v^2\right)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) \tag{1.9}$$

где $\theta=\dfrac{c_t^2}{c_l^2}$, $\chi=\dfrac{v^2}{c_l^2}$.

Дифференцируя последнее уравнение (1.1) по y и подставляя в нем (1.9), получим:

$$\Delta^2\varphi+\frac{v^2\left(c_l^2-c_t^2\right)}{c_t^2\left(c_l^2+v^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta\varphi-\frac{c_l^2+c_t^2+v^2}{c_t^2\left(c_l^2+v^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\varphi+\frac{1}{c_t^2\left(c_l^2+v^2\right)}\frac{\partial^4\varphi}{\partial t^4}=0 \tag{1.10}$$

Решения уравнений (1.8) и (1.10) представляются в виде

$$\phi=\Phi\left(y\right)\exp i\left(\omega t-k_1x-k_3z\right),\quad \psi=\Psi\left(y\right)\exp i\left(\omega t-k_1x-k_3z\right), \tag{1.11}$$

где k_1,k_3 – волновые числа, $k=\sqrt{k_1^2+k_3^2}$.

Подстановка (1.11) в (1.8) и (1.10) приводит к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\Phi(y),\Psi(y)$. Решения этих уравнений, удовлетворяющих условиям затухания ($\lim\limits_{y\to\infty}\vec{u}=0\Rightarrow\lim\limits_{y\to\infty}\Phi=0,\lim\limits_{y\to\infty}\Psi=0$), имеют вид

$$\Phi=A_1\,e^{-\nu_1ky}+A_2\,e^{-\nu_2ky}\;,\;\Psi=A_3\,e^{-\nu_3ky}\;. \tag{1.12}$$

Здесь ν_k – коэффициенты затухания

$$\nu_{1,2}=\sqrt{\frac{2\theta(1+\chi)+\chi(1-\theta)-\eta\theta(1+\theta+\chi)\pm\lambda}{2(\theta+\chi)}}\;,\quad \nu_3=\sqrt{\frac{\theta(1-\eta)}{\theta+\chi}} \tag{1.13}$$

$$\lambda=\sqrt{\chi^2(1-\theta)^2+\eta^2\theta^2(1-\theta-\chi)^2+2\theta\eta\chi(1-\theta)(1+\theta+\chi)}\,,$$

где $\eta=\omega^2c_t^{-2}k^{-2}$ – безразмерный параметр фазовой скорости поверхностной волны.

Подставляя (1.12) и (1.11) в (1.5), получим компоненты перемещения u и w, а v получаем, интегрируя (1.9):

$$\begin{aligned} u&=-i\left[Ak_1\,e^{-\nu_1ky}+Bk_1\,e^{-\nu_2ky}+Ck_3\,e^{-\nu_3ky}\right]\exp i(\omega t-k_1x-k_3z)\\ w&=-i\left[Ak_3\,e^{-\nu_1ky}+Bk_3\,e^{-\nu_2ky}-Ck_1\,e^{-\nu_3ky}\right]\exp i(\omega t-k_1x-k_3z) \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$v=\frac{k}{1-\theta}\left[\frac{A}{\nu_1}\left(-1-\chi+\left(\theta+\chi\right)\nu_1^2+\eta\theta\right)e^{-\nu_1ky}+\frac{B}{\nu_2}\left(-1-\chi+\left(\theta+\chi\right)\nu_2^2+\eta\theta\right)e^{-\nu_2ky}\right]\times$$
$$\times\exp i\left(\omega t-k_1x-k_3z\right)$$

2. Пусть на границе полупространства заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений. Рассмотрим упрощенную задачу, когда в граничных условиях пренебрегаются компоненты тензора Максвелла в вакууме. В этом случае для граничных условий получаем:

$$\frac{\partial v}{\partial y}+(1-2\theta-\chi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0\;,\;\frac{\partial v}{\partial x}+\left(1+\chi\theta^{-1}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=0\;,\;w=0\,. \tag{2.1}$$

Подстановка (1.14) в (2.1) приводит к однородным алгебраическим уравнениям относительно A,B,C. Из условия нетривиальности решений этой системы получаем дисперсионное уравнение следующего вида:

$$\theta\left(-1+\theta\eta-\chi\right)\left(2\chi-\theta\left(-3+\eta+2\theta+\chi\right)-\left(\theta+\chi\right)\nu_2^2\right)+\left(\theta+\chi\right)\nu_1\nu_2\times$$
$$\times\left(4\theta^3+2\chi+2\theta^2\left(-4+\eta+\chi\right)-\theta\left(-4+\eta+\theta\eta+4\chi\right)-\left(-1+\theta\right)\right)\xi^2\left(\theta+\chi\right)\nu_2\nu_3+ \tag{2.2}$$
$$+\left(\theta+\chi\right)\nu_1^2\left(\theta\left(1-\theta\eta+\chi\right)+\left(\theta+\chi\right)\nu_2\left(\left(1-2\theta\right)\nu_2-\left(-1+\theta\right)\xi^2\nu_3\right)\right)=0,$$

где $\xi=k_3k_1^{-1}$.

При отсутствии магнитного поля уравнение (2.2) приводится к уравнению

$$\left(2-\eta\right)^2-4\nu_1\nu_2-\eta\left(1-\eta\right)\xi^2=0\,. \tag{2.3}$$

3. Можно показать, что дисперсионное уравнение (2.2) в интервале затухания всегда имеет единственное решение. В табл. 1 на основе численного анализа приведены корни дисперсионного уравнения для материала Cu (медь). Для расчета примем $\mu=1$.

Таблица 1

ξ	$\eta(H_0=0)$	$\eta^*(H_0=1.2\cdot10^5$ э)	$\eta^{**}(H_0=2\cdot10^5$ э)
0	0.874145	0.87417	0.874214
0.1	0.874514	0.874539	0.874583
0.2	0.875605	0.875629	0.875672
0.5	0.882616	0.882635	0.882669
1	0.901277	0.901286	0.901303
2	0.936386	0.936385	0.936384
5	0.978453	0.978451	0.978448
10	0.992785	0.992785	0.992784
100	0.999903	0.999903	0.999903

Из табл. 1 видно, что с возрастанием ¶ безразмерный параметр η увеличивается, что означает уменьшение степени локализации поверхностной волны. Табл. 1 показывает, что с возрастанием ξ влияние магнитного поля на поверхностную волну уменьшается и начиная с некоторого значения ξ, ($\xi\approx2$), оно практически исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М: Наука, 1977. 272 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд.ЕГУ, 2006. 492 с.
3. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея.// Докл. НАН Армении. 2005. Т. 105. №4. С. 362-368.

Сведения об авторах:

Манукян Вардан Францевич – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры физики ГПИ, (374 93) 46 49 03,
E-mail: mvardan_1972@mail.ru

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

Маргарян Л. М.

Асимптотический метод построения двумерных и одномерных уравнений микрополярно-упругих изотропных пластин и балок развит в работах [1-4].

В данной работе рассматриваются двумерные динамические уравнения, граничные и начальные условия обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной теории упругости ортотропного тела в тонкой прямоугольной области. На основе внутренней задачи получаются динамические уравнения изгиба ортотропной микрополярной упругой балки со свободным вращением, со стесненным вращением, “с малой сдвиговой жесткостью”. Построены и изучены микрополярные погранслои по координатам (квазистатический) и по времени. На основе изучения задачи взаимодействия одномерной задачи и микрополярных погранслоев определены граничные и начальные условия одномерной теории.

1.Основные уравнения, граничные и начальные условия плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного тела.

Будем рассматривать прямоугольник $\left(0\le x_1\le a,\,-h\le x_2\le h\right)$ как плоское упругое тело. Уравнения плоской динамической задачи несимметричной теории упругости для ортотропного тела имеют следующий вид [5]:

уравнения движения:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=I\,\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

соотношения упругости:

$$\sigma_{11}=A_{11}\varepsilon_{11}+A_{12}\varepsilon_{22},\ \sigma_{22}=A_{12}\varepsilon_{11}+A_{22}\varepsilon_{22},\ \sigma_{12}=A_{77}\varepsilon_{12}+A_{78}\varepsilon_{21}$$
$$\sigma_{21}=A_{78}\varepsilon_{12}+A_{88}\varepsilon_{21},\ \mu_{13}=B_{66}\chi_{13},\ \mu_{23}=B_{44}\chi_{23} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^{\ 2}}\sigma_{11}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^{\ 2}}\sigma_{22},\ \varepsilon_{22}=\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^{\ 2}}\sigma_{22}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^{\ 2}}\sigma_{11}$$
$$\varepsilon_{12}=\frac{A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{\ 2}}\sigma_{12}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{\ 2}}\sigma_{21},\ \varepsilon_{21}=\frac{A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{\ 2}}\sigma_{21}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{\ 2}}\sigma_{12} \tag{1.3}$$
$$\chi_{13}=\frac{1}{B_{66}}\mu_{13},\ \chi_{23}=\frac{1}{B_{44}}\mu_{23}$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3,\quad \varepsilon_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3,\quad \chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\ \ \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}. \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{22}$ – силовые напряжения, μ_{13},μ_{23} – моментные напряжения, u_1,u_2 – перемещения, ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника вокруг оси x_3, $A_{11},A_{12},A_{22},A_{77},A_{78},A_{88},B_{66},B_{44}$ – упругие коэффициенты данного тела.

К определяющим уравнениям (1.1)-(1.4) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости присоединим соответствующие граничные и начальные условия. На лицевых сторонах прямоугольника считаются заданными силовые и моментные **граничные условия**:

$$\sigma_{21}\big|_{x_2=\pm h}=\pm X^{\pm},\quad \sigma_{22}\big|_{x_2=\pm h}=\pm Y^{\pm},\quad \mu_{23}\big|_{x_2=\pm h}=\pm M^{\pm}. \tag{1.5}$$

На боковой кромке прямоугольника $x_1=0$ (аналогично при $x_1=a$) примем следующие варианты **граничных условий** несимметричной теории упругости:

1-ая граничная задача**:** $\sigma_{11}\big|_{x_1=0}=\varphi_1\left(x_2\right),\ \sigma_{12}\big|_{x_1=0}=\varphi_2\left(x_2\right),\ \mu_{13}\big|_{x_1=0}=\varphi_3\left(x_2\right)$ (1.6)

2-ая граничная задача: $u_1\big|_{x_1=0}=0,\ u_2\big|_{x_1=0}=0,\ \omega_3\big|_{x_1=0}=0$ (1.7)

3-ая граничная задача: $\sigma_{11}\big|_{x_1=0}=\varphi_1(x_2), \quad u_2\big|_{x_1=0}=0, \quad \mu_{13}\big|_{x_1=0}=\varphi_3(x_2)$ (1.8)

начальные условия:

$$u_1\big|_{t=0}=f_1(x_1,x_2), \quad u_2\big|_{t=0}=f_2(x_1,x_2), \quad \omega_3\big|_{t=0}=\phi_3(x_1,x_2),$$
$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=F_1(x_1,x_2), \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0}=F_2(x_1,x_2), \quad \left.\frac{\partial \omega_3}{\partial t}\right|_{t=0}=\Phi_3(x_1,x_2). \tag{1.9}$$

Решение поставленной краевой задачи складывается из суммы решений симметричной по x_2 и обратно-симметричной задач. В симметричной задаче четными по x_2 величинами будут σ_{11}, σ_{22}, μ_{23}, u_1, нечетными – σ_{12}, σ_{21}, μ_{13}, u_2, ω_3. В обратно-симметричной задаче, наоборот. В дальнейшем будем рассматривать обратно-симметричную задачу (т.е. задачу изгиба).

2. Основные уравнения, граничные и начальные условия одномерной динамической модели микрополярной упругой ортотропной балки со свободным вращением.

Будем предполагать, что высота прямоугольника h мала по сравнению с его длиной a, т.е. $2h << a$, $\delta=\dfrac{h}{a}<<1$ – основной малый геометрический параметр задачи. Рассмотрим задачу сведения двумерной плоской динамической задачи несимметричной теории упругости для ортотропного тела (1.1)-(1.9) к одномерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничных и начальных условий. Для этой цели в двумерных динамических уравнениях несимметричной теории упругости ортотропного тела (1.1)- (1.4) перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных (координат x_1, x_2 и времени t):

$$\xi=\frac{x_1}{a}, \quad \zeta=\frac{x_2}{h}, \quad \tau=\frac{t}{t_0}\ \left(t_0=\delta^{\omega}\frac{h}{c_0}\right), \quad \bar{\sigma}_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{A_{11}}, \quad \bar{\mu}_{i3}=\frac{\mu_{i3}}{aA_{11}}, \quad \bar{u}_i=\frac{u_i}{a}, \quad \bar{I}=\frac{I}{\delta^k\rho h^2}. \tag{2.1}$$

Здесь величина ω характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния во времени.

Вводим также следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2},\ \frac{A_{11}{}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2},\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2},\ \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2},\ \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2},\ \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}.$$

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения (внутреннее асимптотическое разложение)

$$Q=\delta^{-q}\sum\delta^sQ^{(s)}, \tag{2.2}$$

где Q – напряжения (силовые и моментные), перемещения и поворот, q – натуральное число, которое для различных величин разное и определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений в асимптотических приближениях.

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры имеют следующие значения

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}{}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim1,\ \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim1,$$
$$\frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sim1,\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim1,\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim1.$$

В этом случае для величин ω, k, q получим:

$$\omega=-1,\quad k=-2,\quad q=\begin{cases}0 & \bar{\sigma}_{11},\ \bar{\sigma}_{22},\ \bar{u}_1,\ \bar{\mu}_{23}\\ 1 & \bar{\sigma}_{21},\ \bar{\sigma}_{12},\ \bar{u}_2,\ \bar{\mu}_{13},\ \omega_3\end{cases} \tag{2.3}$$

Важно отметить, что при асимптотике (2.3) асимптотическое приближение $\Omega_3^{(s)}$ не связано с приближением для $w^{(s)}$. В связи с этим построенную ниже прикладную динамическую теорию микрополярных ортотропных балок назовем теорией со свободным вращением.

На уровне исходного приближения асимптотического метода в случае (2.3) приходим к одномерной динамической теории микрополярных ортотропных балок с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения движения:

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-) + 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2},\ N_{21} = h(X^+ - X^-) \tag{2.4}$$

соотношения упругости:

$$N_{12} = 2h\frac{A_{77}A_{88} - A_{78}{}^2}{A_{88}}\Gamma_{12} + \frac{A_{78}}{A_{88}}N_{21}\ , \qquad L_{13} = 2hB_{66}k_{13} \tag{2.5}$$

геометрические соотношения:

$$\Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3\ , \qquad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1} \tag{2.6}$$

Для получения граничных условий для одномерных уравнений (2.4)-(2.6) обратимся к изучению краевых упругих явлений. Введем в уравнения (1.1)-(1.4) следующие преобразования и перейдем к безразмерным величинам по формулам (2.1) (для бокового края $x_1 = 0$):

$$\xi_1 = \frac{x_1}{h},\quad \zeta = \frac{x_2}{h},\quad \tau = \frac{t}{t_0}\quad \left(t_0 = \delta^{\omega}\frac{h}{c_0}\right). \tag{2.7}$$

Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде асимптотического разложения $R = \delta^{\chi_R}\sum \delta^s R^{(s)}$, (2.8)

где R – любая из величин рассматриваемой задачи, χ – целое число, которое характеризует интенсивность пограничного слоя, ω должна соответствовать значению для внутренней задачи:

$$\chi_{\sigma_{ij}} = \chi,\ \chi_{\mu_{i3}} = \chi,\ \chi_{u_i} = \chi + 1,\ \chi_{\omega_3} = \chi + 1,\ \omega = -1,\ k = -2. \tag{2.9}$$

После подстановки (2.8) в преобразованную систему уравнений (1.1)- (1.4) получим:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{11}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0{}^2}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{u}_1^{(s-2)}}{\partial \tau^2},\quad \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{\rho c_0{}^2}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(s-2)}}{\partial \tau^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_{13}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} + \bar{\sigma}_{12}^{(s-1)} - \bar{\sigma}_{21}^{(s-1)} = \bar{I}\frac{\rho c_0{}^2}{A_{11}}\frac{\partial^2 \bar{\omega}_3^{(s-2)}}{\partial \tau^2}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \xi_1} = \frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)},\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{A_{11}{}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(s)}}{\partial \xi_1} - \omega_3^{(s-1)} = \frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}{}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}{}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(s)}}{\partial \zeta} + \omega_3^{(s-1)} = \frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}{}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)} - \frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}{}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)},\ \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \xi_1} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}}\bar{\mu}_{13}^{(s)},\ \frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}}\bar{\mu}_{23}^{(s)}$$

Полученные уравнения представляют собой квазистатическую задачу, это означает, что инерционные члены не входят в уравнения систем ряда первых приближений и совпадает с погранслойной задачей статики [6]. В итоге при сращивании внутренней задачи и погранслоя приходим к **граничным условиям** прикладной одномерной теории со свободным вращением:

1-ая граничная задача: $N_{12}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}\varphi_2 dx_2\ ,\ L_{13}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}\varphi_3 dx_2$ (2.10)

2-ая граничная задача: $w\big|_{x_1=0} = 0\ ,\ \Omega_3\big|_{x_1=0} = 0$ (2.11)

3-ая граничная задача: $w\big|_{x_1=0} = 0\ ,\ L_{13}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}\varphi_3 dx_2$ (2.12)

Для получения начальных условий для одномерных уравнений (2.4)-(2.6) построим погранслой по независимой координате времени t, считая $t = 0$ своего рода границей, и вводим погранслойное явление около этой границы. На основании такого подхода рассмотрим дополнительное напряженно-деформированное состояние, имеющее ту же изменяемость по координатам, которая имеет внутреннюю задачу, а по времени имеющее большую изменяемость. Такое НДС вызывает высокочастотные колебания по толщине балки, наиболее отчетливо проявляющиеся в переходный момент времени до установившихся динамических явлений, определяемых по теории внутренней задачи. Введем в уравнения (1.1)-(1.4) преобразования координат и времени и перейдем к безразмерным величинам по формулам (2.1). Решение преобразованной таким образом системы отыщем в виде (2.2), где

$$\omega=0,\quad k=-2,\quad q=\begin{cases}0 & \bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \omega_3,\ \bar{\mu}_{13}\\ 1 & \bar{\sigma}_{11},\ \bar{\sigma}_{22},\ \bar{\sigma}_{21},\ \bar{\sigma}_{12},\ \bar{\mu}_{23},\end{cases} \tag{2.13}$$

После подстановки (2.13) в преобразованную систему уравнений (1.1)- (1.4) получим:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{21}^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2\bar{u}_1^{(s)}}{\partial\tau^2},\quad \frac{\partial\bar{\sigma}_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\sigma}_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2\bar{u}_2^{(s)}}{\partial\tau^2}$$

$$\frac{\partial\bar{\mu}_{13}^{(s-2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{\mu}_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}+\bar{\sigma}_{12}^{(s-1)}-\bar{\sigma}_{21}^{(s-1)}=\bar{I}\frac{\rho c_0^2}{A_{11}}\frac{\partial^2\omega_3^{(s)}}{\partial\tau^2}$$

$$\frac{\partial\bar{u}_1^{(s-1)}}{\partial\xi}=\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)}-\frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)},\quad \frac{\partial\bar{u}_2^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{22}^{(s)}-\frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\bar{\sigma}_{11}^{(s)}$$

$$\frac{\partial\bar{u}_2^{(s-1)}}{\partial\xi}-\omega_3^{(s-1)}=\frac{A_{11}A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)}-\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)}$$

$$\frac{\partial\bar{u}_1^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_3^{(s-1)}=\frac{A_{11}A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{21}^{(s)}-\frac{A_{11}A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\bar{\sigma}_{12}^{(s)}$$

$$\frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\xi}=\frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\bar{\mu}_{13}^{(s)},\quad \frac{\partial\omega_3^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\bar{\mu}_{23}^{(s)}$$

Для $s=0$ все величины выражаются через $\bar{u}_1^{(0)},\bar{u}_2^{(0)},\omega_3^{(0)}$, для которых получим уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\bar{u}_i^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{a_i^2}\frac{\partial^2\bar{u}_i^{(0)}}{\partial\tau^2}=0\\ \frac{\partial^2\omega_3^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{a_3^2}\frac{\partial^2\omega_3^{(0)}}{\partial\tau^2}=0\end{gathered}\ ,\ \text{где}\ \ i=1,2\ ,\ \ \frac{1}{a_1}=\sqrt{\frac{\rho c_0^2}{A_{88}}},\ \ \frac{1}{a_2}=\sqrt{\frac{\rho c_0^2}{A_{22}}},\ \ \frac{1}{a_3}=\sqrt{\bar{I}\frac{\rho c_0^2a^2}{B_{44}}}. \tag{2.14}$$

Граничные условия (1.5) для этого погранслоя будут однородными. Начальные условия пока ставим произвольными:

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial\bar{u}_i^{(0)}}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\pm1}=0,\qquad \left.\frac{\partial\omega_3^{(0)}}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=\pm1}=0,\\ \left.\bar{u}_i^{(0)}\right|_{\tau=0}=f_i(\zeta),\quad \left.\frac{\partial\bar{u}_i^{(0)}}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=F_i(\zeta),\quad \left.\omega_3^{(0)}\right|_{\tau=0}=\varphi_3(\zeta),\quad \left.\frac{\partial\omega_3^{(0)}}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\Phi_3(\zeta)\end{gathered} \tag{2.15}$$

Решив начально-граничную задачу (2.14)- (2.15), получим:

$$\begin{aligned}\bar{u}_i^{(0)}&=d_1^i+d_2^i\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\left[d_{1k}^i\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_i\tau\right)+d_{2k}^i\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_i\tau\right)\right]\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)+\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\left[d_{3k}^i\cos(k\pi a_i\tau)+d_{4k}^i\sin(k\pi a_i\tau)\right]\cos(k\pi\zeta)\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\omega_3^{(0)}=c_1^3+c_2^3\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{1k}^3\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_3\tau\right)+c_{2k}^3\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi a_3\tau\right)\right]\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)+ \tag{2.17}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{3k}{}^{3}\cos\left(k\pi a_3\tau\right)+c_{4k}{}^{3}\sin\left(k\pi a_3\tau\right)\right]\cos\left(k\pi\zeta\right),$$

где

$$d_1{}^i=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f_i\left(\zeta\right)d\zeta,\quad d_2{}^i=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}F_i\left(\zeta\right)d\zeta,\quad d_{1k}{}^i=\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)f_i\left(\zeta\right)d\zeta,\quad d_{3k}{}^i=\int_{-1}^{1}\cos\left(k\pi\zeta\right)f_i\left(\zeta\right)d\zeta,$$

$$d_{2k}{}^i=\frac{2}{\left(2k-1\right)\pi a}\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)F_i\left(\zeta\right)d\zeta,\quad d_{4k}{}^i=\frac{1}{k\pi a}\int_{-1}^{1}\cos\left(k\pi\zeta\right)F_i\left(\zeta\right)d\zeta$$

$$c_1^3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_3\left(\zeta\right)d\zeta,\; c_2^3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Phi_3\left(\zeta\right)d\zeta,\; c_{1k}{}^3=\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)\varphi_3\left(\zeta\right)d\zeta,\; c_{3k}{}^3=\int_{-1}^{1}\cos\left(k\pi\zeta\right)\varphi_3\left(\zeta\right)d\zeta,$$

$$c_{2k}{}^3=\frac{2}{\left(2k-1\right)\pi a}\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\zeta\right)\Phi_3\left(\zeta\right)d\zeta,\quad c_{4k}{}^3=\frac{1}{k\pi a}\int_{-1}^{1}\cos\left(k\pi\zeta\right)\Phi_3\left(\zeta\right)d\zeta$$

Как видно, из общих решений (2.16),(2.17), чтобы эти решения были осциллирующими, необходимо потребовать:

$$d_1^i=0\,,\ d_2^i=0\,,\ c_1^3=0\,,\ c_2^3=0\,. \qquad (2.18)$$

(2.18) назовем условиями осцилляции. Таким образом, условия осцилляции будут:

$$\int_{-1}^{1}f_i\left(\zeta\right)d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}F_i\left(\zeta\right)d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}\varphi_3\left(\zeta\right)d\zeta=0,\ \int_{-1}^{1}\Phi_3\left(\zeta\right)d\zeta=0\,. \qquad (2.19)$$

Сращивая внутреннюю задачу и погранслой по времени с учетом (2.19), приходим **к начальным условиям** прикладной одномерной теории со свободным вращением:

$$\begin{aligned} &w\big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f_2(x_1,x_2)dx_2\,, && \Omega_3\big|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi_3(x_1,x_2)dx_2\,,\\ &\frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}F_2(x_1,x_2)dx_2\,, && \frac{\partial\Omega_3}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Phi_3(x_1,x_2)dx_2\,. \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Таким образом, построены уравнения движения, соотношения упругости, геометрические соотношения (2.4)-(2.6) одномерной динамической теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок со свободным вращением, а также граничные условия (2.10),(2.11),(2.12) и начальные условия (2.20).

Аналогичным образом построены математические модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стесненным вращением и “с малой сдвиговой “жесткостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sargsyan S. H. Dynamic Problem of Thin Plates on the Basis of Asymmetric Theory of Elasticity // Proc. of XXXIV Summer School “Advenced Problems in Mechanics”. 2006. Repino, Saint-Petersburg, Russia, 25 June-1 July, 2006. P. 447-458.
2. Атоян А.А., Саркисян С.О. Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин.// Докл. НАН Армении. 2004. Т.104. №4. С. 287-294.
3. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости.// Межвуз.сборник научных трудов, посвященный 80-летию С. Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный пединститут им. О. Туманяна. 2008. Т. 2. С. 4-17.
4. Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных упругих пластин и балок. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №3.
5. Iesan D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids.//Archives of Mechanics. 1973. Vol. 25. №3. P.547-561.
6. Алваджян Ш. Построение уравнений и граничных условий статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом. // Настоящий сборник.

<u>Сведения об авторе:</u>

Маргарян Лилит Мкртычевна – аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна, 377526, г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, дом 4, (37494)054498, E-mail: M.LILOO@mail.ru.

ВЛИЯНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ

Мартиросян К.Л.

Задача изгиба пластинки при наличии касательных нагрузок рассматривается на основе следующих трех теорий: классической теории (К), теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева (R), теории Амбарцумяна (А). Приведено сравнение между прогибами, перерезывающими силами и моментами по уточненной теории первого порядка и уточненной теории высокого порядка. Другой подход исследования аналогичных задач предложен в работе [1].

1. Рассматривается полубесконечная пластинка толщиной 2h, на лицевых поверхностях которой заданы касательные нагрузки. Прямоугольная декартовая система координат (x, y, z) выбрана так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью (Oxy).

Предполагается, что на лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки:

$$
\begin{aligned}
&z = h: \quad \sigma_{33} = 0,\ \sigma_{31} = X^{+}(x, y),\ \ \sigma_{32} = 0 \\
&z = -h: \ \sigma_{33} = 0,\ \sigma_{31} = -X^{-}(x, y),\ \sigma_{32} = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Относительно перемещений по теориям (К) [2], (R) [3] и (А) [4], соответственно, принимаются следующие допущения [5]:

$$U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x}, \quad U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y}, \quad U_3 = W \tag{1.2}$$

$$U_1 = U - z\theta_1, \quad U_2 = V - z\theta_2, \quad U_3 = W \tag{1.3}$$

$$
\begin{aligned}
&U_1 = U - z\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z}{2G}\left(X_1 + \frac{z}{2h} X_2 \right) + \frac{1}{G} g(z)\varphi_1, \\
&U_2 = V - z\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{G} g(z)\varphi_2, \quad U_3 = W
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Здесь, U, V – перемещения срединной плоскости; W – прогиб пластинки; $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$ – функции, независящие от координаты z ; $X_1 = X^{+} - X^{-}$, $X_2 = X^{+} + X^{-}$ – касательные нагрузки, G – модуль сдвига,

$$g(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{3h^2}\right)$$

Уравнения напряженного деформированного состояния пластинки по теориям (К), (R) определяются соотношениями:

$$
\begin{cases}
\Delta U + \theta\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) = -\dfrac{2X_2}{C(1-\nu)}, \\[2ex]
\Delta V + \theta\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial x}\right) = 0
\end{cases}
\qquad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu}
\tag{1.5}
$$

по теории (А)

$$
\begin{cases}
\Delta U + \theta\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\right) = -\dfrac{2X_2}{C(1-\nu)} - \dfrac{\theta h}{3E}\left(\dfrac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2 X_2}{\partial y^2}\right), \\[2ex]
\Delta V + \theta\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial x}\right) = -\dfrac{\theta h}{12G}\dfrac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y}
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

Уравнения изгиба пластинки имеют следующий вид:
по теории (К)

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D}\frac{\partial X_1}{\partial x} \tag{1.7}$$

по теории (R)

$$\begin{cases} \Delta W - \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x} - \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y} = 0 \\ D\left[\Delta\theta_1 + \theta\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\right] + \dfrac{4Gh}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial W}{\partial x} - \theta_1\right) = \dfrac{2h}{1-\nu}X_1 \\ D\left[\Delta\theta_2 + \theta\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\theta_2}{\partial y} + \dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}\right)\right] + \dfrac{4Gh}{1-\nu}\left(\dfrac{\partial W}{\partial y} - \theta_2\right) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

по теории (A)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} = -\dfrac{3}{4}\dfrac{\partial X_1}{\partial x}, \\ D\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta W - \dfrac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_1 + \theta\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \dfrac{4h}{3}\varphi_1 = \dfrac{2h^3}{3(1-\nu)}\left(\dfrac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial^2 X_1}{\partial y^2}\right), \\ D\dfrac{\partial}{\partial y}\Delta W - \dfrac{8h^3}{15}\left[\Delta\varphi_2 + \theta\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right] + \dfrac{4h}{3}\varphi_2 = \dfrac{h^3\theta}{3}\dfrac{\partial^2 X_1}{\partial x\partial y}. \end{cases} \tag{1.9}$$

2. Пусть прямоугольная пластинка занимает область $0 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le b,\ -h \le z \le h$.

Приложенная нагрузка задана в виде:

$$X_1 = \tau_0 \sin\lambda y, \quad X_2 = 0, \text{ где } \lambda = \frac{\pi}{b} \tag{2.1}$$

Края пластинки $y = 0, b$ шарнирно закреплены по теориям (K), (R) и (A) соответственно:

$$W = 0, \ \frac{\partial W^2}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, b; \tag{2.2}$$

$$W = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, b; \tag{2.3}$$

$$W = 0, \ \varphi_1 = -\frac{5}{8}X_1, \ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{4}{5G}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b; \tag{2.4}$$

а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки (1.1).

Следует отметить, что в случае $X_2 = 0$ обобщенное плоское напряженное состояние имеет нулевое решение.

Уравнения изгиба, в частном случае одномерной задачи, имеют решения по теориям (K), (R) и (A), соответственно, при условиях (2.2), (2.3) и (2.4).

Поэтому решения уравнений (1.7), (1.8), (1.9) в двумерном случае, по аналогии с задачей Надаи [2], будем искать по теориям (K), (R) и (A) соответственно при условиях:

$$\lim_{x\to\infty} W = 0 \tag{2.5}$$

$$\lim_{x\to\infty} W = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\theta_1 = -\frac{\tau_0}{2G(\eta^2+1)}, \qquad \lim_{x\to\infty}\theta_2 = 0, \tag{2.6}$$

$$\lim_{x\to\infty} W = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\varphi_1 = -\frac{5\lambda^2}{8\chi^2}\tau_0, \quad \lim_{x\to\infty}\varphi_2 = 0, \tag{2.7}$$

где $\eta = \dfrac{h\lambda}{\sqrt{3}}, \qquad \chi = h^{-1}\sqrt{\dfrac{5}{2}\left(1+\xi^2\right)}, \qquad \xi = \sqrt{\dfrac{2}{5}}\lambda h.$

Решения систем уравнений (1.7), (1.8) и (1.9), удовлетворяющие условиям (2.2), (2.3) и (2.4), представляются в виде:
по теориям (K), (R), (A)

$$W = W_1(x)\sin\lambda y\,, \qquad (2.8)$$

по теории (R)

$$\theta_1 = \theta_{11}\left(x\right)\sin\lambda y, \quad \theta_2 = \theta_{21}\left(x\right)\cos\lambda y\,, \qquad (2.9)$$

по теории (A)

$$\varphi_1 = \varphi_{11}\left(x\right)\sin\lambda y, \quad \varphi_2 = \varphi_{21}\left(x\right)\cos\lambda y\,. \qquad (2.10)$$

Пусть на кромке $x = 0$ условия скользящего контакта по теории Кирхгофа имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0\,, \ \frac{\partial W}{\partial y} = 0\,, \ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \frac{h}{D}X_1\,. \qquad (2.11)$$

Таким образом, согласно теории Кирхгофа относительно функции прогиба W получаются три граничных условия вместо необходимых двух. При удовлетворении условию самосопряженности задачи [6], здесь возможны два варианта граничных условий: либо удовлетворяются первые два условия для W, что будет соответствовать задаче с жесткой заделкой, либо удовлетворяются первое и третье условия, что совпадает с задачей для скользящего контакта. Неоднозначность постановки задачи с граничными условиями по теории Кирхгофа показывает очевидность необходимости применения уточненных теорий [7]. Следует также отметить, что для задач цилиндричекого изгиба пластин получаются необходимые два граничных условия.

Согласно теории (R) и (A), граничным условиям стесненного скользящего контакта соответствуют

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0\,, \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{10G}X_1 = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{4}{5G}\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = -\frac{3}{4}X_1\,. \qquad (2.13)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.12) и (2.13), получим систему алгебраических уравнений соответствующих теориям (R) и (A), откуда выражения для прогибов будут, соответственно,

$$W = \frac{e^{-\lambda x}(1+\lambda x)\tau_0}{2G\lambda\eta\sqrt{1+\eta^2}\left(1-2\eta^2(1+\theta)+2\eta\sqrt{1+\eta^2}(1+\theta)\right)}\sin\lambda y \ ; \qquad (2.14)$$

$$W = \frac{e^{-\lambda x}\left(\gamma\lambda x\left(1+\xi^2\right)+\beta\left(6+\gamma+\xi^2+\gamma\xi^2+5\lambda x\right)\right)\tau_0\sin\lambda y}{10G\lambda\beta\sqrt{1+\xi^2}\left(\xi+\gamma\sqrt{1+\xi^2}\right)}\,, \qquad (2.15)$$

где $\gamma = \dfrac{4\xi^2}{1-\nu}\left(1-\dfrac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)$.

Из соотношений (2.14) и (2.15), очевидно, следует, что при $h\lambda << 1$ получаем, что отношение величины прогиба, подсчитанного по теории (R), к величине прогиба, подсчитанного по теории (A), равно $\sqrt{5/6}$.

Расчетные величины для перерезывающей силы $N_1(0,y)$ по теориям (R) и (A) совпадают и тождественно равны нулю. А расчетные величины для момента $M_1(0,y)$ и перерезывающей силы $N_2(x,0)$, соответственно, по теориям (R) и (A) определяются выражениями по теории (R)

$$M_1(0,y) = \frac{4h\eta\tau_0\sin\lambda y}{\sqrt{1+\eta^2}(1-2\eta^2(1+\theta)+2\eta\sqrt{1+\eta^2}(1+\theta))\lambda(1-\nu)}\ , \qquad (2.16)$$

$$N_2\left(x,0\right)=\frac{2h\eta(1+\theta)\tau_0}{\sqrt{1+\eta^2}(1-2\eta^2(1+\theta)+2\eta\sqrt{1+\eta^2}(1+\theta))}\left(e^{-\lambda x}+\frac{e^{-\frac{\alpha x}{h}}(1-2\eta^2(1+\theta))}{2\eta^2(1+\theta)}\right), \tag{2.17}$$

где $\alpha=\sqrt{3+h^2\lambda^2}$

по теории (A)

$$M_1(0,y)=\frac{h\xi^2(5\beta+\gamma+\gamma\xi^2)(2+4\xi^2+\beta(-1+\nu))\tau_0\sin\lambda y}{3\beta\lambda\sqrt{1+\xi^2}(\xi+\gamma\sqrt{1+\xi^2})(1-\nu)}, \tag{2.18}$$

$$N_2(x,0)=\frac{h(5\beta+\gamma(1+\xi^2))\tau_0}{6\sqrt{1+\xi^2}(\xi+\gamma\sqrt{1+\xi^2})}\left(e^{-\lambda x}+\frac{e^{-\chi x}(6-5\beta+\xi^2)}{5\beta+\gamma(1+\xi^2)}\right), \tag{2.19}$$

откуда следует, что при $h\lambda<<1$ получаем, что отношение величины момента, подсчитанного по теории (R), к величине момента, подсчитанного по теории (A), равно $\sqrt{5/6}$.

Выражения (2.17) и (2.19) для перерезывающих сил $N_2\left(x,0\right)$ при $h^2\lambda^2<<1$ по теориям (R) и (A) имеют вид

$$N_2(x,0)=\frac{h\tau_0}{\eta(1+2\eta(1+\theta))}\left(e^{-\frac{x\alpha}{h}}+\frac{4\eta^2e^{-\lambda x}}{1-\nu}\right); \tag{2.20}$$

$$N_2(x,0)=\frac{h\tau_0}{\eta(1+2\eta(1+\theta))}\left(e^{-x\chi}-\frac{2\xi^2(6-\xi)e^{-\lambda x}}{3\left(1-\nu\right)}\right), \tag{2.21}$$

откуда, нетрудно показать, что при $h\lambda<<1$ в угловой точке $x=0,\ y=0$ получаем, что отношение величины перерезывающей силы, подсчитанного по теории (R), к величине перерезывающей силы, подсчитанного по теории (A), равно $\sqrt{6/5}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. К уточненной теории цилиндрически ортотропных пластин переменной толщины.//Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №5–6. С. 64-73.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 635 с.
3. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. //МТТ. 1998. №3. С.47-58.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
5. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел.» Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА, 2002. С.67-88.
6. Белубекян В.М., Белубекян М.В. О граничных условиях теории пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №2. С.11-21.
7. Белубекян М.В. Об одном парадоксе граничных условий теории Кирхгофа. // В сб.: «Исследование современных научных проблем в вузах». Ереван: Изд. Айастан, 2000. Т.2. С. 134-138.

Сведения об авторе:

Мартиросян Кристине Левоновна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, (374 10) 45 47 50, (374 93) 83-10-18

E-mail kristin2004@inbox.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ И НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИНЕРЦИОННЫХ МОМЕНТОВ И КОНСТРУКЦИОННОГО ТРЕНИЯ В ОПОРАХ

Мартиросян С. Р.

В предлагаемой статье исследуется влияние конструкционного трения в опорах на устойчивость шарнирно опертой вдоль длинных кромок удлиненной тонкой упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

1. Рассмотрим тонкую упругую удлиненную пластинку, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le l$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Предполагается, что одна из длинных кромок $x = 0$ имеет неподвижное шарнирное опирание, а другая $x = l$ – свободное шарнирное опирание. Две другие кромки свободны. На шарнирно закрепленных кромках имеются сосредоточенные инерционные моменты. Пластинка обтекается с одной стороны в направлении оси Ox сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью V.

Под влиянием каких-либо причин невозмущенное состояние равновесия пластинки может быть нарушено и пластинка начнет совершать возмущенное движение с прогибом $w = w(x,t)$. Прогиб $w = w(x,t)$ вызовет избыточное давление Δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближенной формулой «поршневой теории» [1] : $\Delta p = -a_0 \rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, ρ_0 – плотность невозмущенного потока газа, a_0 – скорость звука в невозмущенной газовой среде.

В целях упрощения будем полагать, что распределенная масса пластинки и силы сопротивления пренебрежимо малы. Тогда, в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории», уравнение малых изгибных колебаний около невозмущенной формы равновесия имеет вид [2]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + s^3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x,t), \quad s^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1}; \tag{1.1}$$

D – цилиндрическая жесткость на изгиб.

Исследуем уравнение (1) при следующих граничных условиях:

$$w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \delta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}, \quad x = 0; \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \delta_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}, \quad x = l.$$

Здесь I_1, I_2 – сосредоточенные инерционные моменты, приложенные на шарнирно опертых кромках $x = 0$, $x = l$ соответственно [3]; δ_1, δ_2 – коэффициенты, характеризующие конструкционное трение в шарнирах [3,4].

Задача устойчивости обтекаемой сверхзвуковым потоком газа шарнирно опертой упругой удлиненной пластинки, описываемая соотношениями (1.1), (1.2), состоит в нахождении наименьшего значения скорости потока $V_{\text{кр}}$ такого, что при $V < V_{\text{кр}}$ возмущенное движение будет устойчивым, а при $V > V_{\text{кр}}$ – неустойчивым.

Отыскивая решение задачи (1.1), (1.2) в виде гармонических колебаний $w(x,t) = f(x)\exp(\lambda t)$, приходим к следующей краевой задаче на собственные значения λ относительно форм колебаний $f(x)$:

$$f^{IV} + s^3 f' = 0, \quad s^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1}; \tag{1.3}$$

$$f = 0, \quad f'' = \alpha_1 \lambda^2 f' - \gamma_1 \lambda f'', \quad x = 0; \tag{1.4}$$

$$f = 0, \quad f'' = -\alpha_2 \lambda^2 f' - \gamma_2 \lambda f'', \quad x = l;$$

$$\alpha_i = I_i D^{-1},\ \gamma_i = \delta_i D^{-1};\ \alpha_i > 0,\ \gamma_i > 0,\ i = 1,2; \tag{1.5}$$

α_1, α_2 – параметры, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты I_1, I_2, приложенные к шарнирно опертым кромкам $x = 0$, $x = l$ соответственно; γ_1, γ_2 – параметры, характеризующие конструкционное трение в шарнирах.

Система, описываемая соотношениями (1.1), (1.2), асимптотически устойчива, если все собственные значения λ задачи (1.3), (1.4) имеют отрицательные действительные части, и неустойчива, если хотя бы одно собственное значение находится в правой части комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda > 0$). Критическое значение скорости потока $V_{\text{кр}}$, характеризующее переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю действительной части одного или нескольких собственных значений ($\operatorname{Re}\lambda = 0$).

Подставляя общее решение уравнения (1.3)

$$f(x) = C_1 + C_2\exp(-sx) + C_3\exp(sx/2)\cdot\cos(sx\sqrt{3}/2) + C_4\exp(sx/2)\cdot\sin(sx\sqrt{3}/2) \tag{1.6}$$

в граничные условия (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвертого порядка относительно произвольных постоянных C_i, i = 1,2,3,4 одновременно не равных нулю. Далее, приравнивая нулю определитель этой системы, получаем алгебраическое уравнение четвертой степени относительно собственного значения λ задачи (1.3), (1.4), которое в безразмерных переменных в предположении $\alpha_1 \neq 0$ $(I_1 \neq 0)$ имеет вид

$$\chi A(r)\mu_1^4 + (\chi\gamma_{11} + \gamma_{12})rB(r)\mu_1^3 + ((1+\chi)rB(r) + \gamma_{11}\gamma_{12}r^2C(r))\mu_1^2 + \tag{1.7}$$

$$+(\gamma_{11} + \gamma_{12})r^2C(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0,\ \chi \in [0,\infty);$$

где

$$\mu_1 = \lambda\sqrt{\alpha_1 l};\ \gamma_{11} = \gamma_1\sqrt{\alpha_1^{-1}l^{-1}};\ \gamma_{12} = \gamma_2\sqrt{\alpha_1^{-1}l^{-1}}; \tag{1.8}$$

$$r = sl;\ \chi = \alpha_2\alpha_1^{-1}; \tag{1.9}$$

$$A(r) = \operatorname{ch}r - \operatorname{ch}(r/2)\cos(r\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}\operatorname{sh}(r/2)\sin(r\sqrt{3}/2);$$

$$B(r) = 2\operatorname{sh}(r/2)\Big(\operatorname{ch}(r/2) - \cos(r\sqrt{3}/2)\Big); \tag{1.10}$$

$$C(r) = \operatorname{ch}r - \operatorname{ch}(r/2)\cos(r\sqrt{3}/2) + \sqrt{3}\operatorname{sh}(r/2)\sin(r\sqrt{3}/2);$$

α_1, α_2, γ_1, γ_2 определены выражениями (1.5).

А в предположении $\alpha_1 = 0$ $(I_1 = 0)$ и $\alpha_2 \neq 0$ $(I_2 \neq 0)$, или, в соответствии с обозначением (1.9), $\chi = \infty$, алгебраическое уравнение относительно собственного значения λ задачи (1.3), (1.4) будет вида

$$\gamma_{21}rB(r)\mu_2^3 + (rB(r) + \gamma_{21}\gamma_{22}r^2C(r))\mu_2^2 + (\gamma_{21} + \gamma_{22})r^2C(r)\mu_2 + r^2C(r) = 0,\ \chi = \infty. \tag{1.11}$$

Здесь

$$\mu_2 = \lambda\sqrt{\alpha_2 l};\ \gamma_{21} = \gamma_1\sqrt{\alpha_2^{-1}l^{-1}};\ \gamma_{22} = \gamma_2\sqrt{\alpha_2^{-1}l^{-1}}; \tag{1.12}$$

r и $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ определены выражениями (1.9) и (1.10) соответственно; а α_1, α_2, γ_1, γ_2 – выражениями (1.5).

В работе [5] с помощью графо-аналитических методов исследований показано, что

$$A(r) > 0,\ rB(r) > 0,\ C(r) > 0 \text{ при всех } r \neq 0 \text{ и } A(r) = B(r) = C(r) = 0$$

$$\text{при } r = 0. \tag{1.13}$$

Из соотношений (1.5) и (1.13) очевидно, что коэффициенты характеристических уравнений (1.7) и (1.11) положительны при всех $r \neq 0$. А это означает, что исследование поведения корней характеристических уравнений (1.7) и (1.11) в зависимости от параметров задачи (1.1), (1.2) можно провести с помощью алгебраического критерия устойчивости Льенара-Шипара [6].

Задача панельного флаттера (1.1), (1.2) в предположении отсутствия конструкционного трения ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) подробно исследована в работе [5]. Показано, что при $\chi \in [0, 0.6) \cup (1.66, \infty)$ возмущенное движение системы является устойчивым; а при значениях $\chi \in \left[0,6;\, 1,66\right]$ имеет место флаттерная неустойчивость. При этом значение критической скорости потока, приводящее к флаттерной неустойчивости, находится из уравнения

$$B^2(r) - 4\chi(1+\chi)^{-2} A(r)C(r) = 0\,,\ \chi \in \left[0.6;\, 1.66\right], \tag{1.14}$$

которое достигает минимального значения

$$V_{\text{кр.min}} = V_* \approx 170{,}95\, D(a_0\rho_0 l^3)^{-1} \text{ при } \chi = 1\,. \tag{1.15}$$

А для остальных значений $\chi \in \left[0.6;\, 1) \cup (1;\, 1.66\right]$ имеем $V_{\text{кр}} > V_*$.

Можно показать, что при отсутствии обтекания пластинки потоком газа $r \to 0 \quad (V \to 0)$ возмущенное движение пластинки является устойчивым ($V_{\text{кр}} = \infty$) как при отсутствии $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, так и при наличии конструкционного трения $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$. Иными словами, в этом случае наличие конструкционного трения не влияет на устойчивость возмущенного движения пластинки.

2. Сначала рассмотрим частные случаи: $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$.

Легко показать, что в обоих случаях имеет место парадокс Циглера – эффект дестабилизации. Более того, не только при исчезающе малом трении, а при всех $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ и $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$ имеет место эффект дестабилизации – скачкообразное падение критической скорости потока газа, которое равно значению (1.15).

В самом деле, при $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ характеристические уравнения (1.7) и (1.11) запишутся, соответственно, в виде

$$\chi A(r)\mu_1^4 + \chi\gamma_{11} rB(r)\mu_1^3 + (1+\chi) rB(r)\mu_1^2 + \gamma_{11} r^2 C(r)\mu_1 + r^2 C(r) = 0\,,\ \chi \in [0, \infty)\,; \tag{2.1}$$

и

$$\gamma_{21} rB(r)\mu_2^3 + rB(r)\mu_2^2 + \gamma_{21} r^2 C(r)\mu_2 + r^2 C(r) = 0\,,\ \chi = \infty\,. \tag{2.2}$$

где r, χ и $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ определены выражениями (1.9) и (1.10) соответственно; μ_1, γ_{11} определены выражениями (1.8) , а μ_2, γ_{21} – выражениями (1.12).

Подставляя коэффициенты уравнения (2.1) в соответствующее условие критерия устойчивости Льенара-Шипара, получаем

$$\chi\gamma_{11}^2 r^4 C(r)(B^2(r) - A(r)C(r)) > 0\,,\ \gamma_1 > 0\,,\ \chi \in (0, \infty)\,, \tag{2.3}$$

которое, очевидно, совпадает с условием (1.14) при $\chi = 1$. Следовательно, критическая скорость потока, приводящая к флаттерной неустойчивости, одна и та же для всех $\gamma_1 > 0$ ($\gamma_{11} > 0$), $\chi \in (0, \infty)$ и определяется выражением (1.15). Тем самым, в этом случае наличие исчезающе малого конструкционного трения $\gamma_1 > 0$ при всех $\chi \in (0,1) \cup (1, \infty)$ приводит к эффекту дестабилизации.

Подставляя $\chi = 0$ в уравнение (2.1), получаем квадратное уравнение с положительными коэффициентами при всех $\gamma_1 > 0$. А это означает, что при $\chi = 0$ и при всех $\gamma_1 > 0$ в возмущенной системе возбуждаются только лишь затухающие колебания.

Уравнение (2.2) легко преобразуется к виду

$$(\gamma_{21}\mu_2 + 1)\cdot(\, rB(r)\mu_2^2 + r^2 C(r)) = 0\,,\ \chi = \infty\,. \tag{2.4}$$

В силу условий (1.12) и (1.13), очевидно, что один из трех корней уравнения (2.4) является действительным отрицательным числом, а два остальных корня – чисто мнимые числа.

Следовательно, наличие исчезающе малого трения $\gamma_1 > 0$ при $\chi = \infty$ не приводит к эффекту дестабилизации – возмущенное движение пластики как при исчезающе малом трении $\gamma_1 > 0$, так и при его отсутствии $\gamma_1 = 0$ является устойчивым.

Таким образом, в случае, когда $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$, наличие исчезающе малого трения $\gamma_1 > 0$ приводит к эффекту дестабилизации при значениях $\chi \in (0,1) \cup (1,\infty)$, а при значениях $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ эффект дестабилизации отсутствует.

В случае, когда $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, картина поведения возмущенной системы такая же, как при $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$, в силу симметрии в постановке задачи (1.1), (1.2).

3. А теперь исследуем поведение корней уравнений (1.7) и (1.11) при $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 \neq 0$, как и в разделе 2, с помощью алгебраического критерия устойчивости Льенара-Шипара.

Подставляя коэффициенты полиномов (1.7) и (1.11) в соответствующие условия критерия устойчивости Льенара-Шипара, получаем следующие соотношения:

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + \frac{(\chi-1)^2}{\chi} \cdot \frac{\gamma_{11}\gamma_{12}}{(\gamma_{11}+\gamma_{12})^2} B^2(r) + \frac{(\chi\gamma_{11}+\gamma_{12})}{\chi(\gamma_{11}+\gamma_{12})}\gamma_{11}\gamma_{12}\, rB(r)C(r) > 0, \qquad (3.1)$$

$\chi \in (0,\infty)$;

$$B(r) + \gamma_{12}(\gamma_{11}+\gamma_{12})\, rC(r) > 0, \ \chi = 0; \qquad (3.2)$$

$$B(r) + \gamma_{21}(\gamma_{21}+\gamma_{22})\, rC(r) > 0, \ \chi = \infty, \qquad (3.3)$$

где $\gamma_{i,j}$, $i,j = 1,2$ и $A(r), B(r), C(r)$ определены выражениями (1.8), (1.12) и (1.10) соответственно.

В силу условий (1.13), очевидно, что неравенства (3.2) и (3.3) выполняются при всех $\gamma_{i,j}$, $i,j = 1,2$ ($\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$). Следовательно, при значениях $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ наличие конструкционного трения не влияет на поведение возмущенного движения пластинки.

При исчезающе малом трении ($\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$) условие устойчивости (3.1) запишется в виде

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) + \frac{(\chi-1)^2}{4\chi} \cdot B^2(r) > 0, \ \chi \in (0,\infty), \qquad (3.4)$$

которое совпадает с условием (1.14) при $\chi = 1$. Это означает, что при $\chi = 1$ наличие исчезающе малого трения не влияет на поведение возмущенного движения пластинки.

Более того, графо-аналитические и численные методы исследования соотношения (3.4) показали, что наличие исчезающе малого трения в опорах не влияет на устойчивость возмущенного движения пластинки при всех $\chi \in (0,\infty)$: поведение возмущенного движения при исчезающе малом трении ($\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$) такое же, как и при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ изначально. В этом случае парадокс Циглера исчезает.

Проведенные численные расчеты показали, что условие устойчивости (3.1) выполняется независимо от χ при больших значениях γ_1, γ_2 (примерно при $\gamma_{i,j} \geq 0.3$, $i,j = 1,2$). Иными словами при больших значениях γ_1, γ_2 имеет место стабилизация.

Таким образом, в частных случаях, когда $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ ($\delta_1 \neq 0, \delta_2 = 0$) и $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$, ($\delta_1 = 0, \delta_2 \neq 0$) имеет место парадокс Циглера для всех значений $\chi \in (0,1) \cup (1,\infty)$, а при значениях $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ эффект дестабилизации отсутствует. В общем случае, при исчезающе малом трении $\gamma_1 \to 0$, $\gamma_2 \to 0$ ($\delta_1 \to 0, \delta_2 \to 0$) парадокс Циглера исчезает. Малые значения коэффициентов трения γ_1, γ_2 (δ_1, δ_2) не влияют на поведение возмущенного движения, а при больших значениях γ_1, γ_2 (δ_1, δ_2) имеет место эффект стабилизации.

Автор выражает благодарность профессору М.В.Белубекяну за постановку задачи, за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 6. С.733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329 с.
3. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т. 38. № 5. С. 33-44.
4. Белубекян М.В., Казарян К.Б., Мартиросян С.Р. Модельные задачи учета трения для консольной балки со следящей нагрузкой. // Докл. НАН Армении. 2007. Т.107. № 2. С.167-172.
5. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Флаттер пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенной массы на кромках. // ISSN 0130-9420. Мат. методи та фiз.-мех. поля. 2006.- 49. № 3. С. 162-167.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
7. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. // Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. С. 211-212.

Сведения об авторе:

Мартиросян Стелла Размиковна
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
Тел.: (+37410) 52-48-90, E-mail: mechins@sci.am

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С НАДРЕЗАМИ

Матвиенко Ю.Г.

Диаграммы трещиностойкости тел с надрезами (вырезами) и формулы расчета J-интеграла с U- и V-образными надрезами для упрочняющихся тел в условиях нормального отрыва представлены на основе концепций механики разрушения тел с надрезами. Эффекты стеснения деформаций в вершине надреза отражены в базовых уравнениях, позволяющих определить скорректированные вязкость разрушения и диаграммы трещиностойкости конструкционных элементов с трещиной/надрезом при различных видах нагружения. Показано, что трещина может быть рассмотрена как частный случай надреза. Метод сепарабельных функций привлечен для экспериментального определения упругопластической вязкости разрушения $J_{\rho,c}$ нестандартных образцов с надрезами.

1. Для построения диаграмм трещиностойкости тел с надрезами использован критерий осреднения напряжений перед вершиной надреза [1]

$$\frac{1}{d}\int_0^d \sigma_y(r)dr = \sigma_0 . \qquad (1.1)$$

Получаемое усредненное локальное напряжение в зоне предразрушения d сравнивается с предельным напряжением $\pm_0$ материала, в качестве которого в зависимости от модели твердого тела могут быть приняты предел прочности, предел текучести или некоторое эффективное предельное напряжение. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y(r)$ у вершины выреза с небольшим (по сравнению с длиной выреза) радиусом ρ скругления его вершины было принято аналогично распределению напряжений у вершины трещины в теле, нагруженном равномерно распределенными растягивающими напряжениями вдали от трещины, но сдвинуто от ее вершины по оси абсцисс на величину $\rho/2$ [2]

$$\sigma_y(r) = \frac{K_{\text{notch}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(1+\frac{\rho}{2r}\right). \qquad (1.2)$$

Модель зоны предразрушения у вершины выреза (надреза) и критерий (1.1) осреднения нормальных напряжений в ней позволили сформулировать критерий разрушения для построения диаграмм трещиностойкости $K_{\text{notch}}/K_{\text{mat}} = F(\sigma_C/\sigma_T)$ тел с U-образными вырезами произвольного размера в следующем виде [1, 3, 4]

$$K_{\text{notch}} = K_{\text{mat}}\sqrt{1-\left(\frac{\sigma_C}{\sigma_0}\right)^2}\left[1-\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_C}\right)^2\frac{1}{K_t^2}\right]^{-1/2}. \qquad (1.3)$$

Здесь коэффициент интенсивности напряжений в вершине выреза обозначен как K_{notch}, K_{mat} – вязкость разрушения при наличии трещины, K_t – теоретический коэффициент концентрации напряжений, σ_0 – предельные локальные напряжения, действующие в зоне предразрушения, σ_C – критические равномерно распределенные растягивающие напряжения, приложенные перпендикулярно к плоскости выреза вдали от него.

В предыдущих работах [1, 3] локальная прочность σ_0 в зоне предразрушения у вершины трещины (выреза) была определена в соответствие с критерием текучести Мизеса и названа когезионной прочностью. Локальная прочность σ_0 определяется следующими формулами:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_T} = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\sigma_C}{\sigma_T}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\beta\sigma_C}{\sigma_T}\right)^2-\frac{\left(1+\nu^2-\nu\right)\left(\beta\sigma_C/\sigma_T\right)^2-1}{\left(1-2\nu\right)^2}} \qquad (1.4)$$

для плоской деформации и

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_T} = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{\sigma_C}{\sigma_T}\right) + \sqrt{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{\beta\sigma_C}{\sigma_T}\right)^2} \qquad (1.5)$$

для плоского напряженного состояния. Параметр локальной двухосности β табулирован, а также представлен в виде графиков для тел различных геометрий и схем нагружения [1].

Отметим, что критериальное уравнение (1.3) диаграммы трещиностойкости может быть использовано для интерпретации вязкости разрушения тела $K_{N\text{mat}}$ с надрезом в виде

$$K_{N\text{mat}} = K_{\text{mat}}\left[1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_C}\right)^2 \frac{1}{K_t^2}\right]^{-1/2}. \qquad (1.6)$$

Таким образом, вязкость разрушения тела с надрезом представляем в виде функции вязкости разрушения при наличии трещины K_{mat}, теоретического коэффициента концентрации напряжений K_t, локальной прочности σ_0 и приложенных разрушающих напряжений σ_C. Уравнение (1.6), описывающее вязкость разрушения при наличии надреза, отражает степень стеснения деформаций в вершине надреза, которая обусловлена двумя независимыми факторами: собственно надрезом (K_t) и T– напряжениями (параметром локальной двухосности β), введенными в локальную прочность σ_0. В этом случае в рассмотрение можно ввести так называемую скорректированную (с учетом степени стеснения деформаций) вязкость разрушения при наличии надреза. Поскольку величины K_t и β зависят как от геометрии тела, так и от схемы нагружения, то можно утверждать, что вязкость разрушения не является константой материала.

Принимая во внимание уравнения (1.3) и (1.6), диаграмма трещиностойкости тела с надрезом представляется критериальным уравнением

$$K_{\text{not ch}} = K_{N\text{mat}}\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_C}{\sigma_0}\right)^2}. \qquad (1.7)$$

Рассмотрение трещины в качестве специального случая надреза ($K_t \to \infty$) приводит к трансформированию вязкости разрушения $K_{N\text{mat}}$ при наличии надреза в вязкость разрушения K_{mat} при наличии трещины (уравнение (1.6)), что позволяет переписать критериальное уравнение в виде

$$K = K_{\text{mat}}\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_C}{\sigma_0}\right)^2}. \qquad (1.8)$$

Это означает, что критериальное уравнение (1.7) диаграммы трещиностойкости тела с надрезом является универсальным и одинаково приемлемым как для надреза, так и для трещины. Отличие заключается лишь в вычислении вязкости разрушения (K_{mat} or $K_{N\text{mat}}$) и в различном положении соответствующей отображающей точки для надреза и трещины одинаковой длины на диаграмме трещиностойкости.

Достоверность модели и предложенных критериальных уравнений диаграмм трещиностойкости подтверждены результатами экспериментов на тонких одноосно растягиваемых пластинах с центральными сквозными трещинами, а также результатами сопоставления с диаграммами трещиностойкости, построенными по методике SINTAP [3].

2. Проиллюстрируем получение приближенных формул J-интеграла для пластин с U- и V-образными надрезами и вырезами в случае нелинейно упрочняющегося материала.

Сведение пути интегрирования к контуру вершины (в виде полуокружности радиуса $\circ$) U-образного выреза, свободному от напряжений, позволяет получить простую формулу для j-интеграла в виде

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} W(\theta)\rho\cos(\theta)d\theta\,. \qquad (2.1)$$

Здесь θ – угловая координата на контуре вершины выреза в полярной системе координат с полюсом в центре окружности выреза.

Для установления общего закона распределения плотности энергии деформации $W(\theta)$ на контуре вершины тупых U- и V-образных вырезов (симметричных надрезов) в пластине при одноосном растяжении был проведен многопараметрический МКЭ анализ [5]. При этом использовали стали, деформационно упрочняющиеся по закону Рамберга-Осгуда.

Общий аналитический вид распределения плотности энергии деформации $W(\theta)$ на контуре вершины вырезов и надрезов конечной остроты l/ρ представлен в следующем виде:

$$W(\theta) = W_{\max}\cos^{\delta}(\theta)\,, \qquad (2.2)$$

где δ – показатель степени, расчетные формулы для которого приведены в работах [5, 6]. Следует обратить внимание на то, что показатель степени в распределении плотности энергии деформации (2.2) зависит от вида U- и V-образных вырезов (надрезов), их остроты и исходного угла раскрытия V-образного выреза (надреза), но не зависит от приложенных напряжений и деформационного упрочнения материала [5]. Кроме того, при увеличении остроты l/ρ показатель δ имеет тенденцию стремления к единице, т.е. к распределению плотности энергии деформации для острых U-образных вырезов и надрезов [1].

Приближенные аналитические формулы J-интеграла с учетом формул (2.1) и (2.2) представлены в функции максимальных эквивалентных напряжений на контуре вершины выреза (симметричных надрезов) для линейно и нелинейно упрочняющихся материалов [5, 6].

Отметим, хорошее соответствие результатов оценок J-интеграла аналитическим и численным методами [5]. Максимальная ошибка расчетов J по предложенным формулам не превышает 5%.

3. Экспериментальная методика определения упругопластической трещиностойкости $J_{\rho,c}$ при наличии надреза на нестандартных образцах или элементах конструкции основана на концепции сепарабельных функций [1] и проиллюстрирована на нестандартных криволинейных компактных образцах и дугообразных образцах с V-образными надрезами при испытании на трехточечный изгиб.

Вычисление поправочных коэффициентов η на геометрию тела и схему нагружения для расчета J-интеграла проводят с использованием формулы

$$J = \eta_e \frac{A_e}{t(B-l)} + \eta_p \frac{A_p}{t(B-l)} = \eta \frac{A}{t(B-l)}\,. \qquad (3.1)$$

В формуле (3.1) A – общая площадь под диаграммой «приложенная нагрузка P – смещение точек приложения нагрузки Δ», l – длина надреза, t – толщина и B – ширина образца. Индексы “e” и “p” относятся к упругим и пластическим составляющим, соответственно. Следует отметить, что метод позволяет исключить необходимость вычисления коэффициента интенсивности напряжений в вершине надреза для определения упругой составляющей J-интеграла для определения трещиностойкости $J_{\rho,c}$ при наличии надреза.

Сущность метода сепарабельных функций, использованного ранее для трещин, заключается в следующем [1]. Предполагается, что приложенная к образцу (или элементу конструкции с надрезом) нагрузка может быть представлена в виде произведения двух функций: геометрической функции, отражающей особенности геометрии образца, надреза и схемы нагружения, и деформационной функции, характеризующей свойства материала. При этом, в рассмотрение вводится сепарабельный параметр S_{ij} как отношение нагрузок $P(l, \Delta)$ идентичных образцов, но с различающимися размерами надрезов l_i и l_j, во всем диапазоне изменения смещения точек приложения нагрузки. Далее необходимо определить сепарабельные константы для каждого испытанного образца на зависимостях «сепарбельный параметр S_{ij} – смещение точек приложения нагрузки». Наклон прямой линии, проведенной через сепарабельные константы на диаграмме $\log(S_{ij}) - \log(B - l_i / B)$, дает коэффициент η для испытанных образцов с надрезом, что позволяет рассчитать по формуле (3.1) трещиностойкость при наличии надреза. Отметим, что для экспериментального определения коэффициента η необходимо испытать по крайней мере 3 образца с различающимися размерами надрезов.

Вышерассмотренный метод сепарабельных функций был апробирован при экспериментальном определении трещиностойкости нестандартных дугообразных образцов, вырезанных из труб стали API 5L X52, с V-образными надрезами при испытании на трехточечный изгиб [7].

4. Из приведенных результатов следует целесообразность рассмотрения трещины как частного случая надреза (выреза), что вытекает из общих положений концепции механики разрушения тел с вырезами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения, М.: Физматлит, 2006. 328 с.
2. Creager M., Paris P.C. Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, International Journal of Fracture, 1967, vol. 3, p. 247-252.
3. Матвиенко Ю.Г. Диаграммы трещиностойкости в связи со стеснением деформаций у вершины трещины и выреза. Заводская лаборатория. //Диагностика материалов. 2008. № 10. С. 55-60.
4. Матвиенко Ю.Г. Критерий осреднения напряжений В.В. Новожилова и диаграммы трещиностойкости. //Тр. ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, СПб.: ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2010, вып. 53.1 (337), с. 93-98.
5. Berto F., Lazzarin P., Matvienko Yu.G. J-integral evaluation for U- and V-blunt notches under Mode I loading and materials obeying a power hardening law, International Journal of Fracture, 2007, vol. 146, p. 33-51.
6. Матвиенко Ю.Г. Подходы механики разрушения в анализе деформирования и разрушения тел с вырезами и надрезами.// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 5. С. 64-72.
7. Капель Ж., Матвиенко Ю.Г., Плювинаж Г. Вязкость разрушения и водородное охрупчивание труб при наличии надрезов. Заводская лаборатория. //Диагностика материалов. 2009. № 3. С. 43-48.

Сведения об авторах:

Матвиенко Юрий Григорьевич,

Заведующий отделом прочности, живучести и безопасности машин, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, (499) 135 12 04, (499) 135 77 71
E-mail matvienko7@yahoo.com

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА СИТУАЦИЙ АБСОЛЮТНОГО РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРЕ

Микаелян О.С.

Рассматривается неантагонистическая динамическая игра с полной информацией. В классе стратегий поведения выявляется способ нахождения множеств ситуаций абсолютных равновесий по Нэшу.

Рассмотрим неантагонистическую игру, где динамика игроков описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f_i(x, u_i)\,, \tag{1}$$

здесь f_i – функция из C^1, согласно которой действует i-тый игрок, i =1,...,n= I, $x \in R^m, m \in N$ и $u_i(t)$– функции из класса измеримых функций. В игре участвуют $n \in N$ игроков. Заданы момент t_0– начала и ϑ– окончание игры, а также некоторое конечное разбиение отрезка времени $[t_0, \vartheta]$ точками $t_0 < t_1 < ... < t_{l-1} < \vartheta$, $l \in N$. Точка деления t_α, $\alpha \in \{1,...,l-1\} = J$, это момент времени, когда по определенному порядку некоторый игрок $i \in \mathrm{I}$ должен выбрать функцию $u_i(t) \in \Omega_i$, $t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1})$ согласно своей стратегии, где Ω_i, $i \in \mathrm{I}$ – компактное, ограничевающее множество в R^{m_i}, $m_i \in N$.

Игра начинается из позиции $(t_0, x_0) \in R^{m+1}$. На правые части уравнений (1) поставим следующие ограничения:

- на $t_0 \le t \le T$ все решения $x(t)$ каждого уравнения системы (1) равномерно ограничены, $|x(t)| < b$,
- для каждого фиксированого (x, t, u_i), $i \in I$ множество $V(x,t) = \{f_i(x,t,u_i), u_i \in \Omega_i\}$ выпукло [1].

Для любого $i \in I$, u_i и (t_0, x_0) множество решений i-того уравнения системы (1) $x(t, x_0, t_0, u_i)$ соответствующих допустимым функциям $u_i(t)$ определены на $[t_0, t]$, $t_0 \le t \le \vartheta$.

Определение1. Множество окончательных точек $(\vartheta; x(\vartheta))$ решений $x(t, x_0, t_0, u_i)$ называется множеством достижимости системы (1) на $[t_0, \vartheta]$, $u_i(t) \in \Omega_i$. Обозначим ее через $E_i(x_0, \vartheta)$.

Из поставленных условий на f_i следует, что множества $E_i(x_0, \vartheta)$ компактны и изменяются непрерывно по t [1].

Из каждой точки $(t_\alpha; x(t_\alpha)) \in E_i(t_\alpha; x(t_\alpha))$ выходит пучок решений $x(t, x(t_\alpha), t_\alpha)$ i-того уравнения системы (1) соответствующих различным выборам $u_i(t) \in \Omega_i$ игрока i, $t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1})$. Для каждого определенного выбора $u_i(t)$ i-того игрока соответствует единственное решение i-того уравнения системы (1) $x(t, x(t_\alpha), t_\alpha)$. В момент $t_{\alpha+1}$ сделавший ход игрок продолжает игру из точки $(x(t_{\alpha+1}), t_{\alpha+1})$, при этом сохраняя непрерывность решения. Множество позиций, следующих за позицией $(t_\alpha, x(t_\alpha))$, обозначим через $Z(t_\alpha; x(t_\alpha))$. Это есть множество достижимости $E_i(x(t_\alpha), t_{\alpha+1})$.

Определение 2. Деревом игры называется конечный древовидный ориентированный граф Т с корнем $(t_0; x_0)$.

Обозначим через $T(t;x)$ поддерево дерева Т с началом в позиции $(t;x)$.

Пусть в R^{m+1} заданы точки $A_1, ..., A_n$, момент времены ϑ_1 и положительные числа $e_1, ..., e_n$. Целевое множество M_i игрока $i \in \mathrm{I}$ определим по условию: $M_i = \{(\vartheta_1; x) \in R^{m+1} : \rho(x; A_i) \le e_i\}$, $i \in I$, где $\rho(a,b)$– расстояние между точками a и b; $a, b \in R^m$.

Позиционной игрой $\Gamma(t_0;x_0)$ назовем дерево игры $T(t_0;x_0)$ со следующей структурой. Все позиции в игре разбиваются на $n+1$ компактных в R^{m+1} множеств $P_1,P_2,...,P_n,P_{n+1}$, называемое разбиением на множества очередности. Позиции, принадлежащие множеству P_i – это позиции i-того игрока, откуда он делает свой выбор функции u_i. Позиции из P_{n+1} окончательные. На окончательных позициях заданы числа $h_i(x(\vartheta,x_0,t_0))=\rho(x(\vartheta,x_0,t_0),M_i)$, $i\in \mathrm{I}$, называемые выигрышами игроков.

Цель каждого игрока: через выборы своих управляющих функций достичь минимальности расстояния точки $x(\vartheta,x_0,t_0)$ от своего целевого множества, то есть минимизировать функцию $h_i(x(\vartheta,x_0,t_0))$.

Определение 3. Стратегией поведения игрока i называется однозначное отображение $b_i(\cdot)$, которое каждой позиции $(t;x)\in P_i$ ставит в соответствие некоторое вероятностное распределение $p_x=\{p(y),\, y\in Z(t;x)\}$, $\int\limits_{Z(x)} p(y)dy=1$ на множестве альтернатив $Z(t;x)$. Здесь $p(y)$, $y\in Z(t;x(t))$– неравные между собой числа из отрезка [0;1], а интеграл понимается в смысле Лебега. i-тый игрок выбирает ту точку $y\in Z(t;x(t))$, которому предписана наибольшая вероятность.

Множество всевозможных стратегий поведения игрока i обозначим через B_i.

Определение 4. Назовем ситуацией в игре $\Gamma(t_0;x_0)$ любой набор $(b_1(\cdot),...,b_n(\cdot))$ стратегий поведения.

Известна теорема о существовании ситуации абсолютного равновесия по Нэшу в конечной игре с полной информацией в чистых стратегиях [2] и в [3] исследована структура множества ситуаций абсолютного равновесия по Нэшу.

В настоящей работе в поставленной динамической игре вводятся и исследуются ситуации абсолютных равновесий по Нэшу. Здесь множество альтернатив выборов игроками своих реализаций стратегий неограниченно.

В рассматриваемой игре с полной информацией в классе стратегий поведения выявляется способ нахождения множеств всевозможных ситуаций абсолютных равновесий по Нэшу.

Под длиной игры $\Gamma(t_0;x_0)$ будем понимать длину наибольшего пути (число вершин, содержащихся в пути) на дереве $T(t_0;x_0)$. В исследуемой игре длина игры равна $l+1$. Рассмотрим разбиение множества всех позиций дерева игры $T(t_0;x_0)$ на $l+1$ множеств $X_0,X_1,...,X_l$, и $X_{l+1}=x_0$. Множество X_α состоит из позиций $(t_{l-\alpha};x)\in R^{m+1}$, достигаемых из начальной позиции $(t_0;x_0)$ в точности $l-\alpha$ ходов. Обозначим через $(t_{l-\alpha};x_\alpha)$ позицию из X_α. Из условий на (1) следует компактность множества X_α.

Определение 5. Индикаторной функцией множества A называется функция $I_A(a)=\begin{cases}1\, if\;\; a\in A\\ 0\, if\;\; a\notin A\end{cases}$.

Нахождение абсолютных равновесий по Нэшу производится по методу обратной индукции. Здесь возможно, что в некоторой подыгре $\Gamma(t;x)$, игрок $i(x)$, совершающий выбор в позиции $(t;x)$, может выбрать множество альтернатив $y\in Z(t;x)$, которые приводят ему одинаковый выигрыш, при условии, что остальные игроки придерживаются данного фиксированного абсолютного равновесия по Нэшу. Множества $Z(t;x)$, соответствующие описанным ситуациям, которые могут возникать в ходе игры, назовем оптимальными. По определению 3, игрок делает свой выбор позиции, выбирая из оптимального множества ту точку, которой продписана наибольшая вероятность.

Определение 6. Ситуация равновесия по Нэшу в стратегиях поведения $(b_1(\cdot),...,b_n(\cdot))=b(\cdot)$ называется абсолютным равновесием в игре $\Gamma(t_0;x_0)$, если ее сужение в любой подыгре $\Gamma(t;x)$ является ситуацией равновесия в этой подыгре [4].

Приведем алгоритм построения ситуации абсолютного равновесия по Нэшу в стратегиях поведения с полной информацией и покажем, что любая ситуация абсолютного равновесия в игре $\Gamma(t_0;x_0)$ может быть получено с помощью этого алгоритма.

На множестве позиций X_0 выигрыши игроков определены и равны соответственно $h_i(x(\vartheta,x_0,t_0))$, так как $X_0 \subset P_{n+1}$.

Шаг 1. Перейдем из позиций X_0 к позициям $(t_{l-1};x_1)\in X_1$, учитывая фиксированный порядок ходов игроков. Если $x_1\notin P_{n+1}$, то в позиции $(t_{l-1};x_1)$ делает ход игрок $i(x_1)$. Игрок $i(x_1)$ выбирает позицию $(t_{l-1};\bar{x}_0)\in Z(t_{l-1};x_1)$ из условия

$$\min_{x\in Z(x_1)} h_{i(x_1)}(x)=h_{i(x_1)}(\bar{x}_0)\,. \tag{2}$$

Минимум в (2) достигается в силу условий, поставленных на $f_i,\, i\in I$ в (1).

Минимум в (2) может достигаться и на множестве точек

$\tilde{Z}_{i(x_1)}(t_{l-1};x_1)=\arg\min_{y\in Z(x_1)} h_i(x)$, то есть,

$$\tilde{Z}_{i(x_1)}(t_{l-1};x_1)=\{(\vartheta_1;y):h_{i(x)}(y)=\min_{(\vartheta_1;x_0)\in Z(t_{l-1};x_1)} h_{i(x_1)}(x_0)\} \tag{3}$$

Стратегия поведения $\bar{b}_{i(x_1)}$ выбирает альтернативы из множества позиций $y\in\tilde{Z}_{i(x_1)}(x_1)$ точку $\bar{x}_0$ с наибольшей вероятностью, которое определяется данной стратегией $\bar{b}_{i(x_1)}$, $p_{x_1}(y)\ge 0$, $\int\limits_{X_0} p_{x_1}(y)I_{Z_{i(x_1)}}(y)dy=1$. При этом, выигрыши игроков $i=1,...n$ равны $h_{i(x_1)}(\bar{x}_0)$.

Таким образом, из позиции $(t_{l-1};x_1)$ могут исходить “поддеревья” дерева $T(t_{l-1};x_1)$. В частности, оно может быть единственным, если максимум в (3) достигается в единственной точке $\bar{x}_0$.

Аналогичным образом можно построить поддерево с началом в $(t_{l-2};x_2)\in X_2$ для каждой позиции $(t_{l-2};x_2)\in X_2$. Таким образом, на каждом поддереве $T(t_{l-2};x_2)$, $(t_{l-2};x_2)\in X_2$ фиксируется позиция $(\vartheta;\bar{x}_0)$, являющаяся предполагаемой окончательной позицией строящегося поддерева игры $\Gamma(t_0;x_0)$. Поэтому, зная поведение игрока на поддеревьях $T(t_{l-2};x_2)$, $(t_{l-2};x_2)\in X_2$, мы можем ввести аналог функций Беллмана $H_i^2:X_2\to R_+^1$, i=1,...,n, где

$$H_i^2(x_2)=\begin{cases} h_i(x_2), & if \quad x_2\in P_{n+1} \\ h_i(x_2)=\max\limits_{y\in\tilde{Z}_{i(x_2)}(x_2)} h_i(y), & x_2\notin P_{n+1} \end{cases},$$

Стратегии $\bar{b}_i(\cdot)$ строим в позиции $x_2\in X_2\cap P_i$ по правилу:

$$\bar{b}_i(\cdot)=\begin{cases} \bar{x}_0,\ \bar{x}_0=\arg\max\limits_{y\in Z(x_2)} H^1_{i(x_2)},\ if\ \max\ is\ unique, \\ \bar{x}_0: p(\bar{x}_0)=\max\limits_{y\in\tilde{Z}_{i(x_2)}(x_2)} p(y) \quad in\ other\ cases. \end{cases}$$

Здесь $\int\limits_{\tilde{Z}_{i(x_2)}(x_2)} p_{x_2}(y)dy=1;\quad p_{x_2}(y)\ge 0$, а множество $X_2\cap P_i$ компактное.

Предположим, что функции $H_i^\alpha(x_\alpha)$ и стратегии $\bar{b}_i(\cdot)$, $i\in I$ построены для всех $m<\alpha$, $m\in N$, $0\le\alpha\le l$. Предположим, что двигаясь к корню дерева игры, мы достигли позиции

$(t_\alpha; x_\alpha) \in X_\alpha$. Пусть функции $H_i^{\alpha-1}(x_{\alpha-1}): X_{\alpha-1} \to R_+^1$, $i \in \mathrm{N}$ определяют, какие выигрыши получают игроки $i \in \mathrm{I}$ в подыгре $\Gamma(t_{\alpha-1}; x_{\alpha-1})$ после выбора ими позиции $x_m \in X_m$, $m < \alpha$ предложенных решений.

Шаг α. Пусть

$$\tilde{Z}_{i(x_\alpha)}(t_\alpha; x_\alpha) = \arg\max_{y \in Z(x_\alpha)} H_i^{\alpha-1}(y). \tag{4}$$

В позиции $(t_\alpha; x_\alpha) \in X_\alpha$ стратегия поведения $\bar{b}_i(x_\alpha)$ игрока $i(x_\alpha)$ выбирает альтернативу из множества $y \in \tilde{Z}_{i(x_\alpha)}(x_\alpha)$ ту точку, которому предписана наибольшая вероятность $p_{x_\alpha}(y) \geq 0$, $\int\limits_{Z_{i(x_\alpha)}(x_\alpha)} p_{x_\alpha}(y)dy = 1$. Очевидно, если максимум в (4) достигается в единственной точке $\bar{x}_\alpha$, то в $\bar{b}_{i(x_\alpha)}$ выбирает эту точку с вероятностью 1.

Функции $H_i^\alpha(x_\alpha): X_\alpha \to R_+^1$, $i \in I$ зададим следующим образом:

$$H_i^\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} h_i(x_\alpha), & if \quad x_\alpha \in P_{n+1} \\ h_i(x_\alpha) = \max\limits_{y \in \tilde{Z}_{i(x_\alpha)}(x_\alpha)} h_i(y), & if \quad x_\alpha \notin P_{n+1}. \end{cases}$$

Стратегии $\bar{b}_i(\cdot)$ строим в позиции $x_\alpha \in X_\alpha \cap P_\alpha$, $i \in I$, по правилу:

$$\bar{b}_i(\cdot) = \begin{cases} \bar{x}_{\alpha-1}, \ \bar{x}_{\alpha-1} = \arg\max\limits_{y \in Z(x_\alpha)} H_{i(x_\alpha)}^{\alpha-1}(y), \ if \ \max \ is\ unique, \\ \bar{x}_{\alpha-1} : p(\bar{x}_{\alpha-1}) = \max\limits_{y \in \tilde{Z}_{i(x_\alpha)}(x_\alpha)} p(y), \ in\ other\ cases. \end{cases}$$

Здесь $\int\limits_{\tilde{Z}_{i(x_\alpha)}(x_\alpha)} p_{x_\alpha}(y)dy = 1$, $p_{x_\alpha}(y) \geq 0$.

Обозначим через $\bar{b}^{x_\alpha}(\cdot) = (\bar{b}_1^{x_\alpha}(\cdot), ..., \bar{b}_n^{x_\alpha}(\cdot))$ ситуацию в подыгре $\Gamma(x_\alpha)$, построенную на первых α шагах алгоритма.

Продолжая процесс и последовательно определяя выборы игроков в оставшихся множествах $X_\sigma, \sigma = \alpha+1, ..., l$, мы построим поддерево, соответствующее ситуациям

$$\bar{b}^0(\cdot) = (\bar{b}_1^0(\cdot), ..., \bar{b}_n^0(\cdot)) \tag{5}$$

и соответствующие выигрыши, которые релизуются в игре $\Gamma(x_0)$.

После этого аналогично [3] доказываются следующие утверждения:

Теорема 1. Ситуация (5) образует ситуацию абсолютного равновесия по Нэшу в $\Gamma(t_0; x_0)$.

Теорема 2. Любая ситуация абсолютного равновесия по Нэшу в $\Gamma(x_0)$ может быть получена в результате реализации построенного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
2. Нэш Дж. Бескоалиционные игры. // В сб.: “Матричные игры”. М.: 1961. С.205-221.
3. Мамкина С.И., Петросян Л.А. Структура множества ситуаций абсолютного равновесия по Нэшу в играх с полной информацией. Процессы управления и устойчивость. // 34-ая научн. конф., 14-16 апреля 2004, Санкт-Петербургский государственный университет, с. 639-647.
4. Selten R., Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games // Intern. J. Game Theory, 1975, vol.4, pp.25-55.

<u>Сведения об авторе:</u>

Микаелян Оник Саркисович – старший научный сотрудник Ереванского государственного университета, факультет математики и механики, (374 10) 62 67 26, (374 99) 90 14 14
E-mail: mikons51@yahoo.com

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНКИ ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕВОГО УСИЛИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Минасян Д.М., Ванян Л.А.

В работе рассмотрена задача аэродинамической устойчивости пластинки при наличии осевого усилия при обтекании низкими сверхзвуковыми потоками идеального газа.

В задачах аэроупругости особое место занимают задачи устойчивости пластин и оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа и жидкости, и, в особенности, задача флаттера.

Под флаттером в широком смысле понимают самовозбуждающиеся и самоподдерживающие колебания упругой системы, находящейся в потоке идеального газа или ньютоновской (несжимаемой) жидкости, которые являются следствием взаимодействия аэродинамических, инерционных сил и упругих реакций при некоторой скорости потока. Эти колебания возникают, если энергия, получаемая за цикл колебаний от потока, превышает затраты энергии, необходимые для преодоления конструкционного демпфирования. Амплитуда этих колебаний может увеличиваться столь быстро, что за несколько циклов колебаний в конструкции возникают деформации, опасные для ее устойчивости и прочности. Колебания возникают при опредленной скорости потока, которая называется критической или скоростью флаттера.

Объектом исследования в задачах так называемого панельного флаттера являются плоские или криволинейные тонкостенные элементы конструкций типа пластин, мембран или оболочек.

Для бесконечной пластины, обтекаемой однородным потенциальным потоком идеального газа, выводится одно интегро-дифференциальное уравнение, что обусловлено нелокальностью связи между избыточным давлением газа и движением пластины [1].

Поршневая теория. Основная трудность решения задач флаттера является то, что аэродинамические силы не могут достаточно просто выражаться через возмущения обтекаемой поверхности. Но при больших сверхзвуковых скоростях возможны существенные упрощения, которые обусловлены на асимптотических особенностях сверхзвукового потока. Один из самых известных и простых в применении методов является «закон плоских сечений» или «поршневая теория» [2, 3]. Это приближение приводит к некоторому уравнению, которое связывает в данной точке локальное давление с нормальной составляющей скорости. В этом случае, интегро-дифференциальное уравнение вырождается в дифференциальное. Однако, являясь простым, эта теория, не выяснив ряда принципиальных вопросов общей постановки, в свою очередь, внесла достаточно большие ошибки (примером чего является известный «парадокс флаттера мембраны»).

Для устранения этого изъяна со стороны М.Белубекяна и М.Минасяна было предложено новое, следующее «поршневой» теории, приближение [4, 5], которое в дальнейшем усовершенствованны в работах [6–8]. В этой «уточненной» теории сохранены основные характеристики интегро-дифференциального уравнения и, который, что особенно важно, дает более точный результат.

Задача. Предположим, упругая пластинка односторонне обтекается двумерным потоком идеального газа. Рассмотрим цилиндрические колебания пластинки. Положим что, $w(x,y,t)$ – отклонение пластинки от положения покоя. Уравнение поперечных колебаний пластинки будет описываться следующим уравнением [1]:

$$L[w]+p(x,t)=0,$$

где $p(x,t)$ – избыточное давление газа, а L – линейный дифференциальный оператор по t и x, и описывает движение пластинки в вакууме. Согласно [4] имеем систему уравнений:

$$L[w]+p(x,t)=0,\quad \frac{Dp}{Dt}={}^{\circ}{}_0 a_0\left(\frac{D^2w}{Dt^2}+a_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\ \frac{D}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\ , \tag{1}$$

где U – невозмущенная скорость потока, обтекания, $°_0$, a_0 – невозмущенные параметры газа (плотность и скорость звука в газе соответственно).

Предположим, что линейный дифференциальный оператор L имеет следующий вид:

$$L = °h\frac{\partial^2}{\partial t^2} + °h£\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] + D\frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

где h – толщина пластинки, £ – аэродинамический демпфер, D – изгибная жесткость. Предположим, что осевое усилие переменно: $N(x) = N_0 + N_1\dfrac{x}{l}$.

Исключая из системы (1) давление и введя следующие безразмерные величины:

$$x = l\xi,\quad t = \frac{\tau}{\omega_0},\quad \lambda_0 = \frac{\rho_0 a_0}{\rho h\omega_0},\quad M_0 = \frac{a_0}{l\omega_0},\quad M_1 = \frac{U}{l\omega_0},\quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\omega_0},$$

$$T_0 = \frac{N_0}{\rho h l^2\omega_0^2},\quad \beta_0 = \frac{N_1}{\rho h l^2\omega_0^2},\quad \omega_0^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h l^2},$$

где μ_0 – частота собственных колебаний системы, для функции изгиба w получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 w}{\partial\tau^3} + (\varepsilon_0 + \lambda_0)\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} + \frac{1}{\pi^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\xi^4\partial\tau} + M_1\frac{\partial^3 w}{\partial\xi\partial\tau^2} + \left[(\varepsilon_0 + \lambda_0)M_1 - \beta\right]_0\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau} + \\ + \frac{M_1}{\pi^4}\frac{\partial^5 w}{\partial\xi^5} + \lambda_0\left(M_0^2 + M_1^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} - (T_0 + \beta_0 x)\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\tau} - M_1(T_0 + \beta_0\xi)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Ради простоты возьмем случай шарнирного опирания кромок:

$$\xi = 0;\ 1;\quad w(\xi, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = 0. \tag{3}$$

Пятое необходимое граничное условие получим из точного уравнения, приведенного в [1], положив $x = 0$ [6] и используя безразмерные величины:

$$\frac{1}{®^4}w^{(4)}(0,²) - \ {}_0 w'(0,²) + ª_0 M_1 w'(0,²) = 0 \quad \text{при } ¶ = 0. \tag{4}$$

Итак, мы получили задачу о собственных колебаниях одномерной системы. Эта задача позволяет представлять решение в виде разделяющихся переменных $w(¶,²) = f(²)v(¶)$.

В этом случае уравнение примет следующий вид:

$$\begin{gathered}v(¶)\dddot{f}(²) + \left[(£_0 + ª_0)v(¶) + M_1 v'(¶)\right]\ddot{f}(²) + \left[(£_0 M_1 + 2ª_0 M_1 - \ {}_0)v'(¶) + \frac{1}{®^4}v^{(4)}(¶) - \right. \\ \left. -(T_0 + \ {}_0 x)v''(¶)\right]\dot{f}(²) + \left[\frac{M_1}{®^4}v^{(5)}(¶) + ª_0(M_1^2 + M_0^2)v''(¶) - M_1(T_0 + \ {}_0¶)v'''(¶)\right]\dot{f}(²) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Все граничные условия функция $v(¶)$ «берет на себя»:

$$v(0) = v''(0) = 0,\quad v(1) = v''(1) = 0. \tag{6}$$

Аэродинамическое условие (4) с учетом граничных условий (3) примет следующий вид:

$$v^{(4)}(0) - ®^4\ {}_0 v'(0) + ®^4 ª_0 M_1 v'(0) = 0. \tag{7}$$

Предположим, что решение $v(¶)$, которое удовлетворяет условиям (3) и (4), существует.

$v(¶)$ называется ***главной формой колебаний***, а $f(²)$ – ***амплитудой*** .

При определенных $v(¶)$ уравнение (5) становится уравнением для определения главных частот. Функцию $v(¶)$ можно представить в виде:

$$\boldsymbol{v(}¶\boldsymbol{)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin ® k¶ = \sin ®¶ \, p(¶)$$

$p(¶)$ – многочлен некоторой степени с коэффициентами b_k .

Задача приводится к нахождению коэффициентов b_k многочлена $p(¶)$. Мы имеем пять граничных условий, из которых два из-за $\sin ®¶$ удовлетворяются однозначно. А для удовлетворения остальным трём в многочленам $p(¶)$ оставим четыре члена [8].

$$p(¶) = b_0 + b_1¶ + b_2¶^2 + b_3¶^3 .$$

Для нахождения коэффициентов b_k воспользуемся следующими граничными условиями:

$$v''(0) = 0, \quad v''(1) = 0, \quad v^{(4)}(0) - \beta_0\pi^4 v'(0) + \lambda_0 M_1 \pi^4 v'(0) = 0$$

Решив эту систему для b_k , получим следующие результаты:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^4(\lambda_0 M_1 - \beta_0)}{24} b_0, \quad b_3 = -\frac{\pi^4(\lambda_0 M_1 - \beta_0)}{24} b_0$$

Следовательно, многочлен $p(¶)$ будет иметь следующий вид:

$$p(¶) = b_0\left[1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{ª_0 M_1 - \quad _0}{24}®^4¶^2 - \frac{ª_0 M_1 - \quad _0}{24}®^4¶^3\right].$$

Поскольку $v(¶)$ определяется с точностью до константы, то для $v(¶)$ получим

$$v(¶) = \left[¥ + \frac{3}{2}¶^2 - ¶^3\right]\sin ®¶ , \quad \text{где} \quad ¥ = \frac{24}{(ª_0 M_1 - \quad _0)®^4} ,$$

$v(¶)$ подставим в уравнение (5) и применим метод Бубнова-Петрова. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\dddot{f} + A\ddot{f} + B\dot{f} + Cf = 0 , \tag{8}$$

где коэффициенты имеют следующий вид:

$$A = £_0 + ª_0 + \frac{M_1}{1+4¥}\left(1 + \frac{3}{®^2}\right); \; B = 1 + M_1\frac{(£_0 + 2ª_0)}{1+4¥}\left(1+\frac{3}{®^2}\right) + ®^2 T_0 + \frac{_0}{1+4¥}\left[2®^2¥ - \frac{3}{®^2} + \frac{7}{10}®^2 + \frac{1}{2}\right]$$

$$C = \frac{9M_1}{1+4¥}\left(1+\frac{49}{3®^2}\right) + \frac{M_1 T_0}{1+4¥}\left(3 + 5®^2\right) - ª_0 ®^2\left(M_1^2 + M_0^2\right) + \frac{M_1 \; _0}{1+4¥}\left[\frac{3}{2} - 2®^2(1+¥)\right].$$

Итак, получили, что коэффициенты амплитудной функции зависят от скорости потока, осевого усилия, конструкционного и аэродинамического демпфирований. Выбрав в качестве параметров, например, число Маха, аэродинамический демпфер и осевое усилие, и используя критерии устойчивости Раусса-Гурвица [9], можно получить трехмерную область устойчивости. Варьируя значениями параметров можно, оставаться в области устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. М.: ФМ, 1961.
2. Ashley H., Zartarian G. Piston theory - a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronautics Sci., 23-№6 (1956).
3. Kornecki A. Aeroelastic and hydroelastic instabilities of infinitely long plates. II SM Archives, Vol.4, Issue 4, 1979, pp. 241-343.
4. Белубекян М.В., Минасян М.М. О нелинейном флаттере пластин в сверхзвуковом потоке газа. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. N4.С.38-45.
5. Белубекян М.В., Минасян М.М. К проблемам флаттера пластинки в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т.50. N2. С.27-35.
6. Минасян Д.М., Минасян М.М. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. //Докл. НАН Армении. 2001. Т.101. N1. С.49-54.
7. Минасян Д.М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях газа. Сравнительный анализ. //Изв.НАН РА.Механика. 2001.Т.54. N3. С.65-72.
8. Минасян Д.М. Об одном приближённом методе определения главных частот одномерных колебаний. //Материалы респуб. конф. молодых ученых. Ереван, 1999, с.59-62.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

Сведения об авторах

Минасян Давид Мелсович –к.ф.м.н., заведующий учебной лабораторией кафедры механики факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (37410) 551148 (факультет Математики и механики ЕГУ), (37499) 020722,
E-mail: minasyan@ysu.am

Ванян Лилит Алфонсовна – младщий научный сотрудник кафедры механики факультета математики и механики Ереванского государственного университета.

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МЕЖДУ ДВУМЯ ОДИНАКОВЫМИ СТРИНГЕРАМИ И СЛОЕМ С УЧЁТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Мирзоян С.Е., Акопян В.В., Мирзоян Е.С.

В постановке теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих тел [1,2] рассматривается антиплоская задача о контактном взаимодействии двух одинаковых и симметрично расположенных конечных стрингеров с бесконечным слоем. При различных вязкоупругих характеристиках стрингеров и слоя и при наличии заданной внешней нагрузке определяется закон распределения тангенциальных контактных напряжений. Решение задачи сводится к двумерному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши, содержащий также интегральные операторы Вольтерра по времени. Используя квадратурные формулуы Гаусса для сингулярного интеграла с ядром Коши [5] и для обычных интегралов, после обращения оператора Вольтерра по времени, решение поставленной задачи сводится к решению конечной системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Известно, что теория ползучести неоднородно наследственно-стареющих сред [1,2] наиболее точно отражает физико-механические процессы, происходящие в телах и конструкциях, изготовленных из стареющих разновозрастных вязкоупругих материалов. В рамках этой теории рассматривается задача о контакте двух одинаковых и симметрично расположенных конечных стрингеров с бесконечным слоем в условиях антиплоской деформации.

Пусть вязкоупругий бесконечный слой толщины $2h$, отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, по двум своим граничным плоскостям $y=-h$ и $y=h$ усилен симметрично расположенными одинаковыми вязкоупругими стрингерами конечной длины $2a$ и малой толщины h_1, в направлении оси Oz находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига). В результате, в базовой плоскости Oxy происходит контакт двух одинаковых симметрично расположенных конечных стрингеров с полосой.

Предполагается, что к стрингерам в направлении оси Oz приложены силы интенсивности $\tau_0(x,t)$ $\left(|x|\le a,\, t\ge\tau_0\right)$, под действием которых система стрингеры–полоса будет находиться в условиях антиплоской деформации. Стрингеры рассматриваются как одномерные упругие континуумы, и поэтому, на участках контакта $[-a,a]$ стрингеров с полосой будут действовать только тангенциальные контактные напряжения $\tau(x,t)$ [3].

Предполагается также, что стрингеры и полоса имеют разные меры ползучести на сдвиг, разные модули сдвига $G_i(t)$ $\left(i=1,2\right)$ и разные возрасты τ_i $\left(i=1,2\right)$.

При таких предположениях требуется определить закон распределения касательных контактных напряжений $\tau(x,t)$ на линии контата $[-a,a]$, если в момент времени $t=\tau_0$ к стрингерам в направлении оси Oz приложены силы интенсивности $\tau_0(x,t)$.

Условие контакта имеет следующий вид:

$$\left(1-L_1\right)\frac{\partial U_z^{(1)}\left(x,\pm h,t\right)}{\partial x}=\left(1-L_2\right)\frac{\partial U_z^{(2)}\left(x,\pm h,t\right)}{\partial x}\quad\left(|x|\le a,\, t\ge\tau_0\right), \tag{1}$$

где $L_i[Y(t)],\ (i=1,2)$ – операторы Вольтерра второго рода по времени t:

$$\begin{aligned}
&L_i[Y(t)]=\int_{\tau_0}^{t}G_i^*(\tau)K_i^*(t,\tau)Y(\tau)\,d\tau,\quad G_i^*(\tau)=G_i\left(t+\rho_i\right)\\
&K_i^*(t,\tau)=K_i\left(t+\rho_i,\tau+\rho_i\right),\quad \rho_i=\tau_i-\tau_0\\
&K_i(t,\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[G_i^{-1}(\tau)+\omega_i(t,\tau)\right],\quad G_i(t)=\frac{E_i(t)}{2(1+\nu_i)}\\
&\omega_i(t,\tau)=2(1+\nu_i)C_i(t,\tau),\quad C_i(t,\tau)=\varphi_i(\tau)\left(1-e^{-\gamma_i(t-\tau)}\right)\\
&\varphi_i(\tau)=C_0^{(i)}+A_0^{(i)}/\tau,\quad (i=1,2)
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $U_z^{(i)}\left(x,\pm h,t\right)$ $\left(i=1,2\right)$–упруго-мгновенные перемещения, соответственно, для стрингеров и полосы на линиях контакта $y=\pm h$ в направлении оси Oz.

Условие равновесия стрингеров имеет вид

$$\int_{-a}^{a}\tau(s,t)ds=\int_{-a}^{a}\tau_0(s,t)ds=C_0(t) \tag{3}$$

Подставляя в условие контакта (1) выражения упруго-мгновенных деформаций для полосы и стрингеров [4], относительно напряжения $\tau(x,t)$ получим следующее двумерное интегральное уравнение:

$$\left(1-L_2^0\right)\int_{-a}^{a}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(s-x)}{4h}-\operatorname{th}\frac{\pi(s-x)}{4h}\right]\tau(s,t)ds=\lambda(t)\left(1-L_1^0\right)\int_{-a}^{x}\left(\tau_0(s,t)-\tau(s,t)\right)ds \tag{4}$$

где

$$L_i^0\left[y(t)\right]=\int_{\tau_o}^{t}G_i^*(t)K_i^*(t,\tau)d\tau,\ \ (i=1,2),\ \ \lambda(t)=\frac{4hG_2(t)}{h_1G_1(t)}$$

Далее перейдем к безразмерным координатам ξ и η

$$\xi=\frac{\pi x}{4h},\ \eta=\frac{\pi s}{4h},\ \ \alpha=\frac{\pi a}{4h},\ \ \xi,\eta\in\left[-\alpha,\alpha\right]$$

и введем обозначения

$u=\operatorname{th}\xi/\operatorname{th}\alpha,\ \mathrm{v}=\operatorname{th}\eta/\operatorname{th}\alpha,\quad u,v\in\left[-1,1\right]$.

После некоторых преобразований из уравнений (4) получим определяющее двумерное сингулярное уравнение (СИУ) с ядром Коши, содержащее интегральные операторы Вольтерра по времени t следующего вида:

$$\begin{gathered}\left(1-L_2^0\right)\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{v-u}+\frac{u}{\operatorname{cth}^2\alpha-uv}\right]\varphi(v,t)dv+\lambda(t)\left(1-L_1^0\right)\int_{-1}^{u}\varphi(v,t)\frac{\operatorname{th}\alpha dv}{1-\mathrm{v}^2\operatorname{th}^2\alpha}=\\=\lambda(t)\left(1-L_1^0\right)\int_{-1}^{u}\varphi_0\left(v,t\right)\frac{\operatorname{th}\alpha dv}{1-\mathrm{v}^2\operatorname{th}^2\alpha}\end{gathered} \tag{5}$$

$$\varphi(v,t)=\tau\left(\frac{2h}{\pi}\ln\frac{1+v\operatorname{th}\alpha}{1-v\operatorname{th}\alpha},t\right),\qquad \varphi_0(v,t)=\tau_0\left(\frac{2h}{\pi}\ln\frac{1+v\operatorname{th}\alpha}{1-v\operatorname{th}\alpha},t\right)$$

при условии

$$\int_{-1}^{1}\varphi(v,t)\frac{dv}{1-v^2\operatorname{th}^2\alpha}=\int_{-1}^{1}\varphi_0(v,t)\frac{dv}{1-v^2\operatorname{th}^2\alpha}=C_0(t) \tag{6}$$

Решение уравнения (5) представим формулой [5]

$$\varphi(u,t)=\frac{U(u,t)}{\sqrt{1-u^2}},\quad (|u|<1,\ t\geq\tau_0) \tag{7}$$

где $U\left(x,t\right)$– гельдеровская функция по x на [-1,1].

Подставляя теперь выражение $\varphi\left(u,t\right)$ из (7) в уравнения (5) и (6) и используя квадратурные формулы Гаусса для сингулярного интеграла с ядром Коши и для обычных интералов [5], после несложных преобразований для $U\left(v_m,t\right)$ получим уравнение Вольтерра второго рода по времени t:

$$\begin{gathered}(1-L_2^0)\sum_{m=1}^{M}H_1(u_n,v_m)U(v_m,t)=\lambda(t)(1-L_1^0)\sum_{m=1}^{M}H_2(u_n,v_m)+N(t,u_n)\\ \frac{\pi}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{U(v_m,t)}{1-v_m^2\operatorname{th}^2\alpha}=C_0(t),\quad (n=1,2,...M-1)\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$H_1(u_n,v_m)=\frac{\pi}{M}\left(\frac{1}{v_m-u_n}+\frac{u_n}{\operatorname{cth}^2\alpha-u_nv_m}\right);\qquad H_2(u_n,v_m)=\frac{\pi}{M}\frac{\operatorname{th}\alpha\operatorname{sgn}(u_n-v_m)}{2(1-v_m^2\operatorname{th}^2\alpha)};$$

$$N(t,u_n)=\lambda(t)(1-L_1^0)\int_{-1}^{1}\varphi_0(v,t)\frac{\operatorname{th}\alpha dv}{1-v^2\operatorname{th}^2\alpha};\qquad \lambda(t)=\frac{4hG_2(t)}{h_1G(t)}.$$

Отметим, что точки v_m и u_n $(n=1,2,...,M-1,\ m=1,2,...,M)$ являются корнями многочленов Чебышева первого рода $T_M(v_m)$ и второго рода $U_{M-1}(u_n)$ соответственно, и дают узлы квадратурных формул. Они определяются формулами

$$u_n=\cos\frac{\pi n}{M}\quad (n=1,2,...,M-1),\quad v_m=\cos\frac{2m-1}{2M}\pi\ \ (m=1,2,...,M)$$

Обращая систему уравнений (8), после некоторых преобразований, для определения M неизвестных $U(v_m,t)$ получим систему M линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{N}H_1(u_n,v_m,t)U(v_m,t)+\sum_{m=1}^{N}\int_{\tau_0}^{t}R_{m,n}^*(t,\tau)U(v_m,\tau)d\tau=b_n(t)\\&\frac{\pi}{M}\sum_{m=1}^{N}\frac{U_n(v_m,t)}{1-v_m^2\operatorname{th}^2\alpha}=C_0(t),\quad (n=1,2,...M-1)\end{aligned}\qquad(9)$$

где

$$R_{m,n}^*(t,\tau)=\left[\lambda^*(t)G_1^*(t)K_1^*(t,\tau)-\lambda^*(t)R_2^*(t,\tau)+R^*(t,\tau)\right]H_2(u_n,v_m),$$

$$H(u_n,v_m,t)=H_1(u_n,v_m)-\lambda(t)H_2(u_n,v_m)\ ,$$

$$R^*(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}\lambda^*(u)G_1^*(u)R_2^*K_1^*(\tau,u)du,$$

$$b_n(t)=N(t,u_n)+\int_{\tau_0}^{t}N(\tau,u_n)R_2^*(t,\tau)d\tau,$$

а $R_2^*(t,\tau)$ – резольвента ядра $G_2^*(t)K_2^*(t,\tau)$.

Отметим, что конечная система интегральных уравнений (9) является дискретным аналогом двумерного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши (5) при условии (6).

В частном случае, когда $t=\tau_0$ или $L_1^0=L_2^0$, из системы (9) получим решение соответствующей упруго-мгновенной задачи, рассмотренной в [6].

Проведен численный анализ задачи и выявлены закономерности изменения тангенциального контактного напряжения в зависимости от возрастов контактирующих пар стрингеры-полоса и времени t. Полученные результаты показывают, что контактные напряжения существенно зависят от возрастов контактирующих пар и времени.

Численный анализ задачи проведен при внешней нагрузке $\tau_0(x,t)=P_0\delta(x)H(t-\tau_0)$ и при следующих значениях параметров:

$$G_1=G_2=0.87\times10^4\,\text{МПа},\ \nu_1=\nu_2=0.1,\ \gamma=0.02\text{сут}^{-1},\ \gamma_1=\gamma_2=0{,}026\text{сут}^{-1}$$

$$C_0^1=C_0^2=9\times10^{-5}\,\text{МПа},\ A_0^1=A_0^2=4{,}82\times10^{-4}\text{сут}\times МПа^{-1},\ h_1/h_2=50.\qquad ,$$

Полученные численные результаты показывают, что:

1. При приближении возраста τ_1 к τ_2, решение задачи с учетом ползучести приближается к решению соответствующей упруго-мгновенной задачи.
2. Изменение возрастов τ_1 и τ_2 больше влияет на распределение контактного напряжения в молодом возрасте, т.е. при малых значениях τ_1 и τ_2 .

3. При условии $\tau_1 < \tau_2$ $(\tau_1 > \tau_2)$ и по мере возрастания возраста полосы τ_2 контактные напряжения вблизи точки приложения сосредоточенной нагрузки во времени возрастают (убывают), а в достаточно удаленных точах убывают (возрастают) и везде стремятся к некоторому предельному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. №3. С. 153-164.
2. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М: Наука, 1983. 336с.
3. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. //В сб.:”Механика деформируемого твердого тела”. Ереван: Изд-во АН Армении, 1993. С. 129-143.
4. Мирзоян С.Е., Акопян В.В. Антиплоская задача о контактном взаимодействии слоя с полупространством с учетом ползучести. //В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Тр. Межд. конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна. 25-28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. С.284–287.
5. Панасюк В.В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1976. 442с.
6. Мирзоян С.Е., Акопян В.В. Мирзоян Е.С. Антиплоская задача о контактном взаимодействии двух одинаковых стрингеров со слоем. //В сб.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Тр. VI Международной конференции, Горис–Степанакерт, Армения, 2008.

Сведения об авторах:

Мирзоян Саак Езникович – канд.ф-м.н., с. н. с. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б
Тел: (+37410) 568188
E-mail: mechins@sci.am

Акопян Вазгануш Велихановна – канд.ф-м.н., н. с. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б
Тел: (+37410) 568188
E-mail: mechins@sci.am

Мирзоян Езник Саакович – канд.ф-м.н., Ереванский госуниверситет
E-mail: mirzoyan@ysu.am

О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПОЛИГОНАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.

Обобщается известная задача Н.Х. Арутюняна на случай кручения упругого двухкомпонентного кусочно-однородного стержня с полигональным поперечным сечением и здесь эта задача рассматривается с точки зрения применения к ней различных численно-аналитических методов, а именно методов сеток и граничных интегральных уравнений (ГИУ). При этом проводится комплексное исследование поставленной задачи, включающее следующие составляющие:

а) решение поставленной задачи только сеточным методом; б) сопряжение аналитического решения для одного прямоугольника с численным решением по методу сеток для другого прямоугольника; в) решение исходной задачи для составного прямоугольника методом ГИУ; г) сопряжение аналитического решения для одного прямоугольника с численно-аналитическим методом ГИУ для другого прямоугольника.

По всем указанным методам вычисляются касательные напряжения в составном стержне и жесткость стержня, на основании которых проводится сравнительный анализ полученных результатов по разным методам. При этом в методе ГИУ учитываются геометрические эффекты угловых точек. Обсуждаются различные частные случаи. В предлагаемой статье ограничимся изложением результатов по пункту б) поставленной задачи.

1. Многие основополагающие результаты по исследованию обширных классов задач о кручении однородных и кусочно-однородных стержней изложены в монографиях [1,2]. Здесь рассмотрим задачу о кручении кусочно-однородного стержня, сечение которого состоит из разнородных прямоугольников со сторонами $a_1, 2b$ и $a_2, 2b+c$, спаянных вдоль грани шириной $2b$ (рис.1)

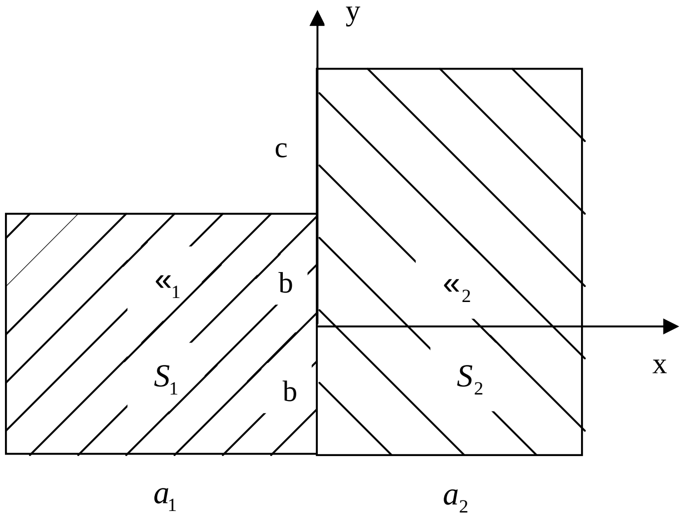


Рис.1

Модули сдвигов составного стержня обозначим, соответственно, через μ_1 и μ_2. Направим ось Oy по линии раздела областей S_1 и S_2, соответствующих различным материалам и возьмем начало координат в середине отрезка спая этих материалов. Далее как в [1], в областях S_1 и S_2 введем гармонические функции

$$\Phi_1(x,y)=\varphi_1(x,y)+xy, \qquad \Phi_2(x,y)=\varphi_2(x,y)+xy, \tag{1}$$

где $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ – функции кручения в областях S_1 и S_2 соответственно, причем они также являются гармоническими функциями в соответствующих областях. Для касательных напряжений в этой задаче имеем следующие формулы:

$$X_z=\tau\mu_i\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}-y\right),\ Y_z=\tau\mu_i\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}+x\right),\ \ (i=1,2) \tag{2}$$

где τ постоянная – степень закручивания.

Теперь запишем разрешающее уравнение и соответствующие граничные условия этой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}=0 \ \ (-a_1<x<0,\ -b<y<b); \\ \dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}=0 \ \ (0<x<a_2,\ -b<y<b+c); \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y}=0 \ (y=\pm b,\ -a_1\le x\le 0);\ \ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}=2y \ \ (x=-a_1,\ -b\le y\le b); \\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}=0 \ (y=-b,\ 0\le x\le a_2);\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}=0 \ \ (y=b+c,\ 0\le x\le a_2); \\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}=2y \ (x=a_2,\ -b\le y\le b+c);\ \ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}=2y \ (x=0,\ b\le y\le b+c); \\ \Phi_1=\Phi_2 \ (x=0,\ -b\le y\le b); \\ \mu_1\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x}-\mu_2\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}=2(\mu_1-\mu_2)y \ \ (x=0,-b\le y\le b). \end{cases} \tag{4}$$

После нахождения решения системы (3)-(4) определяются основные характеристики обсуждаемой задачи: функции кручения, касательные напряжения по формулам (1) и (2) соответственно и жесткость при кручении D по формуле [1]

$$D=\mu_1\iint\limits_{s_1}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)dxdy+\mu_2\iint\limits_{s_2}\left(x^2+y^2+x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dxdy\ . \tag{5}$$

2. Для решения определяющих уравнений (3)-(4) сначала перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$\xi=\frac{x}{a_2},\ \eta=\frac{y}{a_2},\ c_1=\frac{a_1}{a_2},\ \ c_2=\frac{b}{a_2},\ \ \Delta=\frac{c}{a_2},\ \ \mu=\frac{\mu_1}{\mu_2};\ \bar{\Phi}_1(\xi,\eta)=\frac{\Phi_1(a_2\xi,a_2\eta)}{a_2^2},$$

$$\bar{\Phi}_2(\xi,\eta)=\frac{\Phi_2(a_2\xi,a_2\eta)}{a_2^2},\ \bar{\varphi}_1(\xi,\eta)=\frac{\varphi_1(a_2\xi,a_2\eta)}{a_2^2},\ \bar{\varphi}_2(\xi,\eta)=\frac{\varphi_2(a_2\xi,a_2\eta)}{a_2^2}.$$

Тогда система (3)-(4) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \Delta\bar{\Phi}_1=0 \ (-c_1<\xi<0,-c_2<\eta<c_2);\ \Delta\bar{\Phi}_2=0 \ \ (0<\xi<1,-c_2<\eta<c_2+\Delta); \\ \dfrac{\partial\bar{\Phi}_1}{\partial\eta}=0 \ (\eta=\pm c_2,\ -c_1\le\xi\le 0);\ \ \dfrac{\partial\bar{\Phi}_1}{\partial\xi}=2\eta \ \ (\xi=-c_1,\ -c_2\le y\le c_2); \\ \dfrac{\partial\bar{\Phi}_2}{\partial\eta}=0 \ (\eta=-c_2,\ 0\le\xi\le 1);\ \dfrac{\partial\bar{\Phi}_2}{\partial\eta}=0 \ \ (\eta=c_2+\Delta,\ 0\le\xi\le 1); \\ \dfrac{\partial\bar{\Phi}_2}{\partial x}=2\eta \ (\xi=1,\ -c_2\le\eta\le c_2+\Delta);\ \ \dfrac{\partial\bar{\Phi}_2}{\partial\xi}=2\eta \ \ (\xi=0,\ c_2\le\eta\le c_2+\Delta); \\ \bar{\Phi}_1=\bar{\Phi}_2 \ \ (\xi=0,\ -c_2\le\eta\le c_2);\ \dfrac{\partial\bar{\Phi}_1}{\partial\xi}-\mu\dfrac{\partial\bar{\Phi}_2}{\partial\xi}=2(1-\mu)y \ \ (\xi=0,-c_2\le\eta\le c_2). \end{cases} \tag{6}$$

Далее для решения системы (6) используем численно-аналитический метод, который описан ниже. В области S_1 возьмем аналитическое решение, построенное в [1], а именно: гармоническая функция $\bar{\Phi}_1(\xi,\eta)$ представляется в виде бесконечного ряда Фурье

$$\bar{\Phi}_1(\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\bar{A}_{2n+1}\,\mathrm{sh}(m\xi)+\bar{B}_{2n+1}\,\mathrm{ch}(m\xi)\right)\sin(m\eta),\quad \bar{A}_{2n+1}=a_2^{-2}A'_{n+1},\ \ \bar{B}_{2n+1}=a_2^{-2}B_{2n+1};$$

$$m=\frac{(2n-1)\pi}{2c_2},\ \ (-c_1\le\xi\le 0;\ -c_2\le\eta\le c_2).$$

Удовлетворяя граничным условиям на свободных гранях прямоугольника S_1, в конечном итоге после элементарных преобразований для функции $\bar{\Phi}_1(\xi,\eta)$ имеем

$$\bar{\Phi}_1(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k\,\frac{\mathrm{ch}[m(\xi+c_1)]}{\mathrm{ch}(mc_1)}\sin(m\eta)+\frac{32c_2^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}\frac{\mathrm{sh}(m\xi)}{\mathrm{ch}(mc_1)}\sin(m\eta);\tag{7}$$

$$m=\frac{(2k-1)\pi}{2c_2},\ \ (-c_1\le\xi\le 0;\ -c_2\le\eta\le c_2).$$

Здесь $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$– неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Из-за быстрой сходимости ряда (7) можно ограничиться первыми L членами этого ряда

$$\bar{\Phi}_1(\xi,\eta)\approx\sum_{k=1}^{L}X_k\,\frac{\mathrm{ch}[m(\xi+c_1)]}{\mathrm{ch}(mc_1)}\sin(m\eta)+\frac{32c_2^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}\frac{\mathrm{sh}(m\xi)}{\mathrm{ch}(mc_1)}\sin(m\eta);\tag{8}$$

$$m=\frac{(2k-1)\pi}{2c_2},\ \ (-c_1\le\xi\le 0;\ -c_2\le\eta\le c_2).$$

А для решения системы (6) в области S_2 применим известный численный метод конечных разностей или метод сеток [3,4]. Сначала в области S_2 рассмотрим равноудаленные узлы

$$\xi_j=jh\ \ (j=0,1,...,N_1);\quad \eta_i=-c_2+ih\ \ (i=0,1,...,N_2);$$

$$h=\frac{1}{N_1},\quad N_2=\frac{2c_2+\Delta}{h}.$$

здесь N_1 и N_2 – произвольные натуральные числа, причем дополнительно предполагается, что $2c_2+\Delta$ делится на h без остатка. Введем обозначения

$$u_{ij}=\bar{\Phi}_2(\xi_j,\eta_i)\quad (i=0,1,...,N_2;\ j=0,1,...,N_1)$$

Уравнение Лапласа $\Delta\bar{\Phi}_2=0$ из системы (6) аппроксимируется следующими разностными уравнениями:

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,J+1}+u_{i,j-1}-4u_{ij}=0\ \ (i=\overline{1,N_2-1};\ j=\overline{1,N_1-1}).\tag{9}$$

Теперь запишем граничные условия (6) на внутренних узловых точках границы области S_2:

$$\begin{cases} u_{0k}=u_{1k}, \qquad u_{N_2k}=u_{N_2-1,k} \qquad (k=\overline{1,N_1-1}); \\ u_{kN_1}=u_{k,N_1-1}+2h\eta_k\ \ (k=\overline{1,N_2-1});\ u_{k0}=u_{k1}-2h\eta_k\ \ (k=\overline{L+1,N_2-1}); \\ u_{k0}=\bar{\Phi}_1(0,\eta_k) \qquad (k=\overline{1,L}); \\ h\dfrac{\partial\bar{\Phi}_1(0,\eta_k)}{\partial\xi}-\mu(u_{k1}-u_{k0})=2(1-\mu)h\eta_k \qquad (k=\overline{1,L}); \qquad L=\left[\dfrac{2c_2}{h}\right]. \end{cases}\tag{10}$$

Отметим, что если $2c_2$ делится на h без остатка, тогда узел (ξ_0,η_L) не будет использован в (9) и (10). Далее из (9) и (10) относительно неизвестных u_{ij} $(i=\overline{1,N_2-1},\ j=\overline{1,N_1-1})$ и $\{X_k\}_{k=1}^{L}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений (ЛАУ), как в [4], общее число которых равно $(N_1-1)(N_2-1)+L$. После решения полученной ЛАУ находим неизвестные u_{ij} $(i=\overline{1,N_2-1},\ j=\overline{1,N_1-1})$ и $\{X_k\}_{k=1}^{L}$, а по формуле (8) – $\bar{\Phi}_1(\xi,\eta)$. Далее, с помощью формул (1), (2) и (5) находим функции кручения $\bar{\varphi}_1(\xi,\eta)$ и $\bar{\varphi}_2(\xi,\eta)$, касательные напряжения и жесткость кручения D соответственно.

Теперь рассмотрим частный случай, когда $\Delta = 0$ и $c_1 = 1, c_2 = 0.5$. При этом получаем известную задачу о кручении стержня с поперечным сечением в виде кусочно-однородного прямоугольника [1]. Решение этой задачи построим описанной выше методикой. В приведенной таблице представлены численные значения решения задачи в узловых точках контакта разнородных материалов, полученные по аналитическому ($\Phi'(\xi,\eta)$) и численному методами соответственно. Отметим, что полученные числовые результаты имеют точность порядка h^2, которая соответствует теоретической точности ошибки данной методики.

Значения $\bar{\Phi}_1(\xi,\eta)$, $\Phi'(\xi,\eta)$ при $\mu = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 0.5, N_1 = N_2 = 40$

Таблица

η	0.0121	0.0609	0.1097	0.1585	0.2317	0.3048	0.378	0.4512
$\Phi'(\xi,\eta)$	-0.0027	-0.0136	-0.0244	-0.0349	-0.0497	-0.063	-0.0739	-0.0813
$\bar{\Phi}(\xi,\eta)$	-0.0027	-0.014	-0.025	-0.0354	-0.05	-0.0648	-0.0761	-0.0841

В этой таблице числа первой строки соответствуют аналитическому решению, а числа второй строки – численному решению. Как видно, они мало отличаются друг от друга.

На рис. 2 и 3 показаны поверхности функций кручения для случаев однородного и кусочно-однородного прямоугольников соответственно.

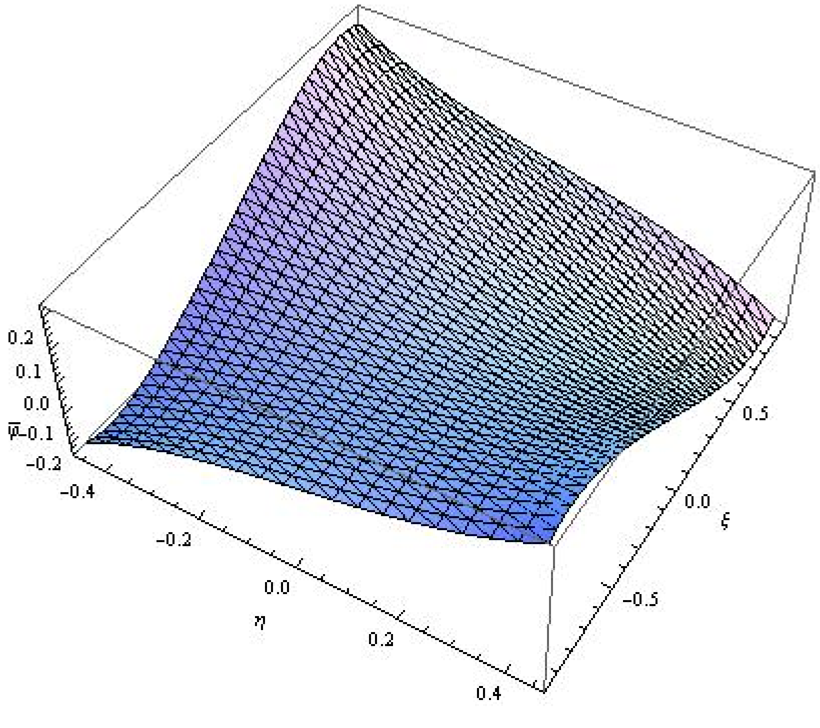


Рис. 2

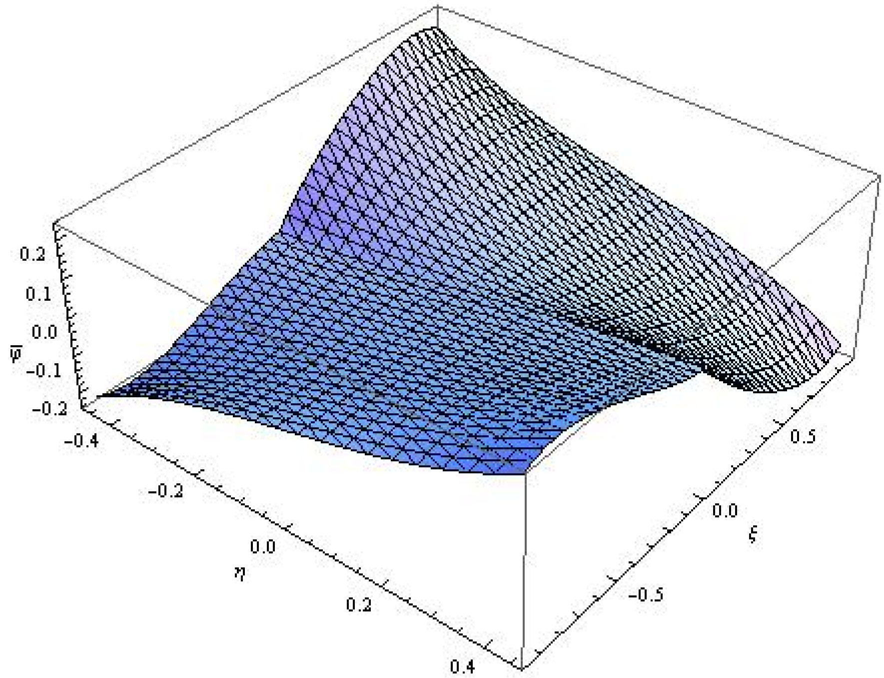


Рис. 3

Результаты исследования рассматриваемой задачи по остальным пунктам, указанным в аннотации, здесь не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
2. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Гостехиздат, 1952.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. М.: Физматгиз, 1959. 620 с.

Сведения об авторах:

Мкртчян Мгер Мушегович – науч. сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б, Институт механики НАН РА
Тел: (37410)-43-16-52, E-mail: mher_1982@mail.ru

Мкртчян Мушег Сережаевич – к. ф.-м. н., старший научный сотрудник,
Институт механики НАН Армении.
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б, Институт механики НАН РА
Тел: (37410)-43-16-52, (37410)-80-19-56, E-mail: muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

О ПОВЕРХНОСТИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Мусаелян С.Л.

Исследования настоящей работы проведены с целью определения вида функции распределения времени разрушения t раз для построения кривых длительной прочности, имеющих данную вероятность появления. Указанная функция получается в виде $t_{\text{раз}} = \left\{ \ln C[-\ln(1-P_i)]^{1/b} - \ln \sigma_0 \right\} / B$

где $1-P_i$ представляет собой вероятность выживания тела, σ_0 – начальное значение напряжения, B,C и b – постоянные. Построена поверхность длительной прочности для углепластика УКН-5000.

В работах [1, 3, 4] нами были рассмотрены вопросы прогнозирования усталостных характеристик материалов при осевом циклическом нагружении. В настоящей работе на основе разработанных методов рассматривается вопрос длительной прочности материалов, представляющий из себя довольно интересный вопрос, особенно для современных композиционных материалов. В работе [3] была получена формула для деформаций циклической ползучести в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_{\substack{\max\\ \min}} (1 - mBN\sigma_{\substack{\max\\ \min}})^{-\frac{1}{mn}} \tag{1}$$

где $\varepsilon_{\max}$ и $\varepsilon_{\min}$ – максимальные или минимальные деформации цикла, соответствующие максимальным $(\sigma_{\max})$ или минимальным $(\sigma_{\min})$ напряжениям цикла, n – коэффициент деформационного упрочнения материала, m и B – феноменологические постоянные, зависящие от частоты и вида нагружения. Постоянная B зависит и от рассматриваемого материала.

Как известно, время разрушения $t_{\text{раз}}$ при значении напряжения σ_0 представляется зависимостью вида

$$t_{\text{раз}} = A\sigma_0^{-\alpha} \tag{2}$$

где $\grave{A}$ и α – постоянные величины. Этой зависимостью можно построить осреднённую кривую длительной прочности, которая дает неполную информацию о свойствах материалов в условиях длительного нагружения.

Испытания по построению кривой длительной прочности показывают, что для данного значения напряжения σ_0 имеет место значительный разброс времени разрушения $t_{\text{раз}}$, что требует применения методов математической статистики и теории вероятностей. Исследования настоящей работы проведены с целью определения вида функции распределения времени разрушения $t_{\text{раз}}$ для построения кривых длительной прочности, имеющих данную вероятность появления (номограмма длительной прочности). С этой целью принимаем значение постоянной m выражения (1) равным нулю. Тогда предельным переходом выражение (1) принимает следующий вид:

$$\varepsilon = \lim_{m\to 0} \varepsilon_{\substack{\max\\ \min}} (1 - mBN\sigma_{\substack{\max\\ \min}})^{-\frac{1}{mn}} = \varepsilon_{\substack{\max\\ \min}} \exp\frac{BN}{n} \tag{3}$$

Для вывода критериев разрушения в работах [1,2] было принято, что в материале имеются начальные дефекты в виде трещин, пор, пустот и т.д. При нагружении трещины распространяются, происходит уменьшение действительной площади поперечного сечения тела, что приводит к увеличению истинных напряжений в сечении тела. По достижении напряжения σ значения предела прочности материала $\sigma_{в}$, происходит разрушение. При этом имеем $t = t_{\text{раз}}$. Тогда (3) можно писать в виде

$$\sigma_b = \sigma_0 \exp B\, t_{ðàç} \tag{4}$$

Для функции распределения предела прочности материала раньше нами было принято двухпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко, имеющее следующий вид:

$$F(\sigma_{â}) = P[\sigma_{â} \le \sigma_0] = \begin{cases} 1 - \exp[-\dfrac{\sigma_0}{C}]^b & \text{ïðè } \sigma_0 \ > 0 \\ 0 & \text{ïðè } \sigma_{_0} \ = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

На рис.1 представлены функции распределения для трех типов испытанных образцов из углепластика

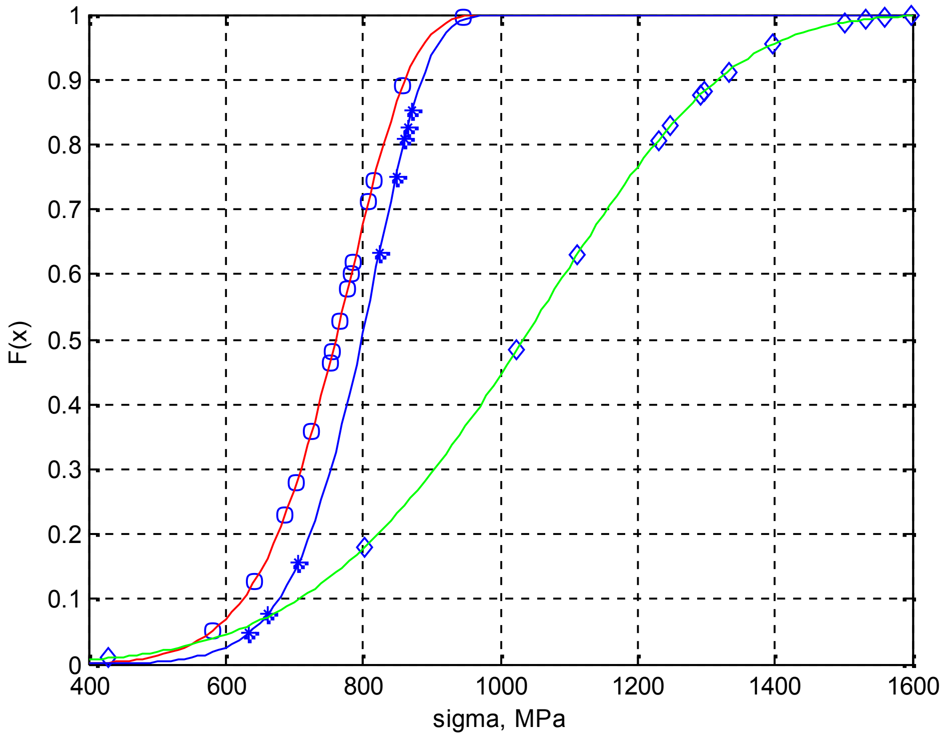


Рис.1

Функция распределения трех типов образцов из углепластикаУКН-5000

Функция распределения времени разрушения t = $t_{раз}$ представляет из себя вероятность появления значения $t_{раз} \le t$, где t – заранее заданное значение.

Из выражения (6) имеем

$$F(t_{раз}) = P[t_{раз} \le \quad t] = \begin{cases} P[\dfrac{1}{B}\ln\dfrac{\sigma_в}{\sigma_0} \le t] = P[\ln\dfrac{\sigma_в}{\sigma_0} \le Bt] = P[\dfrac{\sigma_в}{\sigma_0} \le å^{Bt}] \\ P[\sigma_в \le \sigma_0 e^{Bt}] \end{cases} = \qquad (6)$$

$$= \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma_0 e^{B\,t}}{C}\right)^b\right] & \text{при } t > 0 \\ 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma_0}{C}\right)^b\right] & \text{при } t = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Как видно из выражения (7), имеем усеченную функцию распределения времени разрушения $t_{раз}$, что и следовало ожидать. Нагружение тела напряжением σ_0 уже имеет определенную вероятность разрушения

$$F(\sigma_в = \sigma_0) = 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{\sigma_0}{C}\right)^b\right] \qquad (8)$$

Считая значения функции распределения $F(t_{\text{раз}})$ накопленной вероятностью, выражение (8) можно привести к удобному для практического использования виду:

$$t_{\text{раз}} = \frac{1}{B}\left\{\ln C[-\ln(1-P_i)]^{\frac{1}{b}} - \ln \sigma_0\right. \tag{9}$$

или $t_{\text{раз}} = A - D\ln\sigma_0$ (10)

Таким образом, в полулогарифмической системе координат длительная прочность меняется по линейному закону. Выражение $1-P_i$ представляет собой вероятность ‘’выживания’’ материала. С помощью выражения (9) можно построить поверхность длительной прочности в координатной системе $\sigma_0, t_{\text{раз}}, P_i$.

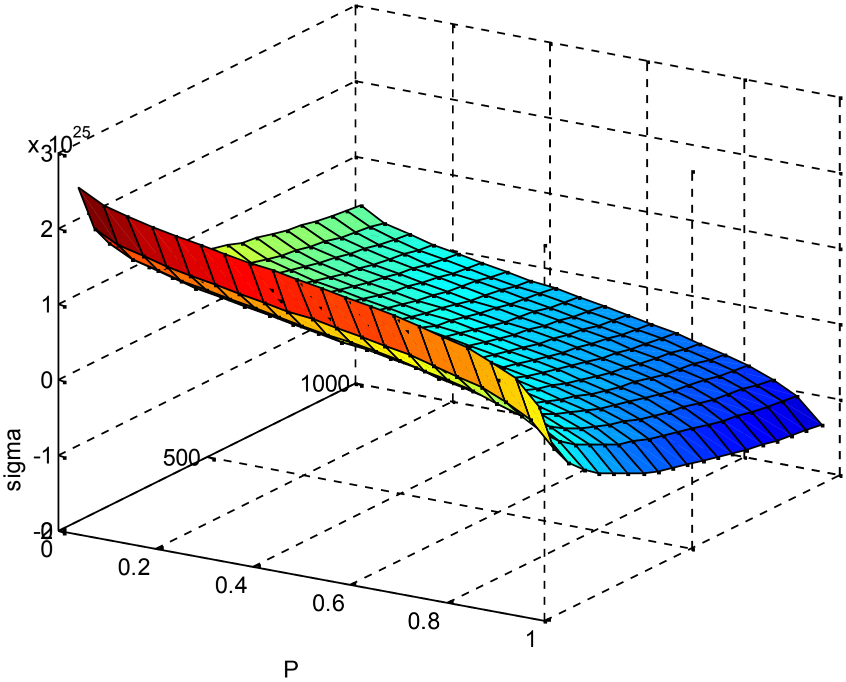


Рис.2 Поверхность длительной прочности углепластика УКН-5000

ЛИТЕРАТУРА

1. Дургарьян С.М., Мусаелян С.Л. Деформации ползучести материалов при осевом низкочастотном циклическом нагружении. Проблемы проектирования конструкций. //Сб. кратких сообщений 1-го Уральского семинара. Миасс, 1988, с.130-134.
2. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455с.
3. Мусаелян С.Л. О критериях разрушения при циклическом нагружении. Механика деформируемого твердого тела. //Сб. статей. Изд. АН Арм. ССР. 1986. С. 139-143.
4. Усталость и саморазогрев углепластика при пульсирующем осевом циклическом нагружении. // Сб. научных докладов (на арм.). Ереван: 1999. С. 156-159.
5. Саркисян Н.Е. Об особенностях разогрева стеклопластика СВАМ при испытаниях на малоцикловую усталость.// Механика полимеров. 1975. N3. С. 571.

<u>Сведения об авторе:</u>
Мусаелян Сурен Левонович – Институт механики НАН РА, Ереван, 16 квартал, д. 14, кв.35.
Тел. (374 94)810370, E-mail – MusSur@yahoo.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ В РАСЧЕТНОЙ ПРАКТИКЕ

Никитенко А. Ф.

Обоснован выбор кинетической теории ползучести с целью использования ее в расчетной практике. В частности, она эффективно применяется для расчета НДС элементов конструкций, вычисления верхней и нижней оценок времени начала их разрушения и прогнозирования остаточного времени службы тех элементов конструкций и изделия в целом, которые отработали свой нормативный срок эксплуатации.

Анализ результатов расчета НДС элементов конструкций позволил предложить экспериментальный экспресс-метод вычисления времени начала их разрушения и разработать методику расчета по предельному равновесию равнопрочных тел.

Одну из упрощенных математических моделей кинетической теории ползучести Ю.Н. Работнова можно представить в виде:

$$\eta_{ij} = \frac{W}{\sigma_e}\frac{\partial\sigma_e}{\partial\sigma_{ij}}, \quad W = \frac{B_1\sigma_e^{n+1}}{\varphi_1(\omega)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_e^{g+1}}{\varphi(\omega)}, \quad \omega\,(x_k, 0) = 0, \quad \omega\,(x_k^*, t_*) = 1. \tag{2}$$

Обозначения в (1), (2) общепринятые, они подробно описаны в [1, 2].

Добавляя к (1), (2) уравнения равновесия, соотношения Коши, уравнения неразрывности скоростей деформаций ползучести и соответствующие граничные условия, получаем основание утверждать, что кинетическая теория ползучести объединила существующие ранее две самостоятельные задачи – задачу расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тела (элемента конструкции) и задачу вычисления времени $t = t_*$ начала его разрушения – в одну [1], которую нетрудно решить любым известным методом [1].

В частности, установлено [3], что решение этой задачи можно свести к ее решению в предположении установившейся ползучести материала; чтобы получить истинное решение, необходимо известное стационарное решение установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени, для которых получена соответствующая система интегро-дифференциальных уравнений.

В соответствии со сказанным имеем [3]:

$$\sigma_{ij}(x_k, t) = s_{ij}^0 f(x_k, t) + C_1(x_k, t)\delta_{ij} = \sigma_{ij}^0 f(x_k, t) + C(x_k, t)\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$v_i(x_k, t) = v_i^0 F(t). \tag{4}$$

Нолик вверху при соответствующей функции означает, что она зависит только от координат точек тела; σ_{ij}^0, v_i^0 – известное решение задачи в предположении установившейся ползучести материала; $\sigma_0^0 = \sigma_{ij}^0\delta_{ij}/3$, $s_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 - \sigma_0^0\delta_{ij}$, $C = C_1 - \sigma_0^0 f(x_k, t)$.

Гидростатическая составляющая $C(x_k, t)$ удовлетворяет нормальной системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial C}{\partial x_j}\delta_{ij} = -\sigma_{ij}^0\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{5}$$

с граничным условием на части S_T поверхности тела

$$C = (1 - f)T_\nu \text{ на } S_T, \tag{6}$$

T_ν – проекция вектора внешней нагрузки на направление нормали к поверхности S_T тела в соответствующей точке. Вопросы, связанные с существованием и единственностью решения системы уравнений (5) с граничными условиями (6), здесь не обсуждаем. И тем не менее, отметим, что в случае невыполнения условия интегрируемости системы (5), гидростатическую составляющую определяем из условия минимизации невязки в уравнениях равновесия в каждой точке тела. Нетрудно показать, что только та гидростатическая составляющая будет обеспечивать минимум невязки в соответствующих уравнениях, которая является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Обоснован выбор функции $f(x_k,t)$. В частности, $f(x_k,t)=\left[\varphi_1(\omega)\right]^{1/n}\Big/X(t)$, где $X(t)$ – пока произвольная функция времени. В дальнейшем в (1), (2) положено $\varphi_1(\omega)=(1-\omega)^{m_1}$, $\varphi_2(\omega)=(1-\omega)^m$, $0\le m_1\le m$ и для удобства принято $\mu(x_k,t)=1-\omega(x_k,t)$. Тогда $\varphi_1=\left[\mu(x_k,t)\right]^{m_1}$, $\varphi_2=\left[\mu(x_k,t)\right]^{m}$. Функции $\mu(x_k,t)$, $X(t)$ есть решение следующей системы уравнений:

$$\int_1^{\mu}\Psi(z)dz=-\left[(m+1)\,t^0\right]^{-1}\int_0^t\left[X(\tau)\right]^{-(g+1)}d\tau, \qquad (7)$$

$$\int_V\left[\varphi_1(\mu)\right]^{1/n}W^0dV=X(t)\int_V W^0dV,\ \ W^0=\sigma_{ij}^0\eta_{ij}^0. \qquad (8)$$

$\Psi(z)=z^k$, $k=\left[mn-m_1(g+1)\right]\Big/n$; $t^0(x_k)=\left[(m+1)B(\sigma_e^0)^{g+1}\right]^{-1}$; $\mu(x_k,0)=1$, $\mu(x_k^*,t_*)=0$.

В случае пренебрежения скоростями упругих деформаций будет

$$F(t)=\left[X(t)\right]^{-n},\ \ \eta_{ij}^0=(\partial v_i^0\big/\partial x_j+\partial v_j^0\big/\partial x_i)\Big/2. \qquad (9)$$

В случае, если $m_1=0$ ($\varphi_1(\omega)=1$ в (1)), то система (7), (8) имеет очевидное решение, с использованием которого из (3), (5) и (4) (или же (9)) следует: $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0$, $\eta_{ij}=\eta_{ij}^0$, $t_*=t_*^0$, что совпадает с известным решением Л.М. Качанова ($t_*^0=t^0(x_k^*)$, x_k^* – координаты точки, в которой $B(\sigma_e^0)^{g+1}$ достигает наибольшего значения).

Если $m_1\ne 0$, то интегрируя (7) и подставляя результат в (8), получаем:

$$\int_V(1-\frac{\overline{\nu}}{t^0}\int_0^t X^{-(g+1)}d\tau)^{\overline{\beta}}W^0dV=X(t)\int_V W^0dV,$$
$$\overline{\beta}=\frac{m_1}{n+mn-m_1(g+1)},\quad \overline{\nu}=\frac{n+mn-m_1(g+1)}{n(m+1)}. \qquad (10)$$

В случае $\overline{\beta}=1$ уравнение (10) имеет решение

$$X(t)=(1-t\big/\overline{t}_0)^{1/(g+2)}, \qquad (11)$$

где $\overline{t}_0$ – результат использования теоремы о среднем

$$\int_V(W^0\big/t^0)dV=(1\big/\overline{t}^0)\int_V W^0dV,\ \ \overline{t}^0=t^0(\overline{x}_k),$$

$\overline{x}_k$ – координаты «средней» по объему точки. Из (7) с использованием (11) следует

$$\mu^{m_1/n}=1-\frac{\overline{t}^0}{t^0}\left[1-\left(1-\frac{t}{\overline{t}^0}\right)^{1/(g+2)}\right], \qquad (12)$$

из которого при условии $\mu(x_k^*,t_*)=0$ получаем

$$\frac{t_*}{t_*^0}=\frac{1-(1-\lambda)^{g+2}}{\lambda},\ \ \lambda=\frac{t_*^0}{\overline{t}^0}.$$

Из (12) с учетом (11) следует, что $\left[\mu\left(\overline{x}_k,t\right)\right]^{m_1/n}=X(t)$ и поэтому $f(\overline{x}_k,t)=1$. С использованием этого из (3) получаем, что $\sigma_i(\overline{x}_k,t)=\sigma_i^0(\overline{x}_k)$, т.е. в любой момент времени эпюра интенсивности напряжений σ_i пересекается с аналогичной эпюрой σ_i^0 в предположении установившейся ползучести материала в точке с координатами $\overline{x}_k$. Это свидетельствует о том, что напряженное состояние в теле, перераспределяясь во времени, в «средней» по объему точке остается стационарным. Данный результат имеет непосредственное значение для расчетной практики. В частности, легко показать [3], что $t_*\approx\overline{t}_0$, т.е. время начала разрушения тела вычисляется через известное (установившееся) напряженное состояние в «средней» точке и определить его можно, проводя эксперимент на длительную прочность при одноосном напряженном состоянии, равном σ_i^0.

Если $\bar{\beta} \neq 1$, то, решая (10) любым известным численным методом, находим $X(t)$, из (7) – $\mu^{m_1/n}$, а из (5) – $C(x_k, t)$ и, тем самым, определяем из (3), (4) НДС тела.

Легко получить оценки решения системы уравнений (7), (8) и, тем самым, получить нижнюю и верхнюю оценки времени начала разрушения тела [4]. В частности, если $\bar{\beta} > 1$, то нижняя оценка есть

$$t_* \geq \bar{t}^0 \geq \left[1-(1-\lambda)^{1/\bar{\nu}}\right]\bar{t}^0 \geq t_*^0 \geq t_{**}, \quad \lambda = t_*^0 / \bar{t}^0, \tag{13}$$

а верхняя будет

$$t_* \leq \frac{\left[1-(1-\lambda)^{1/\bar{\nu}}\right]}{\bar{\nu}(g+2)}\bar{t}^0 \leq \frac{\bar{t}^0}{\bar{\nu}(g+2)}. \tag{14}$$

В случае $\bar{\beta} < 1$ оценки (13), (14) поменяются местами.

Аналогично можно получить верхнюю и нижнюю оценки поля деформаций ползучести.
В настоящее время одной из актуальных проблем является проблема прогнозирования остаточного времени службы элементов конструкций и изделия в целом, отработавших свой нормативный срок эксплуатации. Предлагается этот срок эксплуатации элементов конструкций отождествить с временем t_* начала разрушения материала, а его израсходованный ресурс будем оценивать величиной накопленных повреждений в объеме тела на момент времени $t = t_*$, т.е. $R_u = \int \omega(x_k, t_*) dV$ [5]. Остаточный ресурс материала этого тела будет $R_o = \int \left[1-\omega(x_k, t_*)\right] dV$. Очевидно, что прогнозируемый срок службы изделия можно отождествить с продолжительностью движения фронта разрушения [5]. Вводя понятия относительного израсходованного ресурса $\tilde{R}_u = R_u / V$ и относительного остаточного ресурса $\tilde{R}_o = R_o / V$, получаем закон линейного суммирования относительных ресурсов

$$\tilde{R}_u + \tilde{R}_o = 1, \tag{15}$$

который целесообразно рекомендовать к использованию в расчетной практике наряду с экспериментально установленными законами линейного суммирования относительных деформаций (закон Либермана), относительных долговечностей (закон Робинсона) и относительных повреждений в энергетической трактовке [2]. Кстати, перечисленные экспериментально установленные законы легко получить из системы уравнений (1), (2).

Из (15), в частности, следует, что тело будет тем оптимальнее, чем меньше продолжительность остаточного срока службы, и оно будет равнопрочным, если этот срок будет равен нулю, что равносильно одновременному разрушению тела во всех его точках в момент $t = t_{**}$, т.е. равносильно исчерпанию его несущей способности.

В работе [6] сформулирована методика расчета по предельному равновесию равнопрочных тел, которая сводится:

– к расчету НДС тела в предположении установившейся ползучести его материала;
– к требованию, чтобы полученное в результате такого расчета стационарное поле напряжений σ_{ij}^0 удовлетворяло в каждой точке тела условию перехода материала в предельное состояние. Это условие есть [6]:

$$U_0 \sigma_e^0 = \sigma_{\partial.n.}, \quad U_0 = \left[B(\theta)/B(\theta_0)\right]^{1/(g+1)}, \tag{16}$$

где $\sigma_{\partial.n.}$ – предел длительной прочности материала, определенный на базе $t = t_{**}$ при некоторой базовой температуре $\theta = \theta_0$; σ_e^0 – эквивалентное напряжение (однородная относительно напряжений функция первой степени, см. (1), (2)), аналитическая аппроксимация которого представляет собой соответствующий критерий длительной прочности.

Если тело равномерно нагрето, то $U_0 = 1$, и из (16) следует

$$\sigma_e^0 = \sigma_{\partial.n.}. \tag{17}$$

Условия (16) или же (17) позволяют вычислить предельные внешние температурно-силовые воздействия, обеспечивающие равнопрочность тела вплоть до исчерпания его несущей способности.

На практике встречаются задачи, когда при известных внешних температурно-силовых воздействиях требуется рассчитать геометрию тела такую, чтобы оно было равнопрочным, или же приблизить его как можно лучше к равнопрочному. Решение этих задач связано с минимизацией функционала $R_o = \int\left[1-\omega(x_k, t_*)\right]dV$ при соблюдении условий (16) или же (17) [7].

В заключение отметим, что представленный критический анализ уже имеющихся результатов свидетельствует, что кинетическую теорию ползучести целесообразно более эффективно использовать в расчетной практике.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-08-00316).

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. Никитенко А.Ф. Позучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: НГАСУ, 1997.
3. Никитенко А.Ф., Заев В.А. Расчет напряженно- деформированного состояния и времени начала разрушения элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Пробл. прочности. 1983. № 1. С.56–61.
4. Никитенко А.Ф. Нижняя и верхняя оценки времени начала разрушения элементов конструкций // Прикл. механика и техн. физика. 2001. Т. 42, № 1. С. 164–169.
5. Никитенко А.Ф., Любашевская И.В. Живучесть элементов конструкций в процессе ползучести их материала // Тр. III Всеросс. конференции «Безопасность и живучесть технических систем». Красноярск: 2009. С.49 –51.
6. Никитенко А.Ф. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 2. Предельное состояние неравномерно нагретых элементов конструкций // Пробл. прочности. 2005. № 6. С.5–14.
7. Заев В.А., Никитенко А.Ф. Расчет и проектирование оптимальных по долговечности элементов конструкций // Прикл. механика и техн. физика. 1987. № 3. С. 165–171.

Сведения об авторе:

Никитенко Анатолий Федорович – д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, пр. Ак. М.А. Лаврентьева, 15
Тел.: (383) 333-27-50; E-mail: naf@hydro.nsc.ru

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ ПЕРЕСЕЧЕННЫХ ПОД УГЛОМ ПОЛОС, НАХОДЯЩИХСЯ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

Оганесян Э. К.

Рассматривается в поле сил тяжести тело, ограниченное двумя полосами и находящееся в положении, когда линия пересечения этих полос перпендикулярна к направлению вектора собственного веса. Задача решена методом конечных элементов (МКЭ) [1].

Предполагается, что тело изотропно и однородно, а также что верхняя полоса полностъю защемлена. Ширина двух полос рассматривалась в двух вариантах, когда они равны и когда разные. Границы полос соединены плоскостъю. Предполагается, что конструкция находится в плоско-деформированном состоянии, которое позволяет рассматриватъ вместо всего тела его сечение плоскостъю, перпендикулярной к линии пересечений полос. Это сечение имеет форму треуголъника, причем когда ширина полос одинакова, этот треуголъник является равнобедренным. Угол вершины равнобедренного треуголъника рассматривался в различных значениях $\varphi = 90,\ \varphi = 56,\ \varphi = 50$. Такие же значения имеет угол вершины треуголъника, когда ширины полос разные.

В соответствии с процедурой МКЭ перемещения в любой точке элемента “е ” задаются вектором

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \tag{1}$$

где $[N] = [N_{i,} N_{j,} N_m]$

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ . \\ \delta_j \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix}$$

Функции $N_i, N_j,\ ...$ должны обладатъ свойствами

$$N_i(r_i, z_i) = 1 \text{ и т. д.} \tag{2}$$

$$N_j(r_i, z_i) = 0 \text{ и т. д.}$$

и называются функциями формы.

Если известны перемещения, то деформации записываются в виде

$$\{\varepsilon\}^e = [\mathrm{B}]\{\delta\}^e \tag{3}$$

а напряжения – в виде

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e \tag{4}$$

$$D = K\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

где $K = E \setminus (1+\nu)(1-2\nu)$

Узловые силы, статически эквивалентные распределенным по элементу нагрузкам, представляются так:

$$\{F\}^e = \{F_{i,}F_{j,}F_m\} = [M]^e + \{F\}_p^e \qquad \textbf{(6)}$$

Здесь $$[M]^e = \iint [\mathrm{B}]^T [D][\mathrm{B}]dS \qquad (7)$$

является матрицей жесткости элемента, а

$$\{F\}_p^e = -\iint [\mathrm{N}^T]\{\mathrm{P}\}\,dS \qquad (8)$$

есть вектор узловых сил, обусловленных распределенными нагрузками.

Во всех случаях треуголъник был разбит на 64 треуголъных элемента с шестъю степенями свободы и с 45 узловыми точками. Линии разбиения взяты параллелъно сторонам исходного треуголъника. Локалъные координаты взяты параллелъно линиям глобалъных координат, а начало координатной системы взято в вершинах элементов.

Совершив переход от локальной (местной) системы координат к общей (глобальной) системе и распространяя все рассуждения относительно элемента на всю область [1], совокупностъ уравнений равновесия можем представитъ в форме

$$[M]\{\delta\} + \{F\}_p = 0$$

или в форме

$$[M]\{\delta\} = \{\mathrm{P}\} \qquad \textbf{(9)}$$

В произвольной точке элемента смещения аппроксимируем квадратной функцией от координат

$$Ur = a1 + a2x + a$$
$$Uz = a4 + a5x + a6y$$

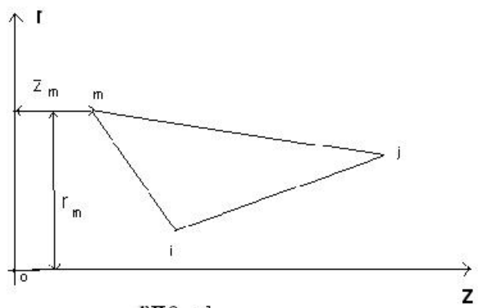


рис. - 1

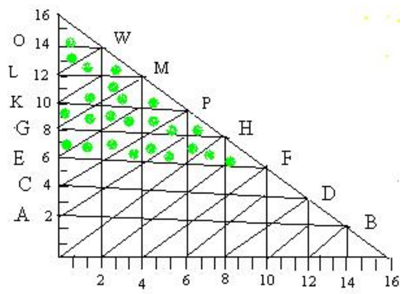


рис. - 2

В соответствии с процедурой метода конечных элементов, функции формы взяты в виде

$$N_K = (a_k + b_k x + c_k y)/2s_k \quad (k = I, j, m),$$

здесъ s_k – площадъ треугольника.

Основное внимание уделено вопросу изучения изменения максималъного и минималъного значения напряжения в каждом элементе. Немаловажное значение имело и изучение изменения знака этих напряжений , т.е. в каких элементах конструкции оно положителъно, и в каких – отрицателъно.

На рис. 2 окрашены те элементы, где абсциссы точек имеют положителъные значения и не окрашены те элементы, где абсциссы точек отрицателъны.

Рис. 3 соответствует случаю, когда ширины полос одинаковы и угол, образованный между ними, равен 90 градусов.

На графиках 3–4 показаны изменения перемещения точек вершин элементов для всей конструкции, соответственно на 8-ми горизонталъных линиях, параллельных оси x: линии AB, СД, EF, GH, KP, LM и OW для разных значений угла $\varphi = 90, 56$. Из графика видно, что, когда от вершины треуголъника двигаемся к основанию, графики перемещения соответствующих паралелных уровней из 4-ого квадранта постепенно переходят в 3-ий квадрант. Это явление, оказывается, зависит от угла пересечения полос: при уменъшении угла количество отделъных графиков в 4-ом квадранте уменъшается и, как видно из рис.4, при угле, равном 56 градусам, все ветви уже находятся в 3-ом квадранте. Во всех задачах материал взят один и тот же. Модулъ Юнга материала равен 960000кг\см^2, модулъ Пуассона – 0.2, а плотностъ – 0.005кг\см^3

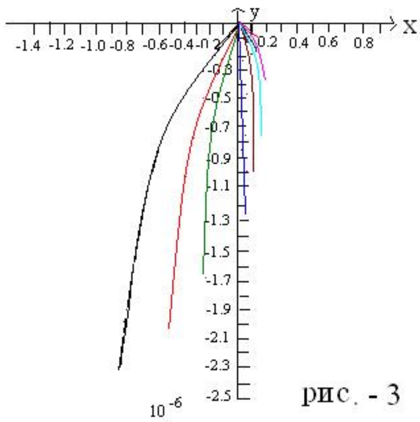


рис. - 3

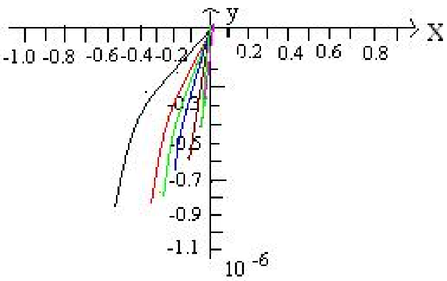


рис. - 4

На рис. 5-6 представлены графики изменения нормалъного напряжения σ_γ и касателъного напряжения τ_{xy} на сечении линии AB исходного треуголъника для разных значений угла пересечения полос: рис. 5 соответствует случаю, когда $\varphi = 90$ градусов, а рис. 6 – случаю $\varphi = 50$ градусов.

Из приведенных графиков видно, что естъ места, где напряжения в конструкции положителъны и естъ места, где – отрицателъны. Компоненты точек, находящихся на линии параллелъных оси x, при передвижении с защемленной стороны к свободной стороне, увеличиваются по абсолютной величине. Компоненты точек, находящихся на линии параллелъных защемленной стороне треуголъника, при передвижении с верхней вершины треуголъника к основанию (т.е. к оси x), также по абсолютной величине увеличиваются.

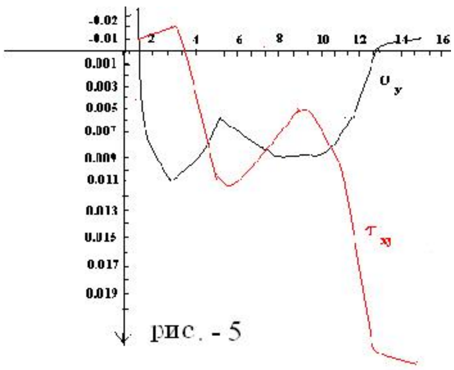


рис. - 5

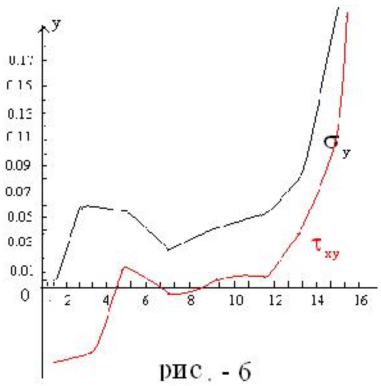


рис. - 6

Подсчитаны максималъные и минималъные значения полного напряжения для всей конструкции, которые равны для случая $\varphi = 90^o$ – $\max = 1.8255$, $\min = 0.0003898$, для $\varphi = 56^o$ – $\max = 10.5528$, $\min = 00.0011991$, а углы наклона от вертикалъной оси, подсчитывая по часовой стрелке, равны соответственно $\theta = 39.69^0$ и $\theta = 46.42^0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
2. Karp S. N., Karel F. C. J. The elastic field behavior in the neighborhood of crack of arbitrary angles.// Comm. Pure and Appl. Math., 1962, v. 15, №4.

Сведения об авторе:

Оганесян Эмин Казарович,
к.ф.-м.н., научный сотр. Института механики НАН Армении,
Адрес: Ереван, 0019, Маршала Баграмяна 24Б. Тел: 26-46-99

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНЫМ БЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ СТРИНГЕРОМ

Оганисян Г. В.

Рассматривается контактная задача для упругой составной бесконечной пластины, усиленной бесконечным неоднородным (кусочно-однородным) упругим стрингером, который параллелен линии разнородности составной пластины. Задача сформулирована в виде сингулярного интегрального уравнения с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей. При помощи аппарата обобщенного интегрального преобразования Фурье, решение этого интегрального уравнения приводится к решению функционального уравнения относительно трансформантов Фурье искомой функции. Далее решение этого функционального уравнения приводится к решению Фредгольмовского интергального уравнения второго рода.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины h, состоящей из двух, сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы, полубесконечных пластин с различными упругими свойствами материалов, на своей верхней поверхности линии $y=c\left(c>0\right)$, усилена неоднородным (кусочно-однородным) бесконечным упругим стрингером с достаточно малым постоянным прямоугольным поперечным сечением.

Предполагается, что неоднородный (кусочно-однородный) бесконечный упругий стрингер жестко сцеплен (приклеен) к верхней полубесконечной пластине, параллелен линии разнородности указанных полубесконечных пластин, и имеет отличные от нее упругие характеристики .

Задача заключается в определении закона распределения интенсивности тангенциальных кон-тактных усилий, действующих вдоль линии крепления упругого неоднородного (кусочно-однородного) бесконечного стрингера с упругой бесконечной составной пластиной, когда контактирующая пара (стрингер-пластина) деформируется сосредоточенными силами $P\delta\left(x-b\right)\delta\left(y-c\right)\ \left(b>0\right)$ и $\mathrm{Q}\delta\left(x+a\right)\delta\left(y-c\right)\ \left(a>0\right)$, которые действуют вдоль стрингера и имеют одинаковые направления.

В исследуемой задаче относительно стрингера принимается во внимание модель контакта по линии [1;2], т.е предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, а для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины предполагается, что во время деформации она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, благодаря чему она деформируется как плоскость. Здесь модуль упругости стрингера дается по формуле:

$$E_s\left(x\right)=\theta\left(x\right)E_s^{(1)}+\theta\left(-x\right)E_s^{(2)} \qquad \left(-\infty<x<\infty\right), \tag{1.1}$$

где ‾ $\left(u\right)$-единичная ступенчатая функция Хевисайда, а $E_s^{(n)}=const\left(n=1;2\right)$.

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений поставленной задачи, заметим, что в горизонтальном направлении стрингер растягивается или сжимается, находясь в одноосном напряженном состоянии. Тогда дифференциальные уравнения равновесия отдельных частей кусочно-однородного бесконечного стрингера запишутся в виде [2;3]:

$$\frac{d^2u_S^{(1)}(x)}{dx^2}=\frac{\tau^{(1)}\left(x\right)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}-\frac{P\delta\left(x-b\right)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}} \qquad \left(0<x<\infty\right), \tag{1.2}$$

$$\frac{d^2u_S^{(2)}(x)}{dx^2}=\frac{\tau^{(2)}\left(x\right)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}-\frac{Q\delta\left(x+a\right)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}} \qquad \left(-\infty<x<0\right), \tag{1.3}$$

при условии

$$\left.\frac{du_s^{(1)}\left(x\right)}{dx}\right|_{x=+0}-\left.\frac{du_s^{(2)}\left(x\right)}{dx}\right|_{x=-0}=\frac{X_0}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}-\frac{X_0}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}\ . \tag{1.4}$$

Здесь $u_S^{(1)}(x)$ и $u_S^{(2)}(x)$ - горизонтальные перемещения точек стрингера на линии $y=c$ при $0<x<\infty$ и $-\infty<x<0$; $\tau^{(1)}(x)=d_s^{(1)}\tau^{(1)}(x;c)$, где $\tau^{(1)}(x;c)-$тангенциальные контактные напряжения на линии $y=c$ при $0<x<\infty$, $d_s^{(1)}-$ширина этой части стрингера; $\tau^{(2)}(x)=d_s^{(2)}\tau^{(2)}(x;c)$, где $\tau^{(2)}(x;c)-$тангенциальные контактные напряжения на линии $y=c$ при $-\infty<x<0,$ $d_s^{(2)}$- ширина этой части стрингера ; $E_S^{(1)}$ и $E_S^{(2)}$- модули упругости ; а $F_S^{(1)}=d_s^{(1)}h_s^{(1)}$ и $F_S^{(2)}=d_s^{(2)}h_s^{(2)}-$ площади поперечных сечений стрингеров при $0<x<\infty$ и $-\infty<x<0$ соответсвенно ; а $h_s^{(1)}$ и $h_s^{(2)}-$ их высоты ; P и $Q-$сосредоточенные силы приложенные на стрингеры в точках $(b;c)$ и $(-a;c)$ соответсвенно ; ¢ $(u)-$известная дельта-функция Дирака ; X_0-пока неизвестная продольная сила действующая в сечении стрингера $x=0$.

Чтобы написать дифференциальные уравнения (1.2) и (1.3) с условием (1.4) одним уравнением для всех x $(-\infty<x<\infty)$, введем функцию [4;5]:

$$\mathrm{U_s}(x)\triangleq\theta(x)\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx}+\theta(-x)\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx}\qquad(-\infty<x<\infty)\,. \tag{1.5}$$

Применив к (1.5) операцию дифференцирования в смысле теории обобщенных функций, уравнения (1.2) и (1.3) с учетом условии (1.4), можно заменить одним уравнением для всех x $(-\infty<x<\infty)$ следующего вида:

$$\frac{d\mathrm{U_s}(x)}{dx}=\frac{\tau_+^{(1)}(x)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}+\frac{\tau_-^{(2)}(x)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}-\frac{P\delta(x-b)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}-\frac{Q\delta(x+a)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}+\frac{X_0\delta(x)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}-\frac{X_0\delta(x)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}\,, \tag{1.6}$$

$$(-\infty<x<\infty).$$

Нетрудно заметить, что решение дифференциального уравнения (1.6) можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{U_S}(x)=-\frac{1}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s-x)\tau_+^{(1)}(s)\mathrm{ds}-\frac{1}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s-x)\tau_-^{(2)}(s)\mathrm{ds}+$$

$$+\frac{P\theta(b-x)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}+\frac{Q\theta(-a-x)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}-\frac{X_0\theta(-x)}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}+\frac{X_0\theta(-x)}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}\,. \tag{1.7}$$

Отметим, что в формулах (1.6) и (1.7):

$$\tau_+^{(1)}(x)=\theta(x)\tau^{(1)}(x)\,,\qquad\tau_-^{(2)}(x)=\theta(-x)\tau^{(2)}(x)\,,\qquad\tau(x)=\tau_+^{(1)}(x)+\tau_-^{(2)}(x). \tag{1.8}$$

при том, что условие равновесия стрингера имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau(s)ds=P+Q\,. \tag{1.9}$$

С другой стороны для горизонтальной деформации упругой составной(кусочно-однородной) бесконечной пластины, когда на верхней полубесконечной пластине на линии $y=c$ действуют тангенциальные контактные усилии с интенсивностью $\tau(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, имеем [2]:

$$hl\mathrm{U}(x)\triangleq hl\frac{du(x;c)}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(s-x)\tau(s)ds\qquad(-\infty<x<\infty)\,. \tag{1.10}$$

Здесь введены следующие обозначения [2]:

$$K(u) = \frac{1}{u} - \frac{d_1 u}{u^2+4c^2} + \frac{8c^2 d_2 u}{\left(u^2+4c^2\right)^2} + \frac{2c^2 d_3\left(u^2-12c^2\right)}{\left(u^2+4c^2\right)^3} \triangleq \frac{1}{u} + K_1(u),$$

$$d_1 = \frac{k(3-\nu)\left[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\right]-(3-\nu_1)\left[8-(1+\nu)(3-\nu)\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_2 = \frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu}; \qquad l = \frac{8\mu}{3-\nu} = \frac{4E}{(1+\nu)(3-\nu)}, \tag{1.11}$$

$$d_3 = \frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]}; \qquad k = \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)},$$

где $u(x;c)$ – горизонтальные перемещения точек полубесконечной пластины на линии $y=c$ при $0 \le y < \infty$ и $-\infty < x < \infty$; $(E;\, \mu;\, \nu)$ - упругие характеристики пластины при $0 \le y < \infty$; а $(E_1;\, \mu_1;\, \nu_1)$- при $-\infty < y \le 0$; E и E_1 – модули Юнга; « и «$_1$ – модули сдвига; а ¬ и ¬$_1$ – коэффициенты Пуассона пластин.

Теперь, имея в виду условие контакта $\mathrm{U}(x) = \mathrm{U}_s(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, из (1.7) и (1.10) относительно неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностью $\tau(x)$, $(-\infty < x < \infty)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{s-x} + \lambda_2\pi\theta(s-x) + K_1(s-x)\right]\tau(s)\,ds = (\lambda_2-\lambda_1)\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s-x)\tau_+^{(1)}(s)\,ds + \mathrm{g}(x), \tag{1.12}$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

при этом введены следующие обозначения:

$$\mathrm{g}(x) = \lambda_1 P\theta(b-x) + \lambda_2 Q\theta(-a-x) + (\lambda_2-\lambda_1)X_0\theta(-x), \tag{1.13}$$

$$\lambda_1 = \frac{hl}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}, \quad \lambda_2 = \frac{hl}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

а интеграл при $s = x$ трактуется в смысле его главного значения по Коши.

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода (1.12) с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей, при условии (1.9).

2. С целью решения сингулярного интегрального уравнения первого рода (1.12) при условии (1.9), применив к уранению (1.12) обобщенное интегральное преобразование Фурье, после некоторых выкладок и пользуясь формулой свертки, относительно трансформанта Фурье функции $\tau(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ получим следующее функциональное уравнение [2]:

$$\left(\lambda_2 + |\sigma| + \overline{K}_1(|\sigma|)\right)\bar{\tau}(\sigma) = (\lambda_2-\lambda_1)\bar{\tau}_+^{(1)}(\sigma) + \bar{\mathrm{g}}(\sigma) \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{2.1}$$

при этом условие (1.9) примет вид:

$$\bar{\tau}(0) = P + Q. \tag{2.2}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\overline{K}_1(|\sigma|) = \left(-d_1 + 2d_2 c|\sigma| - d_3 c^2\sigma^2\right)|\sigma| e^{-2c|\sigma|},$$

$$\bar{g}(\sigma)=\lambda_1 P e^{i\sigma b}+\lambda_2 Q e^{-i\sigma a}+(\lambda_2-\lambda_1)X_0, \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{2.3}$$

$$\bar{A}(\sigma)=F[A(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}A(x)e^{i\sigma x}dx\ , \quad A(x)=F^{-1}\left[\bar{A}(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{A}(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma\ ,$$

где $F[\bullet]$ оператор Фурье, а σ $(-\infty<\pm<\infty)-$ параметр преобразования.

Решая функциональное уравнение (2.1) при наличии условия (2.2) относительно $\bar{\tau}(\sigma)$ получим:

$$\bar{\tau}(\sigma)=(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\bar{\tau}_+^{(1)}(\sigma)}{\lambda_2+|\sigma|+\bar{K}_1(|\sigma|)}+\frac{\bar{g}(\sigma)}{\lambda_2+|\sigma|+\bar{K}_1(|\sigma|)} \qquad (-\infty<\sigma<\infty). \tag{2.4}$$

Теперь, применив к (2.4) обратное преобразование Фурье, после некоторых выкладок и пользуясь формулой свертки, получим следующее интегральное уравнение:

$$\tau(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^{\infty}B(|x-s|)\tau^{(1)}(s)ds+g(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B(|x|)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\sigma x}d\sigma}{\lambda_2+|\sigma|+\bar{K}_1(|\sigma|)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\sigma x)d\sigma}{\lambda_2+\sigma+\bar{K}_1(\sigma)}\ , \qquad (-\infty<x<\infty)$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{g}(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma}{\lambda_2+|\sigma|+\bar{K}_1(|\sigma|)}=\lambda_1 PB(|x-b|)+\lambda_2 QB(|x+a|)+(\lambda_2-\lambda_1)X_0B(|x|). \tag{2.6}$$

Теперь, на основании (1.8) для определения тангенциальных контактных усилий $\tau^{(1)}(x)$ $(0<x<\infty)$ из (2.5) получим следующее Фредгольмовское интегральное уравнение второго рода:

$$\tau^{(1)}(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^{\infty}B(|x-s|)\tau^{(1)}(s)ds+g(x) \qquad (0<x<\infty). \tag{2.7}$$

Далее, определив $\tau^{(1)}(x)$ $(0<x<\infty)$ из (2.7), значения $\tau^{(2)}(x)$ $(-\infty<x<0)$ определяются из (2.5) и будут даватся по формуле:

$$\tau^{(2)}(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^{\infty}B(|x-s|)\tau^{(1)}(s)ds+g(x) \qquad (-\infty<x<0). \tag{2.8}$$

Учитывая, что имеют место асимптотические представления: $\bar{K}_1(|\sigma|)=O\left(e^{-2c|\sigma|}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$, а $\lambda_2+|\sigma|+\bar{K}_1(|\sigma|)=O(|\sigma|)$ при $|\sigma|\to\infty$, то из свойств интегралов Фурье, получим, что $B(|x|)=O(\ln|x|)$ при $|x|\to 0$. Тогда, из (2.6) для $B(|x|)$ и $g(x)$ при $|x|\to 0$, получим:

$$B(|x|)=\frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{1}{|x|}+\psi(1)\right]+B_1(x) \qquad (|x|\to 0), \tag{2.9}$$

$$g(x)=\lambda_1 P\ln\frac{1}{|x-b|}+\lambda_2 Q\ln\frac{1}{|x+a|}+(\lambda_2-\lambda_1)X_0\ln\frac{1}{|x|}+g_1(x) \qquad (|x|\to 0),$$

где $B_1(x)$ и $g_1(x)$ – непрерывные функции по $x(-\infty < x < \infty)$; а $\psi(x)$ – известная пси-функция, причем $\psi(1) = -\gamma = -0.5772\ldots$ - постоянная Эйлера. Из (2.9) нетрудно увидеть, что функция $g(x)$ в точках $x = 0$, $x = -a$ и $x = b$ имеет логарифмическую особенность. Отсюда следует, что тангенциальные контактные усилия в этих точках $x = 0$, $x = -a$ и $x = b$ тоже имеют логарифмическую особенность, причем особенность в точках $x = -a$ и $x = b$ обусловлена сосредоточенными силами Q и P соответсвенно, а в точке $x = 0$ – неоднородностью стрингера. Отметим, что постоянная X_0 определяется из условия (1.9).

Таким образом, поставленная контактная задача свелась к решению Фредгольмовского интегрального уравнения второго рода (2.7), ядро которого имеет логарифмическую особенность. Интегральное уравнение (2.7) при условии $N\left|\alpha_2 - \alpha_1\right| < 1$, где

$$N = \sup_{x\in(0;\infty)} \int_0^\infty \left|B\left(\left|x-s\right|\right)\right| ds, \tag{2.10}$$

в пространстве суммируемых функций $L_1(0,\infty)$, можно решать методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубес-конечной упругой пластине. //ПМ. Труды Амер. Общ. Инж.-мех. Сер. Е. 1968. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №3. С.29-43.
3. Григорян Э. Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. //Уч. Записки ЕГУ, 1979, №3, с. 29-34.
4. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 831 с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спец-курс: М.: Наука, 1965. 327 с.

Сведения об авторе

Оганисян Гамлет Вараздатович – канд.физ.-мат. наук, ст. научн.сотр., преподаватель ЕГУ, фак-т .математики и механики. 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1. Тел: (+374 93) 27-26-26.

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ С МОНОДИСПЕРСНОЙ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСЬЮ

Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Исследованы осесимметричные колебания бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки, наполненной смесью идеальной жидкости с пузырьками изэнтропического газа. Получено трансцендентное дисперсионное уравнение, которое решается численно. Показано, что для достаточно коротких волн, распространяющихся в системе оболочка –смесь с крупными пузырьками, проявляется эффект дисперсии, в то время как в случае наличия мелких пузырьков такой эффект отсутствует. В случае наполнения чистой жидкостью дисперсия имеет место для любых волн. Учет пузырьков в жидкости приводит к уменьшению частоты колебаний оболочки.

1. Постановка задачи. Пусть бесконечно длинная круговая цилиндрическая деформируемая оболочка наполнена смесью идеальной (несжимаемой, лишенной вязкости и теплопроводности) жидкости с пузырьками изэнтропического газа одинаковых размеров. Полагается, что движения несущей (жидкость) и дисперсной (газовые пузырьки) фаз происходят с одинаковыми по величине и направлению скоростями, при этом в смеси отсутствуют процессы дробления, слипания и образования новых пузырьков. Эффектами межфазного теплообмена и поверхностного натяжения пренебрегаются. Рассматриваемая задача в классической постановке (без пузырьков) исследовалась многими авторами, в частности, в [1,2]. Уравнения движения рассматриваемой газожидкостной смеси пузырьковой структуры, записанные в цилиндрических координатах x, r, θ, возьмем в виде [3,4]:

$$\frac{\partial \vec V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla V^2-\vec V\times \mathrm{rot}\vec V=-\frac{1}{\rho}\nabla P,\quad \nabla=\frac{\partial}{\partial x}\bar e_x+\frac{\partial}{\partial r}\bar e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\bar e_\theta \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\vec V\rho+\rho\,\mathrm{div}\vec V=0,\quad \mathrm{div}\vec V=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \tag{1.2}$$

$$\rho=(1-\alpha)\rho_1+\alpha\rho_2,\quad \frac{\alpha\rho_2}{(1-\alpha)\rho_1}=\mathrm{const},\quad \rho a^3=\mathrm{const}. \tag{1.3}$$

$$P_2-P=\rho_1 a\frac{d^2a}{dt^2},\quad \rho_1=\mathrm{const},\quad \frac{P_2}{P_0}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}}\right)^{\gamma},\quad \gamma=\frac{c_p}{c_V} \tag{1.4}$$

Здесь t – время, V_x, V_r, V_θ – составляющие вектора скорости $\vec V$ по осям координат с ортами $\vec e_x, \vec e_r, \vec e_\theta$; P и ρ – давление и плотность, γ – показатель адиабаты газа, c_P и c_V –удельные теплоемкости, α – объемное газосодержание, a – радиус пузырька. Начало координат размещено в сечении $x=0$. Индексы 1, 2 и 0 отнесены соответственно к параметрам жидкости и газа и их значениям в стационарном состоянии равновесия. В соотношениях (1.3) первое из них определяет плотность смеси, второе является определением односкоростного течения, третье – формулировкой закона сохранения массы газа в пузырьке.

Допустим, что движение смеси внутри оболочки является безвихревым, т.е. $\mathrm{rot}\vec V=0$, что позволяет ввести в рассмотрение потенциал скоростей $\varphi: \vec V=\nabla\varphi$. Уравнение Эйлера (1.1) преобразуется в интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\int\frac{dp}{\rho}=f(t) \tag{1.5}$$

Предположим, что значения параметров смеси мало отклоняются от своих значений в состоянии равновесия

$$\begin{gathered}P=P_0+P',\ \ P_2=P_0+P_2',\ \ \rho=\rho_0+\rho',\ \ \rho_2=\rho_{20}+\rho_2',\ \ \alpha=\alpha_0+\alpha'\\ a=a_0+a',\ \ V_x=V_x',\ \ V_r=V_r',\ \ V_\theta=V_\theta',\ \ \varphi=\varphi'\end{gathered} \tag{1.6}$$

где штрихи отнесены к малым возмущениям. Подстановка разложений (1.6) в (1.3), (1.4) и последующее удержание и комбинирование линейных слагаемых приводит к связям:

$$\circ' = \frac{1}{c_0^2} P_2', \quad a' = -\frac{a_0}{3} \frac{P_2'}{¡ P_0}, \quad c_0^2 = \frac{¡ P_0}{\circ_{0\ 0}} . \tag{1.7}$$

Здесь c_0 – невозмущенная скорость звука в смеси. Из уравнения Рэлея-Лэмба (1.4) в дисперсионном приближении, когда учитывается наличие пузырьков в жидкой фазе, находим

$$P' = P_2' + \frac{1}{\mu_{ar}^2} \frac{\partial^2 P_2'}{\partial t^2}, \quad \mu_{ar}^2 = \frac{3 ¡ P_0}{\circ_1 a_0^2}, \tag{1.8}$$

где μ_{ar} – собственная частота пульсирующего пузырька. Подставляя (1.6) в (1.5) и учитывая связи (1.7), (1.8), подынтегральное выражение разложим в биномиальный ряд. Определив константу интегрирования из условия, что в невозмущенном состоянии $\varphi' = 0, \; P_2' = 0$, возмущение давления P_2' в пузырьке можно выразить через возмущенный потенциал $¨'$

$$P_2 = -\circ_0 \frac{\partial ¨}{\partial t} . \tag{1.9}$$

Здесь штрихи над возмущениями опущены. Для нахождения вида потенциала φ обратимся к уравнению неразрывности (1.2). Используя свойства потенциальности движения смеси и адиабатичности газа, а также соотношения (1.3), уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \circ c_0^2 \Delta ¨ = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \bar{\ }^2}, \quad \mathrm{div}\left(\nabla ¨\right) = \Delta ¨ \tag{1.10}$$

Подставляя разложения (1.6) в уравнение (1.10) и используя соотношения (1.7)-(1.9), в линейном приближении для возмущенного потенциала получим уравнение

$$\frac{1}{\mu_{ar}^2}\frac{\partial^2 ¨}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 ¨}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta ¨ = 0 . \tag{1.11}$$

Ограничиваясь рассмотрением осесимметричного $\left(\partial / \partial \bar{\ } = 0\right)$ течения газожидкостной смеси, волновое решение уравнения (1.11) можно записать в виде:

$$¨\left(x, r, t\right) = b J_0\left(\ r\right) e^{i(\mu t - \sim x)}, \quad \sim^2 = \frac{\mu^2}{c_0^2}\left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_{ar}^2}\right) - \ ^2, \tag{1.12}$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, μ – циклическая частота, $\sim$ – волновое число, b и – постоянные интегрирования. При выводе (1.13) использовано условие ограниченности скорости движения на оси $r = 0$. Граничные условия, которым должны удовлетворять параметры системы оболочка–смесь [1-3], имеют вид:

$$\left.\frac{\partial ¨}{\partial t}\right|_{r=R} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. P\right|_{r=R} = -\circ_0 \left(\frac{\partial ¨}{\partial t} + \frac{1}{\mu_{ar}^2}\frac{\partial^2 ¨}{\partial t^2} \right)$$

где $w\left(x, r, t\right)$ – прогиб срединной поверхности по нормали к центру кривизны оболочки.

Решение (1.13) описывает распространение незатухающих осесимметричных волн в газожидкостной смеси, заключенной в цилиндрическую оболочку. Удовлетворяя его граничным условиям, избыточное давление и потенциал скоростей свяжем с прогибом деформируемой оболочки

$$P\left(x, r, t\right) = -\circ_0 ¨ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu_{ar}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^4} \right), \quad ¨\left(x, r, t\right) = ¨ \frac{\partial w}{\partial t}, \quad ¨ = \frac{J_0\left(\ r\right)}{J_1\left(\ r\right)} \frac{1}{\ } . \tag{1.13}$$

Здесь использовано соотношение $J_0'\left(\ r\right) = - \ J_1\left(\ r\right)$, где J_1 – функция Бесселя первого рода порядка единицы.

2. Вывод дисперсионного уравнения. Линейные уравнения изгиба тонкостенной цилиндрический оболочки возьмем в виде [2,3]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\neg}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\ }^{\,2}}+\frac{1+\neg}{2R}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x\partial\overline{\ }}-\frac{\neg}{R}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1-\neg^2}{E}\,{}^{\circ}{}_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\frac{1+\neg}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\overline{\ }}+\frac{1-\neg}{2R^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial\overline{\ }^{\,2}}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\overline{\ }}=\frac{1-\neg^2}{E}\,{}^{\circ}{}_0\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2},\\
&\frac{\neg}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\overline{\ }}-\frac{w}{R^2}-\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\overline{\ }^{\,2}}+\frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\overline{\ }^{\,4}}\right)=\frac{1-\neg^2}{E}\,{}^{\circ}{}_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{1-\neg^2}{Eh}q.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь u,v,w – смещения точек срединной поверхности оболочек соответственно в осевом направлении, вдоль дуги и по нормами поверхности, E – модуль Юнга, $\neg$ –коэффициент Пуассона, R и h – радиус и толщина стенок оболочки, ${}^{\circ}{}_0$ – плотность материала, q – нормальное к поверхности оболочки давление. Напомним, что прогиб w считается по величине положительным, если он направлен вдоль нормали к центру кривизны оболочки.

В качестве внешней нагрузки q следует брать давление газожидкостей смеси на деформируемую внутреннюю поверхность цилиндра, т.е. полагать $q=-P\big|_{r=R}$, где P определена формулой из (1.13). Поскольку в смеси рассматривались осесимметричные волны, постольку естественно ожидать реализацию осесимметричной формы колебаний оболочки. Поэтому в (2.1) следует полагать $\partial/\partial\overline{\ }=0$ и соответствующие решения искать в виде $(u,\mathrm{v},w)=(u_*,\mathrm{v}_*,w_*)e^{i(\mu t-\sim x)}$. Тогда (2.1) сводится к однородной системе алгебраических уравнений относительно u_*,w_*:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\mu^2}{c_*^2}-x^2\right)u_*+i\frac{\neg}{R}\sim w_*=0,\quad c_*^2=\frac{E}{{}^{\circ}{}_*\left(1-\neg^2\right)},\\
&i\frac{\neg}{R}\sim u_*+\left[\frac{h^2}{12}\sim^4+\frac{1}{R^2}-\frac{\mu^2}{c_*^2}+\frac{\mu^2}{c_*^2}\frac{{}^{\circ}{}_0}{{}^{\circ}{}_*h}\left(1-\frac{\mu^2}{\mu_{ar}^2}\right)\cdot\cdot^{\,*}\right]w_*=0.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь не приведено соотношение, следуемое из второго уравнения (2.1), поскольку в рассматриваемом случае $\mathrm{v}_*=0$, c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале оболочки. Из требования существования нетривиальных решений системы (2.2) получим дисперсионное уравнение:

$$
\left(\frac{\mu^2}{c_*^2}-\sim^2\right)\left[\Omega^2-\mu^2+\frac{\neg^2}{R^2}\frac{E}{\left(1-\neg^2\right){}^{\circ}{}_*}+\frac{\mu^2}{h}\frac{{}^{\circ}{}_0}{{}^{\circ}{}_*}\left(1-\frac{\mu^2}{\mu_{ar}^2}\right)¤^*\right]+\frac{\neg^2}{R^2}\frac{E}{\left(1-\neg^2\right){}^{\circ}{}_*}\sim^2=0, \tag{2.3}
$$

$$
\Omega^2=\frac{1}{hR}\left(D\sim^4+\frac{Eh}{R^2}\right),\quad D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\neg^2\right)},\quad \cdot\cdot^{\,*}=\cdot\cdot\big|_{r=R},
$$

где D – цилиндрическая жесткость оболочки. При $\mu_{ar}\to\infty$, т.е. при отсутствии пузырьков, (2.3) переходит в уравнение, полученное в [1]. Ниже рассматривается случай преобладания упругости над инерционностью оболочки, когда $\Omega>\mu$.

Удобно уравнение (2.3) представить в безразмерной форме записи:

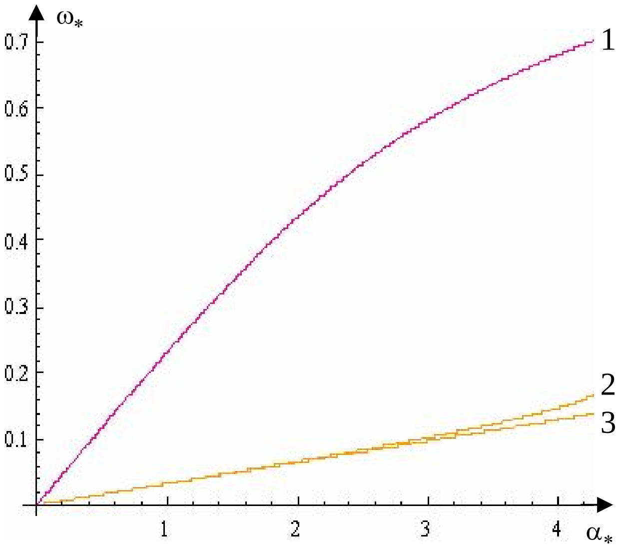
$$
\left(\mu_*^2-\sim_*^2\right)\left(\Omega_*^2-\mu_*^2\right)+\neg^2\sim_*^2+\frac{{}^{\circ}{}_0}{{}^{\circ}{}_*}\frac{\mu_*^2\left(\mu_*^2-\sim_*^2\right)}{l}\left(1-\frac{\mu_*^2}{r^2}\frac{{}^{\circ}{}_0c_*^2}{3¡P_0}\right)\frac{J_0(\ R)}{J_1(\ R)}\frac{1}{R}=0, \tag{2.4}
$$

$$
\Omega_*^2=\frac{1}{hR^2}\frac{1}{{}^{\circ}{}_*c_*^2}\left(D\sim_*^4+h^2R^2{}^{\circ}{}_*c_*^2\right)=1+\frac{l^2}{12}\sim_*^4,\quad \mu_*=\frac{\mu R}{c_*},\quad \sim_*=\sim R,\quad l=\frac{h}{R},\quad r=\frac{R}{a_0},
$$

$$
{}^2R^2=\frac{c_*^2}{c_0^2}\mu_*^2\left(1-\frac{\mu_*^2}{r^2}\frac{{}^{\circ}{}_0c_*^2}{3¡P_0}\right)-\sim_*^2.
$$

Для иллюстрации результатов излагаемой теории рассмотрены осесимммметричные колебания стальной $\left(E = 2\cdot 10^5\,МПа,\ \nu = 0.3, \rho_* = 7800\,кг/м^3,\ l = 0.002\right)$ цилиндрической оболочки, наполненной покоящимися водовоздушными монодисперсными смесями $\left(\ _0 = 0.01,\ P_0 = 0.1МПа,\ \circ_0 = 988\,кг/м^3,\ x = 1.4\right)$ с различающимися по размеру пузырьками.

На фиг.1 кривые представляют результаты численного решения точного уравнения (2.4). Кривая 1 отнесена к оболочке с чистой водой, 2 и 3 – к оболочке, наполненной водовоздушной смесью с крупными $(r = 50)$ и мелкими $(r = 1500)$ пузырьками. Видно, что частоты колебаний оболочки со смесью уступают значениям в случае наполнения ее водой. Для смеси при больших $\sim_*$ с переходом от крупного пузырька к мелкому происходит падение частоты колебаний, а при реализации в системе длинных волн вне зависимости от параметра r значения частот совпадают. При наполнении оболочки чистой водой (кривая 1) для любых $\sim_*$ имеет место дисперсия волны, которая наблюдается также в случае смеси с крупными пузырьками, однако, лишь при больших значениях $\sim_*$.



Фиг. 1

3. Длинноволновое приближение. При реализации в системе длинных волн можно полагать $\sim^2 \ll \mu^2/c_*^2$, т.е. $\sim_*^2 \ll \mu_*^2$. Для отыскания наименьшего корня R упрощенного варианта уравнения (2.4) воспользуемся разложениями функций Бесселя в степенные ряды по малому аргументу, ограничиваясь удержанием лишь первых членов. Тогда для низшего корня получим формулу:

$$ {}^2R^2 = -\frac{\mu_*^2}{\Omega_*^2-\mu_*^2}\frac{2}{l}\frac{\circ_0}{\circ_*}\left(1-\frac{\mu_*^2}{r^2}\frac{\circ_0 c_*^2}{3xP_0}\right), \quad \Omega_* > \mu_* $$

которую подставим в определение $\sim$ из (1.12). В результате придем к уравнению

$$ \frac{1}{r^2}\frac{c_*^2}{c_0^2}\frac{\circ_0 c_*^2}{3¡P_0}\mu_*^2 - \frac{c_*^2}{c_0^2}\left[1+\frac{1}{r^2}\frac{\circ_0 c_*^2}{3¡P_0}\left(1+\frac{l^2}{12}\sim_*^4\right)+\frac{\circ_0}{\circ_*}\frac{2}{l}\frac{1}{r^2}\frac{\circ_0 c_*^2}{3¡P_0}\right]\mu_*^4 + $$
$$ +\left[\sim_*^2+\frac{c_*^2}{c_0^2}\left(1+\frac{l^2}{12}\sim_*^4\right)+\frac{2}{l}\frac{\circ_0}{\circ_*}\right]\mu_*^2-\left(1+\frac{l^2}{12}\sim_*^4\right)=0. \tag{3.1} $$

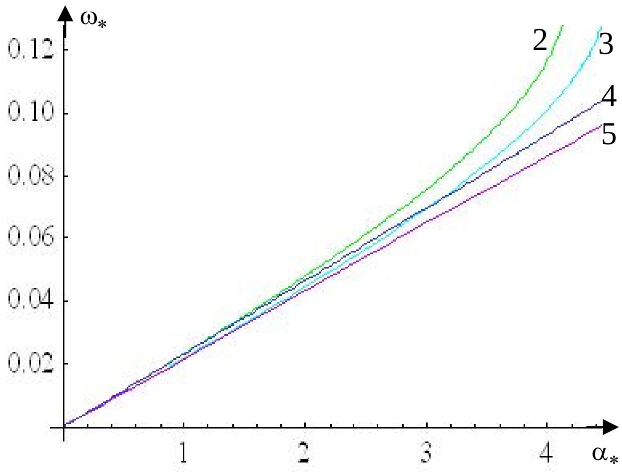
Если дополнительно полагать $\Omega_* \gg \mu_*$, то для весьма длинных волн $\Omega_* = 1$ и вместо (3.1) получим

$$ \frac{1}{r^2}\frac{\circ_0 c_*^2}{3¡P_0}\left(1+\frac{2}{l}\frac{\circ_0 c_0^2}{\circ_* c_*^2}\right)\mu_*^4-\left(1+\frac{2}{l}\frac{\circ_0 c_0^2}{\circ_* c_*^2}\right)\mu_*^2+\frac{c_0^2}{c_*^2}\sim_*^2=0. \tag{3.2} $$

В газожидкостной смеси со сжимаемой жидкостью, невозмущенная скорость звука в смеси c_0 и жидкости c_{10} связаны формулой $1/c_0^2 = \left(1-\ _0\right)\circ_0/\circ_{10}c_{10}^2 + \ _0\circ_0/¡P_0$, где c_{10} –скорость звука в жидкости. В отсутствие дисперсной фазы, когда $\ _0 = 0,\ \circ_0 = \circ_{10}$, имеем $c_0 = c_{10}$. Поэтому при отсутствии пузырьков $(r \to \infty)$ из (3.2) при $¬ = 0$ после перехода к размерным величинам можно получить формулу Жуковского

$$c_{Ph}^2=\frac{\mu^2}{\sim^2}=c_*^2\frac{\mu_*^2}{\sim_*^2}=c_{10}^2\left(1+\frac{2}{l}\frac{\circ_0 c_{10}^2}{\circ_* c_*^2}\right)^{-1}=c_{10}^2\left(1+\frac{2}{l}\frac{\circ_0 c_{10}^2}{E}\right)^{-1}.$$

На фиг. 2 представлены зависимости μ_* от $\sim_*$, характеризующие колебания оболочки с водовоздушной смесью, вычисленные согласно решениям точного уравнения (2.4) – кривые 2 и 3 и приближенного уравнения (3.1) – кривые 4 $(r=50)$ и 5 $(r=1500)$. При малых $\sim_*<1$ кривые точных и приближенных решений практически совпадают, а при больших (конечных) $\sim_*$ приближение (3.1) дает заниженные значения частот колебаний, при этом, в случае крупных пузырьков вновь имеет место дисперсия волны.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184с.
2. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Бояршина Л.Г. и др. Нелинейная динамика осесимметричных тел, несущих жидкость. Киев: Наукова Думка, 1992. 184с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Оганян Гагик Гришаевич, кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б, тел. (+37493) 946-947,
E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович, кандидат физ.-мат. наук, ассистент. Кафедра числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.
Адрес: 0025, Ереван, ул. А. Манукяна 1, тел.: (+37410) 559-096,
E-mail: ssahakyan@ysu.am

МЕТОДЫ КОГЕРЕНТНОЙ ОПТИКИ
В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

Одинцев И.Н.

В работе рассматриваются некоторые вопросы и результаты практического применения методов когерентной оптики при механических испытаниях материалов, включая исследование деформирования как процесса. Представлены общепринятые методики испытаний, усовершенствованные использованием голографической или спекл интерферометрии. Предложены нетрадиционные подходы к исследованию упруго-анизотропных и разномодульных тел, основанные на специальной математической интерпретации экспериментальных данных. Отдельно формулируются подходы к исследованию диссипативных свойств материалов при вибронагружении.

1. Как известно [1,2], методы когерентной оптики, основанные на фазовом и(или) амплитудном сравнении световых волн, диффузно отражаемых реальной, шероховатой поверхностью исследуемого объекта в его различных механических состояниях, дают наиболее полную экспериментальную информацию о фактическом характере деформирования. Основными преимуществами этих методов в экспериментальной механике деформируемого твердого тела (помимо высокой точности) является бесконтактность измерений и возможность регистрации полного поля перемещений исследуемого объекта. Оба указанных преимущества имеют важное самостоятельное значение при разработке специальных подходов и методик испытания элементов конструкций различного назначения. В настоящее время к наиболее разработанным и востребованным (по существу, уже инженерным) методам когерентной оптики относится классическая голографическая интерферометрия (ГИ) и электронная цифровая спекл-интерферометрия (ЭЦСИ). Последняя обеспечивает максимальную оперативность и высокий уровень автоматизации эксперимента, благодаря использованию современных быстродействующих цифровых видеокамер в качестве средств регистрации оптических изображений в совокупности с надлежащим программным обеспечением. Прямым результатом эксперимента (после выполнения соответствующих процедур первичной технологической или компьютерной обработки) являются картины полос на изображении тела (оптическом, компьютерном), несущие информацию о распределениях пространственных компонент векторного поля перемещений на поверхности тела. Это позволяет с наибольшей достоверностью судить о характере деформирования как на качественном уровне, так и в количественном выражении. Величины заданных компонент перемещений определяются известным образом по порядкам полос на интерферограммах.

2. Преимущества когерентно-оптических методов делают их эффективным инструментом, в частности, при исследовании деформационных свойств материалов, когда конкретным объектом изучения является некоторый – стандартный или специальный – образец, подвергаемый заданному внешнему воздействию. В этом случае появляется возможность не только регистрации в конечном счете (после математической обработки первичной информации) компонент тензора деформаций для текущего механического состояния образца, но и своевременного (даже на качественном уровне) обнаружения всевозможных дефектов расчетной схемы его нагружения (деформирования). При этом исследоваться могут, в принципе, как параметры квазистатического деформирования, так и стационарные и нестационарные процессы. Вместе с тем, следует иметь в виду специфические особенности рассматриваемых средств измерений, которые дают возможность лишь попарного сопоставления заданных состояний объекта (исключая метод усреднения по времени [2]). Общий подход к исследованию закономерностей развития деформаций в образце заключается в последовательной оптической регистрации ряда его текущих механических состояний с обеспечением в дальнейшем – на этапе обработки результатов эксперимента – их сопоставления в произвольном порядке. Заметим, что для ЭЦСИ этот общий режим является внутренне присущим: информация о различных состояниях деформируемого образца при заданных параметрах силового воздействия (или времени) накапливается в компьютере в виде соответствующих числовых файлов, которые могут обрабатываться в дальнейшем в любом сочетании и в произвольной последовательности. В ГИ этот же результат наиболее эффективно достигается с использованием так называемой сэндвич-голографии [2]. Континуальное описание процесса, если это требуется, основано на последующей соответствующей математической обработке полученных данных. Кроме того, применение когерентно-оптических средств измерений лимитируется и рядом технических условий. Так, появление пластических деформаций в теле, как правило, связано с приложением к нему относительно больших усилий. В связи с этим возникает опасность его смещения как жесткого целого, что негативно отражается на метрологических возможностях интерференционных измерений вплоть до их полной несостоятельности. Этот факт определяет повышенные требования к конструктивным решениям при создании специального экспериментального оборудования.

3. Наибольшей простотой в плане практической реализации ГИ и ЭЦСИ в качестве средств измерений обладают испытания при изгибном деформировании образцов типа балок и пластин с регистрацией лишь одной определяющей компоненты – малых нормальных перемещений (прогибов). Этому виду испытаний присущ ряд известных особенностей и ограничений, тем не менее он позволяет получать некоторые необходимые для практики (интегральные) оценки деформационных характеристик различных конструкционных материалов: металлов и сплавов, монокристаллов, полимеров, композитов. При этом целесообразность и эффективность использования бесконтактных когерентно-оптических методов ощущается прежде всего при испытаниях малогабаритных образцов из низкомодульных материалов.

4. Если образец-балка $\left(L \times b \times h\right)$ схематизируется как балка-полоса $(L >> b >> h)$, то поле прогибов при ее нагружении моментом M описывается квадратичной функцией $W = \kappa_1 \xi^2 / 2 + \kappa_2 \eta^2 / 2 + B\xi + C\eta + A$, где κ_i – главные кривизны деформированной поверхности $z = W(\xi, \eta)$, Ξ, H – главные оси кривизны, совпадающие в случае изотропного материала с осями образца X, Y. При упругом деформировании, очевидно, имеем для модуля Юнга и коэффициента Пуассона: $E = 12M / bh^3\kappa_1$ и $\nu = -\kappa_2 / \kappa_1$. Методы ГИ или ЭЦСИ в традиционном варианте позволяет регистрировать поле W в виде системы полос как изолиний перемещений, рис.1а, с ценой полосы, равной половине длины волны λ используемого лазерного излучения. (Для He-NE лазера λ = 0,6328 мкм.) Определение значений κ_i здесь заключается в поточечной расшифровке интерферограмм и в двойном численном дифференцировании дискретных распределений прогибов.

5. Более эффективный инструмент представляет собой оптико-компенсационный метод [2,3]. Факторами дополнительного воздействия здесь являются компоненты смещения d_ξ, d_η, d_z точечного источника освещения (z – нормаль к объекту), вызывающего появление добавочной разности фаз световых пучков. Для удобства эти приращения могут быть формально интерпретированы в терминах поля дополнительных фиктивных прогибов самого образца: $W^+ \sim D^+(\xi^2 + \eta^2)/2 + B^+\xi + C^+\eta$, причем соотношения связи между параметрами этого поля и компонентами смещения источника известны. В ходе вариации этих параметров и при достижении условий $B^+(d_\xi) = -B$ и $C^+(d_\eta) = -C$, а также

$$D^+(d_z) = -\kappa_1 \quad \text{или} \quad D^+(d_z) = -\kappa_2 \tag{1}$$

регистрируемое поле суммарных прогибов $W^\Sigma = W + W^+$ будет зависеть лишь от одной координаты, соответственно, η или ξ. В эти моменты происходит изменение знака гауссовой кривизны «суммарной» деформированной поверхности $z = W^\Sigma(\xi, \eta)$, а наблюдаемые интерференционные полосы, трансформируясь из отрезков гипербол в дуги эллипсов, при точном выполнении (1) должны приобретать вид отрезков прямых, рис.1б,в. Визуализация подобных интерферограмм является критерием выполненной оптической компенсации одной из дифференциальных характеристик: κ_1 или κ_2. Их значения определяются по текущей величине D^+, а направление полос совпадает с направлением скомпенсированной кривизны. Подчеркнем, что рассмотренным способом определяются именно главные кривизны деформированной поверхности. Так, на рис.1г-е демонстрируются интерферограммы для случая изгиба с кручением, а на рис.1ж-и – для чистого кручения балки-полосы.

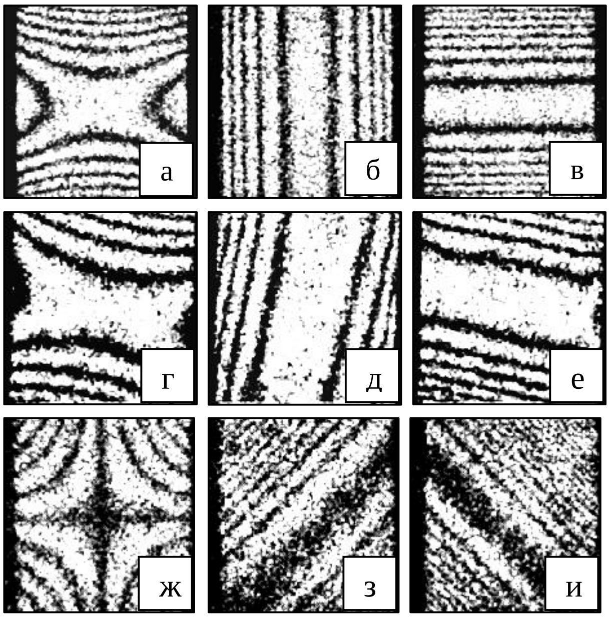


Рис. 1. Интерферограммы, иллюстрирующие метод компенсационного измерения: при чистом изгибе образца (а – в); при изгибе с кручением (г – е); при чистом кручении (ж – и)

6. Для определения констант упругости (эффективных модулей) анизотропных материалов испытанию подлежит в общем случае некоторая детерминированная ориентационная выборка образцов, схематизируемых как балка-полоса и вырезаемых из (листовой) заготовки под известными углами θ относительно главных осей анизотропии материала X_o и Y_o. Анализ их совокупного деформационного отклика при нагружении позволяет рассчитать величины коэффициентов деформации в заданной плоскости упругой симметрии (в приближении квазиоднородного тела). При использовании компенсационной ГИ или ЭЦСИ каждый частный деформационный отклик состоит из двух главных кривизн деформированной поверхности образца и угла ориентации главных осей кривизны. Расширенная интерпретация результатов эксперимента базируется на теоретическом представлении ожидаемых откликов, исходя из принимаемой модели тела с неизвестными параметрами – деформационными константами. Заметим, что в основе описанной методики лежит предположение об идентичности свойств материала во всем используемом наборе образцов, что, однако, далеко не всегда соблюдается в действительности (в особенности для реальных композитов).

7. Альтернативный подход заключается в использовании лишь единственного образца специального вида, по испытанию которого определяются значения упругих констант в конкретной малой области листовой заготовки. При этом первичная информация, необходимая для расчета всей совокупности свойств, формируется в процессе его испытаний по разным схемам нагружения. В разработанной методике [4] используется образец в виде круглой пластины – диска, ценрально-симметричными схемами нагружения которого являются четырехточечный изгиб попарно-разнонаправленными силами F и двухточечный изгиб моментами М, прилагаемыми в точках контура. Зоной измерения деформационного отклика (базой) является малая центральная часть пластины. Кроме того, путем поворота диска в своей плоскости варьируется также угол θ ориентации главных осей ортотропии относительно осей, проходящих через точки приложения контурных нагрузок. Последнее обстоятельство дает возможность определения реального направления осей анизотропии конкретно в данной области заготовки по достижению экстремальных значений главных кривизн деформированной поверхности образца. Для вычисления значений деформационных констант материала с использованием экспериментальных данных и общих теоретических зависимостей для изгиба ортотропных пластин используется итерационный алгоритм, на каждом шаге которого производится уточнение напряженного состояния в центральной области диска численным решением соответствующей прямой задачи методом конечных элементов. В качестве иллюстрации на рис.2 показаны спекл-интерферограммы, зарегистрированные при разных углах ориентации образца из специального композита. Расчет по ним констант упругости указал на высокую степень ортотропии данного материала $(E_1/E_2 \sim 10)$.

8. Высокая точность и надежность результатов оптико-компенсационных измерений приобретаемой кривизны образцов явилась определяющим условием при разработке нетрадиционного способа испытания материалов с различным сопротивлением растяжению и сжатию. Несложно показать [5], что если сечение образца-балки не имеет оси симметрии, ортогональной плоскости изгиба, то ее жесткость в общем случае будет зависеть как от

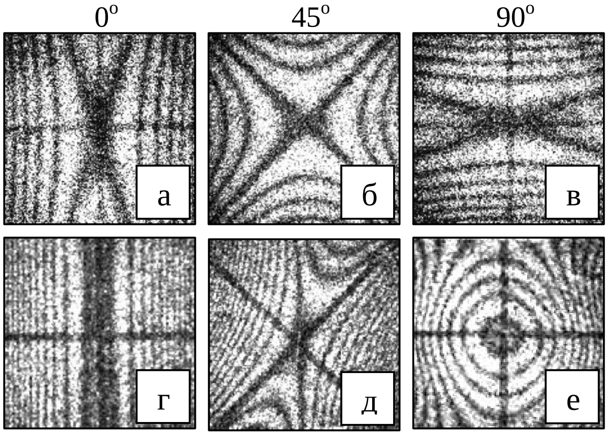


Рис.2. Интерферограммы поля прогибов ортотропного образца-диска при различных углах ориентации θ: при изгибе усилиями F (а – в) и моментами M (г – е).

величины, так и от направления изгибающего момента. Изменение жесткости образца при смене знака нагрузки определяется, помимо параметров геометрии сечения, различием свойств материала при растяжении и сжатии, что и обеспечивает возможность оценки характеристик упругости материала рассматриваемого типа. Наиболее эффективным в данном отношении является образец с тавровым сечением. Построение нелинейной диаграммы деформирования материала базируется на рекуррентной процедуре, на каждом текущем шаге которой решением системы уравнений равновесия в сечении устанавливаются две новые точки диаграммы – на ветвях растяжения и сжатия, исходя из уже известных точек и экспериментальных данных.

9. Методы когерентной оптики, в принципе, позволяют регистрировать поля перемещений различного происхождения: упругие, упругопластические, разгрузочные, остаточные после разгрузки и реономные. Это дает возможность исследования как вязкоупругих, так и неупругих свойств материалов в условиях активного нагружения и ползучести. Исследование начальных (менее условного предела текучести) участков диаграммы деформирования имеет важное значение в такой области как размерная стабильность элементов конструкций точного машиностроения и приборостроения. При испытаниях материалов в данном диапазоне нагруженности существенную роль играют низкий порог чувствительности, бесконтактность измерений и достоверность получаемых результатов. Все эти требования удовлетворяются с применением когерентно-оптической методологи [2]. Наиболее целесообразным при исследовании закономерностей так называемого микропластического деформирования при активном нагружении является построение диаграмм остаточных деформаций после пошагово возрастающих нагрузок и промежуточных разгрузок. При испытаниях на чистый изгиб методы когерентной оптики позволяют регистрировать величину остаточной кривизны образца на уровне ~ 10^{-7} мм$^{-1}$. Такую же величину имеют минимальные регистрируемые деформации при исследовании явлений ползучести (вязко-упругости). Известно, что при нормальных условиях и существенно малых напряжениях (нагрузках) ползучесть металлических материалов носит затухающий характер, а суммарно накопленная деформация не превышает 10^{-5} - 10^{-3}, что соответствует диапазону когерентно-оптических средств измерений.

10. Возможность измерения полей перемещений на всей визуально доступной поверхности образца предопределяет создание нетрадиционных методик испытаний. Если в образце создано переменное (например, линейное по оси балки) поле напряжений, то после его полной разгрузки интерференционные полосы будут наблюдаться лишь на той его части, где напряжения в максимально нагруженном состоянии превышали предел упругости материала (при компенсации смещений и поворотов как целого). Расширенная обработка регистрируемой интерферограммы остаточных прогибов позволяет в этом случае по однократному нагружению и разгрузке построить полную (для заданного диапазона) диаграмму остаточного деформирования образца. (Напомним, что для ее преобразования в диаграмму деформирования материала при изгибном нагружении существуют известные формулы перехода [2].)

11. Самостоятельным направлением в методах голографической и спекл интерферометрии является исследование форм стационарных колебаний тел. Так называемый метод усреднения по времени позволяет визуализировать в виде картин полос поле амплитудных перемещений вибрирующего объекта. Методы когерентно-оптической виброметрии могут с успехом использоваться для исследования явлений диссипации энергии в системе путем определения декремента колебаний по относительной ширине резонансных пиков на амплитудно-частотной характеристике [6]. Для ее построения производится запись ряда голограмм усреднения по времени для множества частот возбуждения, близлежащих к заданной собственной частоте. При испытании стандартизированных образцов таким образом исследуются диссипативные свойства соответствующих материалов.

12. Использование современных цифровых технологий в когерентно-оптических методах представляет собой их естественное развитие и более удобную реализацию. С их внедрением открываются возможности полной автоматизации процесса измерений от момента регистрации первичной информации и построения поля перемещений до получения требуемых величин (распределений) в реальном масштабе времени. Заметим, что именно отсутствие технологии автоматизации процесса измерений является в настоящее время основным сдерживающим фактором в практическом (инженерном) применении когерентно-оптических методов в экспериментальной механике, делая их лишь средствами лабораторных исследований. Создание автономных технических систем измерений и соответствующего компьютерного обеспечения, включая новейшие разработки, сделает их практически безальтернативными в данной области изучения поведения механических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gloud G.L. Optical methods in engineering analysis, Cambridge: University Press, 1998. 503 p.
2. Shchepinov V.P., Pisarev V.S., Novikov. S.A., Balalov V.V., Odintsev I.N., Bondarenko M.M. Strain and stress analysis by holographic and speckle interferometry, Chichester: John Wiley & Sons, 1996. 496 p.
3. Odintsev I.N., Apalkov A.A., Pisarev V.S. Implementation of compensation speckle interferometry for high-precision determination of materials mechanical properties. Proceedings of SPIE, vol. 3745, 169.
4. Одинцев И.Н., Чернов А.В. Метод испытания анизотропных материалов с использованием образца-диска. Заводская лаборатория. (Диагностика материалов.) В печати.
5. Одинцев И.Н. Определение деформационных характеристик упругости при растяжении и сжатии по данным испытаний на изгиб. /Заводская лаборатория. (Диагностика материалов.) 2008. Т.74. №7. 51.
6. Одинцев И.Н., Разумовский И.А. Методы когерентно-оптической виброметрии в практике механических испытаний. Приборы. В печати.

Сведения об авторе:

Одинцев Игорь Николаевич – канд. техн. наук, старший научный сотрудник Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН (Москва, Россия), доцент кафедры «Сопротивление материалов» МГТУ «МАМИ»; (7 499) 135 77 51, (7 495) 350 41 57
E-mail: ino54@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ «СЭНДВИЧ» СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ С КОЛЬЦЕВОЙ АПЕРТУРОЙ И ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Осипов М.Н.

В работе описывается применение одновременно методов «сэндвич» спекл интерферометрии с кольцевыми апертурами и голографической интерферометрии для определения полного поля перемещений при деформировании элементов конструкций.

1. Введение. Экспериментальные методы остаются основным критерием истинности существующих математических моделей, несмотря на большие достижения в сфере развития вычислительной техники и математических методов численного моделирования, которые позволяют решать различные задачи механики. Кроме того, экспериментальные методы, и в особенности оптические методы измерений, являются основой при практическом контроле и разработке новых элементов конструкций в промышленности. Оптические методы являются мощным экспериментальным инструментом, который позволяет исследовать напряженно-деформированного состояния моделей и конструкций бесконтактным способом. Бесконтактные методы не оказывают влияния на процесс проведения экспериментальных исследований, что приводит к повышению точности и достоверности получаемых результатов.

Появление методов когерентной оптики (голографическая интерферометрия, спекл-интерферометрия и аналогичные) расширили диапазон применения оптических методов вплоть до проведения экспериментальных исследований на реальных конструкциях и в реальных промышленных условиях.

Одним из широко используемых методов когерентной оптики для определения полей перемещений при деформировании элементов конструкций является метод спекл-интерферометрии, поскольку он менее зависим от нестабильности оптической системы по сравнению с голографической интерферометрией. Нестабильность оптической системы приводит к потери информации.

Чувствительность спекл-интерферометрии к определению величины перемещения зависит от размеров спекл-структуры, которая определяется параметрами используемой оптической системы при записи субъективной спекл-структуры, т.е. числовой апертурой оптической системы. Увеличение числовой апертуры оптической системы приводит к уменьшению размеров регистрируемой спекл-структуры и, следовательно, к увеличению чувствительности спекл-интерферометрии. Однако, с другой стороны, увеличение числовой апертуры оптической системы приводит к требованию использования высококачественной оптики, так как при таких параметрах начинают существенным образом сказываться аберрации оптической системы, которые приводят к искажению регистрируемой информации. Теоретические и экспериментальные исследования принципов работы оптических приборов показали, что наличие в них кольцевых апертурных диафрагм позволяет повысить разрешающую способность зеркальных телескопов и объективов [1].

В работе представлены результаты исследований по применению «сэндвич» спекл-интерферометрии с функцией зрачка в виде кольцевой апертурной диафрагмы и голографической интерферометрии сфокусированных изображений для определения полного поля перемещений при деформировании элементов конструкций.

2. Применение кольцевых апертур. Рассмотрим образование спекл структур в спекл-фотографии при использовании в оптической системе кольцевой апертурной диафрагмы. Оптическая схема регистрации спекл-фотографий отличается от стандартной тем, что в плоскости входного зрачка оптической системы располагается кольцевая диафрагма. Выражения, описывающие образование оптической системой спекл-картин в плоскости фотопластинки, позволяют оценить размеры спекл-структуры. Так как в плоскости входного зрачка оптической системой, расположена кольцевая апертурная диафрагма, размеры которой имеют вид двух концентрических окружностей с радиусами α и $\varepsilon\alpha$, где ε – некоторое положительное число, меньшее единицы. Средний размер спекл-структуры в плоскости фотопластинки определяется следующим выражением [1,2]:

$$I(x,y)=I_0(x,y)\left(\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right]-\varepsilon^2\left[\frac{2J_1(k\varepsilon aw)}{k\varepsilon aw}\right]\right)^2, \qquad (2.1)$$

где $k=2\pi/\lambda$ *;* а λ – длина волны лазерного излучения; $w=\sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – координаты точки в плоскости фотопластинки относительно оптической оси, где определяется значение интенсивности.

Из анализа выражения (2.1) следует, что при использовании кольцевой апертуры дифракционное поле в плоскости фотопластинки описывается разностью функций Бесселя первого порядка $\boldsymbol{J}_1$ в отличие от обычной круговой апертуры, при которой дифракционное поле в плоскости фотопластинки определяется только функцией Бесселя первого порядка $\boldsymbol{J}_1$. Размер дифракционного гало, как и следовало ожидать, зависит от размеров кольца. Для круговой апертуры $(\varepsilon=0)$ значение первого минимума интенсивности, то есть функций Бесселя первого порядка $\boldsymbol{J}_1$ определяется хорошо известным выражением $w=0.61\lambda/\alpha$ [1]. При увеличении ε значение первого минимума уменьшается и в пределе, когда $\varepsilon\rightarrow 1$**,** то разность функций Бесселя первого порядка стремится к функции Бесселя нулевого порядка $\boldsymbol{J}_0$. В этом случае распределение интенсивности в определяется следующим выражением:

$$I(x,y)=I_0(x,y)\left[2J_0(kaw)\right]^2, \qquad (2.2)$$

Так как первый нуль функции Бесселя $\boldsymbol{J}_0$ определен при значении ***kαw*** = **2.40**, то с увеличением ε радиус первого темного кольца дифракционной картины приближается к величине, определяемой значением $w=0.38\lambda/\alpha$. Таким образом, наличие кольцевой апертуры приводит к уменьшению размеров спеклов образующих спекл-картину, и, следовательно, к увеличению чувствительности метода спекл-интерферометрии.

3. Образование спекл-интерферограмм. Для записи одновременно голографических интерферограмм сфокусированных изображений и спекл интерферограмм используется оптическая схема аналогичная интерферометру Майкельсона – с нормальным падением и отражением предметного лазерного луча и наклонным падением опорного лазерного луча. Для записи процесса деформирования элементов конструкций использовался стандартный метод двух экспозиций. Регистрация сфокусированного объекта осуществляется одновременно на две совмещенные фотопластинки, образующие так называемый «сэндвич». «Сэндвич» спекл-фотографии исследуемых поверхностей снимаются при различных внешних условиях – нагрузках. Комбинация «сэндвичей» из различных партий позволяет отследить динамику напряженно-деформируемого состояния поверхности. Оптическая схема регистрации спекл-фотографий отличается от стандартной тем, что в плоскости входного зрачка оптической системы располагается кольцевая диафрагма. При двухэкспозиционном методе на фотопластинках регистрируется одновременно две спекл-картины: спекл-картина поверхности недеформированного объекта и спекл-картина поверхности деформированного объекта, где каждая точка объекта смещается на величину $\boldsymbol{L_i}$ ($\boldsymbol{i}$ – номер исследуемой точки объекта) относительно начального состояния. Эти две независимые спекл-картины в пространстве изображений смещены на величину $\boldsymbol{ML_i}$ (где $\boldsymbol{M}$ – увеличение оптической системы), образуя на фотопластинке сложную дифракционную решетку – спеклограмму с модуляцией по косинусоидальному закону, которая и несет информацию об изменениях, проходящих с поверхностью объекта.

Для расшифровки спеклограмм используется метод Юнга. В этом случае, «сэндвич» фотопластинки, с зарегистрированной спеклограммой, освещаются узким лазерным лучом с диаметром 2$\boldsymbol{r}$. Распределение интенсивности света, дифрагированного на спеклограмме лазерного луча, рассматривается в Фурье-плоскости, то есть рассматривается случай дифракции Фраунгофера. Тогда комплексная амплитуда световой волны в дальнем поле определяется как Фурье-образ амплитудного пропускания спеклограммы, а распределение интенсивности света в этой плоскости имеет следующий вид [2]:

$$I(x,y)=I_0(x,y)\left(\left[\frac{2J_1(k\delta w)}{k\delta w}\right]-\varepsilon^2\left[\frac{2J_1(k\delta w)}{k\varepsilon\delta w}\right]\right)^4\times\left[\frac{2J_1(krw^1)}{(krw^1)}\right]^2\times\left|\cos\left(\frac{\pi x_i ML_i}{\lambda d}\right)\right|^2, \qquad (3.1)$$

где δ – средний размер радиуса спекл-структуры на спеклограмме, определяемый выражением (2.1); $\boldsymbol{d}$ – расстояние от «сэндвич» фотопластинок до экрана, где наблюдаются полосы Юнга; $w^1=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}$, $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{y_1}$ – координаты точки в плоскости экрана относительно оптической оси, где наблюдаются полосы; $\boldsymbol{x_i}$ – координаты $\boldsymbol{i}$ точки исследуемой поверхности объекта.

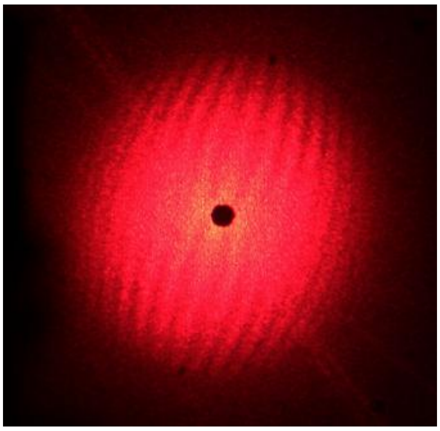


Рис. 1. Фотография полос Юнга с круговой апертурой

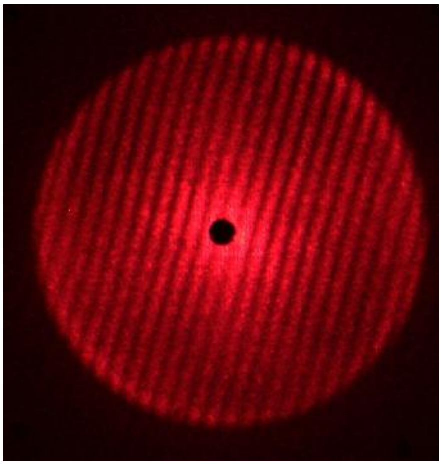


Рис. 2. Фотография полос Юнга с кольцевой апертурой

На рис.1 представлены фотографии полос Юнга, зафиксированные в Фурье плоскости в эксперименте со стандартной оптической схемой, содержащей круговую апертуру диметром 50 мм. На рис.2 представлены фотографии полос Юнга, зафиксированные в Фурье плоскости в эксперименте с оптической схемой, содержащей кольцевую апертуру, имеющую размеры внешнего диаметра 50 мм и внутреннего диаметра 48 мм. Как видно из фотографий, при отсутствии кольцевой апертуры (рис. 1) полосы Юнга имеют нелинейный вид и не различимы на фоне дифракционного гало. Это связано с тем, что при больших апертурах сказываются аберрации оптической системы, а также нелинейный характер записи информации. Уменьшение ширины кольца (рис. 2) приводит к увеличению размера дифракционного гало, как и следует из теоретического анализа, представленного в разделе 2, и кроме того, приводит к возникновению полос Юнга, имеющих равномерную ширину по всему дифракционному полю, в отличие от стандартных полос Юнга, имеющих сигарообразную форму.

Проведем оценку диапазона измерений исходя из, анализа выражения (3.1). Размер дифракционного гало определяется первым множителем. Размеры спеклов на дифракционном поле определяются вторым множителем. Модулирующий множитель **cos**^{2} определяет ширину полос Юнга, по которым измеряют величину смещения исследуемой поверхности. Используя результаты раздела 2 угловой размер дифракционного гало определяется выражением $w=0.38\lambda/\delta$, а размеры спеклов определяется выражением $w=0.61\lambda/r$. Для того, чтобы достаточно точно измерить минимальную ширину полосы Юнга, необходимо, чтобы она имела размер не меньше трех - пятикратного размера спекла, то есть ее угловой размер ограничивается соотношением $w>(3\div5)0.61\lambda/r$, которое и определяет максимальную величину измеряемого смещения. Максимальная измеряемая ширина полосы Юнга определяется размерами дифракционного гало и ее угловой размер ограничивается соотношением $w=0.38\lambda/\delta$, которое и определяет чувствительность, то есть минимальную величину измеряемого смещения.

4. Расшифровка «сэндвич» спекл–фотографий. После обработки «сэндвич» спекл-фотографии расшифровываются по методу Юнга. Если фотопластинки в «сэндвиче» не смещены относительно друг друга в их плоскости, то при сканировании узким лазерным пучком образуются стандартные полосы Юнга, период и направление которых определяют величину и направление смещения в сканируемой точке (рис. 2). Так как записанные «сэндвич» спекл–фотографии образуются за счет сфокусированного изображения исследуемого объекта, то сканируемая точка на «сэндвич» спекл–фотографии точно соответствует точке на поверхности исследуемого объекта. Таким образом, сканирование всего сфокусированного изображения позволяет определить поле перемещений исследуемого деформируемого объекта. Величина смещения в исследуемой точке определяется хорошо известным выражением:

$$\left|L_i\right| = \frac{\lambda d}{M p_i}, \tag{4.1}$$

где p_i – период полос в i точки исследуемой поверхности объекта.

Направление смещения, как известно, ортогонально к направлению периода полос Юнга.

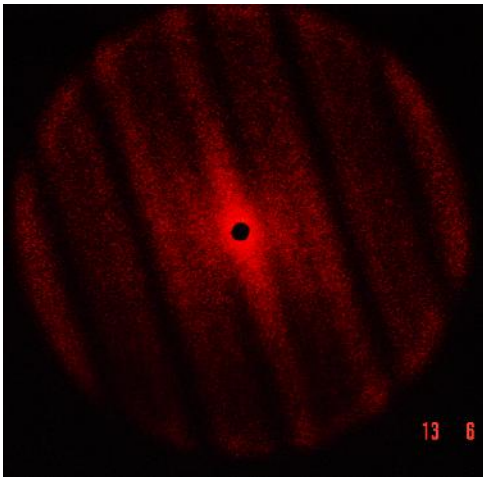


Рис. 3. Фотография муаровых полос.

Если сместить фотопластинки в «сэндвич» блоке относительно друг друга в их плоскости на некоторую небольшую величину h, то узкий лазерный луч будет дифрагировать на двух соседних спекл структурах, зарегистрированных на двух фотопластинках, и каждая из которых создаст свою систему полос Юнга. Наложение двух систем полос Юнга приводит к образованию муаровой картины со своим периодом полос. На фотографии 3 представлена такая муаровая картина полос.

Предлагается следующий алгоритм расшифровки муаровых картин для нахождения деформаций в исследуемой точке. В исследуемой точке получают две системы муаровых полос, которые получаются при смещении одной из фотопластинок из «сэндвич» блока в двух взаимно ортогональных направлениях на величину h_1 и h_2. Значение компонент деформаций определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda d}{M P_1 h_1} \sin\beta_1;\ \varepsilon_{yy} = \frac{\lambda d}{M P_2 h_2} \sin\beta_2;\ \varepsilon_{xy} = \frac{\lambda d}{2M}\left(\frac{\sin\beta_1}{P_1 h_1} - \frac{\sin\beta_2}{P_2 h_2}\right), \tag{4.2}$$

где P_1 P_2 – период муаровых полос в двух исследуемых точках, расположенных на расстоянии h_1 и h_2 соответственно; β_1 и β_2 – углы наклона муаровых полос относительно выбранной произвольно ортогональной системы координат.

Таким образом, данный способ позволяет определить компоненты деформаций в плоскости исследуемого объекта. Отметим, что предложенный метод "сэндвич" для записи и расшифровки спекл интерферограмм позволяет исключить смещение исследуемого объекта как целого. Для получения полного значения компонент деформаций необходимо произвести расшифровку голографических интерферограмм сфокусированных изображений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-08-00971.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.
2. Осипов М.Н., Шапошников М.Ю. Применение кольцевой апертурной диафрагмы в спекл-интерферометрии. Компьютерная оптика. Самара-Москва: 2002. Вып.23. С.110-113.

Сведения об авторе:

Осипов Михаил Николаевич – доцент механико-математического факультета, Самарский государственный университет, (846) 278 09 41, (927) 26 35 777

E-mail: osipov@ssu.samara.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАРАЩИВАНИЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ШАРОВОГО ТЕЛА В ПОЛЕ СИЛ СОБСТВЕННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Паршин Д. А.

Исследуется процесс центрально-симметричного наращивания неоднородного по радиальной координате упругого шарового тела в поле сил собственной гравитации. Дается постановка неклассической начально-краевой задачи механики твердого тела, описывающей процесс квазистатического деформирования рассматриваемого наращиваемого тела в случае малых деформаций. Строится решение поставленной задачи. Полученное напряженное состояние рассматриваемого наращиваемого тела сравнивается с состоянием аналогичного по размеру и свойствам мгновенно сформированного самогравитирующего шарового тела. Последнее находится из решения классической задачи теории упругости для тела постоянного состава.

Результаты данной работы могут быть, в частности, положены в основу построения геомеханической модели, учитывающей процесс постепенного формирования Земли вследствие сферической аккреции.

1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс центрально-симметричного притока к некоторому точечному центру вещества, находящегося в поле сил собственной гравитации. Предположим, что этот процесс приводит к зарождению и дальнейшему послойному росту твердого шарового тела, причем непрерывное включение присоединяемого вещества в состав последнего не приводит к появлению в нем отличных от нуля напряжений вблизи поверхности роста. Также будем предполагать, что в описанном процессе наращивания формируется изотропное тело, обладающее, однако, радиальной неоднородностью свойств. Считая это тело линейно упругим, поставим задачу исследовать процесс квазистатического развития его напряженно-деформированного во время наращивания при условии малости возникающих деформаций.

Отметим, что аналогичная задача о деформировании однородного упругого шарового тела в собственном гравитационном поле решена в [1] на основании тех же подходов, что используются и в настоящей работе. Более общая задача о наращивании вязкоупругого стареющего шара в произвольном центрально-симметричном силовом поле решена в [2]. Результаты решения некоторых других подобных задач о наращивании различных деформируемых тел в полях массовых сил можно найти, например, в [3–12].

В настоящей работе рассмотрим такой частный случай неоднородности формируемого в результате наращивания тела, при котором модуль сдвига G и плотность массы μ не зависят от его точки. В этом случае уравнение состояния будет иметь вид

$$\mathbf{T}/G = 2\mathbf{E} + [\kappa(r) - 1]\,\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{E}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{E}$ — тензоры напряжений и малой деформации, $\mathbf{1}$ – единичный тензор 2-го ранга, $\kappa(r) = [1 - 2\nu(r)]^{-1}$, $\nu(r)$ – коэффициент Пуассона, зависящий от радиальной координаты r.

Очевидно, что во всем наращиваемом шаровом теле в каждый момент времени справедливо стандартное уравнение локального равновесия

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{f}$ — вектор плотности объемных сил. В случае рассматриваемого силового поля самогравитации шара с однородным распределением массы имеем $\mathbf{f} = -\mathbf{e}_r 2cr$, где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, направленный из данной точки к центру шара, $c = \tfrac{2}{3}\pi\gamma\mu^2$, γ — гравитационная постоянная [13].

Поскольку растущее шаровое тело непрерывно пополняется новой гравитирующей массой, оказывающей воздействие на уже сформированную его часть, то напряженно-деформированное состояние этого тела развивается во времени, даже при отсутствии реологических проявлений в механическом поведении материала. Таким образом, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор точки тела, t — время. В рассматриваемом случае упругого материала в качестве t можно, естественно, взять любой параметр, строго монотонно изменяющийся с течением времени.

В силу принятых выше предположений относительно характера роста в точках формируемого шара будет иметь место следующее начальное условие:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \mathbf{0}, \tag{1.3}$$

где $\tau_*(r)$ — момент включения материального слоя радиуса r в состав растущего шара. Если $a(t)$ — радиус шара в момент времени t, то, очевидно,

$$a(\tau_*(r)) \equiv r\,. \tag{1.4}$$

Дифференцируя последнее тождество по r, находим, что $\dot{a}(\tau_*(r))\,\tau'_*(r) \equiv 1$, то есть

$$\tau'_*(r) \equiv 1/\dot{a}(\tau_*(r))\,. \tag{1.5}$$

Здесь и ниже производная по r обозначается штрихом, а производная по t — точкой.

Действия оператором дивергенции на распределение начальных условий (1.3) во всей области $0 < r < a_{\mathrm{fin}}$, которую будет занимать шар в момент времени, принимаемый нами за момент окончания формирования, получаем [14]

$$[\nabla\cdot\mathbf{T}(\mathbf{r},t)]\big|_{t=\tau_*(r)} + \nabla\tau_*(\mathbf{r})\cdot\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r},\tau_*(r)) = \mathbf{0}\,. \tag{1.6}$$

Вычисляя с учетом (1.5) градиент $\nabla\tau_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r\tau'_*(r) = \mathbf{e}_r 1/\dot{a}(\tau_*(r))$ и используя уравнение равновесия (1.2), из (1.6) будем иметь во всей занимаемой окончательно сформированным шаром области соотношение $\mathbf{e}_r\cdot\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r},\tau_*(r)) = -\mathbf{e}_r 2cr\,\dot{a}(\tau_*(r))$. Рассматривая его лишь на поверхности $r = a(t)$, являющейся границей растущего шара в текущий момент времени t, и учитывая, что в процессе непрерывного роста наряду с (1.4) справедливо тождество $\tau_*(a(t)) \equiv t$, получаем граничное условие для скоростей изменения напряжений на текущей поверхности шара:

$$\mathbf{e}_r\cdot\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r},t) = -\mathbf{e}_r q(t), \quad r = a(t)\,,$$

где введено обозначение

$$q(t) = 2c\,a(t)\,\dot{a}(t)\,. \tag{1.7}$$

Чтобы сформулировать замкнутую начально-краевую задачу, описывающую эволюцию напряженно-деформированного состояния растущего шара, перейдем от определяющего соотношения (1.1) к его аналогу в скоростях: $\dot{\mathbf{T}}/G = 2\mathbf{D} + [\kappa(r)-1]\,\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}$, где $\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{v})$ — тензор скоростей деформации, $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ — векторное поле скоростей движения частиц наращиваемого шара в процессе его деформирования. Также продифференцируем по времени уравнение равновесия (1.2): $\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$. Добавляя еще условие неподвижности центральной точки шара, приходим к следующей неклассической начально-краевой задаче для однородного дифференциального уравнения с неоднородным краевым условием на границе:

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0},\ \ \dot{\mathbf{T}}/G = 2\mathbf{D} + [\kappa(r)-1]\,\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D},\ \ \mathbf{D} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{v}), \quad 0 < r < a(t)\,;\\
\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad r = 0\,; \qquad \mathbf{e}_r\cdot\dot{\mathbf{T}} = -\mathbf{e}_r q(t), \quad r = a(t)\,;\\
\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad t = \tau_*(r)\,.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Для сравнения отметим, что напряженно-деформированное состояние самогравитирующего мгновенно сформированного шарового тела радиуса a с теми же свойствами, что и рассматриваемый наращиваемый шар, описывается следующей классической краевой задачей для неоднородного дифференциального уравнения с однородным краевым условием на границе:

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot\mathbf{T} = \mathbf{e}_r 2cr\,,\ \ \mathbf{T}/G = 2\mathbf{E} + [\kappa(r)-1]\,\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{E},\ \ \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{u}), \quad 0 < r < a\,;\\
\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad r = 0\,; \qquad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad r = a\,.
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещения точек ненаращиваемого шара.

Заметим, что задача (1.8) относительно величин $\mathbf{v}$, $\mathbf{D}$, $\dot{\mathbf{T}}$ без начального условия, если в ней время t считать параметром, и задача (1.9) относительно величин $\mathbf{u}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{T}$ с математической точки зрения являются частными случаями одной и той же классической задачи линейной теории упругости для неоднородного самогравитирующего шара, дополнительно нагруженного центральными поверхностными силами:

$$\nabla\cdot\mathbf{T} = \mathbf{e}_r 2cr\,,\ \ \mathbf{T}/G = 2\mathbf{E} + [\kappa(r)-1]\,\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{E},\ \ \mathbf{E} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{u}), \quad 0 < r < a\,;$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{0},\quad r=0;\qquad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{T}=-\mathbf{e}_r q,\quad r=a. \tag{1.10}$$

2. Построение решения краевой задачи. Построим аналитическое решение краевой задачи (1.10). В силу сферической симметрии имеем $\mathbf{u}=\mathbf{e}_r u(r)$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r\varepsilon_r(r)+(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)\varepsilon_\vartheta(r),\quad \varepsilon_r=u',\quad \varepsilon_\vartheta=u/r, \tag{2.1}$$

где ε_r и ε_ϑ — величины радиальной и окружной деформации, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — произвольные единичные векторы, дополняющие вектор $\mathbf{e}_r$ в данной точке до ортонормированного базиса. С учетом (2.1) из определяющего соотношения (1.1) получаем, что

$$\mathbf{T}=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r\sigma_r(r)+(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2)\sigma_\vartheta(r),$$

$$\sigma_r/G=[\kappa(r)+1]\varepsilon_r+2[\kappa(r)-1]\varepsilon_\vartheta,\quad \sigma_\vartheta/G=2\kappa(r)\varepsilon_\vartheta+[\kappa(r)-1]\varepsilon_r, \tag{2.2}$$

где σ_r и σ_ϑ — радиальное и окружное напряжения. В результате уравнение равновесия (1.2) дает обыкновенное уравнение

$$\sigma_r'+2(\sigma_r-\sigma_\vartheta)/r=2cr. \tag{2.3}$$

Используя представления (2.2) и (2.1), вычисляем

$$\sigma_r-\sigma_\vartheta=2G(\varepsilon_r-\varepsilon_\vartheta),\quad (\varepsilon_r-\varepsilon_\vartheta)/r=u'/r-u/r^2\equiv(u/r)'=\varepsilon_\vartheta'.$$

В итоге уравнение (2.3) принимает вид $(\sigma_r+4G\varepsilon_\vartheta)'=2cr$. Интегрируя данное уравнение, получаем соотношение

$$\sigma_r+4G\varepsilon_\vartheta=A+cr^2, \tag{2.4}$$

откуда

$$\sigma_r=A+cr^2-4G\varepsilon_\vartheta. \tag{2.5}$$

Здесь константа A подлежит определению из краевого условия на границе шара.

Исключая из соотношений (2.2) величину ε_r и привлекая (2.5), находим

$$\sigma_\vartheta=\Delta(r)(A+cr^2)+2G\varepsilon_\vartheta, \tag{2.6}$$

где введено обозначение $\Delta(r)=[\kappa(r)-1]/[\kappa(r)+1]$.

Возвращаясь к уравнению (2.4), вычисляем с использованием (2.2) и (2.1)

$$\sigma_r+4G\varepsilon_\vartheta=G[\kappa(r)+1](\varepsilon_r+2\varepsilon_\vartheta),\quad \varepsilon_r+2\varepsilon_\vartheta=u'+2u/r\equiv(r^2u'+2ru)/r^2\equiv(r^2u)'/r^2.$$

В итоге уравнение (2.4) переписывается в виде $G(r^2u)'=r^2(A+cr^2)/[\kappa(r)+1]$. Интегрируя это уравнение, получаем $u=r[Ak_{(2)}(r)+ck_{(4)}(r)]/G+B/r^2$, где введены функции

$$k_{(l)}(r)=\frac{1}{r^3}\int_0^r\frac{\eta^l d\eta}{\kappa(\eta)+1}. \tag{2.7}$$

Константа B подлежит определению из условия неподвижности центра шара.

Заметим, что в силу известных ограничений на значения коэффициента Пуассона имеют место неравенства $0\le(\kappa+1)^{-1}\le 3/4$. Поэтому, считая функцию $\kappa(r)$ непрерывной при $r>0$ и применяя правила Лопиталя-Бернулли и дифференцирования интеграла по верхнему пределу, находим, что $\lim\limits_{r\to+0} rk_{(l)}(r)=\tfrac{1}{2}\lim\limits_{r\to+0} r^{l-1}/[\kappa(r)+1]=0$ при $l>1$. Таким образом, для выполнения условия $u\xrightarrow[r\to+0]{}0$ неподвижности центральной точки необходимо положить $B=0$. В результате

$$u=r[Ak_{(2)}(r)+ck_{(4)}(r)]/G. \tag{2.8}$$

Из (2.8) находим $G\varepsilon_\vartheta=Gu/r=Ak_{(2)}(r)+ck_{(4)}(r)$. Тогда на основании (2.5) и (2.6)

$$\sigma_r=A[1-4k_{(2)}(r)]+c[r^2-4k_{(4)}(r)],\quad \sigma_\vartheta=A[\Delta(r)+2k_{(2)}(r)]+c[r^2\Delta(r)+2k_{(4)}(r)]. \tag{2.9}$$

Удовлетворяя теперь краевому условию $\sigma_r\big|_{r=a}=-q$ на границе шара, записываем соотношение $-q=A[1-4k_{(2)}(a)]+c[a^2-4k_{(4)}(a)]$, из которого находим константу A:

$$A=-\{q+c[a^2-4k_{(4)}(a)]\}/[1-4k_{(2)}(a)]. \qquad (2.10)$$

3. Напряжения в растущем и нерастущем шаре. Итак, решение обобщенной краевой задачи (1.10), содержащей в качестве входных данных два параметра — c и q, — дается формулами (2.7) – (2.10). Распоряжаясь соответствующим образом значениями входных параметров, мы можем на основании построенного решения задачи (1.10) получить решения интересующих нас задач (1.8) и (1.9).

Для получения решения задачи (1.8) нужно в формулах (2.8) – (2.10) заменить напряжения σ_r и σ_ϑ скоростями изменения соответствующих напряжений в растущем теле, а перемещение u — скоростью v движения частиц растущего тела. При этом следует считать $c=0$, $a=a(t)$, $q=q(t)$, где функция $q(t)$ задается формулой (1.7). В итоге будем иметь:

$$\dot\sigma_r=-\frac{2c\,a(t)\,\dot a(t)}{1-4k_{(2)}(a(t))}[1-4k_{(2)}(r)],\quad \dot\sigma_r=-\frac{2c\,a(t)\,\dot a(t)}{1-4k_{(2)}(a(t))}[\Delta(r)+2k_{(2)}(r)].$$

Отсюда, учитывая начальное условие (1.3), находим эволюцию напряжений в рассматриваемом растущем шаровом теле:

$$\sigma_r=-c[1-4k_{(2)}(r)]\alpha(r,t),\quad \sigma_\vartheta=-c[\Delta(r)+2k_{(2)}(r)]\alpha(r,t),$$

$$\alpha(r,t)=\int_{\tau_*(r)}^{t}\frac{2a(\tau)\,\dot a(\tau)\,d\tau}{1-4k_{(2)}(a(\tau))}=\int_{r}^{a(t)}\frac{2\xi\,d\xi}{1-4k_{(2)}(\xi)}.$$

При выполнении в последнем равенстве замены переменной интегрирования использовано тождество (1.4).

Если предположить, что имеющийся в данный момент шар радиуса a на протяжении всего предыдущего процесса формирования не испытывал деформирующего воздействия собственного гравитационного поля, а испытал его лишь в данный момент времени, то напряжения в таком шаре, как уже отмечалось, будут описываться краевой задачей (1.9). Для получения ее решения нужно в формулах (2.8) – (2.10) положить $q=0$. Таким образом, в нерастущем шаровом теле, аналогичном по размеру и свойствам рассматриваемому растущему, будем иметь:

$$\sigma_r=c\{r^2-4k_{(4)}(r)-\beta[1-4k_{(2)}(r)]\},\quad \sigma_\vartheta=c\{r^2\Delta(r)+2k_{(4)}(r)-\beta[\Delta(r)+2k_{(2)}(r)]\},$$

$$\beta=[a^2-4k_{(4)}(a)]/[1-4k_{(2)}(a)].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00553-а, 09-08-01180-а, 09-08-01194-а, 10-01-92653-ИНД_а), а также Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук (Программа 13 ОЭ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Паршин Д.А. Наращивание гравитирующего упругого шара // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвящ. 85-летию со дня рожд. акад. И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. Т. 1. С. 157–161.
2. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83.
3. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166.
4. Manzhirov A.V. and Parshin D.A. Accretion of solids under mass forces // Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation. Proceedings. IIT Delhi, November 22–24, 2006. New Delhi: IIT Delhi, 2006. P. 71–79.

5. Паршин Д.А. Проблемы наращивания упругих и вязкоупругих тел в полях массовых сил // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды Международной конференции, посвящ. 95-летию акад. НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Цахкадзор, 25–28 сентября 2007 г. Ереван: Ереванский гос. ун-т архитектуры и строительства, 2007. С. 318–321.
6. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Смежные задачи механики наращиваемых тел и геомеханики // Неклассические задачи геомеханики. Труды Всероссийской объединенной научной сессии Научных советов РАН по механике деформируемого твердого тела и по проблемам горных наук. Якутск, 16–20 июня 2008 г. / Отв. ред. С.М. Ткач. Якутск: Изд-во ЯНЦ СО РАН, 2008. С. 130–137.
7. Manzhirov A.V. and Parshin D.A. Raising of a semi-circular vault // Prace IPPT – IFTR Reports. 2008. No. 2. P. 358–359.
8. Manzhirov A.V. and Parshin D.A. Erection of a heavy semicircular arch structure // Topical Problems in Solid Mechanics / Ed. by N.K. Gupta, A.V. Manzhirov. New Delhi: IIT Delhi, 2008. P. 245–264.
9. Манжиров А.В., Паршин Д.А. О новых результатах в классических проблемах гео- и горных наук // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XII Международной конференции. Ростов-на-Дону, 1–5 декабря 2008 г. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2008. С. 145–149.
10. Паршин Д.А. Моделирование процесса наращивания вращающегося упругого шарового тела // Механика сплошных сред как основа современных технологий. Труды XVI Зимней школы по механике сплошных сред (Электронный ресурс). Пермь: ИМСС УрО РАН, 2009. Электрон. оптич. диск (CD).
11. Parshin D.A. Raising of a heavy semi-circular vault on a rigid centering // J. Phys.: Conf. Ser. 2009. Vol. 181. 012058 (http://iopscience.iop.org/1742-6596/181/1/012058).
12. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Возведение тяжелого полуциркульного свода // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: Сб. трудов Ин-та проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН / Отв. ред. Р.В. Гольдштейн. М.: Наука, 2009. С. 382–421.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Изд. 7-е, испр. М.: Наука, 1988. 509 с.
14. Manzhirov A.V. The general non-inertial initial-boundaryvalue problem for a viscoelastic ageing solid with piecewise-continuous accretion. J. Appl. Math. Mech. 59 (5). P. 805–816.

Сведения об авторе:

Паршин Дмитрий Александрович – научный сотрудник, Учреждение Российской академии наук. Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, лаборатория моделирования в механике деформируемого твердого тела, +7 495 434 3456
E-mail parshin@ipmnet.ru

ЗАВИСИМОСТЬ ФОРМЫ И ПЛОЩАДИ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА ОТ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ

Петросян Т.Л.

В работе приведены теоретические данные о гистерезисе, согласно теории наследственности при разных законах изменения внешней нагрузки. В теории наследственности в качестве ядра ползучести применены экспоненциальные соотношения. Рассматривается влияние постоянной составляющей (степени асимметрии) периодического напряжения на форму и площадь петли гистерезиса.

Известно, что явление образования гистерезиса связано с различными условиями и факторами [1,2,3]. Из важных факторов, влияющих на гистерезисные потери в материале, являются закон изменения напряжения во времени и асимметрия цикла нагружения [4,5,6]. Существует ряд экспериментальных способов [3,4,8], которые позволяют определить рассеяние энергии при циклических деформациях. Исследования, выполненные этими способами, дали обширные и достаточно надежные сведения относительно площади гистерезисных петель.

Значительно беднее опытный материал, относящийся к формам гистерезисных петель. Формой петли обусловлен закон изменения сил внутреннего трения в процессе циклического деформирования. Это означает, что исследованием зависимости формы петли гистерезиса от закона изменения напряжения, можно получить зависимость изменения сил внутреннего трения в процессе циклического деформирования от изменения внешней нагрузки.

Целью настоящей работы является исследование формы петель гистерезиса, определяемых, согласно теории наследственности ползучести при разных законах изменения напряжения за цикл.

Для описания деформаций при переменных напряжениях $²(t)$, согласно линейной теории наследственности будем иметь:

$$¥(t)=\frac{²(t)}{E}+\int_0^t ²(¯)K(t-¯)d¯ , \tag{1}$$

где $K(t-¯)$ – ядро ползучести, имеющее вид:

$$K(t-¯)=C\sim e^{-\sim(t-¯)} . \tag{2}$$

Рассмотрим разные законы изменения напряжения [6,7]

$$²(t)=²_0\left(\sin(μt+¨)+ª\right), \tag{3}$$

$$²(t)=²_0\left(\cos(μt)+\frac{1}{3}ª\cos(3μt)\right), \tag{4}$$

$$²(t)=\frac{8²_0}{®^2}\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)μt . \tag{5}$$

Графическое представление законов изменения напряжения (3), (4) и (5) представлены на рис.1

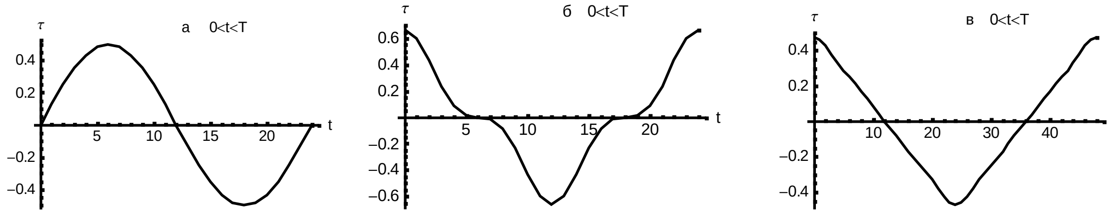


Рис.1. Законы изменения напряжения: (а – по выражению (3), б – по выражению (4), в – по выражению (5))

Для представленных законов изменения напряжения (3), (4) и (5), с учетом (2) получим соотношения $\tau(t)$ соответственно

$$\gamma(t)=\tau_0\left\{\frac{\alpha-\cos\omega t}{E}+C\left[\alpha\left(1-e^{-\beta t}\right)+\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\left(\beta e^{-\beta t}-\beta\cos\omega t-\omega\sin\omega t\right)\right]\right\} \tag{6}$$

$$\gamma(t)=\frac{\tau_0\left(\cos\omega t+\frac{1}{3}\cos 3\omega t\right)}{E}+\tau_0 C\beta\left[\left(\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}+\frac{\beta\cos 3\omega t+3\omega\sin\omega t}{3\left(\beta^2+9\omega^2\right)}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}+\frac{\beta}{3\left(\beta^2+9\omega^2\right)}\right)e^{-\beta t}\right] \tag{7}$$

$$\gamma(t)=\frac{8\tau_0}{\pi^2}\left\{\frac{1}{E}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\omega t+C\beta\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta\cos(2k-1)\omega t+(2k-1)\omega\sin(2k-1)\omega t}{(2k-1)^2\left(\beta^2+(2k-1)^2\omega^2\right)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta}{(2k-1)^2\left(\beta^2+(2k-1)^2\omega^2\right)}e^{-\beta t}\right]\right\} \tag{8}$$

Выражения (3) и (6), (4) и (7), (5) и (8) представляют собой уравнения петли гистерезиса в параметрической форме. Параметром здесь служит время t . Задаваясь значениями параметра t в пределах $0\le t\le T$, получим значения функции $\gamma(t)$ и $\tau(t)$ за период, следовательно, можем построить петлю $\tau(\gamma)$. Построенные петли гистерезиса приведены на рис.2.

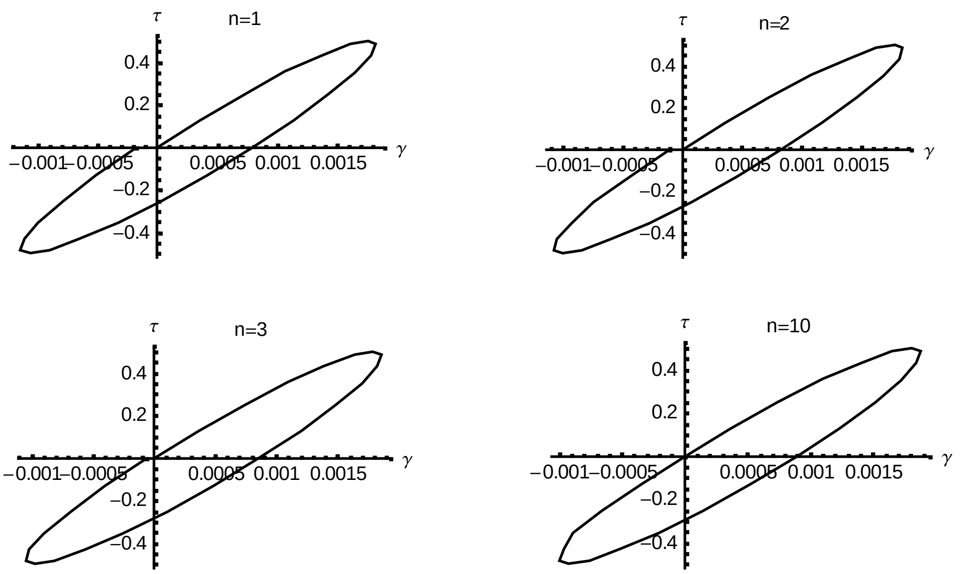


Рис.2. Петли гистерезиса при изменении напряжений, согласно (3) ($\alpha=0$, n – номер цикла).

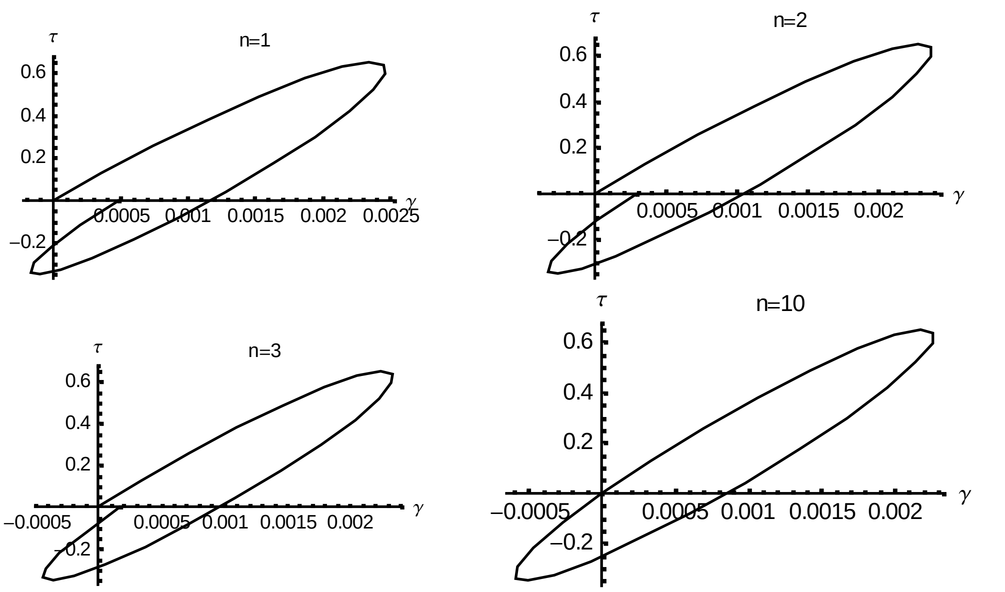


Рис.3. Петли гистерезиса при изменении напряжений, согласно (3) ($\alpha = 0.3$, n – номер цикла).

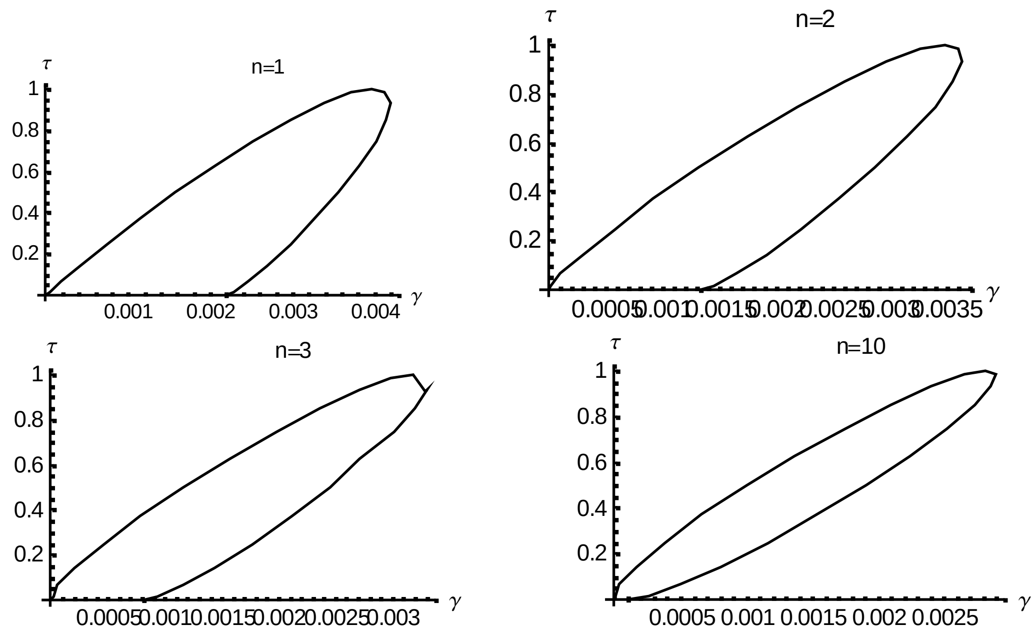


Рис.4. Петли гистерезиса при изменении напряжений, согласно (3) ($\alpha = 1$, n – номер цикла).

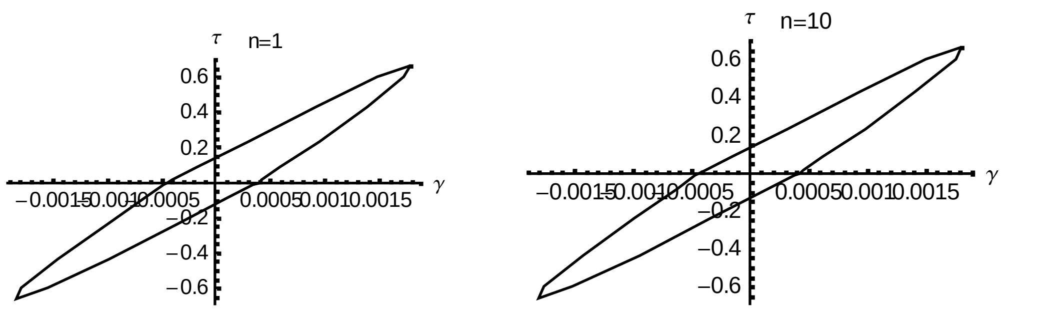


Рис.5. Петли гистерезиса при изменении напряжений, согласно (4) (n – номер цикла).

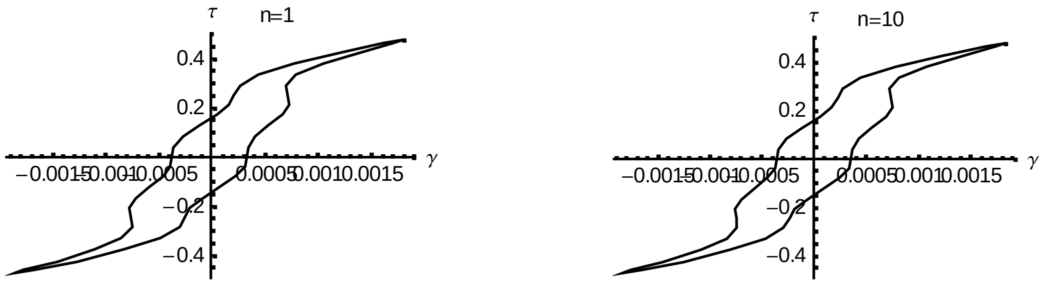


Рис.6. Петли гистерезиса при изменении напряжений, согласно (5) (n – номер цикла).

Как видно из графиков, показанных на рис.2, 3 и 4, петли гистерезиса при гармоническом законе изменения напряжения (3), (после окончания переходного процесса) можно представить в виде эллипса.

При более сложном симметричном законе изменения напряжения (4) петля имеет также эллиптическую форму (рис. 5). Однако, при этом законе изменения напряжения вид петли мало зависит от номера цикла.

Закону изменения напряжения, представляемому выражением (5), соответствует петля с существенным отличием от формы эллипса. Здесь также вид петли мало зависит от номера цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Н.В. Влияние вида напряженного состояния на рассеяние энергии при колебаниях.//В кн.: “Труды научно-технического совещания по демпфированию колебаний”. Киев: Изд-во АН УССР. 1960. С.107-114.
2. Ретнер С.Б., Бугло С.Т. Влияние режима нагружения на разогрев пластмасс при циклическом деформировании. //Механика полимеров. 1979. №3. С.465-473.
3. Балтин Ю. П., Померанцис Я.Р. Влияние наложения статического напряжения растяжения-сжатия на диссипацию энергии циклически деформируемого стеклотекстолита и полистирола при сдвиге. //Механика композиционных материалов. 1979. №4. С.629-633.
4. Гурев А.В., Мирошников Э.В. О форме механического гистерезиса и влияние предварительной пластической деформации на рассеяние энергии. Киев: 1974. С.203-209.
5. Коффин Л.Ф. Влияние среднего напряжения на сдвиг петли гистерезиса деформаций алюминия марки 1100. //Труды американского общества инж-механиков, Теоретические основы инженерных расчетов. 1964. 86. Сер. D. №4. С.42-51.
6. Петросян Т.Л., Симонян А.М. Исследование гистерезиса при малоцикловой ползучести. //Изв.НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.114-121.
7. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131с.
8. Silver, Marshall and Seed M Bolton, Deformation Chatacteristics of Sands Under Cyclic Loading. //Journal of the Soil Mechanics and Foundatious Division. ASCE. Vol. 97. N SN 8, Proc. Paper 8334, August 1971, pp. 1081-1098.

Сведение об авторе:

Петросян Тигран Людвикович – научн. сотрудник Института механики НАН РА, (37410)6743 04, (374 99) 16 50 38, E-mail: tlpetrossyan@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ФРИКЦИОННОГО ПЕРЕНОСА НА МЕХАНИКУ КОНТАКТА ТОРМОЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Погосян А.К., Меликсетян Н.Г.

Показано, что при высокотемпературном трении тормозных фрикционных материалов, независимо от их композиционного состава, процесс фрикционного переноса является постоянно действующим фактором, влияющим на механику контактирования шероховатых поверхностей и, тем самым, определяющим работоспособность пары трения. Установлено, что при создании новых фрикционных материалов следует разработать композиции, способные образовать стабильную пленку переноса на поверхности контртела при сравнительно высоких температурах на фрикционном контакте, так как при этом максимальные значения коэффициента трения перемещаются в область более высоких температур.

В последнее время исследованиям, посвященным явлению фрикционного переноса (ФП) в узлах трения машин, уделяется большое внимание. Это связано со своеобразием механических, физических и химических изменений, протекающих на фрикционном контакте, и обусловлено тем, что образование пленки переноса играет значительную роль в процессах трения и изнашивания различных материалов. В частности, свойства перенесенных пленок изменяют условия механического контактирования шероховатых поверхностей и определяют эксплуатационные характеристики трибоматериалов [1,2].

Фрикционные тормозные полимерные материалы, как правило, работают в условиях повышенных температур, генерируемых в процессах стационарного и повторно-кратковременного режимов трения и, естественно, с увеличением нагрузки, скорости и времени (фактически температуры) толщина пленки ФП изменяется. Следовательно, для нормального функционирования узлов трения тормозных устройств в условиях высоких температур важно исследовать динамику процесса ФП и механизм образования пленок переноса с тем, чтобы при разработке новых материалов фрикционного назначения предусмотреть возможные физические модели контактирования и разрушения поверхностей, следовательно, научно обоснованно управлять их эксплуатационными свойствами [3,4].

С этой целью проводились исследования образцов из различных фрикционных тормозных полимерных материалов на лабораторной установке типа И-32М по методике ГОСТ 31341-2007. Фрикционная пара состоит из металлического диска диаметром 130 мм и образца исследуемого материала в виде призмы размером 18x18x15 мм. Конструкция диска фрикционной пары предусматривает два отверстия, расположенные диаметрально противоположно по среднему радиусу трения, для специальных вставок диаметром 10 мм из одноименного материала диска, предназначенных для исследования в последствии поверхностей трения методом растровой электронной микроскопии. До испытания каждого образца из фрикционного материала, две такие вставки жестко устанавливались в отверстиях и для выравнивания их поверхности с поверхностью трения диска совместно обтачивались до получения поверхностной шероховатости R_z = 20-16,5 мкм. В качестве материала диска использован серый чугун марки СЧ 20 (ГОСТ 1412-79). Температура измерялась термопарой типа ХК-0,5, установленной в центральное отверстие фрикционного материала и находящейся в непосредственной близости от контакта с поверхностью трения диска.

Экспериментальному исследованию подверглись фрикционные материалы на основе каучукового, смоляного и комбинированного связующих. До начала экспериментов, в условиях поверхностных температур ниже 100 ^{0}С, производилась приработка пары трения. Эксперименты проводились в два этапа. На первом этапе выявились зоны изменения коэффициента трения в зависимости от поверхностной температуры, а на втором этапе проводились повторные опыты до достижения максимальных значений коэффициента трения. Результаты лабораторных испытаний различных материалов на фрикционную теплостойкость в стационарном режиме трения приведены на рис. 1.

Как видно для материалов 6КХ-1Б и 8-45-62, на основе каучукового связующего максимальные значения коэффициента трения наблюдаются при сравнительно низких температурах, чем у материалов 145-40-69 и 1-43-60А на основе комбинированного связующего. Материал АГ-1Б на основе каучукового связующего имеет максимальный коэффициент трения при тех же температурах, что и наиболее износостойкий материал

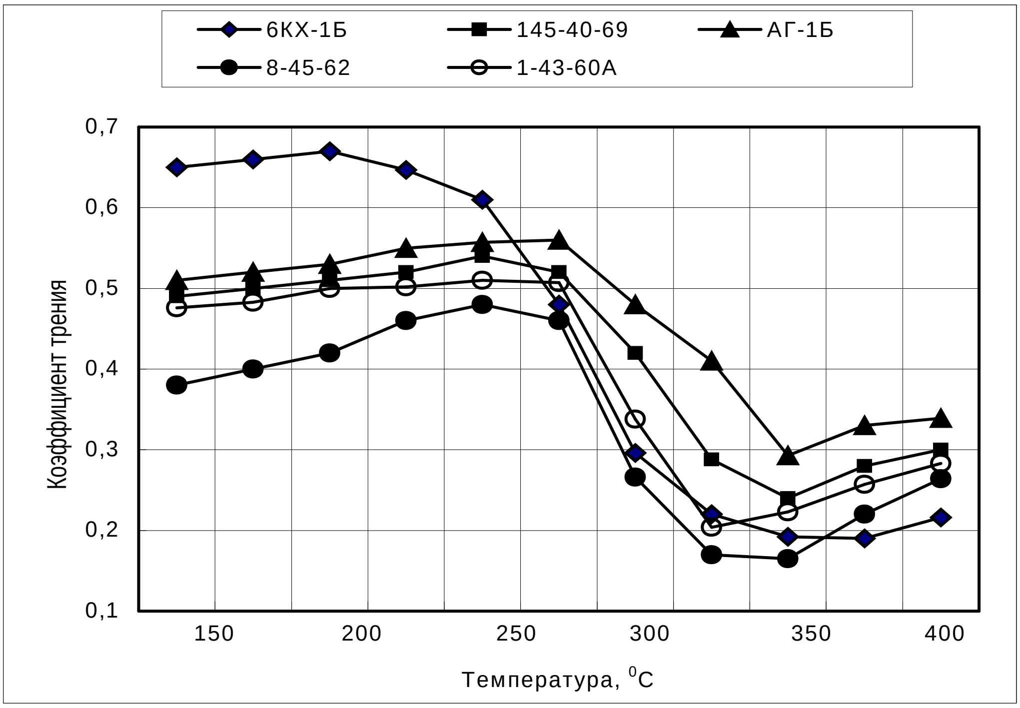


Рис.1. Кривые фрикционной теплостойкости материалов
при P_a= 2,0 МПа, $V_{ск}$=16,7 м/с

145-40-69 [5]. Далее, с повышением поверхностной температуры, у всех материалов наблюдается уменьшение коэффициента трения. Минимальные значения коэффициентов трения материалов наблюдается при трении в температурной зоне 300-350 ^{0}С. Если учитывать, что уменьшение коэффициента трения характеризуется деструкционными процессами, то можно отметить, что деструкция каучукового связующего, по сравнению с комбинированным связующим, протекает при сравнительно низких температурах.

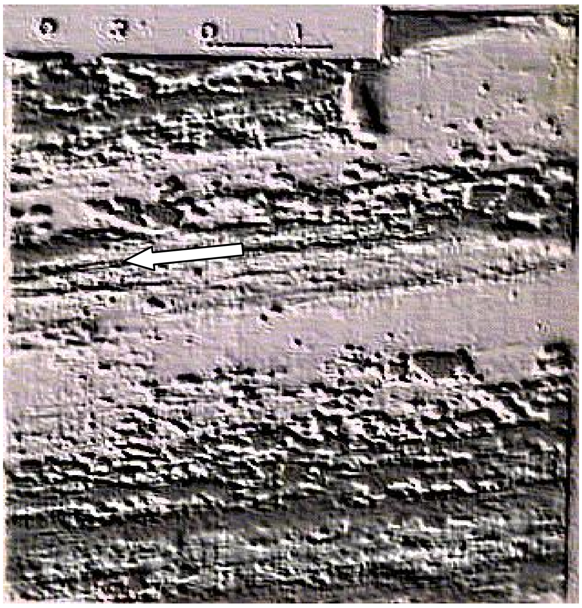
После экспериментов, поверхности трения вставок исследовались методом растровой электронной микроскопии. Микрофотографии поверхностей трения приведены на рис.2.

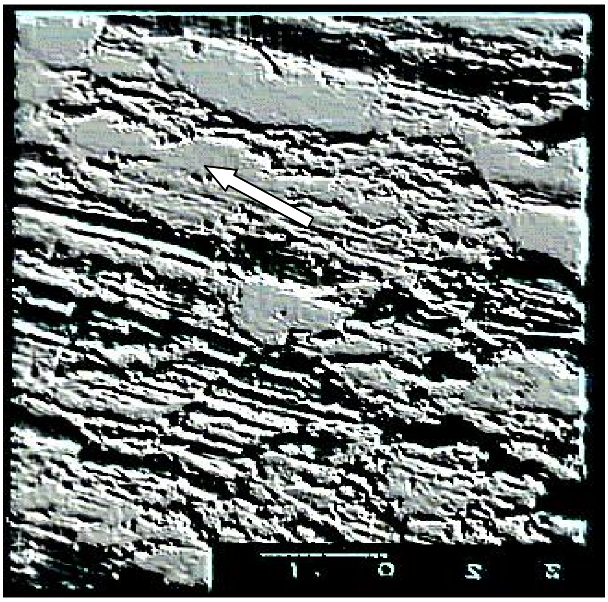
Видно, что все исследуемые фрикционные материалы способны образовать на поверхности трения контртела пленку фрикционного переноса той или иной природы. При трении материалов 8-45-62 и 1-43-60А на поверхности контртела образованная пленка фрикционного переноса, в основном, имеет дискретный характер и состоит из отдельных перенесенных фрагментов, ориентированных по направлению скольжения. При трении композиций 145-40-69 и АГ-1Б, которые по сравнению с другими материалами имеют более высокие фрикционно-износные характеристики [5], поверхность контртела, в основном, покрывается монолитной пленкой фрикционного переноса. Вид пленки (выглаженные участки) свидетельствует о том, что в момент образования она подверглась пластическому деформированию.

Полученные результаты показывают, что при трении тормозных фрикционных материалов, независимо от композиционных составов, процессы фрикционного переноса являются постоянно действующими факторами. Механизм образования пленок переноса и механика контактирования поверхностей взаимодействия элементов пары трения объясняются следующим образом.

Вначале трение происходит по адсорбированной на поверхности контртела пленке, которая после предварительного трения стирается. Затем образуются первые частицы износа вследствие усталостного разрушения фрикционного материала, которые покрывают поверхность контртела, в результате чего возрастают значения коэффициента трения (первый участок кривых фрикционной теплостойкости – до температур 250-280°С). Не прилипшие к поверхности контртела частицы выходят из зоны контактирования в виде продуктов износа. На поверхности трения контртела постепенно образуется пленка фрикционного переноса и, когда

8-45-62 x 1000 АГ-1Б x 1000





145-40-69 x1000 1-43-60А x 1000

Рис.2. Микрофотографии поверхности чугунного контртела после трения в паре с различными материалами. Стрелкой показано направление скольжения

она становится сплошной и монолитной, значения коэффициента трения достигают максимума. Пленка фрикционного переноса в этот период находится в твердом состоянии. Трение происходит между фрикционным материалом и образованной на поверхности контртела перенесенной пленкой.

С продолжением трения температура, генерируемая в зоне трения, возрастает и начинается процесс деструкции связующего (второй участок кривых фрикционной теплостойкости — до температур 300-400 °С). Постепенно материал фрикционного переноса переходит в размягченное состояние, приводящего к разрушению перенесенной пленки. При дальнейшем повышении температуры вновь наблюдается рост значений коэффициента трения (третий участок кривых фрикционной теплостойкости — выше 400 °C), что объясняется образованием новой пленки фрикционного переноса на поверхности металлического элемента пары трения.

Таким образом, процессы фрикционного переноса существенно влияют на механику контактирования поверхностей элементов пар трения тормозных устройств, а способность образования пленки фрикционного переноса является важной характеристикой фрикционной пары. Вновь разрабатываемые тормозные фрикционные полимерные материалы должны образовать пленку фрикционного переноса на поверхности контртела при сравнительно высоких температурах, в область которых смещаются максимальные значения коэффициента трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Погосян А.К. Расчет толщины пленки фрикционного переноса и условия ее работоспособности. //Трение и износ. 1984. Т.5. № 2. С. 204–211.
2. Kar M.K., Bahadur S. Estimation of Wear Particle Thickness in Polymer-Metal Sliding. //Wear. 1980. Vol. 63. № 1. P.105-112.
3. Мышкин Н.К., Петроковец М.И., Ковалев А.В. Трибология полимеров: адгезия, трение, изнашивание и фрикционный перенос. //Трение и износ. 2006. Т. 27. №4. С.429–443.
4. Погосян А.К., Оганесян К.В., Исаджанян А.Р. Фрикционный перенос и самосмазывание полимеров. //Трение и износ. 2010. Т.31. № 1. С.109–119.
5. Погосян А.К., Сысоев П.В., Меликсетян Н.Г. и др. Фрикционные композиты на основе полимеров. Минск: Информтрибо, 1992. 218 с.

Сведения об авторах:

Погосян Альберт Князевич,

Государственный инженерный университет Армении, член-корр. НАН РА, докт. техн. наук, проф., зав. аспир. отд. ГИУА, Ереван, ул. Теряна 105.
Тел.: (37410) 589884. E-mail: pogosian@seua.am

Меликсетян Норик Галустович,
Ванадзорский филиал Государственного инженерного университета Армении, докт. техн. наук, доцент, г. Ванадзор, ул. Шинарарнери 12. Тел.: (374322) 56704. E-mail: n_meliksetyan@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ПРИСАДОК НА ИЗНОСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В УСЛОВИЯХ ГРАНИЧНОЙ СМАЗКИ

Погосян А. К., Сароян В. В., Бониатян К. Р.

Изучено изменение трибологических свойств различных присадок в зависимости от их содержания в смазочных материалах. На основе обработки экспериментальных данных предложены зависимости содержания присадки, нормальной нагрузки, линейного износа и коэффициента трения, с помощью которых осуществлен выбор наилучшего типа и состава присадок.

Одна из важных особенностей в создании и эксплуатации современной техники является обеспечение надежности и долговечности узлов трения и деталей машин, а также их эффективное и целенаправленное использование, что возможно осуществить трибологическими средствами, используя, в частности, различные смазки и присадки. Любое контактное взаимодействие твердых тел, связанное с их относительным движением, становится причиной возникновения сил трения между соприкасающимися поверхностями, которые не только поглощают энергию двигателя, а также изменяют размеры деталей трибосопряжения и воздействуют на точность работы машины. При неблагоприятных условиях внешнее трение переходит во внутреннее, возникает сопряжение трущихся поверхностей, что может привести к заеданию, становясь таким образом причиной выхода из строя машины. Одним из особо эффективных способов решения данной проблемы является улучшение трибологических свойств смазочных материалов, чего можно достичь применением высокоэффективных присадок. С увеличением содержания в узлах трения смазочных материалов, содержащих поверхностноактивные вещества (присадки), обычно коэффициент трения снижается до определенной величины, после чего, при последующем возрастании содержания присадок, практически не изменяется. Молекулы адсорбированного слоя (пленки) на поверхности трения находятся в динамическом равновесии с основной смазкой и дальнейшее увеличение содержания присадок в этом слое способствует снижению площади непосредственного контакта металлических поверхностей, что выражается следующей формулой [1]:

$$f = \alpha_м f_м + \left(1 + \alpha_м\right) f_с ,$$

где f – коэффициент трения граничной смазки, $f_м$ и $f_с$ – коэффициенты трения, соответственно, при контакте чистой металлической и покрытой граничной пленкой поверхностей, $\alpha_м$ – часть металлического контакта.

Согласно Б.В. Дерягину [2], при малом содержании компонентов присадок адсорбируемые молекулы на поверхностях трения распределены в горизонтальном расположении (рис. 1, *I*), что соответствует величине минимальной энергии взаимопритяжения этих молекул и твердого тела. В адсорбированном слое с увеличением содержания присадки величина $\alpha_м$ снижается и соответственно уменьшается коэффициент f трения. На металлической поверхности, с увеличением числа адсорбированных молекул, молекулы или их группы начинают постепенно занимать вертикальное положение. Все большее число групп активных молекул входят во взаимодействие с поверхностью твердого тела в сравнении с малым количеством отделенных от поверхности неполярных молекул. Наличие на поверхности вертикально (или косо), а также горизонтально ориентированных молекул приводит к возникновению поверхностей трения с ”молекулярной шероховатостью” (рис. 1, *II*), вследствие чего возрастает величина коэффициента трения.

Дальнейшее увеличение содержания присадки в основной смазке вертикальная ориентация распространяется на большее количество адсорбированных молекул (рис. 1, *III*), поверхность контакта распрямляется и величина коэффициента трения снова снижается. Когда наконец формируется плотный слой вертикально ориентированных молекул присадки (рис. 1, *IV*), поверхности трения отделяются друг от друга вследствие ослабления адгезионного взаимодействия.

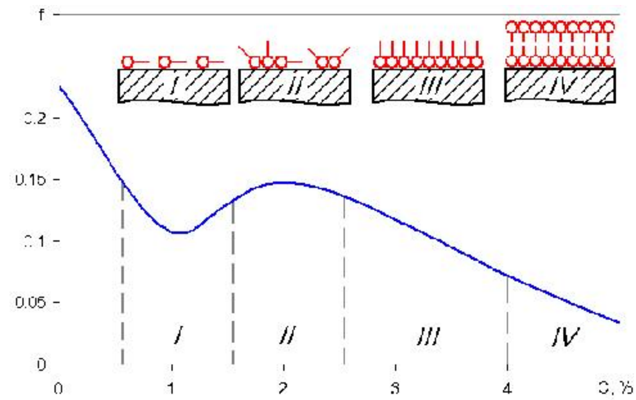
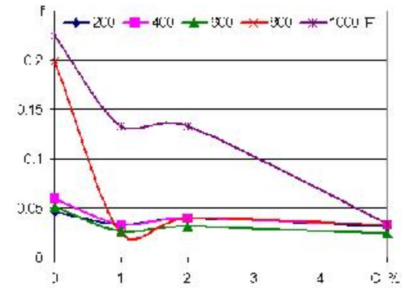
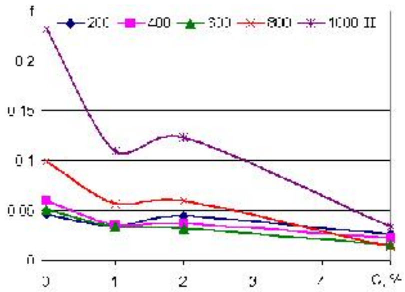


Рис. 1. Изменение коэффициента трения *f* в зависимости от характера распределения поверхностно-активных молекул

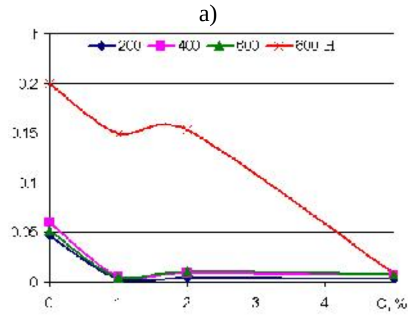
В зависимости от состава присадок возможны различные химические реакции между активными элементами присадки и металлической поверхностью трения, что может сказаться на закономерности изменения силы (коэффициента) трения [3].



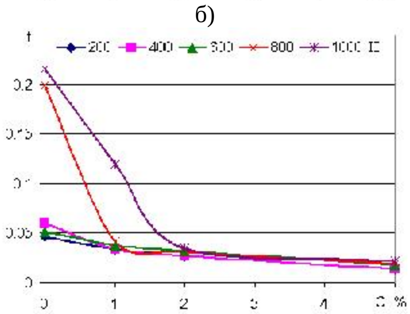
а)



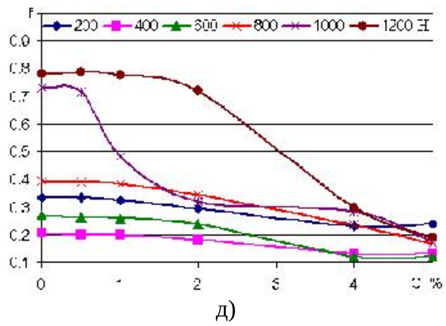
б)



в)



г)



д)

Рис. 2. Влияние содержания присадок *C* на коэффициент трения *f* смазочных композитов при различных нагрузках: а) И-40А+ ДХБ, б) И-40А + ДХЭ, в) И-40А + ДХК, г) И-40А+ К-АБ14, д) ОПОК + ТЭА

Действительно, экспериментальные исследования на четырех шариковых машинах трения [4] показывают, что ввиду особенности адсорбированного слоя поверхности трения динамика изменения коэффициента трения *f* разностороння. Так, при добавлении в индустриальную смазку И-40А дихлорбутена (ДХБ), дихлорэтана (ДХЭ) и дихлоркаприлета (ДХК) коэффициент трения (рис. 2, а, б и в) сначала резко снижается, после стабилизируется, затем однотонно снижается, полностью соответствуя приведенной выше закономерности (рис. 1). Причиной снижения коэффициента трения может быть также взаимодействие активных атомов (например, хлора) с ювенильными поверхностями, в результате чего формируются защитные слои (хлорид металла), которые по сравнению с металлом имеют слабое сопротивление сдвигу и легко разрушаются. Влияние содержания присадки, богатого азотом, катамина АБ-14 (К-АБ14) на коэффициент трения приводит к его непрерывному снижению благодаря антикоррозионному свойству азота (рис. 2, г). Для оценки воздействия содержания триэтаноламина (ТЭА) на фрикционные свойства смазочных материалов с отходом производства олеиновой кислоты (ОПОК) необходимо учесть, что ТЭА был применен в качестве загустителя. Содержание ТЭА до 2 % практически никак не воздействует на величину коэффициента трения (рис. 2, д), однако дальнейшее возрастание его плотности вновь приводит к снижению коэффициента трения вследствие воздействия антикоррозионности ТЭА и уменьшения кислотности.

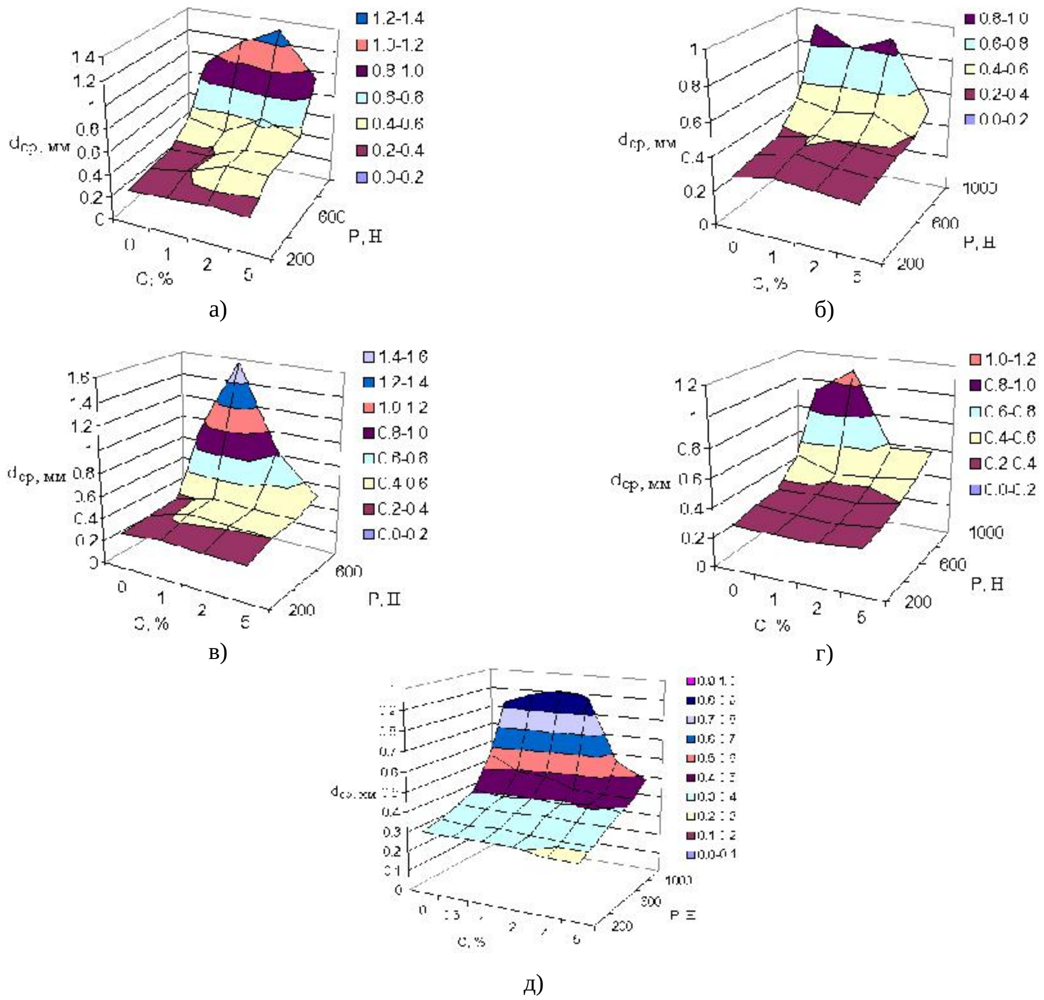


Рис. 3. Влияние содержания *С* и нагрузки пары трения *Р* на величину показателя износа $d_{ср}$ для различных смазочных материалов:
а) И-40А + ДХБ, б) И-40А+ ДХЭ, в) И-40А+ ДХК, г) И-40А+ К-АБ14, д) ОПОК + ТЭА

Зависимости величины показателя износа $d_{ср}$ указанных смазочных материалов от содержания присадки *С* и осевой нагрузки *Р* в виде трехмерных графиков приведены на рис. 3. Возрастание содержания хлорсодержащих присадок (рис. 3, а, б, в) при умеренных нагрузках (до 800 Н) приводит к определенному возрастанию износа и только при больших нагрузках (более 800 Н) износ уменьшается. Причиной этого является быстрое разрушение хрупких слоев хлорида, поэтому хлорсодержащие присадки являются типичными антизадирочными присадками, их следует применять только в тяжелонагруженных и высокотемпературных узлах трения или при одновременном использовании антифрикционных присадок.

Аналогичная зависимость для присадки К-АБ14 с превалирующим содержанием азота приведена на рис. 3, г. Как видим, при умеренных нагрузках (до 800 Н) увеличение плотности присадки сначала снижает величину износа до определенного минимального значения, затем оно возрастает. Увеличение плотности присадки способствует снижению адгезионного взаимодействия. Дальнейшее увеличение плотности присадки приводит к возрастанию износа, что является следствием увеличения химической активности среды (содержания хлора). В случае больших нагрузок, наоборот, увеличение содержания хлора способствует снижению износа благодаря быстрому разрушению хрупких слоев хлорида и способности их восстановления.

От воздействия содержания ТЭА в смазочных материалах с отходом олеиновой кислоты на величину показателя износа $d_{ср}$ (рис. 3,д) следует, что при нагрузках до 1000 Н величина износа с увеличением плотности ТЭА практичеки не зависит от содержания присадки. В случае более высоких нагрузок износ уменьшается вследствие повышения несущей способности смазочного материала, что имеет место ввиду антикоррозионного воздействия ТЭА и загущения смазки.

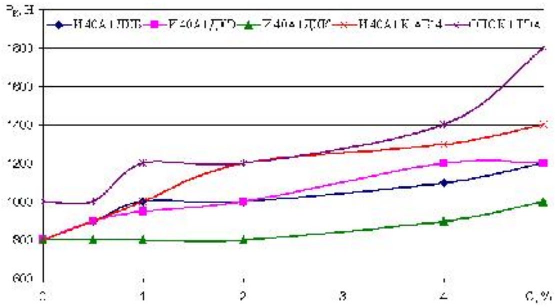


Рис. 4. Влияние содержания присадок *C* на критическую нагрузку пары трения $P_к$ для различных смазочных композитов

Зависимости критической нагрузки $P_к$ от содержания присадки *C* (рис. 4) характеризуют антизадирочные свойства присадок. Как видно, для всех присадок критическая нагрузка в зависимости от его плотности возрастает, следовательно, для обеспечения высоких антизадирочных свойств необходимо увеличить плотность присадки.

Таким образом, проведенные исследования дают возможность при различных режимах эксплуатации произвести оптимальный выбор типа и состава присадки, обеспечив высокие трибологические характеристики смазочных материалов, используемых в узлах трения машин и механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Основы трибологии (трение, износ, смазка) / Под общ. ред. А. В. Чичинадзе. М.: Машиностроение, 2001. 664 с.
2. Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
3. Погосян А.К., Сароян В.В., Бониатян К.Р. Улучшение трибологических свойств смазок с помощью галогенсодержащих органических присадок. //Межд. конф. по технол. и техника автоматиз. 2009. Ереван, 2010, с.119-125.
4. Смазочные материалы. Антифрикционные и противоизносные свойства, методы испытаний: Справочник / Под ред. Р. М. Матвеевского, В. Л. Лашхи, И. А. Буяновского и др. М.: Машиностроение, 1989. 224 с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Погосян Альберт Князевич – Государственный инженерный университет Армении, чл.-корр. НАН РА, докт. техн. наук, проф., (374 93) 74 86 58, E-mail: pogosian@seua.am

Сароян Вильям Володяевич – канд. техн. наук, ассистент кафедры прикладной механики ГИУА, (374 91) 36 55 04, E-mail: williamsaroyan@rambler.ru

Бониатян Кристофер Роланович – аспирант кафедры машиноведения ГИУА, (374 10) 22 40 31, (374 91) 32 18 07. E-mail: boniatian@hotmail.com

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Погосян Д.М.

В данной работе рассматривается задача устойчивости несжимаемой прямоугольной пластинки за пределами упругости, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других свободны. К опертым краям приложены распределенные сжимающие напряжения. Доказывается, что принцип Сен-Венана в некотором смысле неприложим к телам типа пластинок, вытянутых в одном каком-либо направлении.

Рассмотрим несжимаемую прямоугольную пластинку (рис.1), два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других свободны. Расстояние между шарнирно опертыми краями обозначим через a , растояние между свободными краями – через $2b$.

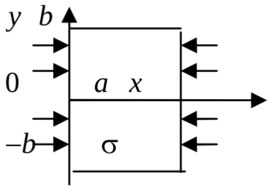


Рис.1

Пусть к шарнирным краям пластинки приложены равномерно распределенные сжимающие напряжения. Принимается, что предварительное напряженное состояние пластинки находится за пределом упругости. Критическое значение этого напряжения, при достижении которого пластинка теряет устойчивость, может быть найдено обычными методами. Для этой цели следует найти минимальное значение параметра σ, при котором дифференциальное уравнение [1]

$$\left(1-\frac{3}{4}\frac{1-t-r}{1-r}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{h\sigma}{\left(1-r\right)D'}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &w|_{x=0}=w|_{x=a}=0, \qquad M_x|_{x=0}=M_x|_{x=a}=0 \\ &M_y|_{y=\pm b}=0, \qquad \breve{N}_y|_{y=\pm b}=0 \end{aligned} \qquad (1.2)$$

имеет решение, отличное от тождественного нуля.

Здесь $w=w\left(x,y\right)$ – прогиб пластинки; D' – цилиндрическая жесткость с коэффициентом Пуассона: $\nu=0.5$; M_x, M_y – изгибающие моменты; а $\breve{N}_y$ – обобщенное перерезывающее усилие, определяемое выражениями:

$$M_x=-D'\left[\left(1-r\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\frac{3}{4}\left(1-s\right)\Pi\left(\sigma,w\right)\right]$$

$$M_y=-D'\left[\left(1-r\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$\breve{N}_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+2\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$H=-D'\left[\frac{1}{2}\left(1-r\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}-\frac{3}{4}\left(1-s\right)\frac{\tau}{\sigma_i^2}\Pi\left(\sigma,w\right)\right], \quad \Pi\left(\sigma,w\right)=\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$r=(1-\varphi_c)\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)\left[\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\frac{t}{\frac{\sqrt{t}}{2}+\varphi_c\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)}\right],\quad t=\frac{\varphi_k}{\left(1+\sqrt{\varphi_k}\right)^2}$$

$$0\le r<1,\qquad 0<t\le 1;$$

$$\varphi_k=\frac{E_k}{E},\ \varphi_c=\frac{E_c}{E},\qquad E_k=\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i},\ E_c=\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$$

E_k, E_c – касательный и секущий модули.

Два последних граничных условия (1.2) означают обращение в нуль изгибающих моментов и перерезывающей силы на свободных границах пластинки [1].

Представляя решение краевой задачи (1.1), (1.2) в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\sin\frac{\pi n}{a}x, \tag{1.3}$$

приходим к отысканию наименьшего собственного значения краевой задачи:

$$f_n^{(4)}-2\lambda f_n^{(2)}+kf_n=0 \tag{1.4}$$

$$y=0:\quad \frac{\partial f_n}{\partial y}=0\ ,\qquad \frac{\partial f_n^3}{\partial y^3}=0\qquad \text{(условия симметрии)}$$

$$y=b:\quad \frac{\partial f_n^2}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 f_n=0,\qquad \frac{\partial f_n^3}{\partial y^3}-\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\frac{\partial f_n}{\partial y}=0\ , \tag{1.5}$$

где

$$k=\left(\frac{1-r+3t}{4(1-r)}\lambda-\frac{h\sigma}{(1-r)D'}\right)\lambda,\qquad \lambda=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2. \tag{1.6}$$

Общие решения уравнений (1.4) имеют вид:

$$f_n=A_1\mathrm{sh}(z_1y)+A_2\mathrm{ch}(z_1y)+A_3\mathrm{sh}(z_2y)+A_4\mathrm{ch}(z_2y) \tag{1.7}$$

Подстановка (1.7) в граничные условия (1.5) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, A_3, A_4. Из условия равенства нулю детерминанта указанной системы получаем следующее уравнение:

$$\mathrm{z}_2\left(\mathrm{z}_1^2-\frac{1}{2}\lambda\right)\left(\mathrm{z}_2^2-\frac{3}{2}\lambda\right)\mathrm{thz}_2-\mathrm{z}_1\left(\mathrm{z}_2^2-\frac{1}{2}\lambda\right)\left(\mathrm{z}_1^2-\frac{3}{2}\lambda\right)\mathrm{thz}_1=0 \tag{1.8}$$

где $z_{1,2}=\sqrt{\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-k}}$

$$k=\frac{(1-r+3t)\lambda-\sigma_1}{4(1-r)}\lambda,\qquad \lambda=\left(\frac{\pi b}{a}\right)^2,\quad \sigma_1=\frac{4hb^2}{D'}\sigma,\qquad t+r-1\ge 0 \tag{1.9}$$

Из (1.8) найдем критическое значение σ для весьма длинной ($\lambda\to\infty$) и узкой ($\lambda\to 0$) пластинки, когда $\lambda^2-k>0$ и $\lambda^2-k\le 0$ соответственно.

1. Пусть $\lambda\to\infty$. При этом уравнение (1.8) примет вид

$$\mathrm{z}_2\left(\mathrm{z}_1^2-\frac{1}{2}\lambda\right)\left(\mathrm{z}_2^2-\frac{3}{2}\lambda\right)-\mathrm{z}_1\left(\mathrm{z}_2^2-\frac{1}{2}\lambda\right)\left(\mathrm{z}_1^2-\frac{3}{2}\lambda\right)=0\ . \tag{1.10}$$

В силу обозначений (1.9), решения уравнения (1.10) будут вида:

$$\sigma_{k1,2}=\frac{D'}{4hb^2}3(t+r-1)\lambda,\ \ \sigma_{k3}=\frac{D'}{4hb^2}\left(3t-2(1-r)\left(1\pm\sqrt{2}\right)\right)\lambda \tag{1.11}$$

При $\lambda^2-k>0$, в соответствии с обозначениями (1.9), получаем

$$\sigma > \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{(t+r-1)D'}{h} \tag{1.12}$$

Из решений (1.11) удовлетворяет условию (1.12) только

$$\sigma_{k1} = \frac{D'}{4hb^2}\left(3t - 2(1-r)\left(1-\sqrt{2}\right)\right)\lambda \tag{1.13}$$

При $\lambda^2 - k \le 0$, в соответствии с обозначениями (1.9), получаем

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda \pm i\sqrt{k-\lambda^2}}, \quad \sigma \le \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{(t+r-1)D'}{h} \tag{1.14}$$

Из решений (1.11) следует, что минимальное σ_k, удовлетворяющее условию (1.14), определяется по формуле

$$\sigma_{k2} = \frac{D'}{4hb^2}\left(3t - 2(1-r)\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\lambda\ , \tag{1.15}$$

где $\dfrac{3}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}t + r > 1$.

В предположении, что форма потери устойчивости бесконечно длинной пластинки есть цилиндр, прогиб $w = w(x)$ можно представить в виде

$$w = A\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right).$$

Тогда согласно уравнению (1.1) получим

$$\left(1 - \frac{3}{4}\frac{1-t-r}{1-r}\right)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \frac{h\sigma}{(1-r)D'} = 0$$

$$\sigma_k^* = \frac{D'}{4hb^2}(3t + 1 - r)\lambda \tag{1.16}$$

Из выражений (1.13), (1.15), (1.16) очевидно, что

$$\sigma_k^* - \sigma_{k1} = (1-r)\left(3 - 2\sqrt{2}\right), \quad \sigma_k^* - \sigma_{k2} = (1-r)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

Таким образом, из выражений (1.13),(1.15),(1.16) следует, что предельное значение критического $\pm$ для весьма длинной пластинки меньше критического σ_k^*, соответствующего цилиндрической форме потери устойчивости.

Аналогичные вопросы исследованы для задач локализованной неустойчивости упругой полубесконечной пластинки [3].

Объяснение к вышеизложенному, согласно [2], следует искать в том факте, что принцип Сен-Венана в некотором смысле неприложим к телам типа пластинок, вытянутых в одном каком-либо направлении. Отличие напряженного состояния такой пластинки со свободными короткими краями от напряженного состояния другой пластинки с теми же, но шарнирно опертыми краями в том, что напряженное состояние не изчезает столь быстро при увеличении шарнирно опертых длинных сторон, как это предполагается в принципе Сен-Венана.

В соответствии с выражениями (1.11), введем следующие обозначения:

$$\xi_c = \frac{4\sigma_k^* hb^2}{D'\lambda}, \qquad \xi_{1,2} = \frac{4\sigma_{1,2} hb^2}{D'\lambda} \tag{1.17}$$

В табл.1 представлены численные значения ξ_c и $\xi_{1,2}$ при $t = 1$ и различных r.

Таблица 1

$t=1$	$r=0$	$r=0.1$	$r=0.2$	$r=0.5$	$r=0.5$	$r=0.9$	$r=1.0$
ξ_c	4.0	3.9	3.8	3.5	3.3	3.1	3.0
ξ_1	3.83	3.75	3.66	3.41	3.25	3.08	3.0
ξ_2	-1.83	-1.35	-0.86	0.56	1.55	2.52	3.0

2.Теперь, пусть $\lambda \to 0$. Тогда уравнение (1.8) примет следующий вид:

$$z_2^2\left(z_1^2-\frac{1}{2}\lambda\right)\left(z_2^2-\frac{3}{2}\lambda\right)-z_1^2\left(z_2^2-\frac{1}{2}\lambda\right)\left(z_1^2-\frac{3}{2}\lambda\right)=0 \tag{1.18}$$

Решения уравнения (1.18) определяются выражениями:

$$\sigma_{k1}=\frac{D'}{4hb^2}3t\lambda \text{ при } \lambda^2-k>0; \tag{1.19}$$

$$\sigma_{k2}=\frac{D'}{4hb^2}3(t+r-1)\lambda \text{ при } \lambda^2-k\le 0 \;. \tag{1.20}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматлит, 1963. С.251-402.
2. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин.// ДАН СССР. 1954. Т. XCV. № 3. С. 477-480.
3. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. //В. сб.: “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем”. Ереван: Изд. ЕГУ, 1997. С. 95-99.

Сведения об авторах

Погосян Диана – аспирантка Института механики НАН Армении. Тел.: (374 93) 64 98 31
E-mail: DianaPogosyan@mail.ru

АСИММЕТРИЧНОЕ РАСКЛИНИВАНИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ОБРАЗОВАНИЕМ ОТРЫВНЫХ ЗОН

Ромашов Г.А.

Одной из актуальных задач динамики деформируемой твердой среды продолжает оставаться задача ее разрушения жестким ударником в процессе проникания [1-5]. Движение тела в среде очень сильно зависит от возникающих областей отрыва среды от тела, которые определяют устойчивость движения. Поэтому при контактном разрушении важным является определение возможных зон отрыва среды от поверхности тела, поскольку их наличие резко меняет баллистические характеристики внешних сил и моментов, действующих на тело со стороны среды [6-7]. Такие проблемы характерны для задач проникания тел при наличии асимметрии движения. Сама асимметрия движения практически всегда присутствует в реальных задачах. В данной работе получено аналитическое решение и проведено исследование процесса стационарного расклинивания среды телом при наличии асимметрии.

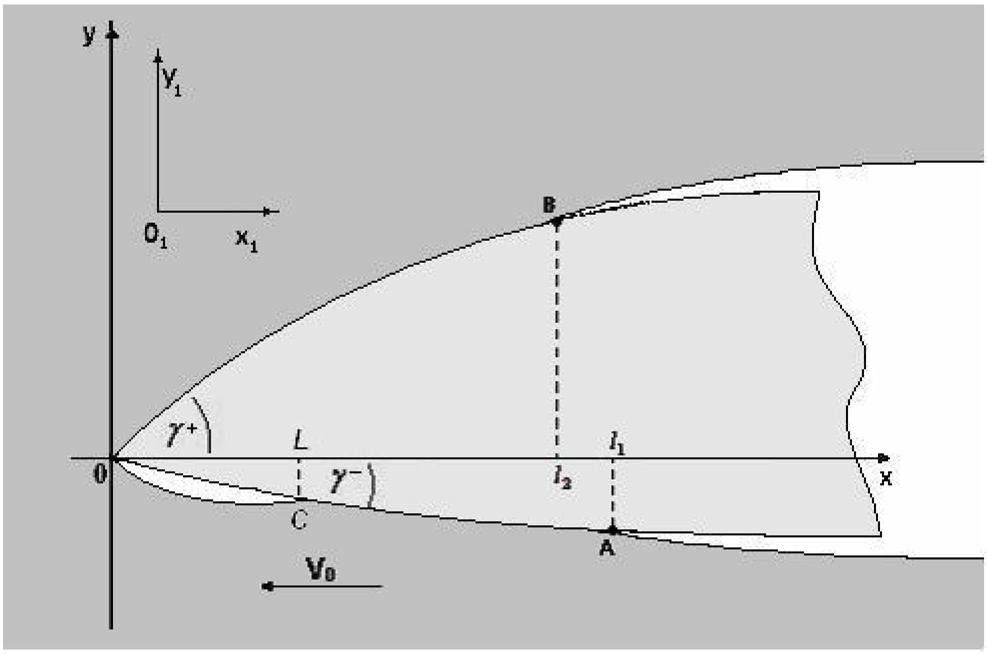


Рис. 1

Будем считать, что тело движется с постоянной скоростью V_0 относительно неподвижной системы координат $O_1X_1Y_1$, а движение среды плоскопараллельное. Отрыв среды от тела происходит в точках А для верхней части контура и В для нижней. Также будем считать углы $¥^{+},¥^{-}$ малыми и $\gamma^{-} < \gamma^{+}$ (рис. 1). В случае асимметрии движения возможен отрыв среды от поверхности тела на стороне меньшего угла γ^{-} в окрестности носовой части тела. На рис. 1 *OC* – область возможного отрыва. Ее размер *L* является неизвестным и должен быть определен в ходе решения.

Основными параметрами задачи являются параметры среды, скорость движения, геометрия поверхности ударника, коэффициент трения и угол атаки, характеризующий асимметрию движения. В широком диапазоне скоростей движения исследовано влияние перечисленных выше параметров на поведение отрывных зон, определены действующие на тело внешние силы и моменты.

На поверхности контакта движущегося тела и среды ставились условия, обеспечивающие контакт и закон Кулона-Мора о наличии сухого трения между средой и телом. На поверхности, соответствующей областям отрыва среды от тела ставились условия равенства нулю внешних усилий. Математически данная смешанная краевая задача сводится к определению двух гармонических функций во внешней области, ограниченной контуром тела и свободными поверхностями по заданным на границе соотношениям между вторыми производными искомых функций.

С использованием конформных отображений, определение решения сведено к задаче сопряжения Римана-Гильберта для полуплоскости. Задача осложняется наличием дополнительных неизвестных в виде размеров областей отрыва. Применяя методы решения краевых задач теории функций комплексного переменного, получено решение задачи в квадратурах [8]. Используя условия нарушения и восстановления контакта, определены области отрыва.

Размер свободной поверхности *L* определяется численно из условия непрерывности скорости в точке отрыва и проверки условия контакта. На рис. 2 приведены графики зависимости длины области отрыва *L* от числа Маха *M* для поперечных волн для тел в форме клина и оживала для углов $\gamma^- = \pi/60$, $\gamma^+ = \pi/40$ и коэффициента трения $k = 0.1$ для диапазона скоростей $V_0 \in (V_R, \sqrt{2}b)$, где V_R – скорость волны Релея, в случае $l_1 = l_2$ (этот случай эквивалентен движению симметричного тела под углом атаки). Зависимость подъемной силы F_L и силы сопротивления F_R от числа Маха *M* для поперечных волн для тел в форме клина и оживала приведены на рис. 3. В табл. 1 представлена зависимость предельного значения меньшего угла γ^- от числа Маха M для поперечных волн, при котором зона отрыва *OC* отсутствует, при фиксированном угле раствора тела $\gamma = \gamma^+ + \gamma^- = \pi/30$ и отсутствии трения.

Отдельный интерес представляет картина обтекания тела оживальной формы в рассматриваемом диапазоне скоростей. В отличие от клина, требуется определить не только свободную поверхность *OC*, но и точки *A*, *B* отрыва среды от тела. При переходе через скорость распространения продольных возмущений отрыв среды из точек *A*, *B* ложится на тело, образуя в диапазоне скоростей $V_0 \in (b,\ 1.01b)$ отдельные, быстро исчезающие при увеличении скорости, зоны отрыва AA_1, BB_1, и дальнейший отрыв среды происходит от вершин оживала *D* и *E* (рис. 2).

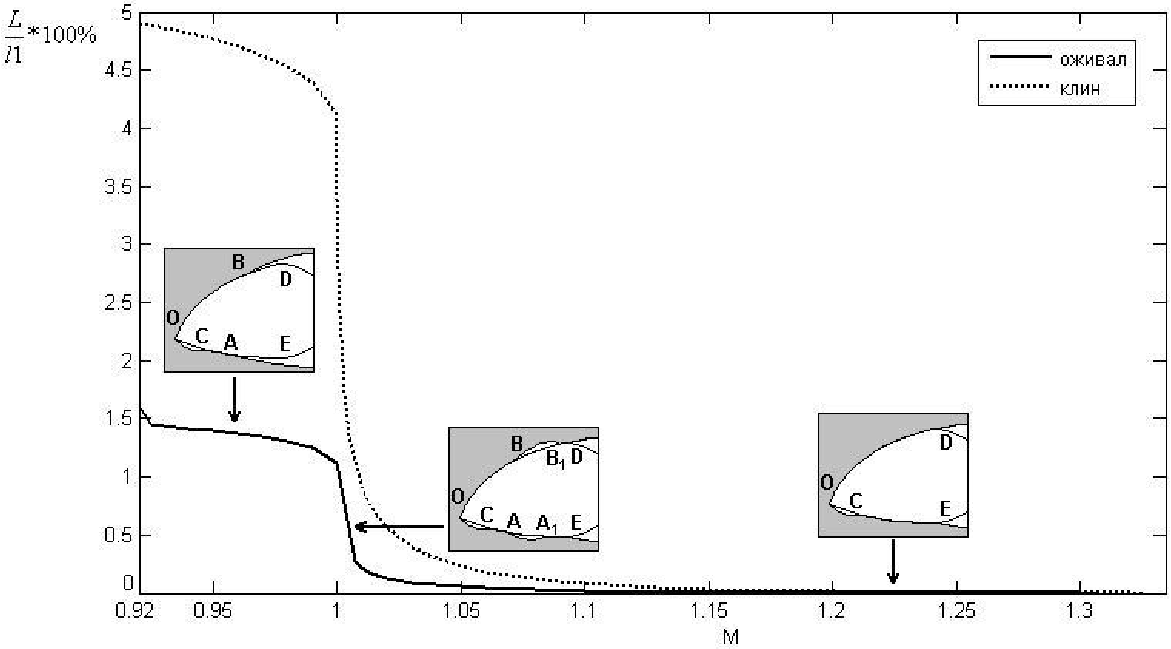


Рис. 2

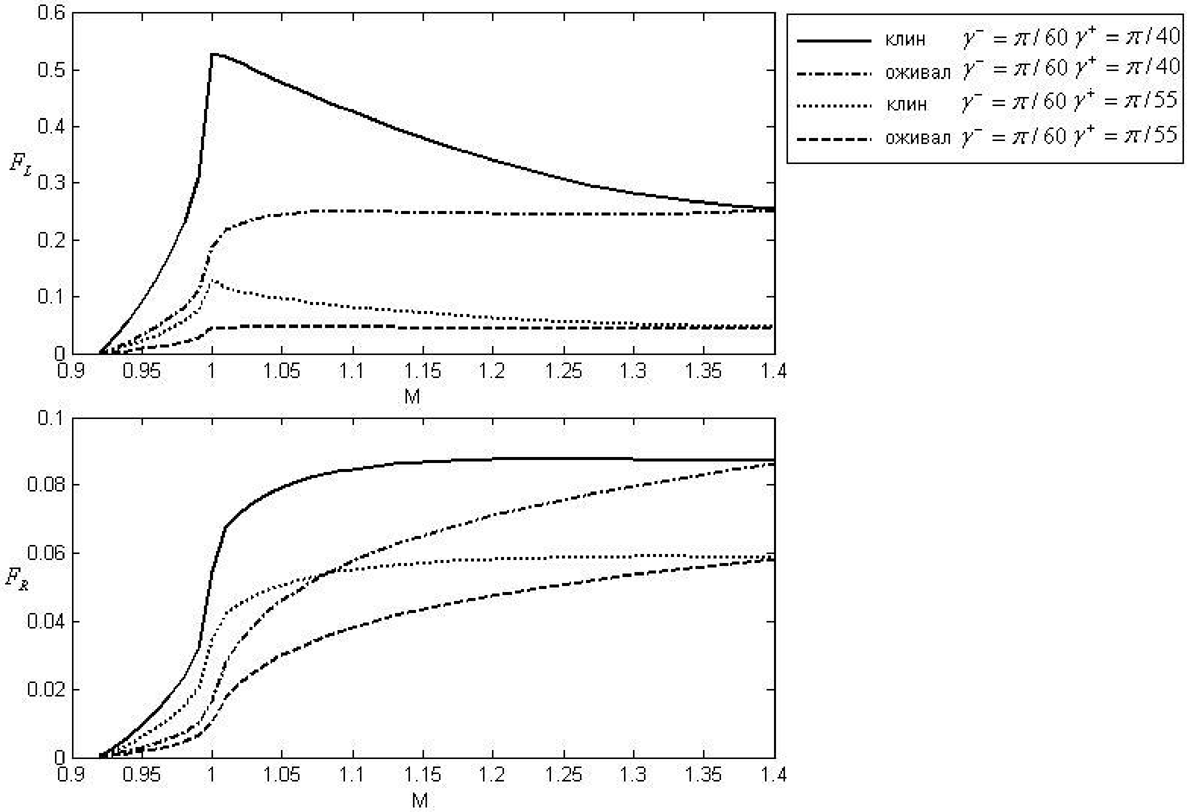


Рис. 3

Таблица 1

γ^-		$\pi/61$	$\pi/65$	$\pi/100$	$\pi/2000$	$\pi/10000$	$\pi/100000$	$\pi/1000000$
M	клин	1.2052	1.3359	1.3877	1.41046	1.41256	1.41369	1.41405
	оживал	1.0722	1.2993	1.3764	1.40888	1.41186	1.41348	1.41398

Подводя общие итоги, можно сделать следующие выводы:

1. Удалось получить аналитическое решение, как в дозвуковом, так и в трансзвуковом диапазоне скорости движения тела (клин и оживал).
2. Во всем диапазоне рассматриваемых скоростей определены точки отрыва среды для контура тела в форме клина и оживала.
3. В случае движения тела оживальной формы при переходе через скорость распространения продольных возмущений, образуются отдельные, быстро исчезающие при увеличении скорости, зоны отрыва.
4. При увеличении скорости движения тела длина области отрыва на носу тела уменьшается (рис.2).
5. Длина зоны отрыва на носу тела при переходе через скорость распространения поперечных возмущений не терпит разрыва. Далее, с увеличением скорости движения, свободная поверхность резко сокращается, что вызвано прекращением влияния на среду перед телом поперечных возмущений, и затем ее размер медленно уменьшается до нуля (рис. 2).
6. Существует предельная величина скорости, при которой исчезает зона отрыва на носу тела (табл. 1). При превышении этой скорости силы, действующие на тело, одинаковы для клина и ударника с формой в виде оживала. Сами силы определяются скоростью ударника, параметрами среды, коэффициентом трения и толщиной тела и не зависят от геометрии тела (рис. 3).

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ 09-08-00396-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А.Я. Проникание (Проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды). М.: Изд. МГУ, 1974.
2. Сагомонян А.Я. Динамика пробивания преград. М.: МГУ, 1988.
3. Павленко А.Л., Апикян Ж.Г. Сверхзвуковое обтекание жесткого клина линейно-упругой средой.// Изв. АН Уз.ССР. Сер. техн. наук. 1969. №2.
4. Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М. Определение механических свойств среды методом динамического внедрения. // Изв. РАН. МТТ. 2001. №2. С.87–96.
5. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Оценки глубин проникания жестких тел в грунтовые среды при сверхзвуковых скоростях входа. Исследование движения твердого тела в глинистой среде. // Докл. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С.181–184.
6. Симонов И. В. Об устойчивости движения удлиненного тела вращения в упругопластической среде при отрыве потока. // ПММ. 2000.Т.64. Вып.2. С. 313–322.
7. Симонов И.В. О классификации траекторий плоскопараллельного движения тела вращения в прочной среде при отрыве потока. // Докл. РАН. 2002. Т.386. №2. С.198–302.
8. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Сведения об авторе:

Ромашов Григорий Александрович – аспирант кафедры газовой и волновой динамики, Московский государственный Университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, +79036741298
E-mail romashovg@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛОВ ЭНЕРГИИ УПРУГИХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ И ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ: ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Рудой Е.М.

В рамках плоской задачи линейной теории упругости рассматривается тело с жестким включением и трещиной, расположенной на части границе включения и упругой матрицы. На внешней границе тела задаются нулевые перемещения. Поверхность трещины свободна от усилий. Тело находится в равновесии под действием объемных сил. Исследуется асимптотика функционала энергии тела при вариации жесткого включения и трещины. Получена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения области, зависящая от решения исходной задачи и вида определяющей возмущение вектор-функции.

В работе рассматривается двухмерная модель упругого тела, содержащего жесткое включение и трещину, расположенную на границе между включением и телом. Считаем, что берега трещины свободны от напряжений. Кроме того, объемная сила действует как на упругую часть тела, так и на жесткую, т.е. смещения жесткого включения в общем случае ненулевые.

Данная работа касается математических вопросов теории трещин, в которой широко используется критерий разрушения Гриффитса. В соответствии с этим критерием развитие трещины начинается тогда, когда производная функционала энергии по параметру возмущения области достигнет некоторой критической величины, зависящей только от свойств материала, из которого изготовлено тело [1,2].

Возможность дифференцирования функционалов энергии по параметру возмущения области исследовалась во множестве работах. Случаи линейных краевых задач в негладких областях можно найти в [3-5]. В работах [6-11] исследовались вариации решений, коэффициентов интенсивности напряжений, а также других различных функций геометрических и механических параметров при изменении формы или росте трещины, в том числе и криволинейной. В указанных работах, как правило, рассматривались однородные тела.

В работах [12-14] исследовались задачи теории упругости для тел, содержащих жесткие включения: в [12] рассматривалась двухмерная задача о жестком круговом включении на границе которого располагается трещина, выведена формула Гриффитса на основе метода комплексного переменного; в [13] исследовалось влияние жесткого включения на распространение трещины в бесконечном теле на основе критерия Ирвина; в [14] рассматривалась задача теории упругости для двух соединенных полупространства с круглой плоской трещиной в плоскости соединения, найдена величина разрушающих усилий на основе критерия Гриффитса.

В настоящем докладе в рамках модели двумерной теории упругости рассматривается существенно неоднородное тело – тело с жестким включением и трещиной. Для общего достаточно гладкого возмущения области получена производная функционала энергии по параметру возмущения. Полученная формула зависит лишь от решения задачи равновесия, определенной в невозмущенной области, и скорости возмущения. В частности, если рассматривать квазистатический рост трещины, то такая производная является формулой Гриффитса.

Полученные в работе результаты могут быть использованы в механике разрушения при анализе прочности конструкций, изготовленных из композиционных материалов и содержащих трещины. Кроме того, результаты полезны при решении задач оптимизации форм упругих тел.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{0,1}$, ω_0 – внутренняя подобласть с липшицевой границей $\partial\omega_0$. Пусть $\partial\omega_0$ состоит из двух частей – γ_0 и $\partial\omega_0 \setminus \gamma_0$. Через ν_0 обозначим единичную внешнюю нормаль к ω_0. Пусть $\gamma_0{}^+$ обозначает берег разреза γ_0, соответствующий направлению нормали ν_0.

Обозначим через $\Omega_0 = \Omega \setminus \gamma_0$ пластину (в рамках двумерной теории упругости), содержащую жесткое включение ω_0 и трещину γ_0, лежащую на части границы между жестким включением и упругой частью тела.

Пусть $U=(u_1,u_2)$ – вектор перемещений. Будем считать, что упругая часть тела подчиняется закону Гука, связывающего между собой тензоры деформаций $\{\varepsilon_{ij}(U)\}$ и напряжений $\{\sigma_{ij}(U)\}$:

$$\varepsilon_{ij}(U)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\qquad \sigma_{ij}(U)=c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(U),$$

где c_{ijkl} - компоненты симметричного и положительно определенного тензора упругости.

Задачу о равновесии тела с жестким включением и трещиной будем формулировать в виде задачи минимизации функционала энергии на множестве допустимых смещений. Для этого определим функциональное пространство

$$H^{1,0}(\Omega_0)=\{v\in H^1(\Omega_0)\quad|\quad v=0 \quad \text{на } \partial\Omega\ \}$$

Кроме того, введем в рассмотрение множество жестких перемещений

$$R(\omega_0)=\{\rho=(\rho_1,\rho_2)\quad|\quad \rho\ =Bx+C,x\in\omega_0\}\ ,$$

где

$$B=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix},\quad C=(c^1,c^2)\ ,\quad c^1,c^2,b\in R\ .$$

Определим множество допустимых смещений

$$K_0(\Omega_0)=\{U\in H^{1,0}(\Omega_0)\times H^{1,0}(\Omega_0),U\in R(\omega_0)\}.$$

Здесь включение $U\in R(\omega_0)$ означает, что сужение функции U на область ω_0 принадлежит множеству жестких перемещений.

Наконец, определим функционал потенциальной энергии

$$\Pi(\Omega_0;U)=\frac{1}{2}\int\sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(U)dx-\int FUdx,$$

где $F=(f_1,f_2)$ – заданный вектор внешних сил.

Задача о равновесии формулируется в следующем виде: найти такую функцию $U\in K_0(\Omega_0)$, которая минимизирует функционал потенциальной энергии на множестве допустимых смещений, т.е.

$$\Pi(\Omega_0;U_0)=\inf_{U\in K_0(\Omega_0)}\Pi(\Omega_0;U)\ . \tag{1}$$

Непосредственно из леммы Лакса-Мильграма следует:

Теорема 1. Задача (1) имеет единственное решение, которое удовлетворяет вариационному тождеству

$$\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\omega_0}}\sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(U_0)dx=\int\limits_{\Omega_0}FUdx\qquad\qquad \forall U\in K_0(\Omega_0)$$

Далее определим возмущенную задачу. Для малого параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение $\Phi_\varepsilon(x)=(\Phi_{\varepsilon 1}(x),\Phi_{\varepsilon 2}(x))$ такое, что $\Phi_i\in C^1([0,\varepsilon_0);W^{1,\infty}_{loc}(R^2))$ и $\Phi_0(x)=x$. Применим координатное преобразование

$$y=\Phi_\varepsilon(x) \tag{2}$$

к области Ω. В результате получим возмущенную область $\Omega_\varepsilon=\Phi_\varepsilon(\Omega)$ с жестким включением $\omega_\varepsilon=\Phi_\varepsilon(\omega_0)$ и трещиной $\gamma_\varepsilon=\Phi_\varepsilon(\gamma_0)$. Будем считать, что преобразование (2) является взаимно однозначным, и обратное к нему имеет ту же гладкость, что и прямое. В этом случае имеем $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\gamma_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon\subset\partial\omega_\varepsilon$.

Аналогично пространству $H^{1,0}(\Omega_0)$ определим пространство $H^{1,0}(\Omega_\varepsilon)$ и рассмотрим множество допустимых смещений для возмущенной задачи равновесия

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)=\{U\in H^{1,0}(\Omega_\varepsilon)\times H^{1,0}(\Omega_\varepsilon),U\in R(\omega_\varepsilon)\}.$$

Как и ранее, включение $U\in R(\omega_0)$ означает, что сужение функции U на область ω_ε принадлежит пространству жестких перемещений $R(\omega_\varepsilon)$, т.е. $U(y)=By+C$, $y\in\omega_\varepsilon$, B – кососимметрическая матрица, C – постоянный вектор.

В возмущенной области Ω_ε рассмотрим задачу минимизации функционала энергии: найти такую функцию $U^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, что

$$\Pi(\Omega_\varepsilon;U^\varepsilon) = \inf_{U\in K\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon;U),$$

где

$$\Pi(\Omega_\varepsilon;U) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\omega_\varepsilon}} \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(U)dx - \int_{\Omega_\varepsilon} FUdx,$$

которая имеет единственное решение $U^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ для каждого фиксированного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$.

Основной результат. Цель работы – вычислить передел

$$\Pi'(\Omega_0;U_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;U^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;U_0)}{\varepsilon} \tag{3}$$

– производную функционала энергии по параметру ε возмущения области $\varepsilon = 0$.

Для вычисления предела (3) строятся вспомогательные функции W_ε^1 и W_ε^2 такие, что

$$U_0 + \varepsilon W_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0),\quad U_\varepsilon - \varepsilon W_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0),$$

$$\| W_\varepsilon^i \| \le \text{const},\quad i=1,2,$$

где U_ε – решение возмущенной задачи, отображенное на невозмущенную область Ω_0 с помощью обратного к (2) преобразования, $K_\varepsilon(\Omega_0)$ - образ множества $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ при действии обратного к (2) преобразования, т.е.

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{U \in H^{1,0}(\Omega_0)\times H^{1,0}(\Omega_0) \,|\, U = B\Phi_\varepsilon(x)+C \ \text{ на } \omega_0\}.$$

Кроме того, справедливы следующие сходимости:

$$W_\varepsilon^i \to W_0 \ \text{ сильно в } H^{1,0}(\Omega_0)\times H^{1,0}(\Omega_0),\quad i=1,2,$$

где $W_0 = \theta B_0 V$; θ – произвольная финитная функция, равная единице в некоторой окрестности ω_0; B_0 – кососимметрическая матрица, соответствующая решению U_0, V – скорость преобразования (2).

Используя вариационные свойства решений возмущенной и невозмущенной задач равновесия, вычисляется предел (3). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для любого возмущения $\Phi \in C^1([0,\varepsilon_0);W^{1,\infty}(R^2))$ существует производная функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;U^\varepsilon)$ по параметру возмущения ε при $\varepsilon=0$, которая задается формулой

$$\Pi'(\Omega_0;U_0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\omega_0}} \mathrm{div}V\sigma_{ij}(U_0)\varepsilon_{ij}(U_0)dx - \int_{\Omega\setminus\overline{\omega_0}} \mathrm{div}V\sigma_{ij}(U_0)E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x};U_0\right)dx -$$

$$-\int_{\Omega_0}\mathrm{div}(V f_i)u_{0i}dx - \int_{\omega_0} FB_0Vdx - \int_{\partial\omega_0}\sigma(U_0)\upsilon\cdot B_0Vdl,$$

где $U_0 = (u_{01},u_{02})$ – решение невозмущенной задачи (1),

$$E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x};U_0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_k}V_{k,j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_k}V_{k,i}\right),\quad V = \left.\frac{\partial \Phi_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента РФ (МК-222.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Ohtsuka K. Mathematics of brittle fracture. // Theoretical Studies on Fracture Mechanics in Japan. 1997. P.99-172.
4. Мазья В.Г., Назаров С.А. Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т.50. С.79-129.

5. Назаров С.А., Шпековиус-Нойгербауер М. Применение энергетического критерия разрушения для определения формы слабоискревленной трещины // Прикл. механика и тех. физика. 2006. Т.47. № 5. С.119-130.
6. Cotterell B., Rice J.R. Slightly curved or kinked cracks // Int. J. Fract.1980. V.16. № 2. P.155-169.
7. Amestoy M., Leblond J.B. Crack paths in plane situations - II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // Int. J. Solids Structures. 1992. V.29. № 4. P.465-501.
8. Leblond J.B. Crack paths in three-dimensional elastic solids. I: two-term expansion of the stress intensity factors - application to cracks path stability in hydraulic fracturing // Int. J. Solids Structures. 1999. V.36. P.79-103.
9. Leguillon D. Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non isotropic materials // Eur. J. Mech., A/Solids. 1993. V.12. № 1. P. 33-51.
10. Gao H., Chiu Ch. Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids // Int. J. Solids Structures. 1992. V.29. № 8. P.947-972.
11. Martin P.A. Perturbed cracks in two-dimensions: An integral-equation approach // Int. J. Fract. 2000. V. 104. P.317-327.
12. M. Toya. A crack along the interface of a rigid circular inclusion embedded in an elastic solid // International Journal of Fracture. 1973. V. 9. № 4. P.463-470.
13. M. Maiti. On the extension of a crack due to rigid inclusions // International Journal of Fracture. 1979. V. 15. P. 389-393.
14. Моссаковский В.И., Рыбка М.Т. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С.1061-1069.

Сведения об авторе:

Рудой Евгений Михайлович – старший научный сотрудник Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, доцент кафедры прикладной математики механико-математического факультета Новосибирского государственного университета, +7(383)3333199
E-mail rem@hydro.nsc..ru

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

Саакян А.В.

Построены квадратурные формулы для вычисления определенного интеграла с переменным верхним пределом от функции, представимой в виде произведения ограниченной непрерывной функции и весовой функции Якоби.

Полученные формулы позволяют методом дискретных особенностей решать сингулярные интегро-дифференциальные уравнения, в которых в качестве слагаемого присутствует также интеграл с переменным верхним пределом от неизвестной функции. С другой стороны, эти же формулы позволяют определить величину раскрытия трещины в задачах теории упругости для тел с трещинами, особенно, в случае, когда решение строится методом дискретных особенностей.

Определяющие уравнения задач теории упругости для тел с трещинами главным образом составляются относительно производной скачка перемещений берегов трещины, после чего необходимо бывает определить также саму разность перемещений, то есть величину раскрытия трещины. При решении таких уравнений методом дискретных особенностей мы находим значения регулярной части, т.е. множителя выделенной особенности, указанной производной в соответствующих узлах интерполирования. Следовательно, возникает необходимость в квадратурной формуле, позволяющей вычислять саму функцию по найденным в определенных точках значениям регулярной части ее производной.

Предположим, что функция $\varphi(x)$, представимая в виде

$$\varphi(x)=f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \qquad \left(\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)>-1\right) \tag{1}$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, ограниченная на отрезке $[-1,1]$, является решением плоской задачи теории упругости для массивного тела с трещиной и представляет собой производную скачка перемещений берегов трещины. Тогда для определения раскрытия трещины необходимо вычислить следующий интеграл:

$$I(y)=\int_{-1}^{y}\varphi(x)\,dx=\int_{-1}^{y}f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx \qquad \left(|y|\le 1\right) \tag{2}$$

При решении определяющего сингулярного интегрального уравнения отмеченной задачи методом дискретных особенностей регулярная часть решения (1), т.е. функция $f(x)$, заменяется интерполяционным многочленом

$$f(x)=\frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\xi_i)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_i)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_i)}\,, \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)=0\ \ (i=1,2,...,n)\,, \tag{3}$$

и, в итоге, определяются ее значения $f(\xi_i)$ $(i=1,2,...,n)$ в корнях соответствующего многочлена Якоби.

Построим квадратурную формулу для вычисления определенного интеграла с переменным верхним пределом $I(y)$ посредством найденных значений $f(\xi_i)$ $(i=1,2,...,n)$.

Подставляя (3) в (2), будем иметь

$$I(y)=\frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\xi_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_i)}\int_{-1}^{y}\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-\xi_i}\,dx\,. \tag{4}$$

Очевидно, что отношение $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\big/(x-\xi_i)$ в подынтегральном выражении является многочленом порядка $n-1$ и его можно представить в виде линейной комбинации многочленов Якоби. Для этого воспользуемся формулой Кристоффеля-Дарбу для полиномов Якоби [1,2]:

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{h_m}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(y)=\frac{k_n}{k_{n+1}h_n}\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)}{x-y}, \qquad (5)$$

где

$$k_m=\frac{\Gamma(2m+\alpha+\beta+1)}{2^m\Gamma(m+\alpha+\beta+1)\Gamma(m+1)},$$

$$h_m=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+\beta+1)}.$$

Полагая в (5) $y=\xi_i$ и учитывая, что $P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)=0$, будем иметь

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-\xi_i}=-\frac{1}{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)}\frac{k_{n+1}h_n}{k_n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{h_m}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_i) \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$I(y)=-\frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\frac{k_{n+1}h_n}{k_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\xi_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_i)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{h_m}P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)\int_{-1}^{y}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx \qquad (7)$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^{y}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx=\frac{2^{\alpha}(1+y)^{\beta+1}}{\beta+1}F\left(\beta+1,-\alpha;2+\beta;\frac{1+y}{2}\right), \qquad (8)$$

а при $m\ge 1$ имеем [1,2]

$$\int_{-1}^{y}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx=-\frac{1}{2m}P_{m-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(y)(1-y)^{\alpha+1}(1+y)^{\beta+1}, \qquad (9)$$

для интеграла $I(y)$ окончательно получим следующую квадратурную формулу

$$I(y)=-\frac{2}{n+\alpha+\beta+1}\frac{k_{n+1}h_n}{k_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\xi_i)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_i)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)}\times$$
$$\times\left[\frac{(1+y)^{\beta+1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\beta+1}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2+\beta)}F\left(\beta+1,-\alpha;2+\beta;\frac{1+y}{2}\right)-\right. \qquad (10)$$
$$\left.-(1-y)^{\alpha+1}(1+y)^{\beta+1}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\xi_i)P_{m-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(y)}{2m\,h_m}\right]$$

Для часто встречаемых частных случаев параметров α и β полученная квадратурная формула существенно упрощается.

Пусть $\alpha=\beta=-0.5$. Тогда интерполяционный многочлен (3) примет вид

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\xi_i)T_n(x)}{(x-\xi_i)U_{n-1}(\xi_i)} \qquad (11)$$

где $\xi_j=\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}$ $(j=1,...,n)$ - корни многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$.

Учитывая формулу Кристоффеля-Дарбу для полиномов Чебышева первого рода

$$\frac{T_n(x)}{x-\xi_k}=-\frac{1}{T_{n+1}(\xi_k)}\left[1+2\sum_{m=1}^{n-1}T_m(x)T_m(\xi_k)\right], \qquad (12)$$

значение интеграла

$$\int_{-1}^{y}\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+\arcsin y & m=0\\ -\frac{1}{m}\sqrt{1-y^2}U_{m-1}(y) & m\ge 1\end{cases} \qquad (13)$$

и соотношение $T_{n+1}(\xi_i)U_{n-1}(\xi_i)=-1$, для рассматриваемого случая получим следующую квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^{y}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\left[\arcsin y+\frac{\pi}{2}-2\sqrt{1-y^2}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{T_m(\xi_k)U_{m-1}(y)}{m}\right] \qquad (14)$$

Пусть теперь $\alpha=\beta=0.5$. Тогда интерполяционный многочлен (3) будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{f(\xi_j)U_n(x)}{(x-\xi_j)U_n'(\xi_j)}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(\xi_j)(1-\xi_j^2)U_n(x)}{(\xi_j-x)U_{n-1}(\xi_j)} \qquad (15)$$

Учитывая формулу Кристоффеля-Дарбу для полиномов Чебышева второго рода

$$\frac{U_n(x)}{x-\xi_k}=-\frac{2}{U_{n+1}(\xi_k)}\sum_{m=0}^{n-1}U_m(x)U_m(\xi_k), \qquad (16)$$

значение интеграла

$$\int_{-1}^{y}U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y\right] & m=0\\ \frac{\sqrt{1-y^2}}{2}\left[\frac{1}{m+2}U_{m+1}(y)-\frac{1}{m}U_{m-1}(y)\right] & m\ge 1\end{cases} \qquad (17)$$

и соотношение $U_{n+1}(\xi_i)U_{n-1}(\xi_i)=-1$, для этого случая получим следующую квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^{y}f(x)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{-1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\sqrt{1-\xi_k^2}\left[\frac{\pi}{2}+y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y-\right.$$
$$\left.-\sqrt{1-y^2}\sum_{m=1}^{n-1}U_m(\xi_k)\left[\frac{U_{m-1}(y)}{m}-\frac{U_{m+1}(y)}{m+2}\right]\right] \qquad (18)$$

Квадратурная формула (10), в частном случае (14) и (18), полезна и интересна не только тем, что она позволяет вычислить значение интеграла $I(y)$ после определения значений $f(\xi_i)$ $(i=1,\ldots,n)$, но и тем, что разрешает решать сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, содержащее слагаемое типа интеграла $I(y)$.

Действительно, пусть имеем уравнение

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds+\lambda\int_{-1}^{x}\varphi(s)ds=F(x) \qquad (-1<x<1) \tag{19}$$

где λ – произвольное число, $F(x)$ – заданная непрерывная функция.

Для определенности рассмотрим случай, когда решение уравнения неограниченно на обоих концах интервала интегрирования, следовательно, для выделения искомого решения необходимо задать дополнительное условие, которое, в основном, бывает задано в виде

$$\int_{-1}^{1}\varphi(s)ds=C \tag{20}$$

Нетрудно проверить, что решение уравнения (19) в обоих концах интервала интегрирования будет иметь корневую особенность, т.е. может быть представлено в виде

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{21}$$

где $f(x)$ – непрерывная, ограниченная на отрезке $[-1,1]$, функция.

Для первого слагаемого левой части уравнения (19) воспользуемся квадратурной формулой [3], имеющей место для любой точки интервала $(-1,1)$,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds=\int_{-1}^{1}\frac{1}{s-x}\frac{f(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds\approx\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(\xi_j)}{\xi_j-x}\left[1-\frac{U_{n-1}(x)}{U_{n-1}(\xi_j)}\right], \qquad T_n(\xi_i)=0\,, \tag{22}$$

для второго слагаемого – формулой (14).

Подставляя указанные квадратурные формулы в уравнение (19) и приравнивая обе его части в корнях x_k $(k=1,2,\ldots,n-1)$ многочлена Чебышева второго рода $U_{n-1}(x)$, получим следующую систему из $n-1$ линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\left[\frac{\pi}{\xi_i-x_k}+\lambda\left(\arcsin x_k+\frac{\pi}{2}-2\sqrt{1-x_k^2}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{T_m(\xi_i)U_{m-1}(x_k)}{m}\right)\right]=F(x_k)\,, \tag{23}$$

которая вместе с дискретизированным условием (20)

$$\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)=C \tag{24}$$

составляет замкнутую систему для определения неизвестных $f(\xi_i)(i=1,2,\ldots,n)$.

Отметим, что рассмотренное уравнение (19) является аналогом определяющего уравнения контактной задачи о передаче нагрузки упругой полуплоскости через прикрепленный к ее границе тонкий упругий стрингер конечной длины при предположении, что последний лишен изгибной жесткости [4], а также основного уравнения общей задачи теории крыла конечного размаха [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. СМБ. Т.2. М.: Наука, 1966. 296 с.
2. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
3. Саакян А.В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов. //Сб. науч. трудов “Проблемы механики тонких деформируемых тел”, посвященный 80-летию академика С.А.Амбарцумяна. Ереван, 2002, с. 259-265.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
5. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. М.– Л.: Гостехиздат, 1949. 480с.

Сведения об авторе:

Саакян Аветик Вараздатович,
Кандидат физ.-мат. наук,
Зам.директора Института механики НАН РА,
Тел. (37410) 568188, (37494)579348
E-mail: avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

НАПРЯЖЁННОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Саноян Ю. Г.

Методом суперпозиций решена бигармоническая задача напряжённого термоупругого состояния составного прямоугольника для разных дополнительных граничных условний на его смежных углах. Исследовано влияние дополнительных условий на поведение упругих характеристик в окрестности вершин смежных углов.

Задача определения напряжённо-деформированного состояния двухслойных пластин решается заменой пластины на две отдельные пластины со смежными сторонами (рис.1). Это облегчает решение задачи, хотя число граничных условий при этом возрастает с 8 до 16. Однако, наличие на концах контактирующих сторон двух смежных углов, принадлежащих разным прямоугольникам, может повлиять на решение задачи. В этих точках зачастую невозможно выполнить граничные условия. В данной работе исследуются влияния граничных условий на термоупругое состояние составного прямоугольника с одинаковыми кинематическими и упругими характеристиками, но с разными коэффициентами линейного термического расширения.

На рис. 1 показан чертёж составного прямоугольника, состоящего из слоёв 1 и 2 (соответственно нижний и верхний слой).

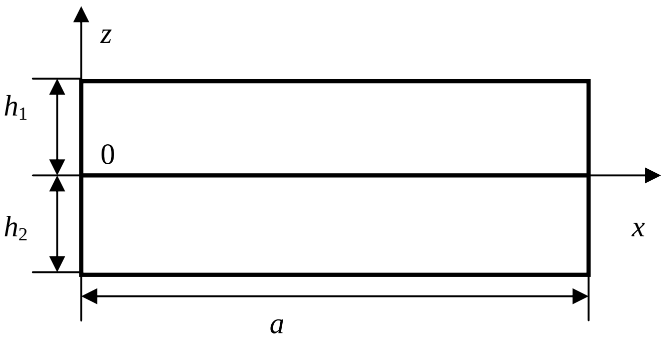


Рис. 1

Термоупругое состояние составного прямоугольника, находящегося в температурном поле $T(x,z)$, описывается функциями напряжения $\varphi_i(x,z)$ для каждого прямоугольника, удовлетворяющих неоднородным бигармоническим уравнениям:

$$\Delta^2\varphi_i(x,z)=\alpha_i E_i \Delta T_i(x,z) \quad i=1,2 \tag{1}$$

На внешних границах при отсутствии нагрузок функции напряжений должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi_i(0,z)=\varphi_i(a,z)=0,\ \ \varphi_1(x,h_1)=\varphi_2(x,-h_2)=0, \tag{2}$$

$$\partial\varphi_i(x,z)/\partial x\big|_{x=0}=\partial\varphi_i(x,z)/\partial x\big|_{x=a}=0, \partial\varphi_1(x,z)/\partial z\big|_{z=h1}=\partial\varphi_i(x,z)\partial z\big|_{z=-h2}=0, \tag{3}$$

на границе раздела областей нормальные напряжения σ_z и касательные напряжения τ_{xz} должны быть равны друг другу

$$\sigma_{1,z}(x,0)=\sigma_{2,z}(x,0), \quad \tau_{1,xz}(x,0)=\tau_{2,xz}(x,0)\ , \tag{4}$$

а также равны между собой вертикальные v(x,z) и горизонтальные u(x,z) перемешения слоёв

$$u_1(x,0)=u_2(x,0), v_1(x,0)=v_2(x,0). \tag{5}$$

Компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_{i,x}=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}, \quad \sigma_{i,z}=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}, \quad \sigma_{i,xz}=-\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial z}\ . \tag{6}$$

Рассмотрим поведение упругих характеристик составной прямоугольной пластины в угловых точках (0,0), (0,*a*). Для решения задачи использован метод суперпозиций [4]. Представим решения уравнений (1) в безразмерных функциях Эри $f_i(x,z)=\varphi_i(x,z)/E_i a^2$ в следующем виде:

$$f_1(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\frac{(a-x)\mathrm{sh}x\lambda_{1n}+x\mathrm{sh}(a-x)\lambda_{1n}}{a^4\lambda_{1n}^3\mathrm{ch}a\lambda_{1n}}\sin(h_1-z)\lambda_{1n}+\left(A_{2n}\frac{(h_1-z)\mathrm{sh}z\chi_n}{a^4\chi_n^3\mathrm{ch}h_1\chi_n}\sin x\chi_n+\right.$$
$$\left.A_{3n}\frac{(h_1-z)\left(\mathrm{ch}(h_1-z)\chi_n-\mathrm{ch}(z\chi_n)\right)}{a^4\chi_n^3\mathrm{ch}h_1\chi_n}+A_{4n}\frac{(h_1-z)\mathrm{sh}z\chi_n+z\mathrm{sh}\left(h_1-z\right)\chi_n}{a^4\chi_n^3\mathrm{ch}h_1\chi_n}\right)\sin x\chi_n, \tag{7}$$

$$f_2(x,z)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{1n}\frac{(a-x)shx\lambda_{2n}+x\mathrm{sh}(a-x)\lambda_{2n}}{a^4\lambda_{2n}^3\mathrm{ch}a\lambda_{2n}}\sin(h_2+z)\lambda_{2n}+\left(B_{2n}\frac{(h_2+z)\mathrm{sh}z\chi_n}{a^4\chi_n^3\mathrm{ch}h_2\chi_n}\sin x\chi_n+\right.$$
$$\left.B_{3n}\frac{(h_2+z)\left(\mathrm{ch}(h_2+z)\chi_n-\mathrm{ch}(z\chi_n)\right)}{a^4\chi_n^3\mathrm{ch}h_2\chi_n}+A_{4n}\frac{(h_2+z)\mathrm{sh}z\chi_n+z\mathrm{sh}\left(h_2+z\right)\chi_n}{a^4\chi_n^3\mathrm{ch}h_2\chi_n}\right)\sin x\chi_n, \tag{8}$$

где N – число членов тригонометрического ряда; A_{1n}–A_{4n}, B_{1n}–B_{4n} – неизвестные коэффициенты, $\chi_n=\pi n/a$, $\lambda_{in}=\pi\left(2n-1\right)/2h_i$. Эти решения тождественно удовлетворяют шести граничным условиям (2). Из-за симметрии системы относительно оси $x=a/2$ четыре граничных условия для производных по x в (3), которым необходимо удовлетворить, сокращаются с четырёх до двух. Благодаря этому из 16 неизвестных в (7) и (8) осталось 8. На смежном угле, в котором сходятся по две стороны, имеется восемь граничных условий. Два интегральных условия 5 выполняются автоматически. Таким образом, на каждый смежный угол прямоугольников приходится по 3 условия, в то время как для бигармонических уравнений число граничных условий в каждой точке границы не должно превышать двух. Вначале рассмотрим решения (1) для граничных условий (2-5). На рис. 2 и 3 приведены, рассчитанные по формулам (6), графики касательных и нормальных напряжений σ_z смежных сторон прямоугольников для пластины с отношением сторон 1/20, равными значениями модулей упругости и коэффициентов Пуассона, с коэффициентами линейного расширения слоёв $\alpha_1=5\times10^{-6}$, $\alpha_2=20\times10^{-6}$. Оба слоя равномерно разогреты до температуры T=240°C. Графики касательных напряжений смежных сторон прямоугольников совпадают.

Рис.2. Графики касательных напряжений τ_{xz}

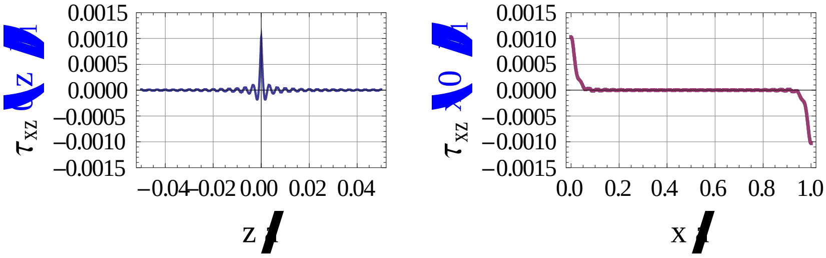
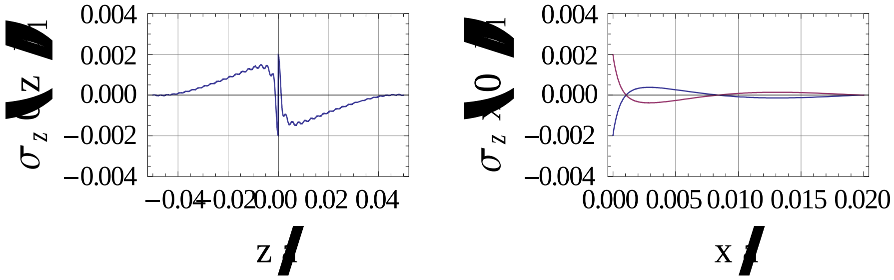


Рис.3.Графики нормальных напряжений σ_z



Ряды в формулах для расчёта напряжений быстро сходятся, и 50 членов достаточно, чтобы выявить все особенности поведения упругих характеристик. Из рисунков видно, что на концах смежных сторон касательные напряжения не равны нулю и терпят разрыв, а нормальные напряжения в очень узкой области (правый график рис. 3) имеют одинаковые, но противополож- ные по знаку значения. Условия равенства нулю нормальных напряжений σ_x, как в этом, так и в последующих рассматриваемых случаях, полностью удовлетворяются. Таким образом, в угловой точке выполнено только одно условие из трёх – равенство нулю нормальных напряжений σ_x.

Рассмотрим, как отражаются на решениях добавочные граничные условия на смежных углах каждого прямоугольника

$$\tau_{i,xz}(0,0)=0. \qquad (9)$$

Внесём для этого в (5) и (6) по одному частному решению с неизвестными постоянными G_1, G_2.

$$F_1(x,z)=G_1x(x-a)(z-h_1)/a^3 \text{ и } F_2=G_2x(x-a)(z+h_2)/a^3. \qquad (10)$$

На рис. 2 и 3 приведены графики касательных и нормальных напряжений для пластин с приведёнными выше данными.

Рис.4. Графики касательных напряжений τ_{xz}

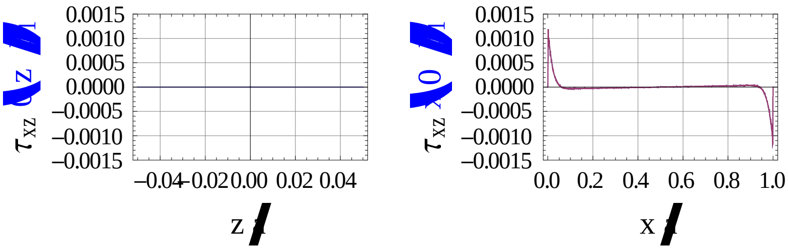
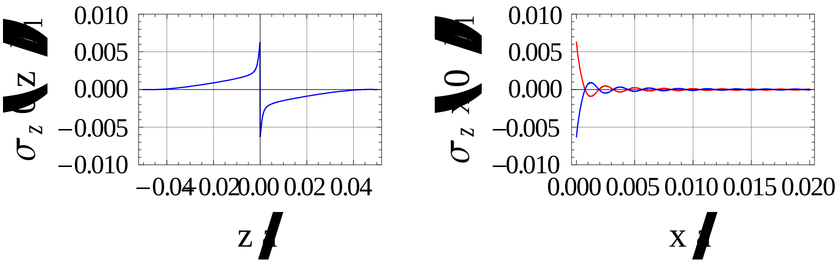


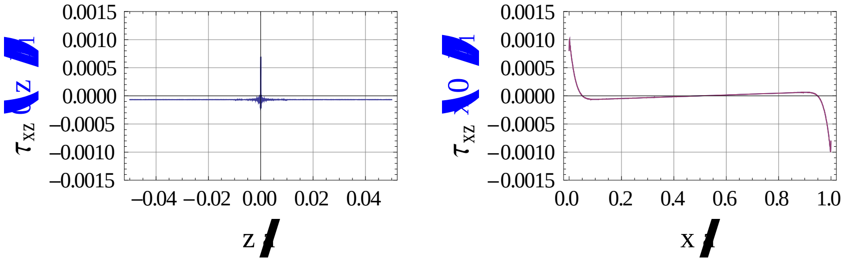
Рис.5. Графики нормальных напряжений σ_z



Введение добавочного условия позволило удовлетворить нулевым значениям касательных напряжений в точках (0,0) и (0,*a*). Но условие равенстна нормальных напряжений σ_z осталось не- выполненным вблизи этих точек. Следует отметить значительное ухудшение сходимости тригонометрических рядов в (7) и (8). При малых N линейный участок касательных напряжений на рис.4 имеет сильный наклон. Приемлемая точность для построения рис. 3 и 4 была достигнута при N=400. Максимальные значения σ_{1z}, σ_{2z} примерно в 2.5 раза превышают значения этих же величин предыдущего случая.

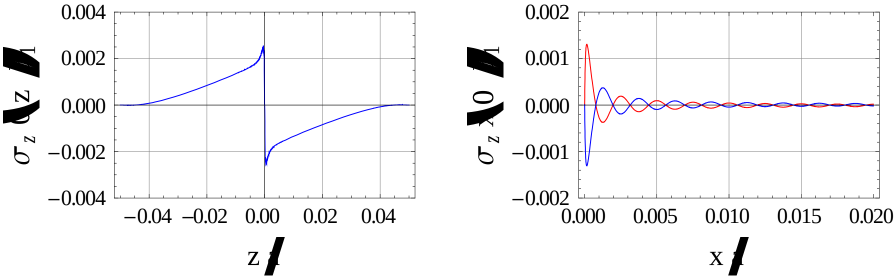
Чтобы решить задачу с добавочным граничным условием $\sigma_{1z}(0,0)=\sigma_{2z}(0,0)$, внесём в решения (7), (8) частные решения (10) с одной неизвестной $G=G_1=G_2$. На рис. 6 и 7 приве- дены графики касательных и нормальных напряжений этого случая, рассчитаные при N=400.

Рис.6. Графики касательных напряжений τ_{xz}



Касательные напряжения в точке (0,0) равны нулю, а их равенство на смежных сторонах обеспечивается в открытом промежутке. Незначительное отклонение от оси z вниз связано с плохой сходимостью тригонометрических рядов. Условие равенства нормальных напряжений σ_z выполнилось в точке (0,0), но оно оказалось невыполненнным в окрестности этой точки.

Рис.7.Графики нормальных напряжений σ_z



Таким образом, введение дополнительных граничных условий в смежные точки прямоугольников не помогло полностью удовлетворить граничные условия на всём контуре двухслойной пластины. Причина этого состоит в том, что количество граничных условий на каждом смежном угле составного прямоугольника превышает число граничных условий, неоходимых для бигармонического уравнения. Однако, влияние упругих напряжений на концах смежных сторон прямоугольников ограничивается окрестностью этих концевых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. Analysis of bi-metal thermostats.//J. Opt. Soc. Am.. 1925. V.11. № 9.
2. Suhir E. Interfacial stresses in bi-metal thermostats//Trans. ASME. J. Appl. Mech.1989.V.56. № 3.
3. Колчин Г.Б. Некоторые задачи термоупругости для прямоугольных областей. Кишенёв: Штинца, 1980. 103 с.
4. Мелешко В. В. Бигармоническач задача для прямоугольника: история и современность. // Мат. методи. та физ.-мех. поля. 2004. Т. 47. № 3.

<u>Сведения об авторе:</u>

Саноян Юрий Геворкович – старший научн.сотр. Института механики НАН Армении
Тел.: (541319), E-mail: yusanoyan@mechins.sci.am .

ВЛИЯНИЕ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ, ЗАДАННЫХ НА ДУГОВОЙ ЧАСТИ КОНТУРА КРУГОВОГО СЕКТОРА, НА ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ

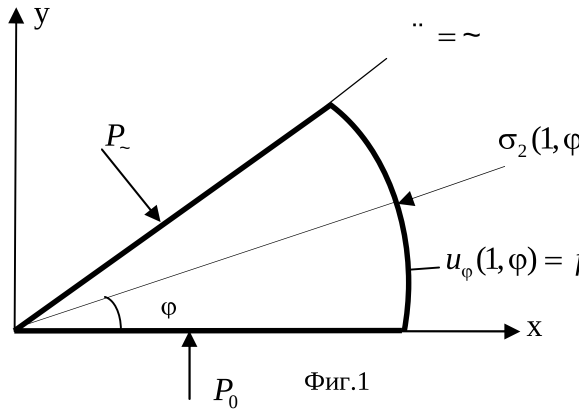
Саргсян А.М.

Исследуется плоское напряженное состояние кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора α $(0<\alpha<2\pi)$, когда на дуговой части контура заданы нормальное напряжение $\sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi)$ и окружное перемещение $u_\varphi(1,\varphi)=f_2(\varphi)$, а на радиальных сторонах осуществляется условие соприкасания с жестким штампом без трения .

Замкнутое решение задачи получено с помощью метода Фурье. Исследуется сингулярность напряжений в окрестности вершины сектора. Между первыми коэффициентами разложения Фурье функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ установлено условие, при котором напряжения в окрестности вершины сектора стремятся к бесконечности только при $\alpha>\pi$.

В работе [1], опираясь на результаты [2], исследованно упругое равновесие кругового сектора, когда на дуговой части контура заданы нормальные и касательные напряжения. Было показано, что при стремлении угла α к 2π порядок особенности напряжений стремится к -1, а коэффициент при такой особенности в условиях общего нагружения границы r = 1 отличен от нуля. Здесь анализируется другой случай напряжения дуговой части границы сектора.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для однородного кругового сектора (фиг. 1), когда на его границе заданы следующие условия:



Фиг.1

$$\tau_{r\varphi}(r,0)=0,\ u_\varphi(r,0)=0 \tag{1}$$

$$\tau_{r\varphi}(r,\alpha)=0,\ u_\varphi(r,\alpha)=b_0 r \tag{2}$$

$$\sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi),\ u_\varphi(1,\varphi)=f_2(\varphi) \tag{3}$$

$$f_2(0)=0\ ,\ f_2(\alpha)=b_0\,. \tag{4}$$

Упругое состояние кругового сектора определяется решением бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta\Phi(r,\varphi)=0\,. \tag{5}$$

Учитывая граничные условия (2), решение уравнения (5) представим в виде

$$\Phi(r,\varphi)=r^{\lambda+1}\left[AS_\varphi^{+}+BC_\varphi^{+}+CS_\varphi^{-}+DC_\varphi^{-}\right]+B_0 r^2\ln r\ , \tag{5$'$}$$

где A, B, C, D – постоянные интегрирования, B_0 и λ – произвольные параметры,

$$S_\varphi^{\pm}=\sin(\lambda\pm1),\quad C_\varphi^{\pm}=\cos(\lambda\pm1)\varphi\,.$$

Выражения компонентов напряжений через функции $\Phi(r,\varphi)$ имеют вид

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{r^2\partial\varphi^2}\ ,\ \sigma_\varphi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\ ,\ \ \tau_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) \tag{6}$$

Используя уравнения состояний, уравнения Коши и соотношения (5′), (6), для перемещений $u_\varphi(r,\varphi)$ получим

$$u_\varphi(r,\varphi)=\frac{r^\lambda}{E}\Big[-A\lambda^+\nu^+C_\varphi^+ + B\lambda^+\nu^+S_\varphi^+ - C\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C_\varphi^- +$$
$$D\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)S_\varphi^-\Big]+\frac{4B_0\varphi}{E}r + a\cos\varphi - b\sin\varphi + dr, \tag{7}$$

где $\nu^+=\nu+1$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга; A, B, C, D, B_0 – неизвестные коэффициенты; a,b,d – постоянные интегрирования.

Удовлетворяя граничным условиям (1) – (3), получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования A, B, C, D [1,2]:

$$\lambda^+A+\lambda^-C=0,\quad \left[\lambda^+\nu^+A+\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C\right]r^\lambda=-E\left(a+dr\right)$$
$$\lambda^+C_\alpha^+A-\lambda^+S_\alpha^+B+\lambda^-C_\alpha^-C-\lambda^-S_\alpha^-D=0$$
$$\left[\lambda^+\nu^+C_\alpha^+A-\lambda^+\nu^+S_\alpha^+B+\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C_\alpha^-C-\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)S_\alpha^-D\right]r^\lambda= \tag{8}$$
$$=E\left(b_0r-a\cos\alpha+b\sin\alpha-d\right)$$

Определяя коэффициент B_0 из условий

$$4\alpha B_0=E(b_0-d) \tag{7′}$$

и анализируя неоднородную систему (8), будем иметь $a=b=d=0$, т.е. приходим к однородной системе линейных уравнений относительно A, B, C, D.

Тогда, из первых двух уравнений (8) следует:

$$A=C=0$$

а из двух последних –

$$\sin\left(\lambda+1\right)\alpha\cdot\sin\left(\lambda-1\right)\alpha=0\,. \tag{9}$$

Корни уравнения (9) – действительные и простые

$$\lambda_k=\alpha_0k+1,\ \ \tilde{\lambda}_n=\alpha_0n-1,\ \ \alpha_0=\pi/\alpha\,, \tag{10}$$

причем [1,2]

$$\lambda_k>0\,,\tilde{\lambda}_n>0\,. \tag{11}$$

Условие (11), в зависимости от величины угла раствора сектора α, ограничивает пределы изменения k и n, а именно:

I. для $0<\alpha<2\pi$, $(k=0,1,2,...)$, $(n=2,3,4,...)$,

II. для $0<\alpha<\pi$, $(k=0,1,2,...)$, $(n=1,2,3,...)$,

III. для $\pi<\alpha<2\pi$, $(k=-1,0,1,...)$, $(n=2,3,4,...)$.

Здесь рассматривается первый случай $\left(0<\alpha<2\pi,\ (k=0,1,2,...),\ (n=2,3,4,...)\right)$.

Функция напряжения Эри (5) для этого случая принимает вид

$$\Phi(r,\varphi)=D_0r^2+D_1r^{\lambda_1+1}\cos\left(\lambda_1-1\right)\varphi+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_kr^{\lambda_k+1}+B_kr^{\tilde{\lambda}_k+1}\right]\cos\alpha_0k\varphi+B_0r^2\ln r\,, \tag{12}$$

где B_0 определяется из условий (7′).

С помощью (6), (7), (12) для компонентов напряжений и перемещения $u_\varphi(r,\varphi)$ будем иметь

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\\ \tau_{r\varphi}\end{Bmatrix}=D_0\begin{Bmatrix}2\\2\\0\end{Bmatrix}+D_1\begin{Bmatrix}(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\(1+\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0(1+\alpha_0)\sin\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{\alpha_0}+B_0\begin{Bmatrix}(2\ln r+1)\\(2\ln r+3)\\0\end{Bmatrix}+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\begin{Bmatrix}(2-\alpha_0k)\\(2+\alpha_0k)\\ \alpha_0k\end{Bmatrix}r^{\alpha_0k}+B_k\alpha_0k\left(\alpha_0k-1\right)\begin{Bmatrix}-1\\1\\1\end{Bmatrix}r^{\alpha_0k-2}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0k\varphi\\ \sin\alpha_0k\varphi\\ \cos\alpha_0k\varphi\end{Bmatrix}, \tag{13}$$

$$Eu_\varphi(r,\varphi)=D_1\left(\lambda_1^-\nu^++4\right)r^{\lambda_1}\cdot\sin\lambda_1^-\varphi+4B_0r\varphi+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)r^{\lambda_k}+B_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde{\lambda}_k}\right]\sin\alpha_0k\varphi,\ \lambda_k^-=\lambda_k-1.$$

Удовлетворяя граничным условиям (3) , получим систему уравнений

$$\begin{cases}2D_0+D_1(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)r^{\alpha_0}\cos\alpha_0\varphi+B_0+\\+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\lambda_k(\lambda_k-3)-B_k(\lambda_k-2)(\lambda_k-1)\right]\cos\alpha_0k\varphi=f_1(\varphi)\\D_1\cdot\dfrac{\lambda_1^-\nu^++4}{E}\sin\alpha_0\varphi+\dfrac{b_0\varphi}{\alpha}+\dfrac{1}{E}\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^++4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\sin\alpha_0k\varphi=f_2(\varphi)\end{cases}\tag{14}$$

Умножая первое уравнение (14) на $\cos\alpha_0m\varphi\quad(m=0,1,2,...)$, а второе – на $\sin\alpha_0m\varphi\quad(m=1,2,3,...)$ и интегрируя по φ в интервале $(0,\alpha)$, находим

$$\begin{gathered}2D_0+B_0=\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f_1\varphi d\varphi,\quad D_1=\frac{2}{\alpha}\frac{\tilde{f}_{11}}{(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)},\\D_1=\frac{2}{\alpha}\left[\tilde{f}_{21}-\frac{b_0}{\alpha_0}\right]\frac{E}{\alpha_0\nu^++4}\end{gathered}\tag{15}$$

$$D_k=\frac{\tilde{f}_{1k}\nu^++\tilde{f}^*_{2k}(\alpha_0k-1)}{\alpha\left[\nu^++2(\alpha_0k-1)\right]},\quad \tilde{f}^*_{2k}=\tilde{f}_{2k}-\frac{b_0}{\alpha_0}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$B_k=\frac{-\tilde{f}_{1k}\left(\alpha_0k\nu^++4\right)+\tilde{f}^*_{2k}(\alpha_0k+1)(2-\alpha_0k)}{\alpha\alpha_0k\left[\nu^++2(\alpha_0k-1)\right]}$$

$$\tilde{f}_{1k}=\int_0^\alpha f_1(\varphi)\cos\alpha_0k\varphi d\varphi,\quad \tilde{f}_{2k}=\int_0^\alpha f_2(\varphi)\sin\alpha_0k\varphi d\varphi.$$

Между первыми коэффициентами разложения Фурье функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ имеет место соотношение

$$-\tilde{f}_{11}\left(\alpha_0\nu^++4\right)+\tilde{f}^*_{21}(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cdot E=0\tag{16}$$

$f^*_{21}=\tilde{f}_{21}-b_0/\alpha_0$.

Итак, решение поставленной задачи получено в виде сходящихся степенных рядов (13), коэффициенты которых определяются в явном виде (15).

Из (13) видно, что при приближении к угловой точке сектора $(r\to0)$ все три напряжения имеют степенную особенность для любого значения угла α из интервала $\pi<\alpha<2\pi$. Степенная особенность напряжений обусловлена соответствующим членом ряда (13) с множителем $r^{\alpha_0k-2}(k=2,k=3)$.

Причем, степень особенности, в зависимости от величины угла α, изменяется в пределах

1) $-1<\alpha_0k-2<0$ при $k=2$ и $\pi<\alpha<2\pi$,

2) $-0,5<\alpha_0k-2<0$ при $k=3$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$.

Коэффициенты при степенных особенностях 1) и 2) в общем случае отличны от нуля. Но в первом случае, когда $\alpha\to2\pi$, коэффициенты при особенности типа $r^{-1+\varepsilon}(\varepsilon\to+0)$ стремятся к нулю благодаря наличию в них множителя (α_0k-1). Этот результат существенно отличается от той, который был получен в работе [1] , где на дуговой части контура кругового сектора были заданы внешние усилия. И поэтому, с точки зрения предотвращения хрупкого разрушения граничные условия (3) физически более приемлемы, чем принятые в работе [1] граничные условия [3,4] .

В случае 2), т.е. при $k=3$, когда $\alpha \to 2\pi$, все компоненты напряжений имеют степенную особенность типа $r^{-1/2+\varepsilon}\left(\varepsilon \to +0\right)$, коэффициенты которого в общем случае также отличны от нуля.

Появление логарифмической особенности в выражениях нормальных напряжений связано с линейным перемещением точек границы $\varphi=\alpha$, и при $b_0=0$ этот тип особенности исчезает.

Отметим одно важное обстоятельство. Из выражений (15) для B_k формально определив B_1 (полагая $k=1$), легко заметить, что числитель выражения B_1 совпадает с выражением левой части условии (16), а степень особенности напряжений $\left(\alpha_0 k-2\right)$ принимает отрицательные значения уже при $\alpha>\pi/2$. Т.е. соотношение (16) является условием малонапряженности окрестности вершины кругового сектора [7], если угол раствора клина $\alpha<\pi$.

Как и в работах [1,5,6], из условий статического равновесия системы сектор + штампы следует, что внешнее усилие, действующее на границе $r=1$, должно быть самоуравновешено в направлении оси x при $\alpha=\pi$ и $\alpha=2\pi$.

Равнодействующие внешних сил, действующие на штампы (силы P_0 и P_α), определяются интегрированием $\sigma_\varphi\left(r,\varphi\right)$ по r в интервале (0,1) при $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Актуальные проблемы механики сплошной среды (Тр. Международной конференции, посвященные 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна). Ереван, 2007. С. 368–372.
2. Аветисян А.Г. Особенности напряжений в составном теле при контурных условиях гладкого контакта.// Исследование по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1976. Вып. 12. С. 85–94.
3. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under antiplane and plane deformations.// Modern problems of deformable bodies mechanics (collection of papers, vol. 1). Yerevan, 2005. 282p.
4. Саргсян А.М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С.48–53.
5. Саргсян А.М. Об упругом равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. (Тр.VI Международной конференции, сентябрь 21–26, Горис–Степанакерт, 2008). Ереван, 2008.456 с.
6. Саргсян А.М. О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Изв. НАН Армении. Механика. В печати
7. Чобанян К.С.Напряжения в составных упругих телах. Ереван. Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – к.ф.–м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24 б, тел. 58-60-54

E-mail: azat-sargsyan@mail.ru

О ХАРАКТЕРЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ В ЗОНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Саргсян М. З.

Исследован характер собственных колебаний в зоне пограничного слоя ортотропной пластины, свободно лежащей на жесткой подстилке, при наличии вязкого сопротивления. На верхней лицевой плоскости пластины заданы условия свободного края или стесненного закрепления. Получены асимптотические решения, соответствующие пограничному слою. Исследовано убывание величин в пограничном слое при удалении от боковой поверхности.

Рассматривается задача о собственных колебаниях в зоне пограничного слоя ортотропной пластинки $D=\{(x,y,z),\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l\}$ (где D_0 – срединная поверхность, $2h$ – толщина, l – характерный тангенциальный размер пластинки), с учетом вязкого трения [2,4,5] при следующих граничных условиях динамической задачи теории упругости:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=h, \quad w=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=-h \tag{1.1}$$

или

$$w=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=\pm h \tag{1.2}$$

Для исследования собственных колебаний в зоне пограничного слоя и построения решения, соответствующего пограничному слою, в уравнениях и соотношениях пространственной задачи теории упругости, переходя к безразмерным координатам $\gamma=x/h,\ \eta=y/l,\ \zeta=z/h$ и компонентам вектора перемещения $U=u/l,\ V=v/l,\ W=w/l$, получим сингулярно возмущенную геометрическим малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему:

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial\gamma}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial\zeta}-\varepsilon^{-2}k_1h^2\frac{\partial U}{\partial t}=\varepsilon^{-2}\rho h^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\ (x,y,z;U,V,W)$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\gamma}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz},\ (\gamma,\zeta;U,W;a_{1j},a_{3j},\ j=\overline{1,3}),\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W}{\partial\gamma}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{xz} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{23}\sigma_{zz},\qquad \frac{\partial U}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V}{\partial\gamma}=a_{66}\sigma_{xy},\ (\gamma,\zeta;U,W;a_{66},a_{44};\ x,z)$$

решение которой поищем в виде асимптотического представления [1,3]:

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\beta}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta}^{(s)}(\gamma,\eta,\zeta)e^{i\omega t},\ \sigma_{\alpha\beta}^{(s)}=\sigma_{\alpha\beta b}^{(s)}(\eta,\zeta)e^{-\lambda\gamma},\qquad \alpha,\beta=x,y,z;\quad s=\overline{0,N}\\ U=\varepsilon^{s}U^{(s)}(\gamma,\eta,\zeta)e^{i\omega t},\ U^{(s)}=U_b^{(s)}(\eta,\zeta)e^{-\lambda\gamma}(U,V,W),\ \ \omega_*=\varepsilon^{s}\omega_{*s},\ \left(\omega_*{}^2=\rho h^2\omega^2\right)\end{gathered} \tag{1.4}$$

Применив правило Коши умножения рядов $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, получим рекуррентную систему:

$$-\lambda\sigma_{xxb}^{(s)}+\frac{\partial\sigma_{xyb}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{xzb}^{(s)}}{\partial\zeta}+\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n}-2iK\omega_{*m}\right)U_b^{(s-m)}=0,\ (x,y,z;U,V,W),\ n=\overline{0,m},\ \ m=\overline{0,s}$$

$$\begin{gathered}-\lambda U_b^{(s)}=a_{11}\sigma_{xxb}^{(s)}+a_{12}\sigma_{yyb}^{(s)}+a_{13}\sigma_{zzb}^{(s)}\qquad \frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta}-\lambda V_b^{(s)}=a_{66}\sigma_{xyb}^{(s)},\qquad 2K=k_1h\big/\sqrt{\rho},\\ \frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{xxb}^{(s)}+a_{22}\sigma_{yyb}^{(s)}+a_{23}\sigma_{zzb}^{(s)}\qquad -\lambda W_b^{(s)}+\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{xzb}^{(s)}\\ \frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{xxb}^{(s)}+a_{23}\sigma_{yyb}^{(s)}+a_{33}\sigma_{zzb}^{(s)}\qquad \frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{yzb}^{(s)}\end{gathered} \tag{1.5}$$

Из системы (1.5) все искомые величины можно выразить через $U^{(s)},V^{(s)},W^{(s)}$ по формулам

$$\sigma_{xyb}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(-\lambda V_b^{(s)}+\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\ \ \sigma_{xxb}^{(s)}=-\lambda A_{22}U_b^{(s)}-A_{23}\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta},$$

$$\sigma_{xzb}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left(-\lambda W_b^{(s)}+\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta}\right),\ \ \sigma_{yyb}^{(s)}=\lambda A_{12}U_b^{(s)}-A_{13}\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{33}\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta},\tag{1.6}$$

$$\sigma_{yzb}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial V_b^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W_b^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),\ \ \sigma_{zzb}^{(s)}=\lambda A_{23}U_b^{(s)}+A_{11}\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{13}\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta},$$

где

$$A_{11}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\Delta},\ A_{22}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{\Delta},\ A_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{\Delta},\ A_{12}=\frac{a_{12}a_{33}-a_{13}a_{23}}{\Delta},$$

$$A_{13}=\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\Delta},A_{23}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{\Delta},\ \Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2,$$

Для определения функций $U_b^{(s)},V_b^{(s)},W_b^{(s)}$ из системы (1.5), с учетом (1.6), получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2U_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\lambda\left(1-a_{55}A_{23}\right)\frac{\partial W_b^{(s)}}{\partial\zeta}+\lambda^2a_{55}A_{22}U_b^{(s)}+a_{55}\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n}-2iK\omega_{*m}\right)U_b^{(s-m)}=R_{Ub}^{(s)}$$

$$A_{11}\frac{\partial^2W_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\lambda\left(\frac{1}{a_{55}}-A_{23}\right)\frac{\partial U_b^{(s)}}{\partial\zeta}+\lambda^2\frac{1}{a_{55}}W_b^{(s)}+\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n}-2iK\omega_{*m}\right)W_b^{(s-m)}=R_{Wb}^{(s)}\tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2V_b^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\lambda^2\frac{a_{44}}{a_{66}}V_b^{(s)}+a_{44}\left(\omega_{*m-n}\omega_{*n}-2iK\omega_{*m}\right)V_b^{(s-m)}=R_{Vb}^{(s)}$$

где

$$R_{Ub}^{(s)}=-\lambda a_{55}A_{12}\frac{\partial V_b^{(s-1)}}{\partial\eta}-a_{55}\frac{\partial\sigma_{xyb}^{(s-1)}}{\partial\eta},\quad R_{Vb}^{(s)}=-a_{44}\frac{\partial\sigma_{yyb}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\lambda\frac{a_{44}}{a_{66}}\frac{\partial U_b^{(s-1)}}{\partial\eta}-\frac{\partial^2W_b^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}$$

$$R_{Wb}^{(s)}=-\frac{\partial\sigma_{yzb}^{(s-1)}}{\partial\eta}+A_{13}\frac{\partial^2V_b^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}$$

Для определения значений частот собственных колебаний рассмотрим уравнения (1.7) при $s=0$.

$$\frac{\partial^2U_b^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\lambda\left(1-a_{55}A_{23}\right)\frac{\partial W_b^{(0)}}{\partial\zeta}+\left(\lambda^2a_{55}A_{22}+a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2-i2K\omega_{*0}\right)\right)U_b^{(0)}=0$$

$$A_{11}\frac{\partial^2W_b^{(0)}}{\partial\zeta^2}-\lambda\left(\frac{1}{a_{55}}-A_{23}\right)\frac{\partial U_b^{(0)}}{\partial\zeta}+\left(\lambda^2\frac{1}{a_{55}}+\omega_{*0}{}^2-i2K\omega_{*0}\right)W_b^{(0)}=0\tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^2V_b^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\left(\frac{\lambda^2}{a_{66}}+\left(\omega_{*0}{}^2-i2K\omega_{*0}\right)\right)V_b^{(0)}=0$$

В плоской задаче решение системы уравнений (1.8) относительно $U_b^{(0)},W_b^{(0)}$ будем искать в виде:

$$U_b^{(0)}=G_b^{(0)}(\eta)\exp k\zeta,\qquad W_b^{(0)}=LG_b^{(0)}(\eta)\exp k\zeta\tag{1.9}$$

где L – неопределенный пока множитель. В результате получим систему:

$$k^2-\lambda Lk\left(1-a_{55}A_{23}\right)+\lambda^2a_{55}A_{22}+a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2-i2K\omega_{*0}\right)=0$$

$$LA_{11}k^2-\lambda\frac{1}{a_{55}}k+\lambda A_{23}k+L\frac{\lambda^2}{a_{55}}+L\omega_{*0}{}^2-i2K\omega_{*0}L=0\tag{1.10}$$

из которого для множителя L получим:

$$L = \frac{k^2 + \lambda^2 a_{55} A_{22} + a_{55}\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right)}{\lambda k\left(1 - a_{55}A_{23}\right)} \tag{1.11}$$

а для k получим характеристическое уравнение:

$$A_{11}k^4 + \left(\Phi_1\lambda^2 + \Phi_2\right)k^2 + A_{22}\lambda^4 + \Phi_3\lambda^2 + \Phi_4 = 0 \tag{1.12}$$

где $\Phi_1 = a_{55}A_{11}A_{22} + 2A_{23} - A_{23}^2 a_{55}$, $\Phi_2 = \left(1 + a_{55}A_{11}\right)\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right)$

$$\Phi_3 = \left(1 + A_{22}a_{55}\right)\left(\omega_{*0}{}^2 - i2K\omega_{*0}\right), \qquad \Phi_4 = \left(\omega_{*0} - i2K\right)^2 a_{55}\omega_{*0}{}^2$$

Это уравнение имеет 4 корня:

$$k = \pm\sqrt{\frac{-\left(\Phi_1\lambda^2 + \Phi_2\right) \pm \sqrt{\left(\Phi_1\lambda^2 + \Phi_2\right)^2 - 4A_{11}\left(A_{22}\lambda^4 + \Phi_3\lambda^2 + \Phi_4\right)}}{2A_{11}}} \tag{1.13}$$

Следовательно, каждому k_i будет соответствовать свой множитель. Итак, из (1.9) будем иметь:

$$U_b^{(0)} = \sum_{i=1}^{4} G_{ib}^{(0)}(\eta)\exp k_i\zeta, \qquad W_b^{(0)} = \sum_{i=1}^{4} LG_{ib}^{(0)}(\eta)\exp k_i\zeta\,. \tag{1.14}$$

Условиями относительно $U_b^{(0)}, W_b^{(0)}$, вытекающими из граничных условий в первой (1.1) и второй (1.2) краевой задачах, соответственно будут:

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial W_b^{(0)}}{\partial\zeta} + A_{23}\lambda U_b^{(0)} = 0,\ \frac{\partial U_b^{(0)}}{\partial\zeta} - \lambda W_b^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1 \\ &W_b^{(0)} = 0,\ \frac{\partial U_b^{(0)}}{\partial\zeta} - \lambda W_b^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = -1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$W_b^{(0)} = 0,\ \frac{\partial U_b^{(0)}}{\partial\zeta} - \lambda W_b^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1 \tag{1.16}$$

Удовлетворяя условиям (1.15) или (1.16), получим алгебраическую систему относительно коэффициентов $G_{ib}^{(0)}(\eta)$, определитель матрицы которого равен нулю. Из этого условия получим характеристическое уравнение, относительно λ. Корень этого уравнения с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (обозначим через λ_p) характеризирует скорость убывания искомых величин в плоском пограничном слое. Все коэффициенты системы однородных уравнений будут выражаться через один коэффициент, например, через $G_{1b}^{(0)}(\eta)$. Учитывая, что каждому корню λ_{pn}, с $\operatorname{Re}\lambda_{pn} > 0$, соответствует свой сопряженный $\overline{\lambda_{pn}}$, коэффициент $G_{1bn}^{(0)}(\eta)$ представим в виде:

$$G_{1bn}^{(0)}(\eta) = \frac{1}{2}\left(A_{1n}^{(0)} - iA_{2n}^{(0)}\right). \tag{1.17}$$

Следовательно, в окончательных выражениях для искомых величин, будем иметь вещественные величины следующего вида:

$$Q_b^{(s)}\left(\gamma,\eta,\zeta\right) = A_{1n}^{(s)}\operatorname{Re}\tilde{Q}_{bn} + A_{2n}^{(s)}\operatorname{Im}\tilde{Q}_{bn}\,, \tag{1.18}$$

где $\tilde{Q}_{bn} = Q_{bn}\exp\left(-\lambda_{pn}\gamma\right)$, Q_{bn} – коэффициент при $G_{1bn}^{(0)}(\eta)$ для данной величины.

Для определения $V_b^{(0)}$ решение соответствующего уравнения (1.8) будем искать в виде:

$$V_b^{(0)} = C_b^{(0)}(\eta)\exp\theta\zeta\,. \tag{1.19}$$

В результате получим характеристическое уравнение для определения значений θ:

$$\frac{1}{a_{44}}\theta^2 + \frac{1}{a_{66}}\lambda^2 + \omega_{*0}^2 - 2iK\omega_{*0} = 0 \tag{1.20}$$

Решением уравнения (1.20) будет:

$$\theta = \pm\sqrt{i2Ka_{44}\omega_{*0} - \frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda^2 - a_{44}\omega_{*0}^2} \qquad (1.21)$$

Учитывая вид (1.19), для $V_b^{(0)}$ будем иметь:

$$V_b^{(0)} = C_{1b}^{(0)}(\eta)\exp\theta\zeta + C_{2b}^{(0)}(\eta)\exp(-\theta\zeta) \qquad (1.22)$$

Условиями для $V_b^{(0)}$, вытекающими из граничных условий (1.1),(1.2), будут:

$$\frac{\partial V_b^{(0)}}{\partial\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \qquad (1.23)$$

Удовлетворив условиям (1.23), получим алгебраическую систему относительно коэффициентов $C_{ib}^{(0)}(\eta)$:

$$C_{1b}^{(0)}(\eta)\theta\exp\theta - C_{2b}^{(0)}(\eta)\theta\exp(-\theta) = 0, \qquad C_{1b}^{(0)}(\eta)\theta\exp(-\theta) - C_{2b}^{(0)}(\eta)\theta\exp\theta = 0, \qquad (1.24)$$

определитель матрицы коэффициентов которой будет равен нулю, откуда получим:

$$\mathrm{sh}\theta\mathrm{ch}\theta = 0 \qquad (1.25)$$

Из (1.21), (1.25) получим уравнение для определения λ_a соответственно в симметричной и антисимметричной задачах:

$$\sqrt{i2Ka_{44}\omega_{*0} - \frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda_a^2 - a_{44}\omega_{*0}^2} = i\pi n\,, \qquad (1.26)$$

$$\sqrt{i2Ka_{44}\omega_{*0} - \frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda_a^2 - a_{44}\omega_{*0}^2} = i\frac{\pi}{2}(2n+1)\,. \qquad (1.27)$$

Решив уравнения (1.26), (1.27), получим величины, характеризующие скорость затухания краевых эффектов в антиплоской задаче:

$$\lambda_{an} = \pm\sqrt{a_{66}\left(\frac{\pi^2 n^2}{a_{44}} - \omega_{*0}^2 + 2iK\omega_{*0}\right)}\;, \qquad (1.28)$$

$$\lambda_{an} = \pm\sqrt{a_{66}\left(\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a_{44}} - \omega_{*0}^2 + 2iK\omega_{*0}\right)}\,. \qquad (1.29)$$

В симметричной задаче из (1.24),(1.25) получается $C_{1b}^{(0)}(\eta) = C_{2b}^{(0)}(\eta)$. Следовательно, для функции $V_b^{(0)}$ из (1.22) имеем:

$$V_b^{(0)} = 2C_{1b}^{(0)}(\eta)\mathrm{ch}\theta\zeta = \tilde{C}_{1b}^{(0)}(\eta)\cos\pi n\zeta\,, \qquad (1.30)$$

а напряжения $\sigma_{xyb}^{(0)}, \sigma_{yzb}^{(0)}$ будут:

$$\sigma_{xybn}^{(0)} = -\tilde{C}_{1b}^{(0)}(\eta)\frac{\lambda_{an}}{a_{66}}\cos\pi n\zeta, \qquad \sigma_{yzbn}^{(0)} = -\tilde{C}_{1b}^{(0)}(\eta)\frac{\pi n}{a_{44}}\sin\pi n\zeta\,. \qquad (1.31)$$

Другие компоненты вектора перемещения и тензора напряжений равны нулю. В антисимметричной задаче имеем:

$$V_b^{(0)} = \tilde{C}_{2b}^{(0)}(\eta)\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta, \quad \sigma_{xybn}^{(0)} = -\tilde{C}_{2b}^{(0)}(\eta)\frac{\lambda_{an}}{a_{66}}\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta$$

$$\sigma_{yzbn}^{(0)} = \frac{\pi(2n+1)}{a_{44}}\tilde{C}_{2b}^{(0)}(\eta)\cos\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta, \qquad \tilde{C}_{2b}^{(0)}(\eta) = 2iC_{2b}^{(0)}(\eta) \qquad (1.32)$$

В табл. 1,2,3 приведены первые 6 значений корней λ_{pn} и λ_{an} для пластинки из СВАМ 10:1 ($\mathrm{E}_1 = 38.259\times10^9$ Па, $\mathrm{E}_2 = 17.658\times10^9$ Па, $\mathrm{E}_3 = 9.6138\times10^9$ Па, $\mathrm{G}_{12} = 5.1993\times10^9$ Па,

$G_{13}=3.8357\times10^9$ Па, $G_{23}=3.1392\times10^9$ Па, $\nu_{12}=0.22$, $\nu_{23}=0.31$, $\nu_{31}=0.07$, $h=0.5$ м, $\rho=1900$ кг/м^3, $k=0.2$) соответственно при следующих значениях частот:

$$\omega^{\mathrm{I}}_{*0n}=iK\pm\sqrt{\frac{\pi^2n^2}{a_{55}}-K^2}\,,\ \omega^{\mathrm{II}}_{*0n}=iK\pm\sqrt{\frac{\pi^2n^2}{a_{44}}-K^2}\,,\ \omega^{\mathrm{III}}_{*0n}=iK\pm\sqrt{A_{11}\pi^2n^2-K^2}\,,$$

которые соответствуют симметричной задаче и получаются при граничных условиях (1.2) во внутренней задаче. Отметим, что $\omega^{\mathrm{I}}_{*0n},\omega^{\mathrm{II}}_{*0n}$ являются частотами сдвиговых колебаний, а $\omega^{\mathrm{III}}_{*0n}$ – частотой продольных колебаний.

Таблица 1

	n=1	**n=2**	**n=3**
λ_{pn}	$0.2187\pm i\,0.8077$	1.5702	$1.7038\pm i\,0.1596$
	1.1425	$2.2135\pm i\,0.2164$	2.6338
	1.7777	2.8217	3.3529
λ_{an}	4.06877	4.9504	5.4602
	6.80808	8.13754	9.13482
	9.38419	10.9476	12.2063

Таблица 2

	n=1	**n=2**	**n=3**
λ_{pn}	$0.1979\pm i\,0.73$	$0.084\pm i\,1.3762$	1.3091
	0.4362	$0.1979\pm i\,0.73$	2.2527
	1.2102	0.5102	3.0064
λ_{an}	4.22812	5.45848	6.45856
	6.9045	8.45624	9.76443
	9.45437	11.1866	12.6844

Таблица 3

	n=1	**n=2**	**n=3**
λ_{pn}	$0.3894\pm i\,1.4379$	$0.7789\pm i\,2.8758$	1.3466
	0.9306	1.8617	2.7937
	1.7798	2.802	3.7856
λ_{an}	0.870584	1.74117	2.61175
	5.52747	7.52746	9.18087
	8.50094	11.0549	13.1785

В антисимметричной задаче и при граничных условиях (1.1) для λ_{pn} и λ_{an} получаются подобные значения. Из полученных выше решений следует весьма важный факт: наличие сопротивления приводит к затухающим собственным колебаниям, как по времени, так и по продольному направлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Азатян Г.Л. Собственные колебания ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления. // Изв.НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С. 48–58.
3. Гулгазарян Л.Г. О Пограничном слое в трехмерной постановке задачи о собственных колебаниях двухслойных ортотропных оболочек //Труды Международной школы-конференции молодых ученых. Механика. Ереван. 2009. С. 190-194.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1959. 439с.
5. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматлит, 1960. 196с.

Сведения об авторе:

Саргсян Месроп Зогракович – аспирант отдела механики тонкостенных систем, Институт механики НАН РА, (374 224) 22335, (37493) 069950 E-mail messarg@gmail.com

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК, ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян А. А.

В работе на основе общих динамических теорий микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учтены поперечные сдвиговые и родственные им деформации, изучены свободные колебания шарнирно-опертых балок, прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек (осесимметричная задача). Для поставленных задач построены точные решения. В результате определены частоты и формы собственных колебаний микрополярных балок, прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек. Приведены результаты численных вычислений, показывающие специфические особенности собственных колебаний тонких балок, пластин и оболочек из микрополярного упругого материала.

1. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [1]:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+N_{12}-N_{21}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2},\quad N_{21}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0, \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$N_{12}=2h\left[(\mu+\alpha)\gamma_{12}+(\mu-\alpha)\gamma_{21}\right],\quad N_{21}=2h\left[(\mu+\alpha)\gamma_{21}+(\mu-\alpha)\gamma_{12}\right],$$
$$M_{11}=DK_{11},\quad L_{13}=2hB\chi_{13},\quad D=\frac{2Eh^3}{3} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1(x_1,t)}{\partial x_1},\ \gamma_{21}=\psi_1(x_1,t)+\Omega_3(x_1,t),\ \gamma_{12}=\frac{\partial w(x_1,t)}{\partial x_1}-\Omega_3(x_1,t),\ \chi_{13}=\frac{\partial\Omega_3(x_1,t)}{\partial x_1} \tag{1.3}$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w=0,\quad M_{11}=0,\quad L_{13}=0\ \text{, при } x_1=0;a \tag{1.4}$$

Здесь N_{12},N_{21} – усилия; M_{11} – усредненный момент от силового напряжения; L_{13} – усредненный момент от моментного напряжения; w – прогиб балки; ψ_1 – полный поворот нормального элемента; а Ω_3 – свободная часть поворота; E,μ,α,B – упругие константы микрополярного материала балки; γ_{12} и γ_{21} – сдвиговые деформации; χ_{13} – изгибно-крутильная деформация в точках средней линии балки; ρ – плотность материала; J – ее мера инерции при вращении; a –длина балки; $0\le x_1\le a$; t – время.

Из уравнений (1.1)–(1.3) после перехода к уравнениям относительно перемещения w и углов Ω_3, ψ_1, получим:

$$(\mu-\alpha)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-2\alpha\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ B\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial x_1^2}-2\alpha\psi_1+2\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}-4\alpha\Omega_3=J\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}$$
$$(\mu+\alpha)\psi_1+(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1}+2\alpha\Omega_3-\frac{Eh^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+\frac{\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0 \tag{1.5}$$

Граничные условия (1.4) примут вид

$$w=0,\quad \frac{\partial\psi_1(x_1,t)}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial\Omega_3(x_1,t)}{\partial x_1}=0\quad \text{при } x_1=0;a \tag{1.6}$$

Представим решение граничной задачи (1.5),(1.6) в виде:

$$w=A_m e^{ip_mt}\sin\frac{m\pi}{a}x_1,\ \Omega_3=A_0'e^{ip_0t}+A_m'e^{ip_mt}\cos\frac{m\pi}{a}x_1,\ \psi_1=A_0''e^{ip_0t}+A_m''e^{ip_mt}\cos\frac{m\pi}{a}x_1. \tag{1.7}$$

где $A_0',B_0',A_0'',B_0'',A_m,B_m,A_m',B_m',A_m'',B_m''$ – постоянные; p_m – частоты собственных колебаний микрополярной балки со свободным вращением. Подставим решение (1.7) в систему дифференциальных уравнений (1.5), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_0',B_0',A_0'',B_0'',A_m,B_m,A_m',B_m',A_m'',B_m''$:

$$2\sim A_0' + \left[\left(\text{«} + \sim\right) - \frac{{}^{\circ}h^2}{3}p_0^2\right]A_0'' = 0, \qquad \left[Jp_0^2 - 4\sim\right]A_0' - 2\sim A_0'' = 0 \tag{1.8}$$

$$\left[{}^{\circ}p_m^2 - \left(\text{«} + \sim\right)\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\right]A_m + 2\sim\frac{m\text{®}}{a}A_m' - \left(\text{«} - \sim\right)\frac{m\text{®}}{a}A_m'' = 0$$

$$\left(\text{«} - \sim\right)\frac{m\text{®}}{a}A_m + 2\sim A_m' + \left[\left(\text{«} + \sim\right) + \frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2 - \frac{{}^{\circ}h^2}{3}p_m^2\right]A_m'' = 0 \tag{1.9}$$

$$2\sim\frac{m\text{®}}{a}A_m + \left[Jp_m^2 - B\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2 - 4\sim\right]A_m' - 2\sim A_m'' = 0$$

Поскольку нас интересует ненулевое решение, то потребуем, чтобы детерминант матрицы, соответствующий системам уравнений (1.8),(1.9), был равен нулю. Тогда для определения собственных частот p_0, p_m получим, соответственно, следующие алгебраические уравнения четвертой и шестой степеней:

$$p_0^4 - \left[\left(\text{«} + \sim\right)\frac{3}{{}^{\circ}h^2} + \frac{4\sim}{J}\right]p_0^2 + \frac{4\text{«}\sim}{J}\frac{3}{{}^{\circ}h^2} = 0 \tag{1.10}$$

$$C_{m1}p_m^6 - C_{m2}p_m^4 + C_{m3}p_m^2 - C_{m4} = 0 \tag{1.11}$$

где

$$C_{m1} = J\frac{{}^{\circ\,2}h^2}{3}, \; C_{m2} = \frac{{}^{\circ\,2}h^2}{3}\left[B\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2 + 4\sim\right] + J{}^{\circ}\left[\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2 + \text{«} + \sim + \left(\text{«} + \sim\right)\frac{h^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\right],$$

$$C_{m3} = J\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\left[4\text{«}\sim + \left(\text{«} + \sim\right)\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\right] + B{}^{\circ}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\left[\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\text{«} + \sim\right) + \left(\text{«} + \sim\right)\frac{h^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\right] + 4\sim{}^{\circ}\left[\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2 + \text{«} + \text{«}\frac{h^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\right] \tag{1.12}$$

$$C_{m4} = B\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^4\left[4\text{«}\sim + \left(\text{«} + \sim\right)\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^2\right] + 4\text{«}\sim\frac{Eh^2}{3}\left(\frac{m\text{®}}{a}\right)^4$$

Результаты численных вычислений приведены в табл.1.

Таблица 1

Физические параметры материала балки: α = 1,6 МПа, μ = 2 МПа, λ =3 МПа, B= 6 КН; плотность материала: ° =590 кг/м^3; мера инерции при вращении: J=5,31·10^{-6} кг/м; $\text{¢} = h/a$										
размеры балки			микрополярная теория балок со свободным вращением [2,3]			уточненная микрополярная теория балок со свободным вращением				
	a,м	h, м	P_1^1, Гц	P_0^1, Гц	P_1^2, Гц	P_1^1, Гц	P_0^2, Гц	P_1^3, Гц	P_0^1, Гц	P_1^2 Гц
$\delta = \frac{1}{40}$	0,07	0,00175	487,414	130235	273151	487,458	9161,199	11337,9	174921	296991
	0,5	0,0125	19,4011	130235	134503	19,7931	1283,96	1306,72	174732	177935
	1	0,025	4,96801	130235	131315	5,38518	641,989	646,698	174729	175535
$\delta = \frac{1}{100}$	0,07	0,0007	487,414	130235	273151	487,42	22769,3	28280,9	175948	297198
	0,5	0,005	19,4011	130235	134503	19,4646	3209,53	3256,88	174752	177954
	1	0,01	4,96801	130235	131315	5,03749	1604,93	1611,75	174734	175540

Как видно из табл.1, низкие частоты почти одинаковы по двум теориям микрополярных балок и эти частоты почти не зависят от толщины балок. По уточненной теории микрополярных балок получаются две новые средние частоты. Для сравнения частот по уточненной микрополярной и по уточненной классической теориям приведём результаты по уточненной классической теории:

1) $\text{¢} = \frac{1}{40}$; $a = 0{,}07$ м; $h = 0{,}00175$ м; P_1^1 =30,29548 Гц; P_0^2 =9171,317 Гц; P_1^3 =9205,148 Гц,

2) $\text{¢} = \frac{1}{100}$; $a = 0{,}07$ м; $h = 0{,}0007$ м; P_1^1 =12,1557 Гц; P_0^2 =22928,29 Гц; P_1^3 =22941,86 Гц,

а результаты по уточненной микрополярной теории приведены в табл.1.

Важно отметить, что у микрополярных балок получившиеся частоты по количеству вдвое больше, чем по классической теории балок. Отметим еще, что когда имеем массивную балку, то частоты по микрополярной теории приближаются к частотам классической теории (но по микрополярной теории имеются две несравнимые частоты).

2. Свободные колебания микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [1]:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad N_{3i}-\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}-\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}=0$$
$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}\qquad (2.1)$$

соотношения упругости

$$N_{3i}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+(\mu-\alpha)\Gamma_{i3}\right],\ N_{i3}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}\right],\quad M_{ii}=D\left(K_{ii}+\nu K_{jj}\right),$$
$$M_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}\right],\ L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right],\qquad (2.2)$$
$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}\right],\ \iota(x_1,x_2,t)=-\frac{\beta}{2\gamma(\beta+2\gamma)}\frac{1}{2h}\left(L_{11}+L_{22}\right),\qquad D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$$

геометрические соотношения

$$K_{ii}=\frac{\partial\psi_i}{\partial x_i},\ K_{ij}=\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}-(-1)^j\iota,\ \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,\ \Gamma_{i3}=\frac{\partial w}{\partial x_i}+(-1)^j\Omega_j,\ \chi_{ii}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},\ \chi_{ij}=\frac{\partial\Omega_j}{\partial x_i}.\qquad (2.3)$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w=0,\quad M_{11}=0,\quad L_{12}=0,\quad \Omega_1=0,\quad \psi_2=0\qquad \text{при } x_1=0;a$$
$$w=0,\quad M_{22}=0,\quad L_{21}=0,\quad \Omega_2=0,\quad \psi_1=0\qquad \text{при } x_2=0;b\qquad (2.4)$$

Из уравнений (2.1)–(2.3) перейдем к уравнениям относительно перемещения $w(x_1,x_2,t)$ и углов $\Omega_1(x_1,x_2,t),\Omega_2(x_1,x_2,t),\ \psi_1(x_1,x_2,t),\psi_2(x_1,x_2,t)$, получим:

$$(\mu+\alpha)\nabla^2 w+(\mu-\alpha)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)+2\alpha\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$(\mu+\alpha)\psi_1+(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1}-2\alpha\Omega_2-\frac{Eh^2}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right]-$$
$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\beta}{\beta+2\gamma}\left(\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_2^2}\right)\right]+\frac{\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0$$

$$(\mu+\alpha)\psi_2+(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial x_2}+2\alpha\Omega_1-\frac{Eh^2}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right]-$$
$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\beta}{\beta+2\gamma}\left(\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right]+\frac{\rho h^2}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1^2}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_2^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2}-\qquad (2.5)$$
$$-2\alpha\psi_2+2\alpha\frac{\partial w}{\partial x_2}-4\alpha\Omega_1=J\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}$$

$$(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_2^2}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2}+$$
$$+2\alpha\psi_1-2\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1}-4\alpha\Omega_2=J\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}$$

Граничные условия шарнирного-опирания имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&w=0,\quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}=0,\quad \Omega_1=0,\quad \Psi_2=0 \qquad \text{при } x_1=0;a\\
&w=0,\quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}=0\quad \Omega_2=0,\quad \Psi_1=0 \qquad \text{при } x_2=0;b
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Представим решение граничной задачи (2.5),(2.6) в виде:

$$
\begin{gathered}
w=A_{mn}e^{ip_{mn}t}\sin\frac{m\pi}{a}x_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2,\ \Omega_1=A^1_{m0}e^{ip_{m0}t}\sin\frac{m\pi}{a}x_1+A^1_{mn}e^{itp_{mn}}\sin\frac{m\pi}{a}x_1\cos\frac{n\pi}{b}x_2,\\
\Omega_2=A^2_{0n}e^{ip_{0n}t}\sin\frac{m\pi}{b}x_2+A^2_{mn}e^{itp_{mn}}\cos\frac{m\pi}{a}x_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2,\\
\Psi_1=A^3_{0n}e^{ip_{0n}t}\sin\frac{n\pi}{b}x_2+A^3_{mn}e^{itp_{mn}}\cos\frac{m\pi}{a}x_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2,\\
\Psi_2=A^4_{m0}e^{ip_{m0}t}\sin\frac{m\pi}{a}x_1+A^4_{mn}e^{itp_{mn}}\sin\frac{m\pi}{a}x_1\cos\frac{n\pi}{b}x_2,\quad (m,n=1,2,...)
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

где $A_{mn}, A^1_{m0}, A^1_{mn}, A^2_{0n}, A^2_{mn}, A^3_{0n}, A^3_{mn}, A^4_{m0}, A^4_{mn}$ – постоянные; p_{mn}, p_{m0}, p_{0n} – частоты собственных колебаний микрополярной пластинки со свободным вращением. Подставим решение (2.7) в систему дифференциальных уравнений (2.5), в результате получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_{mn}, A^1_{m0}, A^1_{mn}, A^2_{0n}, A^2_{mn}, A^3_{0n}, A^3_{mn}, A^4_{m0}, A^4_{mn}$.

Поскольку нас интересует ненулевое решение, то потребуем, чтобы детерминанты матриц, соответствующие системам уравнений (2.8),(2.9),(2.10), были равны нулю. Тогда для определения собственных частот p_{m0}, p_{0n} получим алгебраические уравнения четвертой, а для p_{mn} – десятой степеней. Отметим, что для квадратной пластинки $p_{m0}=p_{0m}$.

Результаты численных вычислений приведены в табл. 2 для квадратной пластинки.

Таблица 2

Физические параметры материала пластинки: α = 1,6 МПа, μ = 2 МПа, λ =3 МПа, γ=ε= 3 КН; плотность материала: ρ =590 кг/м^3; мера инерции при вращении: J=5,31·10^{-6} кг/м; $\delta=h/a=1/40$													
размеры пластинки			микрополярная теория пластин со свободным вращением [2,3]				уточненная микрополярная теория платин со свободным вращением						
	a,м	h, м	P^1_{11},Гц	P^1_{01},Гц	P^2_{11},Гц	P^3_{11},Гц	P^1_{11},Гц	P^2_{01},Гц	P^4_{11},Гц	P^5_{11},Гц	P^1_{01},Гц	P^2_{11},Гц	P^3_{11},Гц
$\delta=\frac{1}{40}$	0,07	0,00175	732,2	290206	363678	389202	732,2	11431,2	11781,8	11792,7	312745	381895	406275
	0,5	0,0125	37,64	135201	138640	139991	38,41	1307,21	1328,34	1328,39	178464	181467	181737
	1	0,025	9,85	131494	132386	132741	10,74	645,821	649,575	651,604	175670	176463	176481
$\delta=\frac{1}{100}$	0,07	0,0007	732,2	290206	363678	389202	732,2	28533,7	29366,5	29411	312923	381992,6	406356
	0,5	0,005	37,64	135201	138640	139991	37,77	3263,14	3300,68	3311,79	178483	181484,4	181755
	1	0,01	9,85	131494	132386	132741	10,00	1612,21	1618,92	1618,94	175675	176467,8	176485

По данным из табл.2 убедимся, что те выводы, которые были сделаны для микрополярных балок, остаются такими же и в случае микрополярных пластин.

3. Свободные колебания микрополярных упругих тонких круговых цилиндрических оболочек с независимыми полями перемещений и вращений (осесимметричная задача)

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких осесимметричных оболочек со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [6]:

уравнения движения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha}=2\rho hr\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\qquad -T_{22}+\frac{\partial N_{13}}{\partial \alpha}=2\rho hr\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\
\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}+r\left(N_{31}-N_{13}\right)+L_{23}=2Jhr\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2},\ \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha}-rN_{31}=\frac{2\rho h^3}{3}r\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

соотношения упругости

$$
\begin{gathered}
N_{13}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}\right],\quad N_{31}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}\right],\\
T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\quad M_{11}=DK_{11},\quad L_{12}=2h(\gamma+\varepsilon)k_{12},\quad L_{23}=2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}k_{23},\ D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

геометрические соотношения

$$K_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial \cdot_{1}}{\partial \P},\quad \Gamma_{11}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \P},\quad \Gamma_{22}=\frac{w}{r},\quad \Gamma_{13}=-\mathrm{g}_1+\Omega_2,\quad \Gamma_{31}=\cdot_{1}-\Omega_2,$$

$$\mathrm{i}_{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \P},\quad \mathrm{g}_1=-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \P},\quad \mathrm{i}_{23}=-\frac{1}{r}\Omega_2 \tag{3.3}$$

Граничные условия шарнирного опирания выражаются так:

$$w=0,\quad T_{11}=0,\quad M_{11}=0,\quad L_{12}=0 \quad \text{при } \P=0, l/r . \tag{3.4}$$

Представим решение граничной задачи (3.1),(3.4) в виде:

$$w=A_m e^{ip_m t}\sin\frac{m®r}{l}\P,\quad u_1=A_m^1 e^{ip_m t}\cos\frac{m®r}{l}\P,$$

$$\Omega_2=A_0^2 e^{ip_0 t}+A_m^2 e^{ip_m t}\cos\frac{m®r}{l}\P,\quad \cdot_{1}=A_0^3 e^{ip_0 t}+A_m^3 e^{ip_m t}\cos\frac{m®r}{l}\P. \tag{3.5}$$

где $A_m, A_m^1, A_0^2, A_m^2, A_0^3, A_m^3$ – постоянные; p_m, p_0 – частоты собственных колебаний микрополярной пластинки со свободным вращением.

Результаты численных вычислений приведены в табл.3.

Таблица 3

Физические параметры материала оболочки: α = 1,6 МПа, μ = 2 МПа, λ =3 МПа, γ=ε= 3 КН; плотность материала: ° =590 кг/м^3; мера инерции при вращении: J=5,31·10^{-6} кг/м; $¢ = h/a, l = 2R$												
размеры оболочки			микрополярная теория оболочек со свободным вращением [4]				уточненная микрополярная теория оболочек со свободным вращением					
	R,м	h, м	P_1^1, Гц	P_1^2, Гц	P_0^1, Гц	P_1^3, Гц	P_1^1, Гц	P_1^2, Гц	P_0^2, Гц	P_1^4, Гц	P_0^1, Гц	P_1^3, Гц
$\delta=\frac{1}{100}$	0,06	0,0006	327,58	430,229	130234,7	191255	337,501	432,6197	28703	31339,8	197344	241669
	0,5	0,005	29,467	50,5866	130234,7	131315	29,6206	50,59456	3214,3	3226,48	175079	175884
	1	0,01	14,59	25,2859	130234,7	130505	14,6098	25,28701	1605,5	1607,26	174816	175018
$\delta=\frac{1}{40}$	0,06	0,0015	327,58	430,229	130234,7	191255	337,507	432,6197	11539	12569,8	196350	0,24113
	0,5	0,0125	29,467	50,5866	130234,7	131315	29,6307	50,5944	1285,9	1291,79	175059	175865
	1	0,025	14,589	25,2859	130234,7	130505	14,6151	25,28686	642,23	643,454	174811	175013

По данным из табл.3 убедимся, что те выводы, которые были сделаны для микрополярных балок и пластин, остаются такими же и в случае микрополярных оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин// Вестник Пермского Гос. Технического университета. Математическое моделирование систем и процессов. 2008. № 16. С. 111-120.
2. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Динамические задачи для тонких стержней и пластин по несимметричной теории упругости //Межвуз. сб. научных трудов, посвященный 80-летию С. Н. Мергеляна. Ванадзор: Государственный пединститут им. О. Туманяна. 2008. Т. 2. С. 4-17.
3. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных пластин// Труды VII Всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород: Изд. Дом “Диалог Культур”, 2008. С. 415-423.
4. Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких цилиндрических оболочек //Сб. трудов Международной школы-конференции молодых ученых. 28 сентября–1 октября, 2009. Агавнадзор, Армения. 2009. С.304-309.
5. Саркисян А.А. Свободные колебания микрополярных упругих тонких балок. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т. 63. № 3.
6. Sargsyan S. H. General Mathematical Models of Micropolar Thin Elastic Bars, Plates and Shells// Proceedings of the 16the US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. USNCTAM 2010. June 27-July 2, 2010. State College, PA, USA.

Сведения об авторе

Саркисян Арменуи Акоповна – аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М.Налбандяна, (374 94) 42 21 03; E-mail: armenuhis@mail.ru

МАГНИТОУПРУГОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ (НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ) ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян С.О., Саркисян Л.С.

Рассматриваются трехмерные уравнения, граничные и начальные условия линейной микрополярной теории магнитоупругости с независимыми полями перемещений и вращений.

В качестве исходной принимаются гипотезы прямой линии (которые дополнятся некоторой статической гипотезой) и гипотезы магнитоупругости для электромагнитных величин. Указанные гипотезы имеют асимптотическое подтверждение.

На основе принятых гипотез в зависимости от значений безразмерных физических параметров построена общая теория магнитоупругости микрополярных упругих электропроводящих тонких оболочек с независимымыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; «с малой сдвиговой жесткостью». В построенных теориях магнитоупругости микрополярных оболочек полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Введение. В работах [1-3] впервые формулировались гипотезы магнитоупругости тонких тел и на их основе трехмерные уравнения магнитоупругости приведены к двумерным и изучены задачи колебания и устойчивости электропроводящих тонких пластин и оболочек, находящихся во внешних магнитных полях. В работе [4], включая внешнюю задачу электродинамики, построена асимптотически точная теория магнитоупругости электропроводящих тонких оболочек и пластин. В работах [5,6] построена трехмерная теория магнитоупругости микрополярных электропроводящих неферромагнитных тел. В работах [7-9] (асимптотическим методом и методом гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение) построена теория микрополярно-упругих оболочек и пластин с учетом и без учета поперечных сдвигов. В работе [10] на основе асимптотического метода построена теория магнитоупругости микрополярно-упругих тонких оболочек без учета поперечных сдвигов. В данной работе развивается подход работы [8,9], на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение, в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построена общая теория магнитоупругости микрополярных упругих электропроводящих (нефферомагнитных) тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; «с малой сдвиговой жесткостью».

1. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку постоянной толщины 2h как трехмерное упругое микрополярное электропроводящее неферромагнитное тело и отнесем его к триортогональной неподвижной системе координат α_i [4]. Пусть оболочка находится во внешнем магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{B}_0$. Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитоупругости для микрополярно-упругой трехмерной среды [5,6]:

уравнения движения

$$\nabla_m \sigma^{mn} + F^n = \rho \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}, \qquad \nabla_m \sigma^{mn} + \varepsilon^{nmk} \sigma_{mk} = I \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial t^2} \;; \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\cdot\gamma_{kk}\cdot\delta_{nm};$$
$$\mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\chi_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{nm} + \beta\cdot\chi_{kk}\cdot\delta_{nm}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m v_n - \varepsilon_{kmn}\omega^k, \qquad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n \tag{1.3}$$

Уравнения квазистационарной электродинамики, которые имеют место в области оболочки

$$\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{div}\vec{h} = 0\,. \tag{1.4}$$

Уравнения квазистационарной электродинамики в окружающем оболочку воздушном пространстве, которое представляет собой все трехмерное пространство за исключением трехмерной области занимаемой оболочкой

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0,\quad \operatorname{rot}\vec{E}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{E}^{(e)}=0,\quad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0\,. \tag{1.5}$$

Здесь σ^{mn}, μ^{mn} – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn}, χ_{mn} – компоненты тензоров деформации и изгиба-кручений; $\vec{v}, \vec{\omega}$ – векторы перемещения и независимого поворота точек оболочки;

$$\vec{F}=\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}_0$$

– вектор массовых сил электромагнитного происхождения;

$$\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\times\vec{B}_0\right)$$

– вектор плотности возбужденного тока электропроводимости в области оболочки; $\vec{E}, \vec{E}^{(e)}, \vec{h}, \vec{h}^{(e)}$ – соответственно, векторы напряженности возбужденного электрического и магнитного полей в области оболочки и в окружающем пространстве; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – упругие константы, σ – электропроводимость, ρ – плотность, I – мера инерции при вращении материала оболочки.

К системе уравнений (1.1)-(1.5) трехмерной микрополярной теории магнитоупругости должны быть присоединены механические и электродинамические граничные и начальные условия и условия на бесконечности [10].

Предполагатся, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности оболочки. Будем исходить из следующей основной концепции: общее напряженно-деформированное и электромагнитное состояние тонкого тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего и краевого (квазистатического) состояний. Построение общей прикладной-двумерной теории микрополярной магнитоупругости тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, построим теорию микрополярной магнитоупругости тонких оболочек на основе метода гипотез. Сами гипотезы будем формулировать на основе качественных результатов асимптотического анализа поставленной трехмерной начально-граничной задачи [10]. Одновременно, в построенной прикладной-двумерной теории микрополярной магнитоупругости тонких оболочек полностью учтём поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Как показывает асимптотический анализ поставленной начально-граничной задачи микрополярной магнитоупругости в тонкой области оболочки (1.1)-(1.5), при определении как внутренней задачи так и краевого состояния, большую роль играют значения физических констант материала оболочки, с этой точки зрения вводим следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{\alpha},\quad \frac{R^2\mu}{\beta},\quad \frac{R^2\mu}{\gamma},\quad \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \tag{1.6}$$

где R – характерный радиус кривизны оболочки.

2. Математическая модель микрополярной магнитоупругости тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры (1.6) имеют значения:

$$\frac{\mu}{\alpha}\sim 1,\quad \frac{R^2\mu}{\beta}\sim 1,\quad \frac{R^2\mu}{\gamma}\sim 1,\quad \frac{R^2\mu}{\varepsilon}\sim 1\;. \tag{2.1}$$

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования трехмерной начально-краевой задачи микрополярной магнитоупругости (1.1)-(1.5) [10] позволяют в основу построения двумерной модели микрополярной магнитоупругости тонких оболочек формулировать следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

а) перемещения V_i, V_3 и повороты ω_i, ω_3 распределены по толщине оболочки по линейному закону следующим образом [8,9]:

$$V_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2,t) + \alpha_3 \cdot \psi_i(\alpha_1,\alpha_2,t), \quad V_3 = w(\alpha_1,\alpha_2,t),$$
$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1,\alpha_2,t),\ \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1,\alpha_2,t) + \alpha_3 \cdot \iota(\alpha_1,\alpha_2,t) \tag{2.2}$$

где u_i, w–перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлении α_i, α_3 соответственно; ψ_i – полные углы поворота первоначально нормального к срединной поверхности элемента; Ω_i – определенная часть поворота ψ_i, связанные с моментными напряжениями; Ω_3 – такого же рода поворот вокруг α_3 в точках срединной поверхности; ι – интенсивность поворота ω_3 вдоль α_3 $(i = 1,2)$.

В смысле перемещений, кинематические гипотезы (2.2) представляют собой известные гипотезы Тимошенко [11] в классической теории упругих оболочек. Кинематические гипотезы (2.2), в целом, назовем обобщенными на случай микрополярной упругости гипотез Тимошенко;

б) нормальным напряжением σ_{33} по сравнению с напряжениями σ_{11}, σ_{22} в уравнениях обобщенного закона Гука можем пренебрегать;

в) для определения деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t). \tag{2.3}$$

После вычислений указанных величин, значения для σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к значению (2.3) соответственно слагаемое, получаемое интегрированием первых двух и шестого уравнения движения (1.1), потребовав условие, чтобы усредненные по толщине оболочки величина была равна нулю (отметим, что представленные статические гипотезы в некотором смысле отличаются от соответствующих гипотез Тимошенко в классическом случае).

г) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбужденного электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбужденного магнитного поля по толщине оболочки остаются неизменными [1-3]; нормальной компонентой j_3 электрического тока проводимости в тонкой трехмерной области оболочки можем пренебрегать [4,7], т.е.

$$E_i = E_{i0}(\alpha_1,\alpha_2,t), \quad h_3 = h_{30}(\alpha_1,\alpha_2,t), \quad j_3 = 0. \tag{2.4}$$

д) для определения электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве [4,7], трехмерную область, занимаемую тонкой оболочкой, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки, по которому будут течь поверхностные токи электропроводимости, представляющие собой усредненные токи по толщине оболочки $(\tilde{j}_{10}, \tilde{j}_{20})$:

е) относительно единицы будем пренебрегать величиной порядка h/R.

Основная система общей прикладной-двумерной теории микрополярной магнитоупругости тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций выражаются следующим образом:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ij} + S_{ji}) + \frac{N_{i3}}{R_i} +$$
$$+(-1)^j \frac{1}{c} B_{03}\tilde{j}_{j0} = -(q_i^+ + q_i^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(H_{ij} + H_{ji}) - N_{3i} =$$

$$= h\left(q_i^+ - q_i^-\right) + \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right] - \frac{1}{c}\left(B_{02}\tilde{j}_{10} - B_{01}\tilde{j}_{20}\right) = \left(q_3^+ + q_3^-\right) - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii} - L_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_j}\left(L_{ij} + L_{ji}\right) + \frac{L_{i3}}{R_i} +$$

$$+(-1)^j\left(N_{j3} - N_{3j}\right) = -\left(m_i^+ + m_i^-\right) + 2Ih\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right] - \left(S_{12} - S_{21}\right) = \left(m_3^+ + m_3^-\right) - 2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2},$$

$$L_{33} - \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right] - \left(H_{12} - H_{21}\right) = h\left(m_3^+ - m_3^-\right) - \frac{2h^3}{3}I\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}$$

соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}\right] + \frac{\nu}{1-\nu}h\left(q_3^+ - q_3^-\right), \qquad S_{ij} = 2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij} + (\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right],$$

$$N_{i3} = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{i3} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{3i}, \qquad N_{3i} = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{3i} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{i3},$$

$$M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii} + \nu K_{jj}\right] + \frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(q_3^+ + q_3^-\right), \quad H_{ij} = \frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{ij} + (\mu-\alpha)K_{ji}\right], \tag{2.6}$$

$$L_{ii} = 2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}k_{jj}\right] + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33}, \quad L_{ij} = 2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{ij} + (\gamma-\varepsilon)k_{ji}\right],$$

$$L_{33} = 2h(\beta+2\gamma)\iota + 2h\beta\left(k_{11} + k_{22}\right),$$

$$L_{13} = 2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\iota + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}h\left(m_i^+ - m_i^-\right), \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{h^2}{3}\left(m_i^+ + m_i^-\right).$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i - (-1)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i - (-1)^j\iota,$$

$$\Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j\Omega_j, \quad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j\Omega_j, \quad \vartheta_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \tag{2.7}$$

$$k_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j + \frac{\Omega_3}{R_i}, \qquad k_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$k_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \quad l_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}, \; i,j = 1,2, \quad i \neq j.$$

уравнения усредненного электромагнитного поля [4,7,8]:

$$\tilde{j}_{10}(P,t) = -\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(Q)\vec{e}_1(P) + \tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_1(P)}{R_{PQ}}d\Omega + \frac{2\sigma h}{c}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}B_{03} - \frac{\partial w}{\partial t}B_{02}\right), \tag{2.8}$$

$$\tilde{j}_{20}(P,t) = -\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(Q)\vec{e}_2(P) + \tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_2(P)}{R_{PQ}}d\Omega + \frac{2\sigma h}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t}B_{01} - \frac{\partial u_1}{\partial t}B_{03}\right), \quad P \in \Omega$$

граничные условия (при $\alpha_1 = \alpha_{10}$):

$T_{11} = T_{11}^*$ или $u_1 = u_1^*$, $S_{12} = S_{12}^*$ или $u_2 = u_2^*$, $N_{13} = N_{13}^*$ или $w = w^*$,

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \psi_1 = \psi_1^*,\ H_{12} = H_{12}^* \text{ или } \psi_2 = \psi_2^*,\ L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \Omega_1 = \Omega_1^*, \tag{2.9}$$
$$L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \Omega_2 = \Omega_2^*,\ L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \Omega_3 = \Omega_3^*,\ \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } \iota = \iota^*,$$
$$\tilde{j}_{10} = 0, \quad \tilde{j}_{20} = 0.$$

Начальные условия (при $t = 0$) задаются относительно $u_i, w, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \frac{\partial \iota}{\partial t}$ и для $\tilde{j}_{i0}$ (нулевые начальные условия).

Теория магнитоупругости микрополярных упругих тонких пластин и балок с независимыми полями перемещений и вращений представляют собой частные случаи микрополярной теории оболочек (2.5)-(2.9).

При других значениях физических безразмерных параметров (1.6) аналогичным подходом построены теория магнитоупругости микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением и теория «с малой сдвиговой жесткостью».

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит, 1996. 288с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд.ЕГУ, 1991. 143с.
4. Саркисян С. О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 235с.
5. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theoris. I Foundations and Solids. Springer. New York, ets. 1998. 325p.
6. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type Equations of Thermo-magneto-microelasticity//Bull. De L'Academie Polonaise des Sciences. 1970. V. XVIII. №4. P. 155-159.
7. Sargsyan S. H. Magnetothermoelasticity of Electric conductive Anisotropic Thin Shells//Proc. of the 5th International Congress on Thermal Stresses ang Related Topics, TS 2003. 8-11 June 2003. Blacksburg, VA. USA. WA-4-5-1-WA-4-5-4.
8. Саркисян С.О. Общая теория магнитотермоупругости тонких оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.40-55.
9. Sargsyan S.H. General Mathematical Models of Micropolar Thin Elastic Bars, Plates and Shells//Proceedings of the 16th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. USNCTAM 2010. June 27-July 2, 2010. State College, PA, USA.
10. Саркисян С.О., Саркисян Л.С. Магнитоупругость микрополярных упругих тонких оболочек и пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №3.
11. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: «Судостроение». 1987. 316с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович – член-корр. НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой Математического анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского гос. педагогического института.
E-mail: slusin@yahoo.com
Тел. (091) 60 57 15

Саркисян Лусине Самвеловна – к.ф.-м.н., доцент кафедры Математического анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского гос. педагогического института.
E-mail: slusin@yahoo.com

ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНКИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ НЕЧЁТНОГО ЧИСЛА СЛОЁВ, СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Саркисян С.О., Фарманян А.Ж.

В работе, используя качественные результаты асимптотического метода интегрирования граничной задачи микрополярной упругой слоистой среды, формулируются гипотезы, на основе которых в зависимости от значений безразмерных физических параметров построены прикладные теории микрополярных слоистых пластин (составленных из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости) с независимыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; «с малой сдвиговой жесткостью»

Введение. В работе [1], на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое подтверждение [2], в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построены общие прикладные-двумерные теории микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; «с малой сдвиговой жесткостью». В построенных теориях микрополярных упругих пластин полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации. В работе [3] на аналогичной идее построены теории микрополярных упругих тонких оболочек.

В данной работе развивается этот подход и на основе асимптотического анализа краевой задачи микрополярной теории упругости для слоистых пластин [4] формулируются достаточно общие предположения (гипотезы) и, в результате, построены общие прикладные-двумерные теории микрополярно-упругих слоистых пластин, составленных из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости пакета (с независимыми полями перемещений и вращений; со стесненным вращением; «с малой сдвиговой жесткостью»).

1.Постановка задачи. Пусть имеется многослойная пластинка, составления из нечетного числа однородных изотропных микрополярных упругих слоев, симметрично расположенных относительно среднего слоя. Предполагается, что скольжение слоев друг по другу невозможно, так как слои склеены или спаяны друг с другом по плоскостям соприкосновения и при деформации работают совместно. Примем срединную плоскость среднего слоя (она же срединная плоскость всего пакета многослойной пластинки) за плоскость x_1x_2, слои, симметрично расположенные относительно координатной плоскости пластинки, имеют одинаковые толщины и одинаковые физико-механические свойства. Будем исходить для каждого из слоя пластинки из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [5]:

уравнения равновесия

$$\sigma_{mn,n}^{(s)}=0,\qquad \mu_{mn,n}^{(s)}+э_{nmk}\cdot\sigma_{mk}^{(s)}=0 \tag{1.1}$$

физические соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_{mn}^{(s)}&=\left(\mu^{(s)}+\alpha^{(s)}\right)\gamma_{mn}^{(s)}+\left(\mu^{(s)}-\alpha^{(s)}\right)\gamma_{nm}^{(s)}+\lambda^{(s)}\cdot\gamma_{kk}^{(s)}\cdot\delta_{nm}\\ \mu_{mn}^{(s)}&=\left(\gamma^{(s)}+\varepsilon^{(s)}\right)\chi_{mn}^{(s)}+\left(\gamma^{(s)}-\varepsilon^{(s)}\right)\chi_{nm}^{(s)}+\beta^{(s)}\cdot\chi_{kk}^{(s)}\cdot\delta_{nm}\end{aligned} \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{nm}^{(s)}=v_{m,n}^{(s)}-э_{knm}\cdot\omega_k^{(s)},\quad \chi_{nm}^{(s)}=\omega_{m,n}^{(s)}. \tag{1.3}$$

Здесь σ_{mn},μ_{mn} – компоненты несимметричных тензоров силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn},χ_{mn} – компоненты тензоров деформаций и изгиба-кручений, v_n,ω_n – компоненты векторов перемещения и независимого поворота точек тела; $\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие постоянные материала слоя; s – номер слоя (число слоев 2n +1).

На лицевых плоскостях пакета для граничных условий будем считать заданными силовые и моментные напряжения, на боковой поверхности пластинки, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, эти условия могут записываться в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Что касается условий контакта между слоями, будем считать, что имеют место условия полного контакта, (т.е. непрерывны компоненты векторов перемещений и вращений, кроме того, непрерывны соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений).

Предположим, что толщина всего пакета пластинки мала по сравнению с длиной волны деформации в плане. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкой многослойной пластинки состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю область трехмерной пластинки и пограничных слоев, локализирующихся вблизи боковой поверхности пакета пластинки. Построение общей двумерной модели микрополярных упругих многослойных пластин тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, построим модель микрополярной упругой многослойной пластинки на основе метода гипотез. Сами гипотезы сформулируем на основе результата асимптотического анализа краевой задачи (1.1)-(1.3) в тонкой пространственной области пластинки [1-4].

При определении внутренного НДС (так и краевого НДС) большую роль играют значения физических констант материала слоев пластинки, с этой точки зрения вводим следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu^{(s)}}{\alpha^{(s)}},\quad \frac{a^2\mu^{(s)}}{\beta^{(s)}},\quad \frac{a^2\mu^{(s)}}{\gamma^{(s)}},\quad \frac{a^2\mu^{(s)}}{\varepsilon^{(s)}}. \tag{1.4}$$

2. Математическая модель микрополярных упругих многослойных тонких пластин, составленных из нечётного числа слоёв, симметрично расположенных относительно срединной плоскости.

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры (1.4) многослойной пластинки принимают значения:

$$\frac{\mu^{s}}{\alpha^{s}}\sim 1,\quad \frac{a^2\mu^{(s)}}{\beta^{(s)}}\sim 1,\quad \frac{a^2\mu^{(s)}}{\gamma^{(s)}}\sim 1,\quad \frac{a^2\mu^{(s)}}{\varepsilon^{(s)}}\sim 1. \tag{2.1}$$

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевой задачи (1.1)-(1.3) пластинки [1-4] позволяют в основу построения двумерной модели микрополярно-упругих слоистых тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений сформулировать следуюшие достаточно общие предположения (гипотезы):

а) в процессе деформации прямолинейные и нормальные к исходной плоскости пластинки волокна свободно поворачиваются как жесткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной исходной плоскости. Это означает, что перемещения $v_i^{(s)}, v_3^{(s)}$ и свободные повороты $\omega_i^{(s)}, \omega_3^{(s)}$ распределены по толщине пакета пластинки по линейному закону следующим образом:

$$v_i^{(s)} = x_3\psi_i\left(x_1,x_2\right),\quad v_3^{(s)} = w\left(x_1,x_2\right),\quad \omega_i^{(s)} = \Omega_i\left(x_1,x_2\right),\quad \omega_3^{(s)} = x_3\cdot\iota\left(x_1,x_2\right) \tag{2.2}$$

где ψ_i – полные углы поворота, а Ω_i – некоторые свободные повороты нормального элемента; w – перемещение точек исходной плоскости пластинки в направлении x_3; ι – интенсивность свободного поворота ω_3 вдоль оси $x_3\left(i=1,2\right)$.

Кинематические гипотезы (2.2) относительно перемещений, это по сути дела, представляют собой для всего пакета пластинки известные гипотезы Тимошенко в классической теории пластин [6]. Кинематические гипотезы (2.2), в целом, можем трактовать как обобщенные гипотезы Тимошенко в микрополярной теории многослойных пластин;

б) нормальные силовые напряжения, действующие на площадках, параллельных площадкам исходной плоскости, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора силовых напряжений;

в) при определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем

$$\sigma_{3i}^{(s)}=\overset{0}{\sigma}{}_{3i}^{(s)}\left(x_1,x_2\right),\quad \mu_{33}^{(s)}=\overset{0}{\mu}{}_{33}^{(s)}\left(x_1,x_2\right) \tag{2.3}$$

После определения указанных величин, окончательно, значения $\sigma_{3i}^{(s)}$ и $\mu_{33}^{(s)}$ определим, соответственно, как сумму значения (2.3) и результата интегрирования либо первых двух уравнений из (1.1), либо шестого из (1.1) уравнения равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усредненные по толщине каждого слоя пластинки величины были равны нулю.

Основная система уравнений общей теории изгибной деформации микрополярных упругих многослойных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, составленных из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно срединной плоскости, будет выражатся так:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x}+\frac{\partial N_{23}}{\partial y}=-\left[p_3^+-p_3^-\right],\quad \frac{\partial L_{11}}{\partial x}+\frac{\partial L_{21}}{\partial y}+N_{23}-N_{32}=-\left[m_1^+-m_1^-\right]$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x}+\frac{\partial L_{22}}{\partial y}+N_{32}-N_{23}=-\left[m_2^+-m_2^-\right],\quad N_{31}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x}-\frac{\partial M_{21}}{\partial y}=h\left[p_1^-+p_1^+\right] \tag{2.4}$$

$$N_{32}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x}-\frac{\partial M_{22}}{\partial y}=h\left[p_2^-+p_2^+\right],\quad L_{33}-\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x}-\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial y}+M_{21}-M_{12}=h\left[m_3^-+m_3^+\right]$$

физические соотношения

$$N_{13}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s+\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{13}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s-\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{31},\quad N_{31}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s+\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{31}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s-\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{13}$$

$$N_{23}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s+\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{23}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s-\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{32},\quad N_{32}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s+\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{32}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\mu_s-\alpha_s\right)\right]\mathit{\Gamma}_{23}$$

$$L_{12}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\gamma_s+\varepsilon_s\right)\right]k_{12}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\gamma_s-\varepsilon_s\right)\right]k_{21},\quad L_{21}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\gamma_s+\varepsilon_s\right)\right]k_{21}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{h_s}{h}\left(\gamma_s-\varepsilon_s\right)\right]k_{12}$$

$$L_{11}=\left[\sum_{s=1}^{n}2h_s\left(\beta_s+2\gamma_s\right)\right]k_{11}+\left[\sum_{s=1}^{n}2h_s\beta_s\right]\left[k_{22}+\iota\right],\quad L_{22}=\left[\sum_{s=1}^{n}2h_s\left(\beta_s+2\gamma_s\right)\right]k_{22}+\left[\sum_{s=1}^{n}2h_s\beta_s\right]\left[k_{11}+\iota\right]$$

$$L_{33}=\left[\sum_{s=1}^{n}2h_s\left(\beta_s+2\gamma_s\right)\right]\iota+\left[\sum_{s=1}^{n}2h_s\beta_s\right]\left[k_{11}+k_{22}\right] \tag{2.5}$$

$$M_{11}=\left[\frac{2}{3}\sum_{s=1}^{n}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\right]K_{11}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{3}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\frac{E_s\nu_s}{1-\nu_s^2}\right]K_{22}$$

$$M_{22}=\left[\frac{2}{3}\sum_{s=1}^{n}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\frac{E_s}{1-\nu_s^2}\right]K_{22}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{3}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\frac{E_s\nu_s}{1-\nu_s^2}\right]K_{11}$$

$$M_{12}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{3}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\left(\mu_s+\alpha_s\right)\right]K_{12}+\left[\frac{2}{3}\sum_{s=1}^{n}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\left(\mu_s-\alpha_s\right)\right]K_{21}$$

$$M_{21}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{3}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\left(\mu_s+\alpha_s\right)\right]K_{21}+\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{3}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\left(\mu_s-\alpha_s\right)\right]K_{12}$$

$$\Lambda_{13}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{3}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\frac{4\gamma_s\varepsilon_s}{\gamma_s+\varepsilon_s}\right]l_{13}$$

$$\Lambda_{23}=\left[\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{3}\left(z_s^3-z_{s-1}^3\right)\frac{4\gamma_s\varepsilon_s}{\gamma_s+\varepsilon_s}\right]l_{23}$$

геометрические соотношения

$$\mathit{\Gamma}_{13}=\frac{\partial w}{\partial x}+\Omega_2,\quad \mathit{\Gamma}_{23}=\frac{\partial w}{\partial y}-\Omega_1,\quad \mathit{\Gamma}_{31}=\psi_1-\Omega_2,\quad \mathit{\Gamma}_{32}=\psi_2+\Omega_1$$

$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_i}{\partial x},\quad k_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial y},\quad k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x},\quad k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial y} \tag{2.6}$$

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\quad K_{22}=\frac{\partial\psi_2}{\partial y},\quad K_{12}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\iota,\quad K_{21}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\iota,\quad l_{13}=\frac{\partial\iota}{\partial x},\quad l_{23}=\frac{\partial\iota}{\partial y}.$$

Здесь N_{i3}, N_{3i} – усилия; $M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{33}$ – моменты от силовых и моментных напряжений; Λ_{i3} – гипермоменты от моментных напряжений $\mu_{i3}\left(i=1,2,\quad i\neq j\right)$.

К системе уравнений (2.4)-(2.6) микрополерных упругих слоистых пластин присоединим «смягчённые» граничные условия на граничном контуре срединной пластинки (например, при $x_1=0$):

$$M_{11}=M_{11}^{*} \text{ или } k_{11}=k_{11}^{*},\ M_{12}=M_{12}^{*} \text{ или } k_{12}=k_{12}^{*},\ N_{13}=N_{13}^{*} \text{ или } w=w^{*}$$

$$L_{11}=L_{11}^{*} \text{ или } k_{11}=k_{11}^{*},\ L_{12}=L_{12}^{*} \text{ или } k_{12}=k_{12}^{*},\ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^{*} \text{ или } l_{13}=l_{13}^{*}. \tag{2.7}$$

Отметим, что в математической модели (2.4)-(2.7) микрополярных упругих слоистых пластин с назависимыми полями перемещений и вращений, составленных из нечетного числа слоев, симетрично расположенных относительно срединной плоскости, полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это – система 12-го порядка с 6-ю граничными условиями на каждом крае срединной плоскости пластин. Она содержит 35 уравнений относительно 35-ти неизвестных функций: $N_{i3}, N_{3i}, M_{ii}, M_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, \Lambda_{i3}, L_{33}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}, K_{ii}, K_{ij}, k_{ii}, k_{ij}, l_{i3}, \psi_i, w, \Omega_i, \iota$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин/ /Вестник Пермского гос. тех. ун-та. Математическое моделирование систем и процессов. 2008. №16. С.111-120.
2. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // ПММ. 2008. Т.72. Вып. 1. С. 129-147.
3. Sargsyan S.H. General Mathematical Models of Micropolar Thin Elastic Bars, Plates and Shells//Proceedings of the 16th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. USNCTAM 2010. June 27-July 2, 2010. State College, PA, USA.
4. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Математические модели двухслойных микрополярных пластин// Nonlinear Phenomena in Polymer Solids and Low-dimensional System. International Conference. «NPPS-2008» 7-10 July, 2008. Moscow, Russia. N.N.Semonov Institute of Chemical Physics Russian Academy of Sciences. P. 282-291.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
6. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович – член-корр. НАН Армении, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой Математического анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского гос. педагогического института.
E-mail: slusin@yahoo.com
Тел. (091) 60 57 15

Фарманян Анаит Жораевна – к.ф.-м.н., доцент кафедры Математического анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского гос. педагогического института.
E-mail: afarmanyan@yahoo.com
Тел. (077) 80 24 25

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Саруханян А. А., Манукян А. А.

Рассматривается ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе прямоугольного поперечного сечения. Математические уравнения записываются в безразмерной форме. Показывается, что построенное решение в форме рядов Фурье математически полностью совпадает с решением задачи о кручении стержня прямоугольного поперечного сечения. Получены формулы распределения скоростей, секундного объемного расхода и средней скорости живого сечения в безразмерной и размерной формах.

Рассмотрим ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе прямоугольного поперечного сечения. Обозначим высоту прямоугольника, параллельную оси oy, через $2h$, а основание, параллельное оси ox, череж $2\kappa h$, где κ – любое положительное число. Начало координат разместим в центре прямоугольника, а ось oz выбераем по направлению движения (рис. 1).

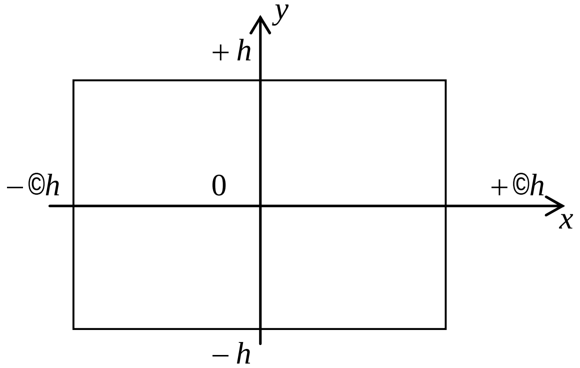


Рис. 1 К расчету ламинарного движения в прямоугольном канале

Считая поток изотермическим, ламинарным и одномерным, получим, что из трех компонентов скорости (U,V,W) остается лишь одна W, а остальные две равны нулю. Следовательно, уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности для данного движения примут вид [1]

$$W\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial W}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=0,\quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=0. \tag{2}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости, а P – давление.

Из системы уравнений (1) следует, что W представляет собой функцию только от x, y и t, а из (2) – P -функция только от z и t. Это означает, что во всех сечениях, перпендикулярных к оси трубы, распределение скоростей одинаково, а давление меняется только по направлению движения, оставаясь постоянным в каждом фиксированном поперечном сечении. Итак,

$$W=W(x,y,t) \text{ и } P=f\left(z,t\right). \tag{3}$$

Следовательно, система уравнений движения сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{4}$$

Для решения уравнения (4) необходимо еще задать граничные условия, которые зависят от характера движения. Для выбора рациональной схемы расчета данного ламинарного движения сначала рассмотрим стационарное движение. При стационарном движени $\frac{\partial W}{\partial t}=0$, следовательно, уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\quad\left(\mu=\rho\nu\right) \tag{5}$$

Для решения уравнения (5) скорость W на контуре неподвижной границы принимается равной нулю, т.е.

$$W=0\text{, при } x=\pm\kappa h,\ y=\pm h. \tag{6}$$

Преобразуем уравнение (5) к безразмерному виду, обозначив,

$$\varsigma = \frac{x}{h}, \ \eta = \frac{y}{h}, \ U = -\frac{W\mu}{h^2 \, \partial P / \partial z}.$$

Тогда уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varsigma^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = -1, \tag{7}$$

а граничные условия (6) пребразуются в следующие:

$$U = 0 \text{ при } \varsigma = \pm\kappa, \ |\eta| < 1 \text{ и при } \eta = \pm 1 \ \ |\varsigma| < \pm\kappa. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) при граничных условиях (8) представим в виде двумерного бесконечного ряда Фурье

$$U(\varsigma, \eta) = \sum_{n,p=0}^{\infty} C_{n,p} \cdot \cos(\lambda_n \varsigma) \cdot \cos(\mu_p \eta), \tag{9}$$

$$\lambda_n = (2n+1)\pi/2\kappa, \ \mu_p = (2p+1)\pi/2; \, n, p = 0, 1, 2, \ldots .$$

Подставляя (9) в уравнение (7), получим

$$\sum_{n,p=0}^{\infty} C_{n,p} \left(\lambda_n^2 + \mu_p^2\right) \cdot \cos(\lambda_n \varsigma) \cdot \cos(\mu_p \eta) = 1 \tag{10}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $C_{n,p}$ обе части равенства (10) умножим на $\cos(\lambda_m \varsigma) \cdot \cos(\mu_q \eta)$ и проинтегрируем по области $D = \{-\kappa < \varsigma < +\kappa, -1 < \eta < +1\}$.В результате,

$$\int_{-\kappa}^{+\kappa} \int_{-1}^{+1} \sum_{n,p=0}^{\infty} C_{n,p} \left(\lambda_n^2 + \mu_n^2\right) \cdot \cos(\lambda_n \varsigma) \cdot \cos(\lambda_m \varsigma) \cdot \cos(\mu_p \eta) \cdot \cos(\mu_q \eta) \, d\varsigma d\eta = \int_{-\kappa}^{+\kappa} \int_{-1}^{+1} \cos(\lambda_m \varsigma) \cdot \cos(\mu_q \eta) \, d\varsigma d\eta$$

Далее используя следующие условия ортогональности и интегральные соотношения:

$$\int_{-\kappa}^{+\kappa} \cos(\lambda_n \varsigma) \cos(\lambda_m \varsigma) d\varsigma = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq m, \\ \kappa & \text{при} \quad n = m, \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} \cos(\mu_p \eta) \cos(\mu_q \eta) d\eta = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad p \neq q, \\ 1 & \text{при} \quad p = q, \end{cases}$$

$$\int_{-\kappa}^{+\kappa} \cos(\lambda_n \varsigma) d\varsigma = 2\int_{0}^{\kappa} \cos(\lambda_n \varsigma) d\varsigma = \frac{2}{\lambda_n} \sin(\lambda_n \varsigma)\Big|_0^{\kappa} = (-1)^n \frac{2}{\lambda_n},$$

$$\int_{-1}^{+1} \cos(\mu_p \eta) d\eta = 2\int_{0}^{1} \cos(\mu_p \eta) d\eta = \frac{2}{\mu_p} \sin(\mu_p \eta)\Big|_0^{1} = (-1)^p \frac{2}{\mu_p},$$

находим

$$C_{n,p} = \frac{4(-1)^{n+p}}{\left(\lambda_n^2 + \mu_p^2\right) \cdot \lambda_n \cdot \mu_p \cdot \kappa}. \tag{11}$$

Подставляя теперь выражение коэффициентов $C_{n,p}$ из (11) в (9), получим искомое решение задачи в форме

$$U(\varsigma, \eta) = \frac{4}{\kappa} \sum_{p,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{\left(\lambda_n^2 + \mu_p^2\right) \cdot \lambda_n \cdot \mu_p} \cdot \cos(\lambda_n \varsigma) \cos(\mu_p \eta). \tag{12}$$

Полученное решение (12) сравним с известным представлением функции Прандтля, $\varphi(\varsigma, \eta) \left(\varphi(\varsigma, \eta) = 2U(\varsigma, \eta)\right)$ в решении уравнения Пуассона для задачи о кручении упругого стержня прямоугольного поперечнего сечения [2,3]. В результате этого сравнения обнаружим, что

$$U(\varsigma, \eta) = \frac{16\kappa^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(\lambda_n \eta)}{\operatorname{ch}(\lambda_n)}\right] \cdot \cos(\lambda_n \varsigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot f_n(\eta) \cdot \cos(\lambda_n \varsigma), \tag{13}$$

где

$$f_n(\eta) = 1 - \mathrm{ch}(\lambda_n \eta)/\mathrm{ch}(\lambda_n). \qquad (14)$$

Отметим, что решение (13) для соответствующей задачей механики вязкой жидкости приведено также в [1].

Далее функцию $f_n(\eta)$ разложим в ряд Фурье по функциям $\cos(\mu_p \eta)$:

$$f_n(\eta) = \sum_{p=1}^{\infty} A_{p,n} \cos(\mu_p \eta), \qquad (15)$$

где

$$A_{p,n} = 2\int_{-1}^{+1} f_n(\eta) \cdot \cos(\mu_p \eta) d\eta. \qquad (16)$$

Подставляя выражение функции $f_n(\eta)$ из (14) в (16) и проинтегрируя по интервалу $(-1,1)$, для коэффицентов $A_{p,n}$ будем иметь:

$$A_{p,n} = \int_{-1}^{+1} \left[1 - \frac{\mathrm{ch}(\lambda_n \eta)}{\mathrm{ch}(\lambda_n)}\right] \cdot \cos(\mu_p \eta) d\eta = 2\frac{\sin(\mu_p \eta)}{\mu_p}\bigg|_0^1 =$$
$$= \frac{2}{\mathrm{ch}(\lambda_n)} \int_0^1 \mathrm{ch}(\lambda_n \eta) \cdot \cos(\mu_p \eta) d\eta = 2\frac{(-1)^n}{\mu_n} - \frac{2}{\mathrm{ch}(\lambda_n)} \cdot J_{p,n}, \qquad (17)$$

где

$$J_{p,n} = \int_{-1}^{+1} \mathrm{ch}(\lambda_n \eta) \cdot \cos(\mu_p \eta) d\eta. \qquad (18)$$

Последний интеграл вычислим по частям:

$$J_{p,n} = \mathrm{ch}(\lambda_n \eta) \cdot \frac{\sin(\mu_p \eta)}{\mu_p}\bigg|_0^{+1} - \frac{\lambda_k}{\mu_p} \int_0^{+1} \mathrm{sh}(\lambda_n \eta) \cdot \sin(\mu_p \eta) d\eta =$$
$$= \frac{(-1)^p}{\mu_p} \mathrm{ch}(\lambda_n \eta) - \frac{\lambda_k}{\mu_p}\left[-\mathrm{sh}(\lambda_n \eta) \cdot \frac{\cos(\mu_p \eta)}{\mu_p}\bigg|_0^{+1} + \frac{\lambda_k}{\mu_p} \int_0^{+1} \mathrm{ch}(\lambda_n \eta) \cdot \cos(\mu_p \eta) d\eta\right] = \qquad (19)$$
$$= \frac{(-1)^p}{\mu_p} \mathrm{ch}(\lambda_n) - \frac{\lambda_k^2}{\mu_p^2} \cdot J_{n,k},$$

откуда

$$J_{p,n} = \frac{(-1)^p \mu_p}{\lambda_n^2 + \mu_p^2} \mathrm{ch}(\lambda_p \eta). \qquad (20)$$

Подставляя значение функции $J_{p,n}$ в (17), находим

$$A_{p,n} = \frac{2(-1)^p}{\mu_p} - \frac{2}{\mathrm{ch}(\lambda_n)} \cdot \frac{(-1)^p \mu_n}{\lambda_n^2 + \mu_p^2} \mathrm{ch}(\lambda_n) = 2(-1)^p \cdot \frac{\lambda_n^2}{\mu_p(\lambda_n^2 + \mu_p^2)}. \qquad (21)$$

С учетом (21) функцию $f_n(\eta)$ можно представить в виде

$$f_n(\eta) = 2\lambda_n^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\mu_p(\lambda_n^2 + \mu_p^2)} \cdot \cos(\mu_p \eta). \qquad (22)$$

Выражения функции $f_n(\eta)$ из (22) затем подставлвяя в (13), получим

$$U(\varsigma, \eta) = \frac{16\kappa^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot 2\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\kappa^2} \cdot \cos(\lambda_n \varsigma) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_p(\lambda_n^2 + \mu_p^2)} \cdot \cos(\mu_n \eta). \qquad (23)$$

Так как

$\lambda_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2\kappa}$, $\mu_p = \dfrac{(2p+1)\pi}{2}$ $n, p = 0,1,2,\ldots$, то $(2n+1) = \dfrac{2\lambda_n\kappa}{\pi}$, $(2p+1) = \dfrac{2\mu_p}{\pi}$

и, следовательно,

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\cos(\lambda_n\varsigma)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\mu_p\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)}\cos(\mu_p\eta) = \frac{4}{\kappa}\sum_{n,p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{\lambda_n\mu_p\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)}\cos(\lambda_n\varsigma)\cos(\mu_p\eta). \quad (24)$$

Таким образом, из (24) и (13) окончательно получим

$$U(\varsigma,\eta) = \frac{16\kappa^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\left[1-\frac{\operatorname{ch}(\lambda_n\eta)}{\operatorname{ch}(\lambda_n)}\right]\cos(\lambda_n\varsigma) = \frac{4}{\kappa}\sum_{n,p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{\lambda_n\mu_p\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)}\cos(\lambda_n\varsigma)\cos(\mu_p\eta). \quad (25)$$

Равенство (25) показывает, что полученное в [1] решение задачи совпадает с построенным нами решением (12).

Имея формулу распределения скоростей по живому сечению потока, можно вычислить секундный объемный расход q и среднюю по сечению скорость v в безразмерной форме. А именно,

$$q = \int_{-\kappa}^{+\kappa}\int_{-1}^{+1}U d\varsigma d\eta = \frac{4}{\kappa}\sum_{p,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)\cdot\lambda_n\cdot\mu_p}\int_{-\kappa}^{+\kappa}\cos(\lambda_n\varsigma)d\varsigma\int_{-1}^{+1}\cos(\mu_p\eta)d\eta = \frac{4}{\kappa}\sum_{p,n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)\cdot\lambda_n^2\cdot\mu_p^2}, \quad (26)$$

$$\mathsf{v} = \frac{q}{4\kappa} = \frac{1}{\kappa^2}\sum_{p,n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)\cdot\lambda_n^2\cdot\mu_p^2}. \quad (27)$$

В размерной форме распределение скоростей по живому сечению будет даваться формулой:

$$W = -\frac{4h^2}{\kappa\mu}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\sum_{p,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+p}}{\left(\lambda_\kappa^2+\mu_n^2\right)}\frac{1}{\lambda_k\cdot\mu_p}\cdot\cos\left(\lambda_k\cdot\frac{x}{h}\right)\cos\left(\mu_p\frac{y}{h}\right), \quad (28)$$

соответствующий секундный объемный расход – формулой

$$\mathsf{Q} = -\frac{4h^4}{\kappa\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\sum_{p,n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)\cdot\lambda_n^2\cdot\mu_p^2} = -\frac{4h^4\kappa}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}f(\kappa), \quad (29)$$

а средняя скорость – формулой

$$V_{cp} = \frac{\mathsf{Q}}{4\kappa h^2} = -\frac{h^2}{\kappa^2\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\sum_{p,n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)\cdot\lambda_n^2\cdot\mu_p^2} = -\frac{h^2}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}f(\kappa), \quad (30)$$

где

$$f(\kappa) = \frac{1}{\kappa^2}\sum_{p,n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_n^2+\mu_p^2\right)\cdot\lambda_n^2\cdot\mu_p^2}. \quad (31)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
2. Новожилов В. В. Теория упругости.- М.: Судпроизд, 1958. 370с.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 688с.

Сведения об авторах:

Саруханян Арестак Арамаисович – доцент, доктор тех. наук, проректор, начальник управления образовательных реформ Ереванского государственного университета архитектуры и строительства. Тел.: (374 10) 57 05 57, (374 93) 94 40 40.

E-mail: asarukhanyn@ysuac.am

Манукян Ани Асканазовна – инженер, главный специалист управления образовательных реформ Ереванского государственного университета архитектуры и строительства.

Тел.:(374 10) 73 30 77, (374 77) 84 48 01

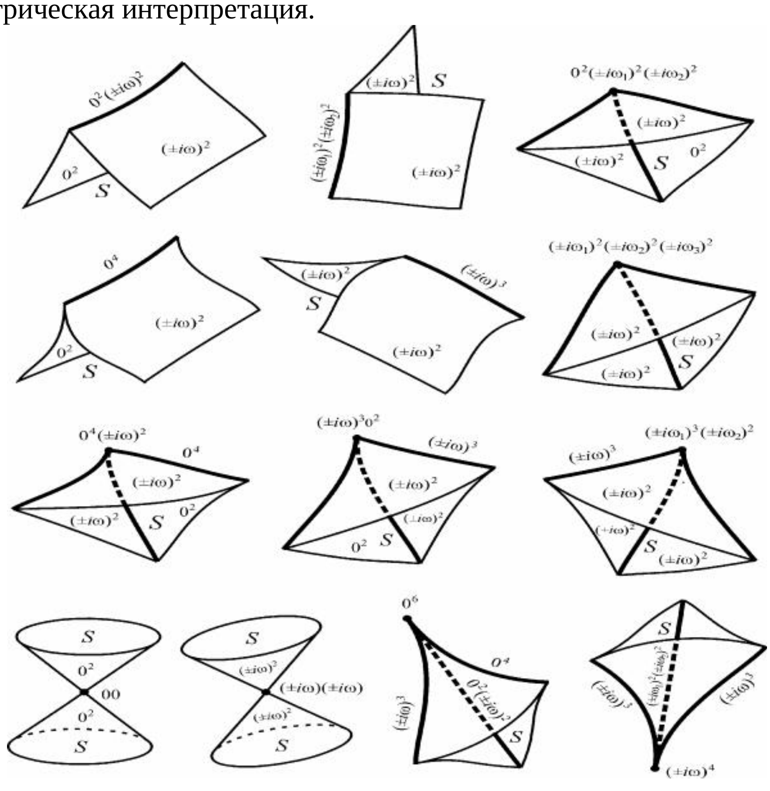
E-mail: ani_manukyan@yahoo.com

**МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ.
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ (ПРЕЗЕНТАЦИЯ КНИГИ)**

Сейранян А.П., Майлыбаев А.А.

В новой книге авторов излагаются фундаментальные основы и методы многопараметрической теории устойчивости с приложениями к задачам механики. В ней отражены современные знания и достижения теории бифуркаций собственных значений, анализа чувствительности характеристик устойчивости, теории устойчивости неконсервативных систем, анализа особенностей границ областей устойчивости, изучены вопросы устойчивости периодических систем и задачи максимизации критической силы потери устойчивости упругих систем при ограничении на полную массу. Книга адресована научным работникам и инженерам, преподавателям университетов, аспирантам и студентам старших курсов, интересующимся теорией устойчивости и ее приложениями.

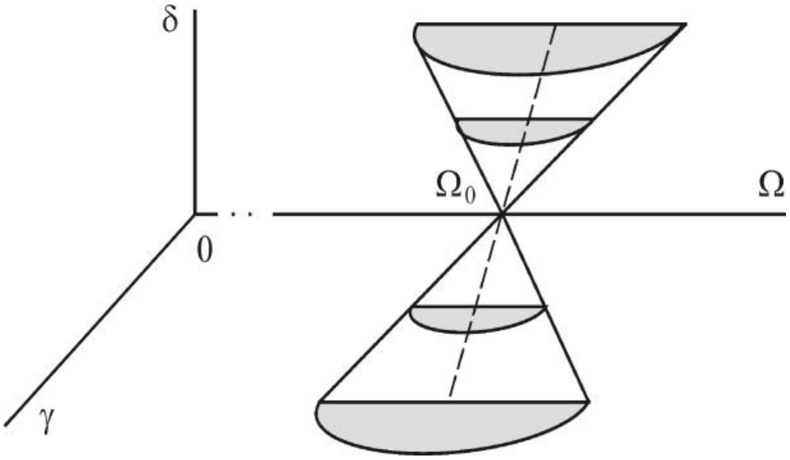
Теория устойчивости является одной из наиболее интересных и важных областей прикладной математики, имеющей многочисленные приложения как в естественных науках, так и в промышленности. Поскольку любая физическая система содержит параметры, основной целью книги является ответ на вопрос: как устойчивое состояние равновесия или стационарное движение системы становится неустойчивым при изменении параметров. Пространство параметров, таким образом, разбивается на области устойчивости и неустойчивости. В книге показано, как граница области устойчивости и ее особенности могут быть описаны по информации о спектральных свойствах системы в отдельных регулярных и сингулярных точках границы. Разработана новая многопараметрическая теория бифуркаций собственных значений матричных операторов, являющаяся ключевым средством для исследования устойчивости и неустойчивости как систем с конечным числом степеней свободы. Изучены важные случаи сильного и слабого взаимодействий (столкновений) собственных значений и дана их геометрическая интерпретация.



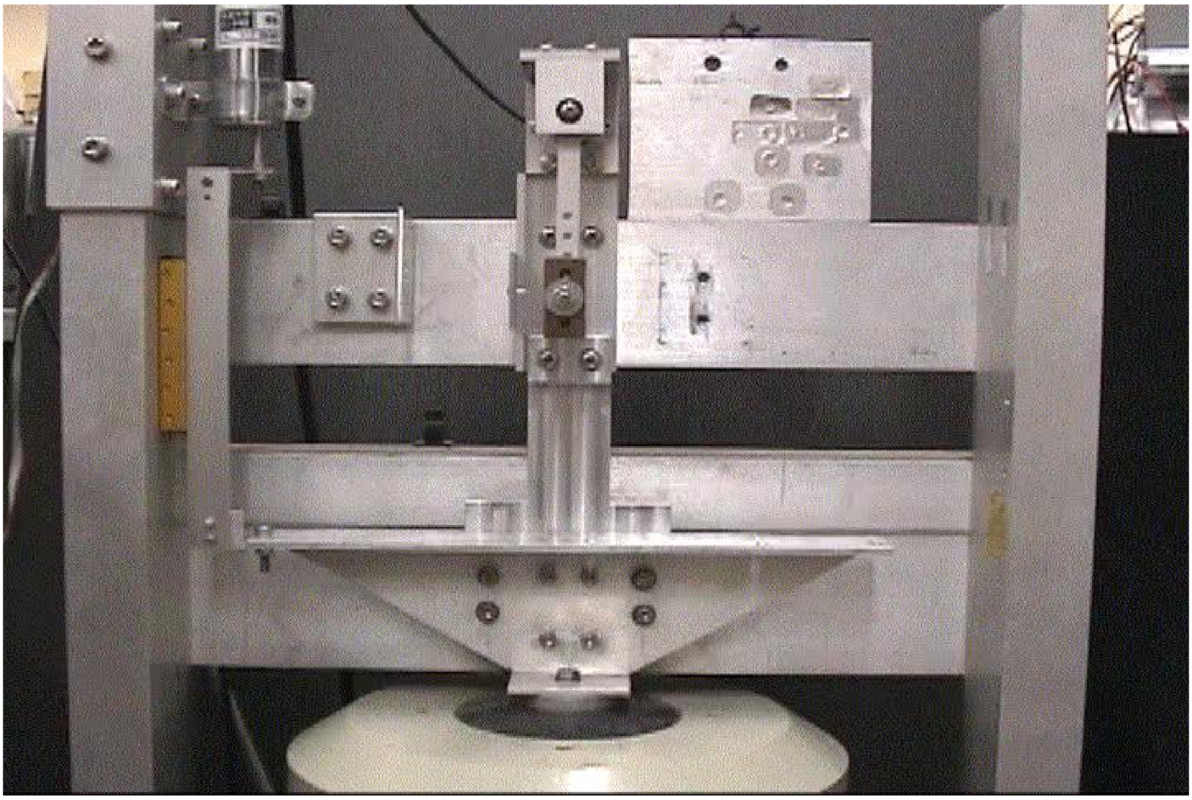
Особенности границ областей устойчивости гамильтоновых систем.

С использованием этой теории исследованы особенности границ областей устойчивости различных типов механических систем (консервативных, неконсервативных, гамильтоновых, гироскопических, циркуляционных) и дано подробное описание и объяснение таких механических эффектов, как гироскопическая стабилизация, динамическая (флаттер) и статическая (дивергенция) неустойчивость, перехлест частотных кривых и скачок критической нагрузки, смена критического тона потери устойчивости, стабилизация и дестабилизация неконсервативных систем малыми диссипативными и гироскопическими силами, параметрический резонанс и др.

Значительная часть книги посвящена сложным задачам устойчивости периодических систем, зависящих от многих параметров. Эти проблемы оставались неразрешенными более 100 лет с момента появления работ таких ученых, как Матье, Флоке, Хилл, Рэлей, Ляпунов и Пуанкаре. С самого начала эти задачи содержали два или три параметра.

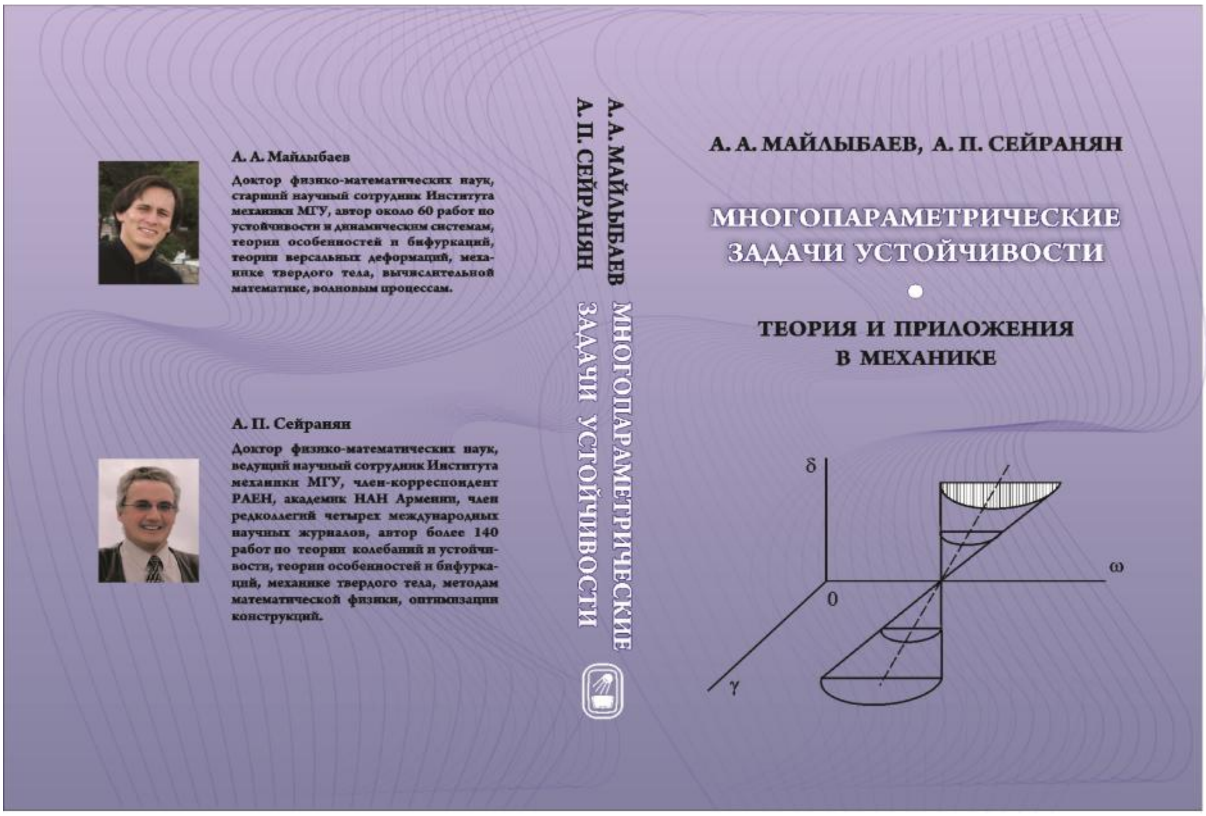


Области неустойчивости для широкого класса периодичеких систем.



Установка для определения области параметрического резонанса физического маятника с вибрирующей точкой подвеса.

В книге с использованием многопараметрической теории бифуркаций собственных значений дано геометрическое описание областей параметрического резонанса и их особенностей для периодических систем. В качестве приложений развитой теории рассмотрены задачи об устойчивости различных механических систем, включая трубы, по которым течет жидкость, стержни при различных условиях нагружения, вращающиеся валы и системы связанных тел, пластинки и крылья в потоке газа и др. Проведен детальный многопараметрический анализ устойчивости, показывающий, как развитая теория бифуркаций и особенностей используется при решении конкретных практических задач, а также выполнены эксперименты по параметрическому резонансу маятников с колеблющейся точкой подвеса и упругих стержней, которые подтверждают точность теоретических расчетов.



ЛИТЕРАТУРА

1. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Сейранян Александр Паруйрович – академик РАЕН, иностранный член НАН Армении, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В.Ломоносова
e-mail: seyran@imec.msu.ru

Майлыбаев Алексей Абаевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М.В.Ломоносова
e-mail: mailybaev@imec.msu.ru

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ОТ ЛОКАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ РАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКИ К СОСРЕДОТОЧЕННОЙ В ВЫРАЖЕНИЯХ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ГРАДИЕНТА ПРОГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ

Сейранян С.П.

Обсуждается предельный переход в компонентах решения Навье [1] для локально нагруженной на прямоугольной площадке равномерным внешним давлением прямоугольной свободно опертой пластины. Устремлением сторон прямоугольника приложения нагрузки к нулю при сохранении результирующей силы постоянной получены предельные значения для первых частных производных от прогиба по переменным x и y. Доказана их непрерывность в замкнутом прямоугольнике плана пластины как функций двух переменных. Установлено, что частное дифференцирование по x или y и предельный переход от локальной нагрузки к сосредоточенной, последовательно приложенные к прогибу, перестановочны. Доказана теорема о дифференцировании сумм медленно сходящихся синусных тригонометрических рядов.

Известно, что в краевых задачах механики возможны парадоксы, когда отсутствует непрерывная зависимость решений от параметров задачи. Таковыми являются, например, парадокс Циглера [2] и парадокс Бабушки – Сапонджяна [3]. Поэтому решение той или иной задачи, полученное из физических соображений предельным путем, требует, вообще говоря, дополнительного математического анализа. Таковым является, например, решение Навье для прогиба свободно опертой прямоугольной пластины при сосредоточенной нагрузке [1], [4], полученное им предельным переходом в им же полученном решении для прогиба данной, но локально нагруженной по прямоугольнику равномерным поперечным давлением пластины без требований существования предельных значений прочих величин НДС пластины с удовлетворением геометрических соотношений, соотношений упругости и уравнения равновесия пластины, обобщенные решения в [5] и др.

В представляемой работе ограничиваемся исследованием предельного перехода в выражениях для первых частных производных от названного решения Навье для прогиба при локально распределенной равномерной нагрузке. Для последующих исследований доказана теорема о дифференцировании сумм медленно сходящиеся синусных тригонометрических рядов (ТР) .

1. Исходные известные математические результаты.

а) Решение Навье w(x,y) для прогиба в задаче о поперечном изгибе прямоугольной свободно опертой пластины равномерным давлением, приложенным по прямоугольной площадке со сторонами, параллельными сторонам пластины [1]

$$w(x,y)=\frac{1}{\Delta\xi\Delta\eta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\sin\lambda_m\xi\,\sin\mu_n\eta\,\sin\lambda_m\frac{\Delta\xi}{2}\sin\mu_n\frac{\Delta\eta}{2}\sin\lambda_m x\,\sin\mu_n y,\ (x,y)\in G, \tag{1.1}$$

$$\lambda_m=m\pi/a,\ \mu_n=n\pi/b,\ w_{mn}^{*}=B\big/(\lambda_m\mu_n(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2),B=16P/(Dab)$$

Здесь G, (a, b), (x, y) – замкнутый прямоугольник плана пластины, длины его сторон и текущие координаты; (ξ,η), $(\Delta\xi,\Delta\eta)$ – координаты центра симметрии прямоугольника приложения давления и длины его сторон; D и P – изгибная жесткость пластины и результирующая сила давления;

b) Неравенство [6]

$$\alpha^2+\beta^2\ge C_\gamma\,\alpha^\gamma\beta^{2-\gamma},\quad \alpha\ge0,\ \beta\ge0,\quad C_\gamma=\begin{cases}2\ \gamma^{-\frac{\gamma}{2}}(2-\gamma)^{\frac{\gamma}{2}-1},\ \text{если}\ \ 0<\gamma<2\\ 1,\ \ \text{когда}\ \ \gamma=0,2\end{cases} \tag{1.2}$$

2. О предельном переходе в градиенте прогиба локально-нагруженной пластины.

Заметим прежде, что первые частные производные по x и y от ТР прогиба (1.1) представляются его почленным дифференцированием ТР под обоими символами суммирования [6]

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x^k\,\partial y^{1-k}}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\sin\lambda_m\xi\,\sin\mu_n\eta\,\frac{\sin\lambda_m\Delta\xi/2}{\Delta\xi}\frac{\sin\mu_n\Delta\eta/2}{\Delta\eta}\,\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\,\frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}, \tag{2.1}$$

$$k=0,1;\ (x,y)\in G,$$

а члены ординарных ТР в повторном ряду (2.1) с учетом (1.2) удовлетворяют условиям

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\left\{ w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\ \sin\mu_n\eta\ \frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right\} = \frac{1}{2}\mu_n w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\ \times$$

$$\times\sin\mu_n\eta\ \frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\ \frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} < \infty,\ k = 0,\ 1; \tag{2.2}$$

$$\left| w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\ \sin\mu_n\eta\ \frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| \le$$

$$\le \lambda_m^{k+1}\mu_n^{2-k}w^*_{mn}/4 = B\lambda_m^k\mu_n^{1-k}\ /(4(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2)\ \le C\lambda_m^k\mu_n^{1-k}/(\lambda_m^{2\gamma}\ \mu_n^{4-2\gamma})\Big|_{\gamma=k/2+3/4} =$$

$$= C/(\lambda_m^{1.5}\mu_n^{1.5}),\ k = 0,1;\ \ \sum_{n=1}^{\infty} C/(\lambda_m^{1.5}\mu_n^{1.5}) < \infty; \tag{2.3}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\ \sin\mu_n\eta\ \frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\ \frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\ \frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left| w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\ \sin\mu_n\eta\ \frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\ \frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\ \frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| \le$$

$$\le C/\lambda_m^{1.5}\ \sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n^{1.5}\ ,\ k = 0,1;\ (x,y)\in G; \tag{2.4}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C/\lambda_m^{1.5}\sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n^{1.5} < \infty \tag{2.5}$$

Здесь C – некоторая положительная константа.

Неравенства (2.3) показывают, что ординарный ТР в повторном ряду (2.1) с индексом суммирования n мажорируется числовым сходящимся рядом, что приводит к его равномерной сходимости относительно параметра $\Delta\eta$ ([7], n^0 430, признак Вейерштрасса). Если также учесть (2.2), то выполняются условия теоремы 4 ([7], n^0 433), при которых допустим предельный переход под знаком суммирования ряда. Получаем

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\ \sin\mu_n\eta\ \frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\ \frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\ \frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\ = \frac{1}{2}\sin\lambda_m\xi\times$$

$$\times\frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\ \frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sum_{n=1}^{\infty} w^*_{mn}\mu_n\ \sin\mu_n\eta\ \ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} < \infty,\ k = 0,1 \tag{2.6}$$

Кроме того, из неравенств (2.4), (2.5) следует, что и ординарный ряд в повторном (2.1), в котором суммирование производится по индексу m, мажорируется числовым сходящимся рядом, что приводит и к его равномерной сходимости, но уже относительно обоих параметров $\Delta\xi$, $\Delta\eta$. Далее с учетом (2.6) приходим к существованию двойного конечного предела:

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\left\{\sin\lambda_m\xi\frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sum_{n=1}^{\infty} w^*_{mn}\ \sin\mu_n\eta\ \frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right\} = \frac{\lambda_m}{4}\sin\lambda_m\xi\times$$

$$\times\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sum_{n=1}^{\infty} w^*_{mn}\mu_n\sin\mu_n\eta\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} < \infty, k = 0,1 \tag{2.7}$$

Значит, становится применимой теорема 4 в ([7], n^0 433), и к ординарному ряду с индексом суммирования m, но уже при любом избранном совместном законе стремления параметров $\Delta\xi, \Delta\eta$ к нулю. Отсюда, с применением (2.7) имеем

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\frac{\partial w(x,y)}{\partial x^k\partial y^{1-k}} = \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\lambda_m\xi\frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}w^*_{mn}\ \sin\mu_n\eta\ \ \frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\lambda_m\xi\frac{\sin\lambda_m\ \Delta\xi/2}{\Delta\xi}\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}w^*_{mn}\ \sin\mu_n\eta\ \ \frac{\sin\mu_n\ \Delta\eta/2}{\Delta\eta}\ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} =$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w^*_{mn}\lambda_m\mu_n \ \sin\lambda_m\xi \frac{\partial^k \sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sin\mu_n\eta \ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} = \frac{4P}{Dab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\sin\lambda_m\xi \times$$

$$\times\frac{\partial^k \sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sin\mu_n\eta \ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} < \infty, \ k = 0{,}1; \ (x, y)\in G \qquad (2.8)$$

Здесь введено обозначение

$$w_{mn} = 1\big/(\lambda^2_m + \mu^2_n)^2 \qquad (2.9)$$

Заметим, что выражение (2.8) записывается формальным почленным частным дифференцированием по x (при $k=1$) или y (если $k=0$) под обоими символами суммирования решения Навье для прогиба для данной пластины при сосредоточенной нагрузке [1], [4].

Докажем теперь, что найденные пределы первых частных производных в (2.8) непрерывны в *G*. Действительно, с использованием двойного предельного перехода в обеих частях неравенства в (2.3) при стремлении $\Delta\xi\to 0$, $\Delta\eta\to 0$ приходим к неравенству:

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\left| w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi \ \sin\mu_n\eta \ \frac{\sin\lambda_m\Delta\xi/2}{\Delta\xi}\frac{\sin\mu_n\Delta\eta/2}{\Delta\eta}\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k} \ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| =$$

$$=\left| w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi \ \sin\mu_n\eta \ \lim_{\Delta\xi\to 0}\left(\frac{\sin\lambda_m\Delta\xi/2}{\Delta\xi}\right)\lim_{\Delta\eta\to 0}\left(\frac{\sin\mu_n\Delta\eta/2}{\Delta\eta}\right)\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k} \ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| = \quad (2.10)$$

$$=\left|\frac{1}{4} w^*_{mn}\lambda_m\mu_n\sin\lambda_m\xi\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sin\mu_n\eta \ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| \le C\big/(\lambda^{1.5}_m\mu^{1.5}_n), \ k=0{,}1$$

которое показывает, что ординарный в повторном ряду (2.8) ряд с индексом суммирования *n* мажорируется числовым сходящимся рядом, что приводит к его равномерной сходимости относительно переменной $y\in[0,b]$ ([7], n^0 430). Но члены данного ряда – непрерывные функции y. Поэтому и его сумма непрерывна на $[0,b]$ ([7], n^0 431). Заметим теперь, что и ординарный ряд в (2.8) с индексом суммирования *m* мажорируется числовым сходящимся рядом, так как с применением (2.10) имеем

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sin\mu_n\eta \ \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left| w^*_{mn}\sin\lambda_m\xi\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\sin\mu_n\eta \ \times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}}\right| \le 4C\big/\lambda^{1.5}_m \ \sum_{n=1}^{\infty} 1\big/\mu^{1.5}_n < \infty, \ k=0{,}1 \qquad (2.11)$$

что приводит и к его равномерной сходимости, уже относительно двух переменных $(x, y)\in G$ [7]. Здесь члены названного ряда как произведения двух непрерывных функций – непрерывны в *G*. Следовательно, и его сумма непрерывна в *G* [7] как функция двух переменных.

Покажем далее, что решение Навье при сосредоточенной нагрузке почленно дифференцируется по *x* или *y* (по *y* под обоими символами суммирования). Действительно, ординарный ряд с индексом суммирования *n* в повторном ряду (2.8) при *k*=0 , рассматриваемый как формально продифференцированный по *y* соответственный сходящийся ряд решения Навье при сосредоточенной нагрузке [1], состоит из членов – непрерывных по *y* на отрезке [0 , *b*] функций переменной *y*. Кроме того, названный ряд, по доказанному, сходится равномерно относительно *y* на [0, *b*]. Значит, в силу теоремы 7 ([7], n^0 435), знак дифференцирования по *y* можно вынести за знак суммирования данного ряда. Дальнейшие рассуждения проводятся одновременно для обоих значений *k*=0 или *k*=1. Вынося знак производной за знак суммирования, если *k*=0, и переходя (непосредственно переходя при *k*=1) к ординарному ряду в повторном (2.8) с индексом m, замечаем, что члены рассматриваемого ряда как непрерывные функции двух переменных *x* и *y* в *G* – непрерывны относительно *y* (или *x*) на [0, *b*] ([0, *a*]) при фиксированном $x\in[0,a]$ (фиксированном $y\in[0,b]$). Кроме того, названный ряд как равномерно сходящийся в G ряд равномерно сходится относительно y (или x) на $[0, b]$ ($[0, a]$) при фиксированном x (фиксированном y). Поэтому, рассматривая данный ординарный ряд при k=0 (k=1) как формально продифференцированный по y (x) соответственный сходящийся ординарный ряд решения Навье при сосредоточенной нагрузке [1] и применяя при каждом значении k теорему 7 ([7], n^0 435), приходим к требуемому результату.

С использованием определения решения Навье при сосредоточенной нагрузке [1], [4], полученный результат записывается в виде:

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} \frac{\partial w(x,y)}{\partial x^k \partial y^{1-k}} = \frac{4P}{Dab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\lambda_m\xi \, \frac{\partial^k \sin\lambda_m x}{\partial x^k} \sin\mu_n\eta \, \frac{\partial^{1-k}\sin\mu_n y}{\partial y^{1-k}} = \frac{4P}{Dab}\sum_{m=1}^{\infty} \sin\lambda_m\xi \times$$

$$\times \frac{\partial^k \sin\lambda_m x}{\partial x^k} \frac{\partial^{1-k}}{\partial y^{1-k}} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\mu_n\eta \sin\mu_n y = \frac{\partial}{\partial x^k \partial y^{1-k}} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\lambda_m\xi \sin\lambda_m x \sin\mu_n\eta \sin\mu_n y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k \partial y^{1-k}} \lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}} w(x,y) \subset C[G], k = 0,1 \qquad (2.12)$$

Таким образом, исследован предельный переход от локальной нагрузки к сосредоточенной в выражениях для компонент градиента прогиба пластины. Доказана трансформация нормали к поверхности прогиба в нормаль к поверхности предельного значения прогиба и сохранение ее непрерывности в замкнутом прямоугольнике плана пластины. Парадокс отсутствует.

3. К дифференцированию сумм медленно сходящихся синусных ТР.

Теорема. Пусть на отрезке $\Delta \subset (-\infty, \infty) \setminus \{\pm 2k\pi, k = 0, 1,...\}$ задан синусный ТР

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx, \; x \in \Delta \qquad (3.1)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$\lim_{m\to\infty} b_m = 0, \qquad (3.2)$$

$$\lim_{m\to\infty} m(b_m - b_{m-1}) = 0 \qquad (3.3)$$

Пусть также ТР, полученный применением к ТР (3.1) преобразования Абеля (ПА) [8] , сходится на Δ , а в точке $x_0 \in \Delta$ – почленно дифференцируется, образуя сходящийся ТР. Тогда производная от суммы ТР (3.1) при $x = x_0$ существует, конечна, и вычисляется его формальным почленным дифференцированием с последующим формальным двукратным применением ПА.

Если же в условиях теоремы вместо (3.2) и (3.3) принять, что

$$\lim_{m\to\infty} m b_m = 0, \qquad (3.4)$$

то ТР (3.1) в точке x_0 почленно дифференцируется.

Доказательство. Заметим прежде, что исходный ТР удовлетворяет необходимым и достаточным условиям сходимости ТР Салема [8], откуда следует его сходимость на Δ . Применяя к ТР (3.1) ПА и дифференцируя полученное выражение как дробь, при этом пользуясь, по условию, почленной дифференцируемостью ТР в числителе, получаем

$$\frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \Bigg|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\frac{1}{2\sin 0.5x}\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \cos(\nu - 0.5)x \Bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{4\sin^2 0.5x_0} \times$$

$$\times \left[-\sin 0.5x_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu (2\nu - 1)\sin(\nu - 0.5)x_0 - \cos 0.5x_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \cos(\nu - 0.5)x_0 \right], \qquad (3.5)$$

где

$$B_1 = b_1, \; B_\nu = b_\nu - b_{\nu-1}, \; \nu = 2,3,... \qquad (3.6)$$

Отметим, что в (3.5) ТР в числителе сходятся, а заменатель отличен от нуля. Значит, производная от ТР (3.1) в точке x_0 существует и конечна.

Вводя теперь синусы и косинусы под знаки суммирования и применяя формулы преобразования произведения синусов и косинусов в сумму, а также объединяя полученные сходящиеся ряды в единый сходящийся ряд, приходим к выражению

$$\frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{4\sin^2 0.5x_0}\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu\left[\,(\nu-1)\cos\nu x_0 - \nu\cos(\nu-1)\,x_0\right] \qquad (3.7)$$

Далее переходя в ряду (3.7) к частичной сумме под знаком предельного перехода и выполняя с конечным числом слагаемых приведение подобных членов, получаем

$$\frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{4\sin^2 0.5x_0}\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N} B_\nu\left[(\nu-1)\cos\nu x_0 - \nu\cos(\nu-1)\,x_0\right] =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 0.5x_0}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{N} B_\nu(\nu-1)\cos\nu x_0 - \sum_{\nu=1}^{N} B_\nu\nu\cos(\nu-1)\,x_0\right] = \frac{1}{4\sin^2 0.5x_0}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{N} B_\nu\times\right.$$

$$\left.\times(\nu-1)\cos\nu x_0 - \sum_{\nu=0}^{N-1} B_{\nu+1}(\nu+1)\cos\nu x_0\right] = \frac{1}{4\sin^2 0.5x_0}\lim_{N\to\infty}\left[B_N(N-1)\cos N x_0 - B_1 + \right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{N-1}\left[B_\nu(\nu-1) - B_{\nu+1}(\nu+1)\right]\cos\nu x_0\right] \qquad (3.8)$$

Но из условия (3.3) имеем:

$$\lim_{N\to\infty}[B_N(N-1)] = \lim_{N\to\infty}[B_N N(1-1/N)] = \lim_{N\to\infty}(B_N N)\lim_{N\to\infty}(1-1/N) = 0 \qquad (3.9)$$

Отсюда, переходя в (3.8) к сумме пределов, с учетом (3.9) и (3.6) приходим к доказательству первой части теоремы

$$\frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{4\sin^2 0.5x_0}\left[-b_1 + 2(b_1-b_2)\cos\nu x_0 - \sum_{\nu=2}^{\infty}\left[(\nu+1)\,b_{\nu+1} - 2\nu b_\nu + \right.\right.$$

$$\left.\left. +(\nu-1)\times b_{\nu-1}\right]\cos\nu x_0\right] \qquad (3.10)$$

Возвращаясь ко второй части теоремы, замечаем, что при условии (3.4) выполняются (3.3) и (3.2), откуда по прежнему следует (3.10). Кроме того, формально почленно продифференцированный исходный ТР в (3.10) оказывается связанным знаком равенства с ТР справа повторным ПА [8, 9]. Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и для косинусного ТР, которая, но при более сильных предположениях, прежде нами доказана в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. – Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
2. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
3. Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван: Айастан, 1975. 436 с.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.–Л.: Гостехтеориздат, Петербург, 1949. 695 с.
5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1965. 433 с.
6. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично-нагруженной прямоугольной пластины // Вестник Томского гос-унта. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 82 –95.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Физматлит, 2003. 863 с.
8. Salem R. Essair sur les séries trigonométriques // Actual. Sci. et Industr., № 862, Paris, 1940.
9. Сейранян С.П. Ускорение сходимости в задаче об изгибе прямоугольной изотропной пластины поперечной силой // Изв. НАН РА. Механика. 2001. Т.54. № 1. С.48 – 55.

Сведения об авторе:

Сейранян Сурен Паруйрович – канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник Института механики НАН РА. Тел.: (374 10) 54 28 38. E-mail: <seysuren@yahoo.com>.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА ТЕОРИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Симонян А.М.

Рассматриваются четыре теории ползучести: теория старения, теория течения, теория наследственности и теория упрочнения. Анализ их основывается на прогнозировании ряда явлений, относительно легко проверяемых экспериментальным путем: обратной ползучести, нарушения коммутативности и преемственности.

Рассматривается вопрос обобщения операторов ползучести на случаи сложного напряженного состояния. Показано, что пропорциональность девиаторов деформаций и напряжений может быть принята лишь для теории старения, для остальных же рассмотренных теорий ползучести она неприменима.

Как известно, ползучестью называется свойство материала деформироваться во времени при постоянстве нагрузки.

Если напряжение постоянно, то аналитическое представление деформаций во времени является так называемой аппроксимацией ползучести, которая выражается в виде некоторой функции:

$$\varepsilon_c(t) = F(\sigma, t) \tag{1}$$

Чаще всего для функции $\varepsilon_c(t) = F(\sigma, t)$ используется выроженный вид, соответствующий так называемому условию подобия:

$$\varepsilon_c(t) = f(\sigma)y(t) \tag{2}$$

В случае зависимости напряжения от времени деформации ползучести описываются с помощью некоторого временного оператора $\Pi_t[\sigma(t)]$, который при постоянстве σ, естественно, вырождается в $f(\sigma, t)$.

С целью выбора этого оператора создавались так называемые теории ползучести. В работе [1] приводится анализ 18 различных теорий ползучести.

Ныне рассмотрим наиболее распространенные из них. В основе анализа положены некоторые явления, мало зависящие от разброса экспериментальных данных и относительно легко проверяемые опытным путем.

1. Явление обратной ползучести.

Оно имеет место при полной разгрузке образца, претерпевшего деформации ползучести, и выражается в изменении деформаций во времени в направлении, обратном к имевшей место деформации ползучести.

Математически это записывается так: для программы

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & 0 < t < t_0 \\ 0 & t_0 < t \end{cases} \tag{3}$$

обратная ползучесть имеет место при

$$\varepsilon_c(0, t) - \varepsilon_c(\sigma_0, t_0) < 0 \qquad \text{при} \quad t > t_0 \tag{4}$$

Согласно теории старения [2], имеем

$$\varepsilon_c(t) = F(\sigma(t), t) \tag{5}$$

Очевидно, для любой аппроксимации, $F(0,t) = 0$, иначе говоря, согласно (4), обратная ползучесть формально имеет место всегда, хотя она протекает мгновенно в момент снятия нагрузки, аналогично упругой деформации.

Согласно теории течения [2], имеем

$$\varepsilon_c(t) = \int_0^t \frac{\partial F[\sigma(\theta), \tau]}{\partial \tau}\Big|_{\theta=\tau} d\tau \tag{6}$$

Отсюда получим для программы (2)

$$\varepsilon_c(0, t) - \varepsilon_c(\sigma_0, t_0) = \int \frac{\partial F(0, \tau)}{\partial \tau} \partial \tau = 0$$

для любой аппроксимации $F(\sigma, t) = 0$, то есть обратная ползучесть не прогнозируется никогда.

Согласно теории наследственности [1], имеем

$$\varepsilon_c(t) = -\int_0^t \frac{\partial F[\sigma(\theta), t-\tau]}{\partial \tau}\Big|_{\theta=\tau} d\tau \tag{7}$$

Соответственно программе (4), получим

$$\varepsilon_c(0,t) - \varepsilon_c(\sigma_0, t_0) = F(\sigma_0, t) - F(\sigma_0, t - t_0) - F(\sigma_0, t_0) < 0$$

для произвольной аппроксимации $F(0,t) = 0$, если только имеет место 1-я стадия ползучести (для ползучести в третьей стадии теория наследственности вообще не имеет смысла, так как она будет описывать возрастающую во времени память материала [1]), то есть обратная ползучесть описывается всегда.

Согласно теории упрочнения [1-3], имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \psi(\sigma, \varepsilon_c) \equiv \phi[\sigma, \chi(\sigma, \varepsilon_c)], \tag{8}$$

где $\chi(\sigma, \varepsilon_c)$ является решением уравнения $\varepsilon_c = F(\sigma, t)$ относительно времени t.

Здесь прогнозирование обратной ползучести теорией упрочнения зависит от вида аппроксимации $F(\sigma, t)$. Как показано в работе [1], для обычно применяемых аппроксимаций для теории упрочнения обратная ползучесть не описывается, однако при использовании, например, экспоненциальной аппроксимации по времени, теория упрочнения описывает обратную ползучесть, причем при этом теория упрочнения совпадает с теорией наследственности [1].

2. Коммутативность.

В работе [4] формулируется “коммутативный закон” ползучести, согласно которому после ряда последовательных приложений напряжения общие накопленные деформации ползучести не зависят от порядка, в котором эти напряжения прикладывались, хотя в той же работе приводились экспериментальные данные, которые, как и данные [5,6], показали систематичность отклонения экспериментальных данных от коммутативного закона. Для математической интерпретации этого явления примем следующие две программы одноступенчатого напряжения:

$$1)\ \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_2 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases} \qquad 2)\ \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_2 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_1 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases} \tag{9}$$

При соблюдении условия

$$\varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) > 0, \tag{10}$$

нарушение коммутативности будем называть нормальным, а если

$$\varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) < 0, \tag{11}$$

то такую ситуацию назовем обратным нарушением коммутативности, при равенстве левых частей (10) и (11) нулю, естественно, будем иметь соблюдение коммутативного закона.

Согласно теории старения (5), имеем

$$\varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = F(\sigma_2, 2t_0) - F(\sigma_1, 2t_0) > 0, \tag{12}$$

то есть имеет место нормальное нарушение коммутативности для любой аппроксимации деформаций ползучести, определяемой $F(\sigma, t)$.

Согласно теории течения (6), при условиях подобия (2) будем иметь

$$\varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = [f(\sigma_1) - f(\sigma_2)] \cdot [2\varphi(t_0) - \varphi(2t_0)]. \tag{13}$$

Легко видеть, что правая часть (13) отрицательна для 1^{й} стадии ползучести, то есть имеет место обратное нарушение коммутативности; если ползучесть протекает с возрастающей скоростью (3 стадия), будем иметь нормальное нарушение коммутативности, для ползучести с постоянной скоростью имеет место коммутативный закон.

Согласно теории наследственности (7) при условии (2) для программы (9), имеем

$$\varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = [f(\sigma_2) - f(\sigma_1)] \cdot [2\varphi(t_0) - \varphi(2t_0)], \tag{14}$$

В противовес теории течения, как вытекает из (14), теория наследственности всегда описывает нормальное нарушение коммутативности в 1^{й} стадии ползучести.

Как показано в работе (4), соответственно теории упрочнения при условии (2), имеет место коммутативный закон.

3. Преемственность.

Для формулировки свойства преемственности рассмотрим следующую программу нагружения

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & 0 < t < t_0 \\ \sigma & t > t_0 \end{cases} \qquad \varepsilon_c(\sigma_0, t_0) = \varepsilon_{0c} = \mathrm{const} \tag{15}$$

Составим выражение

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{0c} = \chi_1(\sigma, \theta, t_0) = \chi_2(\sigma, \theta, \sigma_0), \qquad \theta = t - t_0, \tag{16}$$

где с помощью (15) в F_1 устранено σ_0, а в $F_2 - t_0$.

По определению, преемственность соблюдается, если имеет место условие

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t_0} > 0 \text{ или, что то же, } \frac{\partial \chi_2}{\partial \sigma_0} < 0 \tag{17}$$

то есть чем при большем напряжении достигнута деформация ε_{oc}, тем меньше дальнейшая деформация ползучести под действием σ при $t > t_0$.

Согласно теории старения для (15), имеем

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_{0c} = F(\sigma, t) - \varepsilon_{0c} = F(\sigma, \theta + t_0) - \varepsilon_{0c} \equiv \chi_1(\sigma, \theta, t_0)$$

Отсюда заключаем, что $\dfrac{\partial \chi_1}{\partial t_0} = \dfrac{\partial F(\sigma, \theta + t_0)}{\partial t_0} > 0$, то есть при любой аппроксимации преемственность соблюдается.

Согласно теории течения, имеем

$$\chi_1(\sigma, \theta, t_0) = F(\sigma, \theta + t_0) - F(\sigma, t_0) \tag{18}$$

Для первой стадии ползучести имеем $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} < 0$, и, следовательно, выражение (18) отрицательно и преемственность не соблюдается.

Согласно теории наследственности, вопрос о преемственности зависит от вида аппроксимации и он рассмотрен в работе [1].

Согласно теории упрочнения, независимо от вида аппроксимации мы имеем

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t_0} = \frac{\partial \chi_2}{\partial \sigma_0} = 0$$

то есть преемственность не соблюдается.

Несколько слоев об обобщении теорий ползучести на случаи сложного напряженного состояния. Положим, что при осевом напряженном состоянии имеет место соотношение

$$\varepsilon(t) = \Pi_t[\sigma(t)] \tag{19}$$

где Π_t – временной оператор, определяющий теорию ползучести.

Обычно принимается, что независимо от напряженного состояния интенсивность деформаций определяется лишь историей изменения интенсивности напряжений, кроме того, девиаторы напряжений и деформаций пропорциональны:

$$\varepsilon_i(t) = \Pi_t[\sigma_i(t)] \tag{20}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\sigma_x - \sigma_y), \quad \gamma_{xy} = 3\,\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy} \qquad (x, y, z) \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \end{gathered} \tag{21}$$

Возникает вопрос: в каких случаях соотношения (20) и (21) могут рассматриваться как обобщение соотношения (19) для сложного напряженного состояния.

Рассмотрим следующую программу осевого напряженного состояния:

$$\sigma_x(t) = \begin{cases} -a, & 0 < t < t_0 \\ a, & t_0 < t \end{cases} \tag{22}$$

Интенсивность напряжения, соответственная (22), будет постоянной и равной, а в любой момент времени, вследствие чего интенсивность деформации $\varepsilon_i(t)$, согласно (20), будет определяться так:

$$\varepsilon_i(t) = \Pi_t[a] \equiv F(a,t) \tag{23}$$

При этом деформация $\varepsilon_x(t)$ при $t > t_0$ может быть определена двояким способом:

1. непосредственно из соотношения (19);
2. при использовании (21), соотношений (20) и (23).

Соотношения (20) и (21) могут быть обобщающими соотношения (19) лишь в случае, если оба вышеуказанных способа дают один и тот же результат. Положим, что деформации ползучести при постоянных напряжениях описываются наиболее употребимой функцией

$$\varepsilon_c(t) = f(\sigma)t^m, \tag{24}$$

где $f(\sigma)$ – некоторая функция.

При использовании (20) и (21) получим

$$\varepsilon_{xc}(t) = \begin{cases} -f(a)t^m & t < t_0 \\ f(a)t^m & t > t_0 \end{cases} \tag{25}$$

Если использовать для программы (22) вышерассмотренные теории ползучести, то получим при $t > t_0$

$$\varepsilon_{xc}(t) = f(a)t^m \qquad \text{(теория старения)}$$
$$\varepsilon_{xc}(t) = f(a)(t^m - 2t_0^m) \qquad \text{(теория течения)} \tag{26}$$
$$\varepsilon_{xc}(t) = f(a)(t - 2t_0)^m \qquad \text{(теория упрочнения)}$$
$$\varepsilon_{xc}(t) = f(a)\left[2(t - t_0)^m - t^m\right] \qquad \text{(теория наследственности)}$$

Таким образом, заключаем, что соотношения (20) и (21) могут рассматриваться для обобщения на случаи сложного напряженного состояния только для теории старения и неприемлемы для течения, упрочнения и наследственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Изд. “Гитутюн” НАН РА, 1999, 255с.
2. Качанов Л.М. Теория ползучести М.: Физматгиз, 1960. 450 с.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 572 с.
4. Одквист Ф. Технические теории ползучести. //Сб. переводов. Механика, 1959. №2. С.101-112.
5. Наместников В.С., Работнов Ю.Н. О гипотезе уравнения состояния при ползучести. //ПМТФ. 1961. №3. С. 101-102.
6. Наместников В.С., Хвостунков А.А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. // ПМТФ. 1960. №4. С. 90-94.

Сведения об авторах

Симонян Арег Михайлович – ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.
Тел. (374 10) 52 75 39, (374 93) 45 70 86
E-mail: simonyan areg@mail.ru

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Смирнов А. В.

Рассматривается задача подкрепления кусочно-однородной упругой пластины двумя полубесконечными стрингерами разной жесткости, присоединенными к пластине жестко вдоль линии раздела материалов. Предполагается, что под действием внешних сил, приложенных к стрингерам, в пластинах реализуется обобщенное плоское напряженное состояние. Задача сводится к уравнению Прандтля с кусочно-постоянным коэффициентом, которое преобразуется сначала к системе разностных уравнений, а затем – к скалярной краевой задаче Римана на двулистной римановой поверхности, решение которой строится явно в квадратурах. Исследуется поведение контактных напряжений вблизи точки соединения стрингеров при различных внешних нагрузках.

Указанная задача представляет собой аналог известной задачи Мелана [1] для случая кусочно-однородной пластины, усиленной бесконечным кусочно-однородным стрингером. В случае отсутствия одной из частей стрингера и однородной пластины эта задача исследовалась в работе [2].

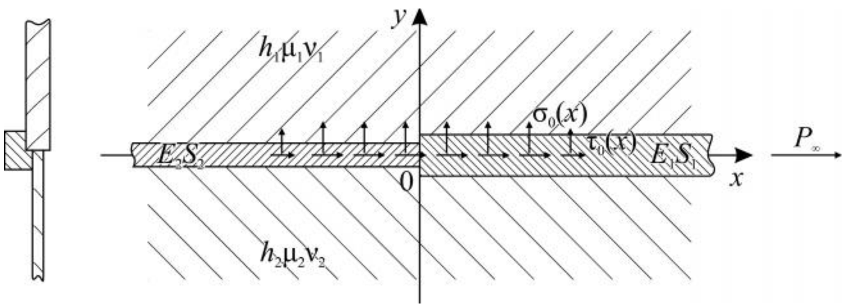


Рис. 1.

1. Пусть тонкая упругая кусочно-однородная пластина, составленная из двух полубесконечных однородных пластин, усилена по линии соединения двумя полубесконечными упругими стрингерами (рис. 1). К верхней стороне стрингера приложены нормальные и касательные усилия интенсивности $\sigma_0(x)$ и $\tau_0(x)$, а в бесконечно удаленной точке на стрингер действует горизонтальная сила P_∞. Напряжения и вращение на бесконечности отсутствуют. Предполагается, что в пластинах реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, а стрингеры находятся в одноосном напряженном состоянии. Пространственные эффекты концентрации напряжений вблизи линии соединения пластин со стрингером, возникающие из-за разницы толщин пластин и частей стрингера, в том числе и вблизи точки соединения частей стрингера, считаются пренебрежимо малыми. Требуется определить законы распределения тангенциальных и нормальных контактных напряжений вдоль линии соединения пластин.

Решение задачи находится при предположении, что внешняя нагрузка непрерывна на вещественной оси за исключением точки $x = 0$, где она может иметь разрыв 1-го рода, а на бесконечности удовлетворяет условиям

$$\sigma_0(x) = O(1/x), \quad \tau_0(x) = O(1/x^2), \quad x \to 0$$

Уравнения равновесия стрингеров имеют вид [3]:

$$\begin{gathered} A(x)u''(x) + h_1\tau^+_{xy}(x) - h_2\tau^-_{xy}(x) + \tau_0(x) = 0, \quad h_1\sigma^+_y(x) - h_2\sigma^-_y(x) + \sigma_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ (u^+ + iv^+)'(x) = (u^- + iv^-)'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = E_1S_1,\ x > 0,\ A(x) = E_2S_2,\ x < 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\sigma^\pm_y$, $\tau^\pm_{xy}$ – касательные и нормальные контактные напряжения в расчете на единицу толщины пластины, $u^\pm$, $v^\pm$ – компоненты вектора перемещений, h_1, h_2 – толщины верхней и нижней пластин, E_1, S_1 и E_2, S_2 – модули упругости и малые поперечные сечения левого и правого стрингера соответственно. Кроме уравнений (1.1) контактные напряжения должны удовлетворять дополнительному условию равновесия всего стрингера

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[h_1\tau_{xy}^+(x)-h_2\tau_{xy}^-(x)+\tau_0(x)]\,dx+P_\infty=0 \tag{1.2}$$

Напряжения и производные от вектора смещения $u+iv$, входящие в формулы (1.1), выражаются по формулам Колосова–Мусхелишвили [4] через две исчезающие на бесконечности кусочно-голоморфные функции $\Phi_k(\zeta)$, $\zeta = x+iy$ (комплексные потенциалы) с линией разрыва по действительной оси, на которой

$$\begin{gathered} h_1[\Phi_1^+(x)-\Phi_1^-(x)]+h_2[\Phi_2^+(x)-\Phi_2^-(x)]=\frac{iA(x)}{2\mu_1}\frac{d}{dx}\operatorname{Re}[\kappa_1\Phi_1^+(x)+\Phi_1^-(x)]+i\tau_0(x)-\sigma_0(x) \\ \mu_2[\kappa_1\Phi_1^+(x)+\Phi_1^-(x)]=\mu_1[\kappa_2\Phi_2^-(x)+\Phi_2^+(x)],\quad x\in\mathbb{R} \end{gathered} \tag{1.3}$$

Переписав второе условие (1.3) в виде

$$\mu_2\kappa_1\Phi_1^+(x)-\mu_1\Phi_2^+(x)=\mu_1\kappa_2\Phi_2^-(x)-\mu_2\Phi_1^-(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

заметим, что левая и правая части полученного равенства представляют собой граничные значения функций, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях и исчезающих на бесконечности, откуда следует их равенство нулю во всей ζ-плоскости и справедливость равенств

$$\Phi_2(\zeta)=\mu_2\mu_1^{-1}\kappa_1\Phi_1(\zeta),\ \operatorname{Im}\zeta>0;\quad \Phi_2(\zeta)=\mu_2\mu_1^{-1}\kappa_2^{-1}\Phi_1(\zeta),\ \operatorname{Im}\zeta<0 \tag{1.4}$$

Подставляя формулы (1.4) в первое равенство (1.3), перепишем его в виде краевого условия задачи Римана [5]

$$(1+\delta\kappa_1)\Phi_1^+(x)-(1+\delta\kappa_2^{-1})\Phi_1^-(x)=ig(x),\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad \delta=h_2h_1^{-1}\mu_2\mu_1^{-1} \tag{1.5}$$

с неизвестной правой частью

$$g(x)=\frac{A(x)}{2h_1\mu_1}\frac{d}{dx}\operatorname{Re}[\kappa_1\Phi_1^+(x)+\Phi_1^-(x)]+\frac{1}{h_1}[\tau_0(x)+i\sigma_0(x)] \tag{1.6}$$

Из равенства (1.6) непосредственно следует, что

$$\operatorname{Im}g(x)=h_1^{-1}\sigma_0(x) \tag{1.7}$$

Для нахождения $\operatorname{Re}g(x)$ подставим решение краевой задачи (1.5) в равенство (1.6) и получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\operatorname{Re}g(x)-\frac{a_{k1}}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Re}g(t)\,dt}{t-x}=\frac{1}{h_1}\left[\tau_0(x)-a_{k2}\sigma_0'(x)\right],\quad (-1)^{k-1}x>0,\quad k=1,2$$

где

$$a_{k1}=\frac{E_kS_k}{4h_1\mu_1}\frac{\kappa_1(\kappa_2+\delta)+\kappa_2(1+\kappa_1\delta)}{(\kappa_2+\delta)(1+\kappa_1\delta)},\quad a_{k2}=\frac{E_kS_k}{4h_1\mu_1}\frac{\kappa_1(\kappa_2+\delta)-\kappa_2(1+\kappa_1\delta)}{(\kappa_2+\delta)(1+\kappa_1\delta)},\quad k=1,2$$

которое после интегрирования принимает вид:

$$f(x)-\frac{a_{k1}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(t)\,dt}{t-x}=b(x),\quad (-1)^{k-1}x>0,\quad k=1,2 \tag{1.8}$$

где

$$f(x)=-\int_x^{+\infty}\operatorname{Re}g(t)\,dt,\ x>0;\quad f(x)=\int_{-\infty}^{x}\operatorname{Re}g(t)\,dt,\ x<0$$

$$b(x)=\frac{1}{h_1}\left[\tau_*(x)-a_{k2}\sigma_0(x)\right],\quad \tau_*(x)=-\int_x^{+\infty}\tau_0(t)\,dt,\ x>0;\quad \tau_*(x)=\int_{-\infty}^{x}\tau_0(t)\,dt,\ x<0$$

2. Функция $f(x)$ находится путем сведения интегро-дифференциального уравнения (1.8) к системе разностных уравнений при помощи интегрального преобразования Меллина, которая затем преобразуется к краевому условию задачи Римана на римановой поверхности. Рассмотрим интегральные преобразования Меллина

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty} f'(x)\,x^{s-1}\,dx,\ x>0,\quad F_2(s)=\int_0^{+\infty} f'(-x)\,(-x)^{s-1}\,dx,\ x<0$$
$$B_1(s)=\int_0^{+\infty} b(x)\,x^{s-1}\,dx,\ x>0,\quad B_2(s)=-\int_0^{+\infty} b(-x)\,x^{s-1}\,dx,\ x<0 \tag{2.1}$$

Умножив уравнение (1.10) на $|\,x\,|^{s-2}$ и проинтегрировав по x от 0 до $+\infty$, получим систему разностных уравнений

$$F_k(s)=(1-s)\left[a_k\operatorname{ctg}\pi s\,F_k(s-1)+\frac{a_k}{\sin\pi s}F_{3-k}(s-1)+B_k(s-1)\right],\quad k=1,2 \tag{2.2}$$

Согласно сделанным предположениям, функция $f'(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, имеет интегрируемую особенность в точке $x=0$ и исчезает на бесконечности не медленнее $1/x^2$, функция $b(x)$ также непрерывна на $\mathbb{R}$, может иметь разрыв первого рода в точке $x=0$ и исчезает на бесконечности не медленнее $1/x$. В этом случае из системы (2.2) и свойств интегрального преобразования Меллина [6] следует, что функции $F_{1,2}(s)$ аналитичны в полосе $0<\operatorname{Re}s<2$, ограничены при $\operatorname{Im}s\to\pm\infty$, а равенства (2.2) справедливы в полосе $1<\operatorname{Re}s<2$. Переписав систему (2.2) в матричном виде и умножив ее слева на матрицу

$$\boldsymbol{T}(s)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1+a}{2}\big(\cos\pi s+\beta(s)\big) & \frac{1+a}{2}\big(\cos\pi s-\beta(s)\big)\end{pmatrix},\quad \beta(s)=\sqrt{\cos^2\pi s-\cos^2\pi\eta} \tag{2.3}$$

где η – корень уравнения $\cos^2\pi\eta=4a/(1+a)^2$ ($a=a_2/a_1$), удовлетворяющий условию $0<\operatorname{Re}\eta\le 1/2$, осуществим равнозначный переход от системы (2.2) к двум отдельным разностным уравнениям

$$\varphi_k(s)=\Lambda_k(s)\varphi_k(s-1)+M_k(s),\quad 1<\operatorname{Re}s<2,\quad k=1,2 \tag{2.4}$$

и дополнительным условиям

$$\varphi_1^+(\sigma)=\varphi_2^-(\sigma),\quad \varphi_1^-(\sigma)=\varphi_2^+(\sigma),\quad \sigma\in\Gamma_n,\quad n=0,\pm1,\ldots \tag{2.5}$$

относительно функций

$$\varphi_{1,2}(s)=\frac{1}{2}\left(1\mp\frac{\cos\pi s}{\beta(s)}\right)\frac{F_1(s)}{\Gamma(s)}\pm\frac{1}{(1+a)\beta(s)}\frac{F_2(s)}{\Gamma(s)} \tag{2.6}$$

В уравнениях (2.4) введены обозначения

$$\begin{aligned}\Lambda_k(s)&=\frac{a_1}{2\sin\pi s}\Big((a-1)\cos\pi s+(-1)^{k-1}(a+1)\beta(s)\Big),\\ M_k(s)&=\left((-1)^{k-1}\frac{\cos\pi s}{\beta(s)}-1\right)\frac{B_1(s-1)}{2\Gamma(s-1)}+\frac{(-1)^k}{(1+a)\beta(s)}\frac{B_2(s-1)}{\Gamma(s-1)},\end{aligned}\quad k=1,2 \tag{2.7}$$

У двузначной функции $\beta(s)$ берется ветвь, однозначная в плоскости с разрезами по отрезкам $\Gamma_n:[n+\eta,\,n+1-\eta]$ ($n=0,\pm1,\ldots$), удовлетворяющая условию $\beta(s)\sim\cos\pi s$, $\operatorname{Im}s\to\pm\infty$.

В полосе $0<\operatorname{Re}s<2$ выделим произвольную полосу единичной ширины $\Pi=\{s:\ \omega-1<\operatorname{Re}s<\omega\}$, $\omega=\mathrm{const}$ с разрезом Γ_m, не пересекающим границы полосы, где параметр m в зависимости от выбранного ω принимает значение 0 или 1. Полоса Π конформно отображается на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$, разрезанную вдоль отрезка $[-1,1]$, функцией $z=i\operatorname{tg}\pi(\omega-s)$, при этом левая (правая) граница полосы Π отображается на верхний (нижний) берег разреза $[-1,1]$, а образом разреза Γ_m является гладкий разрез γ с концами $z_1=i\operatorname{tg}\pi(\omega-\eta)$ и $z_2=i\operatorname{tg}\pi(\omega+\eta)$. Вид кривой γ, как и ее направление, на результат решения задачи не влияет. Так как на правой границе полосы Π

функции $\varphi_{1,2}(s)$ должны удовлетворять уравнениям (2.4), а на разрезе Γ_m - условиям (2.5), функции

$$\phi_k(z)=\varphi_k(s(z)),\quad z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\left(\gamma\cup[-1,1]\right),\quad k=1,2 \tag{2.8}$$

должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}&\phi_k^+(t)=\lambda_k(t)\phi_k^-(t)+\mu_k(t),\quad t\in(-1,1),\quad k=1,2\\&\phi_1^+(t)=\phi_2^-(t),\quad \phi_1^-(t)=\phi_2^+(t),\quad t\in\gamma\end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\lambda_k(t)=\Lambda_k(s(t)),\quad \mu_k(t)=M_k(s(t)),\quad t\in[-1,1],\quad k=1,2$$

Рассмотрим риманову поверхность $\mathfrak{R}$ алгебраической функции $w=w(z)$, определяемой из уравнения $w^2=(z-z_1)(z-z_2)$. Поверхность $\mathfrak{R}$ формируется из двух экземпляров расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_1$ и $\overline{\mathbb{C}}_2$, склеенных вдоль разрезов γ. Затем введем функцию

$$\Phi(z,w)=\begin{cases}\phi_1(z), & (z,w)\in\mathbb{C}_1\\ \phi_2(z), & (z,w)\in\mathbb{C}_2\end{cases} \tag{2.10}$$

аналитическую всюду на $\mathfrak{R}$ за исключением линий $L_k=[-1,1]\subset\mathbb{C}_k$ ($k=1,2$), на которых она должна удовлетворять краевому условию

$$\Phi^+(t,\xi)=\lambda(t,\xi)\Phi^-(t,\xi)+\mu(t,\xi),\quad (t,\xi)\in L,\quad L=L_1\cup L_2 \tag{2.11}$$

где

$$\lambda(t,\xi)=\begin{cases}\lambda_1(t), & (t,\xi)\in L_1\\ \lambda_2(t), & (t,\xi)\in L_2\end{cases},\quad \mu(t,\xi)=\begin{cases}\mu_1(t), & (t,\xi)\in L_1\\ \mu_2(t), & (t,\xi)\in L_2\end{cases};\quad \xi=w(t)$$

На разрезе γ равенства (2.9) выполняются автоматически. Таким образом, для нахождения функции $\Phi(z,w)$ имеем краевую задачу Римана (2.11) в классе функций, поведение которых вблизи концов линии разрыва L определяется соотношениями

$$\begin{aligned}&\Phi(z,w)=O(|z\mp1|^{1/4}\ln^{1/2-\sigma}|z\mp1|),\quad (z,w)\in\mathbb{C}_1,\quad z\to\pm1\\&\Phi(z,w)=O(|z\mp1|^{-1/4}\ln^{1/2-\sigma}|z\mp1|),\quad (z,w)\in\mathbb{C}_2,\quad z\to\pm1\\&\sigma=\operatorname{Re}s(z),\quad \sigma\in[\omega-1,\omega]\end{aligned} \tag{2.12}$$

ограниченных на бесконечности и допускающих простые степенные особенности порядка $1/2$ в точках ветвления поверхности, причем так, что сумма $\Phi(z,w)+\Phi(z,-w)$ остается ограниченной в них. Решение данной задачи имеет вид [7]:

$$\Phi(z,w)=\mathrm{X}(z,w)[\Psi(z,w)+R(z,w)] \tag{2.13}$$

где

$$\mathrm{X}(z,w)=e^{\chi(z,w)},\quad \chi(z,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\ln\lambda(t,\xi)\,dW-\int_{z_0}^{1}\frac{1}{t-z},\quad dW=\frac{w+\xi}{2\xi}\frac{dt}{t-z}$$

$$\Psi(z,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(t,\xi)}{\mathrm{X}^+(t,\xi)}dW,\quad R(z,w)=\frac{C_1(z-z_0)-C_2}{w(z)}-C_3,\quad w=w(z),\ \xi=w(t)$$

$$\ln\lambda(-1,q(-1))=\ln a_{21}-3\pi i/2,\quad \ln\lambda(-1,-q(-1))=\ln a_{11}-\pi i/2$$

$$C_2=\frac{q(z_0)}{2}\left(\Psi\left(z_0,q(z_0)\right)-\Psi\left(z_0,-q(z_0)\right)\right),\quad C_3=\frac{1}{2}\left(\Psi\left(z_0,q(z_0)\right)+\Psi\left(z_0,-q(z_0)\right)\right)$$

Полученное решение задачи (1.2) не зависит от выбора z_0. Выполнив обратные преобразования, найдем решение системы (2.2) на прямой $\operatorname{Re}s=\mu$, которое в силу теоремы единственности аналитических функций справедливо во всей полосе $1<\operatorname{Re}s<2$. Наконец, определив произвольную постоянную C_1 из дополнительного условия (1.2), получим решение поставленной задачи.

Найденные нормальные контактные напряжения $\sigma_y^{\pm}(x)$ ограничены вблизи особой точки $x=0$, а касательные контактные напряжения $\tau_{xy}^{\pm}(x)$ имеют логарифмическую особенность [8]:

$$\tau_{xy}^{+}(x) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{A-B}{1+\delta\kappa_1}+\frac{\kappa_2(A+B)}{\kappa_2+\delta}\right)\ln x,\ \tau_{xy}^{-}(x) \sim -\frac{1}{2}\frac{\mu_2}{\mu_1}\left(\frac{A+B}{\kappa_2+\delta}+\frac{\kappa_1(A-B)}{1+\delta\kappa_1}\right)\ln x,\ x\to 0 \tag{2.14}$$

$$A=\pi^{-1}\left\{a_{11}^{-1}\left[F_1(1)+b(0+0)\right]+a_{21}^{-1}\left[F_2(1)-b(0-0)\right]\right\},\ B=(\pi h_1)^{-1}\left[\sigma_0(0-0)-\sigma_0(0+0)\right]$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (10-01-00103).

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweibter Verbindungen. //Ing. Arch., Bd.3, №2, 1932. P.123–129.
2. Koiter W. T. On the Diffusion of Load From a Stiffener into a Sheet. //Quart. J. Mech. Appl. Math. V. 8. № 2. 1955. P.164–178.
3. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. Титчмарш Э.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 418 с.
7. Antipov Y.A., Silvestrov V.V. Vector functional-difference equation in electromagnetic scattering. //IMA Journal of Applied Mathematics. Vl.69. № . 2004. P. 27–69.
8. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Т 2. Рига: Зинатне, 1977. 464 с.

Сведения об авторе:

Смирнов Александр Валериянович – аспирант кафедры высшей математики, Российский государственный университет нефти и газа имени И. М. Губкина, факультет Автоматики и вычислительной техники.
E-mail smirnov09al@gmail.com

ОТ ТРИБОЛОГИИ К ТРИБОФАТИКЕ

Сосновский Л.А.

Трение – удивительный феномен природы; изнашивание – коварный враг движущихся и деформируемых систем; усталость – грозный бич современной техники. Трибофатика – целое, мыслимое как многое (трение, изнашивание, усталость). В докладе представлен краткий обзор некоторых исследований на пути от трибологии к трибофатике.

Изучение основных закономерностей трения твердых тел привело к созданию (к середине XIX века) новой научной дисциплины – теории трения. В начале XX века была разработана гидродинамическая теория смазки, а к середине того же столетия сформировалась теория изнашивания. Поскольку большинство узлов трения работают в условиях, когда процессы трения, изнашивания и смазки реализуются совместно и одновременно, в 60-х годах XX века произошло 1-ое обобщение исследований в трех указанных выше направлениях – так возникла трибология. В рамках этой науки, как известно, изучается влияние двух главных факторов (смазки и изнашивания) на изменение характеристик трения. В докладе дается краткий анализ состояния исследований по трибологии.

В последней четверти XX века было установлено, что если один из элементов пары трения дополнительно подвергается воздействию повторно-переменных нагрузок (mechanical fatigue), то, в зависимости от условий испытания, циклические напряжения способны не только значительно снизить (~ 30…60 %), но и существенно повышать (~ 20…40 %) износостойкость. Следовательно, изменяя условия циклического нагружения должным образом, можно эффективно управлять изменением характеристик трения и изнашивания. Это явление получило краткое название: обратный эффект (back effect). С другой стороны, было установлено, что процессы трения и изнашивания, в зависимости от условий их реализации, могут не только значительно снизить (~ до 3-х раз), но и существенно повышать (~ до 50…80 %) прочность при повторно-переменных нагрузках (fatigue strength). Следовательно, изменяя условия трения и изнашивания должным образом, можно эффективно управлять характеристиками сопротивления механической усталости. Это явление получило краткое название: прямой эффект (direct effect). Так произошло 2-ое обобщение – возникла трибофатика (tribo-fatigue), в рамках которой изучают закономерности комплексного – износоусталостного повреждения и разрушения (wear-fatigue damage and fracture). Следовательно, в трибологию, как и в механику усталости, дополнительно к традиционному анализу факторов, пришла принципиально новая методология – феноменоанализ. В докладе дается краткий анализ состояния исследований по трибофатике.

А в самом конце XX – начале XXI столетия произошло 3-е обобщение: разработаны основы трибокоррофатики (tribo-corro-fatigue). Здесь изучают закономерности сложнейших взаимодействий явлений трения и изнашивания, механической усталости, химической коррозии и эрозии. Таким образом, в ближайшем будущем пред нами открыт широкий фронт увлекательных теоретических и экспериментальных исследований, имеющих важнейшее значение для современной техники. В докладе дается аналитический обзор полученных к настоящему времени результатов и обсуждаются основные направления перспективных работ. Показано, что ожидается 4-ое обобщение: если учесть влияние термодинамического состояния среды на развитие комплекса указанных выше процессов повреждаемости, то открывается возможность построения нового раздела физики – механотермодинамики систем (mechanothermodynamics of systems). В докладе формулируются первые начала механотермодинамики.

В общем случае в трибофатике, как и в механике деформируемого твердого тела, различают три типа механического состояния материала: 1) *напряженно-деформированное состояние*; 2) *состояние поврежденности*; 3) *предельное состояние*[1-3].

Однако применительно к трибофатической системе обнаруживаются специфические особенности указанных состояний, которые носят принципиальный характер. Дадим их обобщенный анализ.

На рис. 1.1, I *а* представлена достаточно общая схема трибофатической системы твердое тело / твердое тело при независимом, но одновременном действии контактной (F_N) и неконтактных (объемных M_j , Q) нагрузок. В случае традиционного подхода ее обычно разделяют, анализируя напряженно–деформированное состояние либо соответствующей пары трения (ролик/ролик, рисунок 1.1, I *в*), либо отдельного элемента конструкции (вала, рисунок 1.1, I *б*).

При расчетах вала определяют, используя методы решения задач теории упругости, тензоры напряжений и деформаций (рис. 1.1, II *б*)

$$T^{(V)} = \sigma_{ij}^{(b)}, \tag{1.1}$$

$$E^{(V)} = \varepsilon_{ij}^{(b)}, \tag{1.2}$$

которые обусловлены действием объемных (индекс *V*) нагрузок (в общих случаях трехмерного изгиба, растяжения-сжатия, кручения). При расчетах пары трения, в случаях несогласованного подвижного контакта, определяют, используя методы решения задач контактного взаимодействия, тензоры напряжений и деформаций

$$T^{(W)} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)}, \qquad (1.3)$$

$$E^{(W)} = \varepsilon_{ij}^{(n)} + \varepsilon_{ij}^{(\tau)}, \qquad (1.4)$$

обусловленные распределением нормальных *p (x, y)* и касательных *q (x, y)* к поверхности контакта (индекс *W*) усилий (рис. 1.1, II *в*).

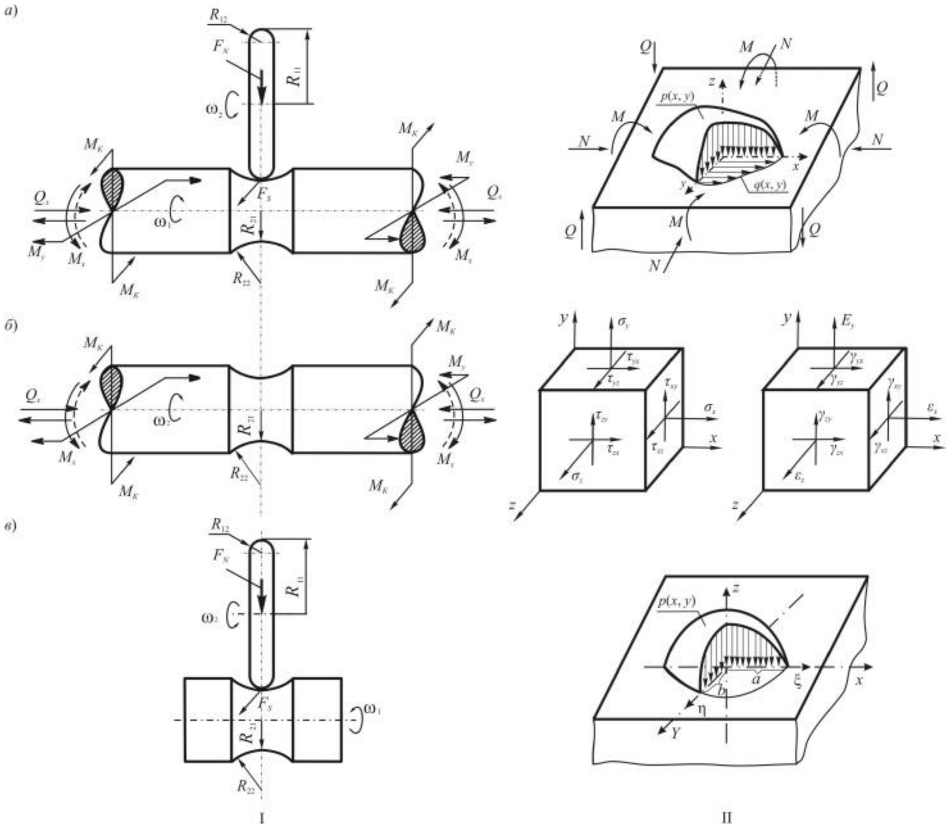


Рис. 1.1 – Общие конструктивная (I) и расчетная (II) схемы трибофатической системы ролик / вал с главным вращательным движением (ω_1) при независимом действии контактной (F_N) и внеконтактных нагрузок (M, M_K, Q) нагрузок (*а*) и соответствующих ей основного элемента системы – вала (*б*) и пары трения ролик / ролик (*в*)

А при расчетах трибофатических систем следует находить объединенные (совмещенные) тензоры напряжений и деформаций

$$T^{(V,W)} = \sigma_{ij}^{(b)} + \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)}, \qquad (1.5)$$

$$E^{(V,W)} = \varepsilon_{ij}^{(b)} + \varepsilon_{ij}^{(n)} + \varepsilon_{ij}^{(\tau)}, \qquad (1.6)$$

которые обусловлены действием комплекса всех нагрузок (рисунок 1.1, II *а*) – контактных и неконтактных (индекс (*V*, *W*)). Таким образом, объединенные тензоры (1.5 и 1.6) находятся путем суперпозиции напряжений (деформаций), обусловленных как контактной (тензоры (1.3) и (1.4)), так и внеконтактными (тензоры (1.1) и (1.2)) нагрузками. Соответствующую механико-математическую модель разработали Л.А. Сосновский, М.А. Журавков и С.С. Щербаков.

Объединенное напряженное состояние, определяемое выражением (1.5), имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[\sigma_{ij}^{(hs)} \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(surf)}\right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \\ &= \left[\iint\limits_{S(\xi,\eta)} p(\xi,\eta)\sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z)\,d\xi d\eta \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(S)}(x,y)\right] + \\ &+ \iint\limits_{S(\xi,\eta)} q(\xi,\eta)\sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z)\,d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x,y,z) + \\ &+ \sigma_{ij}^{(N)}(x,y,z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(x,y,z).\end{aligned} \qquad (1.7)$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ – нормально и касательно распределенные контактные усилия, индексы Q, N, M соответствуют внутренним поперечному и продольному усилиям, а также внутреннему моменту, вызванному неконтактной нагрузкой, $S(x, y)$ – площадка контакта, $G_{ij}^{(B)}$ и $G_{ij}^{(C)}$ – фундаментальные решения задач Буссинеска и Черрути, $\sigma_{ij}^{(hs)}$ и $\sigma_{ij}^{(surf)} = \sigma_{ij}^{(S)}\left(x, y\right)$ – напряжения в полупространстве и на его поверхности при действии $p(x, y)$.

Кратко охарактеризуем трудности и особенности исследования состояния поврежденности и предельного состояния трибофатических систем.

Установлено [4], что большинство известных теорий достижения предельного состояния (называемых также теориями прочности) элементов конструкции укладывается в рамки гипотезы Надаи

$$F(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, m_i) = 0, \tag{1.8}$$

где $\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}$ – октаэдрические касательные и нормальные напряжения, а m_i – некоторые параметры, характеризующие механические свойства материала.

В трибологии задача о разработке специфических теорий предельного состояния (теорий прочности, или теорий износостойкости), по имеющимся сведениям [5], не ставилась. Однако было показано, что в принципе для оценки предельного состояния пары трения можно использовать ту или иную известную теорию прочности. Так, было показано, что эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$, определяемое по классическим теориям прочности, пропорционально удельной силе трения τ_W

$$\sigma_{\text{экв}} \sim f p_0 = \tau_W\,, \tag{1.9}$$

где p_0 – наибольшее давление на площадке контакта, f – коэффициент трения.

В трибофатике ставится и решается более общая задача разработки теории предельного состояния недеформируемого твердого тела или пары трения, но системы, которая находится под действием и контактной, и внеконтактных нагрузок. Такая задача, с учетом (1.5), (1.6) и (1.7), формулируется в следующем общем виде:

$$\Phi(T^{(V,W)}, E^{(V,W)}, m_k, \Lambda_{i/j} ...) = 0\,, \tag{1.10}$$

где m_k – некоторые характеристики контактирующих материалов, а $\Lambda_{i/j}$ – функция взаимодействия необратимых повреждений, обусловленных нагрузками разной природы. Нетрудно видеть, что (1.10) не укладывается в гипотезу Надаи (1.8). По существу, гипотеза (1.10) Сосновского-Щербакова кладет начало *новому периоду* развития теорий прочности, принципиальной особенностью которого является *учет диалектического взаимодействия необратимых повреждений. Принципы* такого взаимодействия формируются следующим образом.

Необратимые повреждения, обусловленные только контактной нагрузкой (обозначим их меру ω_p), и необратимые повреждения, обусловленные только циклическими напряжениями от внеконтактных нагрузок (обозначим их меру ω_σ), сложным образом взаимодействуют ($\omega_\sigma \rightleftarrows \omega_p$) между собой, если реализуются одновременно и в единой области деформируемых тел. *Результат их взаимодействия*

$$f_\Sigma(\omega_\sigma \rightleftarrows \omega_p) = \omega_\Sigma \tag{1.11}$$

и есть мера (ω_Σ) комплексного износоусталостного повреждения. И тогда простейшую *гипотезу взаимодействия* можно записать так:

$$f_\Sigma(\omega_\sigma \rightleftarrows \mu_p) = (\mu_\pm + \mu_p)\Lambda_{\pm/p} = \mu_\Sigma\,,\ \Lambda_{\pm/p} \gtrless 1. \tag{1.12}$$

Согласно (1.12), в некоторых условиях развитие износоусталостного повреждения (ω_Σ) может быть сильно ускорено, если $\Lambda_{\sigma/p} >> 1$; это означает, что в системе реализуется *самопроизвольное разупрочнение*. В других условиях, напротив, развитие износоусталостного повреждения (ω_Σ) может быть существенно замедленным, если $\Lambda_{\sigma/p} << 1$; это означает, что в системе реализуется *самопроизвольное упрочнение*. Наконец, возможна ситуация, когда $\Lambda_{\sigma/p} = 1$, т. е. взаимодействие повреждений, обусловленных разными нагрузками, не имеет места. Это наблюдается, например, в случае, если события повреждения ω_σ и ω_p несовместны, т. е. они возбуждаются в разных зонах (областях) нагруженной системы.

Тут возникает очередная непростая проблема; надо предложить меру поврежденности, которая была бы способной количественно оценить соответствующее состояние не только материала, но и системы в целом.

В сопротивлении усталости материалов и элементов конструкции такого рода мера поврежденности известна – она предложена в рамках статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [6]. Ее разработка иллюстрируется на рис. 1.2 на простейшем примере изгиба вала. Когда стало ясно, что в условиях усталости *модель тела с опасной точкой* (рис. 1.2, *а*) несостоятельна, были предложены две новые модели – *тела с опасным сечением Серенсена-Когаева* (рис.1.2, *б*) и *тела с опасной поверхностью Вагапова* (рис. 1.2, *в*) [7, 8]. Первая из них учитывала то обстоятельство, что первичные усталостные повреждения (в том числе и микротрещины) возникают не только в точке на поверхности, но и на некоторой глубине циклически деформируемого твердого тела. Вторая из них принимала во внимание тот факт, что указанные повреждения обнаруживаются не только в опасном сечении (с *максимальным* уровнем напряжения), но и на прилегающей к нему поверхности, где напряжения на 5…15% меньше максимального.

Естественным обобщением этих частных моделей и стала *модель тела с опасным объемом Сосновского* (называемая моделью ТОПО) (рис.1.2, *г*), согласно которой *абсолютная мера поврежденности*

$$V_{P\gamma} = \iiint\limits_{\sigma \geq \sigma_{-1\min}} dxdydz\,, \tag{1.13}$$

определяется как объем материала с критическим уровнем напряжений в нем. Критерием ограничения опасного объема (1.13) служит условие

$$\sigma \geq \sigma_{-1\min}\,, \tag{1.14}$$

где $\sigma_{-1\min}$ – нижняя граница $\sigma_{-1\min}$ рассеяния пределов выносливости (σ_{-1}). В случае плоского изгиба мера (1.13) является, по существу, статической, или, лучше сказать, квазистатической (рис. 1.2, I *а* и I *б*), а при изгибе вала с вращением – динамической, поскольку она формируется за один его оборот (рис. 1.2, II). На рис. 1.2, I и 1.2, II дано сравнение конфигураций опасных объемов в обоих случаях.

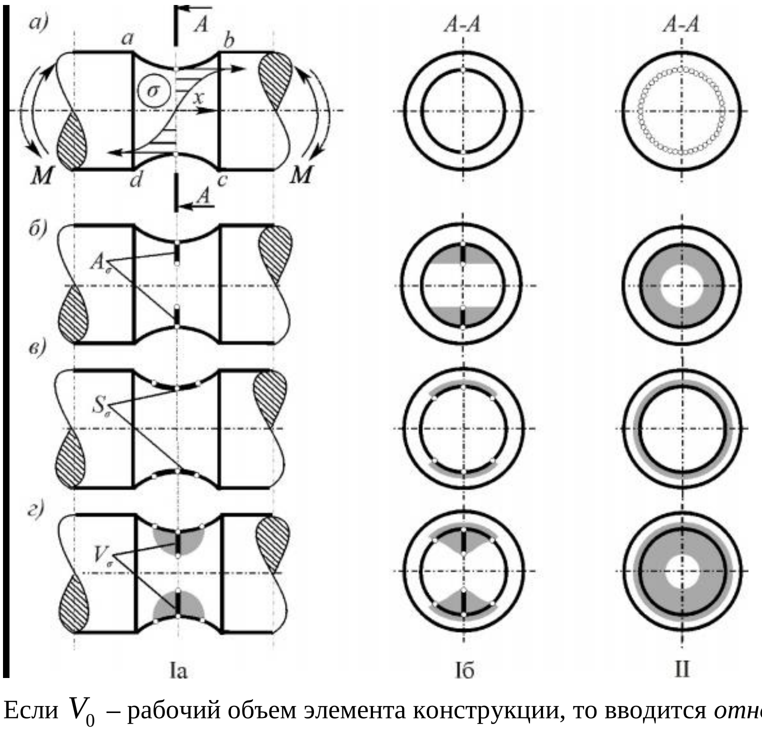


Рис. 1.2 – Схематическая иллюстрация моделей деформируемого твердого тела с опасной точкой (*а*), с опасным сечением (*б*), с опасной поверхностью (*в*) и с опасным объемом (*г*) при статическом (I *а*, I *б*) и циклическом (II) нагружении

Если V_0 – рабочий объем элемента конструкции, то вводится *относительная мера поврежденности*

$$0 \leq \frac{V_{P\gamma}}{V_0} = \omega_\sigma \leq 1\,, \tag{1.15}$$

в соответствии с которой необратимая повреждаемость отсутствует, если

$$\omega_\sigma = \frac{V_{P\gamma}}{V_0} = 0\,, \tag{1.15a}$$

так что (1.15*а*) рассматривается как *обобщенное условие надежности* (неразрушения) *элемента конструкции по критерию сопротивления усталости*. Когда

$$\omega_\sigma = \frac{V_{P\gamma}}{V_0} = 1, \tag{1.15б}$$

наступает *предельное состояние по критерию усталостного разрушения* (разделение элемента конструкции на части). Любые состояния поврежденности описываются, следовательно, неравенством

$$0 < \omega_\sigma = \frac{V_{P\gamma}}{V_0} < 1, \tag{1.15в}$$

В трибологии представление о том, что износ определяется «слоем интенсивно деформируемого материала» является общепризнанным (см., например, [4, 5, 9]), однако критерии ограничения такого слоя не формулируются, поэтому строгая методика определения опасного объема при трении отсутствует. И только в трибофатике дано обоснованное решение этой задачи.

Поскольку в области контакта напряженно-деформированное состояние является существенно трехмерным, то модель (1.13) трансформируется следующим образом:

$$V_{ij} = \iiint\limits_{g_{ij}(V)\geq 1} dV, \tag{1.16}$$

где $g_{ij} = \sigma_{ij} / \sigma_{ij}^{*\lim}$ – повреждающие напряжения, $\sigma_{ij}^{*\lim}$ – предельные напряжения.

Если напряженно-деформированное состояние характеризует начало жизни (работы) трибофатической системы, а предельное состояние – конец, то ее *эволюцию описывает состояние поврежденности, изменяющееся в процессе движения нагруженных элементов системы друг относительно друга*. И тогда цепочка исследований в трибофатике (TF) оказывается следующей

$$\boldsymbol{TF}\text{: } \textit{Движение} \Rightarrow \textit{НДС} \Rightarrow V_{ij} \Rightarrow \Lambda\text{-}\textit{взаимодействия} \Rightarrow \textit{ПС} \begin{matrix} \textit{ПЭ} \\ \\ \textit{ОЭ} \end{matrix} \Rightarrow \textit{ресурс} \tag{1.17}$$

Здесь приняты следующие сокращения: НДС – напряженно-деформированное состояние, V_{ij} – комплексный опасный объем, ПС – предельное состояние, ПЭ и ОЭ – прямой и обратный эффекты. В докладе кратко анализируется алгоритм (1.17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский Л.А. Механика износоусталостного повреждения. Гомель: БелГУТ, 2007. 434 с.
2. Sosnovskiy L.A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics). Series: Foundations of Engineering Mechanics, Springer, 2005. 424 p.
3. Сосновский Л.А. Основы трибофатики. Гомель: БелГУТ, 2003. Т.1. 246с.; Т.2. 234с.
4. Прочность материалов и конструкций. /Под ред. В.Т. Трощенко [и др.], Киев: Академпериодика, 2005. 1088 с.
5. Основы трибологии (трение, износ, смазка)./ Под ред. А.В. Чичинадзе, М.: Машиностроение, 2001. 664 с.
6. Сосновский Л.А. Статистическая механика усталостного разрушения. Минск: Навука і тэхніка, 1987. 288 с.
7. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М.: 488 с.
8. Вагапов Р.Д. Статистическая теория рассеивания случайной координаты повреждения тела. //Машиноведение. 1970. № 4. С.63-74.
9. Сысоев П.В., Богданович П.Н., Лизарев А.Д. Деформация и износ полимеров при трении. Минск: Наука и техника, 1985. 239 с.

<u>Сведения об авторе</u>

Сосновский Леонид Адамович,

Доктор технических наук, профессор Белорусского государственного университета транспорта (+375) 29-533-77-70, тел/факс (+375) 232-77-44-55
E-mail: tribo-fatigue@mail.ru

НОВЫЙ КЛАСС КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Сосновский Л.А., Щербаков С.С.

Рассматриваются поля напряжений и деформаций в трибофатической системе, находящихся под действием контактных и неконтактных сил одновременно. Объединенное напряженное состояние было получено путем суперпозиции полей напряжений, обусловленных действием нормальных и касательных эллиптически распределенных контактных усилий, а также неконтактным изгибом. Показано значительное изменение напряженно-деформированного состояния в сравнении с решением задачи для чисто контактного взаимодействия.

Постановка задачи. Для исследуемых в трибофатике силовых систем [1,2], характерно наличие как контактного взаимодействия между их элементами, так и объемного деформирования, вызванного действием неконтактных нагрузок (рис.1).

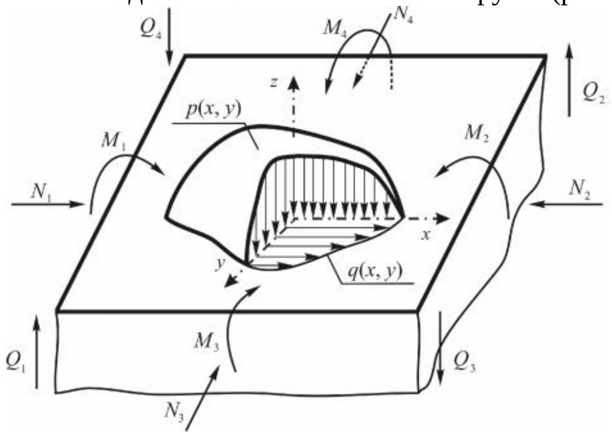


Рис. 1 – Общая схема нагружения трибофатической системы

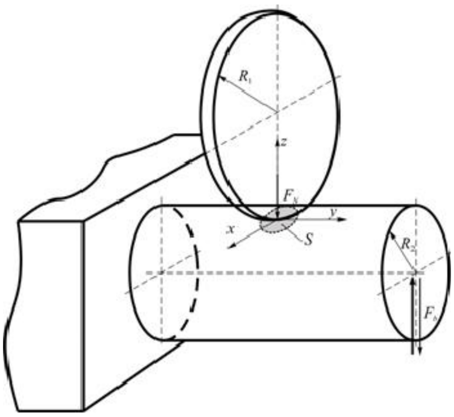


Рис. 2 – Схема системы диск-цилиндр

В качестве примера рассмотрим напряженное состояние системы ролик-вал (диск-цилиндр) (рис. 2), используемой при износоусталостных испытаниях [1,2].

В данной системе взаимодействующие тела в области контакта ограничены поверхностями второго порядка, поэтому для описания контактного взаимодействия применима теория контакта Герца [3-5]. В соответствии с данной теорией принимается, что площадка контакта $S(x, y)$ имеет форму эллипса с большой a и малой b полуосями, давление $p(S)$ на площадке контакта распределено по эллиптическому закону [3-5]. Таким образом, трехмерное напряженно-деформированное состояние для случая эллиптического контакта с трением определяется для граничных условий следующего вида:

$$\sigma_{nn}^{(c)}\Big|_S = p(F_c, S)\,,\ \sigma_{n\tau}^{(c)}\Big|_S = fp(F_c, S)\,, \sigma_{ij}^{(c)}\Big|_{\rho\to\infty} \to 0 \text{ и } i, j = x, y, z \qquad (1)$$

где $S(x, y)$ – площадка контакта, F_c – контактная сила, f – коэффициент трения, ρ – расстояние от центра контакта, $\sigma_{ij}^{(c)}$ – напряженное состояние при контакте, $\boldsymbol{n} \perp S$, $\boldsymbol{\tau} \parallel S$.

Кроме того, консольно закрепленный цилиндр изгибается неконтактной силой F_b (рис.2):

$$Q\big|_l = F_b \qquad (2)$$

где Q – внутренние поперечное усилие, а l – длина цилиндра.

Особенностью напряженного состояния системы диск-цилиндр данной является то, что если напряженное состояние диска является чисто контактным, то в цилиндре, помимо контактных напряжений, также действуют напряжения, обусловленные изгибающей силой F_b (изгиб от действия контактной нагрузки F_c учитывать не будем).

Напряженное состояние при контакте. При исследовании напряженного состояния в зоне контакта в точной постановке обычно ограничиваются нахождением компонентов напряжений в точках оси z и в некоторых точках поверхности контакта [3-5 и др.]. Определение всех компонент напряжения в любой точке полупространства в точной постановке затруднительно в силу большой сложности интегрируемых функций.

В силовой системе с учетом трения соприкасающихся тел имеет место несогласованный подвижный контакт между элементами. В общем случае по площадке контакта распределены нормальные $p(x,\ y)$ и касательные $q(x,\ y)$ к поверхности контакта усилия. Напряженное состояние в области контакта σ_{ij} представим как суперпозицию напряженных состояний $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, обусловленных соответственно нагрузками $p(x, y)$ и $q(x, y)$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} \qquad (3)$$

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(hs)}$ в любой точке $M(x, y, z)$ при $z < 0$ полупространства при действии на поверхность нормальных усилий $p(x, y)$ проводится численными методами с использованием функций влияния $G_{ij}^{(B)}$ из фундаментального решения задачи Буссинеска $\sigma_{ij}^{(B)}$ о действии сосредоточенной нормальной силы на полупространство [6,7]:

$$\sigma_{ij}^{(hs)}(x,y,z) = \iint\limits_{S(\xi,\eta)} p(\xi,\eta) G_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z)\, d\xi d\eta\,;\; p(\xi,\eta) = p_0\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}\,;\left\{(\xi,\eta)/\,\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \le 1\right\} \qquad (4)$$

Решение Бусинеска в соответствии с [3,4] имеет вид

$$\sigma_{xx}^{(B)} = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{(1-2\nu)}{r^2}\left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3}\right] - \frac{3zx^2}{\rho^5}\right\},$$

$$\sigma_{yy}^{(B)} = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{(1-2\nu)}{r^2}\left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3}\right] - \frac{3zy^2}{\rho^5}\right\},$$

$$\sigma_{zz}^{(B)} = -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{\rho^5},\; \sigma_{xy}^{(B)} = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{(1-2\nu)}{r^2}\left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\frac{xy}{r^2} - \frac{xyz}{\rho^3}\right] - \frac{3xyz}{\rho^5}\right\} \qquad (5)$$

$$\sigma_{xz}^{(B)} = -\frac{3P}{2\pi}\frac{xz^2}{\rho^5},\; \sigma_{yz}^{(B)} = -\frac{3P}{2\pi}\frac{yz^2}{\rho^5},\quad r^2 = x^2 + y^2,\quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Необходимо учесть, что на поверхности полупространства упругие напряжения $\sigma_{ij}^{(hs)}$ не определены. Это обусловлено тем, что для точек $z = 0$ поверхности полупространства интегралы из (4) не сходятся в силу особенности в точке приложения единичной нагрузки.

Расчет напряжений в любой точке $M(x,\ y,\ 0)$ поверхности полупространства при действии нормально распределенных усилий $p(x,\ y)$ проводится в соответствии со следующей общей формулой [6]:

$$\sigma_{ij}^{(surf)}(x,y,0) = \sigma_{ij}^{(S)}(x,y), \qquad (6)$$

где $\sigma_{ij}^{(S)}(x,y)$ – напряжения на поверхности полупространства, вызванные действием давления, распределенного по области $S(x, y)$.

В явном виде выражения (6) на основании [3–6] следующие:

$$\frac{\sigma_{xx}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -\dfrac{b+2\nu a}{a+b}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} & \text{при}\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 \quad \text{при}\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases} \qquad \frac{\sigma_{yy}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} -\dfrac{a+2\nu b}{a+b}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} & \text{при}\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 \quad \text{при}\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{(surf)}}{p_0} = \begin{cases} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}} & \text{при}\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1, \\ 0 \quad \text{при}\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases},\qquad \frac{\sigma_{xz}^{(surf)}}{p_0} = 0,\quad \frac{\sigma_{yx}^{(surf)}}{p_0} = 0. \qquad (7)$$

$$
\frac{\sigma_{xy}^{(surf)}}{p_0}=\begin{cases}-(1-2\nu)\dfrac{b}{ae^2}\left[\dfrac{y}{ae}\operatorname{arth}\left(\dfrac{ex}{a}\right)-\dfrac{x}{ae}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{aey}{b^2}\right)\right]=H(x,y) & \text{при } H(x,y)<0,\\ 0 \quad \text{при } H(x,y)>0, & \end{cases}
$$

Таким образом, напряжения $\sigma_{ij}^{(n)}$ в формуле (3) с учетом (4)-(7) можно представить в виде:

$$
\sigma_{ij}^{(n)}=\begin{cases}\sigma_{ij}^{(hs)} & \text{при } z<0\ ,\\ \sigma_{ij}^{(surf)} & \text{при } z=0\ .\end{cases} \tag{8}
$$

Расчет напряженного состояния $\sigma_{ij}^{(\tau)}$, вызванного действием силы трения, которая моделируется распределением касательных усилий $q(x, y)$, также выполняется численными методами с использованием функций влияния $G_{ij}^{(C)}$ из решения задачи Черрути $\sigma_{ij}^{(C)}$ для действия сосредоточенной касательной силы на полупространство [6,7]:

$$
\sigma_{ij}^{(\tau)}(x,y,z)=\iint\limits_{S(\xi,\eta)}q(\xi,\eta)G_{ij}^{(C)}(\xi-x,\eta-y,z)d\xi d\eta\ .\ \text{где}\ \ q(\xi,\eta)=q_0\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}\ . \tag{9}
$$

Решение задачи о действии сосредоточенной касательной силы Q_x (направленной вдоль оси x) на поверхность полупространства, имеет следующий явный вид [3,4]:

$$
\sigma_{xx}^{(C)}=\frac{Q_x}{2\pi}\left\{-\frac{3x^3}{\rho^5}+(1-2\nu)\left[\frac{x}{\rho^3}-\frac{3x}{\rho(\rho+z)^2}+\frac{x^3}{\rho^3(\rho+z)^2}+\frac{2x^3}{\rho^2(\rho+z)^3}\right]\right\},
$$

$$
\sigma_{yy}^{(C)}=\frac{Q_x}{2\pi}\left\{-\frac{3xy^2}{\rho^5}+(1-2\nu)\left[\frac{x}{\rho^3}-\frac{x}{\rho(\rho+z)^2}+\frac{xy^2}{\rho^3(\rho+z)^2}+\frac{2xy^2}{\rho^2(\rho+z)^3}\right]\right\},\ \ \sigma_{zz}^{(C)}=-\frac{3Q_x}{2\pi}\frac{xz^2}{\rho^5}\ ,
$$

$$
\sigma_{xy}^{(C)}=\frac{Q_x}{2\pi}\left\{-\frac{3x^2y}{\rho^5}+(1-2\nu)\left[-\frac{y}{\rho(\rho+z)^2}+\frac{x^2y}{\rho^3(\rho+z)^2}+\frac{2x^2y}{\rho^2(\rho+z)^3}\right]\right\}, \tag{10}
$$

$$
\sigma_{xz}^{(C)}=-\frac{3Q_x}{2\pi}\frac{x^2z}{\rho^5}\ ,\sigma_{yz}^{(C)}=-\frac{3Q_x}{2\pi}\frac{xyz}{\rho^5}\ ,
$$

где $r^2=x^2+y^2$, $\rho^2=x^2+y^2+z^2$.

Формула (3) с учетом (8) примет вид

$$
\sigma_{ij}=\left[\sigma_{ij}^{(hs)}\underset{z}{\vee}\sigma_{ij}^{(surf)}\right]+\sigma_{ij}^{(\tau)} \tag{11}
$$

На рис. 3 и 4 в соответствии с (11) представлены распределения нормальных и касательных напряжений, отнесенных к p_0, при действии эллиптически распределенных нормальных $p(x,y)=p_0\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}$ и касательных $q(x,y)=fp_0(x,y)$ контактных усилий (коэффициент трения f = 0,5, b / a = 0,5). Из рисунков видно значительное отличие распределений $\sigma_{xx}^{(n)}+\sigma_{xx}^{(\tau)}$ и $\sigma_{xz}^{(n)}+\sigma_{xz}^{(\tau)}$ от распределений $\sigma_{xx}^{(n)}$ и $\sigma_{xz}^{(n)}$ за счет действия силы трения, вызывающей появление знакопеременных напряжений $\sigma_{xx}^{(\tau)}$ и $\sigma_{xz}^{(\tau)}$.

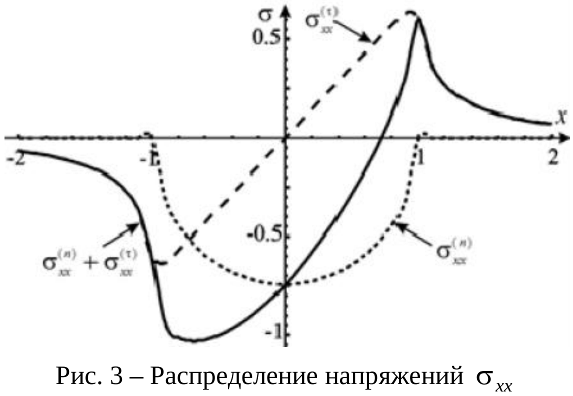


Рис. 3 – Распределение напряжений σ_{xx} на поверхности контакта при z=0, y=0

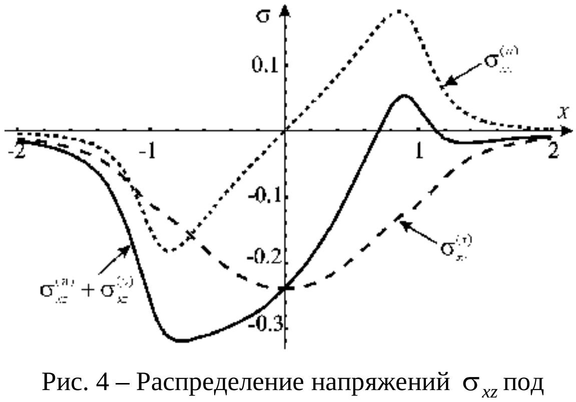


Рис. 4 – Распределение напряжений σ_{xz} под поверхностью контакта при z=-0,3a , y=0

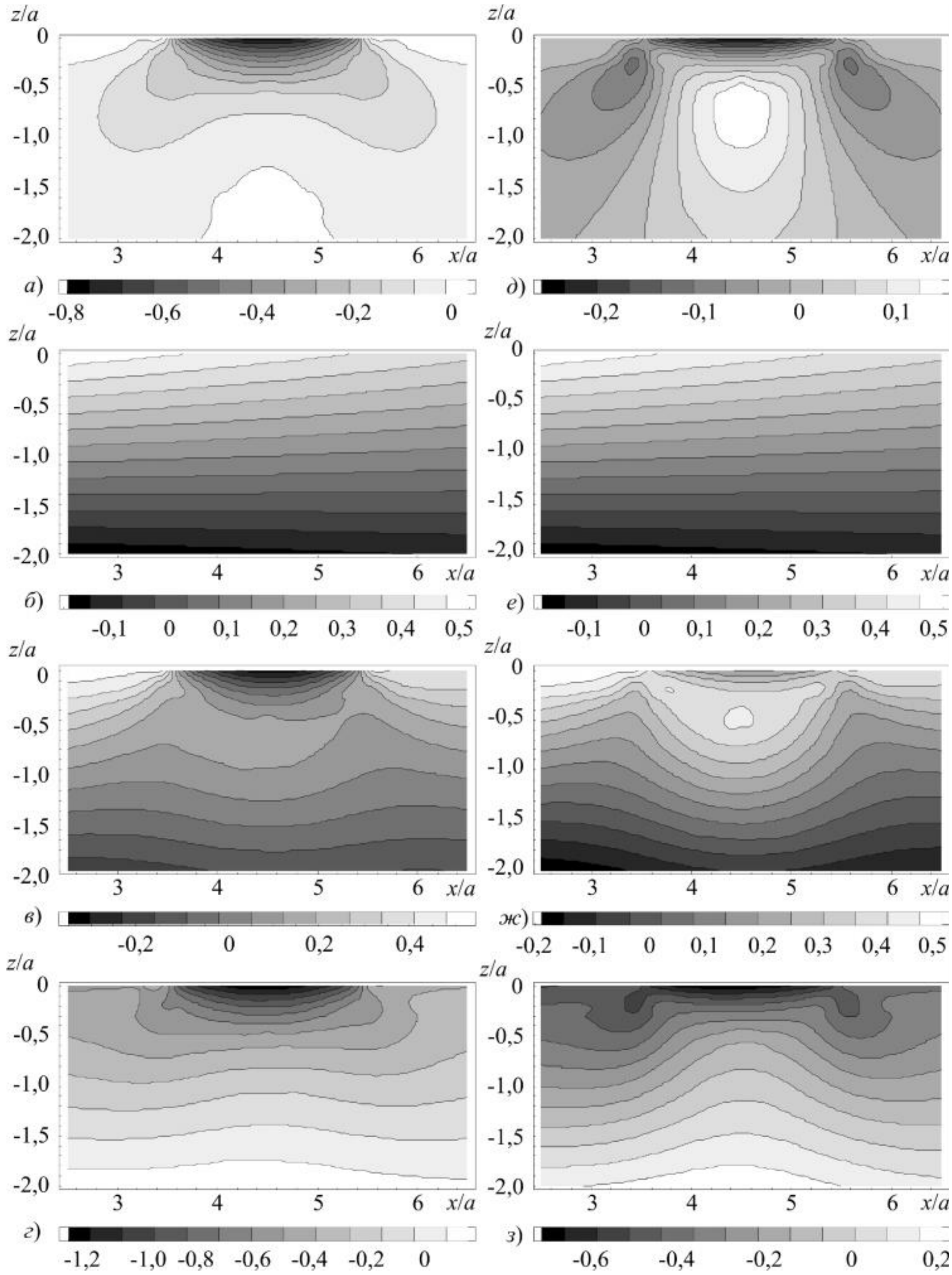


Рис. 5 – Распределения напряжений $\sigma_{xx}^{(n)}$ (а), $\sigma_{xx}^{(b)}$ (б), $\sigma_{xx}^{(n)}$ + $\sigma_{xx}^{(b)}$ $(F_b > 0)$ (в), $\sigma_{xx}^{(n)}$ – $\sigma_{xx}^{(b)}$ $(F_b < 0)$ (г), отнесенных к p_0, и деформаций $\varepsilon_{xx}^{(n)}$ (д), $\varepsilon_{xx}^{(b)}$ (е), $\varepsilon_{xx}^{(n)}$ + $\varepsilon_{xx}^{(b)}$ $(F_b > 0)$ (ж), $\varepsilon_{xx}^{(n)}$ – $\varepsilon_{xx}^{(b)}$ $(F_b < 0)$ (з), отнесенных к p_0 / E (E – модуль упругости), в окрестности контакта в плоскости y = 0 при a / b = 0,5

Объединенное напряженное состояние с учетом неконтактного изгиба. Напряженное состояние, вызванное действием силы F_b в плоскости y=0 (рис. 2) определяется в соответствии с известными соотношениями [8, 9]:

$$\sigma_{xx}^{(b)} = \frac{F_b(12r - x)z}{4(1+\nu)J}, \ \sigma_{xz}^{(b)} = \frac{(3+2\nu)F_b}{8(1+\nu)J}\left(r^2 - z^2\right), \ \sigma_{xx}^{(b)} = \sigma_{zz}^{(b)} = \sigma_{xz}^{(b)} = \sigma_{xy}^{(b)} = 0 \qquad (12)$$

где $J = \dfrac{\pi R_2^4}{64}$, $F_b = 0.4\, p_0 \dfrac{4(1+\nu)J}{12r^2}$.

Объединенное напряженное состояние, определяемое выражением с учетом (8) и (12), имеет вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[\sigma_{ij}^{(hs)} \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(surf)}\right] + \sigma_{ij}^{(\tau)} + \sigma_{ij}^{(b)} = \left[\iint\limits_{S(\xi,\eta)} p(\xi,\eta)\sigma_{ij}^{(B)}(\xi - x, \eta - y, z)\, d\xi d\eta \underset{z}{\vee} \sigma_{ij}^{(S)}(x,y)\right] +$$

$$+ \iint\limits_{S(\xi,\eta)} q(\xi,\eta)\sigma_{ij}^{(C)}(\xi - x, \eta - y, z)\, d\xi d\eta + \sigma_{ij}^{(M)}(x,y,z) + \sigma_{ij}^{(N)}(x,y,z) + \sigma_{ij}^{(Q)}(x,y,z). \quad (13)$$

Поскольку (13) строится как суперпозиция компонент $(\sigma_{ij}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(\tau)}, \sigma_{ij}^{(b)})$ напряжения, то имеется возможность анализа как общего, так и любого из частных случаев.

Рассмотрим, например, объединенное напряженное состояние вида

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(b)}. \quad (14)$$

Типичные примеры изменения поля локальных напряжений (деформаций), когда на него накладывается поле напряжений (деформаций), обусловленных объемным деформированием, представлены на рис. 5.

Из рис. 5 в видно, что хотя при F_b <0 на верхней поверхности цилиндра напряжения $\sigma_{xx}^{(b)}$ >0, однако в результате действия контактных сжимающих напряжений $\sigma_{xx}^{(n)}$ объединенные напряжения $\sigma_{xx}^{(n)} < \sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{xx}^{(b)}$ <0. Таким образом, с одной стороны опасные – приводящие к образованию магистральной трещины – растягивающие напряжения $\sigma_{xx}^{(b)}$ компенсируются сжимающими $\sigma_{xx}^{(n)}$.

Из рис.5 в видно, что при F_b >0 суперпозиция напряжений $\sigma_{xx}^{(b)}$ <0 и $\sigma_{xx}^{(n)}$ <0 приводит к увеличению сжимающих напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sosnovskiy L.A. Tribo-Fatigue. Wear-fatigue damage and its prediction (Foundations of engineering mechanics). Springer, 2004. 424 pp.
2. Сосновский Л.А. Механика износоусталостного повреждения. Гомель: БелГУТ, 2007. 434 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
4. Bhusan B. Modern Tribology Handbook. CRC Press, 2000. 765 pp.
5. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478с.
6. Журавков М.А., Щербаков С.С. Исследование сопряженного напряженного состояния в условиях контактного нагружения и объемного деформирования.// Вести НАНБ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 60–64.
7. Щербаков С.С. Трехмерное напряженно-деформированное состояние силовой системы диск-цилиндр в условиях контактного нагружения и объемного деформирования. //Тез. Докл. X Белорусской мат. конф. Ч.2. Минск: 2008. С. 152.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
9. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

Сведения об авторах:

Сосновский Леонид Адамович,
Доктор техн. наук, профессор, директор НПО «ТРИБОФАТИКА», (375 233) 77 44 55
E-mail sosnovskiy@tribo-fatigue.com

Щербаков Сергей Сергеевич,
Канд.физ.-мат .наук, доцент, Белорусский государственный университет (375 29) 761 55 84
E-mail sherbakovss@mail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВСТРЕЧИ НЕСКОЛЬКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Степанян А.А.

Рассматривается задача встречи нескольких линейных динамических объектов при нефиксированном конечном положении. Построены оптимальные управления и движения объектов при управлении с минимальной силой и управлении с минимальной энергией.

1. Задачи встреч нескольких динамических объектов встречаются при управлении движением механических систем. В качестве модели динамики систем взята линеаризированное уравнение материальных тел в гравитационном поле другого объекта [1].

Рассмотрим k управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1^{(i)} = x_2^{(i)} \qquad \dot{x}_2^{(i)} = -x_1^{(i)} + x_3^{(i)} \qquad \dot{x}_3^{(i)} = u_i\,, \tag{1.1}$$

где $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\right)^T$ – фазовый вектор, а $u_i \in P_i$ – управляющее воздействие i-го объекта $(i = 1,...,k)$. Здесь и далее T наверху означает транспонирование.

Пусть заданы начальные состояния объектов

$$x^{(i)}(0) = \left(x_1^{(i)}(0),\ \ x_2^{(i)}(0), x_3^{(i)}(0)\right)^T \quad (i = 1,...,k) \tag{1.2}$$

На интервале времени $[0,T]$ затраты на управление каждого объекта определяются некоторой величиной $\Im_i\left[u_i(t)\right]$, а затраты системы

$$\Im = \sum_{i=1}^{k}\left|\Im_i\left[u_i(t)\right] - \Im_i^{(0)}\right|, \tag{1.3}$$

где

$$\Im_i^{(0)} = \min_{u_i \in P_i} \Im_i\left[u_i(t)\right].$$

Каждый объект стремится к встрече с остальными в момент времени T, определяемый конечным положением

$$x(T,\alpha,\beta,\gamma) = \left(x_1(T,\alpha,\beta,\gamma), x_2(T,\alpha,\beta,\gamma), x_3(,\alpha,\beta,\gamma)\right)^T \quad (i = 1,...,k). \tag{1.4}$$

Здесь α,β,γ – параметры, описывающие конечное состояние встречи, предстоящие определению. Рассмотрим случай, когда конечное состояние систем зависит от параметров α,β,γ линейно:

$$x(2\pi,\alpha,\beta,\gamma) = A_1 \cdot (\alpha,\ \ \beta,\ \ \gamma)^T + A_2\,, \tag{1.5}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}$.

В рассматриваемой задаче все стороны располагают одинаковой информацией о состояниях всех объектов и у них есть возможность совместно выбрать управления.

Задача. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u_i^{(0)}(t)\ \ t \in [0,T]\ \ (i = 1,...,k)$ и значения параметров α,β,γ, переводящие объекты (1.1) из начальных фазовых состояний (1.2) в конечное положение (1.4) так, чтобы функционал (1.3) имел наименьшее значение, если затраты на управление i-го игрока определяются соотношениями:

1) $$\Im_i\left[u_i(t)\right] = \max_{0 \le t \le T}\left|u_i(t)\right|. \tag{1.6}$$

2) $$\Im_i\left[u_i(t)\right] = \left(\int_0^T \left(u_i(t)\right)^2 dt\right)^{1/2}. \tag{1.7}$$

2. Решение задачи в случае 1) (управление с минимальной силой), следуя [2], сводится к нахождению экстремальной функции

$$h_i^o(\tau) = b'(\tau) S(\tau, T) k^{(i)o},$$

где $b(\tau) = (0,0,1)^T$, $S[\tau, T]$ – фундаментальная матрица системы, сопряжённая с (1.1), а $k^{(i)o}$ находится из соотношений

$$\nu_0^{(i)} = \max_{k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}} \left(k_1^{(i)} c_1^{(i)} + k_2^{(i)} c_2^{(i)} + k_3^{(i)} c_3^{(i)} \right) \tag{2.1}$$

при условии

$$\int_0^T \left| b(\tau)^T S(\tau, T) k^{(i)} \right| d\tau = \int_0^T \left| k_1^{(i)} (1 - \cos(T - \tau) + k_2^{(i)} \sin(T - \tau) + k_3^{(i)} \right| d\tau = 1. \tag{2.2}$$

Здесь

$$c_1^{(i)} = x_1(T, \alpha, \beta, \gamma) + \left(x_3^{(i)}(0) - x_1^{(i)}(0) \right) \cos T - x_2^{(i)}(0) \sin T - x_3^{(i)}(0),$$

$$c_2^{(i)} = x_2(T, \alpha, \beta, \gamma) - \left(x_3^{(i)}(0) - x_1^{(i)}(0) \right) \sin T - x_2^{(i)}(0) \cos T,$$

$$c_3^{(i)} = x_3(T, \alpha, \beta, \gamma) - x_3^{(i)}(0).$$

Пусть $T = 2\pi$. Тогда

$$c_j^{(i)} = x_j(T, \alpha, \beta, \gamma) - x_j^{(i)}(0) \quad j = 1, 2, 3$$

Введем следующие обозначения:

$$p_1^{(i)} = -k_1^{(i)}, \quad p_2^{(i)} = -k_2^{(i)}, \quad p_3^{(i)} = k_1^{(i)} + k_3^{(i)}, \quad \overline{c}_1^{(i)} = c_3^{(i)} - c_1^{(i)}, \quad \overline{c}_2^{(i)} = -c_2^{(i)}, \quad \overline{c}_3^{(i)} = c_3^{(i)}$$

Тогда задача нахождения $\nu_0^{(i)}$ (2.1) при условии (2.2) преобразуется в задачу нахождения

$$\nu_0^{(i)} = \max_{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}} \left(p_1^{(i)} \overline{c}_1^{(i)} + p_2^{(i)} \overline{c}_2^{(i)} + p_3^{(i)} \overline{c}_3^{(i)} \right) \tag{2.3}$$

при условии

$$\Psi\left(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)} \right) = \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{p_1^{(i)2} + p_2^{(i)2}} \sin(\tau + \xi) + p_3^{(i)} \right| d\tau = 1, \tag{2.4}$$

где $\operatorname{tg}\xi = p_1^{(i)} \big/ p_2^{(i)}$, а управляющее воздействие i-го объекта находится из соотношений

$$u_i(t) = \nu_0^{(i)} \operatorname{sgn} h^{(i)} = \nu_0^{(i)} \operatorname{sgn}\left(p_1^{(i)} \cos t + p_2^{(i)} \sin t + p_3^{(i)} \right) \tag{2.5}$$

(2.4) представим в следующем виде:

$$\Psi\left(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)} \right) =$$

$$= \begin{cases} 4\sqrt{p_1^{(i)2} + p_2^{(i)2} - p_3^{(i)2}} + 4 p_3^{(i)} \arcsin \dfrac{p_3^{(i)}}{\sqrt{p_1^{(i)2} + p_2^{(i)2}}} & \text{при } \left| p_3^{(i)} \right| \le \sqrt{p_1^{(i)2} + p_2^{(i)2}} \\ 2\pi \left| p_3^{(i)} \right| & \text{при } \left| p_3^{(i)} \right| > \sqrt{p_1^{(i)2} + p_2^{(i)2}} \end{cases} = 1 \tag{2.6}$$

Задача (2.3), (2.6) геометрически представляет собой нахождение наибольшего значения $\nu_0^{(i)}$, для которой плоскость

$$\nu_0^{(i)} = p_1 \overline{c}_1^{(i)} + p_2 \overline{c}_2^{(i)} + p_1 \overline{c}_3^{(i)} \tag{2.7}$$

с нормалью $\left\{ \overline{c}_1^{(i)}, \overline{c}_2^{(i)}, \overline{c}_3^{(i)} \right\}$ имеет общую точку с поверхностью (2.6). Поверхность (2.6) представляет собой поверхность вращения. Очевидно, что наибольшее значение $\nu_0^{(i)}$ будет достигнуто, когда плоскость (2.7) будет касаться поверхности. Рассмотрим следующие случаи:

I) $\overline{c}_1^{(i)} = 0, \ \overline{c}_2^{(i)} = 0, \ \overline{c}_3^{(i)} = 0$. Тогда, очевидно, $\Im_i^0 = 0$

II) $\overline{c}_1^{(i)}=0,\ \overline{c}_2^{(i)}=0,\ \overline{c}_3^{(i)}\neq 0$. Тогда плоскость касается с (2.6) по кругу $\left\{p_1^{(i)2}+p_2^{(i)2}\le\frac{1}{4\pi^2};\, p_3^{(i)}=\frac{1}{2\pi}\operatorname{sgn}\overline{c}_3^{(i)}\right\}$. Следовательно, решение задачи представляет любой вектор $\left(p_1^{(i)},p_2^{(i)},\frac{1}{2\pi}\operatorname{sgn}\overline{c}_3^{(i)}\right)^T$, где $p_1^{(i)2}+p_2^{(i)2}\le\frac{1}{4\pi^2}$. Отсюда находим $\nu_0^{(i)}=\frac{\left|\overline{c}_3^{(i)}\right|}{2\pi}$, $u^{(i)}=\frac{1}{2\pi}\overline{c}_3^{(i)}$, а значение функционала (1.6) будет $\Im_i=\frac{\left|\overline{c}_3^{(i)}\right|}{2\pi}>0$.

III) Пусть теперь $\overline{c}_1^{(i)},\ \overline{c}_2^{(i)}$ не равны нулю одновременно. Введём следующие обозначения:

$$\overline{c}_1^{(i)}=r_i\cos\tau_i\cos\phi_i\quad \overline{c}_2^{(i)}=r_i\cos\tau_i\sin\phi_i\quad \overline{c}_3^{(i)}=r_i\sin\tau_i$$

$$p_1^{(i)}=R_i\cos\theta_i\cos\varphi_i\quad p_2^{(i)}=R_i\cos\theta_i\sin\varphi_i\quad p_3^{(i)}=R_i\sin\theta_i$$

Тогда получим уравнение поверхности (2.6)

$$R_i=\frac{1}{4\left(\sqrt{\cos 2\theta_i}+\sin\theta_i\ \arcsin\left(\operatorname{tg}\theta_i\right)\right)}\qquad -\frac{\pi}{4}\le\theta_i\le\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, нужно найти точку $\left(R_i,\theta_i,\varphi_i\right)^T$ $\left(\left(p_1^{(i)},p_2^{(i)},p_3^{(i)}\right)^T\right)$, где $\operatorname{grad}\Psi=\mu\ \overline{c}^{(i)}$. Отсюда вытекает

$$\phi_i=\varphi_i\qquad \cos\tau_i\cos\theta_i\arcsin\operatorname{tg}\theta_i-\sin\tau_i\sqrt{\cos 2\theta_i}=0 \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) является трансцендентным. Обозначим через $\theta_i^0=\theta_i^0\left(\tau_i\right)$ его решение. Тогда

$$\nu_0^{(i)}=r_iR_i\cos\left(\theta_i-\tau_i\right)=\frac{r_i\cos\left(\theta_i^0-\tau_i\right)}{4\left(\sqrt{\cos 2\theta_i^0}+\sin\left(\theta_i^0\right)\arcsin\operatorname{tg}\left(\theta_i^0\right)\right)} \tag{2.9}$$

Учитывая (2.5), из (1.6) находим $\Im_i^{(0)}=\min\limits_{r_i,\tau_i,\phi_i}\left|\nu_0^{(i)}\right|>0$. Следовательно, из (1.3)

$$\Im\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=\sum_{i=1}^{k}\left|\Im_i\left(\alpha,\beta,\gamma\right)-\Im_i^{(0)}\right|=\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{r_i\cos\left(\theta_0-\tau_i\right)}{4\left(\sqrt{\cos 2\theta_0}+\sin\left(\theta_0\right)\arcsin\operatorname{tg}\left(\theta_0\right)\right)}\right|,$$

а

$$\Im_0\left(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0\right)=\min_{\alpha,\beta,\gamma}\Im\left(\alpha,\beta,\gamma\right).$$

Учитывая (1.5), получим

$$\begin{pmatrix}c_1^{(i)}\\c_2^{(i)}\\c_3^{(i)}\end{pmatrix}=A_1\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}+A_2-x^{(i)}\left(0\right),\ \text{или}\ \begin{pmatrix}\overline{c}_1^{(i)}\\\overline{c}_2^{(i)}\\\overline{c}_3^{(i)}\end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix}c_1^{(i)}\\c_2^{(i)}\\c_3^{(i)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\alpha}\\\overline{\beta}\\\overline{\gamma}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}d_1^{(i)}\\d_2^{(i)}\\d_3^{(i)}\end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix}\overline{\alpha}\\\overline{\beta}\\\overline{\gamma}\end{pmatrix}=B\cdot\left(A_1\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}+A_2\right)$, а $d^{(i)}=B\cdot x^{(i)}\left(0\right)$. Здесь $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Параметры $\overline{\alpha}_0,\overline{\beta}_0,\overline{\gamma}_0$ вычисляются минимизируя $\Im\left(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}\right)$.

Рассмотрим поставленную задачу для трех объектов ($k=3$) и пусть $x^{(1)}\left(0\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$,

$$x^{(2)}(0)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ x^{(3)}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\text{ а }\ A_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Для вычисления минимума $\Im(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma})$, решая уравнение (2.8), получим оптимальные значения параметров и конечное состояние систем (числа округлены):

$$\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_0\\\bar{\beta}_0\\\bar{\gamma}_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.208\\0.272\\1.057\end{pmatrix},\ \text{или}\ \begin{pmatrix}\alpha_0\\\beta_0\\\gamma_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.091\\1.06\\0.149\end{pmatrix},\ \text{а}\ \ x(2\pi)=\begin{pmatrix}-0.151\\-0.272\\1.057\end{pmatrix}\tag{2.10}$$

Подставля (2.10) в (2.9), получим значения функционалов

$$\Im_1^{(0)}=0.282,\qquad \Im_2^{(0)}=0.21,\qquad \Im_3^{(0)}=0.797,\qquad \Im_0=1.289.$$

Управляющие воздействия сторон примут следующий вид:

$$u_1^0(t)=0.282105\ \mathrm{sgn}\left(0.0533446\cos t-0.186253\sin t-0.14367\right)$$

$$u_2^0(t)=0.209753\ \mathrm{sgn}\left(-0.235861\cos t+0.0811118\sin t+0.0170316\right)$$

$$u_3^0(t)=0.797378\ \mathrm{sgn}\left(0.182516\cos t+0.105142\sin t+0.126639\right)$$

Управляющие воздействия будут кусочно-постоянные и будут иметь два момента переключения.

Движения объектов примут следующий вид:

$$x^{(1)}(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}2-0.282\,t-\cos t-0.718\sin t\\-0.282-0.718\cos t+\sin t\\2-0.282\,t\end{pmatrix} & 0\le t<4.256\\[2ex]\begin{pmatrix}-0.401+0.282\,t-1.506\cos t-0.469\sin t\\0.282-0.469\cos t+1.506\sin t\\-0.401+0.282\,t\end{pmatrix} & 4.256\le t<5.727\\[2ex]\begin{pmatrix}2.83-0.282\,t-1.208\cos t+0.01\sin t\\-0.282+0.01\cos t+1.208\sin t\\2.83-0.283\,t\end{pmatrix} & 5.727\le t\le 6.283\end{cases}$$

$$x^{(2)}(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1-0.21t-2\cos t+0.21\sin t\\-0.21+0.21\cos t+2\sin t\\1-0.21t\end{pmatrix} & 0\le t<1.171\\[2ex]\begin{pmatrix}0.509+0.21t-1.614\cos t+0.047\sin t\\0.21+0.047\cos t+1.614\sin t\\0.509+0.21t\end{pmatrix} & 1.171\le t<4.449\\[2ex]\begin{pmatrix}2.375-0.21t-1.208\cos t-0.062\sin t\\-0.21-0.062\cos t+1.208\sin t\\2.375-0.21\,t\end{pmatrix} & 4.449\le t\le 6.283\end{cases}$$

$$x^{(3)}(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-1+0.797\,t+\cos t+0.203\sin t\\ 0.797+0.203\cos t-\sin t\\ -1+0.797\,t\end{pmatrix} & 0\le t< 2.738\\ \begin{pmatrix}3.367-0.797\,t+0.374\cos t-1.264\sin t\\ -0.797-1.264\cos t-0.374\sin t\\ 3.367-0.797t\end{pmatrix} & 2.738\le t< 4.59\\ \begin{pmatrix}-3.953+0.797\,t-1.208\cos t-1.07\sin t\\ 0.797-1.07\cos t+1.208\sin t\\ -3.953+0.797\,t\end{pmatrix} & 4.59\le t\le 6.283\end{cases}$$

3. При решении задачи в случае 2) (управление с минимальной энергией), функционал (1.3) принимает следующий вид :

$$\Im(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\Delta^{(i)}}\,,$$

где $\Delta^{(i)}=2\left(c_1^{(i)}\right)^2+2\left(c_2^{(i)}\right)^2-4c_1^{(i)}c_3^{(i)}+3\left(c_3^{(i)}\right)^2$. При тех же начальных условиях получаем

$\Im_0 = 2.69559$ при $\alpha_0=-0.0457814$, $\beta_0=1.00392$, $\gamma_0=0.187365$

Конечное состояние систем, следовательно, будет

$$x(2\pi)=(\ -0.151108,\ \ -0.272213,\ \ 1.05734)^T.$$

Управляющие воздействия сторон получаются:

$$u_1^0(t)=0.0608869\cos t-0.230771\sin t-0.136621$$

$$u_2^0(t)=-0.257423\cos t+0.0875384\sin t+0.0225337$$

$$u_3^0(t)=0.697507\cos t+0.405848\sin t+0.340844$$

а движения объектов:

$$x^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}1.769-0.137\,t-(0.769+0.0304\,t)\cos t-(0.833-0.115\,t)\sin t\\ -0.137+(-0.863+0.115\,t)\cos t+(0.885+0.03\,t)\sin t\\ 1.769-0.137\,t+0.231\cos t+0.06\sin t\end{pmatrix}$$

$$x^{(2)}(t)=\begin{pmatrix}1.088+0.023t-(2.088-0.129\,t)\cos t-(0.151+0.044\,t)\sin t\\ 0.023+(-0.023-0.044\,t)\cos t+(2.044-0.129\,t)\sin t\\ 1.088+0.023\,t-0.088\cos t-0.257\sin t\end{pmatrix}$$

$$x^{(3)}(t)=\begin{pmatrix}-0.594+0.341\,t+(0.594-0.349\,t)\cos t+(1.008-0.203\,t)\sin t\\ 0.341+(0.659-0.203t)\cos t+(-0.797+0.349\,t)\sin t\\ -0.594+0.341\,t-0.406\cos t+0.698\sin t\end{pmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Сведения об авторе:
Степанян Арег Ашотович – аспирант кафедры механики, ЕГУ, фак-т математики и механики, тел. (374 10) 394.648, (374 94) 922.712. E-mail Mexanikus2006@yahoo.com

К ЗАДАЧЕ ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Степанян С.П.

В работе решаются плоская задача и задача изгиба пластинки, составленной из двух различных ортотропных круглых слоев. При решении задачи изгиба применяется уточненная теория анизотропных пластин[3]. Принимается гипотеза об одном линейном распределении тангенциального перемещения для пакета в целом. Слои пластинки мысленно разделяются друг от друга и их взаимодействие представляется касательными и нормальными контактными напряжениями. Неизвестные коэффициенты, входящие в выражения этих напряжений, определяются из условий полного контакта слоев пластинки. В рассматриваемом случае считается, что на верхней лицевой поверхности пластинки действует равномерно распределенная нормальная нагрузка, а пластинка по всему нижнему контуру шарнирно оперта. Проводится сравнение полученных результатов с результатамии, соответствующими случаю, когда для радиальных перемещений принимаются две различные линейные законы по толщине слоев пластинки.

Изучается процесс сходимости вычислений в зависимости от степени многочленов выражений контактных напряжений. Выполняется анализ и делаются количественные и качественные заключения.

1. Рассмотрим круглую пластинку радиуса a, состоящую из двух различных цилиндрически ортотропных слоев, полюсы анизотропии материалов которых совпадают с их центрами. Обозначим через h и B_{ij} толщину и механические параметры материала верхнего слоя, а через H и B_{ij}^{H} – нижнего слоя. Для каждого слоя пластинки локальние системы цилиндрических координат $(r,\ ^{-},z)$ выберем так, чтобы горизонтальные координатные плоскости ro^{-} совпадали со срединными плоскостями слоев, а оси Oz направлены вертикально вниз. На верхней лицевой поверхности пластинки действует только равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности q, а нижняя лицевая поверхность свободна от нагрузок. Краевые условия произвольны. Нормальные и касательные напряжения, возникающие на поверхности контакта двух слоев, обозначим соответственно p и ². Переходим к безразмерным величинам:

$$
\begin{gathered}
r=a\rho,\ u=h\bar{u},\ u_r=h\bar{u}_r,\ w=h\bar{w},\ H=mh,\ q=B_{11}\bar{q},\ p=B_{11}\bar{p},\ \tau=B_{11}\bar{\tau},\\
B_{22}=k^2B_{11},\ B_{12}=\alpha_{12}B_{11},\ B_{11}=B_{55}\chi,\ N_r=B_{11}h\bar{N}_r,\ N_\theta=B_{11}h\bar{N}_\theta,\ M_r=B_{11}h^2\bar{M}_r,\\
M_\theta=B_{11}h^2\bar{M}_\theta,\ z=h\bar{z},\ a=hl,\ Z_1=B_{11}\bar{Z}_1,\ \bar{Z}_2=B_{11}\bar{Z}_2,\ R_1=B_{11}\bar{R}_1,\ R_2=B_{11}\bar{R}_2,\\
T_r=B_{11}h\bar{T}_r,\ T_\theta=B_{11}h\bar{T}_\theta,\ B_{ij}^{H}=\beta_{ij}B_{ij},\ m\beta_{11}=\beta,\ \beta_{22}k^2=\gamma^2\beta_{11}.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь u и u_r – радиальные перемещения точек срединной плоскости и произвольной точки, w – прогиб, N_r, N_θ и M_r, M_θ – поперечные усилия и изгибающие моменты слоев пластинки соответственно. Z_i и R_i имеют вид :

$$
Z_1=\frac{Z^+-Z^-}{2},\ Z_2=Z^++Z^-,\ R_1=\frac{R^+-R^-}{2},\ R_2=R^++R^-,
\tag{1.2}
$$

где $Z^{\pm}$ и $R^{\pm}$ – нормальные и радиальные компоненты интенсивности, поверхностных нагрузок соответственно, причем знак «+» относится к нижней, а знак «–» к верхней поверхности каждого слоя пластинки. Нормальные и касательные контактные напряжения представим в виде степенных многочленов n-го порядка, где неизвестные коэффициенты a_i и b_i

$$
\bar{p}=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\rho^i,\qquad \bar{\tau}=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot\rho^i,
\tag{1.3}
$$

должны определяться из условий полного контакта слоев.

2. Плоская задача для слоев пластинки.

Учитывая (1.1), (1.2) и (1.3), для верхнего слоя имеем:

$$
\bar{R}_2=-\bar{\tau}=-\sum_{i=1}^{n}b_i\rho^i,
\tag{2.1}
$$

а для нижнего слоя –

$$\bar{R}_2 = \bar{\tau} = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \rho^i . \tag{2.2}$$

Уравнение осесимметричной плоской задачи для верхнего слоя в усилиях имеет вид:

$$\frac{d\bar{T}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{T}_{r1} - \bar{T}_{\theta 1}}{\rho} = l \sum_{i=1}^{n} b_i \rho^i . \tag{2.3}$$

Это уравнение можно представить в виде:

$$\rho^2 \frac{d^2 \bar{u}_1}{d\rho^2} + \rho \frac{d\bar{u}_1}{d\rho} - k^2 \bar{u}_1 = l^2 \sum_{i=1}^{n} b_i \rho^{i+2} . \tag{2.4}$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное в центре пластинки $\rho = 0$, будет

$$\bar{u}_1 = C_1 \rho^k + l^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\left(i+2\right)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+2} . \tag{2.5}$$

Здесь C_1 – постоянная интегрирования, которая определяется из условия края $\rho = 1$.

Для безразмерных усилий получим:

$$\bar{T}_{r1} = \frac{1}{l}\left[\left(k + \alpha_{12}\right)\rho^{k-1} \cdot C_1 + l^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(i + 2 + \alpha_{12}\right) b_i}{\left(i+2\right)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+1} \right], \tag{2.6}$$

$$\bar{T}_{\theta 1} = \frac{1}{l}\left[k\left(k + \alpha_{12}\right)\rho^{k-1} \cdot C_1 + l^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(i \cdot \alpha_{12} + 2\alpha_{12} + k^2\right)}{\left(i+2\right)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+1} \right] . \tag{2.7}$$

Аналогичным образом, для нижнего слоя получим такие же формулы для $\bar{u}_2, \bar{T}_{r2}$ и $\bar{T}_{\theta 2}$.

3. Рассмотрим задачу изгиба пластинки:

а) задача изгиба верхнего слоя.

В рамках уточненной теории [3] примем допущение о едином линейном распределении тангенциальных перемещений по толщине для всего пакета в целом:

$$u_r = u + z\varphi \ , \ u_z = w . \tag{3.1}$$

Здесь φ – угол поворота нормального элемента пластинки в плоскости $r0z$.

Для верхнего слоя имеем:

$$\bar{Z}_2 = \bar{q} - a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \rho^i , \ \bar{R}_1 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \rho^i . \tag{3.2}$$

Уравнение задачи изгиба можно представить в виде:

$$\frac{d\bar{N}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{N}_{r1}}{\rho} = -l\bar{q} + la_0 + l\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \rho^i , \tag{3.3}$$

$$\frac{d\bar{M}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{M}_{r1} - \bar{M}_{\theta 1}}{\rho} = l\bar{N}_{r1} + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \rho^i . \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.3), ограниченное в центре пластинки $\rho = 0$, будет

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{\bar{q}l}{2}\rho + \frac{la_0\rho}{2} + l\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+2}\rho^{i+1} . \tag{3.5}$$

В рамках теории [3] с учетом (3.3), для $\bar{N}_{r1}$ имеем :

$$\bar{N}_{r1} = \frac{5}{6\chi}\left(\varphi + \frac{1}{l}\frac{d\bar{w}_1}{d\rho}\right) - \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \rho^i . \tag{3.6}$$

Следовательно, для φ получим:

$$\varphi = -\frac{1}{l}\frac{d\bar{w}_1}{d\rho} - \frac{3\chi q l \rho}{5(1 + m\beta_{55})} + \frac{\chi(1+m)}{10(1+m\beta_{55})}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \rho^i . \tag{3.7}$$

Безразмерные выражения для изгибающих моментов с учетом (3.7) примут вид:

$$\bar{M}_{r1} = -\frac{1}{12l^2}\left[\frac{d^2\bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{\alpha_{12}}{\rho}\cdot\frac{d\bar{w}_1}{d\rho} + \frac{3\chi\bar{q}l^2(1+\alpha_{12})}{5(1+m\beta_{55})} - \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})}\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot(i+\alpha_{12})\rho^{i-1}\right], \tag{3.8}$$

$$\bar{M}_{\theta 1} = -\frac{1}{12l^2}\left[\alpha_{12}\frac{d^2\bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{k^2}{\rho}\cdot\frac{d\bar{w}_1}{d\rho} + \frac{3\chi\bar{q}l^2(\alpha_{12}+k^2)}{5(1+m\beta_{55})} - \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})}\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot(i\cdot\alpha_{12}+k^2)\rho^{i-1}\right].$$

Подставляя эти выражения в (3.4), получим:

$$\rho^2\frac{d^3\bar{w}_1}{d\rho^3} + \rho\frac{d^2\bar{w}_1}{d\rho^2} - k^2\frac{d\bar{w}_1}{d\rho} = 6\bar{q}l^4\rho^3 - 12l^4\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i\cdot\rho^{i+3}}{i+2} - 6l^3\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot\rho^{i+2} -$$

$$-\frac{3\chi\bar{q}l^2(1-k^2)}{5(1+m\beta_{55})}\rho + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})}\sum_{i=1}^{n} b_i(i^2-k^2)\cdot\rho^i. \tag{3.9}$$

Общий интеграл уравнения (3.9) с ограниченной производной в центре пластинки $\rho = 0$ имеет вид:

$$\bar{w}_1 = C_2 + C_3\rho^{1+k} + \frac{3\bar{q}l^4\rho^4}{2(9-k^2)} - 12l^4\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i\cdot\rho^{i+4}}{(i+2)(i+4)((i+3)^2-k^2)} -$$

$$-6l^3\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\cdot\rho^{i+3}}{(i+3)((i+2)^2-k^2)} - \frac{3\chi\bar{q}l^2\rho^2}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\cdot\rho^{i+1}}{(i+1)}. \tag{3.10}$$

Здесь C_2 и C_3 – постоянные интегрирования.

С учетом (3.10) из (3.8), можно получить соответствующие выражения для изгибающих моментов, выраженных через a_i и b_i.

б) Задача изгиба нижнего слоя.

Так как для этого слоя

$$\bar{Z}_2 = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\rho^i,\quad \bar{R}_1 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot\rho^i, \tag{3.11}$$

а в рамках теории [3]

$$\bar{M}_{r2} = \frac{m^3}{12l}\left(\beta_{11}\frac{d\varphi}{d\rho} + \alpha_{12}\beta_{12}\frac{\varphi}{\rho}\right),\quad \bar{M}_{\vartheta 2} = \frac{m^3}{12l}\left(\alpha_{12}\beta_{11}\frac{d\varphi}{d\rho} + \beta_{11}\gamma^2\frac{\varphi}{\rho}\right), \tag{3.12}$$

с учетом (3.7) получим

$$\bar{w}_2 = B_2 + B_3\rho^{1+\gamma} - \frac{3\chi\bar{q}l^2\rho^2}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\cdot\rho^{i+1}}{(i+1)} +$$

$$+\frac{12l^4}{\beta m^2}\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i\cdot\rho^{i+4}}{(i+2)(i+4)((i+3)^2-\gamma^2)} - \frac{6l^3}{\beta m}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\cdot\rho^{i+3}}{(i+3)((i+2)^2-\gamma^2)} \tag{3.13}$$

Здесь B_2 и B_3 – постоянные интегрирования.

4. Рассмотрим случай, когда нижний слой по всему контуру $z = \frac{H}{2}$, $r = a$ оперт на подвижных шарнирных опорах. Верхний же слой по всей лицевой поверхности соединен с нижним слоем.

Краевые условия для верхнего слоя будут:

$$\bar{T}_{r1}\big|_{\rho=1} = \bar{w}_1\big|_{\rho=1} = \bar{M}_{r1}\big|_{\rho=1} = 0 \tag{4.1}$$

Для нижнего слоя имеем:

$$\bar{T}_{r2}\big|_{\rho=1} = \bar{w}_2\big|_{\rho=1} = \bar{M}_{r2}\big|_{\rho=1} = 0 \tag{4.2}$$

Удовлетворив этим условиям и подставив найденные значения постоянных интегрирования в сответствующие формулы, имеем:

$$\bar{u}_1 = l^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left(\rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right), \tag{4.3}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left(\frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^{\gamma} - \rho^{i+2} \right), \tag{4.4}$$

$$\bar{w}_1 = \frac{3\bar{q}l^2\chi(1-\rho^2)}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{6\bar{q}l^4(3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} - \frac{3\bar{q}l^4(1-\rho^4)}{2(9-k^2)} -$$

$$-12l^4 \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i \cdot \rho^{i+4}}{(i+2)((i+3)^2-k^2)} \left[\frac{i+3+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})}(1-\rho^{1+k}) - \frac{1-\rho^{i+4}}{i+4} \right] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i \left[\frac{6l^3}{((i+2)^2-k^2)} \left[\frac{i+2+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})}(1-\rho^{1+k}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \cdot \frac{1-\rho^{i+1}}{i+1} \right], \tag{4.5}$$

$$\bar{w}_2 = \frac{3\bar{q}l^2\chi(1-\rho^2)}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{12l^4}{\beta m^2} \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(i+2)((i+3)^2-\gamma^2)} \left[\frac{i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma+\alpha_{12}\beta_{12})}(1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i \left[\frac{6l^3}{\beta m((i+2)^2-\gamma^2)} \left[\frac{i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma+\alpha_{12}\beta_{12})}(1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] + \frac{\chi(1+m)l(1-\rho^{i+1})}{10(i+1)(1+m\beta_{55})} \right], \tag{4.6}$$

$$\varphi = \frac{6\bar{q}l^3}{(9-k^2)} \left(\frac{3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k - \rho^3 \right) + 12l^3 \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(i+2)((i+3)^2-k^2)} \left(\rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right) +$$

$$+6l^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{(i+2)^2-k^2} \left(\rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right). \tag{4.7}$$

Решение при $k = 3$, $\gamma = 3$ можно получить путем предельного перехода.

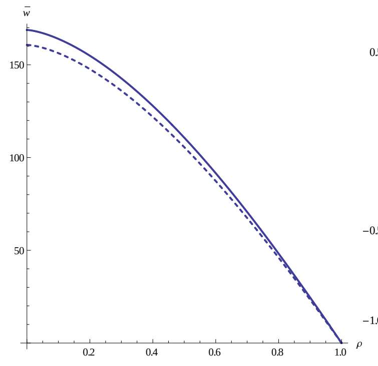
Поступая аналогично, можно получить решение задачи и в постановке $\varphi_1 \neq \varphi_2$, что ради краткости, не приводится.

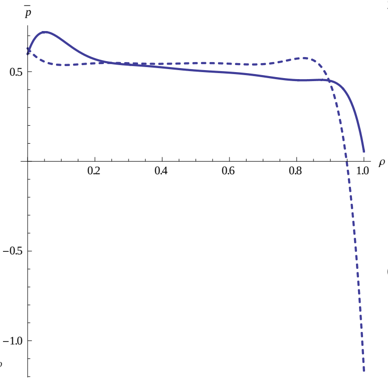
5. Для определения неизвестных коэффициентов a_i и b_i удовлетворим условиям полного контакта слоев пластинки, т.е. приравним прогибы и радиальные перемещения точек поверхностей $z_1 = \frac{h}{2}$, $z_2 = \frac{H}{2}$. Эти условия в безразмерной форме будут:

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2, \quad 2(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + (1+m)\varphi = 0. \tag{5.1}$$

С учетом выражений (4.3) - (4.7), из (5.1) для определения неизвестых коэффициентов a_i и b_i получим систему линейных алгебраических уравнений. После решения полученной системы, с помощью найденных значений a_i и b_i можно вычислить все расчетные величины. В рамках классической теории пластин $(\chi = 0)$ элементы, нормальные к срединной плоскости пластинки, после ее изгиба принимают положения, нормальные к срединной поверхности деформированной пластинки. В силу этого, при осесимметричном изгибе радиальные перемещения по толщине пластинки изменяются по закону $u_r = \frac{dw}{dr}, \left(\varphi = -\frac{dw}{dr} \right)$. Этот закон справедлив и для каждого слоя составной пластинки, т.к. нормали всех слоев в любой точке совпадают. В рамках же уточненной теории, когда учитывается влияние поперечных сдвигов $(\chi \neq 0)$, элементы, нормальные к срединной плоскости после изгиба перестают быть нормальными к срединной поверхности пластинки и составляют с ней некоторый угол φ. Значение этого угла обусловлено сдвиговыми свойствами материала. Очевидно, если материалы разных слоев составной пластинки обладают различными сдвиговыми свойствами, то различными будут и значения отмеченных углов. Следовательно, в случае пластинки, состоящей из двух различных ортотропных слоев, имеет место неравенства $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

На рис. 1–3 представлены графики изменения по радиусу безразмерных значений прогибов $\overline{w}$ и контактных напряжений $\overline{p}$, $\overline{\tau}$ двухслойной пластинки со следующими параметрами слоев: $m = 1, \chi = 10, \beta = 2, \beta_{11} = 2, \beta_{12} = 0.8, \beta_{55} = 0.5$, $\beta_{22} = 1, \alpha_{12} = 0.2, k = 0.5, \gamma = 0.5, l = 5$.





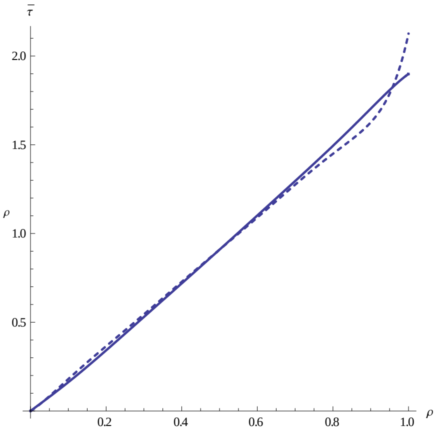


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Сплошными линиями показаны графики, соответствующие постановке $\varphi_1 \neq \varphi_2$, а пунктирными– допущению $\varphi_1 = \varphi_2$. Из этих графиков видно, что для рассмотренной пластинки прогибы и касательные контакные напряжения в обеих постановках отличаются незначительно. Что касается нормальных контактных напряжениий, то они отличаются существенно. Постановка $\varphi_1 \neq \varphi_2$ приводит только к сжимающему напряжению, значение которого с приближением к краю монотонно убывает и стремится к нулю. При постановке $\varphi_1 = \varphi_2$ это напряжение вблизи контура становится растягивающим и его значение неограниченно растет. Следовательно, при учете влияния поперечных сдвигов, как и следовало ожидать, корректнее постановка $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наукова.думка, 1981. 544 с.
3. Киракосян Р.М. К уточненной теории ортотропных пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. //Прикладная механика. 2008. Т.44. №4. С.107-119.
4. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига //Изв.НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №2. С.3–9.

Сведения об авторе:

Степанян Сейран Павлович – кандидат физ.-мат.наук, доцент. Кафедра числ.анализа и мат.моделирования факультета информ. и прикл.математики Ереванского госуниверситета. Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.:(+37410) 55-90-96;
E-mail: SEYRANSTEP@yahoo.com.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ТЕЛО ОДНОРОДНОЙ ПЛОТИНЫ ХВОСТОХРАНИЛИЩ ЖИДКИХ ОТХОДОВ

Токмаджян Л.В.

В данной работе рассматривается процесс неустановившейся фильтрации через однородную плотину, когда в нижнем бьефе существует сток определенной глубины, а глубина воды в верхнем бьефе колеблется по закону косинуса.

Хранилища-накопители жидких промышленных отходов предназначены для накопления (хранения, отстоя) и удаления осветленной воды поступающих в виде пульпы (вода с диспергированными в ней твердыми включениями) отходов производства металлургических, атомных и других предприятий. Наиболее распространенными видами хранилищ-накопителей являются шламонакопители и хранилища хвостов горнорудных обогатительных предприятий, шлакоотвалы тепловых электростанций, накопители промышленных и коммунальных стоков.

Накопители горно-обогатительных предприятий – хвостохранилища являются сложными гидротехническими сооружениями. Они призваны для обеспечения экологической безопасности окружающей среды горно-обогатительных предприятий и предотвращения негативных техногенных процессов. В свою очередь, сами хвостохранилища являются объектами повышенной опасности, авария которых может привести к многочисленным человеческим жертвам, разрушениям и сильному загрязнению прилагающих территорий.

Для проектирования хвостохранилищ состав гидрологических и инженерно-геологических изысканий приведены в [1, 2, 3]. При проектировании хвостохранилищ необходимо обеспечить достаточную емкость для укладки хвостов в течение заданного срока эксплуатации предприятия.

Решение вопросов накопления хвостов, согласно [4], обусловливает максимальное удовлетворение следующим требованиям:

- защита окружающей среды,
- максимальная экономичность работы гидротранспорта и гидроукладки хвостов,
- надежность, простота и удобство эксплуатации хвостохранилища.

Месторасположения хвостохранилища должно обеспечивать достаточную емкость для укладки хвостов в течении прогнозируемого срока эксплуатации предприятия. Согласно [4], рельеф земной поверхности необходимо использовать с таким расчетом, чтобы обеспечить наибольшие удобства и наименьшую стоимость эксплуатации систем гидротранспорта хвостов. Предлагается разместить фабрики и хвостохранилища таким образом, чтобы была обеспечена возможность безнапорного или напорно-самотечного гидротранспорта хвостов. С другой стороны, место расположения хвостохранилища должно обеспечить условия минимального загрязнения воздушного бассейна и грунтовых вод [4]. По нашему мнению, к загрязнению подлежат не только грунтовые, но и подземные воды, что, в свою очередь, приведет к загрязнению поверхностных вод и родников. Такое мнение высказывается и другими исследователями. Хвостохранилища во многих странах (в частности, в Российской Федерации) до сих пор относятся к объектам промышленной гидротехники и обычно классифицируются как сооружения 111 класса капитальности. Учитывая опыт эксплуатации хвостохранилищ в различных природных условиях, в [5] сделан однозначный вывод, что их воздействие на геологическую среду и биосферу оказывается весьма значительным.

Для анализа механизма загрязнения вод, важное значение имеет определения параметров фильтрации через тело плотины хвостохранилища жидких отходов. Рассмотрим общий случай однородной плотины, когда в нижнем бьефе существует сток с глубиной h_0. Допустим, глубина воды в верхнем бьефе колеблется по зависимости (рис.1):

$$h(\tau) = B_1 - B_2 \cos 2\pi\tau\,, \tag{1}$$

где

$$B_1 = \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2}\,, \quad B_2 = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2}\,, \quad \tau = \frac{t}{T}\,.$$

$h_{\max}$ – максимальная глубина воды в верхнем бьефе (можно принимать равной НПУ), $h_{\min}$ – минимальная глубина воды в верхнем бьефе, t – переменная времени, T – рассматриваемый промежуток времени.

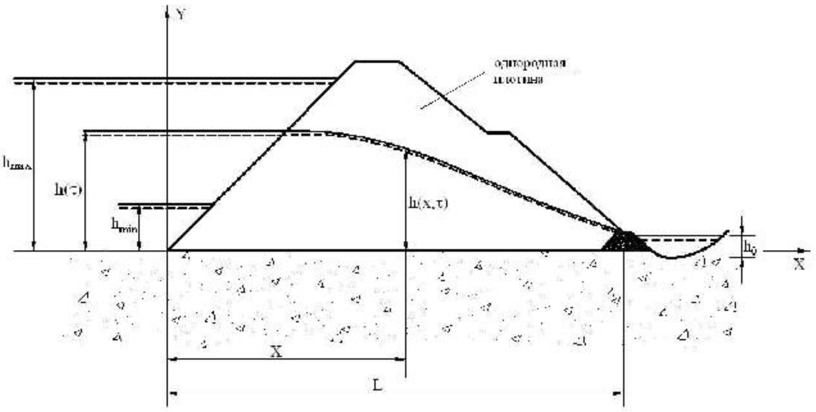


Рис.1 Расчетная схема фильтрации через тело однородной плотины хвостохранилища

Дифференциальное уравнение фильтрации в данном случае можно записать в виде [6]:

$$\frac{\partial h(x,\tau)}{\partial\tau}=aT\frac{\partial^2 h(x,\tau)}{\partial x^2}+\frac{\varepsilon T}{\mu} \quad (0<x<L, 0<\tau<1)\,, \qquad (2)$$

где $a=kh_s/\mu$. k – коэффициент фильтрации, h_s – средняя глубина стока, ε – инфильтрационное питание, μ – коэффициент гравитационной водоотдачи. В традиционных водохранилищах значение $h_{\min}$ принимается равным глубине мертвого объема, вследствие чего B_1 и B_2 являются постоянными величинами. Решение дифференциального уравнения (2) должно удовлетворять граничным и начальному условиям:

$$h(0,\tau)=h(\tau), h(L,\tau)=h_0, h(x,0)=g(x)\,, \qquad (3)$$

где $g(x)$ определяется из решения дифференциального уравнения стационарной фильтрации

$$a\frac{d^2 g(x)}{dx^2}+\frac{\varepsilon}{\mu}=0 \qquad (4)$$

при граничных условиях

$$g(0)=h_{\min}; h(L)=h_0\,. \qquad (5)$$

Решение уравнения (4) при условиях (5) имеет вид

$$g(x)=-\frac{\varepsilon x^2}{2a\mu}+\left(\frac{\varepsilon L}{2a\mu}+\frac{h_0-h_{\min}}{L}\right)x+h_{\min} \quad (0\le x\le L)\,. \qquad (6)$$

Далее везде перейдем к безразмерным величинам:

$$\bar{x}=\frac{x}{L}; \bar{h}(\bar{x},\tau)=h(\bar{x}L,\tau)/L; \bar{h}(\tau)=h(\tau)/L; \bar{g}(\bar{x})=g(\bar{x}L)/L; \bar{h}_0=h_0/h; \overline{h_+}=h_{\max}/L; \overline{h_-}=h_{\min}/L;$$

$$\bar{B}_1=B_1/L=(\overline{h_+}+\overline{h_-})/2; \overline{B_2}=B_2/L=(\overline{h_+}-\overline{h_-})/2; \bar{p}^2=aT/L^2; \bar{f}=\varepsilon T/\mu L; \left(0\le\bar{x}\le 1; 0\le\tau\le 1\right).$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial\bar{h}}{\partial\tau}=\bar{p}^2\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial\bar{x}^2}+\bar{f}, \qquad (0<\bar{x}<1; 0<\tau<1), \qquad (7)$$

а граничные и начальное условия (3) – к виду:

$$\bar{h}(0,\tau)=\bar{h}(\tau), \quad \bar{h}(1,\tau)=\bar{h}_0 \quad (0\le\tau\le 1); \qquad (8)$$

$$\bar{h}(\bar{x},0)=\bar{g}(\bar{x}) \quad (0\le\bar{x}<1). \qquad (9)$$

Здесь по (1) и (6)

$$\bar{\bar{f}}(\bar{x},\tau)=\bar{f}(\bar{x},\tau)-(U_\tau-\bar{p}^2U_{\bar{x}\bar{x}})=\bar{B}_1-\bar{B}_2\cos(2\pi\tau) \quad (0\le\tau\le 1); \qquad (10)$$

$$\bar{g}(\bar{x})=-\bar{\varepsilon}\,\bar{x}^2+(\bar{\varepsilon}+\bar{h}_0-\overline{h_-})\,\bar{x}+\overline{h_-} \qquad \bar{\varepsilon}=\varepsilon L/2a\mu; \quad (0\le\bar{x}\le 1). \qquad (11)$$

Чтобы построить решение дифференциального уравнения (7) при условиях (8)-(9), следуя [7], введем новую неизвестную функцию

$$v(\bar{x},\bar{\tau})=\bar{h}(\bar{x},\tau)-U(\bar{x},\tau), \tag{12}$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции $U(\bar{x},\bar{\tau})$. Эта функция будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\bar{p}^{-2}\frac{\partial^2 v}{\partial\bar{x}^2}+\bar{\bar{f}}(\bar{x},\tau) \tag{13}$$

и дополнительным условиям

$$v(\bar{x},0)=\bar{\bar{g}}(\bar{x})=\bar{g}(\bar{x})-U(\bar{x},0);\quad v(0,\tau)=\bar{\bar{h}}(\tau)=\bar{h}(\tau)-U(0,\tau);\quad v(1,\tau)=\bar{h}_0(\tau)=h_0-U(1,\tau); \tag{14}$$

где $$\bar{\bar{f}}(\bar{x},\tau)=\bar{f}(\bar{x},\tau)-(U_\tau-\bar{p}^{-2}U_{\bar{x}\bar{x}}). \tag{15}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(\bar{x},\tau)$ таким образом, чтобы

$$\bar{\bar{h}}(\tau)=0,\quad \bar{h}_0(\tau)=0.$$

Тогда из (14)

$$U(0,\tau)=\bar{h}(\tau),\quad U(1,\tau)=\bar{h}_0$$

и, следовательно,

$$U(\bar{x},\tau)=\bar{h}(\tau)+\bar{x}[\bar{h}_0-\bar{h}(\tau)]\quad (0\le\bar{x}\le1,\quad 0\le\tau\le1). \tag{16}$$

В результате, с учетом (13) придем к следующей задаче:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\tau}=\bar{p}^{-2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\bar{x}^2}+\bar{\bar{f}}(\bar{x},\tau) & (0<\bar{x}<1, 0<\tau<1);\\ v(\bar{x},0)=\bar{\bar{g}}(\bar{x})\quad (0\le\bar{x}\le1);\quad v(0,\tau)=0\quad v(1,\tau)=0 & (0\le\tau\le1).\end{cases} \tag{17}$$

Здесь при помощи (14) и (15)

$$\bar{\bar{f}}(\bar{x},\tau)=\bar{f}-(1-\bar{x})\bar{h}'(\tau)\quad (0\le\tau\le1); \tag{18}$$

$$\bar{\bar{g}}(\bar{x})=-\bar{\varepsilon}(\bar{x}^2-\bar{x})\qquad (0\le\bar{x}\le1). \tag{19}$$

Перейдя к решению задачи (17), ее решение представим в виде суммы двух функций:

$$v(\bar{x},\tau)=v_1(\bar{x},\tau)+v_2(\bar{x},\tau), \tag{20}$$

где функции $v_1(\bar{x},\tau)$ и $v_2(\bar{x},\tau)$ являются решениями, соответственно, следующих задач:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_1}{\partial\tau}=\bar{p}^{-2}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial\bar{x}^2} & (0<\bar{x}<1,\quad 0<\tau<1)\\ v_1(\bar{x},0)=\bar{\bar{g}}(x) & (0\le\bar{x}\le1);\\ v_1(0,\tau)=0,\quad v_1(1,\tau)=0 & (0\le\tau\le1);\end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_2}{\partial\tau}=\bar{p}^{-2}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial\bar{x}^2}+\bar{\bar{f}}(\bar{x},\tau) & (0<\bar{x}<1,\ 0<\tau<1)\\ v_2(\bar{x},0)=0 & (0\le\bar{x}\le1);\\ v_2(0,\tau)=0,\quad v_2(1,\tau)=0 & (0\le\tau\le1);\end{cases} \tag{22}$$

где функции $\bar{\bar{f}}(\bar{x},\tau)$ и $\bar{\bar{g}}(\bar{x})$ выражаются формулами (18) и (19).

Решение задачи (21) представим синус-рядом Фурье

$$v_1(\bar{x},\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\pi^2n^2\bar{p}^{-2}\tau}\sin(\pi n\bar{x})\quad (0\le\tau\le1,\quad 0\le\pi\le1),$$

коэффициенты C_n, в котором вследствие начального условия из (21) определяются по формуле

$$C_n = 2\int_0^1 \bar{\bar{g}}(\bar x)\sin(\pi n\bar x)d\bar x \qquad (\text{n}=1,2,...).$$

учитывая (19), легко вычислить. В результате,

$$v_1(\bar x,\tau) = \frac{8\bar\varepsilon}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[\pi(2n-1)\bar x]}{(2n-1)^3}e^{-\pi^2(2n-1)^2\bar p^{-2}\tau} \quad (0\le \bar x\le 1,\ 0\le\tau\le 1). \qquad (23)$$

Решение задачи (22) опять-таки представим синус-рядом Фурье:

$$v_2(\bar x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\tau)\sin(\pi n\bar x) \qquad (0\le \bar x\le 1,\quad 0\le\tau\le 1). \qquad (24)$$

Подставив (24) в дифференциальное уравнение из (22) и полагая

$$\bar{\bar f}(\bar x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)\sin(\pi n\bar x),$$

для определения коэффициентов $v_n(\tau)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dv_n}{d\tau} + \pi^2 n^2 \bar p^{-2} v_n = f_n(\tau) \qquad (0\le\tau\le 1) \qquad (\text{n}=1,2,\ldots) \qquad (25)$$

при условиях

$$v_n(0) = 0\,. \qquad (26)$$

Решение уравнения (25) при условиях (26) выражается формулой

$$v_n(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-\pi^2 n^2 \bar p^{-2}(\tau-\eta)} f_n(\eta)d\eta, \qquad (0\le\tau\le 1,\ \text{n}=1,2,\ldots) \qquad (27)$$

где по (18)

$$f_n(\tau) = -\frac{2}{\pi n}\left\{[(-1)^n-1]\bar f + \bar h'(\tau)\right\} \qquad (0\le\tau\le 1,\ \text{n}=1,2,\ldots). \qquad (28)$$

Далее произведя в (27) интегрированние с учетом (28), находим

$$v_2(\bar x,\tau) = \frac{4\bar f}{\pi^3\bar p^{-2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-\pi^2(2n-1)^2\bar p^{-2}\tau}}{(2n-1)^3}\sin[\pi(2n-1)\bar x] - \frac{8\bar B_2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n\bar x)}{n(4+\pi^2\bar p^{-2}n^4)}\{e^{-\pi^2 n^2\bar p^{-2}\tau} + \qquad (29)$$

$$+\frac{1}{2}[\pi\bar p^{-2}n^2\sin(2\pi\tau) - 2\cos(2\pi\tau)]\} \qquad (0\le\bar x\le 1,\ 0\le\tau\le 1).$$

В результате, решение исходного дифференциального уравнения (7) при условиях (8)-(9) с учетом (12), (16) и (20) будет даваться формулой

$$\bar h(\bar x,\tau) = (1-\bar x)\bar h(\tau) + \bar h_0(\bar x) + v_1(\bar x,\tau) + v_2(\bar x,\tau) \qquad (0\le\bar x\le 1,\quad 0\le\tau\le 1),$$

где функции $v_1(\bar x,\tau)$ и $v_2(\bar x,\tau)$ выражаются формулами (23) и (29).

Численная реализация формул (23), (29) и (30) осуществлена при следующих значениах параметров: $\bar h_+ = 0,8; \bar h_- = 0,2; \bar h_0 = 0,1; \bar p^2 = 0,2; \bar\varepsilon = 0,5; \bar f = 3$. Тогда

$$\bar h(\tau) = 0,5 - 0,3\cos(2\pi\tau) \ \ (0\le\tau\le 1),\ \bar B_1 = 0,5;\ \bar B_2 = 0,3.$$

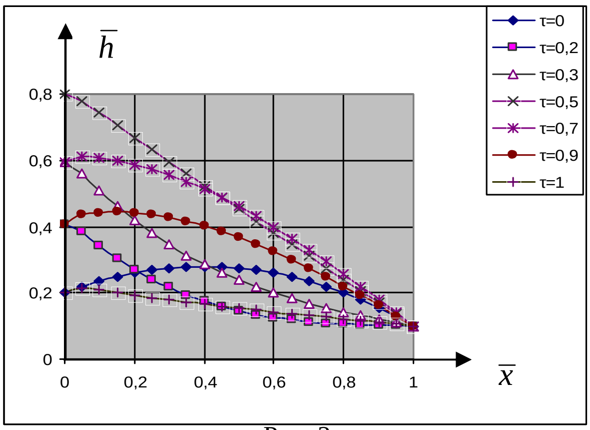


Рис. 2

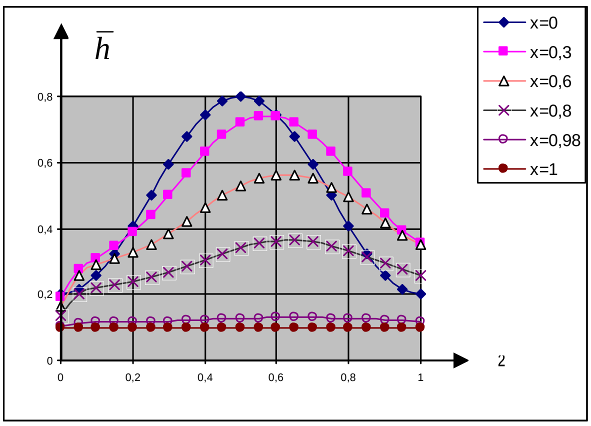


Рис. 3

На рис. 2 показан ход изменения безразмерного уровня (высоты) воды (жидких отходов) в плотине – хранилище при фиксированных моментах времени τ. Этот уровень уменьшается и по длине плотины и в течение времени. На рис. 3 показан ход изменения $\bar{h}(\bar{x},\tau)$ в течение времени в фиксированных сечениях плотины, а на рис. 4 построена поверхность $\bar{h}(\bar{x},\tau)$ в зависимости от $\bar{x}$ и τ. Эти графики наглядно иллюстрируют закономерности изменения $\bar{h}(\bar{x},\tau)$.

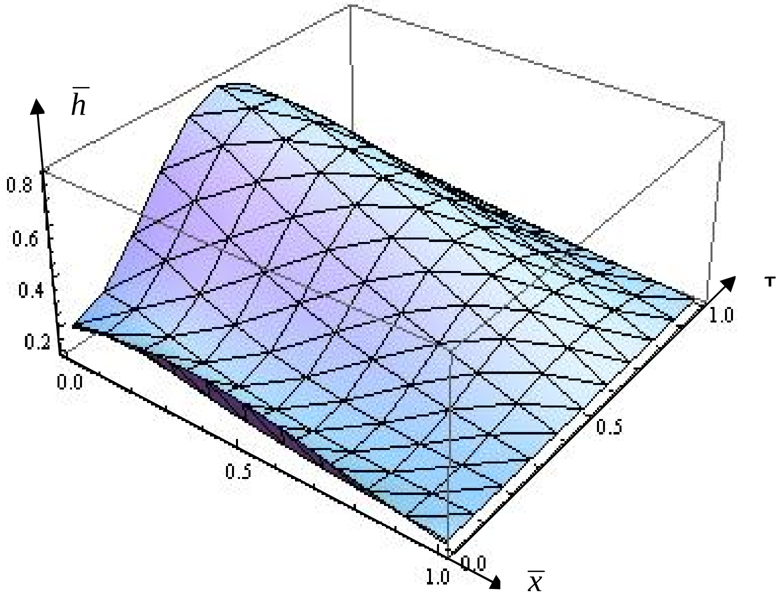


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидравлическое складирование хвостов обогащения. Справочник. /Киберев В.И., Райлян Г.А., Сазонов Г.Т. и др. М: Недра, 1991. 207с.
2. Евдокимов П.Д., Сазонов Г.Т. Проектирование и эксплуатация хвостовых хозяйств обогатительных фабрик. М.: Недра, 1978. 439с.
3. СНИП 2.06.05-84 - ”Плотины из грунтовых материалов”. М.: 1989. 31с.
4. Манукян Л.А. Безопасная эксплуатация хвостохранилищ горных предприятий Армении. Ереван: Изд. “Егея”. 2003. 347с.
5. Дашко Р.Э. Инженерно-геологические и геоэкологические аспекты безопасности эксплуатации сооружений промышленной гидротехники (Хвостохранилища обогатительных фабрик). С-П(б): Изв. ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева. Т.247 (Оценка состояния гидротехнических сооружений). 2007. С.19-28.
6. Нуриджанян С.Ш., Саркисян В.С., Габаян Г.С. Фильтрация из водохранилищ при колебаниях уровней воды в них. // Изв. АН АрмССР, сер.Науки о Земле. 1988.Т.41 № 2. С. 64-71.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Токмаджян Левон Вачеевич – к.т.н., доцент, декан Департамента компьютерного проектирования и информационных технологий ЕрГУАС. тел.: 58-29-37; 093-92-40-40
E-mail: ltokmajyan@ysuac.am

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ

Торосян В.С., Саакян С.Л.

Известно, что тригонометрические ряды Фурье часто и эффективно применяются при решени различных задач математической физики ([1-2]). В работе с помощью двойных тригонометрических рядов Фурье построено решение задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения второго порядка, когда область – прямоугольник. К такому же уравнению приводятся также задачи изгиба прямоугольных неоднородных мембран [3-6].

Решение задачи приведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Получено достаточное условие, когда бесконечная система будет регулярной. Рассмотрен численный пример.

§1. Постановка задачи и способ решения. Пусть $\overline{D} = \{0 \le x \le a; 0 \le y \le b\}$– прямоугольник со сторонами a, b; ∂D – его граница. Рассмотрим задачу Дирихле для следующего эллиптического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{ª} x u = f \qquad (1.1)$$

$$u\big|_{\partial D} = \ddot{} \qquad (1.2)$$

Будем предполагать, что $f \in C^{Q+2}(\overline{D}),\ \lambda \ge 0$.

Пусть функции $h_{ij}(x, y)$ $(i = 1,2,\cdots;\ j = 1,2,\cdots)$ образуют в рассматриваемой области полную систему непрерывных функций. Перепишем уравнение (1.1) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{ª} x u - f = 0 \qquad (1.3)$$

Тогда, если левая часть уравнения (1.3) для всех значений i, j будет удовлетворять условию ортогональности

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{ª} x u - f \right) h_{ij}(x, y)\, dx dy = 0 \qquad (1.4)$$

можно считать, что $u(x, y)$ удовлетворяет и уравнению (1.1)

Если возьмем

$$h_{ij}(x, y) = \frac{2}{a}\frac{2}{b} \sin \sim_i x \sin \quad_i y \qquad \left(\sim_i = \frac{i®}{a}, \quad _j = \frac{j®}{b} \right)$$

то получим решение задачи (1.1)–(1.2) в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \sin \sim_i x \sin \quad_i y \qquad (1.5)$$

Из (1.4) после преобразования при помощи интегрирования по частям для разложения коэффициентов Фурье A_{ij} получим уравнение

$$\left(\sim_i^2 + \quad_j^2 \right) A_{ij} + \text{ª} C_{ij} = f_{ij} \qquad (1.6)$$

где

$$f_{ij} = \frac{2}{a}\frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \sim_i x \sin \quad_i y\, dx dy \qquad (1.7)$$

$$C_{ij} = \frac{2}{a}\frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b u(x, y) x \sin \sim_i x \sin \quad_i y\, dx dy \qquad (1.8)$$

Из обобшенного уравнения замкнутости (7) устанавливаем, что

$$C_{kl} = \frac{a}{2} A_{kl} + \frac{2a}{®^2} \sum_{i+k}^{\infty} A_{il} \left[\frac{1}{(i+k)^2} - \frac{1}{(i-k)^2} \right] \tag{1.9}$$

Здесь и далее индекс суммирования $i+k$ принимает нечетные значения. Отсюда, имея ввиду зависимость (1.6) для определения коэффициентов Фурье C_{kl}, получаем следующую бесконечную систему:

$$C_{kl} = \frac{\lambda a}{2\delta_{kl}} C_{kl} - \frac{8a\lambda}{\pi^2} \sum_{i+k}^{\infty} \frac{1}{\delta_{il}} \frac{ik}{(i^2-k^2)^2} C_{il} + F_{kl} \tag{1.10}$$

где введены обозначения

$$¢_{kl} = \sim_i^2 + \ {}_l^2, \; F_{kl} = \frac{8a}{®^2} \sum_{i+k}^{\infty} \frac{1}{¢_{il}} \frac{ik}{(i^2-k^2)^2} f_{il} - \frac{a}{2} \frac{f_{kl}}{¢_{kl}} \tag{1.11}$$

§2. Исследование бесконечной системы (1.10).

Имеем

$$\frac{a\text{ª}}{2¢_{kl}} = \frac{a^3\text{ª}}{2®^2} \frac{1}{k^2 + l^2 a^2 / b^2} \le \frac{a^3\text{ª}}{2®^2} \frac{b^2}{a^2+b^2} \quad (k, l = 1,2,3,\cdots)$$

Легко показать, что

$$\sum_{i+k}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\delta_{il}} \left(\frac{1}{(i-k)^2} - \frac{1}{(i+k)^2} \right) \right| \le \frac{1}{4} \frac{\lambda a^2}{\pi^2} \left(\sum_{1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i-2} - \frac{1}{i} \right)^2 - \sum_{1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2} \right)^2 \right)$$
$$(k, l = 1,2,3,\cdots)$$

Имеем

$$\frac{1}{4} \sum_{1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i-2} - \frac{1}{i} \right)^2 \le \frac{1}{4} \left(\frac{®^2}{8} + \frac{®^2}{8} + 2 \right) \le \frac{®^2}{16} + \frac{1}{2} \tag{2.1}$$

Аналогично

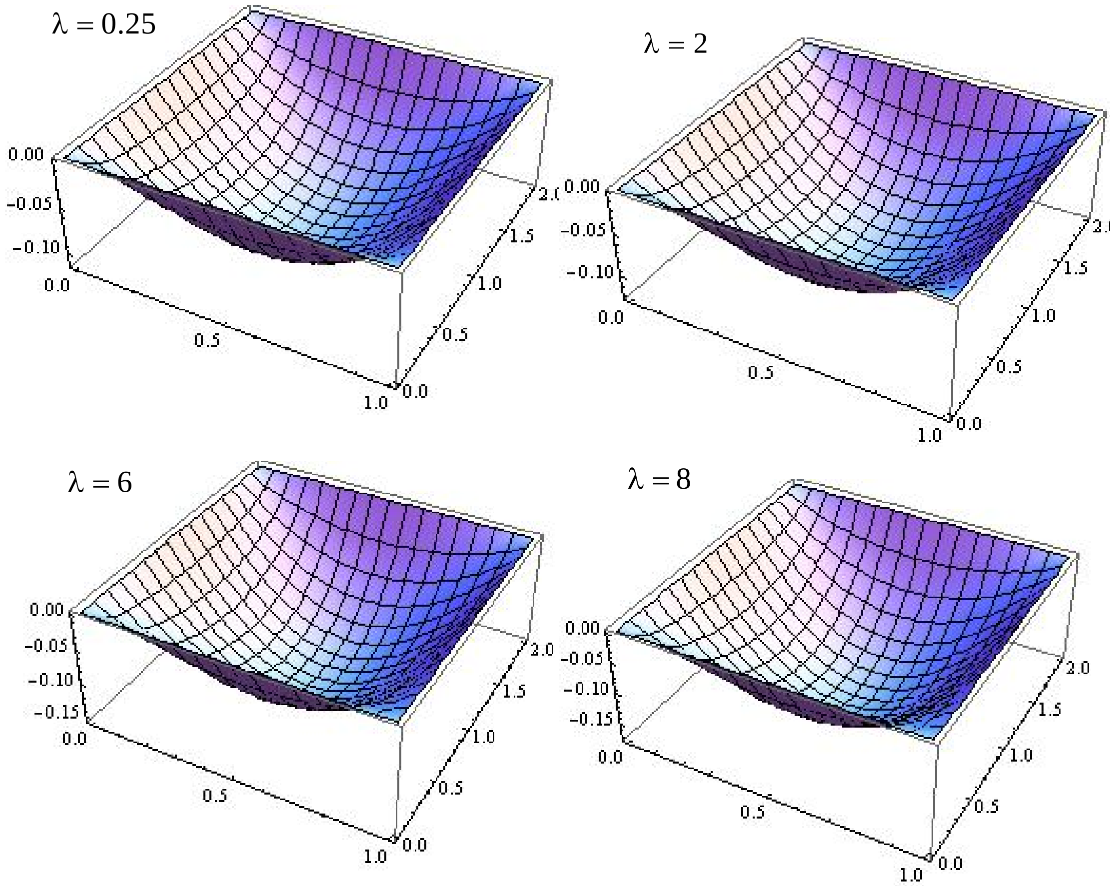
$$\frac{1}{4} \sum_{1,3}^{\infty} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i} \right)^2 \le \frac{®^2}{16} - \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Из оценок (2.1)-(2.2) следует, что бесконечная система (1.10) будет регулярной, если выполнено условие

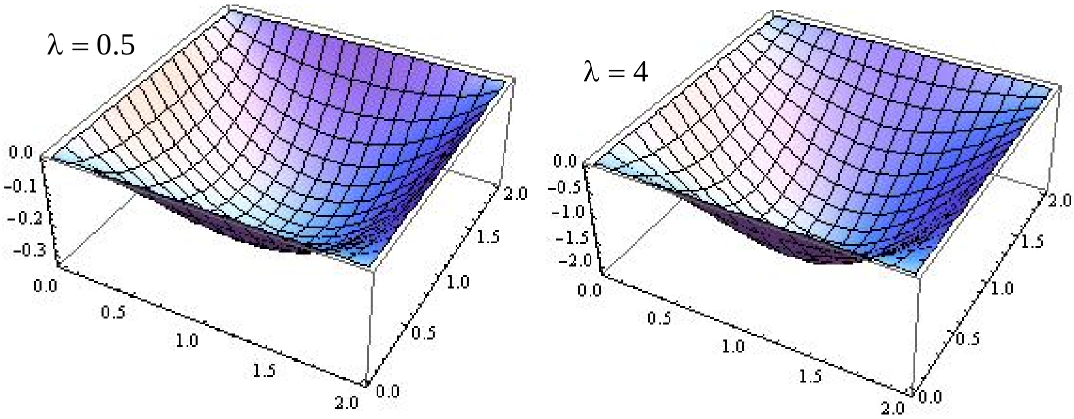
$$\frac{\text{ª}a^3}{2®^2} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{\text{ª}a^3}{®^4} \le 1 \tag{2.3}$$

Заметим, что длина одной из сторон прямоугольника, который входит в условие (2.3), а именно b, фактически не сыграет никакой роли.

§3. Численная реализация. Пусть правая часть в уравнении (1.1) есть постоянная функция. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(x, y) \equiv 1$. Приближенное решение получим, если в (1.5) и (1.10) заменим знак бесконечности числом n $(n = 1,2,\cdots)$. Учитывая вид свободных членов, которые входят в бесконечную систему (1.10), заключаем, что в этом случае для получения удовлетворительного результата достаточно взять $n = 10$.



Фиг.1. Численное решение при разных значениях λ, когда $a = 1$, $b = 2$.



Фиг.2. Численное решение при разных значениях λ, когда $a = 2$, $b = 2$.

Численные расчеты проведены, когда $\overline{D}$ – прямоугольник со сторонами $a=1$, $b=2$ (фиг.1) и когда $\overline{D}$ – квадрат со сторонами 2, т.е. $a=b=2$ (фиг.2). Анализируя полученные результаты, заключаем, что изгиб прямоугольной мембраны (по абсолютной величине) будет максимальным в центре прямоугольника, если a удовлетворяет условию (2.3). Кроме того, изгиб увеличивается при увеличении значения параметра a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463с.
2. Тодоров М.М. О решени плоской задачи теори упругости для прямоугольника посредством двойных тригонометрических рядов. //Изв. АН СССР. ОТН. 1959. № 4.
3. Carlos P. Filipich, Marta B. Rosales. A generalization of the membrane-plate analogy to non-homogeneous polygonal domains consisting of homogeneous subdomains. //J. Acoust. Soc. Am. Vol. 127, Issue 4, pp. 2295-2300 (April 2010).
4. J. T. Katsikadelis, E. J. Sapountzakis. An approach to the vibration problem of homogeneous, non-homogeneous and composite membranes based on the boundary element method. //International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.6, Issue 11, 1988, P. 2439 – 2455.
5. Amore Paolo. A new method for studying the vibration of non-homogeneous membranes. // Journal of Sound and Vibration. Vol. 321, 2008, Issue 1-2, p. 104-114.
6. Sasadhar De. Solution to the equation of a vibrating annular membrane of non-homogeneous material. //Journal Pure and Applied Geophysics. Vol.90, №1, December, 1971.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. III. Ч. I. М: Наука, 1967. 323с.

Сведения об авторах:
Торосян Вардан Степаевич –младший научный сотрудник Института механики НАН РА.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б, тел. (+37499) 281-799
E-mail: mechins@sci.am

Саакян Саак Левонович – кандидат физ.-мат. наук, ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.
Адрес: Армения, Ереван, ул. А. Манукяна 1, тел.: (+37410) 559-096
E-mail: ssahakyan@ysu.am

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО КЛИНА СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Трубчик И.С.

Рассматривается метод сведения контактной задачи для неоднородного по угловой координате клина в случае, когда производная функции, описывающей закон неоднородности, изменяет знак один или более раз. При решении задачи используется подход, описанный ранее в [1]. Трансформанта ядра интегрального уравнения, к которому сводится задача, строится численно. Далее численно построенная трансформанта ядра интегрального уравнения аппроксимируется выражением специального вида, позволяющим получить решение интегрального уравнения задачи в замкнутом виде. Доказано [2], что полученное решение является асимптотически точным как для малых, так и для больших значений безразмерного геометрического параметра задачи. Исследуется влияние степени осцилляции закона неоднородности на вид численно полученных трансформант ядра интегрального уравнения, к которому сводится задача. На примере иллюстрируется влияние градиентности клина на значения контактных напряжений. Задача поставлена в связи с необходимостью прогнозирования явления отслаивания современных покрытий сложной структуры от недеформируемой подложки.

1. Постановка задачи. Рассматриваются статические контактные задачи для упругой клиновидной области с углом раствора α ($0 \le \varphi \le \alpha$). С областью связана цилиндрическая система координат (r, φ, z). Считаем, что грань клина $\varphi = 0$ жестко закреплена, а на грань $\varphi = \alpha$ действует недеформируемый полосовой штамп. На единицу длины штампа действует сдвигающее усилие P_c, параллельное оси z, под действием которого штамп переместится в направлении оси z на величину ε, вызвав в клине деформацию чистого сдвига (задача I); или штамп вдавливается силой *P* (здесь сила отнесена к единице длины штампа), приложенной на расстоянии *H* от вершины клина (задача II). Предполагаем, что силы трения между штампом и поверхностью клина отсутствуют и вне штампа поверхность клина $\varphi = \alpha$ не нагружена. Ширина области контакта штампа с клином определяется неравенством $a \le r \le b$, а форма основания штампа в области контакта – функцией $\gamma(r)$.

Для обеих задач коэффициент Пуассона ν=*const*, модуль сдвига и модуль Юнга клина изменяются по закону

$$G = G_\alpha f(\varphi), \quad E = E_\alpha f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \alpha, \tag{1.1}$$

где $f(\varphi)$ – произвольная, непрерывно дифференцируемая всюду в области определения положительно определенная функция. Градиент изменения упругих свойств клина может быть положительным, отрицательным или менять знак для $0 \le \varphi \le \alpha$.

Граничные условия задачи при сделанных предположениях имеют вид:

$$\text{(I)}\ \ w(r,0,z) = 0; \ \ \text{(II)}\ \ u(r,0) = v(r,0) = 0; \tag{1.2}$$

$$\text{(I)}\begin{cases} \tau_{\varphi z}(r,\alpha,z) = 0, \ 0 < r < a, \ r > b \\ w(r,\alpha,z) = \varepsilon, \ a \le r \le b, \end{cases} ; \ \text{(II)}\begin{cases} \tau_{r\varphi}(r,\alpha) = 0, \ \sigma_\varphi(r,\alpha) = 0, \quad (0 < r < a, \ r > b) \\ v(r,\alpha) = -\delta(r) = -\left(\delta + \beta r - \gamma(r)\right) \ (a \le r \le b) \end{cases}, \tag{1.3}$$

Требуется определить распределение контактных касательных (I) и нормальных (II) напряжений под штампом

$$\text{(I)}\ \tau_{\varphi z}(r,\alpha,z) = -\tau(r); \ \text{(II)}\ \sigma_\varphi(r,\alpha) = -q(r) \ (a \le r \le b) \tag{1.4}$$

Задачи (I) и (II) сводятся к решению интегрального уравнения Фредгольма с логарифмическим ядром

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g(x) \quad (|x| \le 1), \tag{1.5}$$

где $k(t) = \int_0^\infty \frac{L(u,\alpha)}{u} \cos ut du$, $t = \ln(\rho / r)$, $\xi = \lambda \ln(\rho / a) - 1$, $x = \lambda \ln(r / a) - 1$, $\lambda = 2\left(\ln(b/a)\right)^{-1}$, $\varphi(\xi)$ – функция распределения контактных напряжений, $\theta_\alpha = G_\alpha / (1 - \nu)$, $G_\alpha = G(\alpha)$ – модуль сдвига на верхней грани клина.

Здесь $\varphi(\xi)=\rho\tau(\rho)$, $g(x)=G_\alpha\lambda\varepsilon$ (для задачи I), $\varphi(\xi)=\rho q(\rho)$, $g(x)=\theta_\alpha\lambda\delta(r)$ (для задачи II). Безразмерный параметр $\lambda\in(0;\infty)$ характеризует собой относительное положение штампа на грани клина. Если параметр λ велик (мал), то штамп расположен относительно далеко (близко) от вершины упругого клина. Заметим, что интегральное уравнение (1.5) при $\alpha\to 0$ и при фиксированном $H=a\mathrm{tg}\alpha$ вырождается в интегральное уравнение соответствующих контактных задач для упругого слоя (полосы) [3].

Для завершения постановки рассмотренных контактных задач для упругого неоднородного клина к интегральному уравнению (1.5) следует добавить условие равновесия штампа

$$\text{(I) } P_c=\int_a^b\tau(r)dr;\ \text{(II) } P=\int_a^b q(r)dr\,, \tag{1.6}$$

которое (при $\alpha=\pi$ и $\alpha=2\pi$) позволяет определить связь между сдвигающим усилием P_c и перемещением штампа ε (I) или вдавливающим усилием P и перемещением штампа δ (II). При корректной постановке должно выполняться условие $\tau(r)\ge 0$ или $\sigma(r)\ge 0$ при $a\le r\le b$.

2. Полуаналитический метод решения поставленных контактных задач. Для численного построения трансформант ядер интегральных уравнений применяется метод интегральных преобразований и обобщение метода моделирующих функций для систем координат, отличных от декартовых [1]. Поставленные задачи сводятся к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (в антиплоской задаче I) или системы дифференциальных уравнений второго порядка (в плоской задаче II) относительно трансформант интегрального преобразования Меллина функций перемещений с переменными коэффициентами

$$\frac{d\vec{\mathbf{z}}(u,\varphi)}{d\varphi}=\mathbf{A}\vec{\mathbf{z}}(u,\varphi),\quad \varphi\in[0;\alpha], \tag{2.1}$$

В задаче I ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен двум, а в задаче II – равен четырем. Коэффициенты матрицы являются переменными по z. Краевые условия для уравнения (2) выписываются из условий на верхних и нижних гранях слоя (полосы). В частности, в задаче I матрица $\mathbf{A}$ имеет вид:

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ u^2 & -k(\varphi)\end{Vmatrix},\quad \vec{\mathbf{z}}=\begin{Vmatrix}z_1\\ z_2\end{Vmatrix},\quad k(\varphi)=\frac{G'(\varphi)}{G(\varphi)},$$

где штрих означает производную по φ. Граничные условия: $z_1(u,\alpha)=0$, $z_2(u,\alpha)=1$.

В задаче II,

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\left(u^2-1\right) & -k(\varphi) & (u+1)k(\varphi) & \frac{2(\kappa+u)}{\kappa-1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \left(-1+u\frac{3-\kappa}{\kappa+1}\right)k(\varphi) & \frac{2(u-\kappa)}{\kappa+1} & -\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left(u^2-1\right) & -k(\varphi)\end{Vmatrix},\quad \vec{\mathbf{z}}=\begin{Vmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{Vmatrix},\quad k(\varphi)=\frac{E'(\varphi)}{E(\varphi)},$$

где $\kappa=3-4\nu$.

Граничные условия в данной задаче имеют вид:

$$z_1(u,0)=z_3(u,0)=0\,,$$

$$z_2(u,\alpha)-(u+1)z_3(u,\alpha)=0,\ (5-3u+\kappa(u-1))z_1(u,\alpha)+(5-\kappa)z_4(u,\alpha)=4u/(\kappa+1).$$

Далее, решение системы дифференциальных уравнений представляется в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$\vec{\mathbf{z}}(u,\varphi)=\sum_{i=1}^{rang}C_i(u)\vec{\Psi}_i^F(u,\varphi)\,, \tag{2.2}$$

где $\vec{\Psi}_i^F(u,\varphi)=\mathbf{T}_i(u,\varphi)\vec{\Psi}_i(u,\varphi)$, $\mathbf{T}_i(u,\varphi)$ – диагональные матрицы, на диагонали которых – компоненты векторов $\vec{\mathbf{t}}_i(u,\varphi)=\left(t_i^1(u,\varphi),t_i^2(u,\varphi),\ldots,t_i^{rang}(u,\varphi)\right)$.

Векторы $\vec{\Psi}_i(u,\varphi)$ являются собственными векторами матриц $\mathbf{A}$ для $k(\varphi)=0$ (для однородной среды), $\vec{\mathbf{t}}_i(u,\varphi)$ – векторы моделирующих функций, связанных с неоднородностью среды, $C_i(u)$ – некоторые коэффициенты, не зависящие от φ и определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений, получающейся из граничных условий. Данный прием позволяет выделить в выражении (2.2) составляющие $\vec{\Psi}_i(u,\varphi)$, затрудняющие процесс численной реализации решения. Вид компонент приведен, например, в [4].

Векторы моделирующих функций $\vec{\mathbf{t}}_i(u,\varphi)$ определяются из задач Коши при фиксированных значениях u

$$\frac{d\vec{\mathbf{t}}_i(u,\varphi)}{dz}=\vec{\Psi}_i^{-1}\left(\mathbf{A}\vec{\Psi}_i-\mathbf{E}\frac{d\vec{\Psi}_i}{dz}\right)\vec{\mathbf{t}}_i(u,\varphi)\ ,\quad \varphi\in[0;\alpha]\quad (i=1,\ldots,\mathrm{rang}) \tag{2.3}$$

Начальные условия $\vec{\mathbf{t}}_i(u,0)$ определяются, исходя из вида решения уравнения (2.1) для однородных слоя или полосы на их нижней грани.

Таким образом, получены следующие выражения для численного построения трансформант $L(u,\alpha)$:

(I): $L(u,\alpha)=\mathrm{th}\left(uA\alpha\right)t_1^1/t_1^2$,

(II): $L(u,\alpha)=a_1t_1^3\cos\left(iu+1\right)\alpha+a_2t_2^3\sin\left(iu+1\right)\alpha+a_3t_3^3\cos\left(iu-1\right)\alpha+a_4t_4^3\sin\left(iu-1\right)\alpha$,

где $t_i^j=t_i^j(u,\alpha)$ – решения задач Коши (2.3), $a_i=a_i(u)$ – решения системы АЛУ, полученной из граничных условий задачи (II).

Исследованы свойства трансформант ядер $L(u,\alpha)$ интегральных уравнений. В частности, для функционально-градиентного клина трансформанты ядер парного интегрального уравнения обладают следующими свойствами:

$$L(u)=Au+Bu^2+\mathrm{O}(u^3),\ u\to 0,\ A=\lim_{u\to 0}\frac{L(u)}{u};\ L(u)=1+c_1u^{-1}+c_2u^{-2}+\mathrm{O}(u^{-3}),\ u\to\infty \tag{2.4}$$

Установлено отличие свойств трансформант ядер интегральных уравнений, полученных для многослойного и однородного основания [3], от аналогичных свойств трансформант ядер интегральных уравнений, полученных для градиентного клина.

В работе [1] доказана теорема о том, что функцию $L(u,\alpha)$, обладающую свойствами (2.4), можно аппроксимировать выражениями вида:

$$L(u,\alpha)=L_N(u)=\mathrm{th}\,Au\prod_{n=1}^{N}\left(u^2+\delta_n^2\right)/\left(u^2+\gamma_n^2\right) \tag{2.5}$$

При численной реализации метода для определения коэффициентов δ_n, γ_n используется эффективный алгоритм, описанный в работе [4]. Интегральное уравнение (1.5) сводится к решению парного интегрального уравнения, решение которого для функции $L(u,\alpha)$ вида (2.5) найдено в случае, когда функция $g(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье, т.е. размер зоны контакта фиксирован и не зависит от нагрузки.

Используя метод работы [5], получен аналитический вид решения в виде, удобном для технических приложений [4], который выражается через присоединенные функции Лежандра $\mathrm{P}_u^\mu\equiv\mathrm{P}_u^\mu(\mathrm{ch}\,\vartheta)$, $\mathrm{Q}_u^\mu\equiv\mathrm{Q}_u^\mu(\mathrm{ch}\,\vartheta)$ и интегралы от них, $\vartheta=\pi/A\lambda$, A, δ_n, γ_n – коэффициенты аппроксимации трансформанты $L(u,\alpha)$ выражением (2.5).

Установлено [4], что построенные решения являются двухсторонне асимптотически точными решениями исходного интегрального уравнения, как при малых, так и при больших значениях безразмерного геометрического параметра λ. Сравнение полученного аналитического приближенного решения с известными решениями для однородного клина из монографии [3] показало погрешность менее 1% при λ < 1 и λ > 2.8. Наибольшие расхождения (более 10%) наблюдаются при λ = 2. Явный аналитический вид решений данной модели обеспечивает возможности их широкого использования для оценки как механических (функции жесткости), так и защитных свойств (термостойкость, износостойкость) функционально-градиентных покрытий сложной структуры.

3. Численные примеры построения трансформант ядер интегрального уравнения. Далее приведены численные результаты для ряда композитных покрытий, для которых при всех возможных типах законов неоднородности значение отношения модуля сдвига на поверхности покрытия к модулю сдвига в любой внутренней точке (обозначим ее n_a) находится в интервале $1/3.5 < n_a < 3.5$. Такими свойствами описывают, например, композитные среды Al-Fe, Cr-Al, Ag-Au. Анализ проводится в случае закона изменения модуля сдвига, первая производная которого неоднократно меняет знак для любого значения $\varphi \in [0;\alpha]$. Для модуля сдвига вида (1.1) и коэффициента Пуассона $\nu = 1/3$ рассмотрим следующие типы неоднородности (рис. 1):

$$G/G_0 = f_a(\varphi) = 2.25 - 1.25*\cos(2\pi a\varphi/\alpha),\ 0 < \varphi < \alpha,\ \alpha = \pi/4 \tag{3.1}$$

$$G/G_0 = g_a(\varphi) = 1/f_a(\varphi),\ 0 < \varphi < \alpha,\ \alpha = \pi/4 \tag{3.2}$$

Анализ кривых $L(u)/L_0(u)$, характеризующих вид трансформант $L(u) = L(u,\alpha)$ для законов неоднородности клина (3.1), (3.2) по отношению к трансформанте $L_0(u)$ для однородного слоя с модулем сдвига G_0 показал, что тип (класс) трансформант, а следовательно, и вид решения контактных задач для неоднородного клина, определяется отношением величин $n = G(\alpha)/G(0)$. Для $n = 1$ независимо от характера изменения модуля сдвига по угловой координате значения кривых $L(u)/L_0(u)$ находятся в интервале $m < L/L_0 \le 1$ как для $f_a(\varphi)$, так и для $g_a(\varphi)$; для $n \ne 1$ соответственно $-1 < L/L_0 \le M$. Чем больше значение n, тем больше значение M.

На рис.2 собраны в одной координатной плоскости кривые $L(u)/L_0(u)$ для законов неоднородности $f_a(\varphi)$ и $g_a(\varphi)$, соответствующие различным классам трансформант, например, для $a = 0.5$ и $a = 1$. Параметр $m = G(\alpha/(2a))/G(0) = G(\alpha/(2a))/G(\alpha)$ введен для того, чтобы обозначить величину отношения модуля сдвига на верхней грани клина. Очевидно, что при $m = 3.5$ значение L/L_0 меньше, чем при $m = 0.3$.

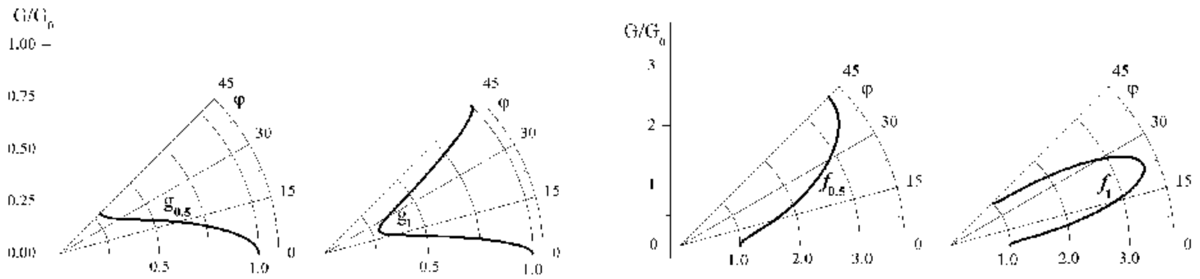


Рис. 1.

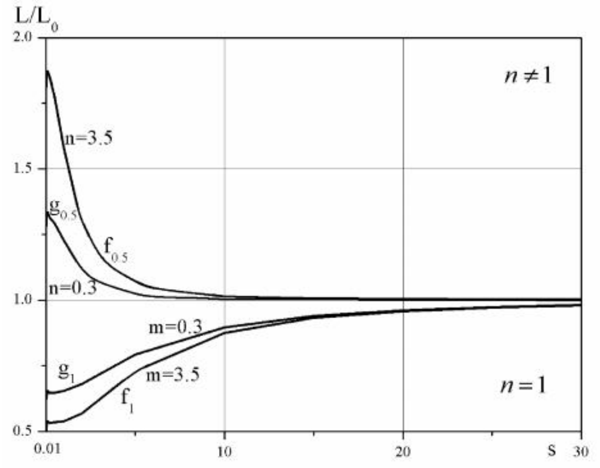


Рис. 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-08-011410а, 10-08-00839а, 10-08-90025_бел-а), программы АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)" грант № 2.1.2/5729, а также ГК РФ № 02.740.11.0413 и № 02.740.11.5193, № П1107. Автор также благодарит С.М. Айзиковича за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубчик И.С., Айзикович С.М. Метод сведения к парным интегральным уравнениям контактных задач для полубесконечных областей. //Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №1. С. 52–59.
2. Айзикович С.М., Трубчик И.С. Асимптотические свойства приближенного решения одного класса парных интегральных уравнений. //ПММ. 1988. Т.52. Вып.5. С. 850–856.
3. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
4. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь, А.В., Трубчик И.С., Кренев Л.И. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
5. Зеленцов В.Б. О решении одного класса интегральных уравнений. //ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 815–820.

Сведения об авторе:

Трубчик Ирина Степановна – к.ф.-м.н., доцент кафедры «Информационные технологии», Донской технический государственный университет, факультет информатики и вычислительной техники, (7 863) 273 85 82, (7 863) 238 15 58
E-mail trubchik@mail.ru

МЕХАНИКА И ФИЗИКА РАЗВИТИЯ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

Туманов Н.В.

Работа посвящена моделированию устойчивого роста усталостных трещин с использованием комплексного физического (структурного) и механического (континуального) подходов: первый необходим для понимания механизма устойчивого роста, а второй – для связи этого механизма с приложенной нагрузкой и разработки инженерных методов его моделирования. Изложена модель механизма устойчивого роста, объединяющая процессы разрушения на разных масштабных уровнях (от разрыва межатомных связей у фронта трещины до ее подрастания в каждом цикле нагружения), и приведены результаты ее верификации.

Устойчивый рост (УР) усталостных трещин соответствует второму участку кинетической диаграммы «скорость роста трещины усталости V – размах коэффициента интенсивности напряжений (КИН) аK» и формированию измеримого микрорельефа поверхности разрушения (фракторельефа) – усталостных бороздок. Период УР составляет значительную часть общей циклической долговечности высоконапряженных конструкций (например, дисков авиационных газотурбинных двигателей), для которых основным повреждающим фактором является малоцикловая усталость (МЦУ). Надежное определение периода УР трещин МЦУ позволяет обеспечить безаварийную эксплуатацию таких конструкций в результате назначения безопасных интервалов дефектоскопического контроля, в течение которых возможные трещины не успевают выйти между осмотрами за пределы УР. Помимо решения практических задач исследование УР имеет фундаментальное значение вследствие универсальности его закономерностей.

Моделирование УР в настоящей работе основано на рассмотрении механизма разрушения, действующего на фронте усталостной трещины на стадии ее устойчивого роста. Этот механизм определяет как кинетику усталостной трещины (КУТ), так и фракторельеф. Его понимание необходимо для создания математической модели УР, а также для установления связи между КУТ и шагом S усталостных бороздок, позволяющей верифицировать модель на основании фрактографического анализа и изучать закономерности УР в натурных условиях.

В отличие от традиционных подходов механики разрушения, основанных на моделировании материала в виде однородного бесструктурного континуума и объясняющих зависимость V от линейно-упругого параметра аK пренебрежимо малым влиянием пластической деформации на КУТ, разработанная модель базируется на представлении о критической (предшествующей разрушению) фрагментированной структуре, которая образуется в результате локализованной перед фронтом усталостной трещины интенсивной многократной пластической деформации, и о детерминированном этой структурой высокоэнергоемком механизме периодического расслаивания-разрыва (МПРР) [1]. Критическая фрагментированная структура является двухуровневой (микро- и мезоскопической), причем ее крупномасштабные элементы – большеугловые мезограницы разориентации деформационного происхождения – располагаются вдоль главных осей деформации и являются концентраторами внутренних напряжений [2]. Действие МПРР, аналогичного механизму расслаивания при статическом нагружении [2] и механизму Гордона-Кука для анизотропных материалов [3], можно схематизировать следующим образом (рис.1):

- В результате хрупкого поперечного расслаивания вдоль границы мезофрагментов формируется Т-образная вершина трещины, и на обеих поверхностях разрушения образуются расслоения – усталостные бороздки. Максимум напряжений от внешней нагрузки σ_x^{ext}, перпендикулярных к фронту трещины и действующих в ее плоскости, достигается на некотором расстоянии λ от фронта. При возрастании нагрузки в цикле нагружения напряжения σ_x^{ext} суммируются с локализованными у границ мезофрагментов внутренними напряжениями σ_x^{int}, которые образовались при пластической деформации в предыдущих циклах. Когда эта сумма достигает величины теоретической прочности на отрыв σ_{th}, появляется новое хрупкое расслоение вдоль границы на расстоянии $\approx\lambda$ от фронта (первичное разрушение).

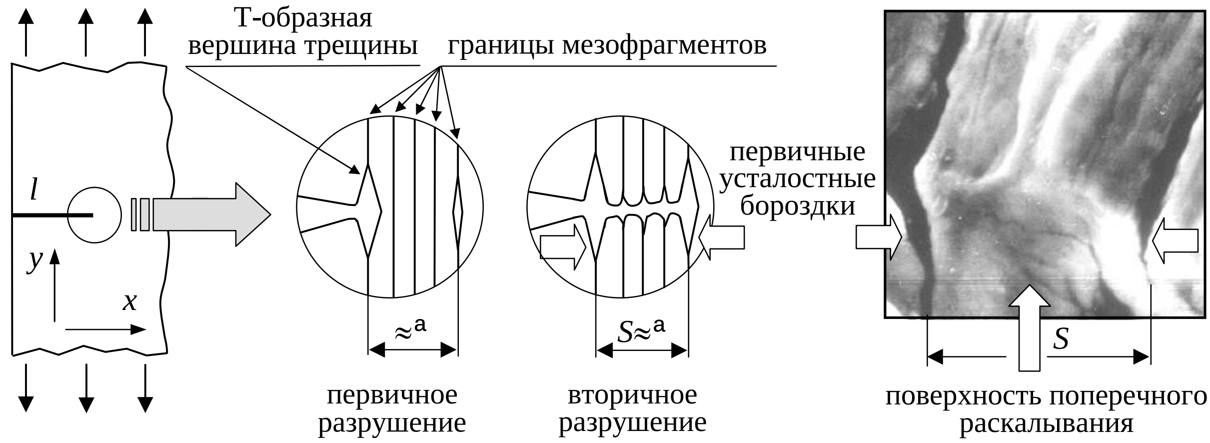


Рис.1. Схема действия механизма периодического расслаивания-разрыва (поперечное сечение фронта трещины) и электронная фотография бороздчатой структуры, расколовшейся в поперечном направлении к бороздкам

- Последующий разрыв перемычки между расслоением и фронтом (вторичное разрушение) приводит к подрастанию трещины на величину $\approx \lambda$, образованию нового фронта с Т-образной вершиной и новых усталостных бороздок, отделенных от предыдущих разорванной перемычкой (см. микрофотографию на рис.1). При вторичном разрушении могут происходить расслаивания вдоль границ мезофрагментов внутри перемычки, что приводит к образованию вторичных бороздок.
- Последовательные процессы расслаивания перед фронтом трещины и разрыва перемычки между расслоением и фронтом повторяются в каждом цикле нагружения, в результате чего Т-образная вершина трещины воспроизводится в каждом цикле, а среднее расстояние между соседними первичными усталостными бороздками (шаг бороздок) $S \approx \lambda$ соответствует среднему приращению длины (глубины) трещины l за цикл, т.е. $S(l)=dl/dN$, где N – число циклов.

Рассмотренная модель позволяет объяснить основные закономерности УР усталостных трещин. Высокая энергоемкость процесса разрушения является следствием «увязания» трещины в поперечных расслоениях вдоль границ мезофрагментов. Последние создают независимые от исходной (металлургической) структуры очаги разрушения, что приводит к слабой зависимости МПРР от особенностей исходной структуры, т.е. связь МПРР с самоорганизующейся универсальной критической фрагментированной структурой вызывает снижение его чувствительности к разнообразным исходным структурам. Ориентация плоскости распространения усталостной трещины на этапе устойчивого роста по нормали к направлению максимальной главной деформации объясняется развитием первичного хрупкого расслаивания вдоль указанного направления, при этом разрыв перемычки формирует поверхность разрушения в перпендикулярном направлении (рис.1).

Независимость МПРР от разнообразных исходных структур, его связь с универсальной предельно фрагментированной деформационной структурой (прочность материалов с такой структурой приближается к теоретической [4]) и хрупкий характер первичного разрушения (т.е. сохранение линейно-упругих свойств материала вплоть до зарождения первичного разрушения) позволяют при определении величины S моделировать материал в виде однородной линейно-упругой среды, имеющей теоретическую прочность. При этом связь S с аK обеспечивается математическим инвариантом: величина $\sigma_{x\max}^{ext}$ и местоположение λ максимума напряжений σ_{x}^{ext} в линейно-упругом теле перед фронтом трещины с Т-образной вершиной (в плоскости основной трещины) слабо зависят от конфигурации тела и трещины, а также от типа растягивающей нагрузки [5, 6] (рис.2)

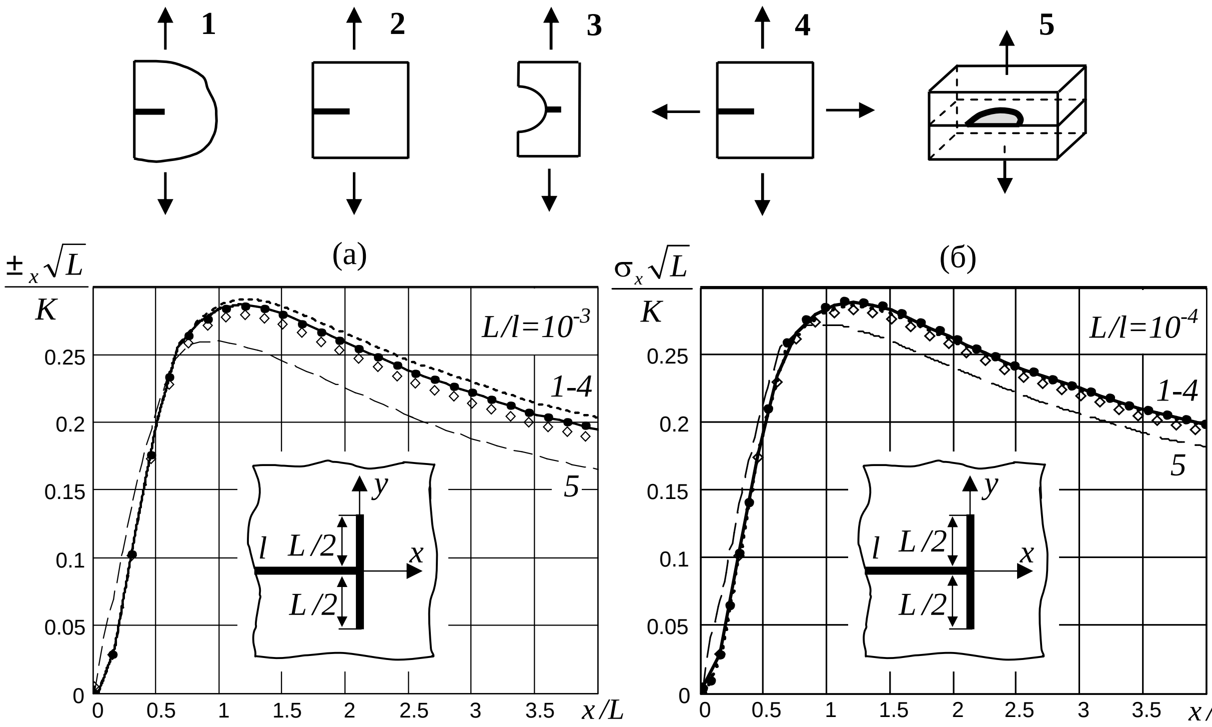


Рис.2. Распределение нормированных напряжений σ_x перед фронтом трещин с Т-образной вершиной в плоскости *y=0* в линейно-упругом теле при разной конфигурации тела и трещины и различной нагрузке (расчет методом конечных элементов; для полукруглой трещины – модель №5 – вычисления проведены в точке максимальной глубины): **а** – *$L/l=10^{-3}$*, **б** – *$L/l=10^{-4}$*

$$\sigma_{x\max}^{ext} = (0.26 \div 0.29)\, K / \sqrt{L}\,, \qquad \lambda = (1 \div 1.2)\mathrm{L}\,, \tag{1}$$

где *l>>L* – соответственно длина трещины и симметричного расслоения в ее вершине, *K* – КИН для идеальной (без расслоения) трещины длиной *l*. Из (1) следует

$$K \approx 3.5\sigma_{x\max}^{ext}\sqrt{\lambda}\,, \tag{2}$$

т.е. для трещин разной конфигурации при различной нагрузке КИН характеризует величину и местоположение максимума напряжений, действующих в линейно-упругом теле перед фронтом трещины с Т-образной вершиной в плоскости основной трещины при условии, что величина расслоения в вершине трещины значительно меньше ее длины.

Вследствие хрупкого характера первичного разрушения, приложенные σ_x^{ext} и внутренние σ_x^{int} напряжения аддитивны при возрастании нагрузки вплоть до зарождения первичного разрушения при условии

$$\sigma_x^{ext} + \sigma_x^{\mathrm{int}} = \sigma_{th}\,. \tag{3}$$

Если возрастание нагрузки в цикле нагружения происходит квазистатически (что типично для трещин МЦУ) и первичное разрушение возникает в плоскости *y=0* в месте максимума напряжений σ_x^{ext}, то с учетом $S/l \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$ из (1) и (3) при $S = \lambda$ и $\sigma_{th} = 0.1E$ (*E* – модуль Юнга) получим

$$S = B(\alpha/\beta)^2(\Delta K/E)^2\,, \tag{4}$$

где $\alpha = K_*/\Delta K$, $\beta = 1 - \sigma_x^{\mathrm{int}}/\sigma_{th}$, K_* – значение КИН в момент зарождения первичного разрушения, $B=7 \div 10$ (с точностью до целых значений).

Величина α/β и значение показателя m степенной зависимости S от аK в соотношении (4) экспериментально определяются следующим образом: в нескольких точках вдоль пути распространения трещины измеряется шаг бороздок S и рассчитывается аK, после чего строиться линейная регрессионная зависимость S от аK в двойных логарифмических координатах и вычисляются ее коэффициенты. В результате реализации этой процедуры при исследовании трещин МЦУ в дисках компрессора и турбины (из жаропрочных сплавов на основе титана и никеля) было установлено, что $\alpha/\beta \approx 1$ и $m=2$ [5]. Таким образом, при прогнозировании устойчивого роста трещин МЦУ может применяться универсальное кинетическое уравнение

$$S = 10\,(\text{а}K/E)^2 \tag{5}$$

(для обеспечения консервативной оценки периода УР значение коэффициента B в кинетическом уравнении (4) целесообразно принять равным верхней границе диапазона его изменения).

Формула (5) включает КИН, характеристику прочности межатомных связей $\sigma_{th} = 0.1E$ и мезомасштабный параметр S, связывая простым соотношением величины разной природы – математическую (аK) и физические (S и E) – и объединяя процессы, происходящие в макро-, мезо- и микроскопическом масштабах. Это объединение обусловлено тем, что на мезомасштабный уровень, где действует МПРР, с макроуровня переносится возможность моделирования среды в виде однородного континуума (благодаря «гомогенизации» материала перед фронтом трещины в результате интенсивной фрагментации и инвариантности МПРР относительно разнообразных исходных структур), а с микроуровня – применимость фундаментального микроскопического критерия разрушения (из-за коррелированных разрывов межатомных связей вдоль границы мезофрагментов критической фрагментированной структуры в процессе первичного разрушения, определяющего величину S).

Так как $S(l)=dl/dN$, то экспериментальная зависимость периода устойчивого роста трещины от ее длины (глубины)

$$N_Э(l) = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{S(l)}, \tag{6}$$

где l_0 – начальная длина (глубина) трещины, а расчетная зависимость с учетом кинетического уравнения (5)

$$N_P(l) = \frac{E^2}{10} \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{[\text{а}K(l)]^2}. \tag{7}$$

На рис.3 приведены результаты применения формулы (7) для расчета УР трещины МЦУ в диске турбины; при этом соотношение (6) использовалось для верификации расчета. Исследование состояло из следующих этапов:

- электронно-микроскопический фрактографический анализ кинетики двух аналогичных трещин в двух одинаковых дисках (испытанных в одинаковых условиях) с целью определения конфигурации развивающихся трещин и зависимостей $S(l)$ (излом по одной из этих трещин и соответствующая зависимость $S(l)$ показаны на рис.3а,б);
- 3D расчеты напряженно-деформированного состояния диска с трещиной на разных этапах ее развития (конфигурация расчетных трещин устанавливалась на основании фрактографических исследований), вычисление КИН и определение зависимости а$K(l)$ (рис.3в);
- вычисление экспериментального (6) и расчетного (7) периодов УР трещины при одинаковых значениях ее начального и конечного размеров (рис.3г).

Как видно на рис.3г, экспериментальные значения периода УР трещин МЦУ в обоих дисках близки между собой и хорошо согласуются с результатами расчета.

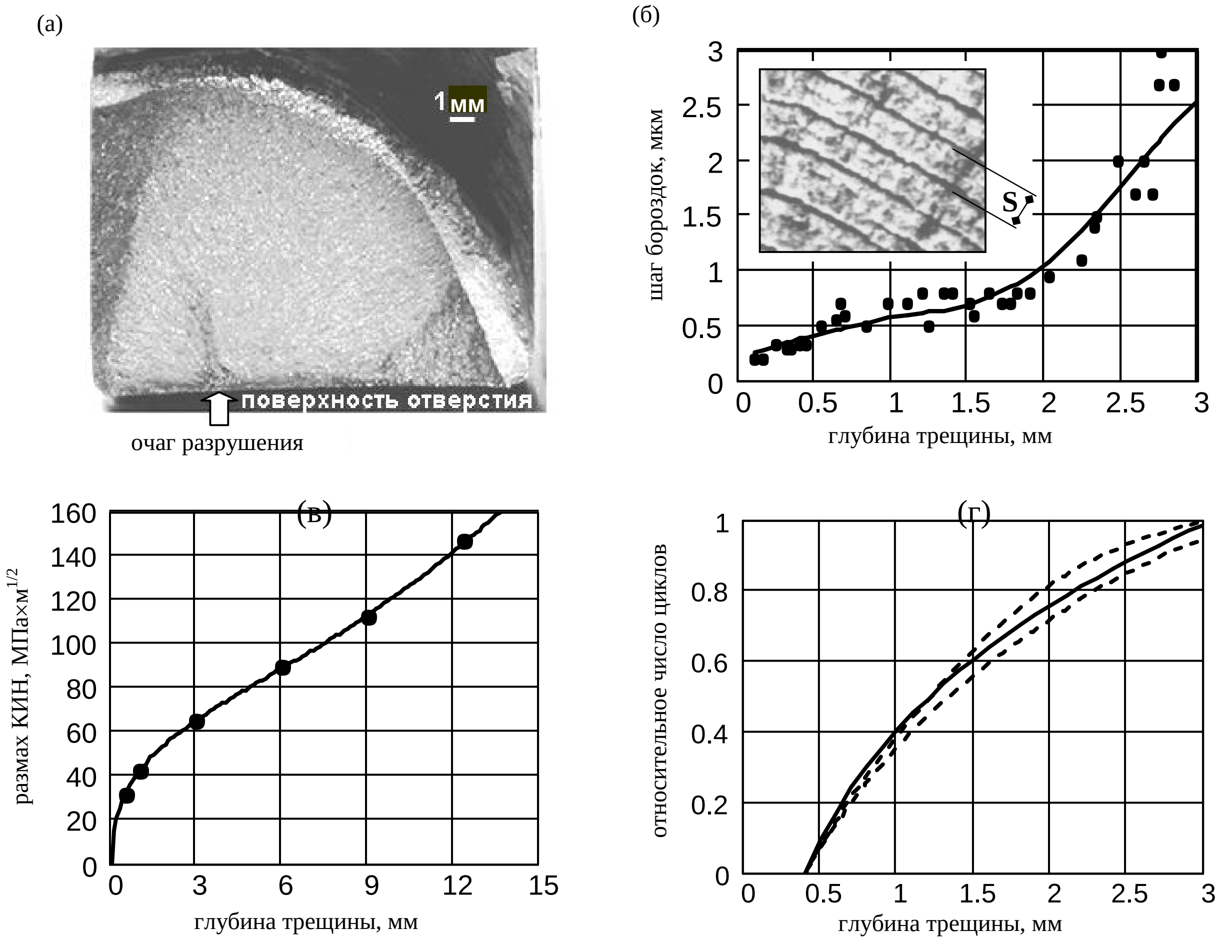


Рис.3. Расчет устойчивого роста усталостных трещин в дисках турбины и его верификация: **а** – поверхность усталостного разрушения; **б** – зависимость *S*(*l*) (экспериментальные точки и кривая регрессии) и микрофотография усталостных бороздок; **в** – зависимость а*K*(*l*) (расчетные точки и аппроксимирующая функция); **г** – расчетная (сплошная линия) и экспериментальные (пунктирные линии) зависимости периода устойчивого роста трещины от ее глубины

ЛИТЕРАТУРА

1. Туманов Н.В. Стадийность кинетики усталостных трещин и механизм периодического расслаивания-разрыва //Деформация и разрушение материалов: Труды Первой международной конференции. В 2-х томах. Т.1. М.: ИМЕТ РАН, 2006. С. 85-87.
2. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.
3. Cook J., Gordon J.E. A mechanism for the control of crack propagation in all-brittle systems // Proc. Royal Soc. Ser. A. 1964. Vol. 282, N 1393. P. 508-520.
4. Инденбом В.Л., Орлов А.Н. Физика прочности сегодня // Физика металлов и металловедение. 1992. №4. С. 4-7.
5. Туманов Н.В., Лаврентьева М.А., Черкасова С.А. Реконструкция и прогнозирование развития усталостных трещин в дисках авиационных газотурбинных двигателей // Конверсия в машиностроении. 2005. №4-5. С. 98-106.
6. Туманов Н.В., Лаврентьева М.А., Черкасова С.А., Серветник А.Н. Моделирование устойчивого роста усталостных трещин в дисках турбины авиадвигателей при простом и сложном циклах нагружения // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2009. №3(19). Часть 1. С. 188-199.

Сведения об авторе:

Туманов Николай Ваганович, Начальник сектора физических методов исследования конструкционной прочности, Центральный институт авиационного моторостроения (ФГУП «ЦИАМ им. П.И.Баранова»), 111116, Москва, ул. Авиамоторная 2 E-mail: tumanov@rtc.ciam.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СЛАБЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ГОРЕНИЕМ ПРОПАНА

Тупикин А.В.

В углеводородо-воздушных пламенах присутствует значительное количество заряженных частиц. Это делает электрические поля эффективным средством воздействия на процессы горения. Механизмы взаимодействия полей и пламен изучаются давно, но до сих пор нет единого мнения о влиянии на кинетику процессов горения. В работе представлены результаты экспериментальных исследований воздействия слабого электрического поля на горение пропана. Изучалось влияние параметров электрического поля (постоянного и импульсно-периодического) на условия стабилизации и скорость распространения пламени. Показано, что электрические поля являются эффективным способом управления горением.

Введение

Вопросы управления процессами горением были и остаются актуальными. Это связано с экологическими проблемами, возникающими при сжигании топлив, и необходимостью повышения эффективности использования природных ресурсов. Применение внешних энергетических источников (лазерное излучение, электрическое поле, плазма разрядов) – один из возможных путей решения. Слабые электрические поля выделяются на фоне остальных внешних воздействий малой потребляемой мощностью. Результаты исследований, представленных в [1-8], свидетельствуют, что воздействие слабого электрического поля на пламя может привести к значительным изменениям: уменьшить, либо увеличить скорость горения; стабилизировать пламя; понизить температуру и сократить количество выбросов вредных веществ (например, NO_x, CO) и т.п. В работе [5] представлены три основных механизма, используемых при описании взаимодействия электрического поля и пламени: нагрев за счет тепловыделения при протекании тока; изменение кинетики протекающих в пламени реакций; вовлечение нейтральной компоненты в процесс дрейфа заряженных частиц в электрическом поле (ионный ветер). Какой из перечисленных механизмов будет определяющим, зависит от условий эксперимента [8]. Для условий истечения горючей смеси в атмосферу предпочтение обычно отдается ионному ветру.

В работе приводится обзор исследований, которые велись коллективом лаборатории «Сверхзвукового горения» ИТПМ СО РАН. Рассмотрены различные режимы организации горения (гомогенное и диффузионное, ламинарное и турбулентное) при воздействии электрическим полем (ЭП).

Воздействие слабого электрического поля на стабилизацию диффузионного факела.

В технических приложениях часто сжигание топлива происходит в режиме диффузионного горения. В качестве топлива в опытах применялся пропан. Одной из задач исследования было изучение воздействия на стабилизацию факела.

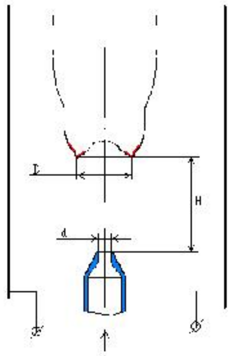


Рис.1. Схема эксперимента

Как следует из результатов [9], относительная высота поднятия (H/d, d – диаметр сопла) для всех горючих газов зависит от критерия гомохронности ($Ho=u_o \cdot \tau/d$, u_o – скорость истечения, τ - характерное время горения), умноженного на корень квадратный из отношения плотности горючего газа (ρ_1) к плотности среды, в которую происходит истечение (ρ_0). В этой же работе показано, что точки стабилизации пламени находятся в области близкого к стехиометрическому соотношению смеси газа с воздухом (α=0,9 для пропано-воздушных смесей), соответствующей минимальному характерному времени горения.

При изучении воздействия импульсно-периодического электрического поля на диффузионное горение пропана пламя помещалось между обкладками плоского конденсатора (рис.1.), которые были выполнены в виде двух медных пластин толщиной 1 мм размером 40x60 мм^2 с расстояние между ними 3,7 см. На пластины подавалось напряжение величиной U = 500 ÷ 4500 через высоковольтный ключ, который управлялся сигналами с генератора прямоугольных импульсов с частотами от 10 Гц до 500 кГц и различной скважностью.

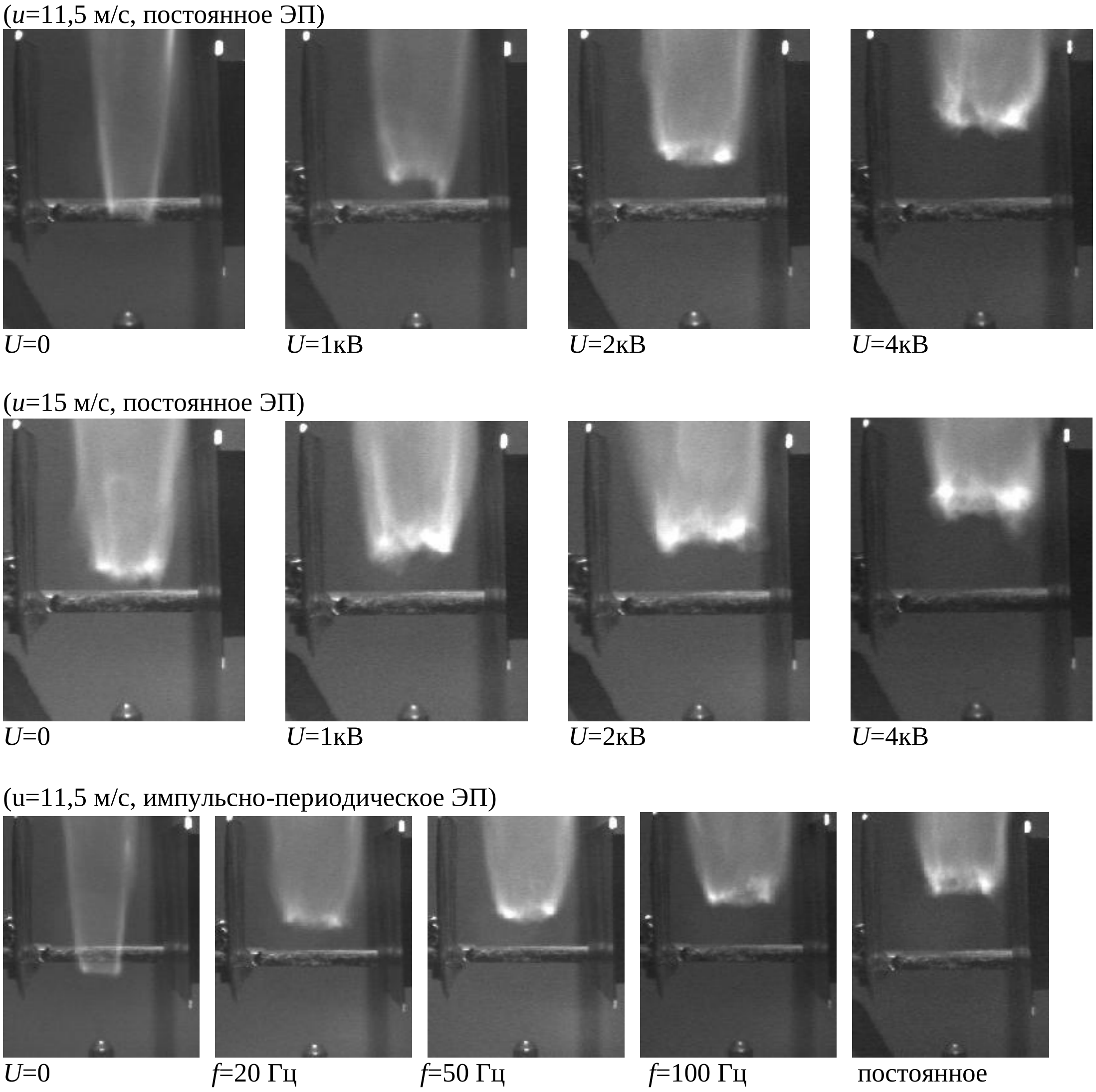


Рис.2. Диффузионный факел в электрическом поле

Подача напряжения на пластины дает двойной эффект. С одной стороны высота подъема пламени возрастает, пламя как бы выталкивается электрическим полем из конденсатора. С другой стороны, происходит интенсификация процессов смешения, пламя расширяется, увеличивая эффективную поверхность горения (рис.2).

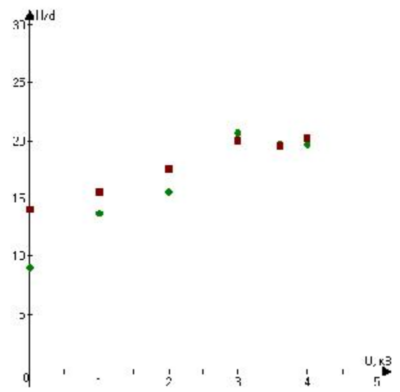


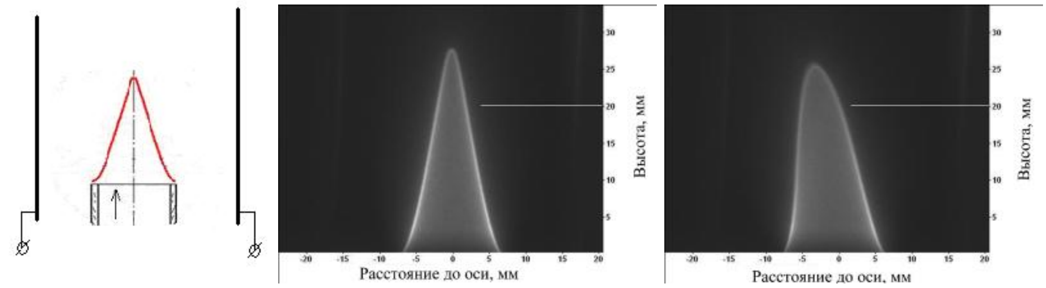
Рис.3. Зависимость высоты подъема от подведенного напряжения. (круглые *u*=11,5 м/с, квадратные *u*=15 м/с)

В постоянном ЭП пламя смещается к отрицательному электроду, что говорит о разной подвижности положительных и отрицательных зарядов. Отмечено, что с ростом напряжения пламя стремится к вполне определенному положению внутри плоского конденсатора. На рис.3. приведена зависимость безразмерной высоты подъема от поданного на конденсатор напряжения. Для двух скоростей *u*=11,5 м/с и *u*=15 м/с предельная высота подъема одинакова. При импульсно-периодическом режиме подачи напряжения высота подъема растет с ростом частоты, достигая величины, характерной для постоянного ЭП. Воздействия ЭП на пламя имеет полярный характер. Хотя пропано-воздушное пламя является нейтральной средой со сверхравновесной концентрацией заряженных частиц [5], но из-за различной подвижности основных носителей положительного (ионы) и отрицательного (электроны) зарядов действие электрических сил становится несимметричным.

Пламя горелки типа Бунзена под воздействием электрического поля.

Ниже представлены эксперименты с пламенем Бунзеновской горелки, такое пламя изучено достаточно подробно, и может использоваться как удобный объект для понимания механизмов исследуемых воздействий. Сравнение режимов с воздействием и без дает информацию о степени влияния различных параметров внешнего энергетического источника.

При исследовании поведения ламинарного фронта пламени в ЭП была рассмотрена динамика смещения фронтов горения при включении/выключении ЭП [7]. На рис.4 представлены снимки пламени до включения ЭП (б) и в крайнем положении с ЭП (в).



а) б) в)

Рис. 4. Изображения пламени.
а – схема эксперимента б – без напряжения, в – при установившейся форме пламени

Движение противоположных (относительно оси трубки на одинаковой высоте от её среза) участков фронта горения отражает процесс изменения геометрии пламени. На рис. 5 приведены графики зависимости величины смещения этих участков (δ) от времени на высоте 20 мм от среза сопла. Можно отметить следующие особенности. Изменение положения фронта при включении поля составляет 30–35 мс, обратная перестройка фронтов (при снятии напряжения) длится около 40 мс, смещение режимов горения в сторону более богатых смесей (к α = 1) ведет к уменьшению этих времен. Характер движения правого и левого фронтов подобны, отличие заключается лишь в амплитуде движения (величина смещения левого фронта больше, чем правого). Аналогичное поведение фронта пламени наблюдается и на других высотах от среза сопла (5, 10, 15 мм). Представленные данные свидетельствуют о растяжении пламени ЭП. Прикладывая напряжение, можно оторвать пламя от кромки с одной стороны. Положение фронта горения при воздействии ЭП зависит от частоты и длительности импульсов. Можно подобрать такой частотный режим, что произойдет фиксация фронта пламени в нужном положении.

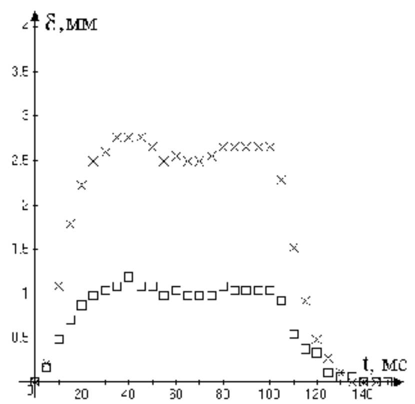
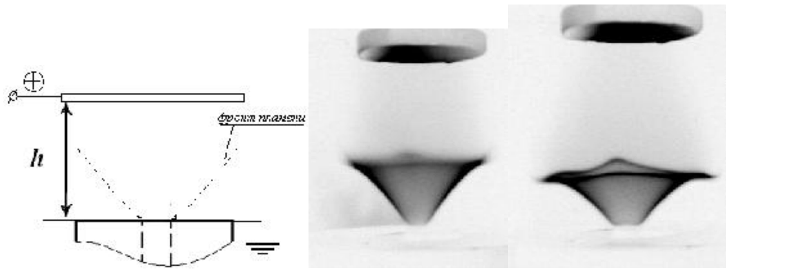


Рис.5. Величины смещения участков фронта пламени от времени:
× – со стороны отрицательного электрода,
– со стороны положительного.

Воздействие электрического поля при стабилизации пламени отрывной зоной за телом.

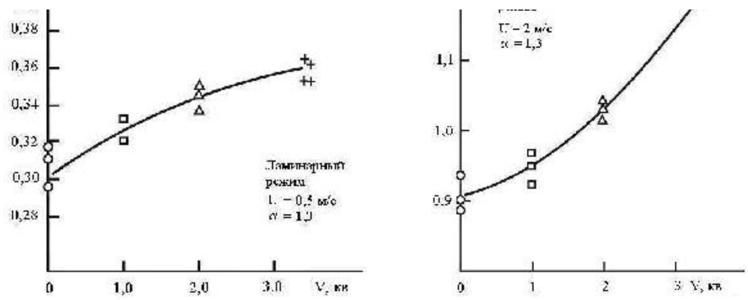
Выполнен цикл исследований при стабилизации пламени на отрывной зоне за центральным телом. В экспериментах изучалось влияние постоянного и импульсно-периодического ЭП на интегральные характеристики горения: скорость распространения, интегральную светимость промежуточных продуктов химических реакций, пределы стабилизации и устойчивость пламени. Принимая за скорость распространения пламени нормальную составляющую средней скорости истечения к поверхности фронта горения в ядре струи можно определить влияние ЭП.

На рис.6 показано влияние ЭП для ламинарного (рис.7а) и турбулентного (рис.7б) режимов горения пропано-воздушной смеси. При исследовании влияния временных параметров импульсно-



а) б) в)

Рис.6. Пламя в ЭП, а – схема эксперимента, б – без ЭП, в – U= 2 кВ



а) б)

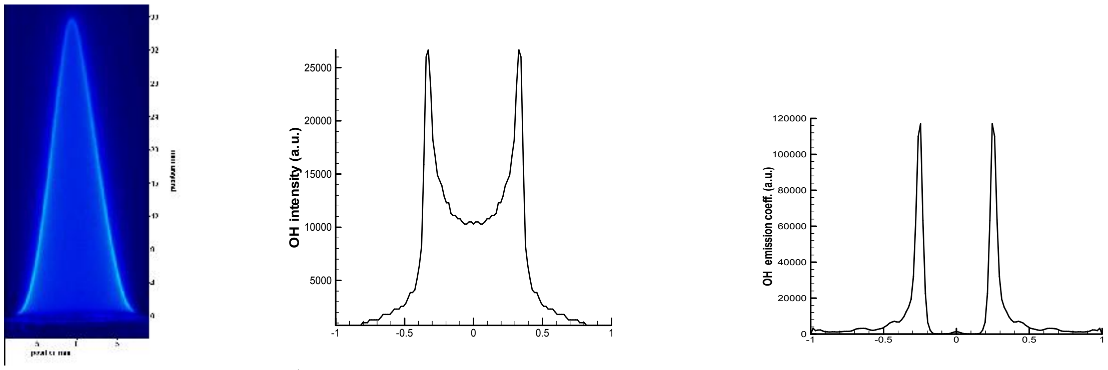
Рис.7. Зависимость скорости распространения пламени от напряжения а – ламинарный режим, б – турбулентный

периодического ЭП было установлено, что частота электрических импульсов, при которой происходит увеличение пульсаций пламени, связана с газодинамической неустойчивостью.

Приведенные выше данные свидетельствуют, что воздействие электрического поля на горение происходит через изменение газодинамических условий на фронте пламени. Оценим гидродинамическое воздействие на течение в предположении, что изменение скорости пламени вызвано торможением потока за счет энергии электрического поля. Подводимая мощность (по измерениям тока) не превышала ≈ 0,8 Вт, а мощность потока смеси (для ламинарного режима) ≈ 60 Вт. Такого воздействия (1,3%) недостаточно, чтобы скорость пламени увеличилась на 10-20%.

Вероятно, что воздействие на течение происходит непосредственно вблизи фронта горения. Сравним потери давления во фронте пламени с электрическими параметрами. По изменению геометрии пламени можно оценить потери давления во фронте горения для ламинарных режимов: $\Delta P = \rho_{см} u_{н}^{2}(\theta - 1)$, где $\rho_{см}$ – плотность исходной смеси, $u_н$ – нормальная к фронту пламени составляющая скорости смеси, θ – отношение температуры продуктов сгорания к температуре холодной смеси. С другой стороны, если представить поверхность пламени, как проводник в постоянном ЭП, то давление на его поверхность $\Delta P_{эл} = \varepsilon_0 E^2/2$ (где ε_0 – электрическая постоянная, E – напряжённость ЭП). Для ламинарной пропано-воздушной смеси $\Delta P \approx 1$ Па, при подаче постоянного напряжения $U = 2$кВ нормальная скорость $u_н$ возросла на ~12%, что привело к увеличению потерь давления во фронте на 0,25 Па. Для оценки возьмем среднюю величину напряженности ЭП $E=U/h$, тогда для U=2кВ $\Delta P_{эл} \approx 0.05$ Па. Различие в величинах значительное, но неоднородность ЭП может оказывать более сильное влияние на фронт пламени. Т.е. воздействие ЭП изменяет гидродинамику течения непосредственно вблизи фронта пламени, при этом отметим, что уход из зоны реакции носителей заряда (в большей степени положительных ионов) не может не отразится на скорости протекания реакций.

В настоящее время ведутся работы по томографической реконструкции полей концентрации промежуточных продуктов реакций (CH, OH, C_2) по результатам спектрозональной съемки пропано-воздушного пламени. Решена задача томографической реконструкции для высокоградиентного источника, описывающего распределение интенсивности собственного свечения пламени горелки типа Бунзена, принадлежащая к классу некорректно-поставленных обратных задач [10]. На рис.8 приведен пример восстановления интенсивности свечения радикала OH для гомогенного пропано-воздушной пламени без воздействия. Применение метода PIV в будущем даст возможность изучения распределения локальных скоростей распространения пламени при воздействии ЭП. Эти методы значительно расширяют исследовательские возможности и позволяют исследовать структуру фронта пламени при внешнем энергетическом воздействии.



а) б) в)

Рис.8. Пламя гомогенной пропано-воздушной смеси [10]:
а – изображение пламени на длине радикала OH; б – профиль интенсивности свечения радикала OH в обозначенном стрелкой сечении; в – реконструкция распределения радикала OH в этом сечении

Заключение

Представленные результаты свидетельствуют о возможности контролируемого влияния слабого электрического поля на процесс горения. Для электрического поля при очень малой энергии, вносимой в процесс горения, отмечается сильное воздействие, направленное на изменение гидродинамики течения вблизи фронта пламени.

Применение электрических полей, включая импульсно-периодическое воздействие, может способствовать увеличению интенсивности и расширению пределов стабильного горения.

Остается открытым для изучения вопрос о влиянии электрического поля на кинетику реакций. Для детального изучения необходимо исследование тонкой структуры фронта пламени, включающее в себя регистрацию полей концентрации промежуточных продуктов реакций и скоростей течения вблизи зоны горения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программой фундаментальных исследований «Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления» РАН № 1 «Фундаментальные проблемы горения и детонации в энергетике» (проект 1.2) и РФФИ (грант № 08-01-00582-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Calcote, H. F., Pease, R. N. Electrical Properties of Flames - Burner Flames in Longitudinal electric Fields // Industrial and Engineering Chemistry. 1951. V.43. P. 2726-2731.
2. Сепп В.А., Улыбышев К.Е. Экспериментальные исследования эмиссионных характеристик ламинарных диффузионных пламен в постоянном электрическом поле различной полярности // Теплофизика высоких температур. 1997. Т.35. № 5. С. 815-81
3. Ватажин А.Б., Лихтер В.А., Сепп В.А., Шульгин В.И. Влияние электрического поля на эмиссию окислов азота и структуру диффузионного ламинарного пропанового пламени. // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 13-23,
4. S.D. Marcum and B.N. Ganguly. Electric-field-induced flame speed modification // Combustion and Flame 2000. V. 143. C. 27–36.
5. J. Lawton and F.J. Weinberg, Electrical Aspects of Combustion (Clarendon, Oxford, 1969).
6. Гаранин А.Ф., Третьяков П.К., Тупикин А.В. Влияние постоянного и импульсно-периодического электрического поля на горение пропано-воздушной смеси. // ФГВ. 2008. Т.44, №1. С.22-25.
7. Воронцов С.С., Ганеев О.В., Третьяков П.К., Тупикин А.В. Динамика фронта ламинарного пламени гомогенной пропановоздушной смеси при импульсно-периодическом воздействии электрического поля // ФГВ. 2009. Т.45. №5. С.29-32.
8. Ягодников Д.А., Воронецкий А.В. Влияние внешнего электрического поля на особенности процессов воспламенения и горения. //ФГВ. 1994. Т. 30. №3. С. 3-12
9. Баев В.К., Ясаков В.А. Исследование устойчивости диффузионного пламени // Изв. СО АН СССР. 1969. №3. Вып.1
10. Denisova N. Plasma diagnostics using computed tomography method // IEEE Trans. Plasma Sci. 2009. V.37. №4. P.502-512.

Сведния об авторе: **Тупикин Андрей Викторович** – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, (7 383) 330 39 23 E-mail tupikin@itam.nsc.ru

КОЛЕБАНИЯ БЕЗМОМЕНТНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ И ШАРНИРНО-ЗАКРЕПЛЁННЫМИ ТОРЦАМИ И ЖЁСТКО ЗАЩЕМЛЁННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Хачанян А.А.

Исследуются собственные колебания незамкнутой ортотропной упругой цилиндрической оболочки с произвольной плоской направляющей, со свободными и шарнирно-закрепленными торцами и жестко защемленными граничными образующими.

1. Постановка задачи и некоторые математические особенности. На поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α,β), где $\alpha(0\le\alpha\le l)$ и $\beta(0\le\beta\le s)$ являются соответственно текущей длиной образующей и текущей длиной дуги направляющей кривой (рис. 1), l –длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей кривой.

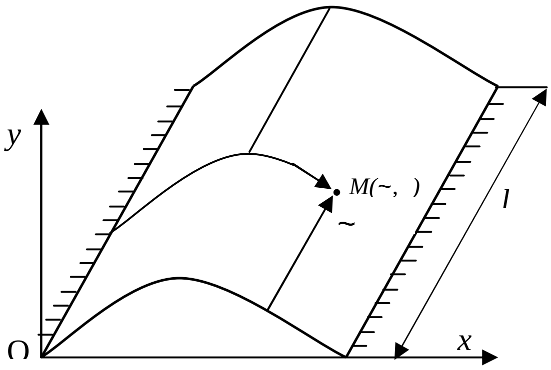


Рис.1.

Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой можно представить в виде ряда

$$R^{-2}=k^2(r_0/2+\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}r_m\cos km\beta),$$
$$k=2\pi/s,\ 0\le\beta\le s,\ \ \sum\nolimits_{m=1}^{\infty}\left|r_m\right|<+\infty. \tag{1}$$

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах α,β [1]

$$-B_{11}\frac{\partial^2u_1}{\partial\alpha^2}-B_{66}\frac{\partial^2u_1}{\partial\beta^2}-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{12}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right)=\lambda u_1$$
$$-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2u_1}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}\frac{\partial^2u_2}{\partial\alpha^2}-B_{22}\frac{\partial^2u_2}{\partial\beta^2}+B_{22}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_3}{R}\right)=\lambda u_2 \tag{2}$$
$$-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}-\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}+\frac{B_{22}}{R^2}u_3=\lambda u_3$$

Здесь u_1,u_2,u_3 – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α,β и нормали к поверхности оболочки, B_{ik} – коэффициенты упругости, $R^{-1}=R^{-1}(\beta)$ – кривизна направляющей кривой поверхности. $\lambda=\omega^2\rho$, где ω – частота собственных колебаний, ρ – плотность материала. Граничные условия имеют вид [1]

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{\partial u_1}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=0 \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=l}=\left.u_2\right|_{\alpha=l}=0 \tag{4}$$

$$\left.u_1\right|_{\beta=0,s}=\left.u_2\right|_{\beta=0,s}=0 \tag{5}$$

где соотношения (3) являются условиями свободного края при $\alpha=0$, условия (4) являются условиями шарнирного закрепления при $\alpha=l$, а соотношения (5) – условиями жесткого защемления при $\beta=0,\beta=s$. Задача (2)–(5) самосопряженная, неотрицательно определенная и имеет участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $[0,\lambda_0]$– множеством значений функции

$$\Omega(\beta,\theta)=\frac{B_{66}(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta}{B_{66}(B_{11}\sin^4\theta+B_{22}\cos^4\theta)+(B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta} \quad (6)$$
$$0\le\beta\le s,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

Появление этого участка непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (2) по Дуглису – Ниренбергу. Для существования нетривиального решения задачи (2)-(5) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы некоторого условия алгебраического характера. Это условие называется условием дополнительности (условия Шапиро–Лопатинского) [2], [3]. Для задачи (2)–(5) условие Шапиро–Лопатинского эквивалентно условию

$$Q(\lambda,\beta)\Big|_{\beta=0,\beta=s}=B_{66}(\lambda-B_{22}R^{-2}(\beta))+\sqrt{B_{22}\lambda(B_{11}\lambda-(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)R^{-2}(\beta))}\Big|_{\beta=0,s}\neq 0\,. \quad (7)$$

Пусть на множестве $\Omega_\gamma=\{\lambda(0),\lambda(s)\}$ нарушается условие (7).

Справедливо следующее утверждение: *вне множества* $[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$ *спектр задачи* (2)–(5) *состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, точками сгущения которых кроме* $+\infty$ *могут служить* λ_0, $\lambda(0)$ *и* $\lambda(s)$.

Задача (2)–(5) не допускает разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова. В качестве базисных функций используются следующие функции:

$$w_m(\beta)=1-\cos km\beta,\ \ k=2\pi/s,\ \ 0\le\beta\le s,\ \ m=\overline{1,+\infty}\,. \quad (8)$$

2. Дисперсионные уравнения. Решение системы (2), удовлетворяющее условиям (5), ищем в виде

$$u_1=\exp(k\chi\alpha)\left(\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}u_m\sin km\beta\right),\ \ u_2=\exp(k\chi\alpha)\left(\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}v_m(1-\cos km\beta)\right),$$
$$w=k\exp(k\text{æ}\alpha)\left(\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}w_m\sin km\beta\right),\quad w=u_3/R. \quad (9)$$

Здесь u_m, v_m, w_m – неопределенные коэффициенты, χ – неопределенный коэффициент затухания. Подставим выражения (9) в систему (2). Из первых двух уравнений получаем соотношения:

$$c_m u_m=\chi\,a_m w_m,\ \ c_m v_m=-m\,b_m w_m\,, \quad (10)$$
$$a_m=\frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2+\frac{B_{12}}{B_{11}}\eta^2,\ b_m=\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}\chi^2-\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta^2,\ \eta^2=\frac{\lambda}{k^2B_{66}},$$
$$c_m=\chi^4-\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2\chi^2+\frac{B_{11}+B_{66}}{B_{11}}\eta^2\chi^2+(m^2-\eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right). \quad (11)$$

Из третьего уравнения, учитывая (10), получим бесконечную систему уравнений:

$$\left((r_0-r_{2m})A_m-2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2\right)w_m+\sum_{n=1,n\neq m}^{\infty}(r_{|n-m|}-r_{n+m})A_n w_n=0,\ \ m=\overline{1,\infty}, \quad (12)$$

$$A_n=p_n/c_n\,,\ \ p_n=c_n+n^2b_n-B_{12}/B_{22}\,\chi^2a_n,\quad n=\overline{0,+\infty}\,. \quad (13)$$

Бесконечный определитель системы (12) при $\lambda\notin[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$ и χ в области определения коэффициентов (13) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям ([3-4]). Чтобы система (12) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$D\left(\chi^2,\eta^2,B_{11},B_{12},B_{22},B_{66},r_0,r_1,\ldots,r_m,\ldots\right)=0\,. \quad (14)$$

Предположим, что χ_1,χ_2 – различные корни уравнения (14) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_3=-\chi_1$ и $\chi_4=-\chi_2$ также являются различными корнями уравнения

(14). Пусть $\left(w_1^{(j)}, w_2^{(j)}, \ldots, w_m^{(j)}, \ldots\right)$, $j = \overline{1,4}$ являются нетривиальными решениями системы (12) при χ_j, $j = \overline{1,4}$ соответственно. Представим решение задачи (2)–(5) в виде

$$u_i = \sum\nolimits_{j=1}^{4} u_i^{(j)}, \ \ i = 1,2, \qquad w = \sum\nolimits_{j=1}^{4} w^{(j)}\ , \tag{15}$$

где $u_i^{(j)}, w^{(j)}$, $i = 1,2$, $j = \overline{1,4}$ – решения системы (2), имеющие вид (9) при $\chi = \chi_j$. Подставляя (15) в граничные условия (3), (4), в итоге получим совокупность систем уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} \frac{\chi_j R_{2j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} w_m^{(j)} = 0, \\
&\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{1j}^{(m)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} \frac{b_m^{(j)}}{c_m^{(j)}} \exp(z_j) w_m^{(j)} = 0
\end{aligned} \qquad m = \overline{1,+\infty} \tag{16}$$

$$R_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)}, \ \ R_{2j}^{(m)} = (a_m^{(j)} + b_m^{(j)}), \ \ z_j = k\chi_j l. \tag{17}$$

а $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ – значения a_m, b_m, c_m из (11) при $\chi = \chi_j$ соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (16) имела нетривиальное решение, достаточно, чтобы совокупность уравнений

$$\operatorname{Det} \begin{Vmatrix}
R_{11}^{(m)} & R_{12}^{(m)} & R_{11}^{(m)} \exp(z_1) & R_{12}^{(m)} \exp(z_2) \\
\chi_1 R_{21}^{(m)} & \chi_1 R_{21}^{(m)} & -\chi_1 R_{21}^{(m)} \exp(z_1) & -\chi_1 R_{21}^{(m)} \exp(z_2) \\
R_{11}^{(m)} \exp(z_1) & R_{12}^{(m)} \exp(z_2) & -R_{11}^{(m)} & -R_{12}^{(m)} \\
b_m^{(1)} \exp(z_1) & b_m^{(2)} \exp(z_2) & b_m^{(1)} & b_m^{(2)}
\end{Vmatrix} = 0, \ \ m = \overline{1,+\infty} \tag{18}$$

вне множества $[0,\lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ имела λ -решение. Уравнения (18) эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned}
&K_{2m}\left(\eta^2, r_0, r_1, \ldots r_m, \ldots\right)(1 - \exp(2z_1 + 2z_2)) + \\
&+(x_1 + x_2) K_{5m}\left(\eta^2, r_0, r_1, \ldots r_m, \ldots\right)[z_1 z_2]\left(\exp(z_2) + \exp(z_1)\right) = 0, \ m = \overline{1,+\infty},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&[z_1 z_2] = kml\left(\exp(z_1) - \exp(z_2)\right) / (z_1 - z_2)\ , \\
&K_{im}\left(\eta_m^2, r_0, r_1, \ldots r_m, \ldots\right) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + (-1)^i \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \delta_4, \ i = 2,5\ , \\
&\delta_1 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2}\left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_m^2\right), \ \eta_m = \frac{\eta}{m}, \ x_j = \frac{\chi_j}{m}, \ j = 1,2, \\
&\delta_2 = -\eta_m^2\left(B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) + B_{12}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{22}B_{66} - B_{12}B_{66}\eta_m^2\right) / B_{11}^3, \\
&\delta_3 = \frac{B_{12}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3}\eta_m^2\left(1 - \eta_m^2\right), \ \ \delta_4 = \frac{B_{12}B_{66}(B_{12} + B_{22})}{B_{11}^3}\eta_m^4\left(1 - \eta_m^2\right), \ z_j = kmx_j l.
\end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение: *если* $R^{-2}(\beta)$ *можно представить в виде (1) и* $\lambda \notin [0,\lambda_0] \cup \Omega_\gamma$ *, то уравнения (19) являются дисперсионными уравнениями задачи* (2)–(5), *где* $æ_2 = mx_2$ *и* $æ_2 = mx_2$ *– различные корни уравнения* (14) *с неположительными действительными частями.*

Заметим, что если $\chi_1 = mx_1$ и $\chi_2 = mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $ml \to \infty$ уравнения (19) преобразуются в уравнения:

$$K_{2m}\left(\eta_m^2, r_0, r_1, \ldots r_m, \ldots\right) = \delta_1 x_1^2 x_2^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \delta_4 = 0, \quad m = \overline{1,+\infty}\ . \tag{21}$$

Уравнения (21) являются дисперсионными уравнениями для полубесконечной ортотропной безмоментной незамкнутой цилиндрической оболочки с призвольной плоской направляющей со свободным торцом, когда граничные образующие жестко защемлены.

3. Частные случаи. В общем случае решение уравнения (14) представляет собой сложную задачу. Поэтому рассмотрим следующие частные случаи.

Случай а) $R^{-2}=k^2 r_0/2\left(r_m=0,\ m=\overline{1,+\infty}\right)$**,** т.е. имеем безмоментную круговую ортотропную цилиндрическую оболочку открытого профиля со свободными и шарнирно закрепленными торцами, когда граничные образующие жестко защемлены. В этом случае система (12) принимает вид:

$$\left((r_0-r_{2m})A_m-2\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2\right)w_m=0,\ m=\overline{1,\infty}, \tag{22}$$

Следовательно, уравнение (14) распадается на совокупность уравнений

$$\begin{gathered}\left(\eta^2-\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}\frac{r_0}{2}\right)\chi^4-\eta^2\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2-\frac{(B_{11}+B_{66})}{B_{11}}\eta^2+\right.\\ \left.+\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2+B_{66}B_{22}}{B_{11}B_{66}}\frac{r_0}{2}\right)\chi^2+\eta^2(m^2-\eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\frac{r_0}{2}\right)=0,\ m=\overline{1,+\infty}\end{gathered} \tag{23}$$

Пусть $\lambda\notin[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$ и $\chi_1=mx_1,\chi_2=mx_2$ являются корнями уравнения (23) с неположительными действительными частями. Подставляя эти выражения в (19), придем к дисперсионным уравнениям для безмоментной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными и шарнирно закрепленными торцами, когда граничные образующие жестко защемлены

$$\begin{gathered}K_{2m}\left(\eta_m^2,r_0\right)\left(1-\exp(2z_1+2z_2)\right)+\\ +(x_2+x_1)K_{5m}\left(\eta_m^2,r_0\right)[z_1z_2]\left(\exp(z_1)+\exp(z_2)\right)=0,\quad m=\overline{1,\infty},\end{gathered} \tag{24}$$

$$K_{im}\left(\eta_m^2,r_0\right)=(1-\eta_m^2)\left[(1+\varepsilon_m)\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}-\eta_m^2\right]+(-1)^{i-1}x_1x_2\left(\eta_m^2-\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}\varepsilon_m\right),\ i=2,5\,.$$

Заметим, что если $\chi_1=mx_1$ и $\chi_2=mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $l\to\infty$ уравнения (24) преобразуются в уравнения

$$K_{2m}\left(\eta_m^2,r_0\right)=(1-\eta_m^2)\left[(1+\varepsilon_m)\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}-\eta_m^2\right]-x_1x_2\left(\eta_m^2-\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}\varepsilon_m\right)=0,\ m=\overline{1,+\infty}\,. \tag{25}$$

Уравнения (25) являются дисперсионными уравнениями безмоментной ортотропной полубесконечной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными и шарнирно закрепленными торцами, когда граничные образующие жестко защемлены.

При $\varepsilon_m\to 0$ уравнения (23) преобразуются в уравнения

$$c_m=\chi^4-\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}m^2-\frac{(B_{11}+B_{66})}{B_{11}}\eta^2\right)\chi^2+(m^2-\eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right)=0,\quad m=\overline{1,+\infty}\,, \tag{26}$$

которые являются характеристическими уравнениями системы, моделирующие планарные колебания прямоуголной пластинки со свободными и шарнирно закрепленными противолежащими сторонами, когда остальные стороны жестко защемлены. Уравнения (24) в этом случае преобразуются в уравнения

$$\begin{gathered}K_{2m}(\eta_m^2)\left(1-\exp(2z_1+2z_2)\right)+\\ +(x_2+x_1)K_{5m}(\eta_m^2)[z_1z_2]\left(\exp(z_1)+\exp(z_2)\right)=0,\quad m=\overline{1,\infty}\end{gathered} \tag{27}$$

$$K_{im}(\eta_m^2)=(1-\eta_m^2)\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}}-\eta_m^2\right)+(-1)^{i-1}\eta_m^2x_1x_2,\ i=2,5\,,$$

Здесь $\chi_1=x_1m,\ \chi_2=x_2m-$ корни уравнения (26) с неположительными действительными частями. Уравнения (27) являются дисперсионными уравнениями прямоугольной пластинки со свободными и шарнирно закрепленными противолежащими сторонами, когда остальные стороны жестко защемлены. Если $\chi_1=mx_1$ и $\chi_2=mx_2$ имеют отрицательные действительные части, то при $l\to\infty$ уравнения (27) распадаются на совокупность уравнений

$$K_{2m}\left(\eta_m^2\right) = (1-\eta_m^2)\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2\right) - \eta_m^2 x_1 x_2 = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{28}$$

Уравнения (28) являются уравнениями Рэлея для полубесконечной ортотропной пластинки–полосы со свободным торцом и жестко защемленными боковыми краями.

Случай б) $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1\cos k\beta)$ $(r_m = 0,\ m=\overline{2,+\infty},\ m=\overline{1,+\infty})$**.** В этом случае система уравнений (12) принимает вид:

$$\left\{ r_1 p_{m-1}\omega_{m-1} + r_{mm}\omega_m + r_1 p_{m+1}\omega_{m+1} = 0, \quad m=\overline{1,+\infty}\right., \tag{29}$$

$$\omega_m = w_m / c_m, \ \ r_{mm} = r_0 p_m - 2B_{66}\eta^2 c_m / B_{22} \tag{30}$$

где p_m, c_m определяются формулами (13), (11). Для нахождения нетривиального решения приравняем нулю её определитель

$$D\left(\chi^2,\eta^2,B_{11},B_{12},B_{22},B_{66},r_0,r_1\right)=0 \tag{31}$$

Справедливо следующее утверждение [3-4]*: при фиксированном* $m\ge 2$ *и при условии* $\lambda\notin[0,\lambda_0]\cup\Omega_\gamma$ *уравнения* (31) *имеют* χ^2*– формальные решения вида*

$$\left(\chi_j^{(i)}\right)^2 = \left(\chi_j^{(m)}\right)^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2 + \beta_{jm}^{(i)} r_1^4 + \ldots, \qquad i,j=1,2 \tag{32}$$

где $\chi_j^{(m)}$*– корни уравнения* $r_{mm}=0$ *(или уравнения (23)) с неположительными действительными частями и*

$$\alpha_j^{(m)} = \left.\frac{p_m\left(p_{m-1}r_{m+1m+1} + p_{m+1}r_{m-1m-1}\right)}{r_{m-1m-1}r_{m+1m+1}r'_{mm}}\right|_{\chi=\chi_j^{(m)}}, \quad j=1,2\,. \tag{33}$$

Здесь r'_{mm} – производная по χ^2. Таким образом, в этом случае, для нахождения безразмерных характеристик коэффициентов затухания $k\chi_j^{(i)},\ i,j=1,2$ можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j^{(i)} \approx -\left(\left(\chi_j^{(m)}\right)^2 + \alpha_j^{(m)} r_1^2\right)^{1/2}, \ i,j=1,2\,, \tag{34}$$

а для нахождения характеристик собственных частот η/m – уравнения (19).

Автор выражает благодарность Г.Р. Гулгазаряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем эллиптических в смысле А.Дуглиса –Л.Ниренберга //Изв. АН СССР. Математика. 1964. Т.28. С.665-706. Труды Матем. ин-та АН СССР, 1970. Т. 110. №6. С. 233-297.
3. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны //Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С. 84-99.
4. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями // Прикл. Механика. 2006. Т.42, № 12. С. 97-114.

Сведения об авторе:

Хачанян Алвард Артаваздовна – соискатель кафедры мат.анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна.
Дом. адрес: 0062, Ереван, Армения. ул. Молдовакан, кв. 9, д. 44. Тел: (+37410) 63-86-83.

О ЗАДАЧЕ ОТРАЖЕНИЯ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ ОТ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Хачатрян Л. С.

Задачам отражения упругих волн от плоской границы среды посвящены многочисленные исследования [1]. Сравнительно мало работ связаны с вопросами отражения изгибных волн от плоской кромки тонкой пластинки [2].

В этой работе приводятся решения задачи отражения изгибных волн от кромки пластинки при усложненных граничных условиях. Для частного случая свободной кромки, как предельный случай отсутствия отраженной волны, получается решение задачи локализованных изгибных колебаний [3,4].

1.Рассматривается область

$$-\infty < x < \infty, 0 \le y < \infty, -h \le z \le h\,.$$

На кромку пластинки $y = 0$ падает изгибная волна. Требуется определить отраженную волну при различных условиях упругого закрепления кромки y=0.

Уравнение изгибных калебании изотропной пластинки по теории Кирхгофа имеет вид [5]

$$D\Delta^2 w + 2gh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

где w w – функция прогиба пластины, ρ – плотность материала, $\underline{D}$ – жесткость на изгиб

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Если представить решение уравнения (1.1) в виде гармонических волн [2]

$$w = w_0 \exp i(\omega t - k_1 x + k_2 y), \tag{1.3}$$

то получается следующее характеристическое уравнение:

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2 = 0 \tag{1.4}$$

Из (1.4) можно определить волновое число k_2 посредством k_1 и ω в виде четырех корней,

где

$$\begin{aligned} &k_{21} = -k_{22} = \sqrt{\Omega - k_1^2},\ \ k_{23} = -k_{24} = is, \\ &S = \sqrt{\Omega + k_1^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Очевидно, что для существования падающей волны необходимо условие

$$\Omega > k_1^2, \quad \Omega = (2\rho h)^{1/2} D^{-1/2}\omega. \tag{1.6}$$

Из (1.3) и (1.5), с учетом (1.6), следует, что решение для падающей волны имеет вид

$$W_n = A\exp i(\omega t - k_1 x + k_{21} y), \ \ k_1 \ge 0, \tag{1.7}$$

а для отраженной волны

$$W_{OTP} = B\exp i(\omega t - k_1 x - k_{21} y) + C\exp i(\omega t - k_1 x + k_{23} y) \tag{1.8}$$

Согласно [1.5], в [1.8] слагаемое с амплитудой C является неоднородной волной, т.к. она затухает по глубине. Амплитуды отраженних волн B и C должны определяться удовлетворением граничными условями при $y = 0$.

2. Упругое закрепление. Рассматривается случай

$$W = 0, D\partial^2 w / \partial y^2 - C_2 \partial w / \partial y = 0, \quad \text{при } y = 0. \tag{2.1}$$

При $C_2 = 0$ получается случай, когда край пластинки шарнирно закреплен [7]. Подстановка

$$W = W_n + W_{OTP}$$

из (1.7), (1.8) в граничные условия (2.1) приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} A + B + C = 0 \\ k_{21}(k_{21} + i\alpha)A + k_{21}(k_{21} - i\alpha)B + k_{23}(k_{23} + i\alpha)C = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\alpha = C_2 D^{-1}$.

Получается

$$\begin{gathered} B = -\frac{2\Omega + \alpha(\sqrt{\Omega + k_1^2} + i\sqrt{\Omega - k_1^2})}{2\Omega + \alpha(\sqrt{\Omega + k_1^2} - i\sqrt{\Omega - k_1^2})} A, \\ C = \frac{2i\alpha\sqrt{\Omega - k_1^2}}{2\Omega + \alpha(\sqrt{\Omega + k_1^2} - i\sqrt{\Omega - k_1^2})} A. \end{gathered} \tag{2.3}$$

При $\alpha \to 0$ получим $B = -A$, $C = 0$ – условия Навье [7], при шарнирном закреплении неоднородная волна не существует.

При $\alpha \to \infty$ получим

$$\begin{gathered} B = -\Omega^{-1}(k_1^2 + i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A, \\ C = -\Omega^{-1}(\Omega - k_1^2 - i\sqrt{\Omega^2 - k_1^4})A. \end{gathered} \tag{2.4}$$

(В формулах статьи [7], соответствующих формуле (2.4), имеется неточность).

3. Скользящий контакт

$$\partial w / \partial y = 0, \ \partial^3 w / \partial y^3 - C_1 w = 0 \tag{3.1}$$

Алгебраические уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} k_{21}A - k_{21}B + k_{23}C = 0, \\ (k_{21}^3 + \beta)A - (k_{21}^3 - \beta)B - (k_{23}^3 + \beta)C = 0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\beta = C_1 D^{-1}$.

Получается

$$B=\frac{k_{21}^3+S^2+2\beta}{k_{21}^3-S^2}A,\quad C=-\frac{2\beta i k_{21}}{S(k_{21}^3-S^2)}A \tag{3.3}$$

При $\beta\to 0$ получим $B=A,\ C=0,$ (3.4)

неоднородная волна не отражается.

$$\beta\to\infty,\ B=2A,\ C=-2i\sqrt{\Omega-k_1^2} \tag{3.5}$$

4. Свободный край с пружиной

$$y=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{4.1}$$

$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(2-\nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right]-C_1 w=0$$

Алгебраические уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}\left(k_{21}^2+\nu k_1^2\right)A+\left(k_{21}^2+\nu k_1^2\right)B+\left(k_{23}^2+\nu k_1^2\right)C=0,\\ \left(ik_{21}^3+\left(2-\nu\right)ik_{21}k_1^2+\beta\right)A-\left(ik_{21}^3+\left(2-\nu\right)ik_{21}k_1^2-\beta\right)B+\left(ik_{23}^3+\left(2-\nu\right)ik_{23}k_1^2+\beta\right)C=0,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\beta=C_1D^{-1}$.

Получается

$$B=\frac{-2i\beta\Omega+k_1^4\left(\nu-1\right)^2\left(k_{21}-is\right)+\Omega^2\left(k_{21}-is\right)-2k_1^2\Omega\left(\nu-1\right)\left(k_{21}+is\right)}{\left(k_{21}+is\right)\left[k_1^4\left(\nu^2-1\right)+\Omega^2+2ik_1^2k_{21}s\left(\nu-1\right)+\beta\left(ik_{21}+s\right)\right]}A \tag{4.3}$$

$$C=\frac{2ik_{21}\left(k_1^4\left(\nu-1\right)^2-\Omega^2\right)}{\left(k_{21}+is\right)\left[-ik_1^4\left(\nu^2-1\right)-i\Omega^2+2k_1^2k_{21}s\left(\nu-1\right)+\beta\left(k_{21}-is\right)\right]}A$$

$\beta\to 0$

$$B=\frac{\left(k_{21}-is\right)\left(k_1^4+\Omega^2\right)-2k_1^2\Omega\left(\nu-1\right)\left(k_{21}+is\right)}{\left(k_{21}+is\right)\left[k_1^2\left(\nu-1\right)\left(k_1^2\left(\nu+1\right)+2ik_{21}s\right)+\Omega^2\right]}A \tag{4.4}$$

$$C=\frac{2ik_{21}\left(k_1^4\left(\nu-1\right)^2+\Omega^2\right)}{\left(k_{21}+is\right)\left[-ik_1^2\left(\nu-1\right)\left(k_1^2\left(\nu-1\right)-2k_{21}s\right)-i\Omega^2\right]}A$$

5. Свободный край с сопротивлением

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-C_2\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(2-\nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}=0,\ y=0$$

Алгебраические уравнения имеют вид:

$$\left(k_{21}^2+\nu k_1^2-\alpha ik_1\right)A+\left(k_{21}^2+\nu k_1^2-\alpha ik_1\right)B+\left(k_{23}^2+\nu k_1^2-\alpha ik_1\right)C=0 \tag{5.2}$$

$$\left[ik_{21}\left(k_{21}^2-(2-\nu)k_1^2\right)\right]A-\left[ik_{21}\left(k_{21}^2-(2-\nu)k_1^2\right)\right]B+\left[ik_{23}\left(k_{23}^2-(2-\nu)k_1^2\right)\right]C=0$$

Получается

$$B=-\left[1-\frac{2}{\Omega-k_1^2(1-\nu)-i\alpha k_1}\right]A \tag{5.3}$$

$$C=\frac{2}{\Omega+k_1^2(1-\nu)+i\alpha k_1}A$$

$$\alpha\to 0,\quad B=\left[\frac{2}{\Omega-k_1^2(1-\nu)}-1\right]A,\quad C=\frac{2}{\Omega+k_1^2(1-\nu)}A \tag{5.4}$$

$$\alpha\to\infty,\quad B=-\left[1+\frac{2}{ik_1}\right]A,\quad C=\frac{2}{ik_1}A \tag{5.5}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, North-Holl. Publ. Co, 1984, p. 425.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) М.: Наука, 1982. 332 с.
3. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа.//Акуст. журн. 1960. № 1. С.124-126.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки.//Прик. Механика. 1994. Т. 30. № 2. С. 61-68.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
6. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636 с.
7. Белубекян М.В., Хачатрян Л.С. Отражение изгибной волны от кромки пластинки. // Изв.НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.30-33.

Сведения об авторе:

Хачатрян Лейли Самвеловна – Ереванский колледж права, экономики и управления, преподаватель, тел.: (+37410) 66-69-88, e-mail: Khachatryan@mail.am

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Шавлакадзе Н. Н.

Рассматривается кусочно-однородная упругая ортотропная пластинка, усиленная конечным включением, выходящим на границу раздела под прямым углом и нагруженным тангенциальными силами. Определяются контактные напряжения вдоль линии контакта, устанавливается поведение контактных напряжений в окрестности сингулярных точек. С применением методов теории аналитических функций задача сводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению на конечном отрезке. При помощи интегрального преобразования получена задача Римана, решение которой представляется в явном виде.

Рассматривается кусочно-однородная ортотропная упругая пластинка, усиленная конечным включением, находящаяся под действием тангенциального усилия с интенсивностью $\tau_1^0(x)$. Относительно включения, имеющего вид слабоискривленной накладки малой толщины, предполагается, что оно жестко сцеплено с пластинкой и растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии. Принимается условие совместимости горизонтальных деформаций включения и упругой кусочно-однородной сплошной пластинки, загруженной тангенциальными напряжениями. Нормальное контактное напряжение скачка не имеет.

Задача заключается в определении скачка $\tau_1(x)$ контактных тангенциальных напряжений вдоль линии контакта и в установлении их поведения в окрестностях концов включения. Она формулируется так: пусть упругое тело S занимает плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, которая вдоль отрезка $l_1 = (0,1)$ содержит упругое включение с модулем упругости $E_0(x)$, толщиной $h_0(x)$, коэффициентом Пуассона ν_0 и состоит из двух полуплоскостей из различных материалов

$S_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0,\ z \notin \overline{l_1} = [0,1]\}$ и $S_2 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 0\}$

спаянных вдоль оси $x = 0$. Величины и функции, отнесенные к полуплоскости S_k, будем отмечать индексом k ($k = 1,2$), а граничные значения иных функций на верхнем и нижнем краях включения будем отмечать индексами плюс и минус , соответственно . Будем считать, что левая и правая полуплоскости однородные и главные направления упругости совпадают с осями координат.

На границе раздела двух материалов имеем условия неразрывности

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{(2)}, \qquad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)}, \qquad u_1 = u_2, \qquad v_1 = v_2 \tag{1}$$

где $\sigma_x^{(i)}, \tau_{xy}^{(i)}$ – компоненты напряжения, u_i, v_i – компоненты перемещения ($i = 1,2$).

На отрезке l_1 имеем следующие условия:

$$\frac{du_1^{(0)}(x)}{dx} = \frac{1}{E(x)}\{P_0 - \int_0^x \left[\tau_1(t) - \tau_1^0(t)\right]dt\}, \qquad x \in l_1 \quad E(x) = \frac{E_0(x)h_0(x)}{1-\nu_0^2} \tag{2}$$

Здесь $u_1^{(0)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек включения, а условие равновесия включения имеет вид:

$$P_0 - \int_0^1 (\tau_1(t) - \tau_1^0(t))dt = P \tag{3}$$

где P_0 и P – неизвестные осевые усилия в точках $x = 0$ и $x = 1$. Для их определения к условиям (3) следует присоединить соотношения

$$P_0 = \int_{-h_0(0)/2}^{h_0(0)/2} \sigma_x^{(1)}(0,y)dy \ , \ P = \int_{-h_0(1)/2}^{h_0(1)/2} \sigma_x^{(1)}(1,y)dy \tag{4}$$

где $\sigma_x^{(1)}(x,y)$ – горизонтальная компонента поля напряжений в полуплоскости S_1.

Для компонент напряжения и смещения в полуплоскости S_1 имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_y^{(1)+} - \sigma_y^{(1)-} = 0, \qquad \tau_{xy}^{(1)+} - \tau_{xy}^{(1)-} = \tau_1(x), \qquad u^+ = u^-, \qquad v^+ = v^-,\ 0<x<1 \tag{5}$$

С помощью формул С. Г. Лехницкого [1] поставленная задача сводится к отысканию функций $\Phi_k(z_k)$ и $\Psi_k(z_k)$ $(k=1,2)$, голоморфных соответственно в областях S_1 и S_2 по граничным условиям (5) и (1) на отрезке l_1 и на линии раздела. Относительно $\Phi_1(z_1)$ и $\Psi_1(z_1)$ получаются задачи линейного сопряжения, общее решение которых представляются в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z_1) &= -\frac{\rho_1}{4\pi\beta_1(r_1-\rho_1)}\int_0^1 \frac{\tau_1(t)dt}{t-z_1} + w_1(z_1) \equiv \frac{\rho_1}{\beta_1} w_0(z_1) + w_1(z_1) \\
\Psi_1(\zeta_1) &= \frac{r_1}{4\pi\gamma_1(r_1-\rho_1)}\int_0^1 \frac{\tau_1(t)dt}{t-\zeta_1} + w_2(\zeta_1) \equiv -\frac{r_1}{\gamma_1} w_0(\varsigma_1) + w_2(\varsigma_1)
\end{aligned} \tag{6}$$

где $w_1(z_1)$ и $w_2(\varsigma_1)$ – аналитические функции соответственно в полуплоскостиях $\operatorname{Re} z_1 > 0$ и $\operatorname{Re}\varsigma_1 > 0$. $\rho_k = -(\beta_k^2 + \nu_k)/E_k$, $r_k = -(\gamma_k^2 + \nu_k)/E_k$; $\pm i\beta_k$, $\pm i\gamma_k$ $(\beta_k > \gamma_k)$ – корни характеристического уравнения.

При помощи теоремы и формулы Коши получим

$$w_1(z_1) = \frac{I_1}{\Delta}\overline{w_0(-\overline{z_1})} + \frac{I_2}{\Delta}\overline{w_0(-\frac{\gamma_1}{\beta_1}\overline{z_1})}, \quad w_2(\varsigma_1) = \frac{I_1^*}{\Delta}\overline{w_0(-\frac{\beta_1}{\gamma_1}\overline{\varsigma_1})} + \frac{I_2^*}{\Delta}\overline{w_0(-\overline{\varsigma_1})}$$

где (7)

$$I_1 = -\Delta_{11}\beta_1\rho_1 - \Delta_{21}\rho_1 + \Delta_{31}\rho_1^2 + \Delta_{41}\beta_1 r_1\rho_1, \qquad I_2 = \Delta_{11}\gamma_1 r_1 + \Delta_{21} r_1 - \Delta_{31} r_1^2 - \Delta_{41}\gamma_1\rho_1 r_1$$

$$I_1^* = \Delta_{21}\beta_1\rho_1 + \Delta_{22}\rho_1 - \Delta_{23}\rho_1^2 - \Delta_{24}\beta_1 r_1\rho_1, \qquad I_2^* = -\Delta_{21}\gamma_1 r_1 - \Delta_{22} r_1 + \Delta_{23} r_1^2 + \Delta_{24}\gamma_1\rho_1 r_1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1^2 & \gamma_1^2 & -\beta_2^2 & -\gamma_2^2 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \rho_1\beta_1 & r_1\gamma_1 & \rho_2\beta_2 & r_2\gamma_2 \\ \beta_1^2 r_1 & \gamma_1^2\rho_1 & -\beta_2^2 r_2 & -\gamma_2^2\rho_2 \end{vmatrix}$$

Δ_{ij} $(i, j = 1,2,3,4)$ – алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы.

Граничное условие (2) при $0 < x < 1$ эквивалентно условию

$$\rho_1\Phi_1(x) + \rho_1\overline{\Phi_1(x)} + r_1\Psi_1(x) + r_1\overline{\Psi_1}(x) = \frac{1}{E(x)}[P_0 - \int_0^x \{\tau_1(t) - \tau_1^0(t)\}dt] \tag{8}$$

Подставляя в него выражения (6) и (7) , после несложных операций получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \frac{\varphi'(t)dt}{t-x} - \frac{k_1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \frac{\varphi'(t)dt}{t+x} - \frac{k_2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \frac{\varphi'(t)dt}{\beta_1 t + \gamma_1 x} - \frac{k_3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \frac{\varphi'(t)dt}{\gamma_1 t + \beta_1 x} = \\
&-\frac{\sqrt{2\pi}k_4}{E(x)}\varphi(x) - \sqrt{2\pi} f_0(x), \qquad 0 < x < 1
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\varphi(x) = P_0 - \int_0^x \tau_1(t)dt, \qquad \varphi(1) = P - P_0 - \int_0^1 \tau_1^0(t)dt \equiv T_0, \quad f_0(x) = \frac{k_4}{E(x)}\left(\int_0^x \tau_1^0(t)dt + P_0\right)$$

$$k_1=\frac{\rho_1 I_1+r_1 I_2^*}{\Delta}\delta,\quad k_2=\frac{\rho_1 I_2\beta_1}{\Delta}\delta,\quad k_3=\frac{r_1 I_1^*\gamma_1}{\Delta}\delta,\quad k_4=(r_1-\rho_1)\delta>0,\quad \delta=\left(\frac{r_1^2}{\gamma_1}-\frac{\rho_1^2}{\beta_1}\right)^{-1}.$$

Если жесткость включения изменяется по линейному закону, т.е. $E(x)=hx,\quad x\in(0,1)$, производя в (9) подстановку $t=e^{\varsigma},\quad x=e^{\xi}$ и применив обобщенное преобразование Фурье [2] , получим

$$\Psi^+(s)=G(s)\Phi^-(s)+g(s),\qquad -\infty<s<\infty \tag{10}$$

где

$$G(s)=s\operatorname{cth}\pi s+k_1\frac{s}{\operatorname{sh}\pi s}+k_2\frac{e^{is\mu}}{\gamma_1}\frac{s}{\operatorname{sh}\pi s}+k_3\frac{e^{-is\mu}}{\beta_1}\frac{s}{\operatorname{sh}\pi s}+\frac{2k_4}{h},\qquad \mu=\ln\frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

$$g(s)=iT_0\left(\operatorname{cth}\pi s+\frac{k_1}{\operatorname{sh}\pi s}+\frac{k_2e^{is\mu}}{\gamma_1\operatorname{sh}\pi s}+\frac{k_3e^{-is\mu}}{\beta_1\operatorname{sh}\pi s}\right)_-+2B_-(s)$$

$$\Phi^-(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\varphi(e^{\varsigma})e^{is\varsigma}d\varsigma,\qquad B_-(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{\xi}f_0(e^{\xi})e^{is\xi}d\xi,\qquad \Psi^+(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\psi(\xi)e^{is\xi}d\xi$$

$$\psi(\xi)=\begin{cases}0, & \xi<0\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(e^{\varsigma})d\varsigma}{1-e^{-(\xi-\varsigma)}}+k_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(e^{\varsigma})d\varsigma}{1+e^{-(\xi-\varsigma)}}+k_2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(e^{\varsigma})d\varsigma}{\gamma_1+\beta_1e^{-(\xi-\varsigma)}}+k_3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(e^{\varsigma})d\varsigma}{\beta_1+\gamma_1e^{-(\xi-\varsigma)}}, & \xi>0\end{cases}$$

Решение задачи (10) имеет вид

$$\Phi^-(z)=\frac{\tilde{X}(z)}{\sqrt{z-i}},\qquad \operatorname{Im}z<0;\qquad \Psi^+(z)=\tilde{X}(z)\sqrt{z+i},\qquad \operatorname{Im}z>0 \tag{11}$$

$$\Phi^-(z)=(\Psi^+(z)-g(z))G^{-1}(z)\quad 0<\operatorname{Im}z<1$$

где

$$\tilde{X}(z)=X(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{X^+(t)\sqrt{t+i}(t-z)}\right\},\quad X(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln G_0(t)dt}{t-z}\right\},\ G_0(t)=\frac{G(t)}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\operatorname{Re}G_0(t)>0,\qquad G_0(\pm\infty)=0$$

Интегралы в формулах (11) при $t=0$ надо понимать в смысле главного значения по Коши.

Из формул (11) обратным преобразованием Фурье получается выражение для искомой функции

$$\tau_1(x)=-\varphi'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\int_{-\infty}^{\infty}(T_0-it\Phi^-(t))e^{-it\ln x}dt$$

В окрестности сингулярных точек $z=0$ и $z=1$ имеем

$$\tau_1(x)=O(1/\sqrt{1-x}),\qquad x\to1-,\ \tau_1(x)=O(x^{\tau_0-1}),\qquad x\to0,\qquad 0<\tau_0<1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий.С.Г. Анизотропные пластинки. М.Л.: Гостехтеориздат, 1957. 355 с.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.

Сведения об авторе:

Шавлакадзе Нугзар Наумович–старший научный сотрудник, Математический институт им. А.Размадзе,

Тел.: (995 32) 334951,(995 32)942950; E-mail: nusha@rmi.acnet.ge

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА, ИМЕЮЩЕГО ПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ ПОДВЕСА

Шагинян С.Г., Дарбасян А.Т., Андреасян Л. А.

В работе рассматриваются задачи оптимальной стабилизации малых колебаний математического маятника вокруг и нижнего, и верхнего положения равновесия, когда точка подвеса маятника движется по заданному закону в вертикальном направлении. Управляющий момент задается с помощью устройства, которое находится в точке подвеса маятника. Задачи приведены к задаче оптимальной стабилизации системы дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, которая решена методом Ляпунова-Беллмана. Получена оптимальная функция Ляпунова в виде квадратичной формы с переменными коэффициентами, для определения которых получена система нелинейных дифференциальных уравнений. Решения этих уравнений получены с помощью компьютерной модели. Получено аналитическое выражение для оптимального управляющего воздействие.

Пусть материальная точка М массой m укреплена на конце стержня, который может вращаться вокруг горизонтальной оси Oz (математический маятник). Предположим, что, в свою очередь, точка подвеса О выполняет колебательное движение в вертикальном направлении. Выберем координатную систему следующим образом: начало координат выберем в точке подвеса маятника О, ось y направим вниз по вертикали, а оси x и z возьмем горизантально так, чтобы плоскость (xy) совпадала с плоскостью колебаний маятника (рис.1).

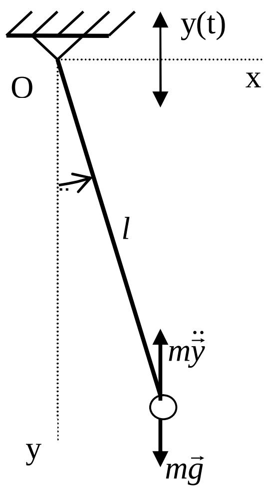


Рис. 1

Для получения дифференциальных уравнений математического маятника присоединим к силе тяжести маятника $m\vec{g}$ переносную силу инерции $\Phi_e = -m\ddot{y}$, где $y = a\cos\omega t$ –закон движения точки О по вертикали, и воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения относительно оси вращения маятника [1], получим: $\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -m(g-\ddot{y})l\sin\varphi$

или, считая угол φ малым $\left(\sin\varphi \approx \varphi\right)$, получим

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + a\frac{\omega^2}{l}\cos\omega t\right)\varphi = 0.$$

Положим $\omega t = \tau$. После очевидных преобразований получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \left(\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l}\cos\tau\right)\varphi = 0 \qquad (1)$$

Известно [2], что при разных значениях параметров маятника нижнее положение равновесия маятника может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

Пусть на точке подвеса О маятника находится устройство, которое создает управляющий момент ξ. Тогда уравнение (1) запишется в форме

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l}\cos\tau)\varphi = u(\tau,\varphi)$$

где

$$u = \frac{1}{ml^2}\xi$$

Перейдем на фазовые координаты. Обозначим через $x_1 = \varphi,\ x_2 = \dot{\varphi}$, тогда получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(\dfrac{g}{l\omega^2} + \dfrac{a}{l}\cos\tau\right)x_1 + u \end{cases}. \tag{2}$$

Поставим следующую задачу: требуется найти такое управляющее воздействие $u^o(\tau, x_1)$, при котором решение $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$ системы (2) будет асимптотически устойчивым и минимизируется функционал

$$I[.] = \int_0^\infty \left(x_2^2 + u^2\right) d\tau. \tag{3}$$

Используя метод, приведенный в [3], легко проверить полную управляемость системы (2). Для решения задачи используем метод Ляпунова-Беллмана. Построим выражение Беллмана [4]:

$$\Phi[\cdot] = \frac{\partial V}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i + x_2^2 + u^2 \tag{4}$$

где V – оптимальная функция Ляпунова.

В (4) подставляя выражение $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$, из системы (2) получим

$$\Phi[\cdot] = \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(-(\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l}\cos\tau)x_1 + u) + x_2^2 + u^2. \tag{5}$$

Как известно [4], выражение (5) принимает минимальное значение на оптимальное управляющее воздействие, следовательно,

$$\left.\frac{\partial \Phi[\cdot]}{\partial u}\right|_{u^o} = 0 \tag{6}$$

Из уравнении (6) получим:

$$u^o = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_2} \tag{7}$$

Отсюда, подставив значение u^o из (7) в (5), и имея в виду, что $\Phi[\cdot]\big|_{u^o} = 0$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 - \left(\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l}\cos\tau\right)x_1\frac{\partial V}{\partial x_2} + x_2^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 = 0 \tag{8}$$

Оптимальную функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V = \frac{1}{2}\left(c_{11}(\tau)x_1^2 + 2c_{12}(\tau)x_1x_2 + c_{22}(\tau)x_2^2\right) \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим

$$\begin{aligned} &\left[-\left(\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l}\cos\tau\right)c_{12}(\tau) - \frac{1}{4}c_{12}^2(\tau) + \frac{1}{2}\frac{dc_{11}(\tau)}{d\tau})\right]x_1^2 + \\ &+\left[c_{11}(\tau) - \left(\frac{g}{l\omega^2} + \frac{a}{l}\cos\tau\right)c_{22}(\tau) - \frac{1}{2}c_{12}(\tau)c_{22}(\tau) + \frac{dc_{12}(\tau)}{d\tau}\right]x_1x_2 + \\ &+\left[c_{12}(\tau) - \frac{1}{4}c_{22}^2(\tau) + 1 + \frac{1}{2}\frac{dc_{22}(\tau)}{d\tau}\right]x_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при x_1^2, x_1x_2 и x_2^2 нулю, получим:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{g}{l\omega^2}+\dfrac{a}{l}\cos\tau\right)c_{12}(\tau)-\dfrac{1}{4}c_{12}^2(\tau)+\dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{11}(\tau)}{d\tau}=0 \\ c_{11}(\tau)-\left(\dfrac{g}{l\omega^2}+\dfrac{a}{l}\cos\tau\right)c_{22}(\tau)-\dfrac{1}{2}c_{12}(\tau)c_{22}(\tau)+\dfrac{dc_{12}(\tau)}{d\tau}=0 \\ c_{12}(\tau)-\dfrac{1}{4}c_{22}^2(\tau)+1+\dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{22}(\tau)}{d\tau}=0 \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) является системой нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $c_{ij}(\tau)$ $(i, j=1,2)$, решение которой найти аналитическими методами значительно трудно. Для этого решение нашли с помощью компьютерной программы Microsoft Visual C++ 6.0.

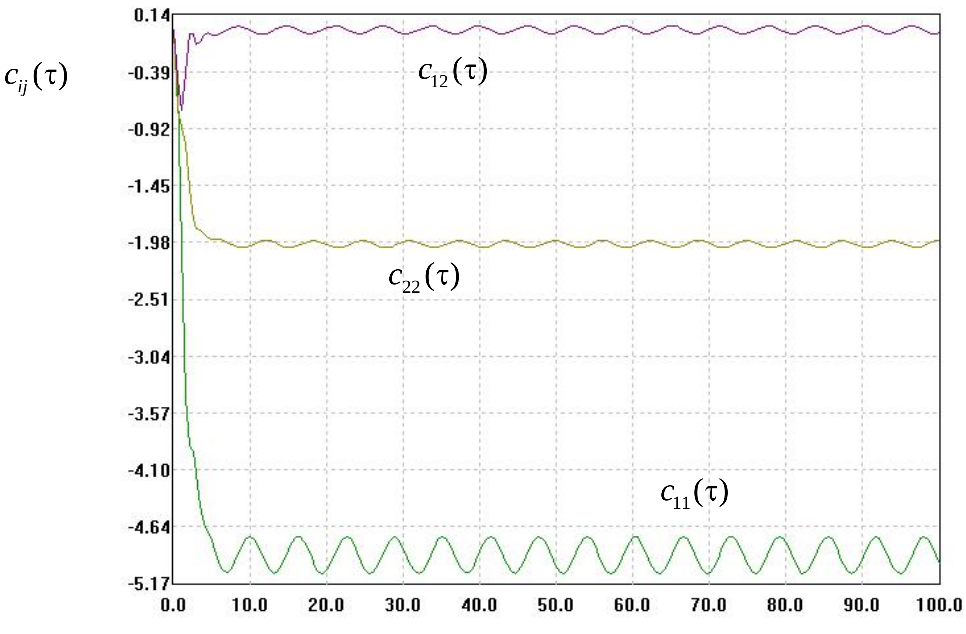


Рис 2

На рис. 2 приведены графики коэффициентов $c_{ij}(\tau)$ при $l=1$, $a=0.1$, $\omega=2$, где начальные значения выбраны $c_{11}(0)=c_{12}(0)=c_{22}(0)=0$ [5]. Из графика видно, что начиная с какого-то момента времени функции $c_{ij}(\tau)$ начинают изменяться по синусоидальному закону, то есть начинается упорядоченное движение. Например, для случая $\tau \geq 7$ получим:

$$\begin{cases} c_{11}(\tau)=0.1715\sin(\tau-2.11)-4.9035 \\ c_{12}(\tau)=0.035\sin(\tau-0.61) \\ c_{22}(\tau)=0.031\sin(\tau-0.82)-2 \end{cases} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), для оптимальной функции Ляпунова получим:

$$V=\frac{1}{2}\Big[\big(0.1715\sin(\tau-2.11)-4.9035\big)x_1^2+0.7\sin(\tau-0.61)x_1x_2+\big(0.031\sin(\tau-0.82)-2\big)x_2^2\Big]$$

Из (7) для оптимального управляющего воздействия получим:

$$u^o=-\frac{1}{2}\Big[0.7\sin(\tau-0.61)x_1+\big(0.062\sin(\tau-0.82)-4\big)x_2\Big] \tag{13}$$

Теперь рассмотрим случай, когда математический маятник выполняет маленькие колебания относительно верхней точки подвеса (рис. 3).

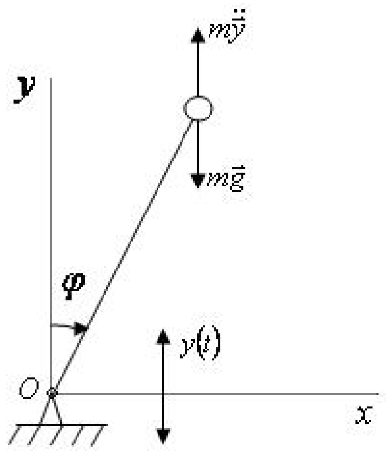


Рис. 3.

В этом случае дифференциальное уравнение малых колебаний математического маятника будет:

$$\ddot{\varphi}+\left(-\frac{g}{l}+a\frac{\omega^2}{l}\cos\omega t\right)\varphi=0$$

Опять полагая $\omega t=\tau$, получим:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\left(-\frac{g}{l\omega^2}+\frac{a}{l}\cos\tau\right)\varphi=0 \qquad (14)$$

Учитывая управляющий момент ξ, получим:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\left(-\frac{g}{l\omega^2}+\frac{a}{l}\cos\tau\right)\varphi=u \qquad (15)$$

Перейдя на фазовые координаты, получим:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\left(-\dfrac{g}{l\omega^2}+\dfrac{a}{l}\cos\tau\right)x_1+u\end{cases} \qquad (16)$$

Постановка задачи остается прежней: требуется найти такое управляющее воздействие $u^o(\tau,x_1)$, при котором решение $x_1=0,\ \ x_2=0$ системы (16) будет асимптотически устойчивым при минимизации функционала (3).

Выражение Беллмана будет

$$\Phi[\cdot]=\frac{\partial V}{\partial\tau}+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}\left(-\left(-\frac{g}{l\omega^2}+\frac{a}{l}\cos\tau\right)x_1+u\right)+x_2^2+u^2 \qquad (17)$$

Дифференциальные уравнения для определения коэффициентов $c_{ij}(\tau)$ в этом случае будут

$$\begin{cases}-\left(-\dfrac{g}{l\omega^2}+\dfrac{a}{l}\cos\tau\right)c_{12}(\tau)-\dfrac{1}{4}c_{12}^2(\tau)+\dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{11}(\tau)}{d\tau}=0\\ c_{11}(\tau)-\left(-\dfrac{g}{l\omega^2}+\dfrac{a}{l}\cos\tau\right)c_{22}(\tau)-\dfrac{1}{2}c_{12}(\tau)c_{22}(\tau)+\dfrac{dc_{12}(\tau)}{d\tau}=0\\ c_{12}(\tau)-\dfrac{1}{4}c_{22}^2(\tau)+1+\dfrac{1}{2}\dfrac{dc_{22}(\tau)}{d\tau}=0\end{cases} \qquad (18)$$

Система (18) также решена с помощью компьютерной программы Microsoft Visual C++ 6.0 с начальными значениями $c_{11}(0)=c_{12}(0)=c_{22}(0)=0$ [5].

Значения коэффициентов $c_{ij}(\tau)$ при $\tau\geq 5$ получаются такие:

$$\begin{cases}c_{11}(\tau)=0.875\sin\left(\tau+1.13\right)-16.137\\ c_{12}(\tau)=0.364\sin\left(\tau-2.045\right)+9.811\\ c_{22}(\tau)=0.1095\sin\left(\tau+0.93\right)-6.5755\end{cases} \qquad (19)$$

На рис. 4 приведены графики коэффициентов $c_{ij}(\tau)$ при значениях: $l=1$, $a=0.1$, $\omega=2$.

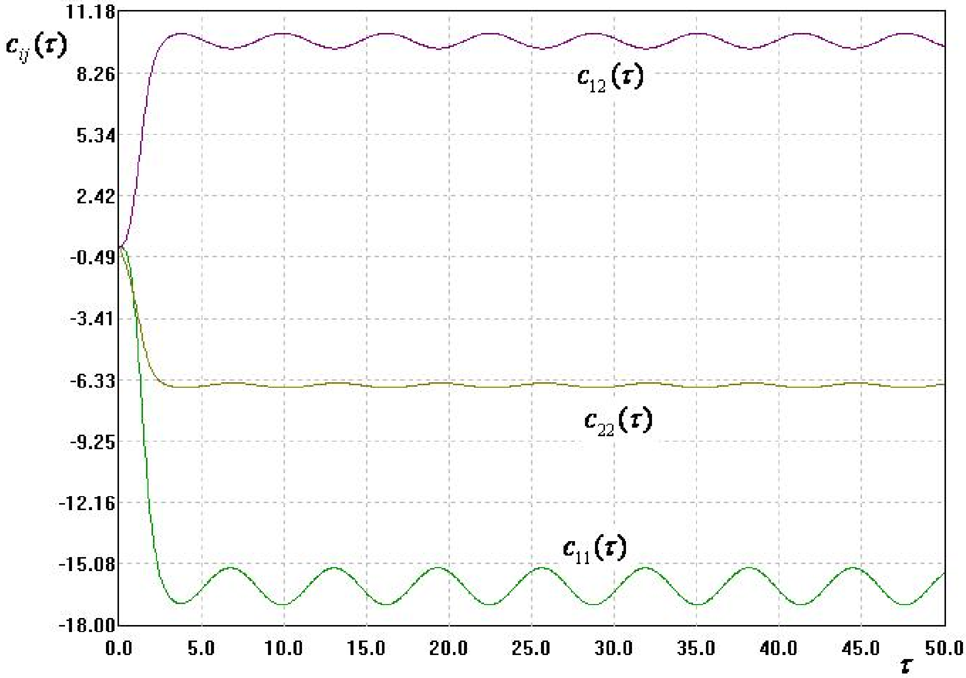


Рис.4.

Подставляя (19) в (9) и учитывая (7), для оптимального управляющего воздействия получим:

$$u^o = -\frac{1}{2}\Big[\big(0.728\sin(\tau-2.045)+19.622\big)x_1+\big(0.219\sin(\tau+0.93)-13.51\big)x_2\Big]. \qquad (20)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч.2. М.: Наука, 1972. 332с.
2. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
4. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: 1972. 274с.
5. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. //В кн. Малкина И.Г.: “Теория устойчивости движения”. Доп. 4. М.: Наука, 1966. С.475-514.

Сведения об авторах:

Шагинян Смбат Григорьевич,

Доцент кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 10) 66-37-41, (374 91) 21-55-82

E-mail shahinyan@ysu.am

Дарбасян Арсен Тигранович ,

Старший научный сотрудник, ГИУА, (37410) 56-79-92, (37493) 54-56-92;

E-mail: darsen@seua.am

Андреасян Лусине Ашотовна, Магистрант кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики, (374 77) 99-98-63;

E-mail: lus.an@mail.ru

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Шагинян С.Г., Резаи М.

В работе рассматриваются задачи устойчивости и стабилизации вращательного движения абсолютно твердого тела вокруг точки, находящейся на оси динамической симметрии тела, когда на тело на конечном интервале времени действуют интегрально малые возмущающие силы. Предполагается, что точка, вокруг которой вращается тело, двигается на горизонтальной плоскости.

Поставлена и решена задача оптимальной стабилизации рассматриваемого движения. По направлениям соответствующих обобщенных координат введены управляющие воздействия, проверена полная управляемость линейного приближения полученной управляемой системы и решена задача оптимальной стабилизации этой системы по классическому смыслу [1]. Потом, ограничиваясь одним управляющим воздействием, показано, что тогда рассматриваемая система не вполне управляема и для этого случая решена задача стабилизации при интегрально малых возмущениях полученной системы [2].

Для обоих случаев построены оптимальные функции Ляпунова, получены оптимальные управляющие воздействия и минимальные значения функционалов. Сравнение минимальных значений функционалов показало, что при стабилизации при интегрально малых возмущениях затрат энергии меньше, чем при оптимальной стабилизации в классическом смысле.

Постановка задачи и уравнения движения. Пусть абсолютно твердое тело массой m, вращающееся вокруг точки O, одновременно вращается вокруг своей оси динамической симметрии с угловой скоростью ω. Точка O в свою очередь может свободно двигаться по горизонтальной плоскости.

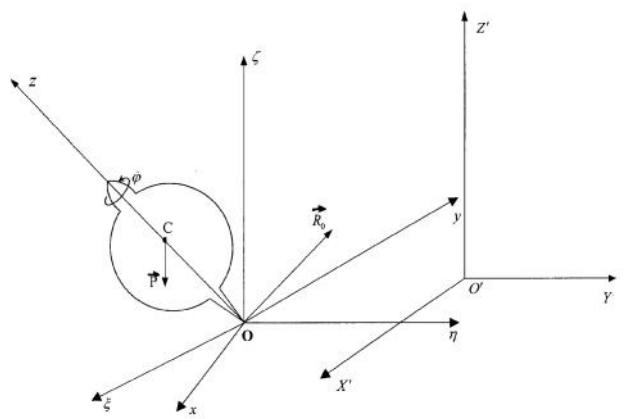
Для исследования рассматриваемого движения твердого тела выбираем неподвижную систему отчета $O'X'Y'Z'$ и подвижные системы отчета $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$. Система $Oxyz$ неподвижно связана с телом, а система O¶¦¸ движется так, что оси $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ остаются параллельными осям $O'X'$, $O'Y'$ и $O'Z'$ соответственно (фиг. 1).

Обозначим через OK линию пересечения плоскостей yOz и $\xi O\zeta$, через $\alpha-$угол между OK и Oz, через $\beta-$ угол между OK и O¸, а через $\varphi-$угол вращения тела вокруг оси Oz (фиг. 2). Положения тела для любого момента времени определяются координатами α, β, x и y, где x и y – координаты точки O на плоскости $O'X'Y'$.

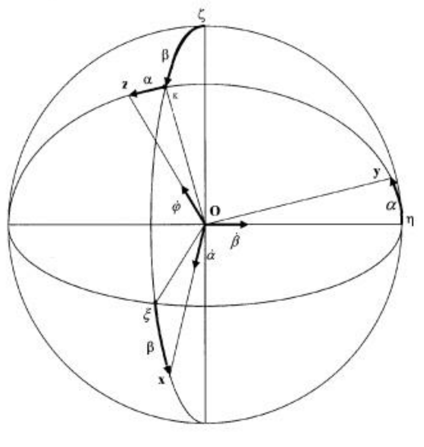
Кинетическая T и потенциальная Π энергии системы будут:

$$T=\frac{1}{2}J_x(\dot\alpha^2+\dot\beta^2\cos^2\alpha)+\frac{1}{2}J_z(\dot\varphi-\dot\beta\sin\alpha)^2+\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2)$$
$$\Pi=mgl\cos\alpha\cos\beta \qquad (1)$$

где l– расстояние от центра тяжести C тела до точки O; J_x и J_z –моменты инерции тела относительно осей x и z, соответственно (так как тело есть тело вращения, а Oz – ось динамической симметрии, то $J_x = J_y$).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Пусть при движении точки O на плоскости $O'X'Y'$ возникает сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости

$$\vec{R} = -\mu_1 \cdot \vec{V}_0 \tag{2}$$

Рассмотрим движение

$$\alpha = \dot{\alpha} = \beta = \dot{\beta} = x = \dot{x} = y = \dot{y} = 0,\ \dot{\varphi} = \omega \tag{3}$$

твердого тела, принимая это движение за невозмущенное и исследуем устойчивость этого движения.

Пользуясь уравнениями Лагранжа [3], составим дифференциальные уравнения движения тела:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(J_x\dot{\alpha}) + \dfrac{1}{2}J_x\dot{\beta}\sin 2\alpha + J_z\dot{\varphi}\dot{\beta}\cos\alpha - \dfrac{1}{2}J_z\dot{\beta}^2\sin 2\alpha = mgl\sin\alpha\cos\beta, \\ \dfrac{d}{dt}(J_x\dot{\beta}\cos^2\alpha - J_z(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha)\sin\alpha) = mgl\sin\beta\cos\alpha, \\ \dfrac{d}{dt}(J_z(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha)) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\mu_1\dot{x}, \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot{y}) = -\mu_1\dot{y}. \end{cases} \tag{4}$$

Сделаем следующие обозначения:

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = \dot{\alpha},\ x_3 = \beta,\ x_4 = \dot{\beta},\ x_5 = \dot{\varphi} - \omega,\ x_6 = x,\ x_7 = \dot{x},\ x_8 = y,\ x_9 = \dot{y}. \tag{5}$$

Следовательно, для линейного приближения (4) имеем:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sqrt{a}\cdot x_4 + b\cdot x_1,\ \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \sqrt{a}\cdot x_2 + b\cdot x_3,\ \dot{x}_5 = 0, \\ \dot{x}_6 = x_7, \quad \dot{x}_7 = -\mu\cdot x_7, \quad \dot{x}_8 = x_9, \quad \dot{x}_9 = -\mu\cdot x_9. \end{gathered} \tag{6}$$

где $$a = \left(\frac{J_z}{J_x}\omega\right)^2;\ b = \frac{mgl}{J_x};\ \text{«} = \frac{\text{«}_1}{m}: \tag{7}$$

Характеристическое уравнение для системы (6) будет:

$$\lambda^3(\lambda+\mu)^2\left(\lambda^4 + (a-2b)\lambda^2 + b^2\right) = 0$$

откуда имеем

$$\lambda_i = 0;\ (i = 1,2,3);\ \lambda_{4,5} = -\mu < 0;\ \lambda^4 + (a-2b)\lambda^2 + b^2 = 0. \tag{8}$$

Так как $rankA = 6$, и при условии

$$\omega > \frac{2\sqrt{J_x mgl}}{J_z} \tag{9}$$

все корни третьего уравнения совокупности (8) чисто мнимые, то система (6) будет устойчива по Ляпунову [4], но неустойчива при интегрально малых возмущениях [5].

Оптимальная стабилизация вращательного движения абсолютно твердого тела. Пусть μ является некоторой данной угловой скоростью, удовлетворяющей условию (9). По направлениям обобщенных координат x_2, x_5, x_7 и x_9 присоединим управления так, чтобы движение (3) абсолютно твердого тела стало бы асимптотически устойчиво. Тогда уравнения движения (6) примут вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sqrt{a}\cdot x_4 + b\cdot x_1 + \bar{u}_1,\ \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = \sqrt{a}\cdot x_2 + b\cdot x_3,\ \dot{x}_5 = \bar{u}_2, \\ \dot{x}_6 = x_7, \quad \dot{x}_7 = -\text{«}\cdot x_7 + \bar{u}_3, \quad \dot{x}_8 = x_9, \quad \dot{x}_9 = -\text{«}\cdot x_9 + \bar{u}_4. \end{gathered} \tag{10}$$

Сделаем следующие обозначения:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1;\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}x_2;\ y_3 = kx_3;\ y_4 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}x_4;\ \ y_5 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}x_5; \\ y_6 = \dfrac{x_6}{l};\ \ y_7 = \dfrac{1}{l\sqrt{a}}x_7;\ \ y_8 = \dfrac{x_8}{l};\ y_9 = \dfrac{1}{l\sqrt{a}}x_9;\ u_1 = \dfrac{\bar{u}_1}{a}; \\ u_2 = \dfrac{\bar{u}_2}{\sqrt{a}};\ u_3 = \dfrac{\bar{u}_3}{al};\ u_4 = \dfrac{\bar{u}_4}{al};\ k = \dfrac{b}{a};\ f = \dfrac{«}{\sqrt{a}};\ t' = \sqrt{a}t. \end{cases} \tag{11}$$

Запишем систему (10) с безразмерными величинами:

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = ky_2,\ \dot{y}_2 = y_1 - y_4 + u_1,\ \dot{y}_3 = ky_4,\ \ \dot{y}_4 = y_2 + y_3,\ \dot{y}_5 = u_2, \\ &\dot{y}_6 = y_7,\ \dot{y}_7 = -fy_7 + u_3,\ \ \dot{y}_8 = y_9,\ \ \ \dot{y}_9 = -fy_9 + u_4. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\dot{y}_i = \dfrac{dy_i}{dt}$, .

Полная управляемость [5] системы (12) легко проверяется и получается, что она вполне управляема.

Решим задачу оптимальной стабилизации системы (12) по замыслу, приведенному в [1]. В качестве переходного процесса оцениваем функционал

$$I[u] = \int_0^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{9} y_i^2 + \sum_{k=1}^{4} u_k^2\right)dt. \tag{13}$$

Составим выражение [1]

$$B[u] = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{9}\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot\dot{y}_i + \sum_{i=1}^{9} y_i^2 + \sum_{k=1}^{4} u_k^2\ . \tag{14}$$

Так как выражение (14) при оптимальном управлении принимает минимальное значение, равное нулю [1], то

$$\mathrm{B}\Big|_{u=u^0} = 0, \tag{15}$$

а

$$\left.\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u}\right|_{u_i=u_i^0} = 0,\ \ (i = 1,\cdots,4) \tag{16}$$

где $u = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)^*$, а управления u_i^0 есть оптимальные управления.

Функцию Ляпунова будем искать в виде

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \tag{17}$$

где $$V_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4} c_{ij}y_iy_j;\ V_2 = \frac{1}{2}c_{55}y_5^2;\ \ V_3 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=6}^{9} c_{ij}y_iy_j, \tag{18}$$

а c_{ij} – постоянные.

Из (16) получим:

$$u_1^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial y_2};\ \ \ u_2^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial y_5};\ u_3^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V_3}{\partial y_7};\ u_4^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V_3}{\partial y_9}. \tag{19}$$

Подставляя значения u_i^0 из (19) в (14), имея в виду (15) и используя (18), получим уравнения для определения коэффициентов c_{ij} $(i,\ j = 1,...,5)$.

Решим эти уравнения при $k = 0{,}2$. Тогда решение, удовлетворяющее условиям задачи оптимальной стабилизации, будет

$$\begin{aligned} &c_{11} = 32{,}993;\ c_{12} = -0{,}828;\ c_{13} = -21{,}357;\ c_{14} = -11{,}164;\ c_{22} = 3{,}228;\ c_{23} = 7{,}894; \\ &c_{24} = 2{,}434;\ c_{34} = 14{,}581;\ c_{33} = 48{,}459;\ \ c_{44} = 7{,}813;\ c_{55} = 2. \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения для определения коэффициентов c_{ij} $(i,\ j = 6,...,9)$ решим при $f = 0{,}1$. Тогда решение, удовлетворяющее условиям задачи оптимальной стабилизации, будет

$$c_{66}=c_{88}=3{,}4698;\; c_{77}=c_{99}=3{,}2698;\; c_{67}=c_{89}=2;\; c_{68}=c_{69}=c_{78}=c_{79}=0. \qquad (21)$$

Таким образом, оптимальная функция Ляпунова будет

$$\begin{aligned}V^0(y_1,\cdots,y_9)&=16{,}496y_1^2+1{,}614y_2^2+24{,}229y_3^2+3{,}906y_4^2-0{,}828y_1y_2-21{,}357y_1y_3-\\&-11{,}164y_1y_4+7{,}894y_2y_3+2{,}434y_2y_4+14{,}581y_3y_4+y_5^2+1{,}7349y_6^2+1{,}6349y_7^2+\\&+1{,}7349y_8^2+1{,}6349y_9^2+2y_6y_7+2y_8y_9.\end{aligned} \qquad (22)$$

а оптимальные управляющие воздействия будут

$$u_1^0=0{,}414y_1-1{,}614y_2,\; u_2^0=-0{,}5y_5,\; u_3^0=-0{,}817y_7-y_6,\; u_4^0=-0{,}817y_9-y_8. \qquad (23)$$

Для минимального значения функционала (13) получим

$$\begin{aligned}I^0=V^0(y_{10},\cdots,y_{90})&=16{,}496y_{10}^2+1{,}614y_{20}^2+24{,}229y_{30}^2+3{,}906y_{40}^2-0{,}828y_{10}y_{20}-\\&-21{,}357y_{10}y_{30}-11{,}164y_{10}y_{40}+7{,}894y_{20}y_{30}+2{,}434y_{20}y_{40}+14{,}581y_{30}y_{40}+y_{50}^2+\\&+1{,}7349y_{60}^2+1{,}6349y_{70}^2+1{,}7349y_{80}^2+1{,}6349y_{90}^2+2y_{60}y_{70}+2y_{80}y_{90}.\end{aligned} \qquad (24)$$

где $y_{i0}=y_i(0)\quad (i=1,\ldots,9)$.

Оптимальная стабилизация вращательного движения абсолютно твердого тела при интегрально малых возмущениях. Рассмотрим снова систему (12). Предполагаем, что $u_1=u;\; u_2=u_3=u_4=0.$ Тогда система (12) примет вид:

$$\begin{aligned}&\dot y_1=ky_2,\; \dot y_2=y_1-y_4+u,\; \dot y_3=ky_4,\; \dot y_4=y_2+y_3,\; \dot y_5=0,\\&\dot y_6=y_7,\; \dot y_7=-fy_7,\; \dot y_8=y_9,\; \dot y_9=-fy_9.\end{aligned} \qquad (25)$$

Поставим следующую задачу: требуется определить такое управляющее воздействие u^0, которое сделает решение $y_i=0\;(i=1,\ldots,9)$ системы (25) устойчивым при интегрально малых возмущениях и минимизирует некоторый функционал.

Очевидно, что система (25) не вполне управляема, следовательно, задача об оптимальной стабилизации для системы (25) в смысле [1] не решается.

Так как при линейном преобразовании собственные числа матрицы не изменяются, то характеристическое уравнение, соответствующее системе (25), имеет три нулевых корня. Это означает, что система (25) допускает три первых интеграла. Известно [6], что в этом случае с помощью неособого линейного преобразования $Z=CY$ $(\det C\neq 0)$ систему (25) можно привести к виду

$$\begin{aligned}&\dot z_1=kz_2,\; \dot z_2=z_1-z_4+u,\; \dot z_3=kz_4,\; \dot z_4=z_2+z_3,\; \dot z_5=-fz_5+z_7,\\&\dot z_6=-fz_6+z_8,\; \dot z_7=0,\; \dot z_8=0,\; \dot z_9=0.\end{aligned} \qquad (26)$$

Здесь $Z=(z_1,\ldots,z_9)^*,\; Y=(y_1,\ldots,y_9)^*$.

Для системы (26) возможно решить задачу об оптимальной стабилизации при интегрально малых возмущениях [2]. Минимизируемый функционал целесообразно принять в виде

$$I_1[u]=\int_0^\infty\left(\sum_{i=1}^4 z_i^2+u^2\right)dt. \qquad (27)$$

Таким образом, требуется разрешить задачу оптимальной стабилизации при интегрально малых возмущениях для системы (26) при минимизации функционала (27).

Напишем выражение Беллмана для системы (26)

$$B[u]=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial z_1}kz_2+\frac{\partial V}{\partial z_2}(z_1-z_4+u)+\frac{\partial V}{\partial z_3}kz_4+\frac{\partial V}{\partial z_4}(z_2+z_3)+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+u^2 \qquad (28)$$

Так как выражение (28) при оптимальном управлении принимает минимальное значение, равное нулю [2], то $\left.\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u}\right|_{u=u^0}=\frac{\partial V}{\partial z_2}+2u^0=0,$ из которого получим

$$u^0=-\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial z_2}. \qquad (29)$$

Так как $\mathrm{B}\big|_{u=u^0} = 0,$ (30)

то подставляя (29) в (30), получим

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z_1} k z_2 + \frac{\partial V}{\partial z_2}(z_1 - z_4) + \frac{\partial V}{\partial z_3} k z_4 + \frac{\partial V}{\partial z_4}(z_2 + z_3) + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)^2 = 0. \quad (31)$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде [2]

$$V(t,z) = V_{12}(z) + V_{11}(t,z) + V_{10}(t), \quad (32)$$

где $V_{12}(z)$ – некоторая квадратичная форма с постоянными коэффициентами; $V_{11}(t,z)$ – форма первого порядка относительно переменных z с коэффициентами, зависящими от времени t; $V_{10}(t)$ – некоторая функция времени t.

Подставляя (32) в (31), получим $V_{11} = V_{10} = 0$, а уравнение (31) запишем в виде

$$\frac{\partial V_{12}}{\partial z_1} k z_2 + \frac{\partial V_{12}}{\partial z_2}(z_1 - z_4) + \frac{\partial V_{12}}{\partial z_3} k z_4 + \frac{\partial V_{12}}{\partial z_4}(z_2 + z_3) + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial z_2}\right)^2 = 0.$$

Функцию $V_{12}(z)$ можем искать в виде $V_{12}(z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4} c_{ij} z_i z_j$. Тогда решение уравнения для определения коэффициентов c_{ij} $(i, j = 1,...,4)$ при $k = 0{,}2$ будет

$c_{11} = 32{,}993;$ $c_{12} = -0{,}828;$ $c_{13} = -21{,}357;$ $c_{14} = -11{,}164;$ $c_{22} = 3{,}228;$ $c_{23} = 7{,}894;$

$c_{24} = 2{,}434;$ $c_{33} = 48{,}459;$ $c_{34} = 14{,}581;$ $c_{44} = 7{,}813.$

Для оптимальной функции Ляпунова получим

$$V^0(z_1,\cdots,z_4) = 16{,}496 z_1^2 + 1{,}614 z_2^2 + 24{,}229 z_3^2 + 3{,}906 z_4^2 - 0{,}828 z_1 z_2 - 21{,}357 z_1 z_3 -$$
$$- 11{,}164 z_1 z_4 + 7{,}894 z_2 z_3 + 2{,}434 z_2 z_4 + 14{,}581 z_3 z_4.$$

а оптимальное управляющее воздействие будет

$$u^0 = 0{,}414 z_1 - 1{,}614 z_2.$$

Для минимального значения функционала (27) получим

$$I_1^0 = V^0(z_{10},\cdots,z_{40}) = 16{,}496 z_{10}^2 + 1{,}614 z_{20}^2 + 24{,}229 z_{30}^2 + 3{,}906 z_{40}^2 - 0{,}828 z_{10} z_{20} -$$
$$21{,}357 z_{10} z_{30} - 11{,}164 z_{10} z_{40} + 7{,}894 z_{20} z_{30} + 2{,}434 z_{20} z_{40} + 14{,}581 z_{30} z_{40}. \quad (33)$$

Имея в виду преобразование $Z = CY$ и сравнивая значения (24) и (33) функционалов (13) и (27), получим, что $I_1^0 < I^0$, т.е. при стабилизации по замыслу, приведенному в [1], тратится больше ресурсов, чем при стабилизации при интегрально малых возмущениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости.// Уч.записки ЕГУ. 1986. №2. С.39-46.
2. Шагинян С.Г. Вопросы стабилизации некоторых систем при интегрально малых возмущениях. // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. 2008. Вып. 2(30). Т. 14..С.53-69.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч.2. М.: Наука, 1972. 332с.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 471с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475с.
6. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. Свердловск: 1972. 274с.

Сведения об авторах:

Шагинян Смбат Григорьевич, Доцент кафедры механики, ЕГУ, факультет математики и механики,
(374 10) 66-37-41, (374 91) 21-55-82 ; E-mail shahinyan@ysu.am

Резаи Масоуд , Аспирант кафедры механики, ЕГУ, факультет математики и механики
E-mail masi.rezaei@gmail.com

АКУСТИЧЕСКАЯ ВОЛНА В ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЕ

Шекоян А.В.

Рассматривается распространение акустической волны в среде, состоящей из газа, пара и капель. Учитываются эффекты коагуляции капель и конденсации паров на каплях. Выведено и исследовано линейное дисперсионное уравнение. Получено уточненное условие генерации инфразвука.

Рассмотрим сплошную газовую среду, состоящую из газов, паров (насыщенных и ненасыщенных), в которой имеются капли жидкости. Предполагается, что в газовой среде распространяется акустическая волна, которая увлекает капли, заставляя их совершать колебательные движения, при которых капли могут соударяться и коагулироваться, меняя первоначальное распределение концентрации капель по размерам.

Акустическая волна создает периодическое расширение и уплотнение газа, причем процесс происходит адиабатически с изменением температуры среды, которое приводит к испарению и конденсации, разрушая первоначальное термодинамическое равновесие. Следует отметить, что все перечисленные процессы взаимосвязаны. Исходя из вышеизложенной физической картины, систему уравнений, описывающую эти процессы, можно записать в следующем виде:

$$\xi\rho_{ж}\frac{d\vec{V}_k}{dt}+(1-\xi)\rho_2\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt}=-\nabla P+\overline{F}_2\,,\quad F_2=\left[\xi\rho_{ж}+(1-\xi)\rho_2\right]g\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\operatorname{div}\rho_2\vec{\upsilon}_2=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\operatorname{div}\rho_n\vec{\upsilon}_2=-\sigma(\rho_n-\rho_{\acute{i}})+q\,, \tag{3}$$

$$C_p\rho_2\frac{dT}{dt}=\frac{dP}{dt}+L\sigma(\rho_n-\rho_{н})+Q \tag{4}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{D}{r\rho_{ж}}(\rho_n-\rho_{н})+M+\frac{G_1}{r^2}\frac{dn}{dt} \tag{5}$$

$$P=R\rho_2T\,, \tag{6}$$

$$\sigma=4\pi rnD\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div}n\vec{V}_{\hat{e}}=-\int_0^\infty n(r')n(r)f(r',r)dr'+\frac{1}{2}\int_0^r n(r')n(r-r')f(r',r-r')dr'\,, \tag{8}$$

$$\rho_{ж}\frac{d\vec{V}_{к}}{dt}=\frac{9\mu}{2r^2}(\vec{\upsilon}_2-\vec{V}_k)+\rho_2\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt}+\frac{1}{2}\rho_2\left(\frac{d\upsilon_2}{dt}-\frac{d\vec{V}_{к}}{dt}\right)+$$

$$+6\sqrt{\pi\mu\rho_{ж}}\;r^2\int_{-\infty}^{t}\frac{d\overline{V}_k}{dt_i}\frac{dt_i}{\sqrt{t-t_i}}+\overline{F}_1\,,\;F_1=\rho_{ж}g\;, \tag{9}$$

где $\vec{\upsilon}_2$ – скорость движения газа, P – давление в среде (одинаковое для всех фаз), ρ_2 – эффективная плотность воздуха, ρ_n – плотность пара, $\rho_{н}$ – плотность насыщенного пара, Q,q и M – источники тепла, пара и производства капель, определяемые из уравнений (3), (4) и (5) в невозмущенном состоянии, T –температура, C_p – эффективная теплоемкость среды, L –удельная теплота конденсации, D – коэффициент диффузии пара, r –текущий радиус капель, $\rho_{ж}$ – плотность жидкости, n – концентрация капель, $\vec{V}_{к}$ – скорость движения капель, f – число столкновений капель в единице объема в единицу времени, μ –динамический коэффициент вязкости газа, ξ – доля воды в единице объема, G_1 – коэффициент, обусловленный изменением радиуса капель из-за их коагуляции, R – газовая постоянная, t – время, $F_{1,2}$ – силы тяжести, g – ускоренные силы тяжести.

Уравнения (1)–(9) написаны на основании обобщения уравнений, использованных в работах [1–5], исходя из физических представлений, являющихся основой данного доклада. Уравнение (1) описывает движение газа с учетом наличия в нем капельной системы. Это уравнение написано на основании аналогии движению жидкости с пузырьками газа [3]. Уравнение (9) описывает движение капли в газе и является обобщением работы [1]. Уравнения (2)-(4), (6) и (7) совпадают с соответствующими уравнениями работ [4,5]. Уравнение (5) написано с учетом увеличения радиуса капель за счет конденсации и коагуляции, причем второе слагаемое в правой части обусловлено коагуляцией. Соображения, на основании которых написано это слагаемое, будут даны ниже.

Уравнение (8) выведено на основании работ [2,6]. Это есть кинетическое уравнение для распределения концентрации капель по их радиусам и написано для общего случая. В общем виде изучать уравнение (8) представляет значительную математическую трудность. Поэтому рассмотрение ограничено характерным механизмом коагуляции капель, когда капельная система состоит из малочисленных больших капель с начальным радиусом r_0 и начальной конденсацией n_1 и многочисленных маленьких капель с начальной концентрацией n_0 и радиусом r_1, итак, $n_1 << n$. При взаимодействии капель маленькие сливаются с большими, увеличивая их размер. Таким образом, n – переменная, а n_1 – постояная величина. Капли с большим радиусом являются центрами конденсации. Тогда, следуя [1], интегральную часть в уравнении (8) можно заменить на $G\tilde{n}$, где G – коэффициент коагуляции капель.

Предполагается, что массы воды плюс паров в единице объеме среды сохраняются. Написав уравнение баланса воды подобно [1], дифференцируя его, учитывая $\frac{r_1^3 n_1}{r_{01}^3 n_0} << 1$, можно найти изменение радиуса больших капель из-за коагуляции. Полученное выражение есть второе слагаемое в правой части уравнения (5), при этом коэффициент $G_1 = \frac{1}{3} r_1^3 n_1^{-1}$.

Предполагается, что возмущения малы, поэтому можно уравнения (1)-(9) линеаризировать. Отклонение от термодинамически равновесного состояния тоже мало, так что $\rho_н(T,r)$ можно разложить в ряд Тейлора. Последние два слагаемых в (9) малы [1], поэтому ими пренебрегаются. Обычно в уравнениях движения (1) и (9) пренебрегаются также силы тяжести.

Учитывая вышесказанное, представляя искомые величины в виде $P = P_0 + \tilde{P}$, $\rho_2 = \rho_2^0 + \tilde{\rho}_2$, $\rho_n = \rho_n^0 + \tilde{\rho}_n$, $T = T_0 + \tilde{T}$, $r = r_0 + \tilde{r}$, $n = n_0 + \tilde{n}$, $\tilde{\rho}_í = \rho_í - \rho_í^0$, предполагая, что при $t = 0$ $V_k^0 = \upsilon_2^0 = 0$, переходя к одномерному приближению и линеаризируя систему уравнений (1)-(9), получим

$$\xi\rho_ж \frac{\partial \upsilon_k}{\partial t} + (1-\xi)\rho_2^0 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_2}{\partial t} + \rho_2^0 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x} = 0 \ , \tag{11}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_n}{\partial t} + \rho_n^0 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x} = -4\pi D\Big[r_0 \tilde{n}\left(\rho_n^0 - \rho_н^0\right) + n_0 \tilde{r}\left(\rho_n^0 - \rho_н^0\right) +$$

$$r_0 n_0 \tilde{\rho}_n - r_0 n_0 \left(\frac{\partial \rho_н}{\partial T}\tilde{T} + \frac{\partial \rho_н}{\partial r}\tilde{r}\right)\Big], \tag{12}$$

$$\rho_2^0 C_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + 4\pi DL\Big[\big(n_0\tilde{r} + r_0\tilde{n}\big)\big(\rho_n^0 - \rho_{н}^0\big) + r_0 n_0 \tilde{\rho}_n - r_0 n_0\left(\frac{\partial \rho_{н}}{\partial T}\tilde{T} + \frac{\partial \rho_{н}}{\partial r}\tilde{r}\right)\Big], \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} = \frac{D}{r_0\rho_{ж}}\left\{\tilde{\rho}_n - \big(\rho_n^0 - \rho_{н}^0\big)\frac{\tilde{r}}{r_0} - \left[\frac{(\gamma-1)T_0}{\rho_2^0}\frac{\partial \rho_{н}}{\partial T}\tilde{\rho}_2 + \frac{\partial ^\circ{}_{í}}{\partial r}\tilde{r}\right]\right\} + \frac{G_1}{r_0^2}\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t}, \qquad (14)$$

$$\tilde{T} = \frac{(\gamma-1)T_0}{\rho_2^0}\tilde{\rho}_2, \qquad (15)$$

$$\tilde{\sigma} = 4\pi D\big(n_0\tilde{r} + r_0\tilde{n}\big), \qquad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + n_0\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x} = -G\tilde{n}, \qquad (17)$$

$$\rho_{ж}\frac{\partial \upsilon_k}{\partial t} = \frac{9\mu}{2r_0^2}\big(\upsilon_2 - \upsilon_k\big) + \rho_2^0\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t}. \qquad (18)$$

При выводе системы уравнений (10)-(18) было использовано разложение

$$\rho_{н} = \rho_{н}^0 + \frac{\partial \rho_{н}}{\partial T}\big(T - T_0\big) + \frac{\partial \rho_{н}}{\partial r}\big(r - r_0\big)$$

и учтено, что в исходном состоянии имеет место

$$q = 4\pi D r_0 n_0\big(\rho_n^0 - \rho_{н}^0\big), \quad Q = -L\sigma_0\big(\rho_n^0 - \rho_{н}^0\big), \quad M = -\frac{D}{r_0\rho_{ж}}\big(\rho_n^0 - \rho_{н}^0\big).$$

Дисперсионное уравнение. Решение системы уравнений (10)-(18) будем искать в виде плоской гармонической волны $\exp\big(ikx - i\omega t\big)$, причем для удобства сохраняем для амплитуд те же обозначения, что и для функций. Тогда получится следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\omega^2}{k^2}\left[\xi\frac{\omega_1 - i\omega}{\omega_2 - i\omega} + 1 - \xi\right] - C^2 = (1-\gamma)LN, \qquad (19)$$

где $N = i\omega\big[\omega_4\omega_6 - \omega^2 - i\,\omega(\omega_4 + \omega_5)\big]^{-1}\big(\omega_2 - i\omega\big)^{-1}\big(G - i\omega\big)^{-1}\big(\omega_5 - i\omega\big)\big\{(\delta_4 -$

$$-\delta_1)\big[\omega_2 G - \omega^2 - i\omega\big(\omega_2 + G\big)\big] + \big(\omega + i\omega_1\big)\left[\frac{\delta_2\omega\omega_4}{\omega_3} - i\left(\frac{\delta_2\omega^2}{\omega_3} + \delta_5\omega_4\right)\right]\Big\} +$$

$$+\left[\delta_4 + \frac{\delta_2\omega^2\ (\omega_1 - i\omega)}{\omega_3\big(\omega_2 - i\omega\big)\big(G - i\omega\big)}\right] \qquad (20)$$

$$\omega_1 = 9\mu\big(2\rho_2 r_0^2\big)^{-1}, \quad \omega_2 = 9\mu\big(2\rho_{ж} r_0^2\big)^{-1}, \quad \omega_3 = Dr_0^{-2}, \quad \omega_4 = 4\pi D n_0 r_0,$$

$$\omega_5 = \frac{D}{\rho_{ж} r_0^2}\left(\rho_n^0 - \rho_{н}^0 + r_0\frac{\partial \rho_{н}}{\partial r}\right), \quad \omega_6 = 2\frac{D}{r_0\rho_{ж}}\frac{\partial \rho_{н}}{\partial r}, \quad \delta_1 = \frac{\rho_n^0}{\rho_2^0},$$

$$\delta_2 = \frac{n_0 G_1}{r_0^3}, \quad \delta_3 = \frac{\rho_{;ж}}{\rho_2^0}, \delta_4 = \frac{T_0}{\rho_2^0}\big(\gamma - 1\big)\frac{\partial \rho_{н}}{\partial T}, \ \delta_5 = \frac{\rho_n^0 - \rho_{н}}{\rho_{ж}}.$$

C – скорость звука в газе.

В соотношениях (19), (20), ω_1 и ω_2 обусловлены стоксовским трением. Коэффициент G характеризует кинетику, δ_2 – коагуляционный рост капель, а $\delta_4 - \delta_1$ и δ_5 – конденсацию. Остальные коэффициенты обусловлены диффузией капель, δ_3 характеризует водность.

Напишем волновое число в виде: $k = K_0 + K_1 + i\alpha$, где K_0 – волновое число при $L = 0$. K_1 – возмущенное волновое число, обусловленное конденсацией, диффузией паров, коагуляцией капель и вякостью, α – коэффициент поглощения.

Если нет конденсации паров, следует положить в (19) $L = 0$ и можно получить дисперсионное соотношение и коэффициент поглощения, обусловленные наличием в газе капель, которые под воздействием акустической волны колеблются и воздействуют на волну, приведя к дисперсии и диссипации. В этом приближении взаимодействие капель между собой мало и не учитывается, которое выполняется при достаточно малой концентрации капель. Дисперсионное соотношение и малый коэффициент диссипации имеют вид:

$$K_0 = \frac{\omega}{C}a, \qquad \alpha_1 = \frac{\omega^2\left(\omega_1 - \omega_2\right)}{2C\left(\omega_2^2 + \omega^2\right)a}\xi, \quad a^2 = 1 + \frac{\omega_2\left(\omega_1 - \omega_2\right)}{\left(\omega_2^2 + \omega^2\right)}\xi. \tag{21}$$

Так как всегда $\rho_ж > \rho_2$, то $\omega_1 > \omega_2$ и капельная система приводят к диссипации акустической волны.

Когда $L \neq 0$, то есть учитывается конденсация и коагуляция, для получения дисперсионного выражения и коэффициента поглощения следует в (19) и (20) разделить мнимую и действительную части и разложить по малым $\frac{L}{C^2}$ и ¶. Тогда получим следующие выражения для дисперсии и коэффициента поглощения.

$$K_1 = K_0 + \frac{\omega(\gamma-1)aL}{2C^3}\Big\{q_5^{-1}q_6^{-1}\left(q_2^2 + \omega^2 q_4^2\right)^{-1}\Big\{\left(q_1q_2 - \omega^2 q_3q_4\right)\omega^2 \times$$
$$\times\Big[\left(\delta_4 - \delta_1\right)\left(q_1 + \omega_5 q_3\right) + p_1 - \omega_5 p_2\Big] - \omega^2\left(q_1q_4 + q_3q_2\right)\Big[\left(\delta_4 - \delta_1\right)\left(\omega_5 q_1 - \omega^2 q_3\right) + \omega_5 p_1 + \omega^2 p_2\Big]\Big\} + \tag{22}$$
$$+\delta_4 + \frac{\delta_2\omega^2}{\omega_3 q_5 q_6}\Big[\left(\omega_1\omega_2 + \omega^2\right)G - \omega^2\left(\omega_1 - \omega_2\right)\Big]\Big\}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\omega aL(\gamma-1)}{2C^3}\Big\{q_5^{-1}q_6^{-1}\left(q_2^2 + \omega^2 q_4^2\right)^{-1}\Big\{\omega\left(q_1q_2 - \omega^2 q_3q_4\right)\times$$
$$\times\Big[\left(\delta_4 - \delta_1\right)\left(\omega_5 q_1 - \omega^2 q_3\right) + \omega_5 p_1 + \omega^2 p_2\Big] + \omega^3\left(q_1q_4 + q_3q_2\right)\times$$
$$\times\Big[\left(\delta_4 - \delta_1\right)\left(q_1 + \omega_5 q_3\right) + p_1 - \omega_5 p_2\Big]\Big\} + \frac{\delta_2\omega^3}{q_5q_6\omega_3}\Big[\omega_1\omega_2 + \omega^2 + G\left(\omega_1 - \omega_2\right)\Big]\Big\} \tag{23}$$

$$q_1 = \omega_2 G - \omega^2, \quad q_2 = \omega_4\omega_6 - \omega^2, \quad q_3 = G + \omega_2, \quad q_4 = \omega_4 + \omega_5,$$

где $q_5 = \omega_2^2 + \omega^2, \quad q_6 = G^2 + \omega^2, \quad p_1 = \dfrac{\delta_2\omega^2}{\omega_3}\left(\omega_1 + \omega_4\right) + \delta_5\omega_1\omega_4$

$$p_2 = \frac{\delta_2}{\omega_3}\left(\omega_1\omega_4 - \omega^2\right) - \delta_5\omega_4$$

Выражение (23) сложное и сразу трудно сказать, когда α будет больше или меньше нуля. Для характерных величин среды $r_0 \sim 10^{-1}$ см, $n_0 \sim 10^{-4}$ см$^{-3}$, $G \sim 1$ с$^{-1}$, $\mu/\rho_2 \sim 20$ см^2/с, $\mu/\rho_ж \sim 2\cdot10^{-2}$ см^2/с, $\xi \sim 10^{-3}$, $G_1 \sim 3\cdot10^{-14}$ см, ¥ $= 0.4$ $LC^{-2} \sim 20$, $D \sim 0.2$ см^2/с, $\mu_1 = 10^4$ с$^{-1}$, $\mu_2 = 10$ с$^{-1}$, $\mu_3 = 20$ с$^{-1}$, $\mu_4 = 2\cdot10^3$ с$^{-1}$, с$^{-1}$, $\mu_6 = 4\cdot10^{-10}$ с$^{-1}$, $\delta_2 = 3\cdot10^{-7}$, $\delta_3 = 10^3$, $\delta_5 = 10^{-10}$, компьютером построены графики для больших и малых частот. Они приведены на рис. 1,2. Как видно, при выбранных коэффициентах, когда $\delta_4 - \delta_1 > 0$, $\alpha C > 0$, усиления нет, а при $\delta_4 - \delta_1 = -0.8$ усиление начинается с $\sim$55с $^{-1}$ частоты. Тогда существенную роль могут иметь на знак α, величины, связанные с конденсацией и коагуляцией. Существенный вклад дают величины, связанные с учетом вязкости газа, который увеличится при увеличении водности, то есть ¶ .

Представляет интерес рассмотреть предельные случаи для очень больших и малых частот. В формуле (23) переходя к пределу $\omega \to \infty$, получим формулу для асимптотики. Она имеет вид:

$$\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2C}\xi + \frac{L(\gamma-1)\omega_4}{2C^3}\left[(\delta_4 - \delta_1 - \delta_5) + \frac{\delta_2}{\omega_3}(\omega_5 - \omega_6)\right] \qquad (24)$$

Из (24) видно, что коагуляция может влиять на знак α. Если пренебречь коагуляцией и вязкостью газа, то (24) перейдет в соответствующее выражение в [18,19].

Для малых частот из (23) получается

$$\alpha = \frac{\omega^2(\omega_1 - \omega_2)}{2aC(\omega_2^2 + \omega^2)}\xi + \frac{a\omega^2 L(\gamma-1)\omega_5}{2C^3\omega_4\omega_6\omega_2 G}\left[(\delta_4 - \delta_1)\omega_2 G + \omega_1\omega_2\delta_5\right] \qquad (25)$$

Как видно из формулы (25), для взятых величин всегда $\alpha > 0$, то есть имеется согласие с графиками и несогласие с результатом [19], где не учтена вязкость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. М.: Изд. АН СССР, 1963. 259 с.
2. Хргиян А.Х. Физика атмосферы. Ленинград: Гидрометеорологическое изд., 1969. 647 с.
3. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336с.
4. Немцов Б.Е. Когерентный механизм усиления звука при конденсации пара //Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. N2. С.355-358.
5. Нетреба С.Н. Механизм усиления инфразвука при атмосферной конденсации //Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т.33. N3. С.412-413.
6. Буйков В. Метод кинетического уравнения в теории облаков. // Тр. ВНМС. 1963. Т.5. С.148-159.

<u>Сведения об авторе</u>:

Шекоян Ашот Вазгенович–старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
(374 10 568 569)
ashotshek@mechins.sci.am,

КОЛЕБАНИЯ РОТОРА НА ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ С НУЛЕВЫМ РАДИАЛЬНЫМ ЗАЗОРОМ

Шекян Г.Г., Назарян Э.А., Оганнисян Г.В.

В работе рассматриваются нелинейные колебания ротора на подшипниках качения, насаженных на вал и в корпус без предварительного натяга с нулевым радиальным зазором. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых проведено методами гармонической линеаризации и ортогонализации.

Показано, что для жесткого вертикального ротора амплитудно-частотные кривые носят резонансный характер, т.е. из-за нелинейной податливости подшипников существует резонансный режим колебания, а сами амплитудно-частотные кривые имеют явно выраженный нелинейный вид. Показано также, что для горизонтального гибкого ротора резонансные частоты зависят от величины неуравновешенности и статической нагрузки. При этом критические скорости могут быть существенно меньше собственной частоты ротора на абсолютно жестких опорах, а увеличение радиального зазора в подшипнике приводит к раздвоению пика резонанса в горизонтальном и вертикальном направлениях. По сравнению с вертикальным ротором нелинейность системы со статически-нагруженным горизонтальным ротором выражена значительно слабее, а срывы и затягивания амплитуд имеют место лишь для гибких и сильно нагруженных роторов.

При нулевом предварительном натяге подшипника и нулевом радиальном зазоре нелинейно-восстанавливающую силу можно представить в виде [1]

$$P^*(z) = kz^{3/2}. \tag{1}$$

Выражение (1) можно аппроксимировать степенным рядом вида

$$P(z) = az + bz^3 + \ldots. \tag{2}$$

Так как функция $P(z)$ должна быть симметрична относительно z, в (2) отсутствуют члены с четными степенями z. Ограничимся членами, содержащими z в третьей степени. Коэффиценты a и b выбираются из условия минимизации квадратичного уклонения между $P(z)$ и аппроксимирующей функцией $P^*(z)$ на заданном интервале изменения z.

В интервале от 0 до 2 будет [2]:

$$a = 0.827,\ b = 0.322. \tag{3}$$

Подставив в уравнение $\ddot{z} + D\dot{z} + p(z) = H\omega^2 \sin\omega t$ выражение для восстанавливающей силы в виде (2), получим

$$\ddot{z} + D\dot{z} + az + bz^3 = H\omega^2 \sin\omega t. \tag{4}$$

Введем безразмерное обозначение:

$$\tau = \sqrt{\frac{l^2 a}{B} t},\ \ \nu = \sqrt{\frac{B}{(l^2 - a)}\omega}.$$

После подстановки уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \eta\frac{dz}{dt} + z + C_2 z^3 = e\nu^3 \sin\nu\tau, \tag{5}$$

где $\eta = \dfrac{D}{\sqrt{\dfrac{aB}{l^2}}}$, $C_2 = \dfrac{b}{a}$; $D = \dfrac{nl^2}{B}$; $H = M \cdot e \cdot \dfrac{l^2}{2B}$; $\dfrac{l^2}{B} \cdot P^*(z) = az + bz^3$.

Будем искать решение с частотой возмущающей силы, полагая, что в районе резонанса преобладает основная гармоника [3].

$$z = A_1 \sin\nu t + A_2 \cos\nu t,$$

где $A_1^2 + A_2^2 = r^2$, r – амплитуда радиального перемещения ротора в подшипнике.

Подставив это выражение в исходное уравнение (4) и приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin\nu t$ и $\cos\nu t$, получим

$$[(1 - \nu^2 + \frac{3}{4}\mathrm{C}_2\mathrm{r}^2)^2 + \eta^2\nu^2]\mathrm{r}^2 = \mathrm{e}^2\nu. \tag{6}$$

С помощью (6) можно получить амплитудно-частотные характеристики рассматриваемой системы. На рис.1 представлены амплитудно-частотные характеристики для $\eta = 0$ и различных величин возмущающей силы.

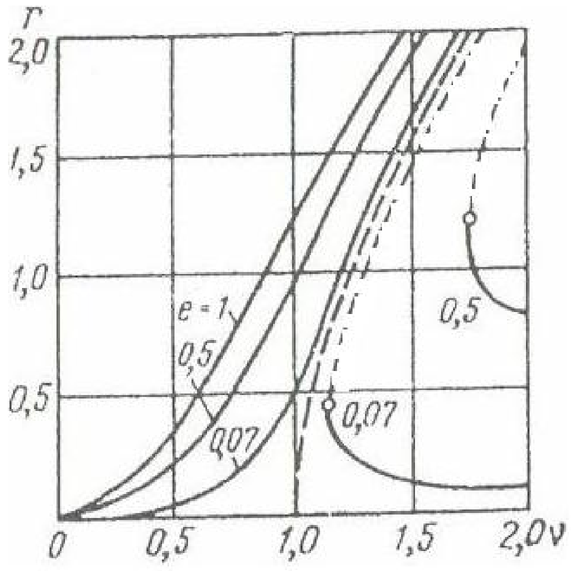


Рис.1. Амплитудно-частотная характеристика для ротора на шарикоподшипниках с нулевым предварительным натягом.

Неустойчивые части амплитудно-частотных кривых показаны пунктирными линиями.

Определенный интерес представляет случай вертикального ротора.

Здесь система уравнений движения записывается в виде [4]

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} + 2F_x &= M_1\nu^2\cos\omega t \\ M\ddot{y} + 2F_y &= M_1\nu^2\sin\omega t \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

где F_x и F_y – проекции восстанавливающей силы и сил нелинейного демпфирования.

Решение ищем методом гармонической линеаризации [4].

При этом форма движения ротора задается в виде круговой процессии [3]:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),\ y = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (8)$$

Решение показывает, что для жесткого вертикального ротора амплитудно-частотные кривые носят резонансный характер, т.е. из-за податливости подшипников существует резонансный режим движения ротора, а сами амплитудно-частотные кривые имеют явно выраженный нелинейный вид, соответствующий системе с <<жесткой>> характеристикой.

Для горизонтального гибкого ротора с жестко-закрепленными подшипниками решение ищется в виде суммы постоянных составляющих и гармоник основной частоты, т.к. в правой части уравнений движения имеются постоянные составляющие, появление которых вызвано статической весовой нагрузкой, поэтому решение нельзя сводить к круговой процессии. Исходные уравнения движения в этом случае имеют вид [2]:

$$\left.\begin{aligned} &M_1\ddot{x}_1 + C_1(x_1 - x_2) = M_1 e\omega^2\cos\omega t; \\ &M_1\ddot{y}_1 + C_1(y_1 - y_2) = M_1 e\omega^2\sin\omega t - M_1 g; \\ &M_2\ddot{x}_2 + \frac{1}{2}C_1(x_2 - x_1) + F_x = 0; \\ &M_2\ddot{y}_2 + \frac{1}{2}C_1(y_2 - y_1) + F_y = M_2 g; \end{aligned}\right\}$$

Здесь M_1 – масса ротора, M_2 – масса подшипников и приведенные к подшипникам массы частей вала; C_1 – жесткость вала, а F_x и F_y определяются по формулам:

$$F_x = k(\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \delta)^{3/2} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + a_1\dot{x}_2 + a_2\dot{x}_2 x_2^2,$$

$$F_y = k(\sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \delta)^{3/2} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} + a_1\dot{y}_2 + a_2\dot{y}_2 y_2^2,$$

где δ –зазор в подшипнике, a_1 и a_2 – коэффициенты линейного и нелинейного демпфирования. Схема и положение ротора в подшипниках показано на рис.2.

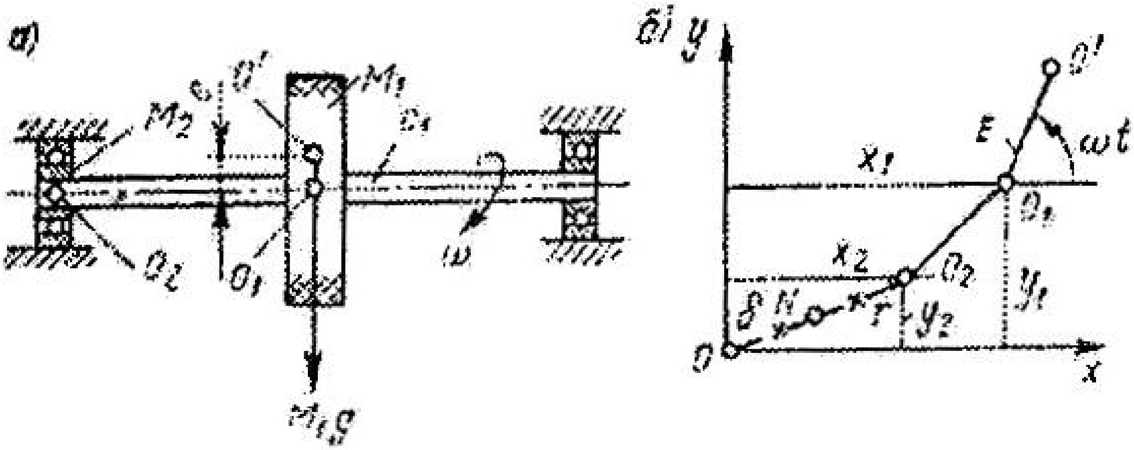


Рис.2. Схема расположения ротора на подшипниках:
а) – расчетная схема гибкого ротора на подшипниках;
б) – положение центра диска, центра масс и оси ротора относительно центра опоры

Неизвестные амплитуды ищутся методом ортогонализации [5]. В результате получаем зависимость резонансных частот от величины неуравновешенности и статической нагрузки.

При этом, критические скорости существенно ниже собственной частоты гибкого ротора на абсолютно жестких опорах. Увеличение зазора в подшипнике приводит к раздвоению пика резонанса в горизонтальном и вертикальном направлениях: резонансы в горизонтальном направлении имеют место при меньших скоростях ротора, чем в вертикальном.

По сравнению с вертикальным ротором нелинейность системы со статически нагруженным горизонтальным ротором выражена в амплитудно-частотных характеристиках значительно слабее, а срывы и затягивания амплитуд имеют место лишь для гибких и сильно нагруженных роторов.

Снижение критической скорости ротора на подшипниках качения объясняется влиянием податливости подшипника. Квазистатическая жесткость одного подшипника ищется из зависимости $P = kr^{3/2}$ при дифференцировании по r.

$$C_0 = \frac{dP}{dr} = \frac{3}{2}kp^{1/3}. \qquad (9)$$

Без учёта массы M_2 $P = 0.5M_1 g$ и первая критическая частота Ω_0 найдутся из выражения

$$\frac{\Omega_0^2}{\dfrac{C_1}{M_1}} = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{27}{16}\nu^2 a}}{\dfrac{1}{2} + \sqrt[3]{\dfrac{27}{16}\nu^2 a}},$$

где $\neg = \dfrac{ke^{1/2}}{C_1}$; $a = \dfrac{M_1 g}{C_1 \cdot e}$, C_1–жесткость вала.

В качестве примера проводили расчеты для электрической установки с весом ротора 700кгс, опирающегося на радиальные шарикоподшипники №320 с числом шариков $i = 8$, $d = 36.5$ мм и радиальным зазором 66–102мкм. Результаты расчетов сравнивали с экспериментальными данными. Вычисление по формуле (9) дало значение квазистатической жесткости при нагрузкие 0.5 веса ротора, $C_0 = 3.24 \cdot 10^6$ кгс/см.

Собственная частота ротора в жестких подшипниках составляла $\Omega_\infty = 2130$ Гц. Расчетная частота в опорах с коэффициентом жесткости C_0 оказалась равной $\Omega_0 = 760$ Гц. Для подшипника №320 коэффициент пропорциональности в формуле Герца $k = 3.2 \cdot 10^6$ кгс/см$^{-3/2}$, $\neg \approx 0.5, a \approx 0.1$ и отношение статической деформации в подшипнике к эксцентриситету $r_0 / e = 2.6 - 4.0$. Распределенная по длине неуравновешенность оценивалась в пределах $e = 25$ мкм. Жесткость ротора определялась как $C_1 = M_1 \Omega_\infty^2 = 3.15 \cdot 10^6$ кгс/см. Результаты экспериментальных исследований показали, что несмотря на различия реальной и расчетной схемы, снижение критической частоты системы до 760Гц действительно имело место. Также наблюдались и некоторые раздвоения частот по вертикали и горизонтали.

ЛИТЕРАТУРА

1. Спицын Н.А. Опоры осей и валов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1970. 520с.
2. Шекян Г.Г. Динамика роторных машин. Ереван: Изд.”Гитутюн” НАН РА, 2004. 330с.
3. Кельзон А.С., Циминский Ю.П. О колебаниях вала, вращающегося в подшипниках качения. //Машиностроение, Братислава, Изд. Чехословацкой АН. 1974. Т.25. №1. С.45–63.
4. Позняк Э.Л. Нелинейные колебания неуравновешенных вертикальных роторов на подшипниках качения. //Машиностроение. 1971. №1. С.23-31.
5. Позняк Э.Л. Нелинейные колебания ротора на подшипниках скольжения. //В кн: Динамика гибких роторов. М.: Наука, 1972. С.3-27.

Сведения об авторах:

Шекян Гамлет Гургенович – д.т.н., профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА, Тел.: (091)49-38-40

Назарян Эрнест Агаджанович – д.т. н. исследователь кафедры физики ЕрГУ,
Тел.: (093)26-72-56

Оганнисян Гайк Варданович – соискатель Института механики НАН Армении

МЕРА ОБЪЕМНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ПО КРИТЕРИЮ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ

Щербаков С.С., Комиссаров В.В

Изложен метод определения опасного объема как меры поврежденности взаимодействующих тел в паре трения. На примере контактного взаимодействия двух деформируемых твердых тел показано формирование опасных объемов по критерию интенсивности напряжений в условиях трехмерного напряженного состояния.

Оценка поврежденности объектов в общем случае основывается на статистической модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [1, 2].

Согласно этой модели при объемном деформировании опасным называется объем V_P, в котором с некоторой вероятностью P возможно появление циклических напряжений σ, превышающих нижнюю границу $\sigma_{-1\lim}$ рассеяния пределов выносливости σ_{-1}. Соответственно при контактном деформировании опасным называется объем, в котором с некоторой вероятностью P возможно появление нормальных контактных напряжений, превышающих нижнюю границу $p_{f\min}$ рассеяния пределов выносливости $p_f = p_{0\lim}$ (рис.1), где $p_{0\lim} = \sigma_{zz}^{(\max)}$ – давление в центре контакта при предельной контактной нагрузке. Аналогичным образом определяется нижняя граница рассеяния пределов выносливости для касательных напряжений.

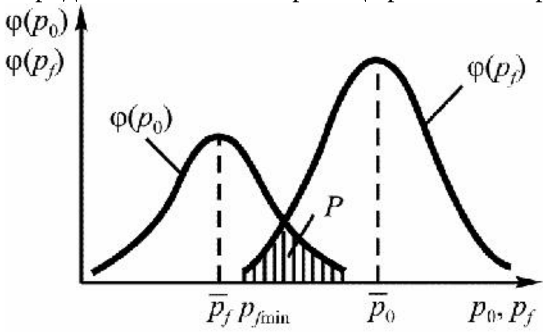


Рис. 1 – Плотности распределения вероятностей действующих (p_0) и предельных (p_f) напряжений

Выполним оценку меры объемной поврежденности по критерию интенсивности напряжений. В этом случае опасный объем, в соответствии с определением, определяется по формуле

$$V_{\text{int}} = \iiint\limits_{\sigma_{\text{int}}(x,y,z) \geq \sigma_{\text{int}}^{\lim}} dxdydz\,. \tag{1}$$

Применительно к рассматриваемому случаю расчет опасных объемов предполагает, во-первых, знание распределения интенсивности напряжений в зоне контактного взаимодействия, и, во-вторых, определение критических (предельных) напряжений, которые служат критерием для ограничения соответствующих опасных областей.

Для определения критических (предельных) напряжений, которые служат критерием для ограничения опасных областей, введена соответствующая процедура. Она состоит в определении предельной интенсивности напряжений $\sigma_{\text{int}}^{(\lim)}$ при действии на испытуемую систему предельной нагрузки $F_{\lim}$:

$$\sigma_{\text{int}}^{(\lim)} = \max_{dV}\left(\sigma_{\text{int}}\left(F_{\lim},\, dV\right)\right), \tag{2}$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Тогда критериальное условие для ограничения опасного объема будет иметь вид

$$V_{\text{int}} = \left\{ dV \,/\, \sigma_{\text{int}} \geq \sigma_{\text{int}}^{(\lim)}, dV \subset V_k \right\}, \tag{3}$$

где V_k – рабочий объем деформируемого твердого тела.

Поскольку опасные объемы могут иметь произвольную и сложную форму, то их аналитическое определение по формуле (1) затруднено. Поэтому все расчеты были проведены с использованием численного метода Монте-Карло.

Относительный опасный объем является вероятностной мерой поврежденности

$$\omega_{\text{int}} = \frac{V_{\text{int}}}{V_0}, \qquad (4)$$

которая может изменяться в интервале значений

$$0 \leq \omega_{\text{int}} \leq 1. \qquad (5)$$

Когда $\omega_{\text{int}} = 0$, материал пары трения не повреждается при эксплуатации или испытаниях, т.е. имеет место достоверное событие: вероятность повреждения поверхности пары трения $P = 0$.

Когда $\omega_{\text{int}} = 1$, происходит повреждение поверхности пары терния в первом цикле нагружения, т.е. имеет место достоверное событие: $P = 1$. А если $0 < \omega_{\text{int}} < 1$, случайные события достижения предельного состояния наступают с некоторой вероятностью P. При этом вероятность разрушения тем выше, чем больше опасный объем. Вероятность повреждения изменяется в таком же интервале значений

$$0 \leq P \leq 1, \qquad (6)$$

как и вероятностная мера поврежденности (4). В этой связи каждой величине ω_{int} формально можно поставить в соответствие некоторое значение P:

$$0 \leq \omega_{\text{int}} \to P \leq 1. \qquad (6a)$$

Проиллюстрируем общую модель расчетом опасных объемов применительно к взаимодействующим телам в паре трения, определив предварительно напряженное состояние последней. При расчете напряжений при контакте воспользуемся теорией контактного взаимодействия Герца, которая позволяет определить параметры несогласованного контакта: p_0, a, b – давление в центре контакта, большую и меньшую полуоси эллипса контактной площадки соответственно.

Расчет напряжений $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ в полупространстве при действии на область полупространства $S(x, y)$ соответственно нормальных $p(x,y) = p_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ и касательных $q = fp(x,y)$ контактных усилий проводится численными методами с использованием решений задач Буссинеска и Черрути [4].

Напряженное состояние при контакте с трением на основе описывается суперпозицией напряжений $\sigma_{ij}^{(n)}$ и $\sigma_{ij}^{(\tau)}$ [2, 3, 4, 5]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)} + \sigma_{ij}^{(\tau)},\ i, j = x, y, z. \qquad (7)$$

Проведем расчеты опасных объемов в условиях контактного взаимодействия в соответствии с (7) при следующих параметрах: модуль упругости $E_1 = E_2 = 2{,}01\ 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, коэффициент сопротивления качению $f_r = 0{,}09$, $R_{11} = 0{,}003$ м, $R_{12} = 0{,}05$ м, R_{21} = var (5; 7,5; 10 и 15 мм), $R_{22} = \infty$, $\sigma_{\text{int}}^{(\text{lim})} = p_{f\,\min} = 900$ МПа; $p_0 = 3000$ МПа.

Расчет проведен на основе программного комплекса, разработанного в среде Mathematica; результаты представлены на рис.1.

Из рисунка видно, что наибольший опасный объем наблюдается в теле с наименьшим диаметром (радиус $R_{21} = 5$ мм). Отметим также, что, несмотря на небольшое значение коэффициента сопротивления качению f_r, действие распределенных касательных усилий $q(x, y)$ приводит к изменению форм и величин опасных объемов, обусловленных действием нормальных усилий $p(x, y)$. Особенно заметна асимметрия опасного объема относительно плоскости $x = 0$.

Поскольку опасные объемы являются мерой поврежденности деформируемых тел, то анализ рис.1 позволяет указать конкретные области (зоны), в которых возможно зарождение и развитие усталостных трещин. Таким образом, процесс повреждаемости оказывается дискретным в том смысле, что существуют локальные области, в которых появление первичных трещин наиболее вероятно.

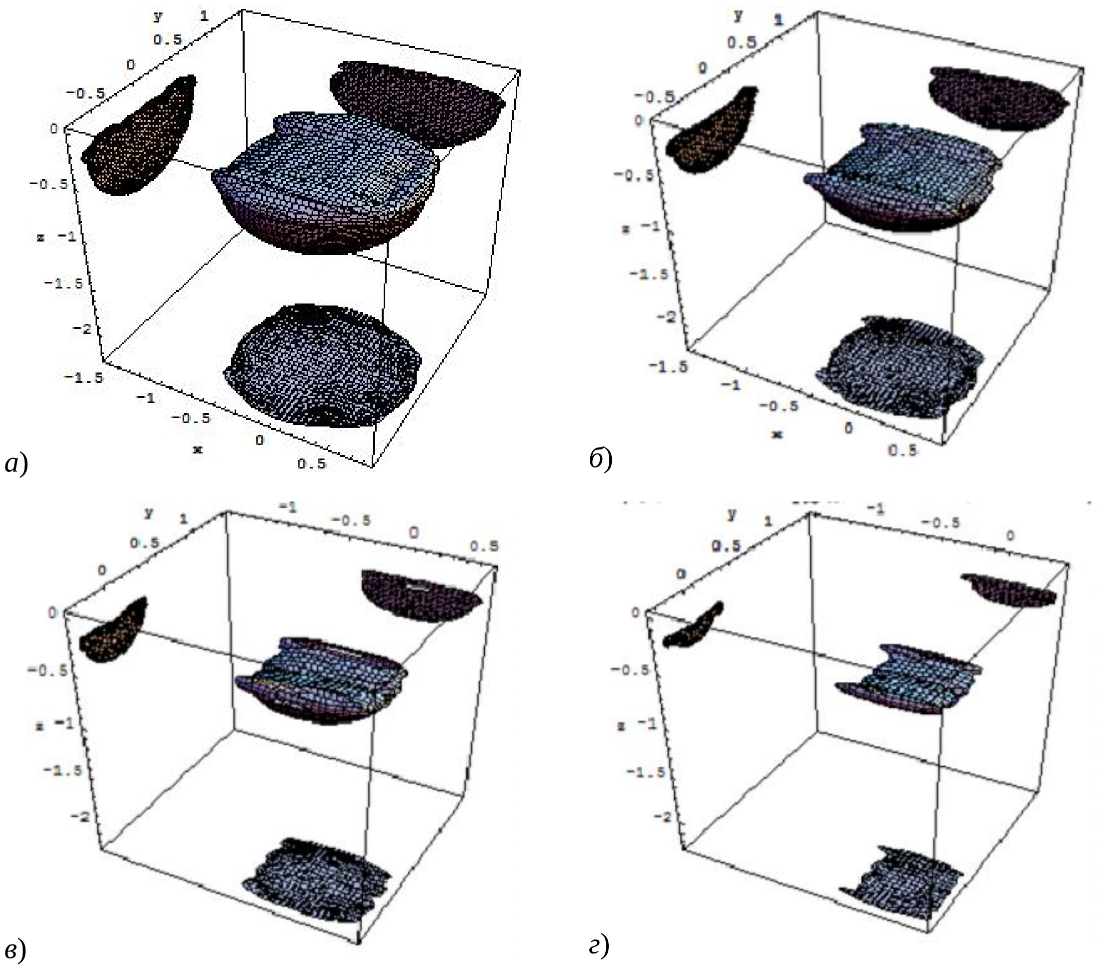


Рис.1 – Опасный объем, формируемый при постоянной контактной нагрузке (F_N = 1000 Н), в паре трения: *а*) R_{21} = 5 мм; *б*) R_{21} = 7,5 мм; *в*) R_{21} = 10 мм; *г*) R_{21} = 15 мм

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский Л. А. Статистическая механика усталостного разрушения. Минск: Наука и техника, 1987. 288 с.
2. Сосновский Л. А. Механика износоусталостного повреждения. Гомель: БелГУТ, 2007. 434 с.
3. Журавков М. А., Щербаков С. С. Исследование опасных объемов при решении контактной задачи для системы «ролик/кольцо». / Тр. 5-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2005), 3–7 октября 2005 г., Иркутск (Россия) / отв. ред. А. П. Хоменко. – Иркутск: Иркутский государственный университет путей сообщения, 2005. Т. 1. С. 375–390.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
5. Жмайлик В.А., Щербаков С.С., Комиссаров В.В. Расчет напряженного состояния модели зубчатого зацепления в области контакта. //Вестник БелГУТа. 2006. № 1-2. С.36–43.

Сведения об авторах:

Щербаков Сергей Сергеевич, Канд.физ.-мат. наук, доцент, Белорусский государственный университет (375 29) 761 55 84
E-mail sherbakovss@mail.com

Комиссаров Виктор Владимирович, Канд. техн. наук, научн. сотрудник Межведомственной лаборатории «ТРИБОФАТИКА» (375 29) 338 28 40
E-mail: komissarov@ebelsut.gomel.by

FACTORIZATION METHODS FOR SOLVING DYNAMIC MIXED PROBLEMS FOR STRUCTURAL-INHOMOGENEOUS MEDIA

Babeshko V.A., Pavlova A.V.

Using differential factorization method the steady vibrations of an elastic medium layered structure containing internal defects such as rigid inclusions and cavities are investigated. The systems of integral equations which bind the stresses and displacements in the planes of the layers with the jumps of stresses on the boundaries of inclusions and displacement jumps on the banks of the cracks have been found. Solutions of received integral equation's systems for particular cases of areas occupied by defects constructed in closed form with integral factorization method of Wiener–Hopf or fictitious absorption.

Currently, man-made materials with a layered and block structures have been widely disseminated. Layer-block structure is also characteristic feature of mountain ranges and lithosphere plates. Research problems of heterogeneous media with defects can't be overcome solely (only) through the use of modern computing facilities. Differential factorization method for boundary-value problems in difficult media represents generalization of the method of integrated transformations and is the convenient tool of their research.

By means of differential factorization method the fluctuations of the elastic layers rigidly linked to unstrained basis established with frequency μ , containing internal defects are investigated. For each layer $n = \overline{1,N}$ which has mechanical characteristics, the defining equations of the isotropic theory of elasticity in the form of Lame are considered.

The plate which occupies sphere Ω is located on the surface of the elastic medium ($x_3 = h_{N+1} = 0, -\infty < x_1, x_2 < +\infty$). For one-layered homogeneous cladding coordinate plane x_1Ox_2 is connected with median surface, axis Ox_3 is directed upwards. In [2] the nonlinear equations in the movings, describing behavior of thin-walled covers are constructed. As a result of linearization [3] equations of movement of a plate in case of the established mode of fluctuations take the following form:

$$\underline{R}(x_1, x_2)\vec{u} - \underline{S}\vec{t} = \vec{g}, \qquad (1)$$

$\vec{u}$ – is the vector of movings of points of a median surface with $u_i(x_1, x_2, x_3)$ components, $i = \overline{1,3}$, $\underline{R}(\partial x_1, \partial x_2)$ – is differential operator with components

$$R_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + {}_1\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + {}_2, \ R_{12} = R_{21} = {}_3\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \ R_{22} = {}_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + {}_2,$$

$$R_{33} = {}_4\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right) - {}_2, \ R_{13} = R_{23} = R_{31} = R_{32} = 0;$$

$$\underline{S} = \left\|S_{ij}\right\|_{i,j=1}^{3}, \ S_{ij} = 0, \ i \neq j, \ S_{11} = S_{22} = -{}_5, \ S_{33} = {}_5, \ \vec{g}(x_1, x_2) = \underline{S}\vec{b},$$

where ${}_1 = \frac{1-¬}{2}$, ${}_2 = \frac{μ^2 °(1-¬)}{2«}$, ${}_3 = \frac{1+¬}{2}$, ${}_4 = h^2/12$, ${}_5 = \frac{1-¬}{2«h}$, h – is the thickness of covering, «, ¬ – is the module of shift and the Poisson ratio accordingly, ° – is material density, $u_{1,2}(x_1, x_2)$ – movings of points of a median surface in the x_1Ox_2 plane, $u_3(x_1, x_2)$ – is deflection of a median surface, $t_i(x_1, x_2)$ – are the components of the vector of efforts $\vec{t}$ on the bottom side of a plate, $b_i(x_1, x_2)$ – on the top side.

According to the scheme of a differential factorization method [1] planes of defects and plane of section of physicomechanical properties are considered as blocking borders. We will consider the cavities-cracks located like levels on joints of layers-blocks as defects. If the crack is in the one of the layers, the properties of the two introduced blocks adjoining in the plane of the crack are considered identical. In the areas occupied with cracks, the pressures are considered set, conditions of equality of pressure on the banks of cuts are met, on the other parts of the section plane the condition of ideal contact is laid out, i.e. equality of displacement $\vec{u}_l$ and contact pressure $\vec{\tau}_l$ $\left(\vec{\tau}_l = \left\{\pm{}^{l}_{ij} n^l_j\right\}\right)$. We will consider further that the cavities-cracks occupying one-coherent areas $\tilde{\Omega}_{jn}$ with sectionally-smooth borders $\left(j = \overline{1, M_n} \right)$, are available in all planes of section of layers at heights h_n, $n = \overline{2,N}$.

Mathematical notation of the conditions formulated above looks as follows:

$$\vec{\tau}_{jn}^{-} = \vec{\tau}_{jn}^{+} = \vec{\tau}_{jn}, \ \left(x_1, x_2 \right) \in \tilde{\Omega}_{jn},$$

$$\vec{u}_{jn} = \vec{u}_{jn}^{+} - \vec{u}_{jn}^{-} = 0, \ \left(x_1, x_2 \right) \notin \bigcup_{j=1}^{M_n} \tilde{\Omega}_{jn},$$

$$\vec{\tau}_{jn}^{\pm} = \vec{\tau}_{jn}\Big|_{x_3 = h_n \pm 0}, \ \vec{u}_{jn}^{\pm} = \vec{u}_{jn}\Big|_{x_3 = h_n \pm 0}, \ j = \overline{1, M_n} \ \ n = \overline{2, N}.$$

Conditions of interface of the covering and substrate look like

$$\vec{u}\left(x_1, x_2 \right) = \vec{u}_{N+1}\left(x_1, x_2, h_{N+1} \right), \ \vec{t}\left(x_1, x_2 \right) = \vec{\tau}_{N+1}\left(x_1, x_2, h_{N+1} \right), \ \left(x_1, x_2 \right) \in \Omega_{N+1}.$$

Besides, $\vec{u}_1\big|_{x_3 = h_1} = 0$, $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$.

Boundary conditions in transformations of Fourier processing on variables x_1, x_2 take the form of

$$\vec{U}\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3 \right)\Big|_{x_3 = h_{N+1}} \equiv \vec{U}_{N+1} = \vec{U}\left(\alpha_1, \alpha_2 \right), \ \vec{U}\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3 \right)\Big|_{x_3 = h_n + 0} = \vec{U}\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3 \right)\Big|_{x_3 = h_n - 0} + \vec{U}_n,$$

$$\vec{U}\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3 \right)\Big|_{x_3 = h_1} = 0, \ \vec{T}\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3 \right)\Big|_{x_3 = h_n + 0} = \vec{T}\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3 \right)\Big|_{x_3 = h_n - 0} = \vec{T}_n, \ n = \overline{2,N}.$$

Te following notation is used here

$$\vec{U}_n = \iint\limits_{\tilde{\Omega}_n} \vec{u}_{jn}\left(x_1, x_2 \right) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2, \ \tilde{\Omega}_n = \bigcup_{j=1}^{M_n} \tilde{\Omega}_{jn}.$$

By means of the differential factorization method [1] boundary-value problem for substrate is reduced to the system of functional-matrix equations of the following kind

$$\begin{aligned} &\underline{E}_{k-1,k-1}^{-} \underline{L}_{k-1,-} \vec{U}_{k-1}^{+} - \underline{E}_{k,k-1}^{-} \underline{L}_{k-1,-} \vec{U}_{k}^{-} = \underline{E}_{k-1,k-1}^{-} \underline{D}_{k-1,-} \vec{T}_{k-1} - \underline{E}_{k,k-1}^{-} \underline{D}_{k-1,-} \vec{T}_{k}, \\ &\underline{E}_{k-1,k-1}^{+} \underline{L}_{k-1,+} \vec{U}_{k-1}^{+} - \underline{E}_{k,k-1}^{+} \underline{L}_{k-1,+} \vec{U}_{k}^{-} = \underline{E}_{k-1,k-1}^{+} \underline{D}_{k-1,+} \vec{T}_{k-1} - \underline{E}_{k,k-1}^{+} \underline{D}_{k-1,+} \vec{T}_{k}, \ k = \overline{2, N+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

For isotropic layers

$$\underline{L}_{k-1,\pm} = \begin{pmatrix} \pm\alpha_1 \alpha_{31,k-1} & \pm\alpha_2 \alpha_{31,k-1} & s_{k-1} \\ \pm\alpha_2 \alpha_{32,k-1} & \mp\alpha_1 \alpha_{32,k-1} & 0 \\ 2s_{k-1} + \alpha_2^2 & -\alpha_1 \alpha_2 & \mp 2\alpha_1 \alpha_{32,k-1} \end{pmatrix}, \ \underline{D}_{k-1,\pm} = -\frac{i}{\mu} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \pm\frac{\alpha_{31,k-1}}{2} \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \pm\alpha_{32,k-1} & 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix},$$

where $E_{k,n}^{\pm} = \left\| \delta_{lp} e^{\pm i\gamma_{ln} h_k} \right\|_{l,p=1}^{3}$, δ_{lp} is Kronecker symbol, $\gamma_{1n} \equiv \alpha_{31,n} = \sqrt{\dfrac{\rho_n \omega^2}{\lambda_n + 2\mu_n} - \alpha^2}$,

$\gamma_{ln} \equiv \alpha_{32,n} = \sqrt{\dfrac{\rho_n \omega^2}{\mu_n} - \alpha^2}$, $l = 1,2$, $s_n = \dfrac{\rho_n \omega^2}{2\mu_n} - \alpha^2$, $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, $n = \overline{1,N}$

By the number of transformations, system (2) can be led to a kind

$$\begin{pmatrix} \underline{K}_{11}^{*} & \underline{K}_{12}^{*} & \cdots & \underline{K}_{1N}^{*} \\ \underline{K}_{21}^{*} & \underline{K}_{22}^{*} & \cdots & \underline{K}_{2N}^{*} \\ & \cdots & & \\ \underline{K}_{N1}^{*} & \underline{K}_{N2}^{*} & \cdots & \underline{K}_{NN}^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_2 \\ \vdots \\ \vec{U}_N \\ \vec{T}_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{T}_2 \\ \vdots \\ \vec{T}_N \\ \vec{U}_{N+1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

The blocks of the $\underline{K}^{*}$ matrix are defined as

$$\underline{K}_{NN}^{*} = \underline{K}_N, \ \underline{K}_{Nj}^{*} = \prod_{l=N}^{j+1} \underline{B}_l^{-} \underline{H}_l^{-1}, \ \underline{K}_{iN}^{*} = \left(-1 \right)^{N-i} \prod_{l=i+1}^{N} \underline{H}_l^{-1} \underline{B}_l^{+}, \ i, j = \overline{1, N-1};$$

$$\underline{K}_{N-1,j}^{*} = \underline{H}_N^{-1} \prod_{l=N-1}^{j+1} \underline{B}_l^{-} \underline{H}_l^{-1}, \ \underline{K}_{i,N-1}^{*} = \left(-1 \right)^{N-1-i} \left(\prod_{l=i+1}^{N-1} \underline{H}_l^{-1} \underline{B}_l^{+} \right) \underline{H}_N^{-1}, \ i, j = \overline{1, N-2};$$

$$\underline{K}_{N-1,N-1}^{*} = \underline{H}_N^{-1}, \ \underline{K}_{ii}^{*} = \underline{H}_{i+1}^{-1} - \underline{H}_{i+1}^{-1} \underline{B}_{i+1}^{+} \underline{K}_{i+1,i+1}^{*} \underline{B}_{i+1}^{-} \underline{H}_{i+1}^{-1}, \ i < N-1;$$

$\underline{K}^*_{i,j} = \underline{K}^*_{i,j+1}\underline{B}^-_{j+1}\underline{H}^{-1}_{j+1}$ for $j < i < N-1$, $\underline{K}^*_{i,j} = -\underline{H}^{-1}_{i+1}\underline{B}^+_{i+1}\underline{K}^*_{i+1,j}$ for $i < j < N-1$.

Subsidiary matrixes are used here $\underline{H}_1 = \underline{S}^+_1$, $\underline{H}_{k+1} = \underline{S}^+_{k+1} - \underline{S}^-_k + \underline{B}^-_k\underline{H}^{-1}_k\underline{B}^+_k$, $k = \overline{1,N-1}$, $\underline{K}_j = \underline{S}^-_j - \underline{B}^-_j\underline{H}^{-1}_j\underline{B}^+_j$, $j = \overline{2,N}$,

$$\underline{S}^{\pm}_{k-1} = \left[\left(\underline{L}_{k-1,+}\right)^{-1}\underline{J}^{\mp1}_{k-1}\underline{L}_{k-1,+} - \left(\underline{L}_{k-1,-}\right)^{-1}\underline{J}^{\pm1}_{k-1}\underline{L}_{k-1,-}\right]^{-1}\left[\left(\underline{L}_{k-1,+}\right)^{-1}\underline{J}^{\mp1}_{k-1}\underline{D}_{k-1,+} - \left(\underline{L}_{k-1,-}\right)^{-1}\underline{J}^{\pm1}_{k-1}\underline{D}_{k-1,-}\right],$$

$$\underline{B}^{\pm}_{k-1} = -\left[\left(\underline{L}_{k-1,+}\right)^{-1}\underline{J}^{\mp1}_{k-1}\underline{L}_{k-1,+} - \left(\underline{L}_{k-1,-}\right)^{-1}\underline{J}^{\pm1}_{k-1}\underline{L}_{k-1,-}\right]^{-1}\left[\left(\underline{L}_{k-1,+}\right)^{-1}\underline{D}_{k-1,+} - \left(\underline{L}_{k-1,-}\right)^{-1}\underline{D}_{k-1,-}\right],$$

$$\underline{J}_{k-1} = \underline{E}^-_{k-1,k-1}\underline{E}^+_{k,k-1}.$$

The system of the functional-matrix equations (3) is constructed for the cases when there are discontinuances on all the blending borders of layers, but generally on some borders of section of layers $\left(x_3 = h_i,\ i = \overline{i_1, i_l}\right)$ conditions of ideal contact can be met. In this case $\vec{U}_i = 0$ and from the $\underline{K}^*$ matrix corresponding lines and columns with numbers $i = \overline{i_1, i_l}$ are deleted, $\vec{U}_i$ from the vector of unknown quantity, and $\vec{T}_i$ from the right part are deleted accordingly.

Form the last equation (3)

$$\vec{u}_{N+1}\left(x_1,x_2,0\right) = \frac{1}{4\text{®}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=1}^{N-1}\underline{K}^*_{lN}\vec{U}_{l+1} + \underline{K}^*_{NN}\vec{T}_{N+1}\right]e^{-i(\sim_1x_1+\sim_2x_2)}d\sim_1 d\sim_2 .$$

Let's substitute integrated representation of movings of the surface of substrate in the equations of covering movement (1)

$$\frac{1}{4\text{®}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\underline{R}\left(-i\sim_1,-i\sim_2\right)\underline{K}_{N+1}\left(\sim_1,\sim_2\right) - \underline{S}\right)\vec{T}\left(\sim_1,\sim_2\right)e^{-i(\sim_1x_1+\sim_2x_2)}d\sim_1 d\sim_2 +$$

$$+\frac{1}{4\text{®}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=1}^{N-1}\underline{R}\left(-i\sim_1,-i\sim_2\right)\underline{K}^*_{l,N}\vec{U}_{l+1}\left(\sim_1,\sim_2\right)e^{-i(\sim_1x_1+\sim_2x_2)}d\sim_1 d\sim_2 = \vec{g} .$$

The system of integral equations of the considered problem will take the following form

$$\sum_{l=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M_j}K_{il}\left(\tilde{\Omega}_{j,l+1}\right)\vec{u}_{j,l+1} + K_{iN}\left(\Omega\right)\vec{t}_{N+1} = \vec{t}_{p,i+1}\left(x_1,x_2\right),\ \left(x_1,x_2\right)\in\tilde{\Omega}_{p,i+1},\ p = \overline{1,M_i},\ i = \overline{1,N-1},$$

$$\sum_{l=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M_j}\tilde{K}_{Nl}\left(\tilde{\Omega}_{j,l+1}\right)\vec{u}_{j,l+1} + \tilde{K}_{NN}\left(\Omega\right)\vec{t}_{N+1} = \vec{g}\left(x_1,x_2\right),\ \left(x_1,x_2\right)\in\Omega . \qquad (4)$$

Here

$$\tilde{K}_{Nl}\left(\tilde{\Omega}_{j,l+1}\right)\vec{u}_{j,l+1} = \iint\limits_{\tilde{\Omega}_{j,l+1}}\underline{k}_{Nl}\left(x_1-\P_1,x_2-\P_2\right)\vec{u}_{j,l+1}\left(\P_1,\P_2\right)d\P_1 d\P_2 ,$$

$$\underline{k}_{lj}\left(x_1,x_2\right) = \frac{1}{4\text{®}^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\underline{K}^*_{lj}\left(\sim_1,\sim_2\right)e^{-i(\sim_1x_1+\sim_2x_2)}d\sim_1 d\sim_2 .$$

Contour lines Γ_k $\left(k = 1,2\right)$ are chosen according to the principle of limitary consumption [4].

The constructed systems of the integrated equations connect pressure in planes of section of layers and on the border between the covering and the substrate with jumps of movings on the banks of the cracks. Solutions of the received systems of integrated equations for special cases of the areas occupied with the defects, are under construction in the final form with integral factorization method of Wiener–Hopf or fictitious absorption.

Solution of similar systems of the integrated equations is uneasy problem for the limited and semi-limited areas occupied with coverings as it is connected with the problem of the reference of matrix operators of the high order having kernels with oscillating symbols. Besides, elements $\underline{K}^*_{ll}\left(\sim_1,\sim_2\right)$, $l = \overline{1,N-1}$, defining symbols of kernels of the corresponding integrated equations, have asymptotic behavior $K^{ll}_{pj}\left(\sim_1,\sim_2\right) \sim \sim C_{pj}\left(1+O\left(\sim^{-£}\right)\right)$, $£ > 0$, where factors C_{pj} depend on the physicomechanical properties, next two layers containing a crack with number l [5]. In the transformed last integrated equation elements $\underline{\tilde{K}}_{NN}(\sim_1,\sim_2)=\underline{R}(-i\sim_1,-i\sim_2)\underline{K}_{N+1}(\sim_1,\sim_2)-\underline{S}$ also have sedate growth at $\sqrt{\sim_1^2+\sim_2^2}\to\infty$.

To receive elements of the symbol of kernel of system decreasing on infinity, in each area $\tilde{\Omega}_{pi}$ and Ω the differential operators $\mathrm{V}_{pi}(\partial x_1,\partial x_2)$ are entered into consideration; they are represented in in the following form:

$$\underline{V}_{pi}(\partial x_1,\partial x_2)=\left\|¢_{jk}v_{jk}^{pi}\right\|_{j,k=1}^{3},\ \underline{V}(\partial x_1,\partial x_2)=\left\|¢_{jk}v_{jk}\right\|_{j,k=1}^{3},$$

$$v_{jj}^{pi}(\partial x_1,\partial x_2)\cdot_{pi}\equiv(-\Delta+a_{pi})\cdot_{pi}=w_{pi},\ \cdot_{pi}\Big|_{\partial\Omega_{pi}}=f_{pi}(x_1,x_2),$$

$$v_{jj}(\partial x_1,\partial x_2)\cdot_j\equiv(-\Delta+b_1)\cdot_j=w_j,\ \cdot_j\Big|_{\partial\Omega}=f_j(x_1,x_2),\ j=1,2,$$

$$v_{33}(\partial x_1,\partial x_2)\cdot_3\equiv(-\Delta+b_2)(-\Delta+b_3)\cdot_3=w_3,\ \cdot_3\Big|_{\partial\Omega}=f_3(x_1,x_2),\ \frac{\partial\cdot_3}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=f_4(x_1,x_2).$$

Here $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}$, $a_{pi},b_k=\mathrm{const}$, smooth functions f_{pj}, f_j are defined subsequently from conditions on borders of plate and cracks. For cracks the condition of the jammed edge is usually set, various boundary conditions for plates are resulted in [2].

Applying specified operators to (4), we receive system of the integrated equations, matrix-symbol elements of which decrease on infinity. For solution of such equations the methods based on factorization of matrixes-functions, for example, the generalized factorization method or the method of fictitious absorption [6] can be used.

The work is done with support of the grants RFFE (10-08-00289) and SS-3765.2010.1.

REFERENCE

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Зарецкая М.В., Павлова А.В. Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 1. С.36–39.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Об одной модели расчета концентрации напряжений в литосферных плитах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 2. С. 16–22.
4. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: 1979. 320 с.
5. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности //Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 2. С.44–53.
6. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.

Information about the authors

Babeshko Vladimir Andreevich, Academician of the Russian Academy of Sciences, head of the department of mathematical modelling of KubSU

Pavlova Alla Vladimirovna, associate professor of the department of mathematical modeling of KubSU, (7 861) 219 95 78, (7 861) 235 54 32
E-mail pavlova@math.kubsu.ru

THE SOLUTION OF PROBLEMS OF CLOSING OF CRACK IN THERMOELASTIC MEDIA AND OF STAMPS ON HALFPLANE IN PRESENCE OF WEAR

Bagdoev A.G., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V.

The problem on closing of thin semiinfinite crack in presence on its surface of layer of particles, containing in fluid, entering in crack, is solved by method of Wienner-Hopf with application to biology. The stresses on crack are calculated numerically, and the region in which crack is closed is clarified.

Introduction

Problems on building up of layer of inclusions, containing in fluid entering in crack, which is in infinite thermoelastic plane are considered. These problems were solved in [1] for geophysical environment without taking into account of elastic stresses. In present paper the coupled thermoelastic and diffusion mixed boundary problem for crack with fluid is solved by Winner–Hopf method. The graphs of vertical displacements on crack surface are calculated numerically and the moment of healing of crack in some point is determined. Experimental curves of healing of strips, filled by fluid with inclusions in earth environment are done in [10]. In present paper mathematical solution is obtained for biological cracks with conform oil. Also the mixed unsteady problems of stamps with wear between them and halfplane are considered.

1. Statement of problem of crack in thermoelastic plane with fluid current.

The problem of semi–infinite crack in thermoelastic plane, when there is current of fluid with inclusions, entering in crack at initial moment $t=0$, is considered. These problems are especially important for study of process of narrowing of crack due to action of crystallite inclusions in conform oil and in analogically by mathematical treatment problem of building up of cracks by inclusions in conform oil in corresponding problems of technology [10]. In plane x, y equation of crack boundary is $y=\pm b_1(x,t),\ b_1(x,t)=b_0+U_y(x,y,t), y\approx 0$, where thickness $2b_1$ is small and later is taken only upper sign, and is solved problem for $y\geq 0$, due to symmetry. U_x, U_y are components of displacements in elastic media.

Let the temperature T of elastic plane and fluid are approximately the same, denoting by T_0 constant initial value of T, by $q=°_f v b_0$ the current of entering fluid in crack, v–fluid velocity along x axis of crack, $°_f$ –density of fluid, i_0 –constant diffusion current of inclusions along y axis, which is supposed known, $¥=\frac{\partial c}{\partial T}$ which also supposed constant, approximately taken for moment $t=0$, $¥=\frac{\partial \bar{c}_0}{\partial T_0}$, by K let us denote constant coefficient of building up of crack surface, than using equation of narrowing of crack surface [1], on account of stresses term, one obtains

$$°_s\frac{\partial b_1}{\partial t}=q¥\frac{\partial T}{\partial x}-K\pm_{yy}-i_0H(x)H(t) \tag{1.1}$$

The crack equation $y=b_0+U_y(x,0,t), 0<x<\infty$.

One must put and solve corresponding problem of thermoelasticity. The equations of motion of thermoelastic media [4], where are excluding terms with T by dropping of small thermoconductivity, are as follows

$$a^2\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 U_y}{\partial x\partial y}+\bar{\delta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}\ ,$$

$$a^2\frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 U_x}{\partial x\partial y}+\bar{¢}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

where $\overline{¢} = \frac{K_4}{°}\frac{C_{。} - C_v}{C_v}$, $K_4 = ª + \frac{2}{3}«$ - volume elastic modulus, ° density, $C_{。}$, C_v specific thermal capacities.
The stresses components are [4]

$$\frac{±_{yy}}{°} = \left(a^2 - 2b^2\right)\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + 2b^2\frac{\partial u_y}{\partial y} + \overline{¢}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y}\right),\ \frac{±_{xy}}{°} = b^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{1.3}$$

In thermoelastic media one can write [4]

$$T - T_0 = -\frac{C_{。} - C_v}{\sim C_v}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y}\right) \tag{1.4}$$

Which is obtained neglecting of thermoconductivity in equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_{\rho} - C_v}{\alpha C_v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y}\right) = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{1.5}$$

where $\sim$ is coefficient of temperature–conductivity.

The main boundary condition (1.1) on crack on account of healing of crack due to diffusion current of inclusions and building up of its surface, as well as on account of friction, can be write down

$$°_s\frac{\partial U_y}{\partial t} = q¥\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{y=0} + ª_1\frac{\partial c}{\partial y} - K±_{yy},\quad \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{K_1}{°_s}±_{xy},\ x > 0 \tag{1.6}$$

where $ª_1 = -°_s D$, D - diffusion coefficient, K tribological coefficient of crack due to building up $K_1 -$ coefficient of horizontal wearing of surface. Besides due to symmetry out of crack $y = 0,\ x < 0,\quad U_y = 0, ±_{xy} = 0$. To simplify of solution one can approximately write $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T - T_0}{l}$, where l is some mean length along crack, and diffusion current $ª_1\frac{\partial c}{\partial y}$ can be assumed known and equal to $-i_0 H(x)H(t), i_0 = \text{const}$. The diffusion equation in this treatment is not used, replacing by assumption on approximately constant transversal diffusion current of inclusions to crack surface. Then approximated boundary conditions yield

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} = -\frac{°}{°_s}\frac{C_{。} - C_v}{\sim C_v l}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y}\right)v_0 b_0 ¥ - i_0 H(x)H(t) - \frac{K±_{yy}}{°_S},\ y = 0,\ x > 0,\ \frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{K_1}{°_s}±_{xy} \tag{1.7}$$

where $H(t) = 1,\ t > 0\quad H(t) = 0,\ t < 0$ is Heaviside unit function□
Problem (1.2), (1.7) for U_x, U_y for $y > 0$ is closed.

2. Solution of problem of building up of crack in absence of friction.

Let us denote $U_x = U, U_y = V$.
One can consider further simplified boundary value problem for half–plane: $y = 0$,
$±_{xy} = 0, -\infty < x < \infty \qquad V = 0, x < 0$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\left\{\frac{K\left(\overline{a}^2 - b^2\right)°}{°_s} + ¶\right\}\frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{K\overline{a}^2°}{°_s} + ¶\right)\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{i_0}{°_s}H(x)H(t), x > 0 \tag{2.1}$$

where $¶ = \frac{C_p - C_v}{C_v l}\frac{v b_0 ¥°}{\sim °_s}$.

The solution is looked for by integral transformations $\overline{U};\overline{V}$ of Laplace on t and $\overline{\overline{U}};\overline{\overline{V}}$ Fourier on x. In plane x, y one can write solution as

$$\overline{U};\overline{V} = \sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\sim}x+i\,\bar{}_n y}\,\overline{\overline{U}}_n;\overline{\overline{V}}_n\, d\bar{\sim}\ ,\quad \bar{}_1 = \sqrt{\frac{\mu^2}{c_n^2}-\bar{\sim}^2}\ , c_1 = \bar{a}, c_2 = b \tag{2.2}$$

where $s = -i\mu$ is parameter of Laplace transformation. Besides $\overline{\overline{V}}_1 = \frac{\bar{}_1}{\bar{\sim}}\overline{\overline{U}}_1,\ \overline{\overline{V}}_2 = -\frac{\bar{\sim}}{\bar{}_2}\overline{\overline{U}}_2$

Placing (2.2) in (2.1) and inverting of Fourier transformation, one obtains

$$\overline{\overline{V}}_1 + \overline{\overline{V}}_2 = V^-,\quad \bar{}_1\overline{\overline{U}}_1 + \bar{}_2\overline{\overline{U}}_2 + \bar{\sim}V^- = 0 \tag{2.3}$$

$$sV^- = -K_2 i\bar{\sim}\left(\overline{\overline{U}}_1 + \overline{\overline{U}}_2\right) - K_3\left(i\bar{}_1\overline{\overline{V}}_1 + i\bar{}_2\overline{\overline{V}}_2\right) - \frac{i_0}{2®i\bar{\sim}s°_s} + \Omega_2^+ \tag{2.4}$$

where $\Omega_2^+ = \frac{1}{2®}\int_{-\infty}^{0}\left(\overline{V}_1 + \overline{V}_2\right)\Big|_{y=0} e^{-i\bar{\sim}x}dx \quad V^- = \frac{1}{2®}\int_0^{\infty}\overline{V}\Big|_{y=0} e^{-i\bar{\sim}x}dx$

index (+) gives analytic functions of $\bar{\sim}$ in upper half–plane, (-) – analytic in lower half-plane $\bar{\sim}$.
From (2.4), (2.3) one obtains Winner–Hopf equation:

$$K_2 = \frac{K\left(\bar{a}^2 - 2b^2\right)°}{°_s} + ¶,\ K_3 = \frac{K\bar{a}^2°}{°_s} + ¶\ ,\ \Omega_2^+ - \frac{i_0}{2®i\bar{\sim}s°_s} = iR\left(\bar{\sim}\right)\bar{}_2 C_0 V^-,\quad C_0 = \frac{(K_2 + K_3)b^2}{\bar{a}^2} \tag{2.5}$$

$$R\left(\bar{\sim}\right) = \frac{-\bar{}_1\frac{\mu^3}{b^2} + \bar{\sim}^2 K_2\left(\bar{}_2^2 - \bar{\sim}^2 - 2\bar{}_1\bar{}_2\right) + K_3\bar{}_1\left(\bar{}_1\left(\bar{}_2^2 - \bar{\sim}^2\right) + 2\bar{\sim}^2\bar{}_2\right)}{\frac{\mu^2}{b^2}\bar{}_1\bar{}_2 C_0}, \tag{2.6}$$

$R\left(\bar{\sim}\right)$ has two imaginary and two real roots: $\pm\bar{\sim}_2 i, \pm\bar{\sim}_1$, and $R\left(\bar{\sim}\right) \to 1$ for $\bar{\sim} \to \infty$. To factorization of $R\left(\bar{\sim}\right)$ one can introduce function

$$F\left(\bar{\sim}\right) = R\left(\bar{\sim}\right)\frac{\left(\frac{\mu}{\bar{a}} - \bar{\sim}\right)\left(\frac{\mu}{\bar{a}} + \bar{\sim}\right)^3}{\left(\bar{\sim}^2 - \bar{\sim}_1^2\right)\left(\bar{\sim}^2 + \bar{\sim}_2^2\right)},\ R^+\left(\bar{\sim}\right) = \frac{R\left(\bar{\sim}\right)}{R^-\left(\bar{\sim}\right)}, \tag{2.7}$$

and obtain $R^-\left(\bar{\alpha}\right) = \dfrac{G^-\left(\bar{\alpha}\right)\left(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_1\right)\left(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_2 i\right)}{\left(\omega/\bar{a} - \bar{\alpha}\right)^{1/2}\left(\omega/b - \bar{\alpha}\right)^{1/2}}$,

$$G^-\left(\bar{\alpha}\right) = Exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\omega}{\bar{a}}}^{\frac{\omega}{b}} arctg\,\frac{\frac{\omega^3}{b^2}\bar{\beta}_1^* - 2\left(K_3 - K_2\right)\bar{\zeta}^2\bar{\beta}_1^*\bar{\beta}_2}{\left(K_3\left(\bar{\beta}_1^*\right)^2 - K_2\bar{\zeta}^2\right)\left(\bar{\zeta}^2 - \bar{\beta}_2^2\right)}\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\omega}{b}}^{\infty}\text{arctg}\,\frac{\frac{\omega^3}{b^2}\bar{\beta}_1^*}{\left(K_3\left(\bar{\beta}_1^*\right)^2 - K_2\bar{\zeta}^2\right)\left(\bar{\zeta}^2 - \bar{\beta}_2^2\right) - 2\bar{\beta}_1^*\bar{\beta}_2\bar{\zeta}^2\left(K_3 - K_2\right)}\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{\alpha}}\right\} \tag{2.8}$$

Solution of (2.5) is by [6]

$$\Omega_2^+ = \frac{i_0}{2®i\bar{\sim}s°_s}\left(1 - \frac{\bar{}_2^+\left(\bar{\sim}\right)R^+\left(\bar{\sim}\right)}{\bar{}_2^+(0)R^+(0)}\right),\quad V^- = -\frac{i_0}{2®\bar{\sim}s°_s\,\bar{}_2^+(0)R^+(0)\,\bar{}_2^-\left(\bar{\sim}\right)R^-\left(\bar{\sim}\right)C_0}$$

where $\bar{}_2^{\pm} = \sqrt{\frac{\mu}{b} \pm \bar{\sim}}\ ,\ \bar{}_n^* = \sqrt{\bar{\sim}^2 - \frac{\mu^2}{c_n^2}}\ ,\ c_1 = \bar{a},\ c_2 = b$

Introducing of dimensionless variables $\bar{\sim} = \frac{\bar{a}}{\mu}\sim$ $\bar{¸} = \frac{¸}{\bar{a}}\mu$, $\bar{\sim}^{*}_{n} = \sqrt{\bar{\sim}^{2} - \frac{\mu^{2}}{c_n^{2}}} = \frac{\mu}{\bar{a}}\sqrt{\sim^{2} - \frac{\bar{a}^{2}}{c_n^{2}}}$,

$\bar{\sim}_1 = \sim_1 \frac{\mu}{\bar{a}}$, $\bar{\sim}_2 = \sim_2 \frac{\mu}{\bar{a}}$ one obtains solution (2.8) as

$$G^{-}(\sim) = Exp\left\{ \frac{1}{®}\int_{1}^{\frac{\bar{a}}{b}} arctg \frac{\frac{1}{b^2\bar{a}}\sqrt{¸^2-1} + \frac{2}{\bar{a}^4}(K_2-K_3)¸^2\sqrt{¸^2-1}\sqrt{\frac{\bar{a}^2}{b^2}-¸^2}}{\frac{1}{\bar{a}^4}\left(K_3(¸^2-1)-K_2¸^2\right)\left(2¸^2-\frac{\bar{a}^2}{b^2}\right)} \frac{d¸}{¸-\sim} + \frac{1}{®}\int_{\frac{\bar{a}}{b}}^{\infty} arctg \frac{\frac{\bar{a}^3}{b^2}\sqrt{¸^2-1}}{\left(K_3(¸^2-1)-K_2¸^2\right)\left(2¸^2-\frac{\bar{a}^2}{b^2}\right)+2\sqrt{¸^2-1}\sqrt{¸^2-\frac{\bar{a}^2}{b^2}}¸^2(K_2-K_3)} \frac{d¸}{¸-\sim} \right\}$$

The inverse transformations Laplace and Fourier from (3.5), gives solution in Smirnov–Sobolev form [3], and for $y = 0$ one obtains

$$\frac{t}{\bar{a}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}V = \mathrm{Re}\frac{\frac{i_0}{°_s\bar{a}}G^{-}(0)\bar{\sim}_1\bar{\sim}_2\sqrt{1-\frac{\bar{a}t}{x}}}{\left(\frac{K_3}{\bar{a}}-1\right)\left(\frac{\bar{a}t}{x}-\bar{\sim}_1\right)\left(\frac{\bar{a}t}{x}-\bar{\sim}_2 i\right)G^{-}\left(\frac{\bar{a}t}{x}\right)}, \quad V = x\,\mathrm{Re}\frac{\frac{i_0}{°_s\bar{a}}G^{-}(0)\bar{\sim}_1\bar{\sim}_2}{\left(\frac{K_3}{\bar{a}}-1\right)}\int_0^{\frac{\bar{a}t}{x}}\frac{\sqrt{1-\sim'}\left(\frac{\bar{a}t}{x}-\sim'\right)d\sim'}{(\sim'-\bar{\sim}_1)(\sim'-\bar{\sim}_2 i)\sim' G^{-}(\sim')} \quad (2.9)$$

The calculations of (2.9) for $i_0\left(°_s\bar{a}\right)^{-1} = 5\cdot10^{-6}$, $\sim_1 = 0{,}99999987$, $\sim_2 = 13333{,}3326$

$\bar{a} = 1000\frac{см}{сек}$, $\frac{V_0}{\bar{a}} = \frac{1}{2\cdot10^4}$ $\frac{\bar{a}}{b} = 4, \frac{K_2}{\bar{a}} = 0{,}00058, \frac{K_3}{\bar{a}} = 0{,}00062$, , give graphs of fig. 1 and fig. 2

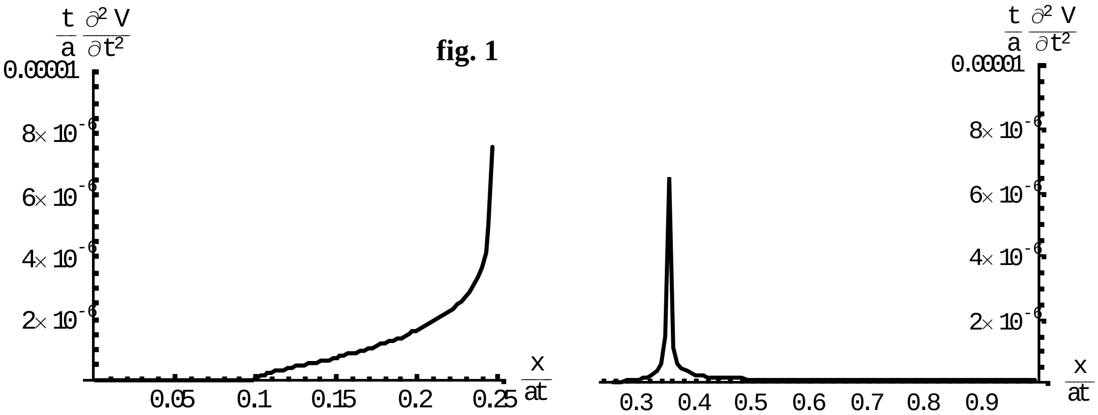


fig. 1

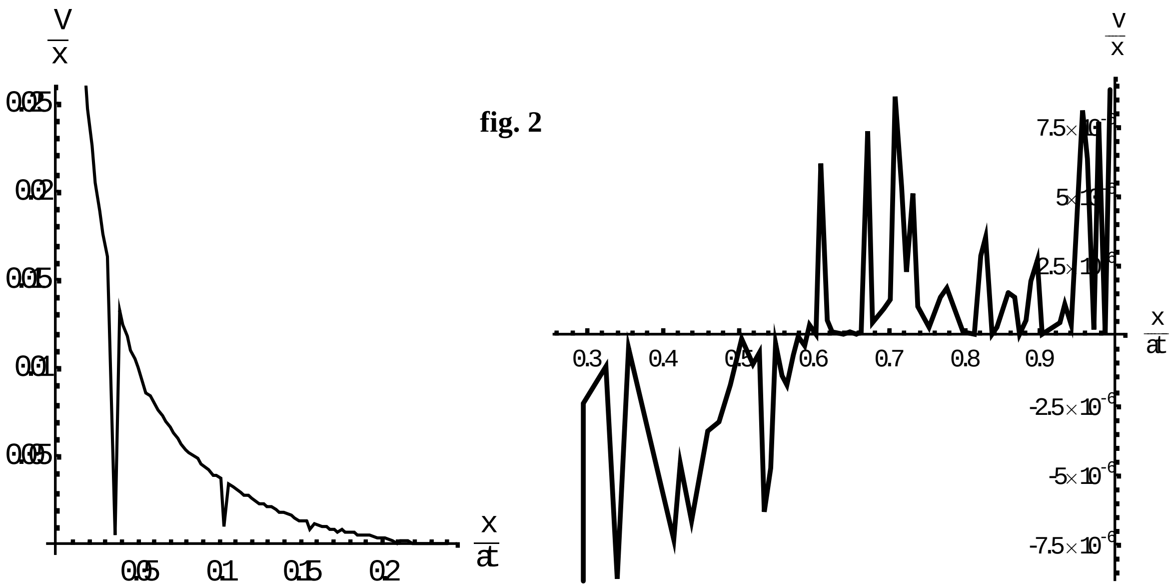


fig. 2

As it is seen $\frac{\partial^2}{\partial t^2}V$ out of crack is positive; fig.2. shows that for $0 \le \frac{x}{at} \le 0.25$, $\frac{V}{x} > 0$, and for $0.25 \le \frac{x}{at} \le 0.6$, $\frac{V}{x} < 0$, and width of crack $b_1 = b_0 + V$ is decreased. For $b_0 = 10^{-5}$ cm, one obtains $\frac{x}{at} \approx 0.5, \frac{V}{x} = -7 \cdot 10^{-6}$, and healing condition $b_1 = 0$ yields $10^{-5} - 7 \cdot t \cdot 10^{-3} = 0$ and for $t = \frac{1}{700}$ sec crack is healed in point $x = \frac{5}{7}$ cm. One can note that on fig.1, fig.2 are of practical interest only small $\frac{x}{at}$ and for large $\frac{x}{at}$ on fig.2 graphic is chaotic [9]. Besides in present report is inclided solution of umsteady mixed boundary problem for stamp with wear. The solution is obtained by same methods and are drawn graphs of stress on stamp [11,12].

REFERENCES

1. Глико А.О. Влияние процесса осаждения твердой фазы из гидротермального раствора на залечивание системы плоско-параллельных трещин. //Тр. VI Международной конференции, Горис-Степанакерт, 2008. С.170-177.
2. Получение конформных поверхностей испытательного контакта и оценка трибохарактеристик масла И20А. http://www.wl-technology.ru/ran
3. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: 1988. 253с.
4. Ландау, Лифшиц. Механика сплошных сред. М.: 1954.
5. Векуа Н.П. Системы сингуляпных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 380с.
6. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: И.Л., 1962. 278 с.
7. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред /"Зангак – 97", 2007. С.244.
8. Лайтфут Т. Явления массопереноса в биологических системах. М.: Мир, 1976.
9. Martirosyan G. A., Bagdoev A. G. The investigation of stochastic processes in biology by methods of nonlinear wave dynamics.// Докл. НАН РА. 2008. N4.
10. Bhattacharia Subhamoy, Blakeborough Anthony, Dush Suresh. Learning from collapse of piles in liquefiabe soils // Procedings of the institution of civil engineers. 2008, V. 161, p.p. 54-60.
11. Мартиросян А.Н., Давтян А.В. Аналитические решения пространственных смешанных динамических граничных задач для перемещений при распространении с постоянной скоростью штампа по границе упругого изотропного полупространства при наличии износа. //Сб. тр. международ. школы–конференции молодых ученых. Агавнадзор, Армения. Ереван, 2009. С. 247-252.
12. Мартиросян А.Н., Динунц А.С. Аналитическое и численное исследование нестационарной пространственной задачи о полубесконечном штампе при наличии износа и трения. //Сб. тр. международ. школы–конференции молодых ученых. Агавнадзор, Армения. Ереван. 2009. С.247–252.

Information about authors

Bagdoev A. G., Corresponding – member NAS RA, Institute of Mechanics NAS Armenia, chief sci. researcher. E-mail: bagdoev@mechins.sci.am
Martirosyan A. N., Doctor - professor of phys.- math. sciences, chief of High Math. Dept. of Goris State University
Tel: (0284)23638, 22048, (0.93)192465, E-mail: dinunts2007@rambler.ru
Dinunts A. S., Lecturer of High Math. Dept. of Goris State University
Davtyan A. V., Master's Degree of High Math. Dept. of Goris State University

SHAPING OF PANELS IN VIEW OF BEHAVIOUR FEATURES OF METAL ALLOYS AT CREEP

Banshchikova I.A.

The properties of anisotropy on directions (longitudinal, transverse, normal to the plate) and different resistance to a tension and compression, hardening and softening at creep have the majority of the sheet materials. That makes mathematical simulation of process of shaping very difficult. In case of the shaping plane panels at creep special interest for testing is represented by the problems of a bending of a square plate, which can realized experimentally. Calculation by finite element method in three-dimensional statement and analytical estimations in one-dimensional statement for the problems of plate bend testify to essential influence of anisotropy on normal direction to sheet in comparison with calculation in isotropic statement: delay of deformation process for a problem of plate torsion in a saddle surface and acceleration of process of deformation for problems of plate bend in a cylindrical surface. Not taking into account of real properties of creep at the decision of applied problems of details shaping and forecasting of their further exploitation can result in essential mistakes.

At the decision of problems of shaping thin-sheet details at creep it is necessary to take into account strain-strength features of behaviour of modern constructional materials, such as anisotropy on various directions (longitudinal, transverse, normal to the plate), different resistance to a tension and compression, hardening and softening. In view of essential physical nonlinearity of problems at creep the taking into account of various properties at development of calculation methods is problematic [1,2]. Let's consider case of anisotropy of a material when strain rate of one-dimensional creep η is connected with stress σ by ratio $\eta = B_\nu \sigma^n$, where coefficient *B* varies depending on a direction ν and *n* is constant value at any direction . At an arbitrary stress state the process of creep can be described in a general view $\eta_{ij} = \partial\Phi / \partial\sigma_{ij}$, $\Phi = T^{n+1}/(n+1)$, where η_{ij} – components of creep strain rates tensor, σ_{ij} – components of stresses tensor, Φ – scalar potential function of stresses tensor, T^2 – positively defined quadratic form of stresses, *n* – a constant of a material. For orthotropic an incompressible material in axes of the coordinates coinciding with the main axes of anisotropy, this quadratic form looks like form, used by Hill for the description of anisotropic plasticity and include six coefficients A_{ij}, determined experimentally [1]

$$T(\sigma_{ij}) = (A_{11}(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{31}^2)^{1/2}. \quad (1)$$

Dependence $G = T^n$ takes place similarly isotropic creep. G^2 – the quadratic form of strain rates and coefficients of anisotropy. For speeds of deformations of creep $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c / dt$ we have

$$\eta_{11} = T^{n-1}\left((A_{22}+A_{33})\sigma_{11} - A_{33}\sigma_{22} - A_{22}\sigma_{33}\right), \quad \eta_{12} = 2T^{n-1}A_{12}\sigma_{12}. \quad (2)$$

Other components can be obtained by cyclic rearrangement of indexes.

In case of the shaping at creep plane panels the special interest for testing represent problems of a bending of the square plate realizable experimentally. We shall consider a case, when $\eta_{11} = \eta_{22}$, $\eta_{33}/\eta_{22} = k$. The direction η_{33} coincides with a normal to a plate. «The coefficient of anisotropy» on a normal to a sheet k was defined by averaging of the relation of the size change of a sheet thickness (i.e. in a direction of a normal to a sheet) to the size change of a flat sample width at various degrees of axial deformation from experiments on a stretching. Such anisotropy can be result of more intensive rolling of initial blank of detail. Taking into account, that $\eta_{33}/\eta_{22} = A_{22}/A_{33}$, $A_{11} = A_{22}$ we can find coefficients of quadratic forms

$$A_{11} = A_{22} = \frac{k}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, \quad A_{33} = \frac{1}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, \quad A_{12} = \frac{k+2}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}. \quad (3)$$

In case of a bend of plates and using of Kirchhoff's hypotheses the equations (2) transform to

$$\eta_{11} = T_0^{n-1} B^{2/(n+1)} \left(\sigma_{11} - \frac{1}{k+1}\sigma_{22}\right), \quad \eta_{22} = T_0^{n-1} B^{2/(n+1)} \left(\sigma_{22} - \frac{1}{k+1}\sigma_{11}\right),$$

$$\eta_{12} = T_0^{n-1} B^{2/(n+1)} \frac{k+2}{k+1}\tau_{12}, \quad T^2 = B^{2/(n+1)} \left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2}{k+1}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\frac{k+2}{k+1}\sigma_{12}^2\right).$$

For the decision of problems of a bend of plates it is possible to use the simplified procedure of calculation based on integral values in the assumption of steady-state creep [3,4]. In this case rates of curvature is connected with moments by ratios

$$\dot{\chi}_{11} = DM_0^{n-1}B^{2/(n+1)}\left(M_{11} - \frac{1}{k+1}M_{22}\right), \qquad \dot{\chi}_{22} = DM_0^{n-1}B^{2/(n+1)}\left(M_{22} - \frac{1}{k+1}M_{11}\right),$$

$$\dot{\chi}_{12} = DM_0^{n-1}B^{2/(n+1)}\frac{k+2}{k+1}M_{12}\ , \quad M_0^2 = B^{2/(n+1)}\left(M_{11}^2 + M_{22}^2 - \frac{2}{k+1}M_{11}M_{22} + 2\frac{k+2}{k+1}M_{12}^2\right), \qquad (4)$$

$$\dot{\chi}_0 = DM_0^n, \qquad D = \left(\frac{\mu+2}{2h^{\mu+2}}\right)^n, \qquad \mu = 1/n,$$

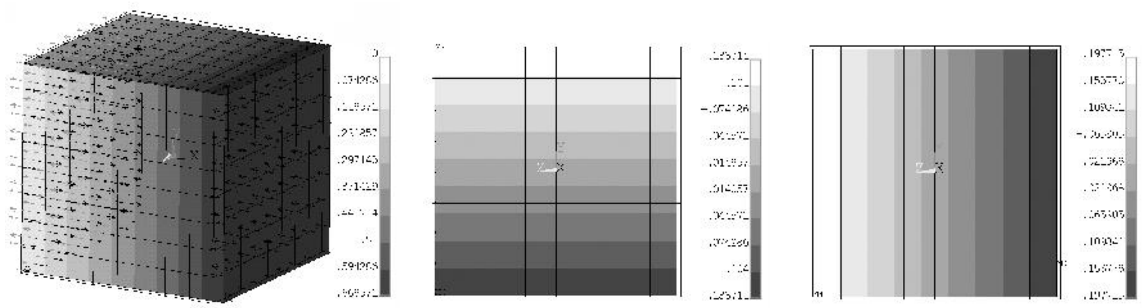
$$\dot{\chi}_0^2 = c^2B^{-2/(n+1)}\left(\dot{\chi}_{11}^2 + \dot{\chi}_{22}^2 + \frac{2}{k+1}\dot{\chi}_{11}\dot{\chi}_{22} + \frac{2k}{k+1}\dot{\chi}_{12}^2\right), \quad c^2 = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}.$$

Here χ_{ij} – components of tensor of curvature rates, M_{ij} – components of tensor of moments, h – thickness of a plate.

The second method of decision of problems of torsion and bend of plates assumes, that full deformations consist of elastic deformations and deformations of creep. It is assumed also that at the initial moment the plate is deformed elastically, and surfaces of a bend coincide with a median surface. In view of Kirchhoff's hypotheses for full deformations we have system of the equations

$$(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22})/E + \varepsilon_{11}^c = \chi_{11}x_3,$$
$$(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11})/E + \varepsilon_{22}^c = \chi_{22}x_3, \qquad (5)$$
$$\sigma_{12}(1+\nu)/E + \varepsilon_{12}^c = \chi_{12}x_3.$$

Here E – modulus of elasticity, ν – Poisson's ratio, $-h/2 \le x_3 \le h/2$. Adding to system (2), (3), (5) initial conditions and the integral equations for the moments depending on type of a solved problem (torsion by the constant moment $M_{12} = M$ or a cylindrical bend of a plate $M_1 = M, \chi_{22} = 0$), breaking a normal of a plate on l equal intervals, we shall receive system of the ordinary differential equations of the first order concerning deformations. Solving this system by the Euler's method, we can determine $\chi_{ij}(t)$.



a b c

Fig. 1. Isolines of displacements u_x – (a), u_y – (b), u_z – (c) at a tension of cubic sample by force in X axis direction.

The model of anisotropic creep was tested on the basis of element Solid45 in three-dimensional statement with use of finite element package ANSYS. For test the problem of a tension of a cubic sample was considered. Calculations were carried out for alloy AK4-1T (T=200°C) in the assumption of weaker deformation of a material in Z axis direction for $k = 1; 1,2; 1,5; 2$ at $n = 8$, $B = 0,5\cdot 10^{-14}(\mathrm{kg/mm^2})^{-n}\mathrm{h^{-1}}$. Isolines of displacements u_x, u_y, u_z for a cube which is stretched in a direction of axis X for $k = 1,5$ at $t = 500$ h are shown on fig. 1

In table 1 displacements for problem of a tension of a cubic sample are presented: elastic at time

$t = 0$, and displacements at time $t = 500$ h for various values k. The parameter R_z describing anisotropy, was recalculated under the formula $R_z = ((k+1)/(2k))^{1/2}$. For the calculated displacements we obtain $u_z / u_y = k$ and $u_x - (u_y + u_z) = 0$, that corresponds to condition of incompressibility at creep.

Table 1.

Type of calculation		u_x, mm	$u_y/2$, mm	$u_z/2$, mm
$t = 0$ h		0,0286	0,0057	0,0057
$t = 500$ h	$k = 1$	0,6686	0,1657	0,1657
	$k = 1{,}2$	0,6686	0,1512	0,1803
	$k = 1{,}5$	0,6686	0,1337	0,1977
	$k = 2$	0,6686	0,1124	0,2191

Tables 2 and 3 include the results of calculations of curvature and rate of curvature for problem of plate bend in a saddle surface by the moment, regularly distributed along edges (fig. 2 a) at $k = 1; 1,5; 2$ by the three methods of the decision: a method 1 - an estimation according to formulas (4); a method 2 - the decision of system (2), (3), (5); a method 3 - calculation with use of finite element model in three-dimensional geometrical-linear statement. Calculations were carried out for a plate occupying area $-100 \le x_i \le 100$ mm $(i=1,2)$ by thickness $h=20$ mm, moment of torsion $M_{12} = M = 925$ kG·mm/mm $\nu = 0,4$, $E = 7000$ kG/mm^2, $t = 250$ h. At the solution in three-dimensional statement the curvature was calculated along a diagonal in a point $x_1 = x_2 = 50$ mm in order to exclude the influence of edge effects. Rate of curvature was defined at the steady-state stage, when $150 \le t \le 250$ h. On fig. 2 the axes of system OXYZ correspond to the axes x_i $(i = 1, 2, 3)$ according to ratio $X = x_1, Z = x_2, Y = x_3$.

Table 2. Value of curvature of plate at a bend in a surface of the saddle form.

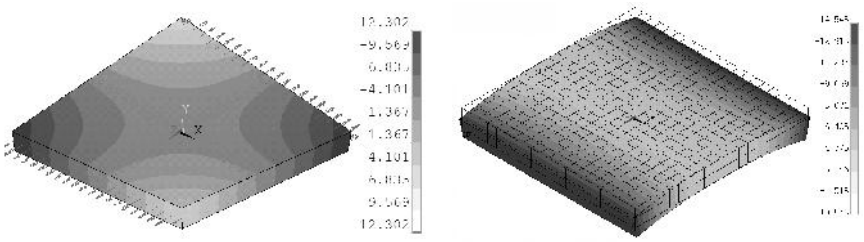
Method	$\chi_{k=1}$, 10^{-4} mm^{-1}	$\chi_{k=1,5}$, 10^{-4} mm^{-1}	$\chi_{k=2}$, 10^{-4} mm^{-1}	$\chi_{k=1,5}/\chi_{k=1}$, %	$\chi_{k=2}/\chi_{k=1}$, %
2	12,1	9,9	8,7	81,8	71,9
3	14,63	12,08	10,67	82,6	72,9

Table 3. Value of curvature rate of plate at a bend in a surface of the saddle form.

Method	$\dot\chi_{k=1}$, 10^{-6} mm^{-1}h^{-1}	$\dot\chi_{k=1,5}$, 10^{-6} mm^{-1}h^{-1}	$\dot\chi_{k=2}$, 10^{-6} mm^{-1}h^{-1}	$\dot\chi_{k=1,5}/\dot\chi_{k=1}$, %	$\dot\chi_{k=2}/\dot\chi_{k=1}$, %
1	3,053	2,238	1,797	73,3	58,9
2	3,307	2,453	2,004	74,2	60,6
3	3,948	2,944	2,41	74,6	61,0

In two last columns of table 2 the relations of curvature calculated in anisotropic case at $k = 1,5$ and 2 to curvature calculated in isotropic case at $k = 1$ are presented, in percentages. In table 3 there are similar results for the rate of curvature on the steady-state stage at creep. All calculation procedures testify about delay of process of deformation at the shaping of plates in a surface of sign-variable curvature.

Calculations for problems of a bend of square plate in a surface of the cylindrical form with use of all three methods (fig. 2 b, tables 4 and 5) have shown acceleration of process of deformation in comparison with calculation in isotropic statement.



a b

Fig. 2. Deflection calculated by method of finite elements in the three-dimensional statement at k=1,5 for problem of a plate bend by the twisting moment (a); bend of plate in the cylindrical form (b).

Table 4. Value of curvature of plate at a bend in a surface of the cylindrical form.

Meth-od	$\chi_{k=1}$, 10^{-4}mn	$\chi_{k=1,5}$, 10^{-4}mn	$\chi_{k=2}$, 10^{-4}mn	$\chi_{k=1,5}/\chi_{k=1}$, %	$\chi_{k=2}/\chi_{k=}$ %
2	21,21	32,07	40,07	151,2	188,9
3	22,96	29,39	33,61	128,0	146,4

Table 5. Value of curvature rate of plate at a bend in a surface of the cylindrical form.

Method	$\dot{\chi}_{k=1}$, 10^{-6}mm^{-1}h^{-1}	$\dot{\chi}_{k=1,5}$, 10^{-6}mm^{-1}h^{-1}	$\dot{\chi}_{k=2}$, 10^{-6}mm^{-1}h^{-1}	$\dot{\chi}_{k=1,5}/\dot{\chi}_{k=1}$, %	$\dot{\chi}_{k=2}/\dot{\chi}_{k=1}$, %
1	3,411	5,048	6,507	148,0	190,8
2	3,298	5,488	7,079	166,4	214,6
3	3,425	4,696	5,525	137,1	160,5

The analysis of all received results confirms essential influence of anisotropy on a normal direction to a sheet. Not taking into account of the strain-strength features of behaviour of materials at the decision of applied problems of details shaping and forecasting of their further exploitation can result in essential mistakes.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant Nos. 08-01-00168).

REFERENCE

1. Sosnin O.V. About anisotropic creep of materials // PMTF, 1965.-6. - P. 99-104.
2. Banshchikova I.A., Gorev B.V., Tsvelodub I. Ju. Creep of plate made of aluminum alloys under bending // PMTF, 2007.–Vol.48, No. 6. – P. 156-159.
3. Banshchikova I.A. Calculation of deformation process of sheet details of double curvature from anisotropic alloys at creep/ Proceedings of The Intern. Conference. SPb.: Polytecnic University Publishing, 2008. V.1. P.34-38.
4. Sosnin O.V., Gorev B.V. About some features of creep of sheet materials // Scientific publication: Dynamics of continua. Novosibirsk, 1970, No. 4.– P. 5-10.

Information about authors

Banshchikova Inna Anatolievna – Ph. Doctor (Phys. & Math.), Senior Scientific Researcher, Institution of the Russian Academy of Sciences the Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the RAS ; Lab. of Static Strength. ; tel (383) 3332750; E-mail: binna@ngs.ru

PLATE FLEXURE, STRENGTHENED BY ADDITIONAL LAYER OR STIFFENING RIBS

Barakat M. S., Asatryan V. M, Belubekyan E. V.

The problems of the rectangular plate flexure, strengthened by additional layer of another more strength material and strengthened by the four symmetrically located oblique stiffening ribs equal to it by weight are investigated. The comparison of the obtained results shows that strengthening plate by stiffening ribs leads to a notable increase in its rigidity and strength in comparison with the two-layered plate of the same weight.

1. The rectangular plate free supported on the outline with the sizes a,b,h_1, strengthened from below by additional layer from another material of thickness h_2, under the action of the transverse load $q(x,y)$ is examined (Fig.1).

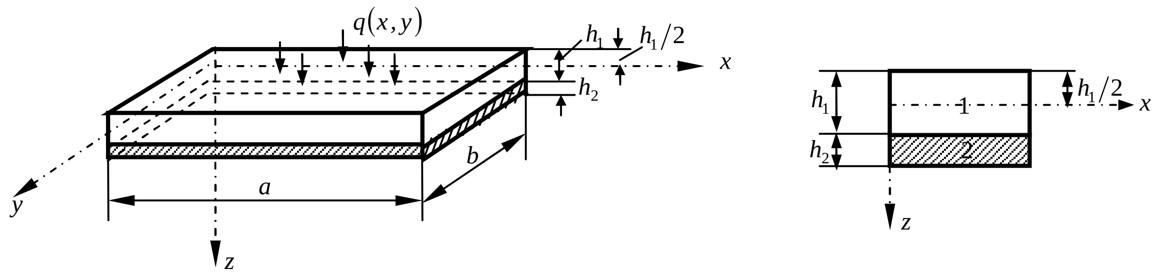


Fig.1. The design diagram of the two-layered plate

It considers that the coordinate plane of the plate coincides with the middle plane of an upper layer. For the rigidities of the plate in question, accordingly [1], the expressions are obtained:

$$C_{ik} = B_{ik}^{(2)} h_2 + B_{ik}^{(1)} h_1 , \quad K_{ik} = \frac{1}{2} B_{ik}^{(2)} h_2 \left(h_1 + h_2 \right),$$

$$D_{ik} = \frac{1}{12} \left[B_{ik}^{(2)} h_2 \left(4h_2^2 + 3h_1^2 + 6h_1 h_2 \right) + B_{ik}^{(1)} h_1^3 \right] \ (i,k = 1,2,6). \tag{1}$$

Here:

$$B_{11}^{(j)} = B_{22}^{(j)} = \frac{E_j}{1-\nu_j^2}, \quad B_{12}^{(j)} = \frac{\neg_j E_j}{1-\neg_j^2}, \quad B_{66}^{(j)} = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \quad (j = 1,2),$$

E_j, ν_j $(j = 1,2)$ – the coefficients of elasticity and Poison's ratios of the materials of the layers in a plate.

The system of the resolving equations of the flexure of two-layered plate relative to the displacements $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ of the points of coordinate plane, according to [1,2], will be written down in the form:

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(C_{12} + C_{66} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - K_{11} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) = 0,$$

$$C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(C_{12} + C_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - K_{11} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) = 0, \tag{2}$$

$$D_{11} \Delta^2 w - K_{11} \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = q.$$

Expanding the function of load in the series

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\lambda_m x \sin\mu_n y, \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin\lambda_m x \sin\mu_n y \, dx dy, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{b},$$

the solutions of equations (2), that satisfies conditions of hinged supports of plate, takes in the form:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,,\ u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}\cos\lambda_m x\sin\mu_n y\,,\ v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\sin\lambda_m x\cos\mu_n y\,. \tag{3}$$

Substituting expressions (3) into the equations (2), are obtained the values of coefficients a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}:

$$a_{mn}=d_0\frac{q_{mn}}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\,,\ b_{mn}=d_0 g_1\frac{q_{mn}\lambda_m}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\,,\ c_{mn}=d_0 g_1\frac{q_{mn}\mu_n}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\,, \tag{4}$$

where:

$$d_0=\frac{3}{C_0 h_1^2 f_1\left(1-g_1 g_2\right)},\quad C_0=\frac{E_1}{1-\nu_1^2}h_1,\quad f_1=\frac{1}{4}+\frac{r\left(1-\nu_1^2\right)}{1-\nu_2^2}\alpha\left(\alpha^2+1.5\alpha+0.75\right),\quad g_1=\frac{1}{2}\frac{p_1 h_1}{m_1}\,,$$

$$g_2=\frac{3}{2}\frac{p_1}{f_1 h_1}\,,\ m_1=1+\frac{r\left(1-\nu_1^2\right)}{1-\nu_2^2}\alpha\,,\ p_1=\frac{r\left(1-\nu_1^2\right)}{1-\nu_2^2}\alpha\left(1+\alpha\right),\ r=\frac{E_2}{E_1}\,,\ \alpha=\frac{h_2}{h_1}\,.$$

For the deflections and the efforts in the plate [2], taking into account (3) and (4), the following expressions are obtained:

$$w=d_0\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,, T_x=d_1\frac{\nu_2 m_1-m_2}{h_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}\mu_n^2}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,,$$

$$T_y=d_1\frac{\nu_2 m_1-m_2}{h_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}\lambda_m^2}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,,$$

$$S=d_1\frac{\nu_2-\nu_1}{h_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}\lambda_m\mu_n}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\cos\lambda_m x\cos\mu_n y\,,$$

$$M_x=d_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\left[\frac{2m_1 f_1}{3p_1}\left(\lambda_m^2+\frac{f_2}{f_1}\mu_n^2\right)-\frac{p_1}{2}\left(\lambda_m^2+\nu_2\mu_n^2\right)\right]\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,, \tag{5}$$

$$M_y=d_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\left[\frac{2m_1 f_1}{3p_1}\left(\frac{f_2}{f_1}\lambda_m^2+\mu_n^2\right)-\frac{p_1}{2}\left(\nu_2\lambda_m^2+\mu_n^2\right)\right]\sin\lambda_m x\sin\mu_n y\,,$$

$$H=d_1\left(\frac{1-\nu_2}{2}p_1-\frac{2m_1 f_1}{3p_1}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}\lambda_m\mu_n}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\cos\lambda_m x\cos\mu_n y\,,$$

$$N_x=d_1\left(\frac{2m_1 f_1}{3p_1}-\frac{p_1}{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}\lambda_m}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\cos\lambda_m x\sin\mu_n y\,,$$

$$N_y=d_1\left(\frac{2m_1 f_1}{3p_1}-\frac{p_1}{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}\mu_n}{\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2}\sin\lambda_m x\cos\mu_n y\,,$$

where: $d_1=\dfrac{3p_1}{2m_1 f_1\left(1-g_1 g_2\right)}$, $m_2=\nu_1+\nu_2\dfrac{r\left(1-\nu_1^2\right)}{1-\nu_2^2}\alpha$,

$$f_1=\frac{1}{4}\nu_1+\nu_2\frac{r\left(1-\nu_1^2\right)}{1-\nu_2^2}\alpha\left(\alpha^2+1.5\alpha+0.75\right).$$

The square plate ($a=b$) of thickness h_1 strengthened by the additional layer of thickness $h_2=0.2h_1$, is examined as an example. It considers that $E_2=7E_1$, $\nu_1=\nu_2$, $q=\text{const}$.

Values of the deflections w and efforts T_x, T_y, S, M_x, M_y, H, N_x, N_y are calculated according to the formulas (5). In this case the value of efforts T_x, T_y, S are equal to zero. Diagrams of the reduced deflections $\overline{w} = w E h_1^3 / q b^4$, moments $\overline{M}_x = M_x / q b^2$, $\overline{H} = H / q b^2$ and transverse forces $\overline{N}_x = N_x / q b$ are respectively given in Fig. 3, 4, 5, 6.

The greatest values of the deflections $w_{\max} = 0.0128 q b^4 / E h^3$ and the bending moments $M_{x\max} = M_{y\max} = 0.0274 q b^2$ are obtained in the center of the plate ($x = y = 0.5b$), torques $H_{\max} = 0.0207 q b^2$ in its apexes ($x = y = 0$; $x = 0, y = b$; $x = b, y = 0$; $x = y = b$), and the transverse forces $N_{x\,max} = N_{y\,max} = 0.336 q b$ respectively in the middles of the sides of the plate ($x = 0, y = 0.5b$; $x = b, y = 0{,}5b$ and $x = 0.5b, y = 0$; $x = 0.5b, y = b$).

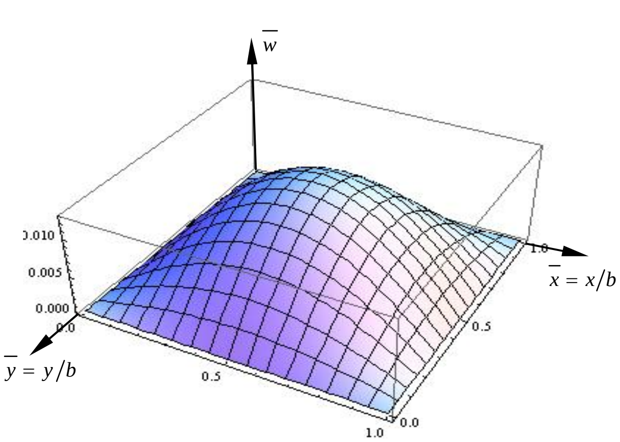


Fig.3. Diagram $\overline{w}$

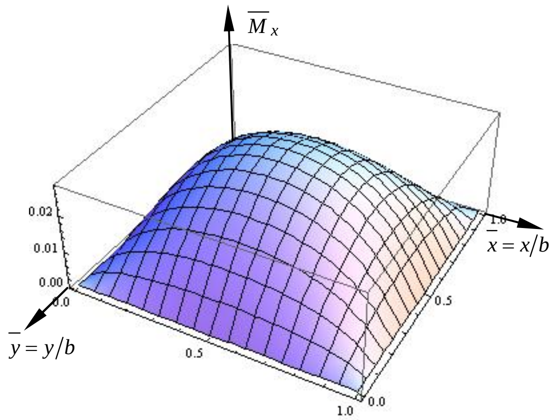


Fig.4. Diagram $\overline{M}_x$

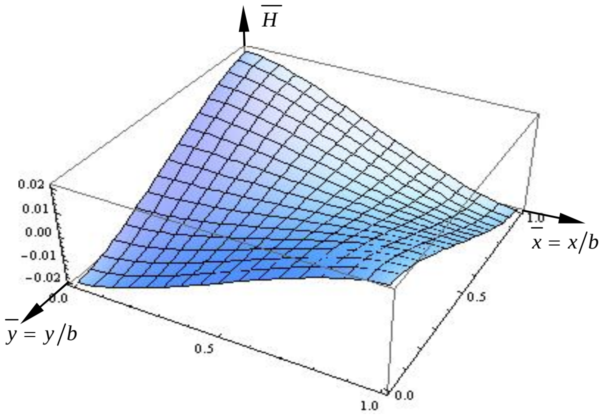


Fig.5. Diagram $\overline{H}$

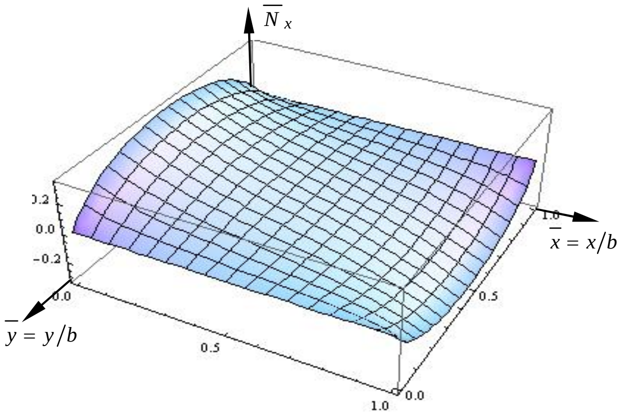


Fig.6. Diagram $\overline{N}_x$

2. The above examined problem is solved for the case, when the lower layer of a plate is substituted by the four symmetrically located oblique stiffening ribs, which are equal by the weight to this layer (Fig. 6).

Sizes of the ribs $\alpha_r h_r \times h_r$ will be determined from the condition of the equal weights of the ribs and lower layer of two-layered plate, i.e. $abh_2 = 4\alpha_r h_r^{\,2} l_r$, from where

$$h_r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abh_2}{\alpha_r l_r}} . \tag{6}$$

Here $l_r = (0.5b - c)/\sin\alpha$ – the length of stiffening rib.

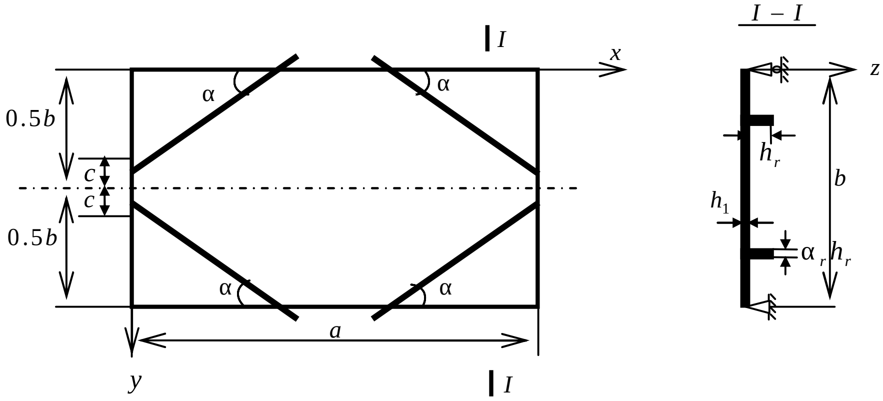


Fig. 6. Design diagram of the ribbed plate

Solution of the problem by the energy method of Ritz- Timoshenko [3] is given in the work [4], where in the case of constant load ($q = \text{const}$) the expression of deflection in the second approximation is represented in the form:

$$w = a_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + a_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} + a_{31}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + a_{33}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}. \tag{7}$$

For the coefficients a_{mn} the expressions are obtained:

$$a_{11} = \frac{4qb^5}{3\pi^6}\frac{75Db + 4\sqrt{2}B + 24\sqrt{2}C}{2\sqrt{2}DBb + \left(25Db + 8\sqrt{2}C\right)\left(Db + \sqrt{2}B\right)},$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{4qb^5}{3\pi^6}\frac{Db - 2\sqrt{2}B}{2\sqrt{2}DBb + \left(25Db + 8\sqrt{2}C\right)\left(Db + \sqrt{2}B\right)},\quad a_{33} = \frac{4qb^5}{729\pi^6}\frac{1}{Db + \sqrt{2}B},$$

where: $D = E_1 h_1^3 / 12\left(1 - \nu_1^2\right)$ – the cylindrical rigidity of plate, $B = E_2 J$ – the flexural rigidity of a rib, $C = \dfrac{E_2}{2\left(1 + \nu_2\right)}\alpha_r h_r^4 \beta$ - the rigidity on torsion of rib, $\beta = \alpha_r^2\left[\dfrac{1}{3} - \dfrac{64}{\pi^5}\alpha_r \sum\limits_{1,3,\ldots}\dfrac{1}{n^5}\,\text{th}\,\dfrac{\pi n}{2\alpha_r}\right]$,

$J = \dfrac{\alpha_r h_r^2}{12}\left[h_r^2 + 3\left(h_r + h_1\right)^2\right]$ – the second moment of area of rib relative to the axis, passing through the coordinate plane of the plate.

The efforts in the plate are determined from the known formulas of the of plates flexure [3].

A numerical example is examined for the square plate ($a = b$) with the symmetrically located ribs with $c = 0$, $\alpha = 45^0$, $h_1 = 0.02b$, $\sim_r = 0.2$, $q = \text{const}$. From the condition of equality by weights of two-layered and ribbed plates by the formula (6), the height of edge $h_r = 0.084b$ is determined.

The diagrams of the given deflections $\overline{w}$, moments $\overline{M}_x$, $\overline{H}$ and transverse forces $\overline{N}_x$ are respectively given in Fig. 7, 8, 9, 10.

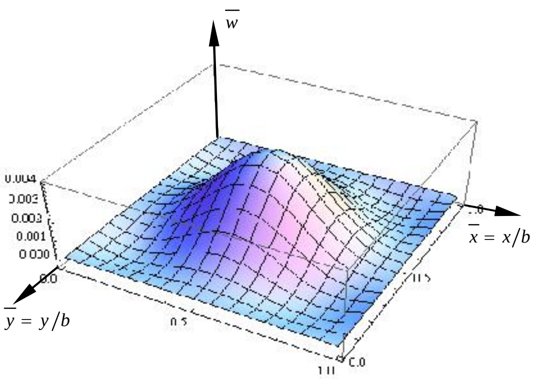


Fig.7. Diagram $\overline{w}$

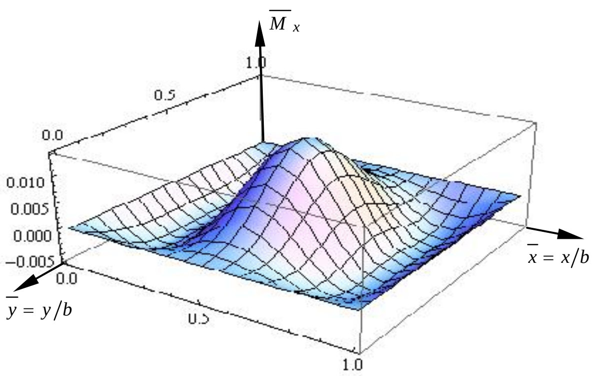


Fig.8. Diagram $\overline{M}_x$

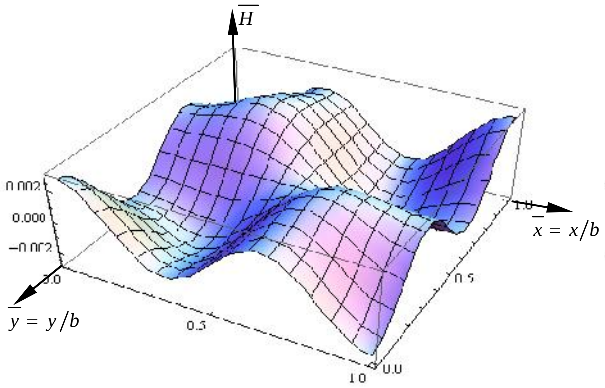


Fig.9. Diagram $\overline{H}$

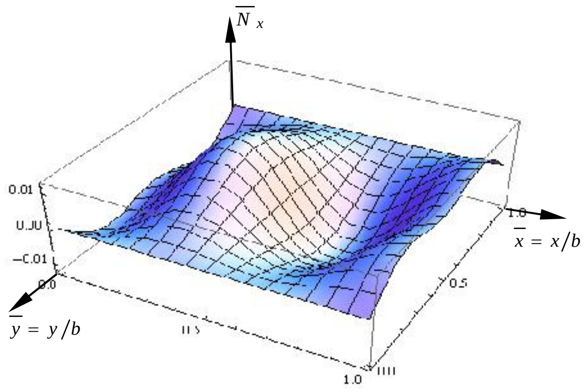


Fig.10. Diagram $\overline{N}_x$

The greatest values of the deflections $w_{\max} = 0.00702qb^4 / Eh^3$ and the bending moments $M_{x\max} = M_{y\max} = 0.0152qb^2$ are obtained in the center of the plate ($x = y = 0.5b$), torques $H_{\max} = 0.0105qb^2$ in the sections $x = y = 0.275b$; $x = 0.275b, y = 0.725b$; $x = 0.725b, y = 0.275b$; $x = y = 0.725b$, and the transverse forces $N_{x\max} = N_{y\max} = 0.336qb$ respectively in the sections $x = 0.25b, y = 0.5b$; $x = 0.75b, y = 0{,}5b$ and $x = 0.5b, y = 0.25b$; $x = 0.5b, y = 0.75b$. The comparison of the obtained results shows that the replacement of the additional layer of two-layered plate by equal to it by the weight obliquely located stiffening ribs leads to a notable increase in its rigidity and strength. In particular, the maximum deflection and the bending moments of a plate decrease almost 2 times.

REFERENCES

1. Ambartsumyan S.A. The general theory of anisotropic shells. M.: Science, 1974. 448p.
2. Ambartsumyan S.A. The theory of anisotropic plates. M.: Science, 1987. 360p.
3. Timoshenko S., Woynovsky – Krieger S. Plates and shells. M.: Fizmatgiz, 1963, 636p.
4. Asatryan V., Barakat M., Belubekyan E. Calculation of of the of rectangular plate, reinforced by the oblique stiffening ribs. //Proceedings of Yerevan State University of Architecture and Construction, v.II (35), 2009, pp. 12-17.

Information about authors

Asatryan Vrezh – doctor of engineering, Yerevan State University of Architecture and Construction, assistant of dean of transport department, (37493) 534801,
E-mail: ma_vrezh@yahoo.com

Barakat Mustafa – post graduate student, Yerevan State University of Architecture and Construction, chair of strength of materials, Syria, Aleppo.

Belubekyan Ernest – doctor of science, Yerevan State University of Architecture and Construction, head of chair of strength of materials, (37410) 540874, (37491) 431194, E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

NUMERICAL SIMULATIONS OF DYNAMIC PHASE TRANSFORMATIONS: BRITTLE FRACTURE

Bratov V.A., Morozov N.F., Petrov Y.V.

The paper is discussing problems connected with embedment of the incubation time criterion for brittle fracture into finite element computational schemes. Incubation time fracture criterion is reviewed, practical questions of its numerical implementation are discussed. Several examples of how the incubation time fracture criterion can be used as fracture condition in finite element computations are given. The examples include simulations of dynamic crack propagation and arrest, impact crater formation (i.e. fracture in initially intact media), propagation of cracks in pipelines. Applicability of the approach to model initiation, development and arrest of dynamic fracture is claimed.

1. Introduction

Numerical methods are of a vital importance while solving problems of dynamic fracture mechanics. First of all this is connected to the fact that an overwhelming majority of problems of dynamic fracture are impossible to solve analytically. Framework of dynamic problems allowing analytical solution is limited to few classical solutions (e.g. see the book of Freund (1990) for exhaustive collection of these solutions). Turning to problems of dynamic fracture evolution (fracture development and arrest) a possibility to construct analytical solution is completely vanishing (not accounting for couple of solutions for steady-state dynamic crack propagation).

Central issue while solving problems of dynamic fracture (no matter, numerically or analytically) is rupture criterion to be used in order to assess if fracture should happen at a given state of a system. For several decades it is known that classical fracture criteria (criteria based on the idea of the ultimate stress for intact media and on the idea of the critical stress intensity factor for cracked bodies) are not able to provide satisfactory coincidence with known experiments (see, e.g. Petrov and Morozov, 1994). Moreover, it is easy to show that these criteria contradict the common sense being applied to transient problems (as discussed in Morozov and Petrov, 2000).

In (Petrov, 1991, Petrov and Morozov, 1994, Morozov and Petrov, 2000) a new criterion based on the introduced concept of the incubation time of a fracture process was proposed in order to predict conditions of initiation of brittle fracture in solids undergoing dynamic impact loading. Later in this paper the incubation time fracture criterion (ITFC) will be discussed in detail. Here some distinguishing properties of the ITFC that make it especially attractive to be embedded into numerical computational schemes are outlined. In this connection the important feature of the incubation time fracture criterion is that it is able to predict fracture initiation conditions with reliability and correctness in “static” case of “slow” changing loads and “slow” changing geometry as well as in “dynamic” case of high-rate loads and “fast” changing geometry (see, e.g., Petrov and Morozov, 1994, Morozov and Petrov, 2000). Moreover, the criterion is supplying a smooth transition between these two cases (Petrov et al., 2003). The result is that using this approach one does not need to care about time scale of the problem – the criterion is giving correct predictions in a wide range of loading rates. Even distinguishing between “static” and “dynamic” situation is not obligatory needed anymore, though the ITFC itself is providing a perfect possibility to do this.

It is easy to show (see e.g. Morozov and Petrov, 2000) that for “static” problems with “slow” changing loads and “slow” changing geometry the ITFC is coinciding with well-known Neuber-Novozhilov fracture criterion. It can be proven (Morozov and Petrov, 2000, Kornev and Kurguzov, 2004) that with the right choice of spatial parameter d, used in criterion formulation, Neuber-Novozhilov criterion is giving predictions coinciding with critical tensile stress (ultimate stress) criterion in the case of rapture of initially intact media and the critical stress intensity factor (Griffith - Irwine, K_{IC}) criterion in the case of rupture in a tip of a macroscopic crack. The important outcome is that the criterion is governing two cases that are normally treated separately in a single (and rather simple) rupture condition– it can be applied to predict brittle fracture of materials with arbitrary size of defect, from intact undamaged media to media with macroscopic cracks. The Neuber-Novozhilov criterion is also providing smooth transition between these two cases. As a result the criterion is perfectly applicable to fracture problems with fracture surface geometry that is not known a priori. In such problems fracture in initially intact material can be initiated somewhere in a body and, as it evolves, transforms into a macroscopic crack. The whole fracture evolution can be predicted with a single fracture criterion.

In a big number of works (see, e.g., Morozov and Petrov, 2000, Petrov et al., 2003, Petrov and Sitnikova, 2007) authors, applying the introduced ITFC to predict critical fracture conditions in different dynamic fracture experiments (e.g., Ravi-Chandar and Knauss, 1984) proved that the ITFC can be successfully used to predict initiation of brittle fracture appearing as a result of high-rate deformation applied somewhere in a body. In the same works a material parameter τ – the incubation time of brittle fracture, constituting the essence of the ITFC and characterizing the temporal dependence of media strength was computed for many of widely used materials.

Lately an approach making it possible to embed the ITFC into numerical computational schemes based on finite element method (FEM) was developed (Bratov and Petrov, 2007a, 2007b). Utilizing this approach simulation of several different experiments on dynamic impact fracture caused by high-rate loads was performed (Bratov and Petrov, 2007a, Bratov et al., 2008). These works testify that the ITFC used as a rupture criterion in FEM numerical simulations is able to predict correctly and precisely experimentally observed phenomena of dynamic fracture initiation, evolution and arrest.

As a matter of fact, not including the ITFC and approaches based on classical fracture criteria that are obviously inapplicable to predict high-rate fracture, nowadays only one approach exists that is pretending to correct prediction of dynamic fracture. This approach is originating from the works of Freund (1972) and was later developed by Rosakes. It is based on an assumption that fracture criterion in a tip of a crack can be received as a function of stress intensity factor rate: $K^d(t) \le K_C^d(\dot{K}(t))$, with K_d being the dynamic stress intensity factor, changing in time, K_C^d being its critical value and dot denoting time derivative. As discussed by Bratov and Petrov (2007a), this approach in many cases is contradicting the common sense and is applicable to predict dynamic fracture initiation (not even mentioning high-rate fracture evolution) in a very limited set of problems with strict requirements on material, loading history, fractured sample geometry etc.

2. Numerical Implementation of the Incubation Time Fracture Criterion

Incubation time criterion for brittle fracture at a point x at time t reads as (Petrov, 1991, Petrov and Morozov, 1994, Morozov and Petrov, 2000):

$$\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\frac{1}{d}\int_{x-d}^{x}\sigma(x',t')\,dx'\,dt' \ge \sigma_c \qquad (1)$$

where τ is the microstructural time of a fracture process (or fracture incubation time) – a parameter characterizing the response of the studied material to applied dynamic loads (i.e. τ is constant for a given material and does not depend on problem geometry, the way a load is applied, the shape of a load pulse and its amplitude). d is the characteristic size of a fracture process zone and is constant for the given material and the chosen scale level. σ is normal stress at a point, changing with time and σ_c is its critical value (ultimate stress or critical tensile stress found in quasistatic conditions). x' and t' are the local coordinate and time. Assuming

$$d = \frac{2}{\pi}\frac{K_{IC}^2}{\sigma_c^2}, \qquad (2)$$

where K_{IC} is a critical stress intensity factor for mode I loading (mode I fracture toughness), measured in quasistatic experimental conditions. It can be shown that within the framework of linear elastic fracture mechanics for the case of fracture initiation in the tip of an existing crack, (1) is equivalent to

$$\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} K_I(t')\,dt' \ge K_{IC}\,. \qquad (3)$$

(2) arises from requirement that (1) is equivalent to Irwin's criterion ($K_I \ge K_{IC}$), for $t \to \infty$.

Once again it should be noticed that for slow loading rates and, hence, times to fracture that are much bigger than τ, condition (3) for crack initiation gives the same predictions as Irwin's criterion of a critical stress intensity factor. When the stress field is not singular in the vicinity of point x (locally intact material) and under condition of quasistatic load applied to the media, condition (1) is reduced to critical tensile stress fracture criterion. It should be outlined that (1) in the quasistatic case is equivalent to critical stress intensity factor criterion under assumption that square root asymptotic solution is valid in the vicinity of a singular point x. In the case of a singular field that is not controlled by a square root singularity (for example asymptotic field appearing in the tip of an angular notch), when Griffith-Irwin critical stress intensity factor criterion is not applicable, condition (1) can be successfully used to predict fracture in such a singular point (Kashtanov and Petrov, 2004).

Thereby, (1) automatically ensures correct fracture prediction in a very wide range of quasistatic problems with materials fracturing following brittle scenario. It has been proven in multiple works (see, e.g., Petrov, 1991, Petrov and Morozov, 1994, Morozov and Petrov, 2000, Petrov et al., 2003, Petrov and Sitnikova, 2007, Bratov et al., 2009) that for dynamic problems (1) (under condition that incubation time t is correctly identified for the studied material) is correctly predicting stressed state at the moment of initiation of brittle rupture (in the case of fracture of initially intact media, as well as in the case of initiation of macroscopic crack). First of all this concerns problems with loads applied at high and ultra-high rates.

3. Numerical implementation

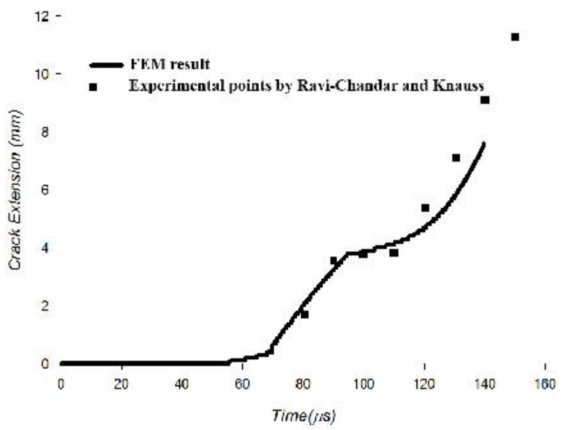
Several questions are to be discussed in connection to FEM implementation of the ITFC:

- FE mesh. Additional requirement to FE mesh to be used in simulation with the ITFC utilized as fracture criterion consists in limitation on the size of finite elements in a vicinity of points where rupture is possible. Obviously, size of an element in this region should not exceed d (see formula (2)). Otherwise it will not be possible to perform sufficiently precise spatial integration in fracture condition (1). Also, meshing the sample, one should keep in mind that material should be separated once fracture criterion is executed somewhere in the sample. This applies both to the choice of mesh in problems without adaptive meshing (mesh is not changing throughout the simulation) and the choice of adaptive mesh that can depend on current geometry of fracture zone and other factors.
- Time step. In order to have a possibility to perform sufficiently precise time integration in (1) one should require that the time integration step is small as comparing to incubation time t of the material modeled.
- Control of fracture criterion (1) execution. Implementation of control of fracture condition execution does strongly depend on a problem to be modeled. In some problems (for example, in the majority of problems on propagation of a macroscopic crack in unbounded media) fracture is possible only in a tip of an existing crack. In this case it is sufficient to keep track of execution condition (1) only in a single point (the tip of the crack). In other problems (for example, in the majority of problems on fracture of initially intact media) it is necessary to trace execution of (1) in rather extent zone or even in the whole modeled body. Under condition that the zone where implementation of (1) should be traced is defined and also that time step and mesh are correctly chosen, calculation of the left side in (1) does not make a big difficulty.
- Spatial size of defect increment (*2d* problems). ITFC (Petrov, 1991, Bratov at al., 2009) is introducing linear size corresponding to an elementary cell of fracture on a chosen scale level. This size can also be interpreted as a typical size for the defect that one can call fracture on the chosen scale level. This size d depends on modeled material and the scale level and can be computed using (2). It makes sense to consider that once (1) is implemented in some point of the modeled body, fracture surface should be increased by the size of the elementary fracture cell d. In this connection having zones where fracture is possible meshed by elements sized d seems to be a reasonable choice.
- Creation of a new surface. In finite element formulation there exist several possibilities to create a new surface appearing as a result of material fracture. In the case of a crack extending along symmetry axis (in problems with symmetry) node release technique can be utilized (see, e.g., Bratov and Petrov 2007a). In problems without remeshing when fracture geometry is changed, node splitting technique or technique implying removal of restrictions on nodal dimensions of freedom (dof's) (Bratov et al., 2008) can be used. In other situations one can use schemes assuming remeshing of the modeled body when fracture zone is changed (incremented). This approach is the most universal but at the same time the most difficult in implementation (apart from remeshing one should care about remapping of nodal values (displacements, velocities, accelerations) to new mesh). Remeshing and remapping also normally require substantial computational expense.

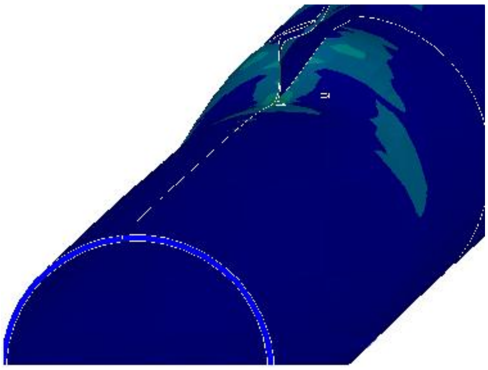
4. Examples

Performed simulations of real experiments using FEM with the ITFC as a condition for fracture initiation, development and arrest include experiments on different materials in different conditions.

- Simulations of experiments of Ravi-Chandar and Knauss (Ravi-Chandar and Knauss, 1984) can be found in (Bratov and Petrov, 2007a). In theses experiments a rectangular sample with a cut simulating a crack is loaded by applying an intense load pulse to the crack faces. Time history of the load is given by two consequent trapezoids. As a result the crack is initiated, extended to a certain length, arrested and reinitiated again. Comparison of experimental measurements of crack extension histories to results of FEM modeling using ITFC as fracture condition is given in figure 1. It is demonstrated that utilizing the FE code solving the problem of linear elasticity joint with the ITFC (1) used to predict critical condition for crack extension it is possible to correctly predict evolution of dynamically loaded cracks. Apparently the ITFC with *d* chosen from the condition that (1) coincides with Griffith-Irwine fracture criterion in quasistatic conditions, can be utilized in order to predict initiation, growth and arrest of dynamic cracks. This approach can be also used to predict growth of cracks with paths that are not known a priori (i.e. cracks that can change growth direction and branch). In this case one should check for (1) implementation on all the planes passing through the crack.



- An attempt to incorporate incubation time approach into FE code in order simulate conditions of satellite SMART1 lunar impact conducted by ESA year 2006 (ESA 2006) can be found in (Bratov et al., 2008). Aim of the simulation was to compare dimensions of crater created due to SMART1 contact to the moon surface to results received using FE method utilizing the ITFC as the critical rupture condition. Damaged zone is found to be about 10 meters in diameter and about 3 meters deep. Zone where the material is fully fragmented (crater formed) can be assessed having 7-10 meters in diameter and 3 meters deep. This result is coinciding with ESA estimations of dimensions of crater formed due to SMART1 impact (ESA 2006).
- In the last of the presented examples the developed approach is applied to simulate growth of a dynamic crack in a gas pipeline. The detailed description of the model can be found in (Bratov, 2009). Finite element model giving a possibility to predict fracture of gas pipeline subjected to quasistatic and dynamic loads is developed. The pipeline was quasistatically loaded by internal pressure. Fracture was initiated by a small defect (crack) that was artificially introduced. This was imitating the appearance of a crack in a pipeline (for example, fatigue crack). When the defect is introduced it starts to grow if the internal pressure is high enough to advance the defect of the introduced size. In figure 2 view of the pipeline is presented. It was found that in the modeled situation the speed of the crack is close to the speed of the acoustic wave in gas that determines the speed of the front of the pressure drop. This leads to a conclusion about instability of crack propagation regimes in the modeled situation – a small change in properties of the pipeline material can result in qualitative change it crack propagation regime: should the speed of the crack be higher than the speed of acoustic signal in gas, the crack will never arrest. Received instability of crack propagation regimes is in a good coincidence with experiments on dynamic cracking in gas pipelines.



5. Conclusions

It was demonstrated that the area where the incubation time criterion for brittle fracture can be successfully used in order to simulate fracture is rather extent. An overwhelming majority of practical problems in dynamic fracture cannot be solved analytically and require numerical methods to be used in order to receive the solution. In this connection the incubation time approach had significant advantages – it is applicable to predict both in static and dynamic fracture. Thus, there is no necessity in having different fracture criteria for different load rates. It was demonstrated that the ITFC embedded into finite element code is giving a possibility to predict initiation, development and arrest of dynamic fracture. All this gives a reason to recommend the ITFC to be included into commercial and research FE codes as standard fracture criterion to be utilized while modeling structures that can undergo loads of the dynamic range.

6. Acknowledgments

The research and publication preparation was financially supported by RFBR research grants 10-01-00810-a, 08-01-00646-a, 10-01-91154-GFEN_a, research grant MK-1610.2009.1 (President of the Russian Federation council), State contracts P1104_NK-587P, 02.740.11.0619, 02.740.11.5171 and academic programs of the Russian Academy of Sciences.

REFERENCES

1. Bratov, V., Petrov, Y., 2007a. Application of incubation time approach to simulate dynamic crack propagation. Int. J. Fract. 146,53-60.
2. Bratov, V., Petrov, Y., 2007b. Optimizing energy input for fracture by analysis of the energy required to initiate dynamic mode I crack growth. Int. J. Solid. Struct. 44,2371–2380.
3. Bratov, V.A., Morozov, N.F., Petrov, Y.V., 2008. Simulation of SMART1 Satellite Impacting the Moon Surface. Dokl. Phys. 419(1),54-58.
4. ESA, 2006. Impact landing ends SMART-1 mission to the Moon. Available online. http://www.esa.int/esaCP/SEM7A76LARE_index_0.html Accessed 10 Feb 2010.
5. Freund, L.B., 1972. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. I: Constant rate of extension. J. Mech. Phys. Solid. 20,129–140.
6. Freund, L.B., 1990. Dynamic fracture mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
7. Kashtanov, A., Petrov, Y. , 2004. Fractal models in fracture mechanics. Int. J. Fract. 128,271-276.
8. Kornev, V.M., Kurguzov, V.D., 2004. Interrelation between toughness and both strength and structural parameters of material. Int. J. Frac. 128,195–203.
9. Morozov, N., Petrov, Y., 2000. Dynamics of fracture, Springer-Verlag, Berlin.
10. Petrov, Y.V., 1991. On “Quantum” Nature of Dynamic Fracture of Brittle Solids. Dokl. Akad. Nauk USSR 321,66–68.
11. Petrov, Y.V., Morozov, N.F., 1994. On the modeling of fracture of brittle solids. J. Appl. Mech. 61,710–712.
12. Petrov, Y.V., Morozov, N.F., Smirnov, V.I., 2003. Structural micromechanics approach in dynamics of fracture. Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct. 26,363–372.
13. Petrov, Y.V., Sitnikova, E.V., 2007. Dynamic Cracking Resistance of Structural Materials Predicted from Impact Fracture of an Aircraft Alloy. Tech. Phys. 49(1),57-60.
14. Ravi-Chandar, K., Knauss, W.G., 1984. An experimental investigation into dynamic fracture: I. Crack initiation and arrest. Int. J. Fract. 25,247–262.

Information about authors

Vladimior Bratov, PhD - senior research fellow, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences; Associate professor, St.-Petersburg State University, +7 950 021 7203

E-mail Vladimir@bratov.com

Nikita Morozov, PhD, Dr.Sc., Professor, Academician of RAS – chief research fellow, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences; professor and chair, St.-Petersburg State University, +7 812 321 4774

E-mail morozov@nm1016.spb.edu

Yuri Petrov, PhD, Dr.Sc., Professor, Corresponding member of RAS – head of department, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences; professor, St.-Petersburg State University, +7 812 321 4774

E-mail yp@yp1004.spb.edu

RECENT ADVANCES IN STRUCTURAL CONTROL

Casciati F., Faravelli L.

The last two decades of research in structural mechanics were focused on smart material and systems. Nevertheless the momentum for a technological revolution is still lacking. This paper discusses first the current state of the art and goes further in the more promising directions across ongoing progresses.

1. Introduction

Structural control saw two key persons: the pioneer J. Yao [1] and the promoter T. Kobori. One of the last key-note lectures by Professor Kobori, perhaps the last in Europe, was held in Como, Italy, in the occasion of the Third World Conference on Structural Control, in April 2002 [2].

This keynote lecture testifies his awareness that the main limitation to structural control comes from the maintenance (and replacement) policy required by the implementing devices. Professor Kobori wrote about his experience in managing such systems: "Our motivation for executing maintenance and replacement continuously depends on nothing but the research mind. It is difficult for the building's owner to keep their motivation, because it is expensive …". Professor Kobori did also mention a remark and a proposal: (i) extremely large earthquakes could "occur tomorrow, in 10 years or 100 years", but the control system should be ready at the occurrence of the event and (ii) "the control should be used not only for unusual events, … but also for routine events that are needed for daily life". In summary it is stated that the building itself has a maintenance schedule time scale which is inconsistent with the one of the control system: the latter is rather comparable with the maintenance time scale of the equipments.

Current developments see the design of tall buildings mounting wind turbines, so that the produced energy was enough for the building needs and for vending outside part of it! In this conception, the building becomes a machine, with the machine maintenance time scale, fully consistent with that of any control system one want to install.
Far for pretending this could become a common practice in the near future, this paper illustrates some solutions where a sort of power harvesting from the structural response vibration could start an economic loop which would make the structural control expenses sustainable. Suspension bridges [3] and GPS monitoring [4-6] are coupled in a first screening. Then, attention is focused on some classes of tall buildings [7].

2. Long span bridges

Long span bridges [8-9] offer a fascinating history that today was translated in current practice for span between 1 and 2 km. Even the old bridges as the Golden Gate in San Francisco or the Istanbul twin bridges were recently equipped with a monitoring system. [10]. Sometimes they are equipped with passive and semi-active devices to mitigate cable vibrations or to reduce the deck oscillation [11-13]. The need of power is satisfied by links to the regional power network and, for sake of redundancy, to local power generators which automatically start in case the regional network fails to bring power [14-15].

3. Tall buildings

Mainly the Asiatic countries started, before the financial crisis of 2009, a sort of competition for real tall buildings (see Figure 1, where some recent constructions are compared with buildings designed and, in some cases, under construction). Within this competition, some solutions mount wind turbines for the production of energy . The building becomes a machine, with the machine maintenance time scale, fully consistent with that of any control system one could desire to install [16].

ALREADY BUILT | UNDER CONSTRUCTION

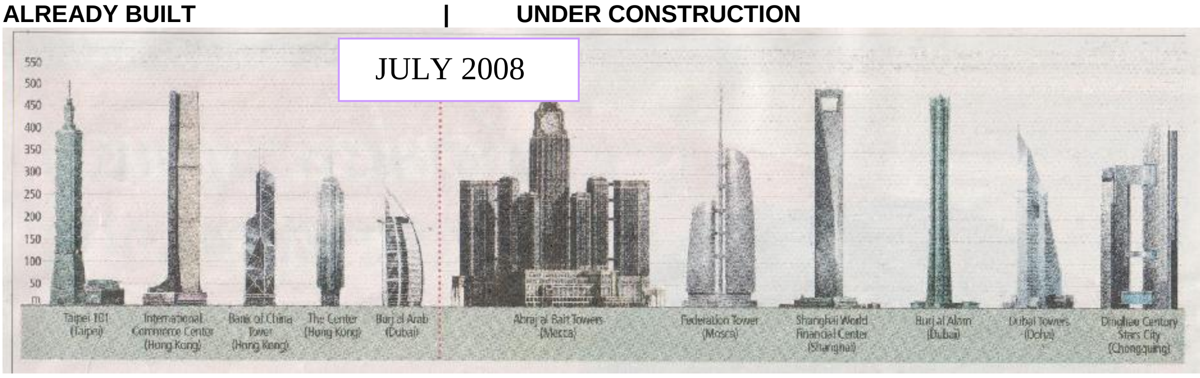


Fig. 1. The ongoing tall building competition.

4 Control potential

Wind load is a uniformly distributed action applied on the side of the structure, so the effect of this load depends mainly on the exposure area. The existence of vertical axis wind turbines in a given structure distributed along the height between each floor (Figure 2) would reduce the main side area of load exposure; each turbine absorbs the power on the area given by the gap between stories and the length of the blade. This reduction of area would reduce the total value of wind loads affecting the main structure, where the turbine would consume part of these loads as mechanical energy in its rotation and would allow the rest to pass through.

Nevertheless it seems reasonable to introduce aerodynamic appendages (Fig. 3) able to either increase or decrease (as driven by a controller) the area of wind investing in the turbines.
In all applications of energy dissipation the main problem is where to transfer the removed energy. In the application under investigation the turbine are conceived to produce electrical energy and this energy can be used in rotating the storey.

A further possibility to dissipate the dynamic response of the structure is by utilizing only some of these turbines, modifying the wind forces distribution along the height of the structure. Alternatively some kind of brakes on the rotors to control the dissipation can be introduced.

In [17] the authors mention how to obtain a further control of the structure by a vertical movement of the stories. Since only significant spans make this control effective, to implement it one should modify the architecture by grouping the storey in blocks separated by empty spaces. They should be translated vertically and independently to modify the harmonic features of the tower.

Assume now that the floor trolleys are allowed to undergo a radial translation, then the storey can be regarded as an active tuned mass damper (see Figure 3) similar to the one installed as demonstration project on the Nanjing broadcast tower [18].

Numerical simulations of the tower response to wind loads of increasing intensity are presently in progress. Each hazard scenario is then modified by activating one of the control options discussed above (or some of them) in order to collect information toward the formulation of a control optimization framework within which a control architecture could be selected.

The main challenge in a really tall building is the nearly distributed architecture of devices (turbines) which ask for theoretical development of theoretical model for spread damping.

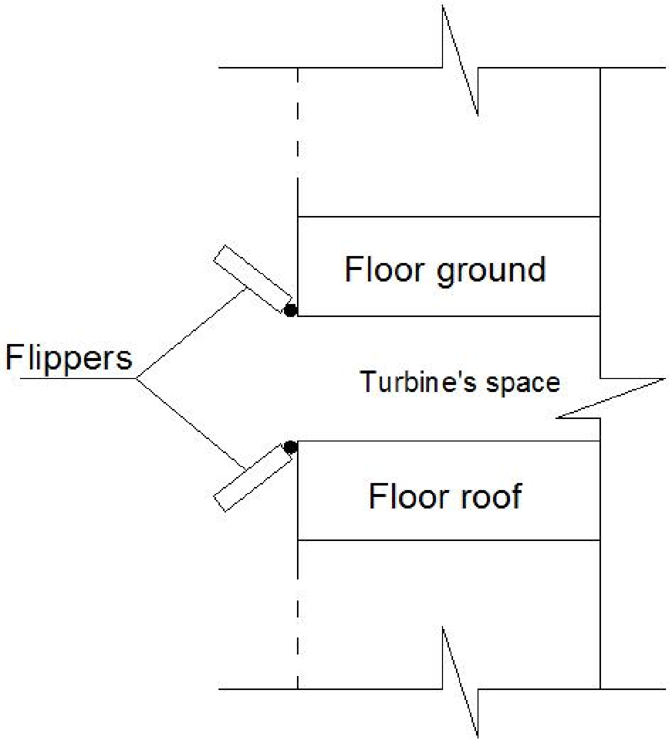


Fig. 2. Control of wind exposure area on the tower.

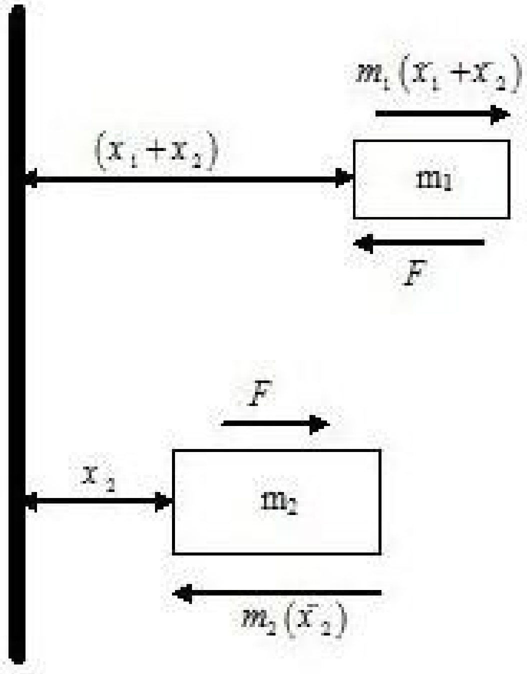


Fig. 3. Tuned mass dampers realized by translating the single storey.

5. Conclusions

The conclusions of Professor Kobori's lecture [2] states: "To maintain control performance during the building life, periodic maintenance and replacement is required. … To better promote the worldwide application of seismic response control, … the seismic response control system should be a multifunctioned systems incorporating functions for daily life, security, information-technology systems and so on.”

Fifteen years late, the proposal is still far from being implemented: current civil engineering structures mainly obey structural code (safety) recommendations and insurance duties, which do not leave room to such new concepts. Nevertheless, a sort of monumental architecture business is growing where economy is no longer the main issue, which is now to impress, to produce huge logos at no matter which the cost his. Within this special trend of modern architecture, the structural system as machine was independently achieved. Its parts are in relative motion and is able to supply the necessary power by suitable wind-turbine. It is the foreseen multi-functional structure where the presence of moving architectural parts is the natural premise for any maintenance plan.

This contribution was just checking the feasibility of a control exploiting this new architectural conception. The promising perspective comes exactly from the nature for which these blocks are conceived: they are supposed to rotate so that power is produced by suitable wind turbines. But this power production for the structure is just a form of energy dissipation, or, in a wide sense, of additional damping.

Acknowledgements

This research activity was supported by grants from the Italian Ministry of Instruction within the Cooperlink program. The authors also acknowledge the organizers of the International Conference: Topical Problems of Continuum Mechanics, TPCM, Dilijan, Armenia, 4-8 October 2010, for giving them the opportunity to re-organize the material.

REFERENCES

1. 1. Yao J.T.P. (1972), Concept of Structural Control, *Journal of the Structural Division, ASCE*, 98 (ST7), 1567-1574
2. Kobori T. (2003), Past, Present and Future in Seismic Response Control of Civil Engineering Structures, in Casciati F. (ed.), *Proceedings of the Third World Conference on Structural Control, John Wiley & Sons*, Chichester, UK, Vol. 1, 9-14.
3. Kashima S., M. Kitagawa (1997), The Longest Suspension Bridge, *Scientific American*, December, 60-65.
4. Casciati F. and Fuggini F. (2008) , Monitoring an Industrial Steel Building by GPS Receivers, in *Proc. Of the 4th European Workshop on Structural Health Monitoring 2008*, DEStech Publications Inc., Lancaster, USA, 219-226
5. Casciati F., Fuggini C. (2009), Engineering Vibration Monitoring by GPS: Long Duration Records, *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 8, 459-467.
6. Casciati F., Fuggini C. (2009), Towards Global Positioning System-Based Structural Health Monitoring, in B. H. V. Topping, L. F. Costa Neves, R. C. Barros (editors), *Trends in Civil and Structural Engineering Computing*, Saxe Coburg Pubblications, Stirlingshire, Scotland, 319-352
7. Pelli C., Thornton C. and Joseph L. (1997), The World’s Tallest Buildings, *Scientific American*, December, 65-73.
8. Calzona R. (2008), *The Messina Strait Bridge*, DEI, Roma, Italy.
9. Gimsing N.J. (1997), *Cable Supported Bridges: Conecpt and Design*, John Wiley & Sons, Chichester, UK
10. Yanev B.S. (2005), Bridges, in Ratay R.T. (ed.), *Structural Condition Assessment*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA
11. Casciati F., G. Magonette and F. Marazzi (2006), *Semiactive Devices and Applications in Vibration Mitigation*, John Wiley & Sons, Chichester, UK
12. Casciati, F. and Ubertini, F. (2008), Nonlinear vibration of shallow cables with semi-active tuned mass damper, *Nonlinear Dynamics*, 53, 89-106.

13. Faravelli, L., Fuggini, C. and Ubertini, F. (2010), Towards a hybrid control solution for cable dynamics: theoretical prediction and experimental validation, *Structural Control and Health Monitoring*, 18, 4.
14. Kitagawa M. (2004), Technology of the Akashi Kaikyo Bridge, *Journal of Structural Control & Health Monitorig*, 11, 75-90
15. Wong K-Y. (2004), Instrumentation and Health Monitoring of Cable Supported Bridges, *Journal of Structural Control & Health Monitorig*, 11, 91-124.
16. Chu S.Y., Soong T.T., Reinhorn A.M. (2005), *Active, Hybrid and Semi-active Structural Control*, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
17. Casciati F., Faravelli L., Al Saleh R. (2009), Dynamic Architecture vs. Structural Control, *Proceedings SMART09*, Lisbon.
18. Reinhorn A., Soong T.T., Helgenson R.J., Riley M. A:, Cao H., 1998, Analysis, Design and Implementation of an Active Mass Damper for a Communication Tower, *Proc. 2nd. World Conference of Structural Control*, Kyoto, Japan; John Wiley Publ., Chichester, UK, Vol. 3, 1727-1736.

Information about authors

Casciati Fabio – Professor, University of Pavia, Department of Structural Mechanics, 27100 Pavia, Italy – (+39) 0382 985787
E-mail: fabio@dipmec.unipv.it

Faravelli Lucia – Professor, University of Pavia, Department of Structural Mechanics, 27100 Pavia, Italy – (+39) 0382 985459
E-mail: lucia@dipmec.unipv.it

SHEAR HORIZONTAL ELECTRO-MAGNETO-ELASTIC SURFACE WAVES IN A LAYERED PIEZOELECTRIC STRUCTURE IN THE PRESENCE OF AN ELECTRIC OR MAGNETIC SCREEN

Danoyan Z. N., Atoyan L.H., Danoyan N.Z.

The existence and behaviour of electro-elastic surface Love waves in a structure consisting of a piezoelectric substrate of crystal classes 6mm, 4mm, an elastic layer and an adjoining dielectric medium on the top is considered. The electro-elastic Love wave problem is solved for the above mentioned layered structure. The existence of electro-elastic surface Love waves and the behaviour of the modes of these waves are revealed.

Introduction. It is well known that the investigation of electro-elastic waves in piezoelectric materials has an important theoretical and practical significance. These investigations started by Bluestain and Guilyaev and have been carried our since. Many of these investigations have mainly been done in quasi-staytic approximation when the wave character of electro-magnetic field is not taken into account, and only mechanical field is considered dynamic. Quasistatic approximation does not determine electro-magnetic field pertubated by mechanical deformations. For example it is not possible to calculate the electromagnetic energy radiated from a vibrating piezoelectric device. These and similar problems rise a nessesity to investigate wave processes in piezoelectrics in a dynamic settings when the equations of motion for piezoelectric materials are considered along with dynamic Maxwell's equations for electro-magnetic field. The authors of [1-2] have investigated shear horizontal surface waves in different piezoelectric structures. According [2] 1n[3] it is investigated generalised Bluestain-Gulyaev (BG) surface waves in elastic piezoelectric half space of crystal class 6mm when electric or magneric screen is situated at some distance from the half space.

The objective of this paper is to discuss the beveviour of shear horizontal electro-magneto-elastic surface Love waves in a layered elastic piezoelectruic structure consisting of a piezoelectric substrate of crystal classes 6mm or 4mm, a piezoelectric layer of the same crystal class, an adjoining dielectric medium (or vacuum) on the top which has no acoustic contact with the layer and an electric or magnetic screen at some distance from the dielectric top layer.

1. The statement of the problem. We consider a layered structure consisting of a dielectric piezoelectric layer and a piezoelectric half-space. Both the substrate and the layer belong to the crystal class 6mm or 4mm (Fig.1). The Ox_3 axis is directed along the main direction of the piezoelectric substrate (L_4 or L_6) and the Ox_2 axis points down into the substrate. The layer with a thickness h_2 is rigidly linked to the substrate and a magnetic or electric screen is located at the distance h_3 from the layer. The domain $-h_2 < x_2 < (h_2 + h_3)$ is assumed to be either a vacuum or it is occupied by a dielectric medium (for example air) without an acoustic contact with the layer. The layer surfaces $x_1 = 0$ and $x_1 = -h$ are electrically open and the surface $x_1 = -h$ is free of external forces (mechanically free).

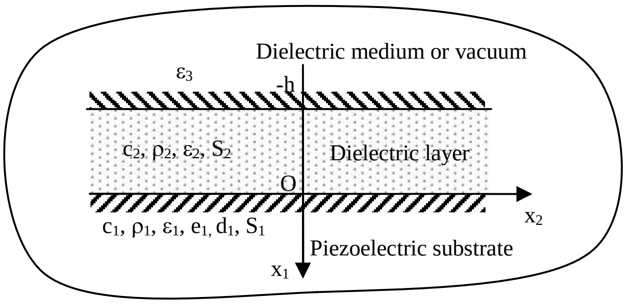


Fig. 1 The layered half-space for dielectric layer and piezoelectric substrate

Interconnected elastic and electric excitations in a piezoelectric media are described by the system of equations containing equations of motion and Maxwell's dynamic equations and constitutive equations and geometrical relations. For the parameters we use notations: u_i are the components of displacement, ° the

mass density of the medium, $\pm_{ik}$ and $¥_{kl}$ are stress and strain tensors, H_k and B_k the magnetic magnetic field intensity and magnetic induction, D_k and E_k the electric displacement and electric field intensity, $C_{iklm}, e_{lik}, £_{ik}, «_{ij}$ are the elastic, piezoelectric, dielectric and magnetic constants, and $£_{ijk}$ are the components of Levi-Civita tensor. It is assumed that the conducting current and free charges are not present and the piezoelectric media is non magnetic.
We consider an antiplane problem and assume without loss of generality that waves propagate along the positive direction of the x_1 axis. Then the displacement components, magnetic and electrical field components representing the motion can be written in the following form:

$$\begin{gathered}\vec{u} = \{0, 0, u_3\}, \qquad \vec{H} = \{0, 0, H_3\}, \qquad \vec{E} = \{E_1, E_2, 0\}, \\ u_3 = w(x_1, x_2, t),\ H_3 = \cdot\ (x_1, x_2, t),\ E_i = E_i(x_1, x_2, t).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Constitutive equations will take the following form:

$$\begin{gathered}\pm_{13} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x_1} - e_{15}E_1,\ \ \pm_{23} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x_2} - e_{15}E_2,\ \pm_{23} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x_2} - e_{15}E_2, \\ D_1 = e_{15}\frac{\partial w}{\partial x_1} + £_{11}E_1,\ D_2 = e_{15}\frac{\partial w}{\partial x_2} + £_{11}E_2,\ B_3 = «_{33}H_3.\end{gathered} \tag{1.2}$$

From above relations we get the following coupled electromechanical field equations and Maxwell's equations:

$$\begin{gathered}c_{44}\nabla^2 w - e_{15}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) = \circ\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ e_{15}\nabla^2 w + £_{11}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\right) = 0,\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = -«_{33}\frac{\partial\ \cdot}{\partial t}, \\ \frac{\partial\ \cdot}{\partial x_2} = e_{15}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial t} + £_{11}\frac{\partial E_1}{\partial t},\ \frac{\partial\ \cdot}{\partial x_1} = -e_{15}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial t} - £_{11}\frac{\partial E_2}{\partial t},\ \nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2.\end{gathered} \tag{1.3}$$

From the first two equations of (1.3) the displacement will satisfy the following equation:

$$\nabla^2 w = \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.4}$$

$$S^2 = \bar{c}/\circ,\ \bar{c} = c + \frac{e^2}{£} = c(1 + ¡^2),\ \ ¡^2 = e^2/(£\,c),\ c = c_{44},\ e_1 = e_{15},\ \ £ = £_{11}, \tag{1.5}$$

and $\bar{c}$ is a piezoelectrically stiffened constant, S is the speed of shear bulk waves, $¡^2$ a dimensionless parameter called the electromechanical coupling coefficient for the shear bulk wave.
From the last three equations of (1.3) the magnetic field intensity will satisfy the following equation:

$$\nabla^2\cdot\ = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2},\ a^2 = \frac{1}{£«},\ £ = £_{11},\ « = «_{33}. \tag{1.6}$$

Where a is the speed of the bulk electromagnetic waves in the medium (i.e. the speed of light in the medium). Equations (1.5) and (1.7) describe independently propagating electro-magneto-elastic and electro-magnetic bulk waves with velocities S and a. The electro-magneto-elastic wave in this case propagates with the same speed as electro-elastic wave in quasi-static case [1].
In the top dielectric layer the electromagnetic field will be defined from the following Maxwell's equations

$$\frac{\partial E_2^{(3)}}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1^{3}}{\partial x_2} = -«^{(3)}\frac{\partial\ \cdot^{(3)}}{\partial t},\ \ \frac{\partial\ \cdot^{(3)}}{\partial x_2} = £^{(3)}\frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial t},\ \ \frac{\partial\ \cdot^{(3)}}{\partial x_1} = £^{(3)}\frac{\partial E_2^{(3)}}{\partial t} \tag{1.7}$$

After excluding the electrical field components the magnetic field will satisfy the following equation:

$$\nabla^2\cdot^{(3)} = \frac{1}{a_3^2}\frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2},\ a_3^2 = \frac{1}{£^{(3)}«^{(3)}} \tag{1.8}$$

Boundary conditions. 1. At $x_2 = 0$ continuity conditions apply for the displacement, tangential components of the electrical field intensity and the stress, and the normal component of the electric displacement:

$$w_1 = w_2,\ E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \tag{1.9}$$

2. At $x_2 = -h_2$ continuity conditions apply for tangential components of the electrical field intensity and the normal component of the electric displacement and the tangential components of the stress vanishes:

$$E_1^{(2)} = E_1^{(3)}, \sigma_{23}^{(2)} = 0,\ D_2^{(2)} = D_2^{(3)} . \tag{1.10}$$

The last conditions in (1.9) and (1.10) can be replaced by the continuity condition of the tangential component of magnetic field intensity

$$\psi_1 = \psi_2, \text{at } y = 0,\ \psi_2 = \psi_3, \text{ at } y = -h . \tag{1.11}$$

3. At $x_2 = -(h_2 + h_3)$ the tangential component of the electrical field intensity vanishes in the case of electrical field screen:

$$E_1^{(3)} = 0, \tag{1.12}$$

and the tangential component of the magnetic field intensity vanishes in the case of magnetic field screen:

$$\psi_3 = 0 , \tag{1.13}$$

which is equivalent to the following condition:

$$D_2^{(3)} = 0 . \tag{1.14}$$

4. Attenuation conditions in the piezoelectric substrate:

$$\lim_{y\to+\infty} w_1 = 0, \quad \lim_{y\to+\infty} \psi_1 = 0. \tag{1.15}$$

In the particular case when the screen is in the infinity the attenuation condition for surface waves at $y \to -\infty$ is

$$\lim_{y\to-\infty} \psi_1 = 0. \tag{1.16}$$

2. Solution of the problem. The dispersion equation of the surface wave. We will seek a solution of the boundary problem in the piezoelectric substrate as a plane harmonic wave:

$$w_1 = W_{10} \exp i(qy + px - \omega t), \quad \psi_1 = \psi_{10} \exp i(qy + px - \omega t), \tag{2.1}$$

propagating in Ox_1 direction, where ω is the frequency, p is the wave number. W_{10} and ψ_{10} are unknown amplitudes of the displacement and the magnetic field. After substituting (2.1) into equations (1.4) and (1.6) and satisfying the attenuation conditions (1.12) the solutions will take the following form:

$$\begin{gathered} w_1 = W_{10} \exp(-p\beta_1(V)y) \exp i(px - \omega t), \quad \psi_1 = \psi_{10} \exp(-p\gamma_1(V)y) \exp i(px - \omega t), \\ \beta_1(V) = \sqrt{1 - V^2 S_1^{-2}},\ \gamma_1(V) = \sqrt{1 - V^2 a_1^{-2}} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Further, it is assumed that $\omega > 0$ and $p > 0$ and the phase velocity of the surface Love wave is

$$V = \omega / p . \tag{2.3}$$

It follows from attenuation conditions that:

$$\beta_1(V) > 0, \gamma_1(V) > 0, \tag{2.4}$$

and if a surface wave exists it will propagate with the velocity satisfying the following condition:

$$V < S_1 < a_1 . \tag{2.5}$$

The same way we can find the solutions in the piezoelectric layer, which will take the following form:

$$\begin{cases} w_2 = (W_{20}^- \exp(-ip\beta_2(V)y + W_{20}^+ \exp(ip\beta_2(V)y) \exp i(px - \omega t), \\ \psi_2 = (\psi_{20}^- \exp(-p\gamma_2(V)y + \psi_{20}^+ \exp(p\gamma_2(V)y) \exp i(px - \omega t), \\ \beta_2(V) = \sqrt{1 - V^2 S_2^{-2}},\ \gamma_2(V) = \sqrt{1 - V^2 a_2^{-2}} \end{cases} \tag{2.6}$$

Since $V < a_2$, $\gamma_2(V)$ is always positive but $\beta_2(V)$ can be both real and imaginary. If it is real then $V > S_2$. In this case homogeneous elastic waves propagate through the layer undergoing full internal reflection from the layer boundary (as in the case of the classical Love wave). If $\beta_2(V)$ is imaginary then $V < S_2$ and inhomogeneous elastic partial waves propagate through the layer creating so called gap waves. The waves of the magnetic field are always inhomogeneous.

The solution in the top dielectric layer (or vacuum) has the following way

$$\cdot_3 = (\cdot_{30}^{-}\exp(-p¥_3 y) + \cdot_{30}^{+}\exp(p¥_3 y))\exp i(px - µt), ¥_3 = \sqrt{V^2 a_3^{-2} - 1}, V < a_3, ¥_3(V) > 0 \quad (2.7)$$

Thus equations (2.2),(2.6) and (2.7) represent the solution in the layered structure.

Taking into account the solutions in the piezoelectric substrate (2.2) the expressions for $E_1^{(1)}$, $E_2^{(1)}$, $±_{23}^{(1)}$ and $D_2^{(1)}$ can be transformed the following way. For $E_1^{(1)}$

$$\frac{\partial E_1^1}{\partial t} = -\frac{p}{£_1}\left[¥_1 \cdot_{10}\exp(-p¥_1 y) + e_1 µ W_{10}\exp(-p \quad _1 y)\right]\exp i(px - µt).$$

Since $E_1^{(1)} \sim e^{i(px - µt)}$ then $\frac{\partial E_1^1}{\partial t} = -iµpE_1^{(1)}$ and

$$E_1^{(1)} = -\frac{ip}{£_1 µ}\left[¥_1 \cdot_{10}\exp(-p¥_1 y) + e_1 µ W_{10}\exp(-p \quad _1 y)\right]\exp i(px - µt). \quad (2.8)$$

The same way for $E_2^{(1)}$ we have

$$E_2^{(1)} = \frac{p}{£_1 µ}\left[\cdot_{10}\exp(-p¥_1 y) + e_1 \quad _1 µ W_{10}\exp(-p \quad _1 y)\right]\exp i(px - µt). \quad (2.9)$$

From (1.2), (2.6) and (2.9) we also have

$$±_{23}^{(1)} = -p\left[\bar{c}_1 \quad _1 W_{10}\exp(-p \quad _1 y) + \frac{e_1}{£_1 µ}\cdot_{10}\exp(-p¥_1 y)\right]\exp i(px - µt) \quad (2.10)$$

$$D_2^{(1)} = \frac{p}{µ}\cdot_{10}\exp(-p¥_1 y)\exp i(px - µt). \quad (2.11)$$

The same way for $E_1^{(2)}$, $E_2^{(2)}$, $±_{23}^{(2)}$ and $D_2^{(2)}$ in the piezoelectric substrate the following expressions will hold:

$$\begin{aligned} E_1^{(2)} = -\frac{ip}{£_2 µ}\big[¥_2(\cdot_{20}^{-}\exp(-p¥_2 y) - \cdot_{20}^{+}\exp(p¥_2 y)) + \\ e_2 µ(W_{20}^{-}\exp(-ip \quad _2 y) + W_{20}^{+}\exp(ip \quad _2 y))\big]\exp i(px - µt), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} E_2^{(2)} = \frac{p}{£_2 µ}\big[(\cdot_{20}^{-}\exp(-p¥_2 y) - \cdot_{20}^{+}\exp(p¥_2 y)) + \\ ie_2 µ \quad _2(W_{20}^{-}\exp(-ip \quad _2 y) - W_{20}^{+}\exp(ip \quad _2 y))\big]\exp i(px - µt), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} ±_{23}^{(2)} = -ip\big[(\bar{c}_2 \quad _2(W_{20}^{-}\exp(-ip \quad _2 y) - W_{20}^{+}\exp(ip \quad _2 y)) - \\ \frac{ie_2}{µ£_2}(\cdot_{20}^{-}\exp(-p¥_2 y) + \cdot_{20}^{+}\exp(p¥_2 y))\big]\exp i(px - µt) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$D_2^{(2)} = \frac{p}{µ}(\cdot_{20}^{-}\exp(-p¥_2 y) + \cdot_{20}^{+}\exp(p¥_2 y))\exp i(px - µt) \quad (2.15)$$

Using the solution in the top dielectric layer (or vacuum) (2.7) and the last two equations of (1.7) the components of the electric field intensity and the displacement will take the following form::

$$E_1^{(3)} = -\frac{ip¥_3}{£_3 µ}(\cdot_{30}^{-}e^{-p¥_3 y} - \cdot_{30}^{+}e^{p¥_3 y})e^{i(px - µt)}, \; E_2^{(3)} = \frac{p}{£_3 µ}(\cdot_{30}^{-}e^{-p¥_3 y} + \cdot_{30}^{+}e^{p¥_3 y})e^{i(px - µt)}, \quad (2.16)$$

$$D_2^{(3)} = \frac{p}{µ}(\cdot_{30}^{-}e^{-p¥_3 y} + \cdot_{30}^{+}e^{p¥_3 y})e^{i(px - µt)}. \quad (2.17)$$

Dispersion equation: Substituting solutions (2.2),(2.6),(2.8),(2.10),(2.11) and (2.14) into the boundary conditions (1.9) gives the following homogeneous system of algebraical equations for the unknown amplitudes: at:

$$W_{10}=W_{20}^{-}+W_{20}^{+},\ \frac{¥_1}{£_1}\cdot_{10}+\bar{e}_1\mu W_{10}=\frac{¥_2}{£_2}(\cdot_{20}^{-}-\cdot_{20}^{+})+\bar{e}_2\mu(W_{20}^{-}+W_{20}^{+}),$$

$$\bar{c}_1\ {}_1W_{10}+\frac{\bar{e}_1}{\mu}\cdot_{10}=i\bar{c}_2\ {}_2(W_{20}^{-}-W_{20}^{+})+\frac{\bar{e}_2}{\mu}(\cdot_{20}^{-}+\cdot_{20}^{+}),\ \cdot_{10}=\cdot_{20}^{-}+\cdot_{20}^{+},\ \frac{e_1}{£_1}=\bar{e}_1\ ,\quad \frac{e_2}{£_2}=\bar{e}_2. \tag{2.18}$$

At $y=-h_2$ (substituting solutions (2.14),(2.16) and (2.17) into boundary conditions (1.10)):

$$\frac{¥_2}{£_2}(\cdot_{20}^{-}e^{k_2¥_2}-\cdot_{20}^{+}e^{-k_2¥_2})+\bar{e}_2\mu(W_{20}^{-}e^{ik_2\ 2}+W_{20}^{+}e^{-ik_2\ 2})=$$

$$\frac{¥_3}{£_3}(\cdot_{30}^{-}e^{k_2¥_3}-\cdot_{30}^{+}e^{-k_2¥_3})+i\bar{c}_2\ {}_2(W_{20}^{-}e^{ik_2\ 2}+W_{20}^{+}e^{-ik_2\ 2})+\frac{\bar{e}_2}{\mu}(\cdot_{20}^{-}e^{k_2¥_2}+\cdot_{20}^{+}e^{-k_2¥_2}), \tag{2.19}$$

$$\cdot_{20}^{-}e^{k_2¥_2}+\cdot_{20}^{+}e^{-k_2¥_2}=\cdot_{30}^{-}e^{k_2¥_3}+\cdot_{30}^{+}e^{-k_2¥_3},\qquad k_2=ph_2, \tag{2.20}$$

k_2 is relative thickness of the layer.

At the screened boundary $y=-(h_2+h_3)$ (after substituting (2.16) into (1.12) in the case of an electrical screen):

$$\cdot_{30}^{-}e^{(k_2+k_3)¥_3}-\cdot_{30}^{+}e^{-(k_2+k_3)¥_3}=0, \tag{2.21}$$

and after substituting (2.7) into (1.13) in the case of a magnetic screen:

$$\cdot_{30}^{-}e^{(k_2+k_3)¥_3}+\cdot_{30}^{+}e^{-(k_2+k_3)¥_3}=0. \tag{2.22}$$

Note that substitutution of the expression for $D_2^{(3)}$ from (2.17) into boundary condition (1.13) will yield the same equation (2.22).

From (2.20) and (2.21) $\cdot_{30}^{+}$ and $\cdot_{30}^{-}$ can be expressed through $\cdot_{20}^{+}$ and $\cdot_{20}^{-}$ the following way:

$$\cdot_{30}^{-}=\frac{e^{-k_2¥_3}}{1+e^{2k_3¥_3}}(\cdot_{20}^{-}e^{k_2¥_2}+\cdot_{20}^{+}e^{-k_2¥_2}),\quad \cdot_{30}^{+}=\frac{e^{(k_2+k_3)¥_3}}{1+e^{2k_3¥_3}}(\cdot_{20}^{-}e^{k_2¥_2}+\cdot_{20}^{+}e^{-k_2¥_2}), \tag{2.23}$$

By substituting (2.23) and (2.27) into (2.19) and also the expressions for W_{10} and $\cdot_{10}$ from the first and last equations of (2.18) into the second and third equations the unknown amplitudes $\cdot_{30}^{+}$, $\cdot_{30}^{-}$, W_{10} and $\cdot_{10}$ will get eliminated, and the number of equations and unknown amplitudes will reduce to four $\cdot_{20}^{+}$, $\cdot_{20}^{-}$, W_{20}^{+} and W_{20}^{-}. The non zero existence condition of these amplitudes gives the following dispersion equation of the surface wave:

$$A(k_2,k_3,V)\sin(k_2\ \ _2)+B(k_2,k_3,V)\cos(k_2\ \ _2)=E(V), \tag{2.24}$$

$$A(k_2,k_3,V)=\cosh(k_2¥_2)¥_2£_2(\ _2^2(¥_3¢_3£_1+¥_1£_3)\bar{c}_2^2+\ _1£_1£_3\bar{c}_1\bar{e}_2^2)+$$

$$\sinh(k_2¥_2)(\ _2^2(¥_1¥_3¢_3£_2^2+¥_2^2£_1£_3)\bar{c}_2^2+£_2^2£_3(\ _1¥_1\bar{c}_1-£_1(\bar{e}_1-\bar{e}_2)^2)\bar{e}_2^{\ 2})$$

$$B(k_2,k_3,V)=\beta_2\bar{c}_2(\cosh(k_2\gamma_2)\gamma_2\varepsilon_2(-\beta_1(\gamma_3\delta_3\varepsilon_1+\gamma_1\varepsilon_3)\bar{c}_1\ +\varepsilon_1\varepsilon_3(\bar{e}_1^2-2\bar{e}_1\bar{e}_2\ +2\bar{e}_2^2))+$$

$$\sinh(k_2\gamma_2)(-\beta_1(\gamma_1\gamma_3\delta_3\varepsilon_2^2+\gamma_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3)\bar{c}_1\ +\varepsilon_2^2(\gamma_3\delta_3\varepsilon_1\bar{e}_1^2-2\gamma_3\delta_3\varepsilon_1\bar{e}_1\bar{e}_2+(\gamma_3\delta_3\varepsilon_1+\gamma_1\varepsilon_3)\bar{e}_2^{\ 2})))$$

$$E(V)=2\ \ _2¥_2£_1£_2£_3\bar{c}_2(\bar{e}_2-\bar{e}_1)\bar{e}_2$$

References

1. Shaofan Li.,. 1996 ,J.Appl. Phys., Vol. 80, No.9, 5264-5269.
2. Yang G.S.,. Inter. Journ. Of Appl. Electromagnetics and Mechanics. 2000, 12, p. 235-240.
3. Белубекян М.В.. Проб., ДВДС,Тр. 6-ой межд. конф. Горис-Степанакерт, 2008, с. 125-130

Сведения об авторах

Даноян З. Н.–зав.отделом Института механики НАН Армении, E-mail: zavendanoyan@gmail.com
Атоян Л. О. ст.н.с. Институт механики НАН Армении, E-mail: mechins@sci.am
Даноян Н.З. мл.н.с. Институт механики НАН Армении, E-mail: mechins@sci.am

MAGNETOELASTIC VIBRATIONS OF PERFECTLY CONDUCTIVE ELASTIC LAYER IN AN EXTERNAL LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

Ghazaryan K., Marzocca P., Vardanov A.

Within the plane problem of the elasticity theory, the problem of magnetoelastic waves in an isotropic layer is considered. The layer is immersed in external longitudinal magnetic field and has the properties of a perfect conductor. One side of the layer is fixed, and the other is free from mechanical loads. The dispersion equation is derived and detailed numerical analysis on the phase velocity of the magnetoelastic wave is obtained.

The problem of wave propagation in an elastic traction free layer was first solved by Rayleigh and Lamb [1]. Subsequently, the problem of wave propagation in elastic layer lying on the rigid base was examined in [2]. Only more recently the problem of the vibration of orthotropic plates, lying on the rigid base, was examined in [3] on the basis of the method of asymptotic integration. These is a vast literature on the magnetoelastic vibration of elastic plates, see e.g. [4-8]. To complement the bulk of literature on the subject this paper proposes the problem of magnetoelastic waves in an perfectly conductive isotropic layer fixed on one side and free from mechanical loads at the other, within the plane problem of the elasticity theory.

Let consider the isotropic elastic perfect conducting layer, immersed in the magnetic field $\overrightarrow{H_0} = (H_{01}, 0, 0)$. Layer is limited by the surfaces $z = (0, h)$. It is assumed that the outside media is vacuum.

The displacement equations of motion for this perfectly conducting elastic layer immersed in longitudinal magnetic field takes the following form [4,5]

$$c_T^2 \Delta_0 \vec{u} + \left(c_L^2 - c_T^2\right) \text{grad div}\, \vec{u} + \frac{1}{4\pi\rho}\left[\text{rot rot}\left(\vec{u} \times \overrightarrow{H_0}\right)\right] \times \overrightarrow{H_0} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

where $c_L^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}, c_T^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ is the displacement vector, c_L and c_T are the longitudinal and transverse wave propagation velocities; λ, μ are the Lame coefficients, and ρ is the density of layer.

The plane problem is considered therefore: $u_1 = u_1(x, z); \quad u_3 = u_1(x, z); \quad u_2 = 0$.

Equation (1) can be rewrite as

$$\begin{gathered} \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) - \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \\ \left(\mu + \frac{H_{01}^2}{4\pi}\right)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) - \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

To find the solutions of these equations the following form is adopted

$$u_1 = u_0(z)\exp[i(kx - \omega t)]; \quad u_3 = w_0(z)\exp[i(kx - \omega t)] \tag{3}$$

here k is wave number, ω is vibration frequency , $u_0(z)$, $w_0(z)$ are unknown functions

Substituting (3) into the equations (2) we obtain the following differential equations

$$
\begin{gathered}
u_0''(z)+ik(\gamma-1)w_0'(\mathrm{z})+k^2\left(\eta-\gamma\right)u_0(z)=0\\
(\gamma+\nu_1)w_0''(\mathrm{z})+ik(\gamma-1)u_0'(z)+(\eta-1-\nu_1)w_0(\mathrm{z})=0
\end{gathered}
\tag{4}
$$

where

$$
\gamma=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu};\quad \eta=\frac{\rho\omega^2}{k^2\mu};\quad \nu_1=\frac{H_{01}^2}{4\pi\mu}
\tag{5}
$$

The solutions of the system of differential equations (4) can be found by using

$$
u_0=u_{10}\exp[\lambda kz];\quad w_0=w_{10}\exp[\lambda kz]
\tag{6}
$$

Therefore, substituting (6) in (4) and equalizing the determinant of the system to zero, the following characteristic equation is obtained

$$
\lambda^4(\gamma+\nu_1)+\lambda^2(\eta+\gamma(\eta-2-\nu_1)-\nu_1+\eta\nu_1)-(\gamma-\eta)(\eta-1-\nu_1)=0
\tag{7}
$$

The characteristic numbers λ_i can be found as

$$
\begin{gathered}
p=\lambda_1=\sqrt{-\frac{\gamma E+\eta+G\nu_1+\sqrt{D^2\eta^2+2DG\eta\nu_1+F^2\nu_1^2}}{2\left(\gamma+\nu_1\right)}}=-\lambda_2\\
q=\lambda_3=\sqrt{-\frac{\gamma E+\eta+G\nu_1-\sqrt{D^2\eta^2+2DG\eta\nu_1+F^2\nu_1^2}}{2\left(\gamma+\nu_1\right)}}=-\lambda_4
\end{gathered}
\tag{8}
$$

where

$$
D=\gamma-1;\quad E=\eta-2;\quad G=\eta-1-\gamma;\quad F=\eta+1-\gamma
\tag{9}
$$

Solutions to the system of differential equation (4) is proposed in the form

$$
\begin{gathered}
u_0(z)=C_1\sinh[kpz]+C_2\cosh[kpz]+C_3\sinh[kqz]+C_4\cosh[kqz]\\
w_0(z)=C_5\sinh[kpz]+C_6\cosh[kpz]+C_7\sinh[kqz]+C_8\cosh[kqz]
\end{gathered}
\tag{10}
$$

where C_i $(i=1,..,8)$ are unknown integration constants.

Since the independent variables are only four of the eight integration constants, relations among them should be found. For this purpose, substituting (10) into the differential equations (4) the integration constants can be cast as

$$
\begin{gathered}
C_5=-C_2\frac{p^2-\gamma+\eta}{p(1-\gamma)};\quad C_6=-C_1\frac{p^2-\gamma+\eta}{p(1-\gamma)}\\
C_7=-C_4\frac{q^2-\gamma+\eta}{q(1-\gamma)};\quad C_8=-C_3\frac{q^2-\gamma+\eta}{q(1-\gamma)}
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Consequently, the displacements will take the form

$$u_0(z) = (\gamma - 1)\left(C_1 p \sinh[kpz] + C_2 p \cosh[kpz] + C_3 q \sinh[kqz] + C_4 q \cosh[kqz]\right)$$
$$w_0(z) = \left(p^2 - \gamma + \eta\right)\left(C_1 \cosh[kpz] + C_2 \sinh[kpz]\right) + \left(q^2 - \gamma + \eta\right)\left(C_3 \cosh[kqz] + C_4 \sinh[kqz]\right) \tag{12}$$

The boundary-value problem for the elastic layer with one of the surface ($z = h$)rigidly fixed, and the other ($z = 0$)traction free (i.e. free from mechanical loads) is considered.

In this case together with the equations (1) the equations of the electrodynamics of in the region $z < 0$ (vacuum) are considered. In this particular case these can be reduced to the following equations [4,5],

$$\Delta \vec{h} = 0; \quad div \vec{h} = 0 \tag{13}$$

where $\vec{h}$ is an induced magnetic field vector.

The solutions of equations (13), which tend to zero at infinity ($z \to -\infty$), can be written as

$$\begin{aligned} h_3^{(1)} &= A \exp[kz + i(kx - \omega t)] \\ h_1^{(1)} &= iA \exp[kz + i(kx - \omega t)] \end{aligned} \quad \text{in} \qquad z \le 0$$

Herein A is the integration constant.
The following boundary conditions are considered

$$\sigma_{13} + T_{13} = T_{13}^{(1)}; \quad \sigma_{33} + T_{33} = T_{33}^{(1)}; \quad h_3 = h_3^{(1)} \quad \text{at} \quad z = 0$$
$$u_1 = 0; \quad u_3 = 0 \quad \text{at} \quad z = h$$

where σ_{13} and σ_{33} are the component of stress tensor, T_{13} T_{33} are the component of the following Maxwell's tensor

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(H_i h_j + H_j h_i\right) - \delta_{ij} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{H}_0 \vec{h} \qquad i, j = 1, 2, 3 \\ T_{13} &= \frac{1}{4\pi} H_1 h_3; \quad T_{13}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} H_1 h_3^{(1)}; \\ T_{33} &= -\frac{1}{4\pi} H_1 h_1; \quad T_{33}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} H_1 h_1^{(1)}; \\ h_1 &= -H_1 \frac{\partial u_3}{\partial z}; \quad h_3 = H_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} \end{aligned} \tag{14}$$

As a consequence of continuity of normal component of induced magnetic field vector on the surface $z = 0$ $\left.h_3\right|_{z=0} = \left.h_3^{(1)}\right|_{z=0}$ that the following relationships hold: $T_{13} = T_{13}^{(1)}$ and $A_1 = ikH_{01} w_0$ at $z = 0$.

This implies that

$$\left.h_1^{(1)}\right|_{z=0} = -kH_{01} \left.w_0\right|_{z=0} \exp[i(kx - \omega t)]$$

The boundary conditions for this problem can be written as

$$\partial_x u_3 + \partial_z u_1 = 0; \quad \gamma\partial_z u_3 + (\gamma-2)\partial_x u_1 + \nu_1\left(\partial_z u_3 - ku_3\right) = 0 \qquad \text{at } z=0$$
$$u_1 = 0; \quad u_3 = 0 \qquad \text{at } z=h \tag{15}$$

Further, substituting in the boundary conditions (15) the expressions of displacements (12) the following uniform system of equations is obtained

$$\begin{cases} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + C_4 a_{14} = 0 \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + C_4 a_{24} = 0 \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 a_{33} + C_4 a_{34} = 0 \\ C_1 a_{41} + C_2 a_{42} + C_3 a_{43} + C_4 a_{44} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

where the following notations are used

$$a_{11} = \left(p^2 - \gamma + \eta\right)\text{Cosh}[kpz] \qquad a_{21} = p\text{Sinh}[kpz]$$
$$a_{12} = \left(p^2 - \gamma + \eta\right)\text{Sinh}[kpz] \qquad a_{22} = p\text{Cosh}[kpz]$$
$$a_{13} = \left(q^2 - \gamma + \eta\right)\text{Cosh}[kqz] \qquad a_{23} = q\text{Sinh}[kqz]$$
$$a_{14} = \left(q^2 - \gamma + \eta\right)\text{Sinh}[kqz] \qquad a_{24} = q\text{Cosh}[kqz]$$
$$a_{31} = \left(p^2 - \gamma + \eta\right)\nu_1\text{Cosh[kpz]+p}\left(2+\gamma\left(-3+p^2+\eta-\nu_1\right)+p^2\nu_1+\eta\nu_1\right)\text{Sinh[kpz]}$$
$$a_{32} = p\left(2+\gamma\left(-3+p^2+\eta-\nu_1\right)+p^2\nu_1+\eta\nu_1\right)\text{Cosh}[kpz]+\left(p^2-\gamma+\eta\right)\nu_1\text{Sinh[kpz]}$$
$$a_{33} = \left(q^2 - \gamma + \eta\right)\nu_1\text{Cosh[kqz]+q}\left(2+\gamma\left(-3+q^2+\eta-\nu_1\right)+q^2\nu_1+\eta\nu_1\right)\text{Sinh[kqz]}$$
$$a_{34} = q\left(2+\gamma\left(-3+q^2+\eta-\nu_1\right)+q^2\nu 1+\eta\nu_1\right)\text{Cosh}[kqz]+\left(q^2-\gamma+\eta\right)\nu_1\text{Sinh[kqz]}$$
$$a_{41} = \left(p^2(-2+\gamma)+\gamma-\eta\right)\text{Cosh}[kpz]; \quad a_{42} = \left(p^2(-2+\gamma)+\gamma-\eta\right)\text{Sinh}[kpz]$$
$$a_{43} = \left(q^2(-2+\gamma)+\gamma-\eta\right)\text{Cosh}[kqz]; \quad a_{44} = \left(q^2(-2+\gamma)+\gamma-\eta\right)\text{Sinh}[kqz]$$

The system of equations (16) will have a nontrivial solution when the determinant of the matrix of its coefficients will be equal to zero, resulting in the following dispersion equation

$$pq(Q_2 P_1 P_3 + P_2 Q_1 Q_3) +$$
$$\text{Sinh}[hkp]\left(\nu_1 q P_2 (P_3 Q_2 - P_2 Q_3)\text{Cosh[hkq]}+\left(q^2 Q_1 P_2 P_3 + p^2 P_1 Q_2 Q_3\right)\text{Sinh[hkq]}\right)+$$
$$p\text{Cosh}[hkp](\nu_1 Q_2 (P_2 Q_3 - P_3 Q_2)\text{Sinh[hkq]} - q(P_3 Q_2 Q_1 + Q_3 P_2 P_1)\text{Cosh}[hkq]) = F(\eta)$$

where

$$Q_3 = q^2(\gamma-2)+\gamma-\eta; \qquad P_3 = p^2(\gamma-2)+\gamma-\eta$$
$$Q_1 = 2+\gamma\left(q^2-3+\eta-\nu_1\right)+q^2\nu_1+\eta\nu_1; \quad P_1 = 2+\gamma\left(p^2-3+\eta-\nu_1\right)+p^2\nu_1+\eta\nu_1$$
$$Q_2 = q^2-\gamma+\eta; \qquad P_2 = p^2-\gamma+\eta$$

On the Table 1 the numerical data of dimensionless parameter η characterizing wave frequencies are presented for several values of magnetic field intensity ν_1 as a function of the parameter hk characterizing the relative thickness of layer.

The numerical analysis shows that the smallest wave phase velocity is equal to the speed of Rayleigh surface wave. It also appears that for magnetic field not exceeding 3T no changes in the phase velocity is experienced for both thick and thin plates ($hk << 1$). This is essentially different from the analogous problem of the conducting plate vibration with a free surfaces [4,5], where in the case of thin plate a substantial change in the phase speed (vibration frequency) occur, depending on the value of applied external magnetic field intensity.

Table 1

$\gamma = 3$							
$\nu_1 = 0$		$\nu_1 = 0{,}001 \quad (H_0 \sim 3T)$		$\nu_1 = 0{,}01$		$\nu_1 = 0{,}1$	
hk	$\sqrt{\eta} = \omega/kc_t$	hk	$\sqrt{\eta} = \omega/kc_t$	hk	$\sqrt{\eta} = \omega/kc_t$	hk	$\sqrt{\eta} = \omega/kc_t$
10	0.919	10	0.92	10	0.926	10	0.981
7	0.924	7	0.925	7	0.931	7	0.986
6	0.931	6	0.931	6	0.938	6	0.994
5	0.946	5	0.947	5	0.953	5	0.995
4	0.986	4	0.987	4	0.993	4	1.0
3	1.014	3	1.014	3	1.014	3	1.02
2	1.204	2	1.204	2	1.205	2	1.216
1	1.273	1	1.273	1	1.274	1	1.277
0.01	1.314	0.01	1.314	0.01	1.316	0.01	1.319
0.001	1.32	0.001	1.32	0.001	1.326	0.001	1.33

REFERENCES

1. Lamb H. On waves in an elastic plate. Proceedings of the Royal Society, SA., vol 93, 1917.
2. Ишков П. К. О Распространении упругих волн в слое, лежащем на жёстком основании, //Изв. АН СССР. Сер. Геофизическая. 1941.2.
3. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. Собственные колебания ортотропных пластин при смешанных краевых условиях на лицевых поверхностях. //Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т. 56. № 4. С.18-28.
4. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
5. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991.
6. Саркисян С.В. К задаче распространения магнитоупругих волн в пластине. //Труды 14-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Кутаиси 1987, т.2, с. 400-405.
7. Багдоев А. Г., Варданян А. В., Варданян С. В. // Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №3.
8. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Cormier C. Localized Magnetoelastic Bending Vibration of an Electroconductive Elastic Plate, Journal of Applied Mechanics, Transaction ASME, USA, November 2007, Vol. 74. p. 1071-1077.

Information about authors

Karen Ghazaryan, Doctor of Science, Institute of Mechanics National Academy of Sciences, Yerevan, Armenia, ghkarren@gmail.com.
Piergiovanni Marzocca, Associate Professor, Clarkson University, The Wallace H. Coulter School of Engineering, Mechanical and Aeronautical Engineering Dept., Potsdam, New York, USA, pmarzocc@clarkson.edu.
Vardanov Artashes, Phd-student, Institute of Mechanics National Academy of Sciences, Yerevan, Armenia, qeops@mail.ru.

APPLICATION OF CONTACT MECHANICS TO CHEMICAL MECHANICAL POLISHING MODELING FOR CHIP VERIFICATION AND HOTSPOT DETECTION

Ghulghazaryan R., Hatem O., Bora M., Lazaryan H., Wilson J., Markosian A.

Chemical Mechanical Polishing (CMP) is one of the key processes used in semiconductor manufacturing for planarization of interlayer dielectrics and metal layers. A chip-scale CMP simulator, called CMP Optimize (CMPO), developed at Mentor Graphics is presented in this work. Contact mechanics model is used for modeling the pressure distribution over an entire die. It takes into account long range polishing effects at mm-scale due to the stiffness of the polishing pad. For calculating the local removal rate, a mechanical model using Preston material removal behavior has been used. It empirically relates the removal rate of materials to the local pressure, rotation speed of the pad relative to the wafer and slurry activity driven by the frictional force. CMPO has the capability to model various deposition processes and one or multi material polishing during CMP. The latter is done by using an effective trench approximation and assigning different removal rates to different materials. The contact mechanics driven CMP model presented in this work is used for modeling die-level CMP behavior and detection of potential manufacturing hotspots. It has been validated on numerous process technology nodes, down from 90nm to 45nm, with accuracy within 10% of experimental data on production chips.

1. Introduction. During chemical mechanical polish (CMP), a rotating wafer is pressed face down onto a rotating polishing pad. In between the two surfaces, slurry containing abrasive particles and chemical reagents is dispersed. CMP is a complex process that depends on mechanical and chemical processes occurring concurrently during polishing. The combined action of the polishing pad, abrasive particles and chemical reagents results in material removal and polishing of the wafer surface. CMP Optimize (CMPO) is a modeling environment developed by Mentor Graphics to capture the behavior of material deposition and CMP processes at the die-level. The modeling process includes test chip layout generation and mask manufacturing, followed by inline measurements in the wafer fabrication facility for model calibration. CMP modeling includes not only polishing models but also those for several deposition processes used in chip manufacturing. Correct construction of the initial surface is crucial for creating accurate polishing models. This is because variations in height of the polishing profile affect the pressure distribution and local removal rates. Currently, several deposition processes such as copper electro-chemical deposition (ECD), high density plasma chemical vapor deposition (HDP-CVD), spin-on dielectrics (SOD) can be modeled by CMPO. For copper CMP modeling, after etching the trenches, barrier deposition and copper electroplating create the initial surface for polishing which is done over multiple stages. At the initial stage, only one material (copper) is polished. At subsequent stages, barrier and dielectric materials become exposed. Depending on the geometric signature of the underlying structures, two or more materials, namely copper, barrier or dielectric, are simultaneously polished.

2. Preston law. The most famous material removal equation used for CMP modeling is the experimental Preston's equation [1,2], which was initially introduced for glass polishing

$$RR = k \cdot P \cdot V \tag{1.1}$$

where RR is the material removal rate, P is the pressure, V is the relative velocity between the pad and the wafer, and k is a constant called Preston's coefficient. Preston's equation represent's a linear dependency of material removal rate on the down pressure and relative velocity. All chemical and physical properties of polishing slurry are lumped into the Preston coefficient. Usually, the relative rotation speed of the wafer and pad are set in such a way that effectively all points on the wafer have the same relative velocity with respect to the pad. Hence, V can be considered as a process specific parameter and the Preston law of polishing is reduced to

$$RR = k_{eff} \cdot P \tag{1.2}$$

where k_{eff} is the effective polishing rate constant. Experiments have shown that copper removal during chip production is well described by the Preston's law. However, not all experimental removal rate data in CMP, especially, in oxide CMP, supports the linear dependency of removal rate on down pressure and relative velocity. Several nonlinear equations have been proposed by different researchers where removal rate depends nonlinearly on pressure and relative velocity. This is done in order to take into account different mechanisms of polishing like surface asperity model or dynamic viscosity model of the slurry. These models are referred to as Non-Preston models [3].

3. Pressure calculation. Due to pad porosity and surface asperities, a slurry film is almost certain to be interrupted by solid-solid contacts. In this work it is assumed that hydrodynamic lubrication is responsible for distributing the slurry, while majority of material removal occurs through solid-solid contact according to Preston and Non-Preston laws of polishing. For solid-solid contact, pressure between wafer and pad is the main factor affecting the polishing rate. Thus, pressure calculation at the chip scale becomes an important part of CMP modeling. The elastic contact mechanics model first used by Chekina et al. [4] is used for pressure calculation over die scale. The contact mechanics model accounts for the pad stiffness and other physical parameters to explain long-range mm-length scale effects due to pressure variation at chip scale.
The displacement of the pad at each point *W(x,y)* and the contact pressure *P(x,y)* are related by the integral equation

$$W(x,y) = k_c \iint_{\omega} \frac{P(\xi,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta \tag{2.1}$$

where ω is the contact area and k_c represents the elastic property of the bending material

$$k_c = \frac{1-\nu^2}{\pi E}$$

The conditions of local contact has the form

$$\begin{aligned} W(x,y) &= f(x,y)+c, \ \ if \ (x,y)\in\omega \\ W(x,y) &> f(x,y)+c, \ \ if \ (x,y)\notin\omega \end{aligned} \tag{2.2}$$

and

$$\begin{aligned} P(x,y) &\geq 0, if \ (x,y)\in\omega \\ P(x,y) &= 0, if \ (x,y)\notin\omega \end{aligned} \tag{2.3}$$

In general, these relations are used to find the unknown quantities: penetration c, and the area of contact, ω (Fig. 1).

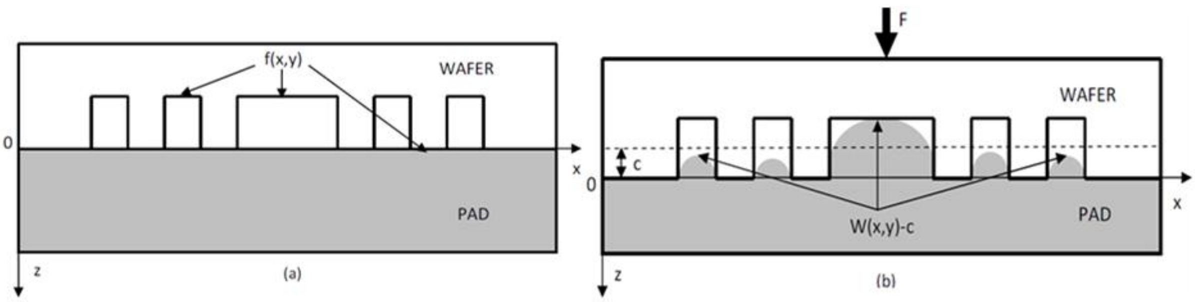


Fig. 1. Scheme of pad-die contact (a) before and (b) after load is applied.

In the case of known total load, F, the equilibrium equation is

$$F = \int_{\omega} p(\xi,\eta) d\xi d\eta \tag{2.4}$$

Eqs. (2.2)-(2.4) express the displacement at one point as a function of pressure over the entire contact area. Thus, the pad surface displacement is nonlocal which describes the long range effects during CMP. The main source of pressure variation during CMP comes from the wafer surface height variation due to ECD and other deposition processes. The pad exerts higher pressure on the higher points on the wafer and the material is polished faster there than at other sites. Due to regular placement of dies on the wafer, periodic boundary conditions may be applied for chip scale simulations. Then Eq. (2.1) resembles convolution equation of a signal P(x,y) with kernel

$$K(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\varepsilon}} \tag{2.5}$$

Here ε is a small positive number, which is introduced in order to avoid division by zero after discretization. Using the discrete convolution theorem *P(x,y)* can be found using the Fast Fourier Transform (FFT) method [5]

$$P(x,y)=\frac{1}{k_c}IFFT\left[\frac{FFT[W(x,y)]}{FFT[K(x,y)]}\right] \qquad (2.6)$$

4. Effective trench approximation. The dimensions of electronic devices are continuously being shrunk (line width of 45nm or less) to increase the device density for integrated circuits. The advanced

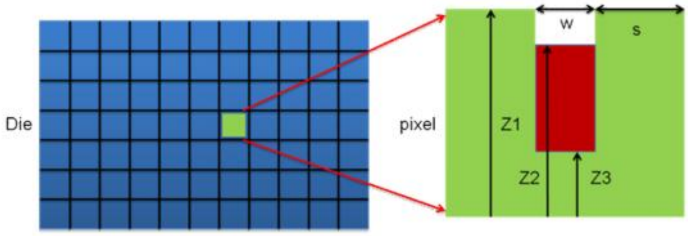


Fig. 2. Die scale discretization and the effective trench approximation.

microprocessor development is directed toward smaller features and multilayer metallization which leads to billions of features (trenches) present at low metal layers. Feature scale modeling for an entire chip scale is a very time consuming and computer resource intensive process and impractical for engineering applications. Thus, a bin-based discretization of the layout is performed for chip scale simulations. According to this approach, the surface of a die is divided into equal sized pixels of 20um x 20um size. Each pixel is represented as an effective trench with average width, space, and pattern density (Fig. 2). The pattern density is defined as the ratio of the total metal area inside the pixel by the surface area of the pixel.

In Fig. 2 the grids Z1, Z2 and Z3 give the height of oxide, copper and bottom of the effective trench. For each pixel an effective height of copper and/or oxide is calculated. Eqs. (2.1)-(2.4) are solved for pressure calculation and surface height is updated by the Preston's law (1.2). During the initial phase of the CMP simulation, only the copper is polished. As the process advances, the materials underneath the copper are exposed and simultaneous polishing of the copper and either barrier or oxide layer is simulated. If a second material becomes exposed in a frame, the effective trench width, space and pattern density are used in the subsequent polishing.

5. Model calibration. CMP modeling consists of several etch, deposition, and CMP steps. Each model has its own set of parameters characterizing the process, e.g. k_{eff} of Preston law or k_c of contact mechanics model. The values of these parameters are not known a priori and must be determined by model calibration with experimental data on test chips. The optimization procedure computes a weighted RMS error for the specified measured sites using the specified weights for erosion, dishing, thickness and the vertical positions over the not-trench (Z1) and trench (Z2) regions. Fast and accurate global optimization search algorithms are implemented to find the optimum model parameter values. After the model has been calibrated it can be used for CMP simulation and physical verification of production chips.

6. Hotspot detection. Semiconductor processes are variable by nature, with some variations being random and others systematic. Random ones are statistical by nature and always present in the process. Systematic variations are reproducible for specific patterns but difficult to represent with a rule that covers all situations. In general, such variations require a model to represent the process effects. Historically, both random and systematic issues have been controlled by the semiconductor fabrication facilities (fab). All a chip designer needed to worry about was conforming to the fab design rules. However, as processes moved to the nanometer scale, it became increasingly challenging to write all-encompassing rules. As a result, models were created to capture the core process effects as in Chemical Mechanical Polishing (CMP). The output of the CMP model is fed into an analysis tool to detect systematic planarity issues.

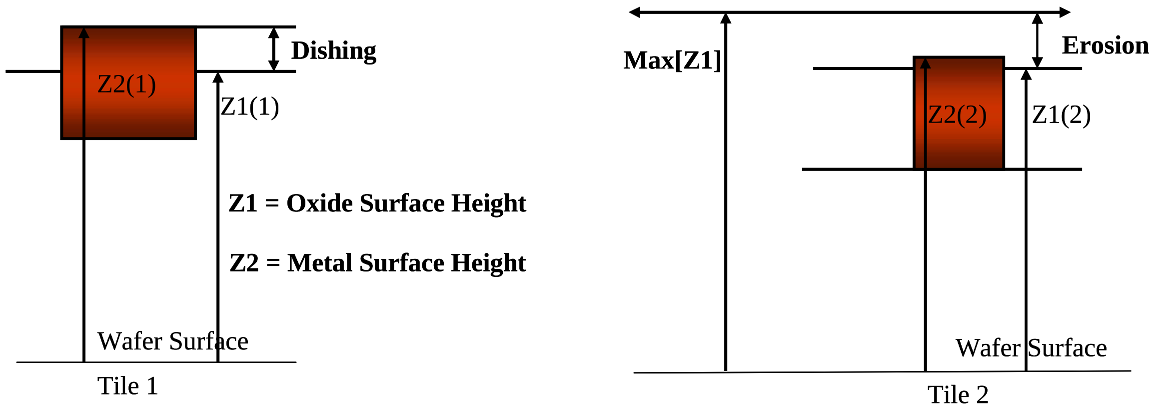
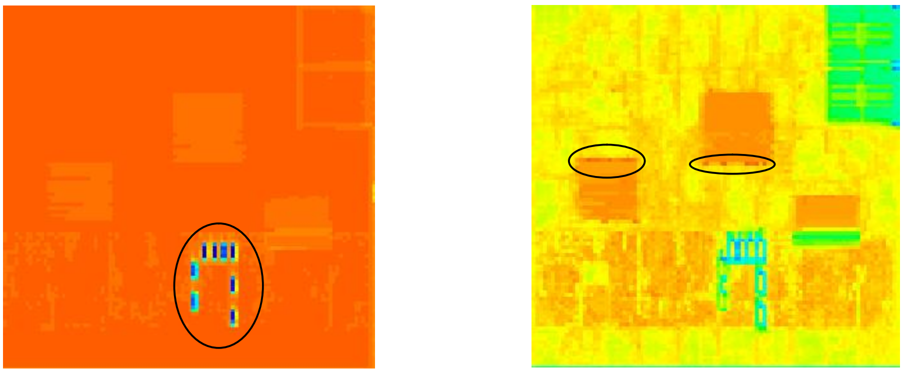


Fig. 3. Definition of dishing and erosion.



Dishing color map **Erosion color map**

Fig. 4 Post CMP simulation dishing and erosion color maps.

Manufacturing hotspots are areas in a chip that exceed certain threshold value of a metric calculated from CMP simulation results. Common metrics used are dishing, erosion and depth-of-focus (DoF). Dishing is defined as (Z1-Z2) and characterizes the loss of copper inside a trench after polishing. Erosion characterizes the loss of oxide after polishing with respect to the oxide level where there is no pattern, i.e. the field regions. Fig. 3 shows a pictorial representation of these two metric. DoF attempts to measure the maximum height range across die at the lithographic step.

An effective feature scale model is used for modeling one and two materials polishing for each pixel. From the final height positions the values for erosion and dishing are calculated that characterize the planarity of the CMP process. The DoF manufacturing hotspots are areas that are prone to printability issues that appear during the lithographic step. Dishing and erosion hotspots are designed to predict potential multi-layers yield issues created during the copper metallization processes [6]. Fig. 4 shows an example of dishing and erosion color maps after CMP simulations. The values of dishing and erosion in the maps are in the range of tens of Angstroms. These maps indicate several places on the design with hotspots. In multilayer chips, erosion or dishing hotspots at underlying metal layers may create shorts between metal lines at higher layers and lead to chip yield or functionality loss. Thus, detection and fixing of hotspots at each metal layer is very important at chip design and verification steps. Locating the manufacturing hotspots before the chips are manufactured reduces costly design respins which affect the time-to-market and price of chips.

REFERENCE

1. Preston F.W., J. Soc. Glass Technol., 11, p. 214, 1927.
2. Oliver M.R. (Editor), Chemical-Mechanical Planarization of Semiconductor Materials, Springer Series in Material Science, 69, 2004.
3. Jianfeng Luo, Integrated Modeling of Chemical Mechanical Planarization/Polishing (CMP) for Integrated Circuit Fabrication: From Particle Scale to Die and Wafer Scales, PhD Thesis, University of California, Berkley, 2003.
4. Chekina O.G., Keer L.M., Wear-Contact problems and Modeling of Chemical Mechanical Polishing, Journal of the Electrochemical Society, 145(6), pp. 2100-2106, 1998.
5. Tamba E. Gbondo-Tugbawa, Chip-Scale Modeling of Pattern Dependences in Copper Chemical Mechanical Polishing Processes, Ph.D Thesis, MIT, Cambridge, MA, 2002.
6. Kyoko Izuha, Monalisa Bora, Ruben Ghulghazaryan et al, Using a Highly Accurate Self-stop Cu-CMP model in the Design Flow, SPIE, February 2010.

<u>Information about authors</u>

Ghulghazaryan R. – Physicist researcher, PhD, Mentor Graphics Development Services, Armenia
E-mail: ruben_ghulghazaryan@mentor.com

Hatem O. – Technical Marketing Engineer, Mentor Graphics, Egypt
E-mail: osama_hatem@mentor.com

Bora M. – Technical Marketing Engineer, Mentor Graphics, USA
E-mail: monalisa_bora@mentor.com

Lazaryan H. – Senior Engineer, Mentor Graphics Development Services, Armenia
E-mail: hasmik_lazaryan@mentor.com

Wilson J. – Product Marketing Manager, Mentor Graphics, USA
E-mail: jeff_wilson@mentor.com

Markosian A. – Development Engineering Director, Mentor Graphics, USA
E-mail: ara_markosian@mentor.com

MODES OF PLASTIC COLLAPSE AND PHENOMENON OF LARGE DEFORMATION OF THIN WALLED STRUCTURES UNDER IMPACT LOADING – A PERSPECTIVE

Gupta N. K.

Plasto-mechanics of large deformation of structures subjected to external impact loads and its dependence on various parameters like strain rate, inertia, history of loading, annealing, thermal processes and the geometry are still not fully understood. Structured experiments are of help in studying the phenomenon in its varied aspects and provide plausible description, assumptions and parameters needed for realistic analysis of such problems. In this paper, I share some of the observations made in large deformation studies on thin walled structures subjected to impact of a drop hammer, projectiles of different features and blast loading, carried out to help in further understanding of the phenomenon.

1. Introduction

Mechanics of large inelastic deformation and failure of structures subjected to impact loading is inherently a complex phenomenon. What makes it more complex is its dependence on various parameters like strain rate, inertia, history of loading, annealing, thermal processes and geometry. Several recent studies present formulations that attempt to bring together various facets affecting the deformation. However, many problems relating to the deformation modes and their dependence on various parameters remain unresolved. In what follows, an overview of observations in some large deformation studies, which are of interest, involving thin walled structures of varying geometry and size are presented in a hope that plausible explanation for these having been found, would help in understanding of the large deformation phenomenon under impact loading.

2. Collapse of thin Metallic Shells

The plasto-mechanics of structural elements like tubes of circular and noncircular cross-sections, spherical shells, and conical frusta, have received considerable attention during the last four decades. Several experiments on such structures have shown that their modes of deformation are insensitive to the strain rates and methods of plasticity are useful in their analysis in most cases.

2.1Axial Crushing of Round Tubes

Axially crushed thin-walled tubes are perhaps the most investigated structural elements. Their progressive collapse is either axisymmetric due to local axial and radial buckling or diamond due to local circumferential buckling. Most of the solutions available in literature pertain to the concertina mode of collapse [1]. It has been observed in experiments that the folds are partly inside and partly outside. Plausible factors contributing to such folding include variation in tube thickness along the fold length, and stress–strain behaviour of the material in tension and compression [2]. Further problems in their modelling are estimation of the peak load at which the folding starts and the folds do not form independently. In most of the analytical studies, only two modes of deformation viz. bending and circumferential deformations have been incorporated. Experiments on materials like aluminium and mild steel show that their modes of deformation remains quite insensitive when tested under quasi-static or drop hammer loading. It is however seen [3] that the progressive collapse mode is concertina, diamond, or mixed depending on their state of work hardening, subsequent annealing process and the

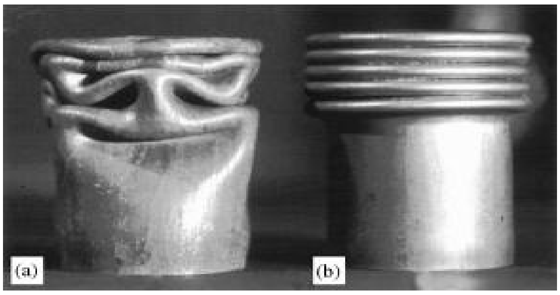


Fig.1. Deformed shape of the 52.6mm diameter steel tube in (a) annealed; and (b) as-received state.

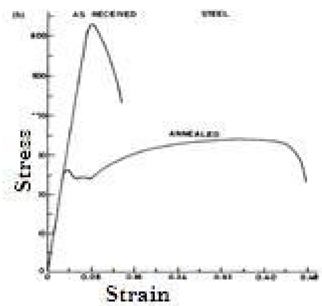
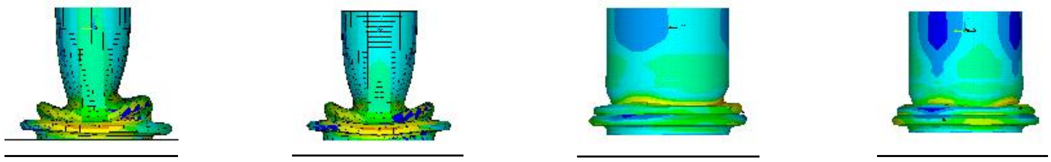


Fig.2. Stress-strain curve for mild steel

geometry of the tube. For tubes of d/t ratios between 10 and 40, it is found that as-received strain-hardened steel tubes deform in concertina mode and on annealing, they deform in diamond mode, see Fig.1.Their respective stress strain curves are shown in Fig 2.

2.1.1 Tube imperfections – aluminum tubes

The influence of wall thickness eccentricity on the mode of deformation is discussed with reference to typical experiments on 50.8 mm dia tube. Equally spaced wall thickness eccentricities of 0.5 mm are introduced through off center machining as 1, 2, 3 or 4 sine waves around the tube circumference; Fig 3 shows their deformation modes. The boundary conditions in these computations were axi symmetric. The results reveal that without eccentricities the tube collapses in concertina mode. With 1 and 2 sine wave eccentricities the tubes collapse in a mixed mode while, with three and four sine wave eccentricities their collapse is in a concertina mode.



1 sine wave **2 sine waves** **3 sine waves** **4 sine waves**

Fig 3: Collapse modes and deformation profiles with 1, 2, 3 and 4 sin wave wall thickness eccentricity around circumference at 40 mm axial compression.

2.2 Axial crushing of frusta

One of the major advantages in using a frustum as compared to a cylindrical tube as energy absorbing device is that it minimizes the chances of collapse by buckling in Euler mode. Another significant feature of a frustum is its increasing collapse load with progression of crushing excepting for large semi-apical angles (>60 Deg) for which reverse bending takes place at some later stages of collapse and that causes fall in load. In experiments, frusta have been found to normally fail by diamond mode excepting those of very low and very high semi-apical angles, which fail respectively in concertina mode or by a rolling plastic hinge resulting in the formation of an inverted frusta. Some typical load–deformation curves of frusta collapsing due to the movement of rolling plastic hinge are shown in Fig. 4, wherein it is seen that the component sustains the load at the maximum level. Fig. 5 (a) and (b) show deformed shapes of the frusta of semi-apical angles 30 Deg and 45 Deg, respectively [4]. The former collapse in diamond mode, while the latter collapse by the movement of rolling plastic hinge. Similarity of the collapse mode of the large angle frusta with that of hemispherical shells under axial loading [5] can easily be seen.

In case of these frusta with low t/d values, in the later stages of compression, stationary plastic hinges are also formed. In all the cases of frusta of semi-apical angles 65 Deg, at a certain stage of compression, a reverse bending occurs from the larger end associated with a rolling plastic hinge.

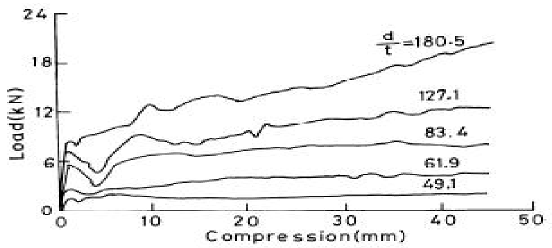


Fig.4. Load–compression curves of frusta collapsing due to the movement of rolling plastic hinge.

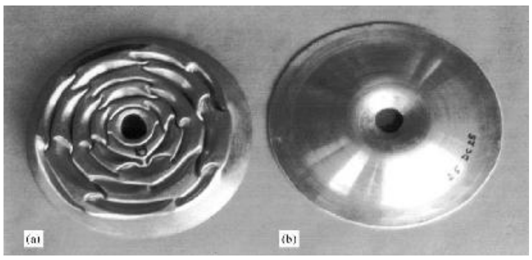


Fig.5. Deformed shapes of frusta of semi-apical angle (a) 30^0, and (b) 45^0

3.0 Impact of Projectile on Plates

Comprehensive surveys of the mechanics of penetration and perforation of projectiles into the targets have been published by Backman and Goldsmith [6], Zukas [7], and Corbett et al. [8] covering the major experimental and analytical works done in the field. A commonly used measure of a target's ability to withstand projectile impact is its ''Ballistic Limit Velocity (BLV)'' simply known as ''Ballistic Limit'' and much work has been carried out by researchers to enable estimates of this parameter. Another useful term is ''Ballistic Limit Thickness (BLT)'' [9], which is the minimum thickness of plate required for a projectile of known weight and velocity to prevent any perforation. Fig. 6(a) shows a typical residual velocity variation for the impact of projectiles on plates of different materials and thicknesses for 820 m/s incident velocity. The relationship between the velocity drop and the angle of obliquity is shown in Fig 6(b) for MS plates of various thicknesses.

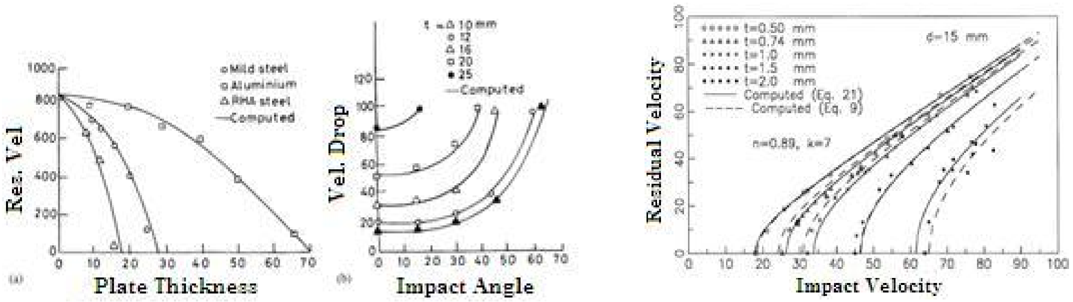


Fig.6. (a) Residual velocity for plates of different materials, and (b) velocity drop with the angle of obliquity for MS plates. Incident velocity is 820 m/s. (c) Residual velocities for aluminium plates of different thicknesses [10].

A basic requirement of armour steel is that it should have high hardness; but it seems that there is no simple correlation between hardness and resistance to perforation, as measured by a structure's ballistic limit. It has been noted that an efficient combination is a hard front face to break up the projectile and a ductile rear face to absorb the projectile's kinetic energy. Monolithic homogenous armour beyond a thickness begins to present constraints of weight, manufacture and cost. This has led to the consideration of possible targets made of layered plates of metals, nonmetals and their combinations for improving the efficiency.

Single and layered configurations of thin aluminium targets of thicknesses 0.5to 3 were impacted by projectiles of 10 to 22mm dia at impact angles of 0^0 to 60^0[10]. Penetration resistance was found to be highest for single aluminium plates, followed by layered (contact) and layered (spaced) plates. The velocity drop and absorbed energy increases with increase in the angle of obliquity at a given impact velocity. Some typical results of residual velocity and velocity drop are shown in Figs. 6(c). In thick plate regime, single and layered mild steel, aluminium and RHA (rolled homogeneous armour) targets of thicknesses 8 to 40mm were impacted at about 820m/s at various impact angles in Armour Piercing projectiles [11]. In normal impact, all the tested plates were perforated. The diameter of the crater was larger at the entry point than at the exit point, and the plates showed the formation of petals on their front side and a bulge on the rear side, Fig 7.

For two layered targets of MS, when the total thickness is greater than t* (The ballistic limit thickness) and the thickness of each layer is less than t*; the projectile gets embedded when the front layer is thinner than the rear layer. However, when the front layer is thicker, for some combinations one encounters an interesting phenomenon; the projectile penetrates up to a certain depth and then rebounds back, presumably due to a stress wave effect. For relatively thick plates (plates with thickness> one fourth of ballistic limit thickness t*) in two layers, the residual velocities are comparable to the single plates of equal thickness. When a projectile perforates a target at an oblique angle of incidence, it is observed in experiments that it does not come out of the rear side in the same straight path, but tends to turn towards or away from the normal to the plate. This deviation depends on the angle at which it strikes the plate, its material, and the thickness of the plate.

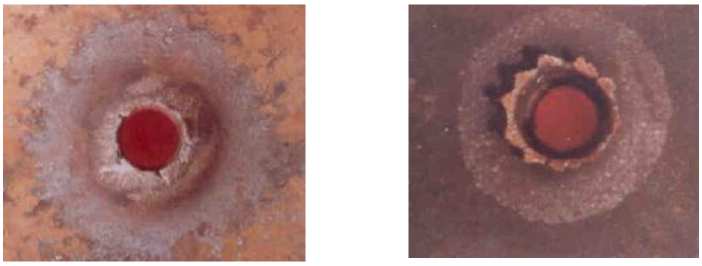
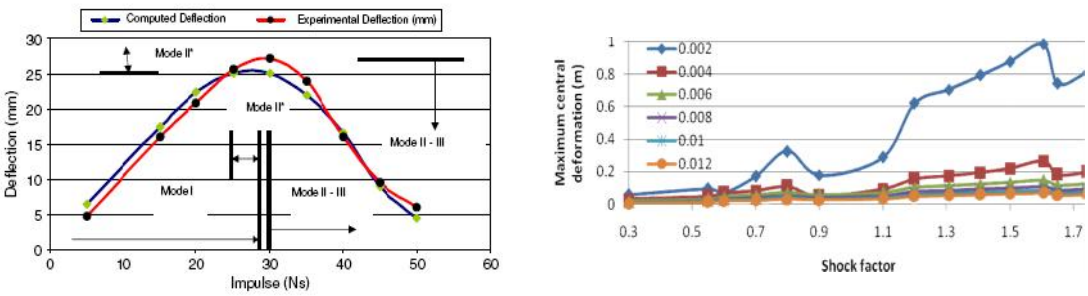


Fig 7 (a) Front and (b) rear crater damages in Mild Steel plate [9]

4.0 Explosive Loading on Plates

Explosive loading may be broadly classified with regard to the medium of surrounding environment as in-air explosions and underwater. The underwater explosion event involves nonlinearities in fluid medium in the form of cavitation at the fluid solid surface interface, and causing geometric as well as material nonlinearities in solids. In addition, the combined effect of fluid and structure as a continuum, also known as the fluid-structure interaction (FSI) is important. The criteria for damage, such as maximum strain criteria, rupture strain, equivalent plastic work and damage models, have earlier been used towards simulation of tear phenomenon in plates under shock loads. The various modes of failure observed in plates due to explosive loading are discussed in [12-14].

The results of midpoint deflection versus impulse in a typical case of in-air explosion, are shown in Fig. 8(a). It is observed that the midpoint deflection increases with impulse in Mode I failure. The plate responds to large deformations almost linearly with time and reaches a maximum. The influence of strain rate through its effect on yield stress is highly significant. As seen from the comparative plots between the experimental results and the numerical ones, a good correlation has been obtained which validates the set up numerical scheme for Mode I failure. Modes II*, II and III failure modes have been incorporated in the numerical scheme using suitable criteria. The results of midpoint deflection versus impulse for the 100 mm diameter and 1.6 mm thickness plates have been plotted along with the experimental values and observed failure modes with increasing impulse magnitude are shown in Fig. 8 (a) .



(a) (b)

Fig 8. (a) Central deflection for Modes I, II and II–III failure with increasing impulse in-air blast, (b) Central deflection in different thicknesses for various shock factors under water .

The underwater shock wave has a characteristic exponential decay with transient and spatial variation. The numerical study was conducted on stiffened and un-stiffened plate configurations. As the weight of the charge is increased and the distance of standoff reduced, it is observed that the central deformation in the plate is reduced. This trend is as shown in Fig 8 (b), we observe the humps at 0.8 SF and 1.605 SF in the central deformation vs. Shock Factor plot for the case of a 2mm plate thickness. The observation shows that the central deformation in the plate reduces when the charge is placed close to the structure, which modifies the behavior of the plate to display modes of failure higher than the Mode I (Large deformation failure). This behavior pattern is also seen at shock factors 1.605 (790gm at 0.25 m) and 1.7 (135 gm at 0.1 m) where there exists a hump at 1.605 SF. The mode II failure is defined earlier as tearing of plate at the centre of the supports and progressively moving to the corners at the clamped edges. The Mode II failure pattern on a 2mm, 0.25x0.3m WELDOX 460E is shown in Fig 9 below, the plates shown are only quarter model.

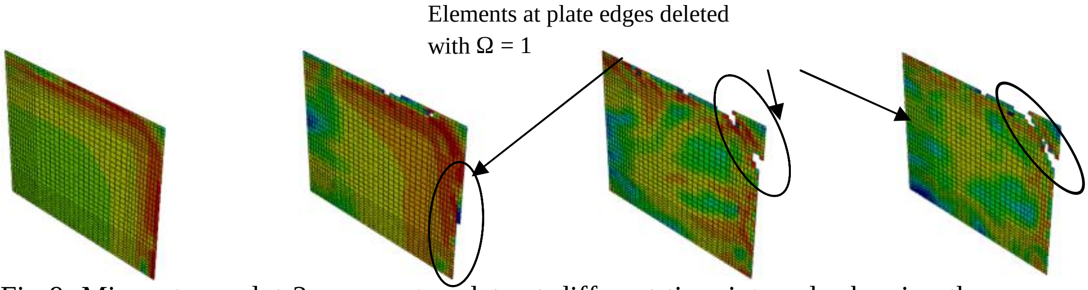


Fig 9. Mises stress plot 2mm quarter plate at different time intervals showing the progression of damage.

CONCLUSION

I have presented above some examples of experimental observations along with some numerical results in an attempt to draw attention to the basic complexities of the large deformation phenomena. There are, however many issues concerning the understanding of the mechanics of large deformations and delineation of deformation modes under various loading and boundary conditions, numerical methods and analytical solutions for their description and material constitutive behavior, which need attention.

REFERENCES

[1] Gupta N.K, Velmurugan R, Consideration of internal folding and nonsymmetrical folding in axisymmetric axial collapse of round tubes. International Journal of Solids and Structures 34 (1997) 2611.

[2] Gupta NK, Abbas H. Some aspects in axial crushing of cylindrical tubes. Int J Impact Engg 2001;25:331–44.

[3] Gupta NK, Gupta SK. Effect of annealing, size and cut-outs on axial collapse behaviour of circualar tubes. Mech Sci 1993; 35:597–613.

[4] Gupta NK, Prasad GLE, Gupta SK. Plastic collapse of metallic conical frusta of large semi-epical angles. Int J Crash 1997;2:349–66.

[5] Gupta NK, Prasad GLE, Gupta SK. Axial compression of metallic spherical shells between rigid plates. Thin Walled Str 1999;34:21–41.

[6] Backman ME, Goldsmith W. The mechanics of penetration of projectiles into targets. Int J Eng Sci 1978;16:1–99.

[7] Zukas JA. High velocity dynamics. New York: Wiley, 1990.

[8] Corbett GG, Reid SR, Johnson W. Impact loading of plates and shells by free-flying projectiles: a review. Int J Impact Eng 1996;18:141–230.

[9] Gupta NK, Madhu V. An experimental study of normal and oblique impact of a hard core projectile on single and layered plates. Int J Eng 1987;19:395–414.

[10] Gupta NK, Iqbal MA, Sekhon GS, Experimental and numerical studies on the behavior of thin aluminium plates subjected to impact by blunt- and hemispherical-nosed projectiles Int. J. Impact Eng.
32, 1921-1944, 2006.

[11]] Gupta N.K, Madhu V, Experimental study of normal and oblique impact of hard core projectiles on single and layered plated. International Journal of Impact Engineering 19(1997) pp.395-414

[12] N.K. Gupta and Nagesh, “Deformation and tearing of circular plates with varying support conditions under uniform impulsive loads”. International journal of impact engineering, Vol. 34. Pp.42-59, 2007

[13] G. N. Nurick and G. C. Shave, 1995. “The deformation and tearing of thin square plates subjected to impulsive loads-an experimental study” International journal of impact engineering, Vol.18. Pp.99-116, 1995.

[14] N.S. Rudrapatna, R. Vaziri and M.D Olson, “Deformation and failure of blast loaded square plates”, International journal of impact engineering, Vol. 22. Pp.449-467, 1999.

CUSPED PRISMATIC SHELLS AND BEAMS

Jaiani G.

The present paper is devoted to up-dated exploratory survey in the field of cusped prismatic shells and beams.

The investigations of cusped (cuspidate) elastic prismatic shells takes its origin from the fifties of the last century, namely, in 1955 I.Vekua (see [1], see also [2]) raised the problem of investigation of elastic cusped prismatic shells, whose thickness on the entire plate boundary or on its part vanishes. Such bodies, considered as three-dimensional (3D) ones, may occupy 3D domains with non-Lipschitz boundaries, in general. In practice, such cusped prismatic shells, in particular, cusped plates, and cusped beams (i.e., beams whose cross-sections vanish at least at one end of a beam) are often encountered in spatial structures with partly fixed edges, e.g., stadium ceilings, aircraft wings, submarine wings etc., in machine-tool design, as in cutting-machines, planning-machines, in astronautics, turbines, and in many other areas of engineering. The problem mathematically leads to the question of posing and solving of boundary value problems (BVP) for even order equations and systems of elliptic type with the order degeneration in the static case and of initial boundary value problems for even order equations and systems of hyperbolic type with the order degeneration in the dynamical case.

The present paper is devoted to up-dated exploratory survey of results obtained in the theory of elastic cusped shells (mainly prismatic ones) and cusped beams.

Let a 3D elastic prismatic shell-like body occupy a bounded region $\overline{\Omega}$ with boundary $\partial\Omega$, which is defined as:

$$\Omega := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x = (x_1, x_2) \in \omega,\ \overset{(-)}{h}(x) < x_3 < \overset{(+)}{h}(x) \right\},$$

where $\overline{\mu} = \mu \cup \partial\mu$ is the so-called projection of the prismatic shell $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$ on $x_3 = 0$. Without loss of generality we assume that $\overline{\Omega} \bigcap \overline{\omega} \neq \varnothing$. In what follows we assume that

$$\overset{(\pm)}{h}(x) \in C^2(\omega) \bigcap C(\overline{\omega}),$$

and

$$2h(x) := \overset{(+)}{h}(x) - \overset{(-)}{h}(x) \ \begin{cases} > 0 & \text{for} \quad x \in \omega, \\ \geq 0 & \text{for} \quad x \in \partial\omega \end{cases}$$

is the thickness of the prismatic shell $\overline{\Omega}$ at the points $x \in \overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. In the symmetric case, i.e., when

$$\overset{(-)}{h}(x) = -\overset{(+)}{h}(x),$$

we have to do with plates of variable thickness $2h(x)$ and a middle-plane ω. Prismatic shells are called cusped ones if the set $x \in \partial\omega$, where $2h(x) = 0$ is not empty.

In order to see the distinction between the shells and prismatic shells it is sufficient to note that the shells middle surfaces are orthogonal to the shells' lateral surfaces while the prismatic shells' lateral surfaces are orthogonal to the prismatic shells' projections on $x_3 = 0$.

Let a domain of R^3 occupied by an elastic beam be

$$\Omega^b := \Big\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < L,\ \overset{(-)}{h}_i(x_1) \leq x_i \leq \overset{(+)}{h}_i(x_1),\ 2h_i(x_1) := \overset{(+)}{h}_i - \overset{(-)}{h}_i \geq 0,$$
$$h_i \in C([0, L]) \bigcap C^2(]0, L[),\ i = 2, 3,\ L = \text{const} \Big\}$$

and $2h_3$ and $2h_2$ be correspondingly the thickness and the width of the beam and their maxima be essentially less then the length L of the bar; superscript "*b*" means beam. If at least one of $2h(x) = 0$ and $2h(L) = 0$ is fulfilled, a beam is called the cusped one.

In the N-th approximation the system under consideration for cusped, in general, prismatic shells reads as (see [3],[1]):

$$
\begin{aligned}
&\mu\left[\left(h^{2r+1}\overset{N}{v}_{\alpha r,j}\right)_{,\alpha}+\left(h^{2r+1}\overset{N}{v}_{jr,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]\\
&+\lambda\delta_{\alpha j}\left(h^{2r+1}\overset{N}{v}_{\gamma r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=r+1}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha jks}h^{r+s+1}\overset{N}{v}_{ks}\right)_{,\alpha}\\
&+\sum_{l=0}^{r-1}\overset{r}{a}_{il}\left[\lambda\delta_{ij}h^{r+l+1}\overset{N}{v}_{\gamma l,\gamma}+\mu h^{r+l+1}\left(\overset{N}{v}_{il,j}+\overset{N}{v}_{jl,i}\right)+\sum_{s=l+1}^{N}\left(\overset{l}{B}_{ijks}h^{r+s+1}\overset{N}{v}_{ks}\right)_{,\alpha}\right]\\
&+h^{r}X^{0}_{jr}=\rho h^{r}\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{v}_{jr}}{\partial t^{2}},\quad r=\overline{0,N},\quad j=1,2,3,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

where $\overset{N}{v}_{kl}$ are unknown weighted displacement moments, λ,μ are Lamé constants, ρ is the density, X^{0}_{jr}, $\overset{r}{B}_{ijks}$ are known functions. Here subscripts preceded by a comma mean partial derivatives with respect to the corresponding variables. Moreover, repeated indices imply summation (Greek letters rum from 1 to 2, and Latin letters from 1 to 3, unless stated otherwise). The infinite system (1) for r=0,1,… is equivalent to 3D Lamé system.

The analogues system for cusped, in general, prismatic beams can be found in [4]:

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{\underline{j}}\left(h_2^{2n_2+1}h_3^{2n_3+1}v_{jn_3n_2,1}\right)_{,1}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{r=0}^{N_3}\sum_{s=0}^{N_2}\left(R^{ij}_{rs}\,v_{irs,1}+S^{ij}_{rs}\,v_{irs}\right)+h_2^{n_2}h_3^{n_3}\overset{n_3,n_2}{X}{}^{0}_{j}=\\
&=\text{°}\,h_2^{n_2}h_3^{n_3}\frac{\text{ô}\,h_2^{n_2+1}h_3^{n_3+1}v_{jn_3n_2}}{\text{ô}\,t^{2}},\quad j=1,2,3;\ n_i=\overline{0,N_i},\quad i=2,3,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

where

$$
\Lambda_j:=\begin{cases}\text{ª}+2\text{«}, & j=1,\\ \text{«}, & j=2,3,\end{cases}
$$

$R^{ij}_{rs}(x_1)$, $S^{ij}_{rs}(x_1)$ can be expressed by ª, «, $h_i(x_1)$, $\tilde{h}_i(x_1)$, $i=2,3$, note that some of these quantities can be zero and some of them can be not bounded on]0,L[.

The first work concerning classical bending of cusped elastic plates was done by E. Makhover and S. Mikhlin. The bending equation of the Kircchhoff-Love plate of variable thickness has the form [5]

$$
(Dw_{,11})_{,11}+(Dw_{,22})_{,22}+\nu(Dw_{,22})_{,11}+\nu(Dw_{,11})_{,22}+2(1-\nu)(Dw_{,12})_{,12}=f(x_1,x_2), \tag{3}
$$

where w is a deflection, D is a flexural rigidity of the plate, ν is Poisson's ratio. In 1957 E. Makhover (here and in what follows corresponding to indicated authors references one can find in [5]; unfortunately, the restriction of the size of the paper do not allow to give the complete bibliography in the present paper), using the results of S. Mikhlin [6], considered such a cusped plate with the flexural rigidity $D(x_1,x_2)$ satisfying

$$
\begin{aligned}
&D_1x_2^{k_1}\le D(x_1,x_2)\le D_2x_2^{k_1},\quad D_1=\text{const}>0,\\
&D_2=const>0,\quad k_1=const>0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

within the framework of the classical Kirchhoff-Love bending theory. Namely, she has shown that for $k_1<2$ the deflection can be prescribed on the cusped edge of the plate while its normal derivative can be prescribed for $k_1<1$. In 1971 in the case of the zero (see (1) for the N=0) approximation of I.Vekua's model of shallow prismatic shells (see below) A. Khvoles represented the forth order Airy stress function operator as the product of two second order operators in the case when the plate thickness $2h$ is given by

$$2h = h_0 x_2^{k_2},\ h_0 = \text{const} > 0, \quad k_2 = \text{const} > 0,\ x_2 \geq 0, \tag{5}$$

and investigated the question of the general representation of corresponding solutions. Since 1972 the works of G. Jaiani are devoted to the systematic study of these problems. Applying more natural spaces than used by E. Makhover, G. Jaiani has analyzed in which cases the cusped edge can be fixed ($k_1 < 1$) or simply supported ($k_1 < 2$). Moreover, he established well-posedness and the correct formulation of all the reasonable principal BVPs. He also investigated the tension-compression problem of cusped plates, based on I. Vekua's model of shallow prismatic shells ($N = 0$) and constructed effective solutions of BVPs in stresses, when ω is the half-plane. G. Jaiani's results can be summarized as follows.

Let n be the inward normal of the plate boundary. In the case of the tension-compression ($N = 0$) problem on the cusped edge, where

$$0 \leq \frac{\partial h}{\partial n} < \infty \quad \text{(in the case (5) this means } k_2 \geq 1\text{)}$$

which will be called a sharp cusped edge, one can not prescribe the displacement vector, while on the cusped edge, where

$$\frac{\partial h}{\partial n} = +\infty \quad \text{(in the case (5) this means } k_2 < 1\text{)},$$

which will be called a blunt cusped edge, the displacement vector can be prescribed.

In the case of the classical bending problem with a cusped edge and

$$\frac{\partial h}{\partial n} = O(d^{k-1}) \quad \text{as } d \to 0, \quad k = \text{const} > 0, \tag{6}$$

where d is the distance between an interior reference point of the plate projection and the cusped edge, the edge can not be fixed if $k \geq 1/3$, but it can be fixed if $0 < k < 1/3$; it can not be freely supported if $k \geq 2/3$, and it can be freely supported if $0 < k < 2/3$; it can be free or arbitrarily loaded by a shear force and a bending moment if $k > 0$ (Note that in the case (5), the condition (6) implies that $d_2 = x_2$ and $k = k_2 = k_1/3$). The last from the above three assertions is also valid for the sharp cusp. It was to be expected that the above conclusions remain true also in the case of cusped shells. In concrete cases of cusped cylindrical and conical shells bending it has been shown by G. Tsikarishvili and N. Khomasuridze. E.g., the cylindrical bending of a cylindrical shell has been considered when the thickness has the form as follows

$$h = h_0 \sin^{\kappa} \phi, \quad h_0,\ \kappa = \text{const} > 0,$$

where $\phi \in]0, \phi_0[$ is the polar angle counted from the plane $O\zeta x$. Let w be radial component vector, i.e., deflection, which obviously characterizes bending, and v be polar angular component of displacement vector, i.e., displacement in the middle surface (cylinder) orthogonal to the element of cylinder which (i.e., displacement v) characterizes tension-compression of cylindrical shell. As it had been predicted by G. Jaiani, they proved that deflection w can be given on the cusped edge only when

$$\kappa \in \left]0, \frac{2}{3}\right[,$$

its first derivative can be given only when

$$\kappa \in \left]0, \frac{1}{3}\right[,$$

but v can be given if the cusped edge is blunt, i.e., $\kappa \in]0,1[$, as in the zero order approximation of I.Vekua's version which characterizes tension-compression. In the case under consideration, the remarkable effect is the following: on the one hand, as it is well-known, the cylindrical bending of a cylindrical shell is always accompanied by significant tension-compression. Therefore, w can not be separated from v by neglecting of the latter. On the other hand, they have conserved their properties characterizing them correspondingly by bending and tension-compression of cusped plates when these kinds of deformations can be considered separately. It was also to be expected that these conclusions do not depend on anisotropy of material of elastic body. E.g., these results also remain valid in the case of classical bending of orthotropic cusped plates (G.Jaiani). However, for general cusped shells and also for general anisotropic cusped plates, corresponding analysis is yet to be done.

Applying the functional-analytic method developed by G. Fichera, the particular case $\lambda = \mu$ of Vekua's tension-compression system (see system (1) for *N*=0) for general cusped plates has been investigated by G. Jaiani. The main result is that at blunt cusped edge ($\partial h / \partial n = +\infty$) displacement vector components can be prescribed, while cusp cusped edge ($0 \le \partial h / \partial n < \infty$) should be freed from boundary conditions for displacements. The last result concerning cusp cusped edges is true for the *N*-th approximation as well (see G. Jaiani [3]).

I.Vekua's tension-compression system in the $N = 1$ approximation for the case (5) is investigated by G. Devdariani, G.V. Jaiani, S.S. Kharibegashvili, and D. Natroshvili. The existence and uniqueness of generalized solutions of BVPs with Dirichlet (for zero-moments when $k_2 < 1$ and for the first moment when $k_2 < 1/3$) and Keldysh (for zero-moments when $k_2 \ge 1$ and for the first moment when $k_2 \ge 1/3$) boundary conditions is proved in weighted Sobolev spaces.

The classical bending of plates with the flexural rigidity (4) in energetic and in weighted Sobolev spaces has been studied by G. Jaiani. In the energetic space some restrictions on the lateral load has been relaxed by G. Devdariani. G. Tsiskarishvili characterized completely the classical axial symmetric bending of specific circular cusped plates without or with a hole.

In the case (2), for the half-plane, half-strip and angular projections the basic BVPs in stresses have been explicitly solved by G. Jaiani with the help of singular solutions depending only on the polar angle.

In 1980-1986 S. Uzunov numerically solved the problem of bending of the cusped circular beam on an elastic foundation with constant compliance. The blunt cusped end is free and the non-cusped end is clamped.

In 1990-1995 the bending vibration of homogeneous Euler-Bernoulli cone beams and beams of continuously varying rectangular cross-sections, when one side (width) of the cross-section is constant, while the other side is proportional to $x_2^{æ}$, $æ = const > 0$, where x_2 is the axial coordinate measured from the cusped end, were considered by S. Naguleswaran.

In 1999-2001 two contact problems were consider by N. Shavlakadze, namely, the contact problem for an unbounded elastic medium composed of two half-planes $x_1 > 0$ and $x_1 < 0$ having different elastic constants and strengthened on the semi-axis $x_2 > 0$ by an inclusion of variable thickness (a cusped beam) with constant Young's modulus and Poisson's ratio.

Works of N. Chinchaladze and G. Jaiani are devoted to some solid-fluid interaction problems when the solid part is an elastic cusped plate.

By N. Chinchaladze and R.P. Gilbert an interaction between an elastic prismatic shell and an incompressible fluid, when in the elastic plate part the $N = 0$ approximation of Vekua's hierarchical models for a cusped elastic prismatic shell is used, is also investigated.

Variational hierarchical two-dimensional models for cusped elastic prismatic shells are constructed by G. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili, and W. Wendland [7]. With the help of variational methods, existence and uniqueness theorems for the corresponding two-dimensional boundary value problems are proved in appropriate weighted function spaces in the case when prismatic shell occupies a Lipschitz 3D domain, while on faces stresses and on the non-cusped edge moments of displacement vector components are given. [8] is devoted to the design of a hierarchy of 2D models for dynamical problems within the theory of multicomponent linearly elastic mixtures in the case of prismatic shells with thickness which may vanish on some part of its boundary, provided the 3D domain occupied by the prismatic shell is Lipschitz one. The method based on the idea to get Korn's type inequality for 2D models from the 3D Korn's inequality for non-cusped domains belongs to D. Gordeziani. This idea for cusped but Lipschitz 3D domains with corresponding modifications was succefully used in [7]. This method do not allow to consider BVPs when on the cusped edge either displacements or loadings (which in this case are concentrated along the cusped edge ones) are prescribed. Similar investigations for general shells occupying Lipschitz 3D domains are carried out by D. Gordeziani and G. Avalishvili.

In [9] is the well-posedness of BVPs for elastic cusped plate (i.e., symmetric prismatic shells) in the N-th approximation $N \geq 0$ of I.Vekua's hierarchical model (see system (1)) under all the reasonable boundary conditions at the cusped edge and given displacements at the non-cusped edge is studied. The approach works also for non-symmetric shells word for word. Special attention is drawn to the $N = 0,1,2$, approximations as to important cases from the practical point of view. For example, $N = 0$ and $N = 1$ models, actually, coincide with the plane deformation and Kirchhoff-Love model, respectively. For the *r*-th order moments Dirichlet and Keldysh boundary conditions are correct when $\kappa < \frac{1}{2r+1}$ and $\kappa \geq \frac{1}{2r+1}$ (r=0, 1, 2,...N), respectively.

[10] deals with a system consisting of singular partial differential equations of the first and second order arising in the zero approximation of I.Vekua's hierarchical models of prismatic shells, when the thickness of the shell varies as a power function of one argument and vanishes at the cusped edge of the prismatic shell. For this system of special type a nonlocal BVP in the half-plane is solved in the explicit form. The BVP under consideration corresponds to stress-strain state of the cusped prismatic shell under the action of concentrated forces and couples.

In [11] dynamical problem in the (0,0) approximation of elastic cusped prismatic beams is investigated when stresses are applied at the face surfaces and the ends of the beam. Two types of cusped ends are considered when the beam cross-section turns into either a point or a straight line segment. Correspondingly, at the cusped end either a force concentrated at the point or forces concentrated along the straight line segment are applied. The existence and uniqueness theorems in appropriate weighted Sobolev spaces are proved.

REFERENCES

1. Vekua I.N. On one method of calculating of prismatic shells. *Trudy Tbilis. Mat. Inst.* 21(1955), 191-259. (Russian)
2. Vekua I.N. Shell Theory: General Methods of Construction. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1985. 287 p.
3. Jaiani G.V. Application of Vekua's Dimension Reduction Method to Cusped Plates and Bars, Bull. TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), Vol.5, 27-34, 2001 (for electronic version see: http://www.viam.science/. tsu.ge /others/ticmi).
4. Jaiani G. On a mathematical model of bars with variable rectangular cross-sections, ZAMM-Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik, 81, 3, 147- 173,2001.
5. Jaiani G. Theory of Cusped Euler-Bernoulli Beams and Kirchoff-Love Plates, Lecture Notes of TICMI, Vol.3, 2002 (for electronic version see: http:// www.viam.science.tsu.ge/others/ticmi)
6. Mikhlin S.G. Variational Methods in Mathematical Physics. Nauka, Moscow, 1970. 512 p. (Russian)
7. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L. Two-dimensional Hierarchical Models for Prismatic Shells with Thickness Vanishing at the Boundary, Journal of Elasticity, Vol. 77, No. 2, 95-122, 2005.
8. Gordeziani D., Avalishvili G. On a Dynamical hierarchical Model for Prismatic Shells in the Theory of Elastic Mixtures, Mathematical Methods in Applied Sciences, Vol. 28, 737-756, 2005.
9. Chinchaladze N., Gilbert R., Jaiani, G., Kharibegashvili S., Natroshvili D. Existence and Uniqueness Theorems for Cusped Prismatic Shells in the N-th Hierarchical Model, Mathematical Methods in Applied Sciences, Vol. 31, 1345-1367, 2008.
10. Jaiani G. On a Nonlocal Boundary Value problem for a System of Singular Differential Equations, Applicable Analysis: An International Journal, Volume 87, No. 1, 83 – 97, 2008.
11. Chinchaladze N., Gilbert R., Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili, D. Cusped Elastic Beams under the Action of Stresses and Concentrated Forces. Applicable Analysis, Volume 89, No. 5, 757–774, 2010.

Information about author

George Jaiani - I.Vekua Institute of Applied Mathematics of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, University St. 2, 0186, Tbilisi, Georgia, (995 32) 303040,

E-mail: george.jaiani@gmail.com, george.jaiani@viam.sci.tsu.ge

THE EFFECT OF COMBINED LOADING ON BUCKLING LOADS OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELLS SURROUNDED BY AN ELASTIC MEDIUM

Jenabi J., Khazaeinejad P.

The first order shear deformation theory is developed to examine the effect of combined load interaction parameter on elastic buckling loads of combined-loaded functionally graded circular cylindrical shells with properties varying continuously in the thickness direction. A load interaction parameter is appropriately defined to express the ratio of applied axial compression and lateral pressure. To model the elastic foundation, the Winkler and Pasternak foundations are used. The elastic foundation reacts in compression as well as in tension. The stability equations are established using the equilibrium equations and the adjacent equilibrium criterion method. Approximate solutions are assumed to solve these equations to obtain the buckling loads. Critical loads are obtained for a given load interaction.

1. INTRODUCTION

Functionally graded material (FGM) is a two-component composite mixture of ceramic and metal or from a combination of different materials characterized by a compositional gradient from one component to the other. The buckling analysis of cylindrical shells on elastic foundation or embedded in an elastic medium subjected to mechanical and thermal loads have been presented by many researchers. One of the first researches on the stability of cylindrical shells in an elastic medium is presented by Forrestal and Herrmann [1] that have derived the stability equations of long, thin, and circular cylindrical shells surrounded by an elastic medium. Ng and Lam [2] have examined the effects of elastic foundation on the instability regions of the cylindrical shell for transverse, longitudinal, and circumferential modes. Fok [3] has used the energy method together with a Rayleigh-Ritz trial function for buckling analysis of a long cylindrical shell, embedded in an elastic material and loaded by a far-field hydrostatic pressure. Shen [4] has studied the post-buckling response of an anisotropic laminated cylindrical shell of finite length embedded in a large outer elastic medium modelled as a tensionless Pasternak foundation reacting in compression only and subjected to internal pressure in thermal environments. Sheng and Wang [5] have examined the effect of thermal load on vibration, buckling, and dynamic stability of functionally graded (FG) cylindrical shells embedded in an elastic medium, based on the first-order shear deformation theory considering rotary inertia and the transverse shear strains. They have formulated the conventional elastic foundation of the Winkler-type that reacts in compression as well as in tension. Shen and his co-workers have employed a singular perturbation technique associated with a higher order shear deformation theory to study the postbuckling response of FG cylindrical shells in thermal environments surrounded by an elastic medium subjected to axial compression [6] and internal pressure [7]. In their analysis, the surrounding elastic medium is modeled as a tensionless Pasternak foundation that reacts in compression only.

In this paper, the effect of combined loading on the buckling loads of FG circular cylindrical shells with variable shell properties in the thickness direction is investigated. A load interaction parameter is appropriately defined to express the ratio of applied axial compression and lateral pressure. The Winkler and Pasternak foundations are used to model the elastic medium. The equilibrium and stability equations are derived based on the first order shear deformation theory. Results are presented for various values of load parameter and are compared with the known data in the literature.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

A FG cylindrical shell of mean radius R, finite length L, and thickness h surrounded by an elastic medium is considered (Fig. 1). The elastic medium consists of the Winkler and Pasternak foundations as follows

$$F(x,\theta) = K_w w(x,\theta) - K_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \tag{2.1}$$

where K_w is the vertical spring modulus of foundation and K_p indicate the shear moduli of foundation. For the case K_p=0, the foundation reduces to the Winkler-type. The proposed elastic medium reacts in

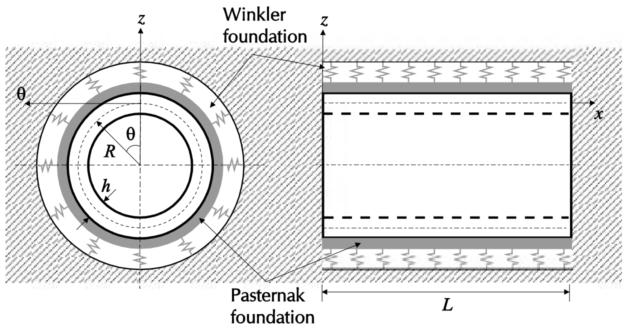


Fig.1. FG cylindrical shell surrounded by an elastic medium.

compression as well as in tension. Denoting the shell displacement components along the *x*, *θ*, and *z* directions by respectively, *u*, *v*, and *w*, the following displacement field is assumed based on the first order shear deformation theory (FSDT) [8]:

$$u(x,\theta,z) = u_0 + zu_1, \qquad v(x,\theta,z) = v_0 + zv_1, \qquad w(x,\theta,z) = w_0 \tag{2.2}$$

where $u_0(x,\theta)$, $v_0(x,\theta)$, and $w_0(x,\theta)$ are the middle surface displacements, and $u_1(x,\theta)$ and $v_1(x,\theta)$ describe the rotations about the θ- and x-axes, respectively. The equilibrium equations of the FG shells embedded in an elastic medium can be derived using the total potential energy as follows:

$$\begin{aligned} &R\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 N_\theta}{\partial \theta^2} = 0 \\ &R^2\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + 2R\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - RN_\theta + R^2\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(N_\theta\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) + F(x,\theta) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

where the stress and moment resultants of the shell are related to strains as follows [9]:

$$\begin{aligned} &(N_x, M_x) = (A_{11}, B_{11})\varepsilon_x^0 + (B_{11}, D_{11})\varepsilon_x^1 + (A_{12}, B_{12})\varepsilon_\theta^0 + (B_{12}, D_{12},)\varepsilon_\theta^1, \;\; Q_\theta = A_{22}\gamma_{\theta z}^0 \\ &(N_\theta, M_\theta) = (A_{12}, B_{12})\varepsilon_x^0 + (B_{12}, D_{12})\varepsilon_x^1 + (A_{11}, B_{11})\varepsilon_\theta^0 + (B_{11}, D_{11})\varepsilon_\theta^1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

where

$$\begin{aligned} &(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{1-\nu^2}(1,z,z^2)\,\mathrm{d}z \\ &(A_{12}, B_{12}, D_{12}) = \int_{-h/2}^{h/2}\frac{\nu E}{1-\nu^2}(1,z,z^2)\,\mathrm{d}z, \;\; A_{22} = \int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{2+2\nu}\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.5}$$

where E is the elasticity modulus of the FG cylindrical shell which is assumed to vary continuously through the thickness direction as follows [9]:

$$E = (E_c - E_m)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k + E_m \tag{2.6}$$

where k is the functionally graded index, and E_c and E_m denote the elasticity modulus of the ceramic (on outer surface $z=h/2$- and metal (on inner surface, $z=-h/2$) of the FG cylindrical shell, respectively. The Poisson's ratio of the FG shell ν, is set to be 0.3 for both materials due to the small changes. The nonlinear strain-displacement relations for buckling problem of the shell structure are expressed as follows:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0\right) + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)^2,$$
$$\varepsilon_x^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^1 = \frac{1}{R}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}, \quad \gamma_{x\theta}^1 = \frac{1}{R}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, \tag{2.7}$$
$$\gamma_{xz}^0 = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \gamma_{\theta z}^0 = v_1 + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}, \quad \gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

If we assume that the equilibrium state of a FG cylindrical shell under combined loading is defined in terms of displacement components u^0, v^0, and w^0, the displacement components of a neighboring stable state differ by u^1, v^1, and w^1 with respect to the equilibrium position. Thus, the total displacements of a neighboring state are [9]

$$u = u^0 + u^1, \qquad v = v^0 + v^1, \qquad w = w^0 + w^1 \tag{2.8}$$

In similar way, the resultants of a neighboring state may be related to the equilibrium state according to the following relations:

$$(N_x, M_x) = (N_x^0, M_x^0) + (N_x^1, M_x^1), \;\; (N_\theta, M_\theta) = (N_\theta^0, M_\theta^0) + (N_\theta^1, M_\theta^1), \;\; Q_\theta = Q_\theta^0 + Q_\theta^1 \tag{2.9}$$

where N_x^0, N_θ^0 and $N_{x\theta}^0$ are the prebuckling mechanical forces that describe the linear parts of the force increments corresponding to u^1, v^1, and w^1. For combined loading, the pre-buckling forces should be set as $N_x^0 = -P/2\pi R,\ N_\theta^0 = -\bar{P}R$ and $N_{x\theta}^0 = 0$ where P and $\bar{P}$ are respectively, the applied axial compression and lateral pressure. A suitable parameter relates the applied combined loads as $\eta = P/2\pi R^2\bar{P}.$ The stability equations may be obtained by substituting Eqs. (2.8) and (2.9) into equilibrium equations (2.3) as follows:

$$R\frac{\partial^2 N_x^1}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 N_\theta^1}{\partial \theta^2} = 0$$
$$R^2\frac{\partial^2 M_x^1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_\theta^1}{\partial \theta^2} + 2R\frac{\partial Q_\theta^1}{\partial \theta} - RN_\theta^1 - \eta\bar{P}R^3\frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} - \bar{P}R\frac{\partial^2 w_0^1}{\partial \theta^2} + F(x,\theta) = 0 \tag{2.10}$$

Note that the superscript 1 and 0 describe the states of stability and equilibrium conditions, respectively. The terms in the stability equations with superscript 0 satisfy the equilibrium condition and therefore drop out of the equations. Also, the nonlinear terms with superscript 1 are ignored because they are small compared to the linear terms. To solve these set of equations for simply-supported boundary ends, the following approximate solutions which satisfy the resulting equations and the simply-supported boundary conditions are assumed

$$(u^1, u_1^1) = \sum_m\sum_n (U_{mn}, X_{mn}) \cos m_1 x \sin n\theta$$
$$(v^1, v_1^1) = \sum_m\sum_n (V_{mn}, Y_{mn}) \sin m_1 x \cos n\theta \tag{2.11}$$
$$w^1 = \sum_m\sum_n W_{mn} \sin m_1 x \sin n\theta$$

Here $m_1 = m\pi/L,$ m is the half-wave number in the x-direction and n is the half-wave number in the θ-direction. Substituting the expressions for displacements from Eq. (2.11) into the Eq. (2.10), leads to a sets of differential equations with respect the unknown constants U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, and Y_{mn}.

Solving these equations gives a function for buckling pressure dependent on the half-wave numbers, foundation stiffnesses, functionally graded index, and geometry parameters of the FG cylindrical shell.

3. RESULTS AND DISCUSSION

The numerical results are presented for the FG circular cylindrical shells under combined loading having simply-supported boundary conditions surrounded by an elastic medium. The elasticity moduli of the FG shell composed of silicon nitride (Si_3N_4) and stainless steel (SUS304) was taken as E_c= 322.27 GPa and E_m=207.788 GPa, respectively. First, comparison studies are given in Table 1 to check the validity of the results. The critical loads are presented for Alumina/Al FG cylindrical shells with E_c= 380 GPa and E_m=70 GPa. For all the cases we set h=0.001 m. The numbers in brackets indicate the circumferential wave number n, while in all cases, the shell buckles at first longitudinal mode for all thickness ratios and aspect ratios. A good agreement has been obtained between the present results and the other works. In this paper, a shear correction factor equal to 5/6 is considered [8]. Tables 2 and 3 shows the effects of load interaction parameter η on critical loads for combined-loaded Si3N4/SUS304 FG cylindrical shells surrounded by an elastic medium. It is seen that the critical loads rapidly decrease going load parameter values from -3 to 1, and then decrease steadily with the increasing of the magnitude of load parameter. This decrease is between 44% and 53% for η=-3 to η=3. It is found that there is an increase in the critical loads with an increase of the shear moduli of foundation as same as for circumferential wave numbers. The critical loads fell between those of stainless steel and silicon nitride for a given functionally graded index. The higher circumferential wave numbers can be observed for the negatives values of load parameter. It is clear that for long and thin cylindrical shells, the minimum excursions of buckling loads occur. For these shells, the effect of magnitude and sign of the load parameter is small.

Table 1
Convergence and validation study (MPa) for combined-loaded FG cylindrical shells with k=0.5 and η=1

Source	L/R	R/h				
		5	10	50	100	500
Ref. [9]	5	866.203 (2)	149.022 (2)	2.734 (3)	0.468 (4)	0.008 (6)
Present		860.747 (2)	148.841 (2)	2.734 (3)	0.468 (4)	0.008 (6)
Ref. [9]	10	602.847 (1)	95.575 (2)	1.522 (2)	0.241 (3)	0.004 (4)
Present		602.482 (1)	95.418 (2)	1.522 (2)	0.241 (3)	0.004 (4)
Ref. [9]	20	214.635 (1)	38.720 (1)	0.778 (2)	0.117 (2)	0.002 (3)
Present		214.319 (1)	38.710 (1)	0.778 (2)	0.117 (2)	0.002 (3)

Table 2
Variations of critical loads against load interaction parameter and shear moduli of foundation with k=0.5, L/R=3, R/h=10, $k_w=10^5$ N/m^3

Load interaction	Shear moduli of foundation, k_p (N/m^3)				
parameter, ¦	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
-3	501.379 (3)	517.293 (3)	676.430 (3)	1911.696 (4)	12183.202 (7)
-2	420.603 (3)	433.953 (3)	567.452 (3)	1902.444 (3)	11897.766 (7)
-1	362.243 (3)	373.740 (3)	488.716 (3)	1630.362 (4)	11536.404 (6)
1	283.554 (3)	292.554 (3)	382.554 (3)	1282.554 (3)	10282.554 (3)
2	255.775 (3)	263.892 (3)	345.075 (3)	1140.323 (2)	8546.715 (2)
3	232.951 (3)	240.345 (3)	314.284 (3)	968.783 (2)	6725.073 (1)

Table 3
Variations of critical loads against load interaction parameter and functionally graded index with k=0.5, L/R=3, R/h=10, $k_w=10^5$ N/m^3, $k_p=10^7$ N/m^3

Load interaction		Functionally graded index, k			
parameter, ¦	SUS304	0.5	1	5	Si_3N_4
-3	1759.223 (5)	1911.696 (4)	1877.946 (4)	1829.323 (4)	2002.626 (4)
-2	1628.545 (4)	1759.856 (4)	1728.787 (4)	1684.026 (4)	1843.564 (4)
-1	1508.713 (4)	1630.362 (4)	1601.579 (4)	1560.112 (4)	1695.597 (3)
1	1211.011 (3)	1282.554 (3)	1265.539 (3)	1240.133 (3)	1327.269 (3)
2	1056.923 (2)	1140.323 (2)	1119.845 (2)	1082.576 (2)	1185.842 (2)
3	897.929 (2)	968.782 (2)	951.385 (2)	919.723 (2)	1007.455 (2)

4. CONCLUSIONS

This paper presents the effect of load interaction parameter on buckling of FG cylindrical shells under combined loading surrounded by an elastic medium. Critical buckling loads are obtained based on the first order shear deformation theory. Numerical results demonstrate that the sign and magnitude of load interaction parameter plays a major role on the critical loads for combined-loaded FG cylindrical shells.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by a Research Grant from Sama Organization (affiliated with Islamic Azad University), Arak Branch.

REFERENCE

1. Forrestal M.J. and Herrmann G. Buckling of a long cylindrical shell surrounded by an elastic medium. International Journal of Solid and Structures, vol. 1, pp. 297-309, 1965.
2. Ng T. Y. and Lam K. Y. Effects of elastic foundation on the dynamic stability of cylindrical shells. Structural Engineering and Mechanics, vol. 8, no. 2, pp. 193-205, 1999.
3. Fok S.L. Analysis of the buckling of long cylindrical shells embedded in an elastic medium using the energy method. Journal of Strain Analysis and Engineering Design, vol. 37, no. 5, pp. 375-383, 2002.
4. Shen H.-S. Post-buckling of internal-pressure-loaded laminated cylindrical shells surrounded by an elastic medium. Journal of Strain Analysis and Engineering Design, vol. 44, pp. 439-458, 2009.
5. Sheng G. and Wang X. Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium. Journal of Reinforced Plastics and Composites, vol. 27, pp. 117-134, 2008.
6. Shen H.-Sh. Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 51, pp. 372-383, 2009.
7. Shen H.-Sh., Yang J. and Kitipornchai S. Postbuckling of internal pressure loaded FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 29, pp. 448-460, 2010.
8. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells, Theory and Analysis, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
9. Khazaeinejad P., Najafizadeh M.M., Jenabi J. and Isvandzibaei M.R. On the buckling of functionally graded cylindrical shells under combined external pressure and axial compression, ASME Journal of Pressure Vessel and Technology, vol. 132, 2010.

Information about authors

Jenabi Jamal – Instructor, Sama Organization (affiliated with Islamic Azad University), Arak, Iran (98 861) 367 7477
E-mail jamal.jenabi@yahoo.com

Khazaeinejad Payam – Research Associate, Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran (98 861) 367 0084
E-mail khazaeinejad@asme.org

THE BUCKLING OF AXIALLY COMPRESSED NON-HOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS EMBEDDED IN AN ELASTIC MEDIUM

Jenabi J., Najafizadeh M.M.

An analytical solution is presented for the buckling problem of non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium subjected to axial compression. To model the elastic foundation, the Winkler and Pasternak foundations are used. The elastic foundation reacts in compression as well as in tension. The analysis is based on the first order shear deformation theory including the shear correction factor with the nonlinear strain-displacement relations. The shell properties vary continuously through the thickness direction. Suitable displacement functions that identically satisfy the boundary conditions and stability equations are employed to determine the buckling loads. Numerical results reveal that the non-homogeneity parameter and coefficients of elastic foundations significantly affect the critical buckling loads of non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium.

1. INTRODUCTION

The shells with various material properties are frequently analyzed in order to economize on the amount of material used, to lighten of the shells, and to increase the strength of shells. It is known that by carefully choosing this parameter, a significant increase in stiffness, buckling and vibration capacities of the shell may be obtained. The buckling analysis of cylindrical shells on elastic foundation or embedded in an elastic medium subjected to mechanical and thermal loads have been presented by many researchers. One of the first researches on the stability of cylindrical shells in an elastic medium is presented by Forrestal and Herrmann [1] that have derived the stability equations of long, thin, and circular cylindrical shells surrounded by an elastic medium. Fok [2] has used the energy method together with a Rayleigh-Ritz trial function for buckling analysis of a long cylindrical shell, embedded in an elastic material and loaded by a far-field hydrostatic pressure. Shen [3] has studied the post-buckling response of an anisotropic laminated cylindrical shell of finite length embedded in a large outer elastic medium modelled as a tensionless Pasternak foundation reacting in compression only and subjected to internal pressure in thermal environments. Sheng and Wang [4] have examined the effect of thermal load on vibration, buckling, and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium, based on the first-order shear deformation theory considering rotary inertia and the transverse shear strains. They have formulated the conventional elastic foundation of the Winkler-type that reacts in compression as well as in tension. Shen and his co-workers have employed a singular perturbation technique associated with a higher order shear deformation theory to study the postbuckling response of functionally graded cylindrical shells in thermal environments surrounded by an elastic medium subjected to axial compression [5] and internal pressure [6]. In their analysis, the surrounding elastic medium is modeled as a tensionless Pasternak foundation that reacts in compression only.

This paper presents an investigation on buckling of non-homogeneous cylindrical shells under axial compression embedded in an elastic medium consists of the Winkler and Pasternak foundations. The elastic foundation reacts in compression as well as in tension. The analysis is based on the first order shear deformation theory including the shear correction factor with the nonlinear strain-displacement relations. The properties of non-homogeneous shell vary continuously through the thickness direction. Critical axial loads are obtained for two types of non-homogeneous shells and for various values of non-homogeneity parameter, and elastic coefficients.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

A cylindrical shell of mean radius *R*, finite length *L*, and thickness *h* embedded in an elastic medium is considered (Fig. 1). The elastic medium consists of the Winkler and Pasternak foundations as follows

$$F(x,\theta) = K_w w(x,\theta) - K_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \tag{2.1}$$

where K_w is the vertical spring modulus of foundation and K_p indicate the shear moduli of foundation. For the case K_p=0, the foundation reduces to the Winkler-type.

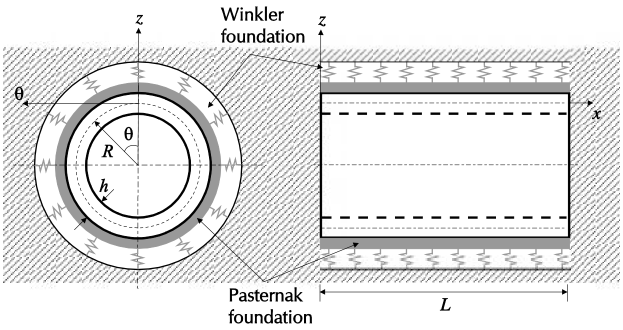


Fig.1. A cylindrical shell embedded in an elastic medium.

The proposed elastic medium reacts in compression as well as in tension. Denoting the shell displacement components along the x, θ, and z directions by respectively, u, v, and w, the following displacement field is assumed based on the first order shear deformation theory (FSDT) [7]:

$$u(x,\theta,z)=u_0+zu_1,\qquad v(x,\theta,z)=v_0+zv_1,\qquad w(x,\theta,z)=w_0 \tag{2.2}$$

where $u_0(x,\theta)$, $v_0(x,\theta)$, and $w_0(x,\theta)$ are the middle surface displacements, and $u_1(x,\theta)$ and $v_1(x,\theta)$ describe the rotations about the θ- and x-axes, respectively. The equilibrium equations of the shells embedded in an elastic medium can be derived using the total potential energy as follows:

$$\begin{gathered}R\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 N_\theta}{\partial\theta^2}=0\\ R^2\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 M_\theta}{\partial\theta^2}+2R\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}-RN_\theta+R^2\frac{\partial}{\partial x}\Big(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(N_\theta\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\Big)+F(x,\theta)=0\end{gathered} \tag{2.3}$$

where the stress and moment resultants of the shell are related to strains as follows [8]:

$$\begin{gathered}(N_x,M_x)=(A_{11},B_{11})\varepsilon_x^0+(B_{11},D_{11})\varepsilon_x^1+(A_{12},B_{12})\varepsilon_\theta^0+(B_{12},D_{12},)\varepsilon_\theta^1,\;\; Q_\theta=A_{22}\gamma_{\theta z}^0\\ (N_\theta,M_\theta)=(A_{12},B_{12})\varepsilon_x^0+(B_{12},D_{12})\varepsilon_x^1+(A_{11},B_{11})\varepsilon_\theta^0+(B_{11},D_{11})\varepsilon_\theta^1,\end{gathered} \tag{2.4}$$

where

$$\begin{gathered}(A_{11},B_{11},D_{11})=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{1-\nu^2}(1,z,z^2)\ \mathrm{d}z\\ (A_{12},B_{12},D_{12})=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\nu E}{1-\nu^2}(1,z,z^2)\ \mathrm{d}z,\;\; A_{22}=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{2+2\nu}\ \mathrm{d}z\end{gathered} \tag{2.5}$$

The shell properties are assumed to vary continuously through the thickness direction, that is [9]:

$$P(z)=P_0[1+\mu\phi(z)] \tag{2.6}$$

where P is the corresponding properties of non-homogeneous cylindrical shell which can be substituted by modulus of elasticity E and the Poisson's ratio ν, P_0 denotes a material property of homogeneous shell, μ is the non-homogeneity parameter satisfying $0\le\mu<1$, and $\phi(z)$ is continuous function of the variation of material property. The nonlinear strain-displacement relations for buckling problem of the shell structure are expressed as follows:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0\right) + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right)^2,$$
$$\varepsilon_x^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^1 = \frac{1}{R}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}, \quad \gamma_{x\theta}^1 = \frac{1}{R}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, \tag{2.7}$$
$$\gamma_{xz}^0 = u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \gamma_{\theta z}^0 = v_1 + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}, \quad \gamma_{x\theta}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)$$

If we assume that the equilibrium state of a cylindrical shell under mechanical loads is defined in terms of displacement components u^0, v^0, and w^0, the displacement components of a neighboring stable state differ by u^1, v^1, and w^1 with respect to the equilibrium position. Thus, the total displacements of a neighboring state are [8]

$$u = u^0 + u^1, \qquad v = v^0 + v^1, \qquad w = w^0 + w^1 \tag{2.8}$$

In similar way, the resultants of a neighboring state may be related to the equilibrium state according to the following relations:

$$(N_x, M_x) = (N_x^0, M_x^0) + (N_x^1, M_x^1), \ \ (N_\theta, M_\theta) = (N_\theta^0, M_\theta^0) + (N_\theta^1, M_\theta^1), \ \ Q_\theta = Q_\theta^0 + Q_\theta^1 \tag{2.9}$$

where N_x^0, N_θ^0 and $N_{x\theta}^0$ are the prebuckling mechanical forces that describe the linear parts of the force increments corresponding to u^1, v^1, and w^1. For axial compression, the pre-buckling forces should be set as $N_x^0 = -\tilde{P}/2\pi R$, and the others are equal to zero. The stability equations may be obtained by substituting Eqs. (2.8) and (2.9) into equilibrium equations (2.3) as follows:

$$\begin{aligned} &R\frac{\partial^2 N_x^1}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 N_\theta^1}{\partial \theta^2} = 0 \\ &R^2\frac{\partial^2 M_x^1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_\theta^1}{\partial \theta^2} + 2R\frac{\partial Q_\theta^1}{\partial \theta} - RN_\theta^1 - \frac{PR}{2\pi}\frac{\partial^2 w_0^1}{\partial x^2} + F(x,\theta) = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Note that the superscript 1 and 0 describe the states of stability and equilibrium conditions, respectively. The terms in the stability equations with superscript 0 satisfy the equilibrium condition and therefore drop out of the equations. Also, the nonlinear terms with superscript 1 are ignored because they are small compared to the linear terms. To solve these set of equations for simply-supported boundary ends, the following approximate solutions which satisfy the resulting equations and the simply-supported boundary conditions are assumed

$$\begin{aligned} &(u^1, u_1^1) = \sum_m \sum_n (U_{mn}, X_{mn}) \cos m_1 x \sin n\theta \\ &(v^1, v_1^1) = \sum_m \sum_n (V_{mn}, Y_{mn}) \sin m_1 x \cos n\theta \\ &w^1 = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin m_1 x \sin n\theta \end{aligned} \tag{2.11}$$

Here $m_1 = m\pi / L$, m is the half-wave number in the x-direction and n is the half-wave number in the θ-direction. Substituting the expressions for displacements from Eq. (2.11) into the Eq. (2.10), leads to a sets of differential equations with respect the unknown constants U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, and Y_{mn}. Solving these equations gives a function for buckling pressure dependent on the half-wave numbers, foundation stiffnesses, non-homogeneity parameter, and geometry parameters of the non-homogeneous cylindrical shell.

3. RESULTS AND DISCUSSION

The critical axial loads are presented for the axially-compressed non-homogeneous circular cylindrical shells having simply-supported boundary conditions embedded in an Winker and Pasternak foundations. The stainless steel is used as homogeneous material with E_0 =207.788 GPa and ν_0 =0.3. First, comparison studies are given in Table 1 to check the validity of the present results. The numbers in brackets indicate the longitudinal and circumferential wave numbers *m* and *n*, resepectively. A good agreement has been obtained between the present results and the other works. In this paper, a shear correction factor equal to 5/6 is considered [7]. Tables 2 and 3 show the influence of non-homogeneity parameter and coefficient of Winkler foundation on the critical axial loads for two types of non-homogeneity shell referred as $\phi(z) = z / h$ for Type I and $\phi(z) = (z / h)^2$ for Type II. Tables 4 and 5 list the same analysis for coefficient of Pasternak foundation. For all the cases we set *L*/*R*=2, *R*/*h*=10, *h*=0.001. The half-wave numbers are given as (*m*,*n*)=(4,1).

Table 1
Validation study (MN) for aluminum cylindrical shells under axial compression

Source	*L*/*R*	*R*/*h*				
		5	10	20	30	100
Ref. [8]	0.5	0.294 (1,1)	0.258 (1,1)	0.293 (1,1)	0.289 (2,1)	0.266 (3,1)
Present		0.282 (1,1)	0.256 (1,1)	0.293 (1,1)	0.287 (2,1)	0.266 (3,1)
Ref. [8]	1	0.271 (1,1)	0.258 (2,1)	0.270 (3,1)	0.264 (3,1)	0.266 (6,1)
Present		0.269 (1,1)	0.256 (2,1)	0.269 (3,1)	0.263 (3,1)	0.266 (6,1)
Ref. [8]	5	0.247 (7,1)	0.256 (9,1)	0.261 (13,1)	0.263 (16,1)	0.265 (29,1)
Present		0.243 (7,1)	0.254 (9,1)	0.260 (13,1)	0.262 (16,1)	0.265 (29,1)

Table 2
Effect of non-homogeneity parameter on the critical axial loads for Type I non-homogeneous shells embedded in Winkler-type foundation

Non-homogeneity parameter, ¦	Vertical spring modulus of foundation, k_w (N/m^3)				
	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
0.0	0.759	0.759	0.759	0.759	0.759
0.6	0.788	0.788	0.788	0.788	0.788
0.9	0.793	0.793	0.793	0.793	0.793

Table 3
Effect of non-homogeneity parameter on the critical axial loads for Type II non-homogeneous shells embedded in Winkler-type foundation

Non-homogeneity parameter, ¦	Vertical spring modulus of foundation, k_w (N/m^3)				
	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
0.0	0.759	0.759	0.759	0.759	0.759
0.6	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821
0.9	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853

Table 4
Effect of non-homogeneity parameter on the critical axial loads for Type I non-homogeneous shells embedded in Pasternak-type foundation with k_w=10^5 (N/m^3)

Non-homogeneity parameter, ¦	Shear moduli of foundation, k_p (N/m^3)				
	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
0.0	0.760	0.766	0.824	1.404	7.202
0.3	0.777	0.783	0.841	1.420	7.218
0.6	0.788	0.794	0.852	1.432	7.230
0.9	0.794	0.799	0.857	1.437	7.235

Table 5
Effect of non-homogeneity parameter on the critical axial loads for Type II shells embedded in Pasternak-type foundation with k_w=10^5 (N/m^3)

Non-homogeneity parameter, ¦	Shear moduli of foundation, k_p (N/m^3)				
	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
0.0	0.760	0.766	0.824	1.404	7.202
0.3	0.790	0.796	0.854	1.434	7.232
0.6	0.822	0.827	0.885	1.465	7.263
0.9	0.853	0.859	0.917	1.497	7.295

The critical axial loads have not affected by variations of the coefficient of Winkler foundation. For variations of the non-homogeneity parameter from 0 to 0.9, the critical loads are increased about 4.5% for Type I and 12.4% for Type II. For Pasternak-type foundation, the critical loads are significantly increased with an increase in the coefficient of the Pasternak foundation.

4. CONCLUSIONS

The buckling analysis of non-homogeneous cylindrical shells under axial compression embedded in an elastic medium is studied. Critical axial loads are obtained based on the first order shear deformation theory. The results show that the shells produce higher axial buckling loads when the non-homogeneous function is of second order. The results also indicate that the use of Pasternak foundation have a significant effect on the axial buckling loads.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by a Research Grant from Sama Organization (affiliated with Islamic Azad University), Arak Branch, Arak, Iran.

REFERENCE

1. Forrestal M.J. and Herrmann G. Buckling of a long cylindrical shell surrounded by an elastic medium. International Journal of Solid and Structures, vol. 1, pp. 297-309, 1965.
2. Fok S.L. Analysis of the buckling of long cylindrical shells embedded in an elastic medium using the energy method. Journal of Strain Analysis and Engineering Design, vol. 37, no. 5, pp. 375-383, 2002.
3. Shen H.-S. Post-buckling of internal-pressure-loaded laminated cylindrical shells surrounded by an elastic medium. Journal of Strain Analysis and Engineering Design, vol. 44, pp. 439-458, 2009.
4. Sheng G. and Wang X. Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium. Journal of Reinforced Plastics and Composites, vol. 27, pp. 117-134, 2008.
5. Shen H.-Sh. Postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 51, pp. 372-383, 2009.
6. Shen H.-Sh., Yang J. and Kitipornchai S. Postbuckling of internal pressure loaded FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 29, pp. 448-460, 2010.
7. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells, Theory and Analysis, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
8. Khazaeinejad P. and Najafizadeh M.M. Mechanical buckling of cylindrical shells with varying material properties. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 224, 2010.
9. Sofiyev A.H., Yücel K., Avcar M. and Zerin Z., The dynamic stability of orthotropic cylindrical shells with non-homogeneous material properties under axial compressive load varying as a parabolic function of time. Journal of Reinforced Plastics and Composites, vol. 25, no. 18, pp. 1877-1886, 2006.

Information about authors

Jenabi Jamal – Instructor, Sama Organization (affiliated with Islamic Azad University), Arak, Iran (98 861) 367 7477
E-mail jamal.jenabi@yahoo.com

Najafizadeh Mohammad Mahdi – Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran (98 861) 367 0084
E-mail m-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

FINITE DEFORMATIONS OF ACCRETED ELASTIC GLOBE

Lychev S.A.

The centrally symmetric problem for an accreted elastic globe is considered. The deformations are supposed to be finite and the material is to be incompressible. The constitutive equations are formulated with respect to complete distortion tensor which may be representing as the composition of initial distortion and compatible deformation gradient. The initial distortion induces the linear connection on the material manifold which becomes a flat space of affine connectivity with nontrivial torsion.

Deformation processes in a solid whose composition, varies in a continuous manner owing to accretion—the addition of new material to the body outer surface— were studied in [1,2]. The solid mechanics problems arising in the modeling of such processes are completely new and constitute a separate field of research, known as mechanics of accreted solids. Its importance is due to the fact that the manufacturing of virtually all objects considered in solid mechanics involves accretion. In the presrent paper we consider the illustrative nonlinear problem for centrally symmetric finite deformation of an accreted elastic globe. The material is supposed to be incompressible. Due to relative simplicity of the problem one can utilize analytical solutions and provide an effective qualitative analysis of the stress and strain state of a growing elastic globe.

In order to identify the points of the body we introduce a smooth three-dimensional material manifold $\mathfrak{M}$ [3,4]. We assume that $\mathfrak{M}$ is a fibre bundle of a smooth manifold [5]. The material point $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ is defined by three coordinates specified in local map U which contains a neighborhood of $\mathfrak{p}$. The set of three coordinates denote gothic symbol $\mathfrak{X}$ that means an ordered triple of numbers $\left\{\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2; \mathfrak{X}^3\right\}$. The last element of the triple $\mathfrak{X}^3$ is highlighted with a semicolon in notation and determines the coordinates of the base $\mathfrak{N}$. The first two elements $\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^1$ are the coordinates of the fibre. As each fibre is uniquely determined by the value $\mathfrak{X}^3$ the fibres will be denoted by $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$.

Here the material manifold $\mathfrak{M}$ may be represented in $\mathbb{R}^3$ as an open ball with pricked center and radius $\mathfrak{R}$ that admits fibration into concentric spheres $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$. Each sphere is the fibre and the open interval $\mathfrak{B} = (0, \mathfrak{R})$ is the base of fibration [5]. Last element of material triple $\mathfrak{X}^3 \in \mathfrak{B}$ represents the coordinate on the base and a pair $\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2$ is the coordinates of the material point on the fibre. We assume the incompressibility of the material that permit the usage of Rivlin-Ericsen universal solutions for individual spherical fibre [6,7].

Let $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_{\cdot\cdot}$, $\mathbf{e}_{-}$ are the elements of physical basis in spherical coordinates. Let every fiber holds natural configuration that is the sphere immersed in $\mathbb{R}^3$. The union of this fibers is not a configuration because it is not a connected set. But after appropriate individual deformation of each fiber this union can be transformed to the globe. One can obtain the configuration like mentioned but this configuration is not natural (it is stressed). The corresponding distortion can be defined by the following tensor field

$$\mathbf{K} = \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{r^2}\ \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{r}{(r^3 - \sim)^{1/3}}\left(\mathbf{e}_{\cdot\cdot} \otimes \mathbf{e}_{\cdot\cdot} + \mathbf{e}_{-} \otimes \mathbf{e}_{-}\right). \tag{1}$$

Here $r = r(\mathfrak{X}^3)$ is the spatial (radial) coordinate, $\sim\ = \sim(\mathfrak{X}^3)$ is the distortion parameter. One can treat the field $\mathbf{K}$ as a deformation gradient corresponding to the map $r = \sqrt[3]{r_0^3 + \sim}$ defined with respect to the individual fiber $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$, that can be smoothly transformed to natural spherical configuration by $r = r_0$.

Choose one of the possible stressed configurations as a reference configuration and denote it by κ_R.

The deformation of the reference configuration to the actual one κ is determined by isochoric diffeomorphism $\kappa_R \to \kappa$. Under the conditions of central symmetry this map belongs to the assemblage

$$R = \sqrt[3]{r^3 + A},$$

where A is the parameter of the assemblage. The corresponding deformation gradient is

$$\mathbf{F} = \frac{r^2}{(r^3 + A)^{2/3}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{(r^3 + A)^{1/3}}{r} \left(\mathbf{e}_{..} \otimes \mathbf{e}_{..} + \mathbf{e}_{-} \otimes \mathbf{e}_{-} \right).$$

Full deformation gradient $\mathbf{H}$ associated with individual fiber may be obtained as a composition of distortion $\mathbf{K}$ and deformation gradient $\mathbf{F}$ determined in consistency of three dimensional accreted solid, i.e.

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F} = \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{(r^3 + A)^{1/3}}{(r^3 - \sim)^{1/3}} \left(\mathbf{e}_{..} \otimes \mathbf{e}_{..} + \mathbf{e}_{-} \otimes \mathbf{e}_{-} \right).$$

Corresponding Cauchy-Green strain measure is

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = \frac{(r^3 - \sim)^{4/3}}{(r^3 + A)^{4/3}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{(r^3 + A)^{2/3}}{(r^3 - \sim)^{2/3}} \left(\mathbf{e}_{..} \otimes \mathbf{e}_{..} + \mathbf{e}_{-} \otimes \mathbf{e}_{-} \right).$$

One can obtain the invariants of above mentioned measure by the formulas

$$I_1\left(\mathbf{G}\right) = \frac{(r^3 - \sim)^{\frac{4}{3}}}{(r^3 + A)^{\frac{4}{3}}} + 2\frac{(r^3 + A)^{\frac{2}{3}}}{(r^3 - \sim)^{\frac{2}{3}}}, \quad I_2(\mathbf{G}) = \frac{(r^3 + A)^{4/3}}{(r^3 - \sim)^{4/3}} + 2\frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}}.$$

The inverse measure may be calculated as follows

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{(r^3 + A)^{4/3}}{(r^3 - \sim)^{4/3}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}} \left(\mathbf{e}_{..} \otimes \mathbf{e}_{..} + \mathbf{e}_{-} \otimes \mathbf{e}_{-} \right).$$

Consider the equations of equilibrium with the assumption that mass force are absent. Then

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0,$$

where $\mathbf{T}$ is the Cauchy stress tensor, which may be diadic decomposed as:

$$\mathbf{T} = T_{RR} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + T_{--} \left(\mathbf{e}_{-} \otimes \mathbf{e}_{-} + \mathbf{e}_{..} \otimes \mathbf{e}_{..} \right).$$

Suppose that the boundary conditions are formulated in the form:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma_1} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Gamma_2} = 0. \tag{2}$$

Here $\mathbf{B}$ is the pressure on the inner surface of the globe Γ_1, Γ_2 is the outer surface which is the surface of accretion. Assume that this surface is free of stress. The extra condition determines the tension of accreting fibers f, i.e.

$$\mathbf{e}_{-} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{-} |_{\Gamma_2} = T_{--} |_{\Gamma_2} = f. \tag{3}$$

It is important to note that this extra condition is not the boundary condition for the problem stated for the accreted solid. It is the additional condition that permit to determine the distortion $\mathbf{K}$ (1) as the parameter

$\sim(R) = \sim(R(r(\mathfrak{X})))$ of the boundary value problem.

The equilibrium equations and boundary conditions under the assumption of central symmetry in spherical coordinates are

$$\frac{\partial T_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R}\left(T_{RR} - T_{-}\right) = 0, \quad T_{RR}\,|_{r=r_0} = B, \quad T_{RR}\,|_{r=r_1} = 0,$$

where $r_0 = \sqrt[3]{R_0^3 - A}$, $r_1 = \sqrt[3]{R_1^3 - A}$, R_0 is an inner and R_1 is an outer radius of the globe in actual configuration κ.

The Cauchy stress tensor for the incompressible isotropic hyperelastic material may be introduced by relation [6]:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{G} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{G}^{-1},$$

where $p = p(R)$ is the pressure that can be determine from the equilibrium equation and W is the hyperelastic potential (elastic energy). If the configuration κ_R is utilized as reference configuration then the hyperelastic potential should be written as [8]:

$$W = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\kappa_C}\left(\mathbf{H}, \mathfrak{X}\right) = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\kappa_C}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}, \mathfrak{X}\right).$$

Here W_{κ_C} is a potential gauged locally for every individual fiber with respect to natural configuration of this fiber. By virtue of incompressibility of the considered material there is $J_{\mathbf{K}} = 1$. Therefore

$$W = W_{\kappa_C}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}, \mathfrak{X}\right). \tag{4}$$

The substitution of $\mathbf{T}$ from (2_2) into the equilibrium equation gives the equation for pressure p:

$$-\nabla p + 2\left(\mathbf{G}\cdot\nabla\frac{\partial W}{\partial I_1} - \mathbf{G}^{-1}\cdot\nabla\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{\partial W}{\partial I_1}\nabla\cdot\mathbf{G} - \frac{\partial W}{\partial I_2}\nabla\cdot\mathbf{G}^{-1}\right) = 0.$$

Taking into account that in central symmetrical case $\nabla p = \mathbf{e}_R dp/dR$, arrive at the equation for $p(R)$:

$$-\frac{dp}{dR} + 2\left\{\frac{(r^3 - \sim)^{\frac{4}{3}}}{(r^3 + A)^{\frac{4}{3}}}\frac{d}{dR}\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{(r^3 + A)^{\frac{4}{3}}}{(r^3 - \sim)^{\frac{4}{3}}}\frac{d}{dR}\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_1}\left[\frac{d}{dR}\frac{(r^3 - \sim)^{4/3}}{(r^3 + A)^{4/3}} + \frac{2}{R}\left(\frac{(r^3 - \sim)^{4/3}}{(r^3 + A)^{4/3}} - \frac{(r^3 + A)^{2/3}}{(r^3 - \sim)^{2/3}}\right)\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial W}{\partial I_2}\left[\frac{d}{dR}\frac{(r^3 + A)^{4/3}}{(r^3 - \sim)^{4/3}} + \frac{2}{R}\left(\frac{(r^3 + A)^{4/3}}{(r^3 - \sim)^{4/3}} - \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}}\right)\right]\right\} = 0$$

Integral of this equation is obvious

$$p(R') = p_0 + 2\left[\frac{(r^3 - \sim)^{4/3}}{(r^3 + A)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{(r^3 + A)^{4/3}}{(r^3 - \sim)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right] - 4\int_{R_0}^{R'}\left\{\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(\frac{(r^3 + A)^{4/3}}{(r^3 - \sim)^{4/3}} - \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\frac{(r^3 - \sim)^{4/3}}{(r^3 + A)^{4/3}} - \frac{(r^3 + A)^{2/3}}{(r^3 - \sim)^{2/3}}\right)\right\}\frac{dR}{R}.$$

Here the upper limit of the integration $R' \in (R_0, R_1)$ is the radial coordinate that determines the position of spherical fibre in actual configuration ù and p_0 is the integrating constant corresponding to hydrostatic pressure. By changing variables $R \mapsto r$ the resulting expression can be transform to the form

$$p(r') = 2\left[\frac{(r^3 - \sim)^{4/3}}{(r^3 + A)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{(r^3 + A)^{4/3}}{(r^3 - \sim)^{4/3}}\frac{\partial W}{\partial I_2}\right] -$$

$$-4\int_{r_0}^{r'} \frac{r^2(A+\sim)(2r^3 + A - \sim)}{(r^3 - \sim)^{4/3}(r^3 + A)^{5/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)dr + p_0$$

The upper limit of integration $r' \in (r_0, r_1)$ determines the position of spherical fiber in reference configuration κ_R. Thereafter

$$T_{RR}(r') = -p_0 + 4\int_{r_0}^{r'} \frac{r^2(A+\sim)(2r^3 + A - \sim)}{(r^3 - \sim)^{4/3}(r^3 + A)^{5/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)dr$$

From the boundary condition $T_{RR}\,|_{r=r_1} = 0$ it follows that

$$T_{RR}(r') = 4\int_{r_1}^{r'} \frac{r^2(A+\sim)(2r^3 + A - \sim)}{(r^3 - \sim)^{4/3}(r^3 + A)^{5/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3 - \sim)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)dr$$

Circumferential stresses $T—$ may be obtained from the equilibrium equation and expressed in terms of T_{RR} as follows

$$T— = T_{RR} + \frac{R}{2}\frac{\partial T_{RR}}{\partial R}.$$

This stresses should be equal to prescribed value of tension f (3) in fibre that is on the current boundary

$$T—\big|_{\Gamma_2} = T—\big|_{r=r_1} = T_{RR}\big|_{r=r_1} + \frac{\sqrt[3]{r_1^3 + A}}{2}\frac{\partial T_{RR}}{\partial R}\bigg|_{r=r_1} =$$

$$= 2\left[\frac{(A+\sim)(2r_1^3 + A - \sim)}{(r_1^3 - \sim)^{4/3}(r_1^3 + A)^{2/3}}\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r_1^3 - \sim)^{2/3}}{(r_1^3 + A)^{2/3}}\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)\right]\bigg|_{r=r_1} = f.$$

This permit to find the following dependence $\sim = \sim(r_1, A, f)$. The value of parameter A may be calculated from the second boundary condition (2). The jbtained relation may be formulated in the terms of stress rate $\dot{T}_{RR}$. Indeed, so far as $T_{RR}\,|_{r=r_1} = 0$, then

$$\frac{R}{2}\frac{dT_{RR}}{dR}\bigg|_{r=r_1} = f.$$

Under the conditions of central symmetry $dR = Vdt$, where V is the rate of motion of accretion surface in material manifold (the velocity of accretion surface). Hence

$$\frac{dT_{RR}}{Vdt}\bigg|_{r=r_1} = \frac{2}{R}f,$$

or introduction of the notion $\mathcal{T}$ for the stress tensor on the material surface [9] which can be represent here as the following dyadic decomposition

$$\mathcal{T} = f\left(\mathbf{e}_{-}\otimes\mathbf{e}_{-}+\mathbf{e}_{\cdot\cdot}\otimes\mathbf{e}_{\cdot\cdot}\right)$$

and the notion $\mathbf{L}$ for the curvature tensor of mentioned material surface, that is the sphere with radius R, arrive at the equation "in terms of velocities":

$$\dot{T}_{RR}\Big|_{r=r_1} = \frac{2V}{R} f = V\left(\mathcal{T} : \mathbf{L}\right).$$

Tensor field of distortion (1) induces the linear connection on material manifold that becomes flat space with affine connectivity with nontrivial torsion [5]. The nonzero components of corresponding torsion tensor are

$$\mathfrak{T}_{\cdot r\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = \mathfrak{T}_{\cdot r -}^{-} = \frac{1}{3r^3-3\sim}\frac{\partial\sim\left(r\right)}{\partial r}, \qquad \mathfrak{T}_{\cdot\cdot\, r}^{\cdot\cdot} = \mathfrak{T}_{-\, r}^{-} = -\frac{1}{3r^3-3\sim}\frac{\partial\sim(r)}{\partial r}. \tag{5}$$

It should be noted that the torsion tensor (5) is equal to zero in the case $\sim = \mathrm{C}onst$. This situation corresponds to consensual accretion that generates the solid indistinguishable from the instantly created solid. Otherwise if $\sim = \sim(\mathfrak{X}^3)$ then the solid obtained in the result of accretion process lacks natural configuration that can be immersed in Euclidian three dimensional space $\mathbb{E}^3$. It means that there are no smooth deformations that release the solid from stresses.

The research was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (under grants Nos. 08-01-00553-a, 09-08-01194-a) and by the Department of Energetics, Mechanical Engineering, Mechanics and Control Processes of the Russian Academy of Sciences (Program No. 13 OE).

REFERENCE

1. N. Kh. Aruyunyan and A. V. Manzhirov, Contact Problems in the Theory of Creep [in Russian], NAN RA Publ., Erevan, 1999. 320 p.
2. N. Kh. Aruyunyan, A. V. Manzhirov, and V. E. Naumov, Contact Problems in Mechanics of Growing Solids [in Russian], Nauka Publ., Moscow, 1991. 175 p.
3. W. Noll, "Materially uniform simple bodies with inhomogeneities," Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, No. 2, pp. 1-32.
4. C. C. Wang, On the geometric structure of simple bodies, or mathematical foundations for the theory of continuous distributions of dislocations // Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, No. 27, pp. 33-94.
5. Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds and Physics. Part 1. Basics, North-Holland, Amsterdam, 1982. 649 p.
6. A. I. Lurie, Nonlinear Theory of Elasticity, North-Holland, Amsterdam, 1990. 617 p.
7. C. Wang and C. Truesdell, Introduction to Rational Elasticit, Noordhoff Publ., Amsterdam, 1973. 556 p.
8. G. A. Maugin, Material Inhomogeneities in Elasticity, Chapman and Hall, London, 1993. 294 p.
9. M. E. Gurtin and A. I. Murdoch, "A continuum theory of elastic material surfaces," Arch. Rational Mech. Anal., 1975, Vol. 57, pp. 291-323.

Information about the author

Lychev Sergey Alexandrovich – Ph.D., Senior Research Scientist of the Laboratory for Modeling in Solid Mechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Vernadsky Ave 101 Bldg 1, Moscow, 119526, Russia, Tel.: +7 495 4343456. E-mail lychev@ipmnet.ru

HIGH-TEMPERATURE CREEP OF ROD ELEMENTS AND ESTIMATIONS OF ITS INTENSITY

Lyubashevskaya I.V.

Processes of creep in the conditions of high-temperature modes of stress are considered. As the defining equations parities of a power variant of the theory of creep in which frameworks a measure of intensity of process is capacity of dissipated energy at irreversible deformation of the creep, which size at the steady state inversely proportional time before destruction of an element of a design are used. It is experimentally shown that for a non-uniform stress state average on volume capacity of dispersion well characterizes intensity of process of creep and duration before destruction of an element of a design as a whole. Using analogy between behavior of typical design elements in problems of ideally plastic environment and high-temperature creep, on a number of examples possibility of reception of estimations of intensity of creep process of design elements is illustrated at the set external thermo-power parameters.

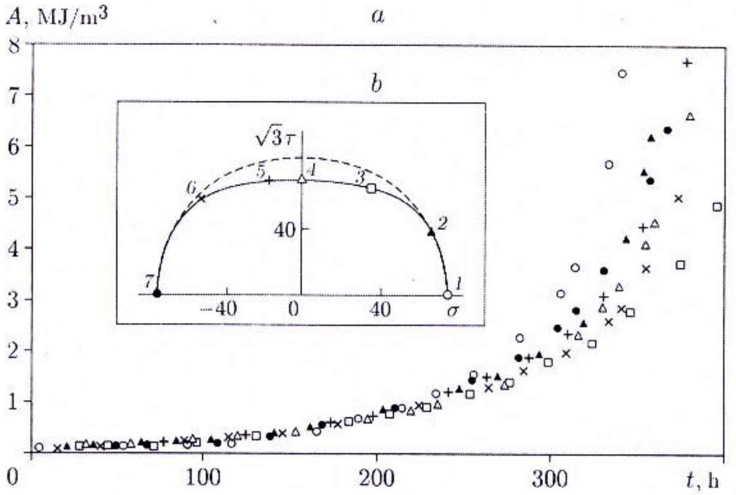
Comparison of behavior of elements of designs is offered to be spent, comparing among themselves the external generalized forces with some weight factors (equivalence factors), reducing these forces to equivalent size of the same dimension for various kinds of stress. The top and bottom estimations of factors of equivalence are received at the set size of external loading. The received results prove to be true conformity to experimental data.

1. Introduction. The rates of creep process of structural materials are usually estimated in the form of dependences of the creep strain rate η on the stress σ, temperature T, and some structural parameters q_i that take into account the hardening–softening characteristics of the material. The energy version of creep theory uses the dependence of the energy dissipation power on similar quantities $W = f(\sigma, T, q_i)$. The energy variant usually offers a satisfactory description of moderate-duration processes accompanied by viscous rupture (the process duration is normally tens or hundreds of hours).

Hypotheses used to construct the energy variant of the creep and long-strength theory were described in [1–3]: the process intensity is estimated by the power of energy dissipated during irreversible creep deformation $W = \sigma_{ij}\eta_{ij}$ (σ_{ij} are the components of the stress tensor and $\eta_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^c$ are the components of the creep strain rate tensor), and the measure of material damage is the value of energy dissipated during irreversible creep deformation $A(t) = \int_0^t \sigma_{ij}\eta_{ij}dt$. It was shown that the time to rupture t^* of a structurally stable material in the case of creep at a constant temperature is inversely proportional to the energy dissipation power W at the initial (steady) stage of creep:

$$Wt^* = \text{const}. \qquad (1.1)$$

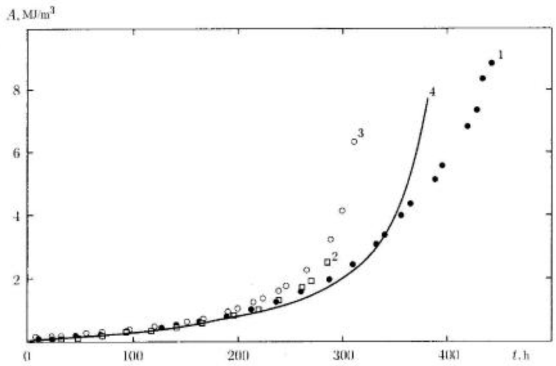
The validity of Eq. (1.1) was checked experimentally for several structural alloys in uniaxial and plane stress states. In the case of spatial loading, the energy dissipation power was determined by the formula $W_0 = \sigma_e\eta_e$, where σ_e and η_e are the equivalent stress and strain rate of creep. By using the Mises criterion and the associated flow for isotropic materials, we can replace the equivalent stress and strain rate by the intensity of the corresponding tensors: $\sigma_i = ((3/2)\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij})^{1/2}$, $\eta_i = ((2/3)\bar{\eta}_{ij}\bar{\eta}_{ij})^{1/2}$. Here, $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$ are the components of the stress tensor deviator, $\sigma_0 = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3$, and $\bar{\eta}_{ij} = \eta_{ij}$ are the components of the strain rate tensor (under the condition of material incompressibility). Within the framework of the energy approach, the quantities σ_e and η_e can be considered as the generalized stresses and generalized strain rates of creep, respectively, and their product can be considered as the power of energy dissipation in a unit volume of the body. If a uniform stress–strain state arises in the body under the action of external loads, the energy dissipation power W and the amount of accumulated damages $A(t)$ in each elementary volume of the body are equal to the average values over the body volume. Therefore, if the energy losses of nonmechanical nature are ignored, the corresponding powers of internal ($W = \sigma_e\eta_e$) and external ($W = Q\dot{q}$) generalized forces are equal to each other. In practice, external loads can be replaced by certain generalized forces Q and external displacements q or their rates $\dot{q}$. It seems reasonable to use these quantities to estimate the time to rupture of various structural elements.



Marking	Conditions
Points 1 in Fig.1	σ =78,5 [MPa]
Points 2 in Fig.1	σ =69,7[MPa], τ =20,6 [MPa]
Points 3 in Fig.1	σ =36,3[MPa], τ =36,3 [MPa]
Points 4 in Fig.1	τ =38 [MPa]
Points 5 in Fig.1	σ =-16,7[MPa], τ =37,8[MPa]
Points 6 in Fig.1	σ =-54,9[MPa], τ =31,9 [MPa]
Points 7 in Fig.1	σ =-78,5 [MPa]

Fig. 1 Table 1.

Figure 1a shows the results of experiments obtained for tubular samples (outer diameter D=20 mm and inner diameter d=18 mm) made of the D16T alloy at a temperature T=250°C and different combinations of tension (compression) with twisting, which are indicated in Fig. 1b and ensure an identical specific power of energy dissipation $W \approx 2,7 \cdot 10^{-3}$MJ/(m^{3}h) [2] ($\sigma$ and τ are the axial and tangential stresses, respectively). The specific dissipated energy of the body was calculated by the formula $A(t) = (P\Delta l(t) + M\varphi(t))/V$, where P is the axial load and $\Delta l(t)$ is the sample elongation. Experiments on twisting of solid cylindrical samples at constant twisting moment M are analyzed also. The value of energy dissipated in a unit volume of the body $A(t) = M\varphi(t)/V$ was calculated during the experiment over a given working length l on the basis of the twisting angle $\varphi(t)$. Using the initial parts of the diagrams $A(t)$, we calculated the specific power of energy dissipation W. The product of this quantity and the time to rupture t^* had the same average value $Wt^* = 1$MJ/m^3 for both thin-walled and solid samples.



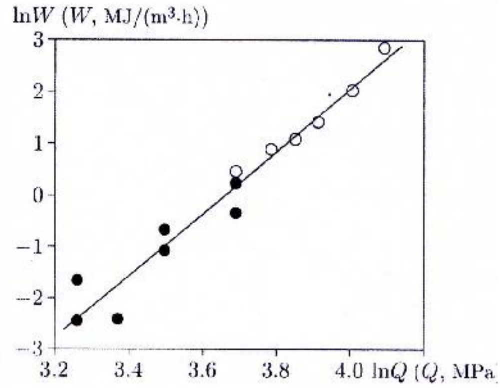


Figure 2. Figure 3.

Figure 2 shows comparison result of experiment of Fig. 1 (points 5) (solid curve 4 in Fig. 2) with results of twisting of solid cylindrical sample (diameter D=20 mm) at constant twisting moment M =77,2 [Nm] (points 1 in Fig. 2), bending of rectangular beam (h=20 mm, b=10 mm) at constant bending moment M =77,5 [Nm] (points 2 in Fig. 2) and action of combination of twisting and tension on thick-walled cylindrical sample (outer diameter D=20 mm and inner diameter d=10 mm) at stretching load P=16,2 [N] and constant twisting moment M =43,4 [Nm] (points 3 in Fig. 2) in term of the volume-average energy of dissipation.

It should be noted that the intensity of the creep process under shear for the D16T alloy is much greater than the intensity of the creep process under tension, if the measure of equivalence is taken to be σ_i (the dashed curve in Fig. 1b corresponds to $\sigma_i = \mathrm{const}$). Nevertheless, Eq. (1.1) is experimentally validated for both the uniform and nonuniform stress–strain states of a nonisotropic medium. The above-presented results of experiments confirm the consistency of the assumption that it is possible to compare the intensity of the process of high-temperature creep and time to rupture of single-type structural elements in terms of the volume-averaged powers of energy dissipation W. Yet, there arises a question whether it is possible to compare the strain-strength behavior of structural elements subjected to various external actions. Results of three series of experiments on high-temperature deformation of beam elements made of an isotropic material (St. 45 steel) at a temperature T = 725°C are given below: tension–compression of cylindrical rods, bending of beams with different profiles, and twisting of solid and thin-walled rods.

2. Comparative estimates of deformation of beam elements under tension and bending. Figure 3 shows the results of experiments on creep of samples under tension and compression at the steady stage of the process. In the case of tension (under the condition of material incompressibility $V = S_0 l_0 = Sl$), we have $dA = Pdl/V = PSdl/l = Q_1 dq_1$, where $Q_1 = P/S = \sigma$ is the generalized force and $dq_1 = d(\ln(l/l_0))$ is the generalized displacement. Approximating the creep process at the steady stage by the dependence

$$W = B\sigma^n, \tag{2.1}$$

we obtain $n = 6$ and $B_1 = 3\cdot 10^{-10}[\mathrm{MPa^{1\text{-}n}/h}]$.

Figure 4a shows the results of experiments on beam bending under creep conditions at the steady stage. In the case of bending under the action of a constant bending moment, we have $dA = Md\varphi/V = (M/S)(d\varphi/l_0) = Qdq$, where $Q = M/S[\mathrm{N\cdot m/m^2}]$ is the generalized force in bending of beams with four different profiles and $dq = d\varphi/l_0 = \kappa$ is the generalized displacement. In our experiments, the curvature κ was determined by the beam deflection $\Delta(t)$ at the middle point over the base length l_0 = 100 mm by the formula $\kappa = 8\Delta/l_0^2$. Using the same approximation Eq. (2.1) at the stage of steady creep as in the tension–compression experiments, we obtain $n = 6$ and the values of B listed in Table 2 for bent beam elements of four types (see Fig. 4): 1) beam with a height h =10 mm and width b = 20 mm (points 2 in Fig. 4); 2) beam with a height h = 20 mm and width b =10mm (points 3 in Fig. 4); 3) T-beam with a compressed peak (points 4 in Fig. 4); 4) T-beam with a stretched peak (points 5 in Fig. 4). The height of the T-beams was h = 20 mm, the height of the peak was $h_1 = 4 \div 6$ mm, the width o f the peak was b_1 = 20 mm, and the width of the peak protruding was b_2 = 6 mm.

In the case of tension and bending of beam elements made of this material and having different profiles, Eq. (2.1) yields identical values of the power index n, but different values of the coefficient B and generalized force Q. Comparisons of the processes in terms of the external generalized forces Q (even for one-dimensional cases of loading) are invalid. These generalized forces can be converted to a certain equivalent generalized force Q_e, using two approaches: 1) normalization to the quantity Q_0, which ensures the same specific power of energy dissipation for each element, i.e., conversion of all generalized forces Q corresponding to different types of experiments to a dimensionless generalized force $\tilde{Q}_e = Q/Q_0$;2) introduction of equivalence coefficients λ, which convert the generalized forces for different types of loading to one equivalent quantity Q_e characterizing the behavior of some beam element taken as a reference element.

The first approach is based on the assumption that it is possible to compare the creep processes of arbitrary beam elements in terms of their specific powers of energy dissipation. In the considered range of powers, we choose some value W_0 as a reference value, for instance, $W_0 = 1[\mathrm{MJ/(m^3h)}]$ ($\ln W = \ln W_0$ is the dashed curve in Fig. 4a, the values of Q_0 are listed in Table 2 for all types of beams considered). Normalizing the values of W and Q to the corresponding values for the reference process, we obtain a dimensionless (normalized) relation, which is identical for all types of beam elements:

$$\tilde{W} = \tilde{Q}_e^n, \tilde{W} = W/W_0, Q_e = Q/Q_{0.} \tag{2.2}$$

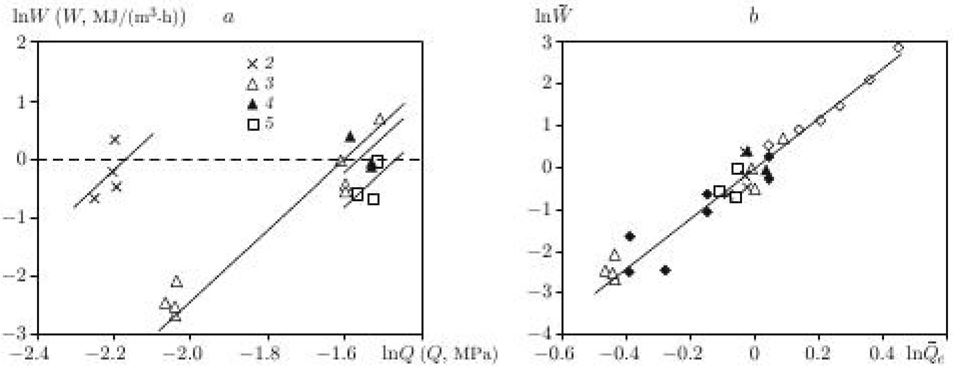


Figure 4.

The data plotted in Figs. 3 and 4a are presented in the dimensionless form in Fig. 4b, where identical dimensionless values of $\tilde{Q}_e$ correspond to one value of $\tilde{W}$. Thus, replacing the characteristic B by a new characteristic Q_0, which takes into account the properties of the material and the specific properties of the beam element geometry, makes it possible to compare the intensities of the processes; it is also possible to compare the times to rupture.

In accordance with the second approach, we have $W = B_k Q_k^n = BQ_e^n$, where $Q_e = \lambda_1 Q_1 = \lambda_k Q_k\,(k = 2,3,4,5).$ If we use the tension experiment as a reference, we can assume that $\lambda_1 = 1, B = B_{1.}$ As a result, we obtain $\lambda_k = (B_k / B_1)^{1/n}$.

The coefficients λ (Table 2) should take into account the specific features of the action of the external generalized force Q on the body, the beam element geometry, and the distribution of internal stresses. It is reasonable to obtain the approximate values of these coefficients by using only the data of experiments on the creep of the beam element under tension, which corresponds to the characteristics B and n. These approaches known in technical publications are based on considering statically admissible fields of stresses and kinematically possible fields of strain rates [4].

3. Comparative estimates of deformation of beam elements under tension and twisting. As we made above, we compare the intensities of beam deformation processes under tension and twisting. In the case of beam twisting, we have $dA = Md\varphi / V = (M/S)(d\varphi / l_0) = Qdq$, where $Q = M/S$ $[\mathrm{N\cdot m/m^2}]$ is the generalized force under twisting and $dq = d\varphi / l$ is the generalized displacement. In the case of a uniform stress–strain state, which is formed in the case of twisting of a thin-walled tube with outer and inner radii R and $r = \beta R$, respectively, the relation between the generalized force Q and shear stress τ is established via the external moment. As $\beta \to 1$, we have $Q = \tau R$, i.e., as in the case of bending, the dimension of the generalized force under twisting differs from the dimension of the generalized force under tension. Figure 5a shows the results of experiments on twisting of thin-walled tubes with R =10 mm and r =9 mm (points 7) and solid cylindrical beams with D = 20 mm (points 6) at the steady stage of the creep process. Processing the experimental data for the steady stage with the use of the power-law dependence Eq. (2.1), we obtain the values of the coefficient B at n = 6 for thin-walled cylinders and solid samples (see Table 2). As in the case of beam bending, we consider two approaches for conversion of the generalized forces Q to an equivalent quantity Q_e. In accordance with the first approach, we take the same reference value $W_0 = 1[\mathrm{MJ/(m^3h)}]$ ($\ln W = \ln W_0$ is shown by the dashed curve in Fig. 5a) and convert the equation to the dimensionless (normalized) form Eq. (2.2). The corresponding values of Q_0 are listed in Table 2. The dependence $\ln\tilde{W} - \ln\tilde{Q}_e$ and also the data of tension experiments (see Fig. 3) are shown in Fig. 5b. Thus, we have the same dependence $\tilde{W}(\tilde{Q}_e)$ under loading by the tensile (compressive) load and by the bending and twisting moments.

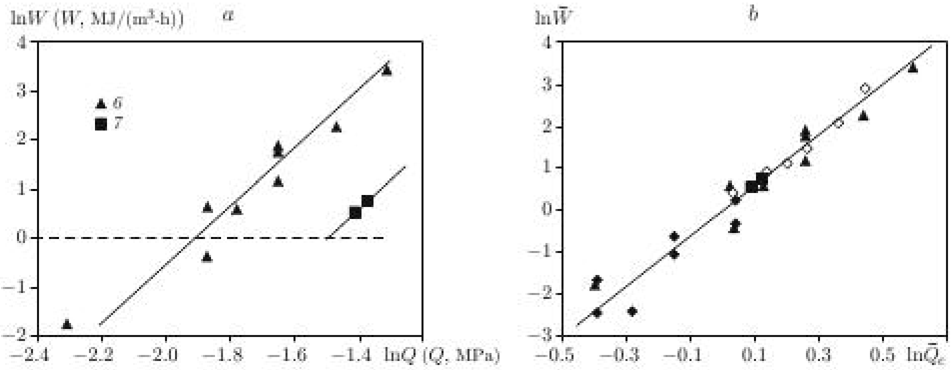


Figure 5.

In accordance with the second approach, the creep process under tension is the reference process: $Q_e = \lambda_k Q_k$ (Table 2). Using statically admissible fields of stresses and kinematically possible fields of strain rates, we can find the approximate values of the equivalence coefficient λ_6 [4].

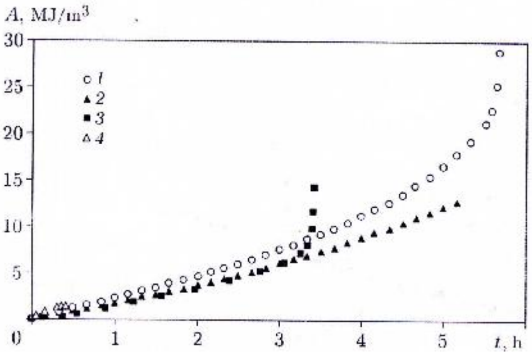


Figure 6.

Table 2

k	Type of loading	B, $MPa^{1-n} \cdot m^{-n} \cdot h^{-1}$	Q_0, $MPa \cdot m$	λ, m^{-1}
2	Bending	$4.46 \cdot 10^5$	0.082	335.0
3		$1.48 \cdot 10^4$	0.145	190.0
4		$1.19 \cdot 10^4$	0.150	183.0
5		$6.65 \cdot 10^3$	0.165	166.0
6	Twisting	$9.18 \cdot 10^4$	0.107	259.5
7		$7.88 \cdot 10^3$	0.161	172.4

Using the experimental data presented, it is possible to compare the strain-strength behavior of structural elements in terms of the equivalent external generalized forces $Q_e = \lambda_k Q_k$. Figure 6 shows the creep diagrams of various beam elements made of St. 45 steel at T = 725°C and Q_e =44 [MPa]. It is seen that close values of intensity and duration of the processes correspond to close values of the generalized forces. The shorter duration of the creep process in the case of twisting of a thin-walled sample, as compared with the duration of the creep process under tension, is explained by buckling o f the thin-walled structure. Bending experiments were performed only for low values of strains.

4. Conclusions. The intensity of the creep processes and the time to rupture of beam elements made of the same material at a fixed temperature can be compared in terms of the volume-averaged powers of energy dissipation calculated with the use of external generalized forces converted to an equivalent quantity.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 08-01-00060).

REFERENCE

1. O. V. Sosnin, "Energy variant of the creep theory and long-term strength. Creep and rupture of nonhardening materials. Part 1," Probl. Prochn., No. 5, 45–49 (1973).
2. O. V. Sosnin, B. V. Gorev, and A. F. Nikitenko, "Substantiation of the energy variant of the creep theory. Part 1," Probl. Prochn., No. 11, 3–8 (1976).
3. O. V. Sosnin, B. V. Gorev, and V. V. Rubanov, "Substantiation of the energy variant of the creep theory. Part 2," Probl. Prochn., No. 11, 9–13 (1976).
4. O. V. Sosnin and I. V. Lyubashevskaya, "Approximate estimates of the high-temperature creep of structural elements," J. Appl. Mech. Tech. Phys., 42, No. 6, 1029–1037 (2001).

Informatioin about author

Lyubashevskaya Irina Vasilyevna – candidate of physical and mathematical sciences, senior scientific employee, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia, Phone: (383)333 18 14, E-mail: lbi@ngs.ru

NEW RESULTS IN MECHANICS OF GROWING SOLIDS

Manzhirov A.V.

Basic fundamentals of the mathematical theory of growing solids are under consideration. The classification of various methods of solids accretion is presented. Special attention is paid to the accretion of 3D solids by 2D surfaces. The constitutive equations are formulated with respect to complete distortion tensor which may be representing as the composition of initial distortion and compatible deformation gradient. The initial distortion induces the linear connection on the material manifold which becomes a flat space of affine connectivity with nontrivial torsion. In the majority of papers which deal with the mechanics of growing solids the theory is constructed as some special replicas of solid mechanics in three-dimensional Euclidean space. Nevertheless the geometric properties of Euclidean space are not enough to describe the stress-strain state of a solid which was formed by the continuous joining of pre-stressed parts. It is extremely important that the growing solid can be considered as a special class of inhomogeneous body, in which inhomogeneity arises because of nonholonomic distortion, caused by the joining of incompatible stressed parts. From this point of view the mechanics of growing solids have much in common with the theory of defects, in particular with the theory of continuously distributed dislocations. The theory of fiber bundles of differentiable manifolds is taken as the geometric foundation of mathematical theory of growing solids. Analytic properties of differentiable manifolds are determined without utilization of prescribed connection. This allow to formulate a boundary value problem in terms of quiet general geometrical properties of reference configuration and determine the particular type of connectivity taking into account specific kinematic and static characteristics of the accretion process.

Deformation processes in a solid whose composition, mass, or volume varies in a piecewise continuous manner due to the accretion of new material to the outer surface of a body were studied in many works (see, e.g., [1, 2]). The solid mechanics problems arising in the field of modeling of such processes are completely new and form a separate field of research known as mechanics of accreted solids. Its importance is determined by the fact that the manufacturing of almost all objects of solid mechanics involves accretion: buildings, structures, structural components, machine parts, etc. Specific examples include continuous concrete structure erection, metal solidification, spray deposition of semiconducting films, and crystal growth. One could easily continue this list.

In the framework of the mechanics of growing solids the deformable bodies of changing composition are considered. This means that during the deformation process new pre-stressed parts can join to a solid. Generally speaking parts can either join or separate. So a growing body is a special case of deformable solids in which the deformation process is accompanied by rearrangement of internal cohesion. However this definition covers a much broader class of models than considered in this work.

In the majority of papers which deal with the mechanics of growing solids the theory is constructed as some special replicas of the theory of deformable solids in three-dimensional Euclidean space. Nevertheless the geometric properties of Euclidean space are not enough to describe the stress-strain state of a body which was formed by the continuous joining of pre-stressed parts. It is extremely important that the growing body can be considered as a special class of inhomogeneous body, in which inhomogeneity arises because of nonholonomic distortion, caused by the joining of incompatible stressed parts. From this point of view the mechanics of growing solids have much in common with the theory of defects, in particular with the geometric theory of continuously distributed dislocations. It is noteworthy that the development of this theory strongly influenced by the methods of the Einstein-Cartan geometric theory of gravitation and general theory of relativity. Apparently, the first who applied the methods of Cartan geometry in continuum mechanics was K. Kondo (1955). These ideas have been developed in the works of Bilby et al., E. Kröner, and A. Seeger in which relations between the incompatibility of deformations, the density of defects, and non-trivial geometry of manifolds with non-zero torsion and curvature were established. In this context geometric concepts such as *connection, curvature, torsion, parallelism* are among the basic concepts of the general theory of inhomogeneous solids. This theory was developed by W. Noll [3] and C.C. Wang [4], as well as in the series of papers by M. Epstein and G. Maugin [5]. These fundamental studies form the theoretical basis for the mathematical theory of growing solids.

In this paper we consider the continuous accretion of a solid with the adherence of new material particles to the boundary. We regard the accretion as a union of solids which do not penetrate each other, but have a common parts of boundary.

Note, that continuous joining is a process of continuous adherence of infinitesimal areas to a body, i.e. areas of infinitesimal measure. The infinitesimal areas can be classified. One can consider an infinitely thin layers, threads, and points. Since such infinitesimal field are continuous bodies of various dimensions they can carry the stress-strain state corresponding to their dimension. For example layers can undergo membrane tension, the threads -linear, etc. In this regard, the distribution of stresses in a continuously growing body depends on geometric class of joined infinitesimal areas which implies the construction of different versions of the theory of growing solids. In this paper we consider a body which grows due to continuous adherence of two-dimensional layers considered as material surfaces [6].

The theory of fiber bundles of differentiable manifolds [7] is taken as the geometric foundation of mathematical theory of growing solids. Analytic properties of differentiable manifolds are determined without utilization of prescribed connection. This allow to formulate a boundary value problem in terms of quiet general geometrical properties of reference configuration and determine the particular type of connectivity *a posteriori* taking into account specific kinematic and static characteristics of the accretion process. Above all the geometrical concept of a fiber bundle corresponds to a key features of the growing solid whose growth is modeled as a continuous adhesion of deformed material areas. Such an assembly generates a nontrivial fiber bundle of material manifold. The structure of this bundle is completely determined by the scenario of accretion.

Submission of material manifold as a bundle gives a natural interpretation of the results of accretion which is implemented as a continuous stream of material surfaces deposited to the surface of growth. The annual rings on cross sections of tree trunks may be the appropriate metaphor here. Each layer corresponds to the material surface attached at a fixed moment of time. Hence, base is one-dimensional and each fiber is a two-dimensional manifold.

Note that it can be other types of bundles such as a bundle with two-dimensional fibers and one dimensional base. This type of fibration can be treated as the fibers of the wood. More complex example is illustrated by a bundle wrapped yarn on the ball and so on.

Let us give some remarks regarding the notation in this work. In order to identify the points of the body we introduce a smooth three-dimensional material manifold $\mathfrak{M}$. We assume that $\mathfrak{M}$ is a fibre bundle of a smooth manifold. As we know from differential geometry, a fibre bundle is defined by base $\mathfrak{N}$, structure group G , and projection map π [7]. The material point $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ is defined by three coordinates specified in local map U which contains a neighborhood of $\mathfrak{p}$. The set of three coordinates denote gothic symbol $\mathfrak{x}$ that means an ordered triple of numbers $\{\mathfrak{x}^1, \mathfrak{x}^2; \mathfrak{x}^3\}$. The last element of the triple $\mathfrak{x}^3$ is highlighted with a semicolon in notation and determines the coordinates of the base $\mathfrak{N}$. The first two elements $\mathfrak{x}^1, \mathfrak{x}^1$ are the coordinates of the fibre. As each fibre is uniquely determined by the value $\mathfrak{x}^3$ the fibres will be denoted by $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}^3}$. Due to their topological and differential properties the bundles of smooth manifolds endues their regular subsets a sufficiently strong smoothness properties and measurability that allows to define the accreted solid without additional geometric assumptions.

Define a body $\mathfrak{B}$ as an open subset of a material manifold $\mathfrak{M}$ bounded by non-identical fibers. In this case the body $\mathfrak{B}$ can be represented as a union of fibers whose indices are in the open interval (α, β), i.e.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha,\beta) = \bigcup_{\mathfrak{x}^3 \in (\alpha,\beta)} \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}^3}.$$

An accreted solid can be defined as a parametric family of such sets

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}(\alpha,\gamma) \,|\, \gamma \in (\alpha,\beta)\},$$

where γ is a parameter of the family. While $\alpha \to \beta$ the body degenerates into an infinitely thin ply or a point.

Specify the configuration of a body $\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}$ as a set κ of points in Euclidean space $\mathbb{E}^3$, that correspond to the positions of material points, i.e.

$$\kappa = \{\mathbf{X} \in \mathbb{E}^3 | \exists \{\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2; \mathfrak{X}^3\} \in \mathfrak{B} \quad \mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}_{\kappa}(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2; \mathfrak{X}^3)\},$$

defined by an injective function

$$\boldsymbol{\chi}_{\kappa}: \ \mathfrak{B} \to \mathbb{E}^3.$$

Note that the injectivity property forbids the penetration of solid parts into each other. We also believe that $\boldsymbol{\chi}_{\kappa}$ is a diffeomorphism.

In an accreted solid like for solid with defects the natural (stress-free) configuration may not exist, moreover, such a configuration exists only in exceptional cases it coherent accretion. Lack of global natural configuration leads to consideration of three configurations. The first one κ_C can be termed as "reference fibers"(like Maugin's "reference crystals"). The set κ_C is not a connected subset of $\mathbb{E}^3$ so is not a configuration in usual sense but with every point $\mathbf{x} \in \kappa_C$ one can associate a linear map

$$\mathbf{K}(\mathfrak{X}): \kappa_C \to \kappa_R, \tag{1}$$

where κ_R is the second (reference) configuration that is a connected measurable subset of $\mathbb{E}^3$ with regular boundary. The third configuration κ is actual. One can determine the connection coefficients $\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha}$ on material manifold $\mathfrak{M}$ by tensor field $\mathbf{K}$

$$\Gamma^{\beta}_{\gamma\alpha} = \partial_{\alpha}\left(\mathbf{K}^{-1}\right)^{\rho}_{\cdot\gamma} K^{\beta}_{\cdot\rho}. \tag{2}$$

The corresponding connection can be nontrivial, i.e. with nonzero torsion. This geometrization of the manifold $\mathfrak{M}$ transforms it into a configuration that is not embedded in three-dimensional Euclidean space.

For simple materials the hyperelastic potential W_{κ} may be represent as follows

$$W_{\kappa} = W_{\kappa}(\mathbf{F}_{\kappa}, \mathfrak{X}),$$

where $\mathbf{F}_{\kappa}$ is a deformation gradient relative to reference configuration κ .

In order to obtain particular approximations of W_{κ} one has to proceed the *gauge*. If the deformed solid possesses *natural* (i.e. free of stresses) configuration then the gauge leads to the following conditions:

$$W_{\kappa}(\mathbf{1}, \mathfrak{X}) = 0, \qquad \frac{\partial W_{\kappa}}{\partial \mathbf{F}_{\kappa}}\bigg|_{\mathbf{F}_{\kappa}=\mathbf{1}} = \mathbf{0}.$$

The first condition expresses the fact that a stored elastic energy differs from zero only in a deformed (i.e., a non-natural) state and the second condition shows that stresses in natural state vanish.

If a medium is assumed elastic, then an infinitesimal neighborhood of each of its points has a unique (up to an arbitrary rigid motion) local reference configuration. This implies the existence of a linear mapping $\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X})$ (1), which transforms an infinitesimal neighborhood of $\mathbf{X}$ in a natural (stress-free) state.

Note that material manifold is a bundle and each its fiber $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$ is associated with a material surface strained before its adhesion to a body. From the mechanical point of view it means that each fiber was deformed from natural state before adhesion. So each individual fiber has a a global two-dimensional natural reference configuration. Of course the whole accreted solid has no global three-dimensional natural reference configuration.

Introduce the distortion tensor field $\mathbf{K}(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}^2; \mathfrak{X}^3)$ as a deformation gradient associated with individual material surface $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$. It can be quantify with reference to transformation of a surface from natural reference configuration onto configuration that match its position immediately after the adhesion. Thus, at each point of the material manifold tensor field $\mathbf{K}(\mathfrak{X})$ is defined. This field is continuously differentiable due to the the continuity of accretion process. Moreover the field $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ specifies a metric on a surface embedded in three-dimensional Euclidean space on each fiber $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}^3}$.

The deformation of a material surface after adhesion to a solid is determined by the gradient of the deformation $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\kappa_R}$. Thus a complete distortion tensor $\mathbf{H} = \mathbf{F}_{\kappa_C}$ has the form

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F},$$

and elastic potential $W_{\kappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})$ can be defined on the configuration κ_C only locally since κ_C is not a connected set.

Elastic potential can be determined globally with respect to the configuration κ_R. Introduce elastic potential W_{κ_R} that is an elastic energy per unit volume in the reference state κ_R and can be interpreted as a function of three arguments $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, $\mathfrak{X}$ (see. [5]), i.e.

$$W_{\kappa_R}(\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathfrak{X}) = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\kappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X}) = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\kappa_C}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}, \mathfrak{X}).$$

Note that even if the functional W_{κ_C} is uniform (i.e., it does not depend obviously on material coordinates $\mathfrak{X}$), functional W_{κ_R} is not uniform because $\mathbf{K}$ depends on $\mathfrak{X}$. This reflects the difference between the material uniformity and homogeneity [5]

One can express Piola stress tensor $\mathbf{T}_{\kappa}^{\kappa_R}$ relevant to κ_R by formula

$$\mathbf{T}_{\kappa}^{\kappa_R} = \frac{\partial W_{\kappa_R}}{\partial \mathbf{F}^*} = J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\kappa_C}}{\partial \mathbf{H}^*}.$$

The stress tensor $\mathbf{T}_{\kappa}^{\kappa_C}$ relevant to κ_C can be defined fiber-by-fiber as follows

$$\mathbf{T}_{\kappa}^{\kappa_C} = \frac{\partial W_{\kappa_C}}{\partial \mathbf{H}^*}.$$

The boundary value problem for an accreted solid is determined by the equations of equilibrium in $V(t)$ with boundary $\Omega(t)$ parametrically dependent on time, i.e.

$$\nabla_{\kappa} \cdot \left[J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\kappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}^*} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}} \right] + \mathbf{b}_{\kappa} = \mathbf{0},$$

and boundary conditions stated on $\Omega(t)$:

$$\mathbf{n} \cdot \left[J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\kappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}^*} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}} \right] \Big|_{\Omega(t)} = \mathbf{p}.$$

At the first glance a formal statement of the boundary value problem differs from the classical one only by the fact that the boundary of domain depends parametrically on time. However, there is more profound difference: the elastic potential depends on the tensor field of distortion the determination of which requires additional conditions. Particular form of these conditions depends on the geometrical structure of joined elements, that is in essence on the structure of the bundle of material manifold. If the growth of a body occurs due to continuous influx of prestressed material surfaces to this body then this condition can be written in the form

$$\mathbf{P} \cdot \left[J_{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{K}^* \cdot \frac{\partial W_{\kappa_C}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}^*} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}} \right] \cdot \mathbf{P} \Big|_{\Omega(t)} = \mathcal{T}.$$

Here $\mathbf{P} = (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ is a projector onto the tangent plane to $\Omega(t)$. This equation expresses the fact that the fibers align with the specified tension determined by the surface tensor $\mathcal{T}$, i.e., two-dimensional tensor of second rank defined in the tangent space of the adhering material surface.

The equation for distortion tensor $\mathbf{K}$ provided that the increase is the result of continuous adherence of prestressed surfaces can be obtained from the relations of the theory of material surfaces (theories of solids with a material boundary [6]). Effects of material surface adhering leads to an infinitesimal change of the stress-strain state of an accreted solid but as an elementary act of adhesion occurs during an infinitely small time interval the rate of stress state is finite. This rate can be found from the equations of contact interaction between the spatial body and adhering the material surface. The equation of physical boundary equilibrium (which from the geometrical point of view is a bounding surface of the body in its actual state and from mechanical point of view is a thin film undergoing a membrane state of stress) can be written as follows:

$$\nabla_s \cdot \mathcal{T} + \mathbf{b}_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\Big|_{\Omega(t)},$$

where ∇_s is the surface nabla operator, $\mathbf{b}_s$ is the surface density of external forces acting on $\Omega(t)$. To complete the boundary value problem formulation the condition on the curvilinear boundary $\partial\Omega(t)$ of the surface $\Omega(t)$ must be specified. This conditions may be of the form $\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}\Big|_{\partial\Omega(t)} = \tilde{\mathbf{f}}$. Here $\tilde{\mathbf{n}}$ is an external unit normal to the curve $\partial\Omega(t)$ in the tangent plane and $\tilde{\mathbf{f}}$ is a linear density of forces distributed on the curve $\partial\Omega(t)$.

Defined distortion field allows to specify the geometry on the material manifold, determining the connection on it by the formulas (2). The resulting coefficients of affine connection do not possess the symmetry and define a nonzero torsion tensor

$$\mathcal{T}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \partial_\gamma \left(\mathbf{K}^{-1}\right)^{\rho\cdot}_{\cdot\beta} K^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho} - \partial_\beta \left(\mathbf{K}^{-1}\right)^{\rho\cdot}_{\cdot\gamma} K^{\alpha\cdot}_{\cdot\rho}.$$

Thus, the material manifold becomes a fiber bungled manifold of affine connections. Each fiber is metrized in a natural state and the stress-strain state of a body can be determined as a result of its deformation from natural reference configuration immersed in the ambient space of higher dimension. This reference configuration represents the region in submanifold with nonzero torsion. Of course the image of such deformation, i.e., actual configuration, immersed in a subspace endowed with Euclidean structure. The non-Euclidean features of reference natural configuration, quantitatively defined by the torsion tensor which characterizes the incompatibility of fibers stress-strain states joined in the process of accretion. It should be noted that such speciality of reference geometry in the framework of infinitesimal strains is manifested as incompatibility of the strain tensor field, which was often mentioned in the literature as a characteristic property of growing bodies.

The research was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants Nos. 08-01-00553-a, 09-08-01194-a,and10-01-92653-IND_a) and by the Department of Energetics, Mechanical Engineering, Mechanics and Control Processes of the Russian Academy of Sciences (Program No. 13 OE).

REFERENCE

1. N. Kh. Aruyunyan and A. V. Manzhirov, Contact Problems in the Theory of Creep [in Russian], NAN RA Publ., Erevan, 1999. 320 p.
2. N. Kh. Aruyunyan, A. V. Manzhirov, and V. E. Naumov, Contact Problems in Mechanics of Growing Solids [in Russian], Nauka Publ., Moscow, 1991. 175 p.
3. W. Noll, "Materially uniform simple bodies with inhomogeneities," Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, No. 2, pp. 1-32.
4. C. C. Wang, On the geometric structure of simple bodies, or mathematical foundations for the the-ory of continuous distributions of dislocations //Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, No.27, pp. 33-94.
5. G. A. Maugin, Material Inhomogeneities in Elasticity, Chapman and Hall, London, 1993. 294 p.
6. M. E. Gurtin and A. I. Murdoch, "A continuum theory of elastic material surfaces," Arch. Rational Mech. Anal., 1975, Vol. 57, pp. 291-323.
7. Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, and M. Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds and Physics. Part 1. Basics, North-Holland, Amsterdam, 1982. 649 p.

Information about the author

Manzhirov Alexander Vladimirovich – Ph.D., D.Sc., Professor,Head of the Laboratory for Modeling in Solid Mechanics,Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Vernadsky Ave 101 Bldg1, Moscow, 119526, Russia, Tel.: +7 495 4344138, Fax: +7 499 7399531. E-mail manzh@ipmnet.ru

TO A SPACE PROBLEM OF PROPAGATION OF WAVES IN A LAYER IN PRESENCE OF MAGNETIC FIELD

Melkonyan A.V., Sarkisyan S.V.

The space problem of propagation of waves in an elastic perfect conductive layer is considered in presence of an external constant magnetic field. On planes limiting a layer, the conditions of the constrained free edge are given. For phase speed of symmetric and antisymmetric vibrations the characteristic equations are received. The limiting cases are considered: length of a wave is very great and is very small in comparison with thickness of a layer.

Let's consider isotropic elastic perfect conductive layer ($x \in (-\infty;\infty)$, $y \in (-\infty;\infty)$, $z \in [-h;h]$).The layer characterized in factors Lame λ and μ, density ρ and factor of magnetic permeability μ_0, is in an external constant magnetic field $\vec{H}_0(0,H,0)$, and borders on vacuum. Let in a layer the periodic wave with phase speed c is propagated. The equation of movement in displacements at presence of an external magnetic field for perfect conductive layer looks like [1-4]:

$$c_t^2\Delta\vec{u} + \left(c_l^2 - c_t^2\right)\operatorname{graddiv}\vec{u} + \frac{\mu_0}{4\pi\rho}\left(\operatorname{rotrot}\left(\vec{u}\times\vec{H}_0\right)\right)\times\vec{H}_0 = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

where a $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$-vector of displacment, $c_l = \left(\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$ and $c_t = \left(\dfrac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$ respectively speeds of propagation of a longitudinal and transverse waves, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Typing for the equation (1) transformations Lame [1]

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{\psi} \qquad \left(\operatorname{div}\vec{\psi} = 0\right) \tag{2}$$

for dynamic potentials $\varphi(x,y,z,t)$ and $\vec{\psi}(x,y,z,t)$ we shall receive the following wave equations:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_l^2 + a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0; \qquad \Delta\vec{\psi} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

Here $a = \sqrt{\dfrac{\mu_0 H^2}{4\pi\rho}}$ speed Alfven.

Decision of the equations (3) is possible to present as:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z,t) &= \left(A sh\nu_1 z + B ch\nu_1 z\right)\cdot \exp i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\\ \vec{\psi}(x,y,z,t) &= \left(\vec{C} sh\nu_2 z + \vec{D} ch\nu_2 z\right)\cdot \exp i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\end{aligned} \tag{4}$$

where $\nu_1^2 = k^2\left(1 - \dfrac{\eta\theta}{1+\beta\theta}\right), \nu_2^2 = k^2(1-\eta), \eta = \dfrac{c^2}{c_t^2}, \theta = \dfrac{c_t^2}{c_l^2}, \beta = \dfrac{a^2}{c_t^2}, k^2 = k_1^2 + k_2^2$

$A, B, \vec{C}$ and $\vec{D}$-unknown constants.

Alongside with the equations (1) we shall consider the linear equation of electrodynamics of an environment (vacuum), which are reduced to following by the equation [2-4, 6]:

$$c_0^2\Delta\vec{h}^{(e)} - \frac{\partial^2\vec{h}^{(e)}}{\partial t^2} = 0; \qquad c_0^2\Delta\vec{e}^{(e)} - \frac{\partial^2\vec{e}^{(e)}}{\partial t^2} = 0$$

Here c_0-electrodynamic constant, the index (e) characterizes an environment, $\vec{h}$ and $\vec{e}$ vectors induced of an electromagnetic field.

The decision of the equations of electrodynamics for an environment will be written down as follows:

$$\vec{h}^{(e)} = \overrightarrow{M_1} \exp\left(-\nu_3 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

$$\left(z \geq h\right)$$

$$\vec{e}^{(e)} = \overrightarrow{N_1} \exp\left(-\nu_3 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

$$(5)$$

$$\vec{h}^{(e)} = \overrightarrow{M_2} \exp\left(\nu_3 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

$$\left(z \leq -h\right)$$

$$\vec{e}^{(e)} = \overrightarrow{N_2} \exp\left(\nu_3 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

where $\nu_3^2 = k^2\left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right)$, $\overrightarrow{M_i}$ and $\overrightarrow{N_i}$ -unknown constants.

Let's accept, that on planes limiting a layer, the following boundary conditions (constrained free edge) are given [4,7].

$$\sigma_{13} = 0,\ u_2 = 0,\ \sigma_{33} + T_{33} = T_{33}^{\pm},\ e_1 = e_1^{\pm} \quad \left(z = \pm h\right) \tag{6}$$

Here σ_{13} and σ_{33} the components tensor of stress, $T_{33} = -\frac{\mu_0 H h_2}{4\pi}, T_{33}^{\pm} = -\frac{H h_2^{\pm}}{4\pi}$ components tensor of Maxwell, h_2 and e_1 for perfect conductive layer are defined by the following formulas [2,3]:

$$h_2 = -H\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right), \quad e_1 = \frac{\mu_0 H}{c_0}\frac{\partial u_3}{\partial t} \tag{7}$$

As the accepted boundary conditions at $z = \pm h$ symmetric, the given problem is divided on symmetric and antisymmetric vibrations, as it takes place for a layer with free edges [1].
Satisfying the decision (4) and (5) boundary conditions (6) at $z = h$ with the account (2), (7) and law Hooke, and also connection constants $\overrightarrow{M_i}$ and $\overrightarrow{N_i}$ and meaning $\frac{c^2}{c_0^2} \ll 1$, from conditions of existence of the not trivial decision of system of the linear homogeneous equations for phase speed of the symmetric forms of vibrations we shall receive the following characteristic equation:

$$\frac{th\left(kh\sqrt{1 - \frac{\eta\theta}{1+\beta\theta}}\right)}{th\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)} = \frac{\left(2-\eta\right)^2 - \xi^2\eta\left(1-\eta\right)}{4\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1 - \frac{\eta\theta}{1+\beta\theta}\right)}} \tag{8}$$

where $\xi = \frac{k_2}{k_1}$.

Let's consider limiting cases: length of a wave is very great and is very small in comparison with thickness of a layer. In the first case replacing in the equation (8) hyperbolic tangents by their arguments for meaning of phase speed of a wave we shall receive:

$$c = \frac{2c_t}{c_l}\sqrt{\frac{4\left(c_l^2 + a^2 - c_t^2\right) + \xi^2\left(c_l^2 + a^2\right)}{4\left(1+\xi^2\right)\left(1 + a^2 c_l^{-2}\right)}} \tag{9}$$

In the second case accepting the relation hyperbolic tangents in (8) equal to unit we shall have the following equation:

$$\left(2-\eta\right)^2 - \xi^2\eta\left(1-\eta\right) - 4\sqrt{\left(1-\eta\right)\left(1 - \frac{\eta\theta}{1+\beta\theta}\right)} = 0 \tag{10}$$

Generally of symmetric vibrations the phase speed should be defined from the equation (8). In that specific case at $\xi = 0$ (flat deformation) and at absence of an external constant magnetic field $(\beta = 0)$, the equation (8) - (10) match with known equations considered in [1]. The presence in the equations (8) - (10) dimensionless parameter ξ, results that the wave has property dispersion. Let's note, that if in the above-stated equations to accept $\beta = 0$ (external magnetic field is absent), the results given in [7] turn out. The equation (10) at absence of an external constant magnetic field is in detail investigated in work [5].

For definition of phase speed of the antisymmetric forms of vibrations the following characteristic equation turns out:

$$\frac{th\left(kh\sqrt{1-\frac{\eta\theta}{1+\beta\theta}}\right)}{th\left(kh\sqrt{1-\eta}\right)} = \frac{4\sqrt{(1-\eta)\left(1-\frac{\eta\theta}{1+\beta\theta}\right)}}{(2-\eta)^2 - \xi^2\eta(1-\eta)} \tag{11}$$

In the first limiting case from the equation (11) the phase speed of waves of a bend is defined at presence of an external constant magnetic field. At the other limiting case the equation (11) is reduced to the equation (10).

REFERENCE

1. Новацкий В. Теория упругости. М., Мир, 1975.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Колебания и устойчивость токонесущих пластин. Ереван: НАН Армении, 1992, 124 с.
4. Саркисян С.В. К задаче распространения магнитоупругих волн в пластине. Труды 14-ой Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 1987. т.2, с.400- 405.
5. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача распространения поверхностных волн Рэлея. Доклады НАН Армении, 2005, том 105, №4.
6. Вартанов А. Г. Магнитоупругие колебания идеально-проводящего слоя в постоянном магнитном поле. Изв. НАН РА, Механика 2010, №3.
7. Мелконян А. В. Трехмерная задача распространения волн в упругом слое. Изв. НАН РА, Механика, (в печати).

Information about authors

Melkonyan Avetik – post graduate student, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics (+374 10) 63 06 92, (+374 91) 31 50 57
E-mail av.mlk@inbox.ru

Sarkisyan Samvel – doctor of sciences on physics and mathematics, Head of Department of Mechanics, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics
(+374 10) 61 17 78, (+374 91) 38 43 67
E-mail vas@ysu.am

TRANSVERSE CRACKING OF COMPOSITE BRIDGE DECKS

Minnetyan L., Janoyan K.D., Rocheleau J.A.

Cracking of reinforced concrete bridge decks is a major issue in the transportation infrastructure durability as it opens the door to many other potential detrimental effects. The ability to control the amount of cracking in bridge decks has been sought by countless professionals, ranging from those who design the structures to those who physically construct the bridge. A majority of transverse cracks on the deck develop due to early-age behaviors of concrete. A drastic temperature increase occurs during the curing process, which creates thermal stresses inside the concrete. Shrinkage and creep also cause stresses to build. The severity of these effects heavily depends on the concrete mix design and also on the physical dimensions of the deck. The objective of this paper is to develop a method to evaluate residual stresses because of temperature increase during the hydration of concrete. The method combines finite element methods and composite mechanics analyses to simulate the stresses developed in the deck at early ages due to thermal effects.

1. INTRODUCTION Bridge deck cracking occurs when restrained volumetric changes associated with moisture and temperature changes take place. Volumetric changes mainly result from autogeneous shrinkage, drying shrinkage, thermal shrinkage, and creep. These major causes of concrete volume change with time depend primarily on the material properties and mix design, geometric design details, construction practices, and environmental conditions. Concrete properties are the most important factors affecting transverse deck cracking since they control shrinkage and thermal strains that cause stresses. Understanding the concrete properties is central to reliably modeling the mechanisms contributing to the cracking of concrete decks. The user interface of the implemented computer program will enable the user to input the properties of the concrete being monitored. The overall objective of this paper is to develop a computational framework to predict the behavior of transverse cracking in reinforced concrete bridge decks. Temperature rise during hydration of concrete and resulting residual stresses in concrete play a very important role in the development of deck cracking. Thus, a model mathematically defines the heat generated in the concrete during curing. This model is added into the computational framework so that the important temperature effects can be accounted for in the prediction of deck cracking. Similarly, the effects that autogeneous and drying shrinkage have on the concrete during and after curing are modeled and incorporated into the framework, as they both play a significant role in the development of cracks. Figure 1 shows the mechanism of the transverse cracking of a concrete deck slab.

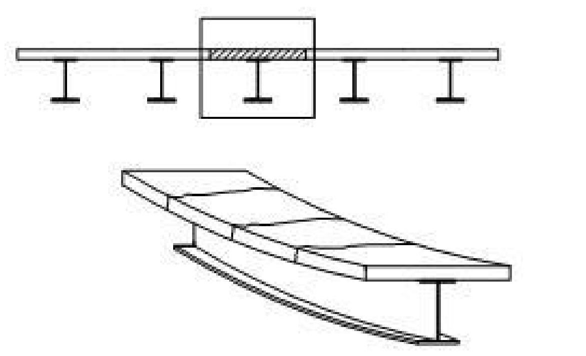


Figure 1 Transverse cracking of concrete deck

The composite action between the deck and girders provides restraining to the deck. When concrete shrinks, the external restraint from the girder, as well as the internal restraints from the reinforcement and aggregates, produces tensile stresses in the longitudinal direction of the deck. When these stresses reach the tensile strength of concrete, transverse cracks are developed in the deck. In continuous beams or in beams with fixed-end restraint, the negative moments resulting from mechanical loads produce tensile stress in the deck, which, when combined with thermal and shrinkage stresses, aggravate the problem of deck cracking. Transverse cracks on high performance (HP) concrete decks are characteristically more distinct and wider than those in conventional concrete bridge decks. Pozzolanic materials such as silica fume and water reducing admixtures/superplasticizers are used to produce HP concrete with higher strength, greater resistance to freeze-thaw cycles, and significantly lower creep properties. HP concrete has a compressive strength, f_c’, that is greater than 6,000 psi (41.4 MPa). It can be shown that the higher compressive strength, f_c’, of concrete cannot be the main reason affecting the crack size. This is reasonable since compressive strength increases stiffness as well as bond strength and tensile strength by the same proportions. The effect of higher stiffness will be to increase crack width, and higher bond/tensile strengths will decrease crack width by approximately the same amount. Therefore, the net effects of higher f_c’ cannot account for the wider cracks on HP concrete decks. A detailed finite element progressive cracking analysis code will be able to account for the effects of all properties of the deck and composite girders on crack widths. Examination of other factors affecting the maximum crack width and their inclusion in the FEA model is required. This is accomplished in multiple steps. First, a computational framework is established. It is designed to evaluate the effects of specific design and construction parameters on concrete deck cracking. The framework is a compilation of packages capable of performing composite mechanics and finite element method analyses (Minnetyan et al 1992). It requires the user to define all of the parameters for the different analyses to be run, which is accomplished through the creation of specific input files

2. FINITE ELEMENT MODELS. A three-dimensional finite element model (FEM) using layered shell elements is utilized to describe the bridge deck-girder structural system. Figure 2 shows the dimensions and the node and element numbering of a cross-section of the FEM. As can be seen in Figure 2, there are a total of 30 nodes on each cross-section of the bridge, numbered in the fashion shown. Additionally, there are 24 elements connecting each pair of neighboring cross-sections, again, numbered in the fashion shown (element numbers are enclosed in boxes in Figure 2). Only the 12 concrete deck elements are shown so as to not crowd the figure.

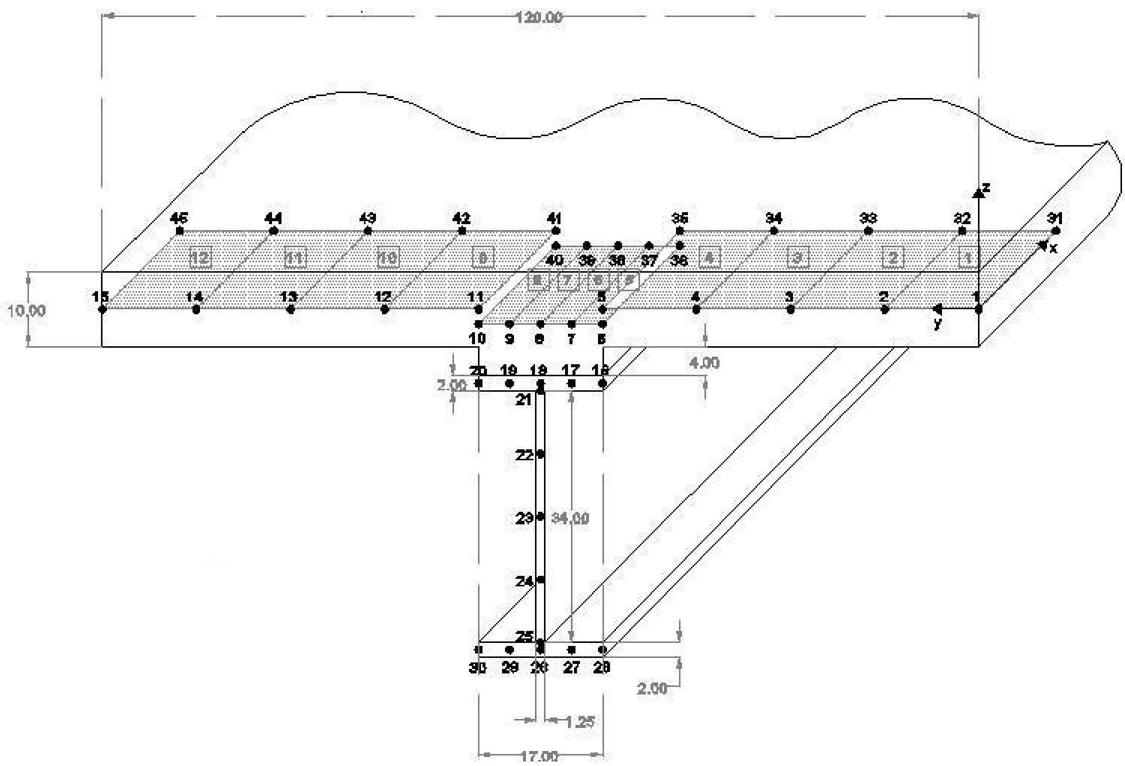


Figure 2 Bridge cross-section showing node and element numbering

3. EFFECT OF TEMPERATURE RISE DURING CURING OF CONCRETE The residual stresses because of the rising of the concrete temperature during curing play a very important role in the development of deck cracking. The temperature differential between the deck concrete and the supporting beam at the time when they start acting as a composite section is the critical temperature to consider. Determination of thermal residual stresses requires knowledge of concrete temperatures as a function of time from the initial placement of concrete. The initial placement temperature, the concrete mix design, and also the change in the ambient temperature have influence on the temperature time-history. In addition, these are some of the factors that could actually be changed or controlled during the construction operation. To compute the through-the-thickness time-history temperature profile of the bridge deck, a one-dimensional thermal analysis finite element approach was used. The analysis requires thermal conductivity and specific heat values and hydration heat generated per unit volume as a function of time. The curing process for bridge deck construction involves placing wet burlap over the bridge decks almost immediately after pouring (within 30 minutes). It is appropriate to define the surface temperature as a boundary condition while the deck surface is covered with wet burlap.

Mathematical model for the the hydration heat generated, Q_I, was obtained by calibrating an appropriate model using test data. Figure 3 shows the heat generation curve for an HP concrete mix, including an initial retardation time when no heat is generated.

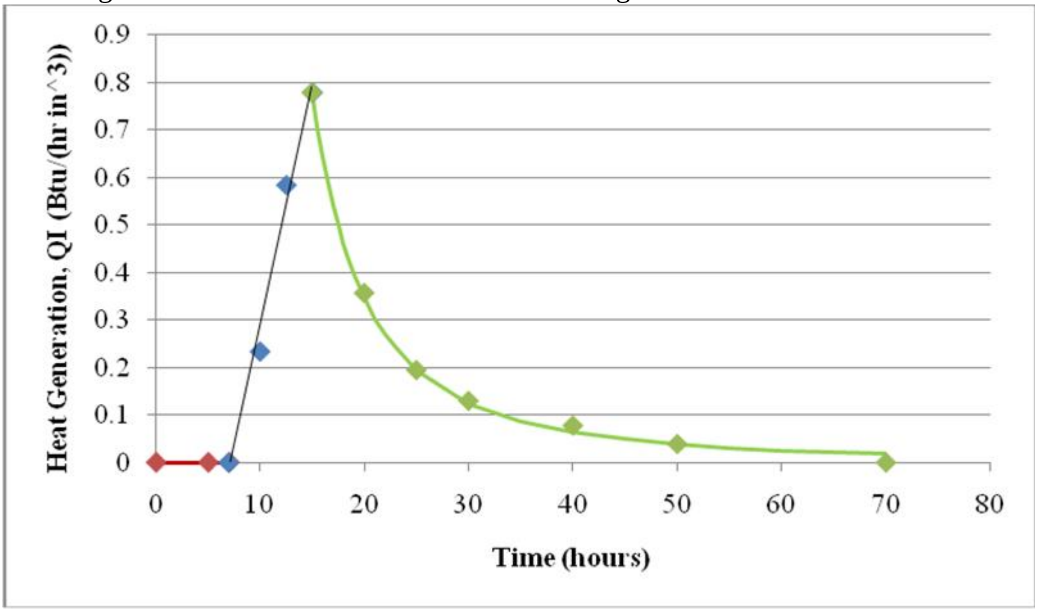


Figure 3 Heat generation curve for an HP concrete mix

The heat generation behavior depends on the composition of the concrete. Additionally, the initial retardation or dormant time may decrease because of delay of the concrete mix truck in transit. General equations for hydration heat production in terms of t_1 (the time at which the heat generation starts to occur after placement), t_2 (the time at which the heat generation peaks), and Q_p (the peak heat generation, occurring at time t_2) are written as:

$$Q_I(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < t_1 \\ \left(\dfrac{Q_p}{t_2 - t_1}\right)(t - t_1) & t_1 \le t \le t_2 \\ \dfrac{100 * Q_p}{(t - (t_2 - 10))^2} & t > t_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Thermal conductivity of the concrete is taken to be k = 0.0818 Btu/(in.hr.°F) or 1.7 W/(m.°K) and the heat capacity c = 0.210 Btu/(lb.°F) or 880 J/(Kg.°K).

A one-dimensional finite element model is used for through the thickness time-history thermal analysis. The time-dependent changes in heat generation are taken into account for each time step by Equation 3.1 for Q_I, as a time function that is referenced at each time step. Figure 4 shows a typical one-dimensional FEM discretization across the concrete thickness. The FEM model can also include the girder elements for thermal analysis.

4. DRYING SHRINKAGE STRAINS The model for drying shrinkage strain was derived based on moisture loss trends through the bridge deck with time. Moisture diffusivity of concrete is usually a smooth function of drying time. Therefore it is possible to derive a mathematical model for moisture as a function of time and depth directly from test data. Based on information from test data, Equation 4.1 was formed. It defines the moisture content of the bridge deck as a function of both drying time in hours, t, and depth, x, from the drying face.

$$H(x,t) = H_I - TD \cdot (H_I - H_S) \cdot \left[erfc\left[\frac{x}{2\sqrt{D_M t}} \right] \right] - BD \cdot (H_I - H_S) \cdot \left[erfc\left[\frac{d-x}{2\sqrt{D_M t}} \right] \right] \tag{4.1}$$

In equation 4.1, $H(x,t)$ represents the relative humidity (moisture content) as a function of x and t. TD is 1 if there is drying through the top surface of the deck and 0 if there is a moisture barrier at the top surface. Similarly, BD is 1 if there is drying through the bottom surface of the deck and 0 if there is a moisture barrier at the bottom surface. H_I and H_S are the relative humidity at the interior of a sealed concrete and at the surface of the deck, respectively. *erfc* is the complementary error function, and D_M is the aging moisture diffusion coefficient of concrete. The value of H_S is taken to be 50%, which is a typical value for the summertime relative humidity in the atmosphere. Change in the atmospheric humidity will change the surface moisture boundary of the concrete deck. H_I is defined as the relative humidity in the interior of a sealed concrete. Based on the interpretation of test data, H_I is determined to be a function of time, approximately described by the following equation:

$$H_I(t) = -0.0078125 \cdot t + 100 \tag{4.2}$$

Again, t is given in hours. The value of H_I is decreased from 100 percent due to loss of moisture to hydration of the concrete mix. The time coefficient in equation 4.2 may be modified as a function of the concrete mix.

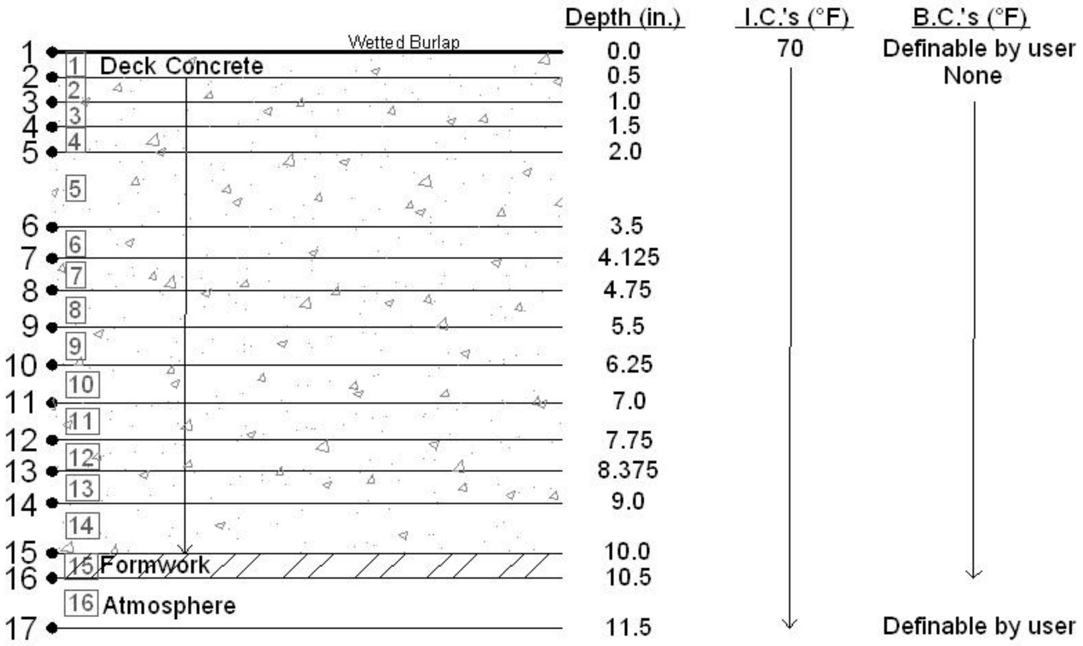


Figure 4. Example finite element model for thermal analysis(1.0 in.=25.4 mm)

6. RESULTS Prior to three dimensional FEM of the composite bridge deck, time-history thermal analysis of the concrete hydration is conducted. The time increment used for the analysis is one hour. The thermal FEM model is extended to include the girder as well as the reinforced concrete deck. The maximum temperatures develop deep within the concrete deck.

For the HP concrete mix considered the maximum concrete temperature of 113°F (45°C) is reached after 16 hours of concrete placement. It may be noted that the maximum hydration heat is generated at 15 hours. Figure 5 shows the concrete temperature variation with time. After 36 hours the temperatures continue to decrease very slowly. Results indicate that all hydration related temperature increases are completely dissipated within two weeks. Figure 6 shows the temperature increase with depth. The maximum temperature occurs near the bottom of the concrete deck where the concrete is in contact with the top flange of the steel girder. The interface between the concrete and the top flange of the steel girder is at a depth of 13.5 in. (343 mm) that is due to 9.5 in (241 mm) deck thickness and 4.0 in. (102 mm) haunch thickness. Conversion of temperature F to C is given by C=(F-32)*5/9.

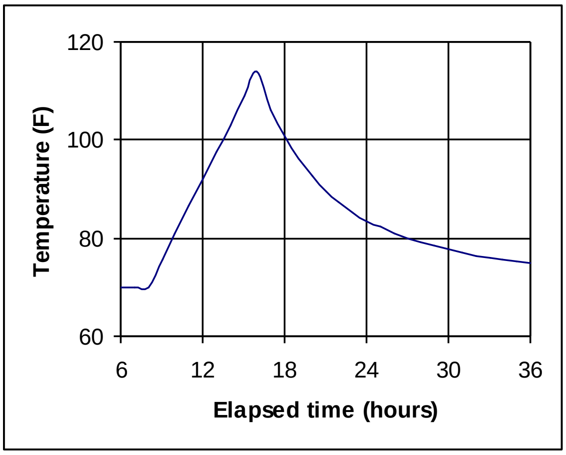


Figure 5. Maximum temperature with time

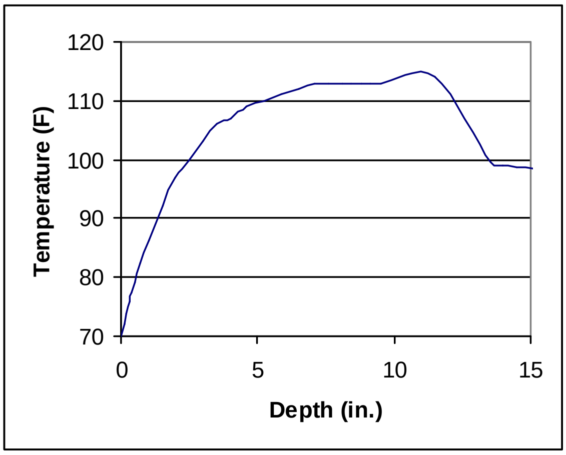


Figure 6. Temperature with depth

Taking into account the temperature change from the maximum temperatures as the concrete sets to the use temperature has a significant effect on the residual stresses. At the negative moment region tensile stresses developed due to thermal residual effects are significant. A three-dimensional FEM analysis shows surface tension stress of 410 psi (2.83 MPa) is developed due to cooling down of the composite deck/girder system to service temperatures. Considering that the modulus of rupture of the HP concrete is 581 psi (4.01 MPa), the thermal residual stress is very significant.

REFERENCE

1. Minnetyan, L. L., Murthy, P. L. N., and Chamis, C. C. (1992). “Progressive fracture in composites subjected to hygrothermal environment”. International Journal of Damage Mechanics, 1(1), 60-79.

Information about authors

Minnetyan Levon – Professor, Clarkson University, Department of Civil and Environmental Engineering, Potsdam, NY 13699-5710, USA (1 315) 268 7741
E-mail levon@clarkson.edu

Janoyan Kerop – Associate Professor, Clarkson University, Department of Civil and Environmental Engineering, Potsdam, NY 13699-5710, USA (1 315) 268 6506
E-mail kerop@clarkson.edu

Rocheleau Jessica – Former Graduate Student, Clarkson University, Department of Civil and Environmental Engineering, Potsdam, NY 13699-5710; Civil Engineer, TRC Companies, Inc., 215 Greenfield Parkway, Suite 102, Liverpool, NY 13088 USA (1 315) 671 9762
E-mail jrocheleau@trcsolutions.com

AEROSTRUCTURAL DESIGN OF COMPOSITE WINDMILL BLADES

Minnetyan L., Marzocca P.

Methods and computer codes are discussed for the design of composite windmill blades for durability and damage tolerance. Damage progression is computationally simulated with increasing number of load cycles. Effects of constituent material and fabrication parameters on the response are computed to assess failure. The sensitivity of response to design variables is evaluated. The method is demonstrated for a polymer matrix composite airfoil specimen under lateral pressure cyclic loading. Suggested improvements of design variables based on analysis are discussed.

1. INTRODUCTION Graphite/epoxy composites are finding increased applications as windmill blade structures due to their light weight, relative low cost, and the development of automated fabrication processes. Computational simulation methods are increasingly necessary for the design evaluation of composite structures. With the development of new constituent materials and fiber reinforcement configurations, graphite/epoxy composites are more economical for airfoil structures. Applications of graphite/epoxy fiber composites to windmill blade structures require reliable performance under fatigue loading caused by wind speed variations, structural vibrations, and fluctuating surface pressures that develop due to the load environment. It is important to quantify the level of structural safety after damage initiation and damage growth take place in a composite structure. The relationship between damage evolution characteristics and remaining reliable life need be established for the in-service structural health monitoring of wind power generation structures.

The fundamental premise of computational simulation is that the complete evaluation of laminated composite fracture requires an assessment of ply and subply constituent material level damage/fracture processes. Computational simulation by-passes traditional fracture mechanics to provide an alternative evaluation method, conveying to the design engineer a detailed description of damage initiation, growth, accumulation, and propagation that would take place in the process of ultimate fracture of a composite structure. Results show in detail the damage progression sequence and structural response characteristics during different degradation stages. An important feature of computational simulation is the assessment of damage stability or damage tolerance of a structure under loading.

The assessment of durability and damage tolerance under fatigue loading requires a capability to simulate the progressive damage and fracture characteristics of composite structures. Fibrous composites exhibit multiple fracture modes that initiate local flaws compared to only a few for traditional materials. Hence, simulation of structural fracture in fibrous composites must include: (1) all possible fracture modes, (2) the types of flaws they initiate, and (3) the coalescing and propagation of these flaws to critical dimensions for imminent structural fracture. The comprehensive simulation of progressive fracture presented herein is independent of stress intensity factors and fracture toughness parameters. Concepts governing the structural fracture simulation are described in reference (Minnetyan et al 1992). Based on these concepts, a computational simulation procedure has been developed for (1) simulating damage initiation, progressive fracture, and collapse of composite structures and (2) evaluating probability of structural fracture in terms of global quantities that are indicators of structural integrity.

2. COMPUTATIONAL SIMULATION PROCEDURE. Computational simulation of fatigue damage progression is implemented by the integration of three distinct computer modules as follows: (1) composite mechanics, (2) finite element analysis, and (3) damage progression tracking. The overall evaluation of composite structural durability is carried out in the damage progression module that keeps track of composite degradation for the entire structure. The damage progression module relies on a composite mechanics code (Murthy and Chamis 1986) for composite micromechanics, macromechanics, laminate analysis, as well as cyclic loading durability analysis, and calls a finite element analysis module that uses anisotropic thick shell elements to model laminated composites (Nakazawa et al 1987).

The computational simulation cycle begins with the definition of constituent properties from a materials databank. Composite ply properties are computed by the composite mechanics module (Murthy and Chamis 1986). The composite mechanics module is called before and after each finite element analysis. Prior to each finite element analysis, the composite mechanics module computes the composite properties from the fiber and matrix constituent characteristics and the composite layup. The finite element analysis module accepts the composite properties that are computed by the composite mechanics code at each node and performs the global structural analysis at each load increment. After a finite element analysis, the computed generalized nodal force and moment time histories are supplied to the composite analysis module that evaluates the nature and amount of local damage, if any, in the plies of the composite laminate. The evaluation of local damage due to cyclic loading is based on simplified mathematical models embedded in the composite mechanics module (Murthy and Chamis 1986).

Ply failure modes are assessed by using margins of safety computed by the composite mechanics module via superposition of the six cyclic load ratios. The cyclic loads that are considered are the N_x, N_y, N_{xy} in-plane loads and M_x, M_y, M_{xy} flexural moments. The lower and upper limits of the cyclic loads, the number of cycles, and the cyclic degradation coefficients are supplied to the composite mechanics module at each node for the computation of a complete failure analysis based on the maximum stress criteria.

Computed nodal stress resultants are used to assess the maximum and minimum values of the local load cycles and frequencies at each node. The composite mechanics module with cyclic load analysis capability evaluates the local composite response at each node subjected to fluctuating stress resultants. The number of cycles required to induce local structural damage are evaluated at each node. After damage initiation, composite properties are reevaluated based on degraded ply properties and the overall structural response parameters are recomputed. Iterative application of this computational procedure results in the tracking of progressive damage in the composite structure subjected to cyclic loading. Computational simulation cycles are continued until the composite structure fractures. The number of cycles for damage initiation and the number of cycles for structural fracture are identified in each simulation. After damage initiation, when the number of load cycles reaches a critical level, damage begins to propagate rapidly in the composite structure. After the critical damage propagation stage is reached, the composite structure experiences excessive damage or fracture that renders it unsafe for continued use.

The generalized stress-strain relationships are revised locally according to the composite damage evaluated after each finite element analysis. The model is automatically updated with a new finite element mesh having reconstituted properties, and the structure is reanalyzed for further deformation and damage. If there is no damage after a cyclic load increment, the structure is considered to be in equilibrium and an additional number of cycles are applied leading to possible damage growth, accumulation, or propagation. Simulation under cyclic loading is continued until structural fracture.

The simplest fatigue degradation model is based on the assumption that all material properties may be assumed to diminish linearly on a logarithmic scale based on the number of cycles endured.

$$\frac{P}{Po} = 1 - \quad \log N \tag{1}$$

Where *P* is the current value of a property, *Po* is the original value of the same property, β is the logarithmic degradation coefficient, and *N* is the number of load cycles. The log-linear degradation model is fairly effective in describing the cyclic fatigue response of a composite or metallic material that is loaded under a constant type of loading and uniform hygrothermal environment.

3. COMPOSITE AIRFOIL UNDER LOADING

A graphite/epoxy laminated cantilever airfoil is used to demonstrate the fatigue simulation of a composite structure subjected to flexural loading. The airfoil has a length of 1829 mm (72.0 in) and the width varies from 102 mm (4.0 in) at the tip to 76 mm (3.0 in) at the base. The ply layup is $[0_3/18/-18/90/-18/18/0_3]_n$. The laminate thickness is 79 mm (3.10 in) at the root and 7.0 mm (0.275 in) at the blade tip. The finite element model of the airfoil contains 160 elements and 187 nodes as shown in Figure 1.

The composite system is made of AS-4 graphite fibers in a high-modulus, high strength (5250) epoxy matrix. Matrix properties are representative of the Rigidite-5250 high temperature resin. The fiber volume ratio is 0.55 and the void volume is assumed to be zero.

The airfoil is first investigated subjected to a monotonically increasing lateral pressure applied at service temperature of 22ºC. Damage propagation is simulated as the lateral pressure is increased. Figure 2 shows the percent damage volume in the airfoil with increasing lateral pressure. Damage initiation occurs at a lateral pressure of approximately 13.8 kPa (2.0 psi). The damage initiation mode is by transverse tensile failure of the 90° plies near the root. After damage initiation, the damage growth rate with pressure remains steady until the critical pressure level of 41.4 kPa (6.0 psi) is reached. Above the 41.4 kPa pressure level damage propagates very suddenly with fiber fractures that cause the airfoil to break into two pieces. Figure 3 shows the airfoil tip deflection with increasing lateral pressure. The relationship between pressure and tip deflection is linear until the critical damage propagation pressure of 41.4 kPa is reached. Figure 4 shows the exhausted damage energy as a function of the created damage volume. The relationship between damage volume and damage energy is linear until the critical damage level is reached. After the critical damage level, the exhausted damage energy grows much more rapidly compared to the damage volume. This critical damage stage is also the damage tolerance limit of the composite structure.

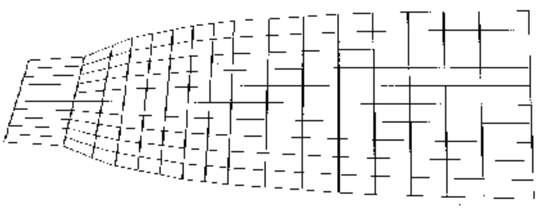


Figure 1. Finite element model of airfoil

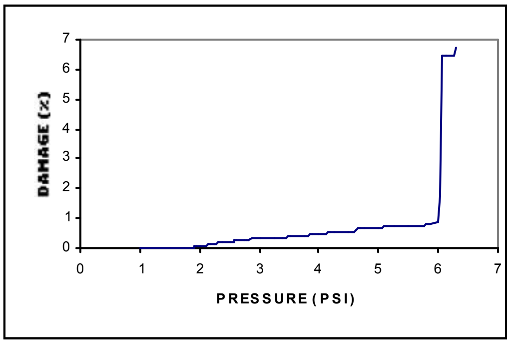


Figure 2. Damage progression under pressure

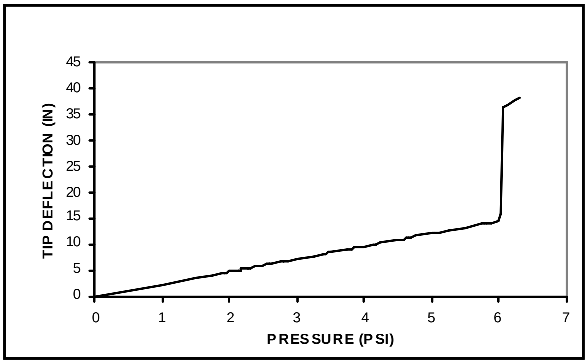


Figure 3. Deflection of airfoil tip with pressure

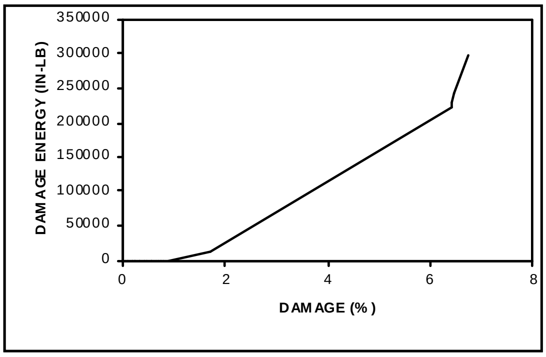


Figure 4. Damage energy exhausted with damage volume created

After simulation of the airfoil under monotonically increasing static loading, its durability under fatigue loading is investigated. The pressure amplitude for fatigue is selected approximately halfway between the damage initiation and damage propagation pressures. The fatigue pressure of 27.6 kPa (4.0 psi) is applied with zero stress ratio; i.e. without stress reversal. The damage evolution characteristics are tracked with increasing number of pressure cycles. Figure 6 shows the created damage with number of fatigue cycles. The damage volume increases rapidly within the first few cycles. Afterwards, the increase in the damage volume becomes more and more gradual with the increasing number of cycles. However, at the end of the fatigue life, small increases in the damage volume represent larger steps in approaching the damage tolerance limit. Figure 7 shows the relationship between the fatigue damage energy exhausted and the created damage volume. At the end of the fatigue life the slope of the damage energy curve becomes practically infinite. Accordingly, the damage volume alone is not a sufficient indicator to identify the damage tolerance limit under fatigue. Similarly the changes in airfoil tip deflection with the number of fatigue cycles, as shown in Figure 8, do not provide any warning of the impending ultimate failure. Figure 8 shows the Damage Energy Release Rate (DERR) with increasing number of fatigue cycles. DERR is defined as the rate of work done by external forces/pressures during the evolution of damage to the damage volume created. Fluctuations in the DERR levels correspond to the changes in the structural resistance to damage propagation. There is a rapid increase in the DERR levels immediately before ultimate fracture. Therefore, any diagnostic methodology for structural health monitoring must be able to measure both the increase in damage volume and also the exhausted damage energy. Adequate warning before failure may be obtained by comparison of measured damage and damage energy levels to the corresponding simulated values.

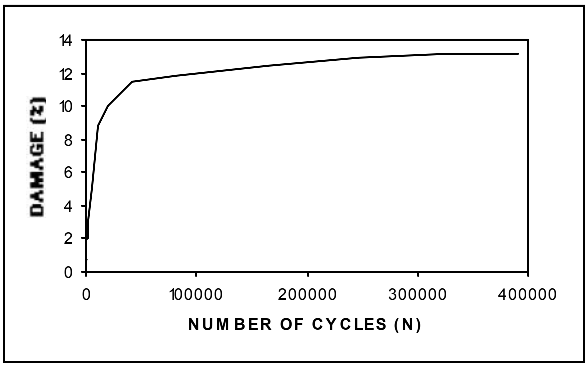


Figure 5. Airfoil damage evolution with number of fatigue cycles

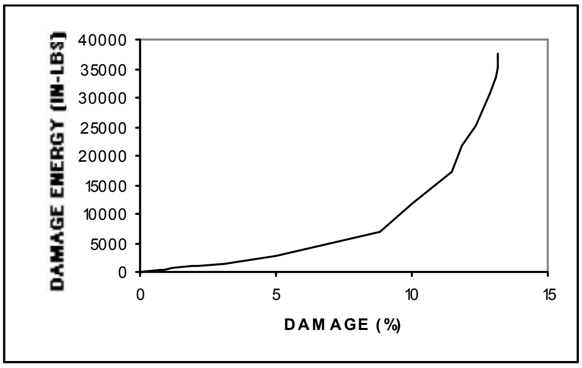


Figure 6. Fatigue damage energy exhausted with percent damage volume

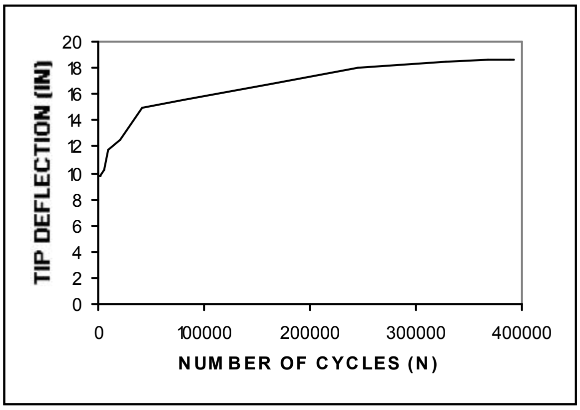


Figure 7. Airfoil tip deflection with number of pressurization cycles

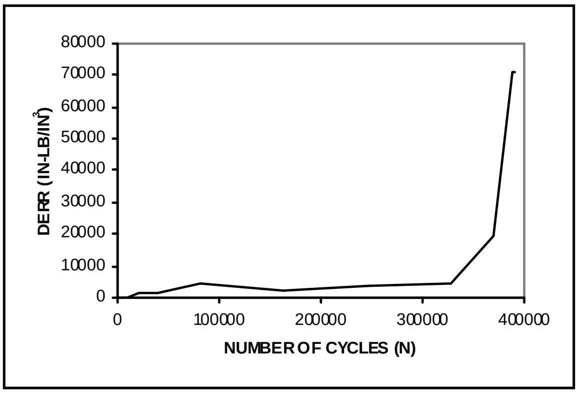


Figure 8. Airfoil damage energy release rate with number of fatigue cycles

4. CONCLUSIONS

On the basis of the results obtained from the investigated composite airfoil example and from the general perspective of the available computational simulation method, the following conclusions are drawn:

1. Computational simulation can be used to track the details of damage initiation, growth, and subsequent propagation to fracture for composite structures subjected to monotonic and cyclic fatigue loads.
2. For the example angle-plied composite airfoil structure considered, critical changes in the damage evolution characteristics can be identified by monitoring the damage growth and the associated damage energy.
3. Computational simulation, with the use of established composite mechanics and finite element codes, can be used to predict the influence of composite geometry as well as loading and material properties on the durability of composite structures.
4. The demonstrated procedure is flexible and applicable to all types of constituent materials, structural geometry, and loading. Hybrid composites and homogeneous materials, as well as laminated, stitched, woven, and braided composites can be simulated.
5. A general methodology has been demonstrated to investigate damage propagation and progressive fracture of composite structures due to cyclic loading.

REFERENCE

1. Minnetyan, L., Chamis, C.C., and Murthy, P.L.N. (1992)‘‘Structural Behavior of Composites with Progressive Fracture,” Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 11, No. 4, April, pp. 413-442
2. Murthy, P.L.N., and Chamis, C.C. (1986) Integrated Composite Analyzer (ICAN): Users and Programmers Manual, NASA Technical Paper 2515, March
3. Nakazawa, S., Dias, J.B., and Spiegel, M.S. (1987) MHOST Users’ Manual, Prepared for NASA Lewis Research Center by MARC Analysis Research Corp., April
4. Chamis, C.C., Murthy, P.L.N., and Minnetyan, L. Progressive fracture of polymer matrix composite structures. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 25, pp. 1-15

Information about authors

Minnetyan Levon – Professor, Clarkson University, Department of Civil and Environmental Engineering, Potsdam, NY 13699-5710, USA (1 315) 268 7741
E-mail levon@clarkson.edu

Marzocca Pier – Associate Professor, Clarkson University, Department of Mechanical and Aeronautical Engineering, Potsdam, NY 13699-5725, USA (1 315) 268 3875
E-mail pmarzocc@clarkson.edu

THE STABILITY OF NON-HOMOGENEOUS CYLINDRICAL THIN SHELLS SUBJECTED TO COMBINED LOADING

Najafizadeh M.M., Khazaeinejad P., Sharifian R.

The aim of the present paper is to study the buckling problem of non-homogeneous circular cylindrical thin shells under combined lateral pressure and axial compression. As is common for functionally graded cylindrical shells, the shell properties are assumed to vary continuously across the thickness direction. The analysis is presented using the first-order shear deformation theory. The stability equations are derived by the adjacent equilibrium criterion method. To solve the resulting equations and to obtain the critical loads, the closed-form solution is applied. The critical loads are obtained for cylindrical thin shells with non-homogeneity properties. The results reveal that by carefully choosing the material properties, the buckling capacity of shell will be increased.

1. INTRODUCTION

The response of shell structures to mechanical and thermal loads has been always the subject of significant research activities due to their potential for use in modern engineering applications especially in aerospace structures as thin-walled structures. Therefore, the shells with various material properties are frequently analyzed in order to economize on the amount of material used, to lighten of the shells, and to increase the strength of shells. It is known that by carefully choosing this parameter, a significant increase in stiffness, buckling and vibration capacities of the shell may be obtained. Many investigations have been reported for buckling problem of shells (e.g. references [1-2]). Another case of buckling problem is those written for buckling behavior of orthotropic, composite and non-homogeneous shells under various mechanical and thermal loads (e.g. references [3-4]). There are also many papers dealing with the buckling of functionally graded cylindrical shells (e.g. references [5-6]). From the above-mentioned references, it is evident that a few studies have focused on the buckling behavior of non-homogeneous cylindrical shells. Recentely, non-homogeneous shell structures have found wide applications in aerospace, automotive and marine industrials. The non-homogeneity of materials can be created due to various problems such as production techniques, radiation effect, and thermal polishing processes. The properties of these materials vary as a piecewise continuous or continuous functions of position in the body. By carefully choosing the non-homogeneous properties, we can decrease the geometry dimensions and weights of the shell structures.

The present paper deals with the buckling analysis of combined-loaded non-homogeneous circular cylindrical thin shells. A first-order shear deformation theory is employed to obtain the equilibrium equations, which include the non-linear terms of strains. Using the adjacent equilibrium criterion method, the governing stability equations in terms of force and moment resultants are derived. The closed-form solution is applied to help understand the buckling behavior of non-homogeneous cylindrical thin shells under combined axial compression and lateral pressure. The effects of variations of the shell characteristics and non-homogeneity parameter on the smallest buckling loads are discussed in detail.

2. FORMULATION

Consider a non-homogeneous circular cylindrical shell having the length L, the mean radius R, and a uniform thickness h. The cylindrical coordinate system is set on the middle surface of the shell (z=0). The shell is subjected to combined axial compression and lateral pressure. The shell properties are assumed vary with respect to thickness coordinate, as follows [4]

$$P(z) = P_0(1+\mu\phi(z)) \tag{2.1}$$

where P is the corresponding properties of non-homogeneous cylindrical shell which can be substituted by modulus of elasticity E and the Poisson's ratio υ, P_0 denotes a material property of homogeneous shell, « is the non-homogeneity parameter satisfying $0\leq\mu<1$, and ¤(z) is continuous function of the variation of material property. The shell displacement is based on the first-order shear deformation theory (FSDT). It is applicable and relatively accurate to predict the buckling loads of a wide range of structural problems. This theory can be expressed as

$$u(x,\theta,z)=u_0(x,\theta)+z\phi_x(x,\theta),\quad v(x,\theta,z)=v_0(x,\theta)+z\phi_\theta(x,\theta),\quad w(x,\theta,z)=w_0(x,\theta) \tag{2.2}$$

where u_0 (x,θ), v_0 (x,θ) and w_0 (x,θ) are the middle surface displacements, and ϕ_x (x,θ) and ϕ_θ (x,θ) describe the rotations about θ- and x-axes, respectively. The following expressions including non-linear terms are considered for kinematic relations

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^0=u_{0,x}+\frac{1}{2}w_{0,x}^2,\quad \varepsilon_\theta^0=\frac{v_{0,\theta}+w_0}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{w_{0,\theta}}{R}\right)^2,\quad \gamma_{x\theta}^0=\frac{u_{0,\theta}}{R}+v_{0,x}+\frac{w_{0,x}w_{0,\theta}}{R}\\
&\gamma_{xz}^0=u_1+w_{0,x},\qquad \gamma_{\theta z}^0=v_1+\frac{w_{0,\theta}}{R},\quad \kappa_x=u_{1,x},\quad \kappa_\theta=\frac{v_{1,\theta}}{R},\quad \kappa_{x\theta}=\frac{u_{1,\theta}}{R}+v_{1,x}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

The equilibrium equations based on the FSDT in terms of resultants are [7, 8]

$$\begin{aligned}
&RN_{x,x}+N_{x\theta,\theta}=0,\qquad RN_{x\theta,x}+N_{\theta,\theta}=0,\\
&RM_{x,x}+M_{x\theta,\theta}-RQ_x=0,\qquad RM_{x\theta,x}+M_{\theta,\theta}-RQ_\theta=0,\\
&R^2Q_{x,x}+RQ_{\theta,\theta}+R^2N_xw_{,xx}+2RN_{x\theta}w_{,x\theta}+N_\theta w_{,\theta\theta}-RN_\theta=0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

The following expressions relate the force and moment resultants, strains, and curvatures

$$\begin{aligned}
&N_x=A_{11}\varepsilon_x^0+B_{11}\kappa_x+A_{12}\varepsilon_\theta^0+B_{12}\kappa_\theta,\qquad M_x=B_{11}\varepsilon_x^0+D_{11}\kappa_x+B_{12}\varepsilon_\theta^0+D_{12}\kappa_\theta\\
&N_\theta=A_{12}\varepsilon_x^0+B_{12}\kappa_x+A_{11}\varepsilon_\theta^0+B_{11}\kappa_\theta,\qquad M_\theta=B_{12}\varepsilon_x^0+D_{12}\kappa_x+B_{11}\varepsilon_\theta^0+D_{11}\kappa_\theta\\
&N_{x\theta}=A_{22}\gamma_{x\theta}^0+B_{22}\kappa_{x\theta},\quad M_{x\theta}=B_{22}\gamma_{x\theta}^0+D_{22}\kappa_{x\theta},\quad Q_x=A_{22}\gamma_{xz}^0,\quad Q_\theta=A_{22}\gamma_{\theta z}^0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

where

$$\begin{aligned}
&(A_{11},B_{11},D_{11})=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}(1,z,z^2)\ \mathrm{d}z\\
&(A_{12},B_{12},D_{12})=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}(1,z,z^2)\ \mathrm{d}z\\
&(A_{22},B_{22},D_{22})=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{E(z)}{2+2\nu(z)}(1,z,z^2)\ \mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{2.6}$$

To obtain the buckling loads, stability equations are needed and these can be found by the adjacent equilibrium criterion method [7, 8]. If we assume that the equilibrium state of a shell under mechanical loads is defined in terms of displacement components u^0, v^0, and w^0, the displacement components of a neighboring stable state differ by u^1, v^1, and w^1 with respect to the equilibrium position. Thus, the total displacements of a neighboring state are

$$u=u^0+u^1,\qquad v=v^0+v^1,\qquad w=w^0+w^1 \tag{2.7}$$

The force resultants of a neighboring state may be related to the equilibrium state as

$$N_x=N_x^0+N_x^1,\qquad N_\theta=N_\theta^0+N_\theta^1,\qquad N_{x\theta}=N_{x\theta}^0+N_{x\theta}^1 \tag{2.8}$$

where N_x^1, N_θ^1 and $N_{x\theta}^1$ describe the linear parts of the force increments corresponding to u^1, v^1, and w^1. The stability equations may be obtained by substituting Eqs. (2.7) and (2.8) into equilibrium equations (4) as follows

$$
\begin{aligned}
&RN^1_{x,x} + N^1_{x\theta,x} = 0, \qquad RN^1_{x\theta,x} + N^1_{\theta,\theta} = 0,\\
&RM^1_{x,x} + M^1_{x\theta,x} - RQ^1_x = 0, \qquad RM^1_{x\theta,x} + M^1_{\theta,\theta} - RQ^1_\theta = 0,\\
&R^2Q^1_{x,x} + RQ^1_{\theta,\theta} + R^2N^0_x w^1_{,xx} + N^0_\theta w^1_{,\theta\theta} - RN^1_\theta = 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

where $N^0_x = -P/2®R$ and $N^0_\theta = -\bar{P}R$ are the pre-buckling mechanical forces which can be obtained by the equilibrium equations [9]. The superscript 1 describes the state of stability and the superscript 0 describes the state of equilibrium conditions and therefore drop out of the equations. Also, the non-linear terms with superscript 1 are ignored because they are small compared to the linear terms. The non-dimensional load parameter ¦, is defined to express the combination of the applied axial compression and external pressure. That is

$$
¦ = \frac{P}{2®R^2\bar{P}}
\tag{2.10}
$$

To solve these five equations for simply supported boundary conditions, an approximate solution for displacements and rotations needs to be carried out and is suggested by the following relations

$$
\begin{aligned}
&u^1 = \sum_m\sum_n U_{mn}\cos m_1x\sin n\theta, \qquad \varphi_x = \sum_m\sum_n X_{mn}\cos m_1x\sin n\theta\\
&v^1 = \sum_m\sum_n V_{mn}\sin m_1x\cos n\theta, \qquad \varphi_\theta = \sum_m\sum_n Y_{mn}\sin m_1x\cos n\theta\\
&w^1 = \sum_m\sum_n W_{mn}\sin m_1x\sin n\theta
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

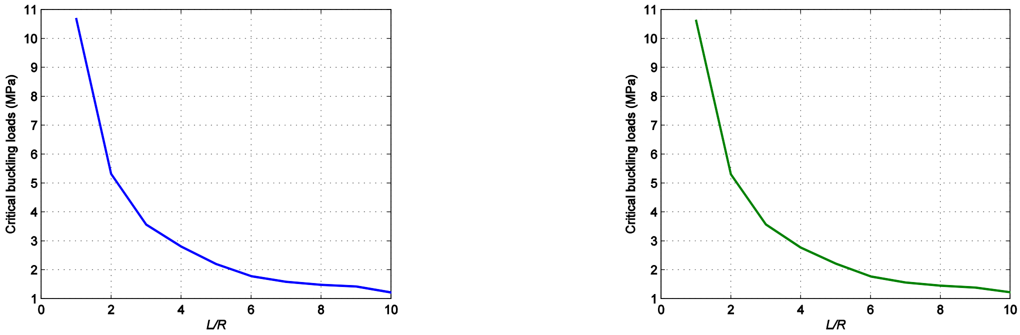
where $m_1 = m®/L$, m and n are the half-wave numbers in the x- and θ-directions, respectively, and U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, and Y_{mn} are the unknown coefficients. The relations (2.11) can then substitute into stability equations (2.9), where yields five sets of equations. A coefficient matrix could be found by collecting the five equations into matrix form with unknown functions of Eq. (2.11) as variables. In order to have a valid solution, the determinant of the coefficient matrix must be equal to zero. The resulting equation is a function depends on half-wave numbers, geometric, stiffness, and non-homogeneity parameters.

3. RESULTS AND DISCUSSION

The study presents buckling loads for combined-loaded non-homogeneous circular cylindrical thin shells having simply supported boundary conditions. The stainless steel is used as homogeneous material with E_0=200 GPa and υ_0=0.3. To investigate the accuracy of the present procedure, comparison studies of the critical buckling loads for homogeneous cylindrical shells with simply supported boundary conditions are presented in Table 2 for combined lateral pressure and axial compression. The numbers in brackets indicate the longitudinal and circumferential wave numbers, m and n, respectively. In all the cases, m=1, but the values of n depends upon the various parameters. The graph of dependency of critical loads for non-homogeneous cylindrical shells on the geometric ratios is shown in Figures 1 and 2. The applied external pressure and axial compression are related by $N^0_x = N^0_\theta$. The variation function of non-homogeneous shell is considered as ¤(z)=z/h. It is found that the critical loads are affected by increasing non-homogeneity parameter ¦ from 0 to 0.6. The maximum increase is about 3.5% for L/R=2 and the minimum decrease in about 1.9% for L/R=10. For very thin shells, the non-homogeneity parameter does not play a major role in predicting the buckling loads. The effects of non-homogeneity parameter are dependent of shell characteristics. For the combined-loaded non-homogeneous shells, by varying the non-homogeneity parameter, the shell buckles at the same values for half-wave numbers. For variations of R/h ratio from 30 to 300, the critical loads decrease about 100% for all the cases. The ratio L/R affects the critical loads about 59% to 80%. A careful choice of properties parameter μ yield improved buckling loads for a specific non-homogeneous shell. An additional observation is that, for very thin shells, the buckling loads are constant and do not depend on the combination of loads.

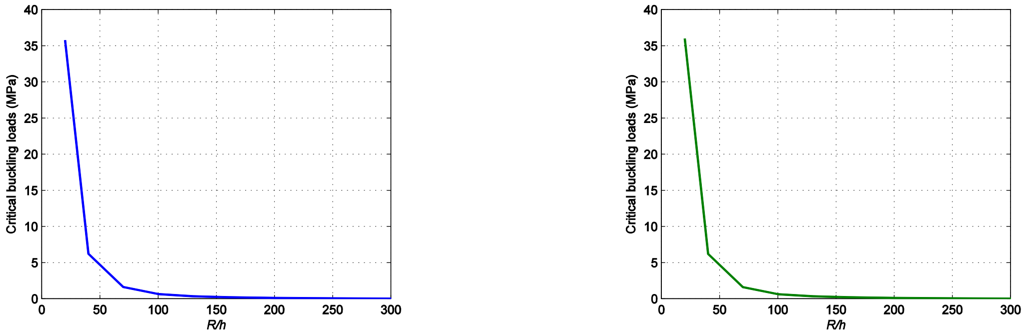
Table 1: Comparison of critical loads for combined-loaded homogeneous cylindrical shells (μ=0)

	L/*R*	*R*/*h*				
		5	10	50	100	500
Ref. [29]	5	1313.854 (1,2)	221.122 (1,2)	4.042 (1,3)	0.705 (1,4)	0.013 (1,6)
Present		1313.854 (1,2)	221.122 (1,2)	4.042 (1,3)	0.705 (1,4)	0.013 (1,6)
Ref. [29]	10	860.889 (1,1)	146.626 (1,2)	2.216 (1,2)	0.366 (1,3)	0.006 (1,4)
Present		860.889 (1,1)	146.626 (1,2)	2.216 (1,2)	0.366 (1,3)	0.006 (1,4)
Ref. [29]	20	325.507 (1,1)	57.074 (1,1)	1.191 (1,2)	0.176 (1,2)	0.003 (1,3)
Present		325.507 (1,1)	57.074 (1,1)	1.191 (1,2)	0.176 (1,2)	0.003 (1,3)
Ref. [29]	50	278.011 (1,1)	35.438 (1,1)	0.397 (1,1)	0.093 (1,1)	0.001 (1,2)
Present		278.011 (1,1)	35.438 (1,1)	0.397 (1,1)	0.093 (1,1)	0.001 (1,2)



(a) (b)

Figure 1: Critical loads for a non-homogeneous cylindrical shell under combined loading versus length-to-radius ratio (*R*/*h*=50); (a) ¦=0.5, and (b): ¦=0.9.



(a) (b)

Figure 2: Critical loads for a non-homogeneous cylindrical shell under combined loading versus radius-to-thickness ratio (*L*/*R*=3); (a) ¦=0.5, and (b): ¦=0.9.

4. CONCLUSIONS

A simple closed-form solution for the buckling load of non-homogeneous circular cylindrical shells has been developed from first-order shear deformation theory. It is shown to predict the buckling load to an accuracy of within % when compared with other analysis. The non-homogeneity parameter will reduce the buckling load of the cylinder considerably up to % depending on the geometric dimensions of cylinder. However, when the cylinder is very thin, the non-homogeneity parameter has not significant effect on the critical buckling loads.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work is supported by a Research Grant entitled " Buckling analysis of non-homogeneous cylindrical shells under combined loading" from Islamic Azad University, Arak Branch, Arak, Iran. The authors gratefully acknowledge the financial support of this work.

REFERENCE

1. Donnell L.H. Stability of Thin-walled Tubes Under Torsion, NACA Tr-479, 1934.
2. Eslami M.R. and Ziaii A.R. Thermoelastic buckling of thin cylindrical shells based on improved stability equations. Journal of Thermal Stresses, vol. 19, no. 4, pp. 299-315, 1996.
3. Kardomateas G.A. and Philobos M.S. Buckling of thick orthotropic cylindrical shells under combined external pressure and axial compression. AIAA Journal, vol. 33, no. 10, pp. 1946-1953, 1995.
4. Sofiyev A.H., Yücel K., Avcar M. and Zerin, Z. The dynamic stability of orthotropic cylindrical shells with non-homogeneous material properties under axial compressive load varying as a parabolic function of time. Journal of Reinforced Plastics and composites, vol. 25, no. 18, pp. 1877-1886, 2006.
5. Reddy J.N. and Chin C.D. Thermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates. Journal of Thermal Stresses, vol. 21, pp. 593-626, 1998.
6. Shahsiah R. and Eslami M.R. Functionally graded cylindrical shell thermal instability based on improved Donnell equation. AIAA Journal, vol. 41, no. 9, pp. 1819-1824, 2003.
7. Khazaeinejad P., Najafizadeh M.M., Jenabi J. and Isvandzibaei M.R. On the buckling of functionally graded cylindrical shells under combined external pressure and axial compression, ASME Journal of Pressure Vessel and Technology, vol. 132, 2010.
8. Khazaeinejad P. and Najafizadeh M.M. Mechanical buckling of cylindrical shells with varying material properties. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 224, 2010.
9. Brush D.O. and Almorth B.O. Buckling of bars, plates, and shells. New York, McGraw-Hill, 1975.

Information about authors

Najafizadeh Mohammad Mahdi – Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran (98 861) 367 0084
E-mail m-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

Khazaeinejad Payam – Research Associate, Department of Mechanical Engineering, Arak Branch, Islamic Azad University, Arak, Iran (98 861) 367 0084
E-mail khazaeinejad@asme.org

Sharifian Reza – PhD student, Department of Mechanical Engineering, Yerevan University, Yearvan
Email sharifian@hepcoir.com

ON A SCALE-BRIDGING MECHANICAL MODEL OF CARBON NANOTUBES

Podio-Guidugli P.

In this expository paper, intended as a short account of the contents of [1], a bottom-up method to model the mechanical behavior of carbon nanotubes is presented. This method is meant to bridge between three different scales: the *microscopic* scale of *molecular mechanics*; a *mesoscopic* scale, at which concepts from *discrete structure mechanics* apply; and the *macroscopic* scale of *continuous structure mechanics*.

Introduction

Carbon nanotubes (CNTs) were discovered in 1991 by S. Iijima [2]. They are large *macromolecules*, composed exclusively of carbon atoms, having many remarkable physical properties. In this study, we concentrate on their mechanical behavior. To this purpose, it is convenient to recapitulate some basic information about their shape and size.

As to their shape, CNTs are long and thin cylinders obtained, in imagination, by rolling up a *graphene*, that is, a monolayer flat sheet of graphite (a two-dimensional hexagonal lattice of carbon atoms). There are various rolling-up strategies, leading to CNTs of different *chirality*; the *chiral* (or *roll-up*) *vector* is:

$$c_h = n\boldsymbol{a}_1 + m\boldsymbol{a}_2$$

with n, m two integers (Fig. 1); $(n,0)$- and (n,n)- nanotubes are called, respectively, *zigzag* and *armchair*.

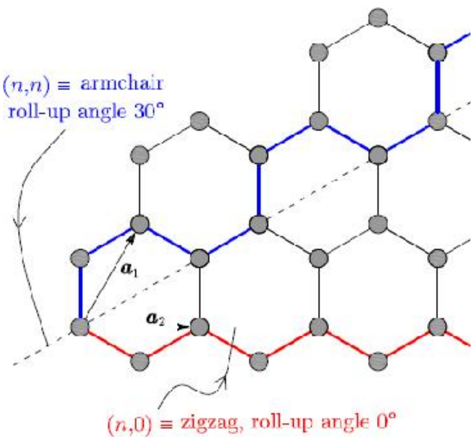


Figure 1. *Rolling a graphene up the armchair and zig-zag ways*

There are single-wall and multi-wall CNTs, denoted by SWCNTs and MWCNTs; due to the actual manifacturing procedures, they all have approximately hemispherical end caps. For simplicity, we shall confine attention to *armchair SWCNTs, long enough to ignore end effects*.

As to the size of CNTs, the $C-C$ bond length (the side length s of the typical hexagon in a graphene lattice) is about $0.142nm$; consequently, two opposite C atoms are spaced by $\left(1+2\cos\frac{\pi}{3}\right)s = 0.283nm =$ the hexagon's diameter; equally placed C atoms belonging to adjacent hexagons are spaced by $2\sin\frac{\pi}{3}s = 0.2456nm =$ the distance of two parallel sides of a hexagon (to fix ideas, the spacing between two adjacent cylinders in a MWNT is about $0.34nm$).

Recently, a bottom-up modeling method has been proposed by various authors [3,4,5,6,7,8], with application to CNTs and polymer composites in mind. There are of course differences in ingredients and developments in the cited papers, but the purpose of the method they propose is one and the same, to bridge between three different scales: the *microscopic scale*, at which the bonding and non-bonding energies keeping together a given material complex - a CNT, in our case - are evaluated by molecular mechanics (MM) computations; the *mesoscopic scale*, at which a mechanical caricature of a CNT as an orderly arrangement of (pseudo) pin-jointed sticks and (axial and spiral) springs is drawn, in the fashion of *discrete* structure mechanics (DSM); and the *macroscopic scale*, at which the mesoscopic model is assimilated to a suitable model taken from the library of *continuous* structure mechanics (CSM). The method's procedure is also one and the same: to connect the scale-disparate viewpoints of chemical physics and structure mechanics by equating the energies assigned to the given material complex at all the three scales, so as *to deduce the targeted macroscopic mechanical behavior from the available microscopic chemical-physical information*.

The purpose of [1] was to reformulate and generalize such a bottom-up modeling approach, as applied to nanotubes, by introducing different choices of mesoscopic and macroscopic energies while keeping the contributions to the total microscopic energy in their standard forms. What follows is a succinct exposition of the main developments in that paper.

Microscopic energies

At nanometer scale, atomic interactions are modeled by either quantum mechanics (QM) or MM, in both cases by striving to capture the variation of system energy with changes in atomic positions. QM can describe rigorously the electronic structure of a material complex, but its computational cost becomes quickly prohibitive when the number of atoms involved increases. MM is based on the Born-Oppenheimer approximation, according to which the electronic motion and the nuclear motion of a molecule can be separated. Consistent with this simplifying assumption, the total potential energy U is expressed as a sum of several terms:

$$U = U_\rho + U_\theta + U_\omega + U_\tau + U_{vdW} + U_C\,, \tag{1}$$

where U_ρ, U_θ, U_ω, and U_τ denote the *bonding energies* respectively associated with *stretching* (of covalent bonds), *angle variation* (between two valence bonds), *torsion* (around bonds), and *improper torsion*; and where the *non-bonding energies* U_{vdW} and U_C account for, respectively, *van der Waals* and *Coulomb interactions*.

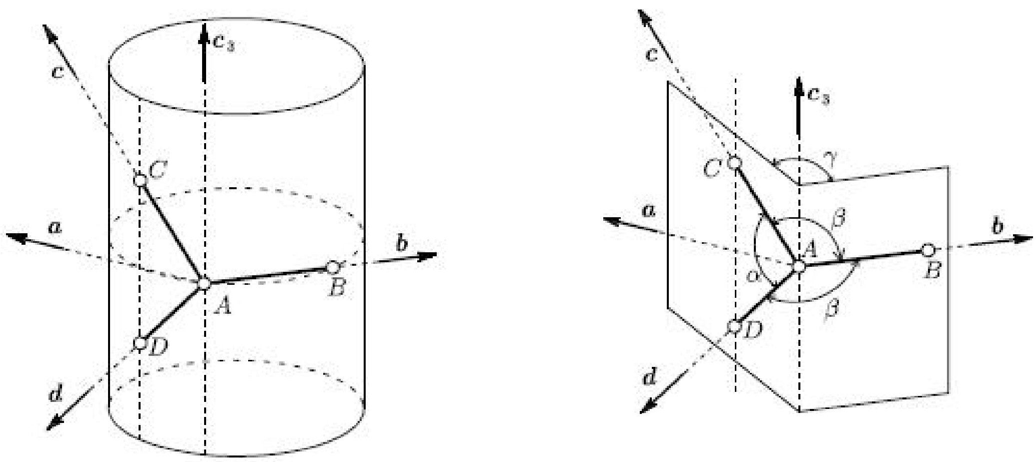
In the case of CNTs, non-bonding energies are customarily ignored. As to bonding energies, all other energies are considered negligible when compared with U_ρ and U_θ, whose customary *harmonic approximations* are:

$$U_\rho = \frac{1}{2}\sum k_b\left(\rho-\rho_{ref}\right)^2, \qquad U_\theta = \frac{1}{2}\sum k_\theta\left(\theta-\theta_{ref}\right)^2 \tag{2}$$

Thus, the only bond-stiffness constants of importance are k_b and k_θ; they can be obtained by *ab initio* QM evaluations or fitted to experiments.

Mesoscopic energies

As anticipated, we here deal exclusively with armchair SWCNTs. Let the typical atom A of such a nanotube be sitting at the origin of an orthogonal cartesian frame of unit vectors c_i:



Note that

$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \text{with} \qquad \cos\gamma = -\cos\frac{\pi}{2n} \tag{3}$$

The three next neighbors of A, labelled B, C and D, sit at the following positions:

$$l^{-1}\boldsymbol{p}_B := \boldsymbol{b},$$

$$l^{-1}\boldsymbol{p}_C := \boldsymbol{c} = \cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{a} + \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{c}_3, \tag{4}$$

$$l^{-1}\boldsymbol{p}_D := \boldsymbol{d} = \cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{a} - \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{c}_3,$$

where both unit vectors $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are orthogonal to $\boldsymbol{c}_3$. Note that $\gamma \to \pi$ in the CNT-to-graphene limit, i.e., when $n \to \infty$.

An *elementary unit* (EU) of the CNT at hand consists of atom A and its three bonds. Within the framework of DSM, an EU is schematized in its reference configuration as a triplet of l -long sticks capable of axial deformations only, all pin-jointed at A; the sticks have the directions of the unit vectors $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, and are pair-linked by three spiral springs of identical stiffness.

To evaluate the linearly elastic response to axial loads of our EU, we let k_s and k_a denote, respectively, the stiffness constant of spiral springs and the stretching stiffness of a bond. On assuming that point A is kept fixed and a force $\boldsymbol{f} = f\,\boldsymbol{c}_3$ is applied at point C, we have that:

$$f \sin\frac{\alpha}{2} = \kappa_a \Delta l\,, \tag{5}$$

where $\boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{c} = f \sin\frac{\alpha}{2}$ is the axial component of the force (so that

$$F = (2n)\,\boldsymbol{f} \tag{6}$$

is the total load applied to the CNT) and where Δl is the accompanying axial stretching of the stick parallel to c. Moreover, on applying *Euler's cut principle* of SM to the AC -stick with a view toward balancing moments about point A, we have that:

$$\boldsymbol{p}_C \times \boldsymbol{f} = \kappa_s \left(\Delta\alpha \left| \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{c} \right|^{-1} \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{c} + \Delta\beta \left| \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \right|^{-1} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \right) + \boldsymbol{m}_R \tag{7}$$

Here $\Delta\alpha$ and $\Delta\beta$ are the angle changes induced in response to the vector moment of force $\boldsymbol{f}$ with respect to point A, and $\boldsymbol{m}_R$ is a *reactive couple* that the device used to anchor our elementary unit at A might have to provide in order to guarantee equilibrium. A quick computation yields:

$$\boldsymbol{p}_C \times \boldsymbol{f} = \left(f\, l \cos\frac{\alpha}{2} \right) \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}_3\,;$$

in addition, it is not difficult to see that

$$\left| \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{c} \right|^{-1} \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}_3$$

and that

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\gamma\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}_3 + \sin\gamma \left(\sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{a} - \cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{c}_3 \right), \qquad \left| \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \right|^2 = \sin^2\beta\,.$$

All in all, (7) can be given the form of the following system:

$$f l \cos\frac{\alpha}{2} = \kappa_s \left(\Delta\alpha + \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\beta}\Delta\beta \right),$$

$$\boldsymbol{m}_R = \Delta\beta \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \left(\cos\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{c}_3 - \sin\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{a} \right). \tag{8}$$

Remark. The second of equations (8) is irrelevant to determine the deformed shape of the EU under the given load; it evaporates in the $n \to \infty$ limit, that is to say, in the CNT-to-graphene limit (when

$\beta \to \alpha = 2\pi/3$). Interestingly, the first does not depend explicitly on n, in that it characterizes some aspects (not all!) of the elastic response of a typical armchair EU.

Differentiation of equation $(3)_1$ yields an expression for $\Delta\beta$ as a function of $\Delta\alpha$:

$$\Delta\beta = \delta(\alpha,\beta,\gamma)\Delta\alpha, \qquad \delta(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\beta}\cos\gamma. \tag{9}$$

We are now in a position to write down an expression for the *stored energy of the EU*:

$$U_{meso} = \frac{1}{2}\kappa_a(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}\kappa_s\left((\Delta\alpha)^2 + (\Delta\beta)^2\right),$$

whence

$$U_{meso} = \frac{1}{2}\kappa_a(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}\kappa_s\left(1+\delta^2(\alpha,\beta,\gamma)\right)(\Delta\alpha)^2, \tag{10}$$

Our first scale-bridging step consists in equating the microscopic energy $U_\rho\,(U_\theta)$ in (2) and the first (second) mesoscopic addendendum in (10), so as to have that:

$$k_\rho = \kappa_a, \qquad k_\theta = \kappa_s\left(1+\delta^2(\alpha,\beta,\gamma)\right). \tag{11}$$

Note that, as expected, $\lim_{n\to\infty}\delta(\alpha,\beta,\gamma) = -1/2$; hence, for a graphene sheet, $k_\rho = \kappa_a$, $k_\theta = 3/4\,\kappa_s$.

Note also that, with (9), (5), $(8)_1$, and (11), one arrives at:

$$\Delta\alpha = \bar{\delta}(\alpha,\beta,\gamma,l;k_\rho,k_\theta)\frac{\Delta l}{l}, \tag{12}$$

where the form of function $\bar{\delta}$ is easy to find (see [1]). Therefore, we can set:

$$U_{meso} = \frac{1}{2}\kappa_{meso}\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2, \qquad \kappa_{meso} = \hat{\kappa}_{meso}(\alpha,\beta,\gamma,l;k_\rho,k_\theta), \tag{13}$$

with $\hat{\kappa}_{meso}$ a known function.

Macroscopic energy

Our choice of an energy density from the library of linear CSM is constrained by our former modeling choices: the chosen energy, harmonic in form, must involve at most two CSM stiffness parameters, to be determined in terms of the DSM parameters κ_a, κ_s just as those were determined by the MM parameters k_ρ, k_θ.

For this reason, it is here for us out of question to think of the standard 1-D beam model, which has three stiffness parameters (but see [3], [5], and [8]). On the other hand, while the parameters in the standard cylindrical shell model are two, they appear in a pseudo stress/strain relation which is in fact the solution of a system of differential equations under a specific set of boundary conditions; moreover, it is by no means obvious what thickness a SWCNT or a graphene should be assigned, when they are modeled as a shell or a membrane. For a thorough discussion of these issues, the reader is referred to [1]. At this moment, we are content with laying down a quick description of a simple path, similar but not identical to the one in [4], to link the material moduli parameterizing the macroscopic response to the mesoscopic stiffness parameters; other different paths are explored in [1].

We assume that, when axially loaded, a CNT behaves like a sheet of unit thickness, made of a material characterized by two elastic moduli ν_P and E_Y, the one Poisson-like the other Young-like. As to the first, we set:

$$\nu_P := -\frac{\varepsilon_{circ}}{\varepsilon_{ax}},$$

where the *axial strain* ε_{ax} and the *circumferential strain* ε_{circ} are defined as follows:

$$\varepsilon_{ax} := \frac{\Delta\left(l\sin\alpha/2\right)}{l\sin\alpha/2} = \left(1+\tilde{\delta}\left(\alpha,\beta,\gamma,l;k_\rho,k_\theta\right)\right)\frac{\Delta l}{l},$$

$$\varepsilon_{circ} := \frac{\Delta\left(l_0 + l\cos\alpha/2\right)}{l_0 + l\cos\alpha/2} = \left(1+\hat{\delta}\left(\alpha,\beta,\gamma,l;k_\rho,k_\theta\right)\right)\frac{\Delta l}{l};$$

here l_0 denotes the undeformed length of a EU stick and the form of functions $\tilde{\delta}$ and $\hat{\delta}$ is known. Thus,

$$\nu_P = -\frac{1+\hat{\delta}\left(\alpha,\beta,\gamma,l;k_\rho,k_\theta\right)}{1+\tilde{\delta}\left(\alpha,\beta,\gamma,l;k_\rho,k_\theta\right)}\ , \tag{14}$$

As to the second elastic modulus, we set:

$$U_{meso} = U_{macro} := \frac{1}{2}E_Y\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2, \tag{15}$$

and we make use of (13) to obtain:

$$E_Y = \hat{\kappa}_{meso}\left(\alpha,\beta,\gamma,l;k_\rho,k_\theta\right).$$

Finally, we note that, in view of (6), the nanotube's macroscopic response to axial loading can be given one of the two equivalent forms:

$$F = \left(2\pi R E_Y\right)\varepsilon_{ax} \quad \Leftrightarrow \quad f = \left(\pi R_0 E_Y\right)\varepsilon_{ax}\ ,$$

where $R = n\hat{R}_0\left(l_0,\alpha\right)$ is the radius of the nanotube and $\hat{R}_0$ is a known function.

REFERENCES

1. Chandrajit Bajaj and Paolo Podio-Guidugli, From atomistic to continuum modeling of carbon nanotubes. Forthcoming (2010).
2. S. Iijima, Nature, 354 56 (1991)
3. Chunyu Li and Tsu-Wei Chou, A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. *Int. J. Solids Struct.*, 40:2487, 2003.
4. Tienchong Chang and Huajian Gao, Size-dependent elastic properties of a single-walled carbon nanotube via a molecular mechanics model. *J. Mech. Phys. Solids*, 51:1059, 2003.
5. Lianxi Shen and Jackie Li, Transversely isotropic elastic properties of single-walled carbon nanotubes. *Phys. Rev. B* 69:045414, 2004.
6. G.M. Odegard, ‘‘Modeling of Carbon Nanotube/Polymer Composites". In *Nanoengineering of Structural, Functional and Smart Materials*, eds. M.J. Schulz, A. Kelkar, M.J. Sundaresan, CRC Press (2005).
7. G.M. Odegard, ‘‘Equivalent-Continuum Modeling of Nanostructured Materials". In *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology*, eds. M. Rieth and W. Schommers, American Scientific Publishers (2006).
8. H. Wan and F. Delale, A structural mechanics approach for predicting the mechanical properties of carbon nanotubes. *Meccanica* 45: 4351, 2010.

Information about author

Podio-Guidugli Paolo - full professor, Dept. of Civil engineering, U. of Rome TorVergata
Viale Politecnico, 1 – 00133 Rome (Italy),
Phone +39 06 72597051,   Fax +39 06 72597051
E-mail: ppg@uniroma2.it

COMPARATIVE STUDY OF NON-CONSERVATIVE AND CONSERVATIVE PROBLEMS OF STABILITY OF A RECTANGULAR PLATE

Sharifian R., Belubekyan V.M.

In the present paper buckling a plate is considered, when, in contrary to [1], the plate is loaded along the edges which are free in terms of displacement and rotation angle. In such case it is possible to consider both problem when the load is conservative, as well as a problem when the load is a non-conservative follower force. For these problems critical loads are determined for limit cases of narrow and very wide plates.

1. Let geometry of plate in Cartesian coordinate system to be defined by $-0.5a \le x \le 0.5a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Stability equation of rectangular isotropic plate pre-stressed along edges $x=\pm a$ by a load P has the form [9]:

$$D\Delta^2 w + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \ , \ D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \tag{1.1}$$

Where w is deflection of the plate, D is flexural stiffness, E is Young modulus and v is the Poisson ratio. The two unloaded edges of the plate are hinged:

$$w = 0 \ , \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ \text{at } y=0, b \tag{1.2}$$

On the other two edges of the plate conditions of free edge under load P are given. In case of conservative load these conditions will be:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \frac{P}{D}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{at } x = \pm 0.5a \tag{1.3}$$

And in the case of follower force [10] these conditions will be:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \ \text{at } x = \pm 0.5a \tag{1.4}$$

Solution of the equation (1.1), satisfying to conditions (1.2) is searched as Fourier series expansion, which yields to ordinary differential equations with respect to unknown functions $f_n(x)$. The roots of respective characteristic equation are obtained as follows:

$$p_{1,2} = s_n \pm 0.5i\text{¥}_n \ \ s_n = \sqrt{1-0.25\text{¥}_n^2} \tag{1.5}$$

The shapes of buckling of the plate can be separated into symmetric and anti-symmetric shapes relative to Oy axe. The solutions of symmetric shape should satisfy following conditions:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \ \text{at } x = 0 \tag{1.6}$$

Requirement that solution should satisfy to conditions (1.6) leads to following symmetric solution:

$$f_n(x) = B_1 \cosh \text{ª}_n p_1 x + B_2 \cosh \text{ª}_n p_2 x \tag{1.7}$$

The anti-symmetric solution should satisfy to conditions:

$$w = 0 , \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \ \text{at } x=0 \tag{1.8}$$

and is obtained as:

$$f_n(x) = C_1 \sinh \text{ª}_n p_1 x + C_2 \sinh \text{ª}_n p_2 x \tag{1.9}$$

2. Analysis of symmetric case

In the case of symmetric buckling shape, substituting (1.7) into boundary conditions (1.3) at *x=0.5a*, and introducing notation $¸_n = \frac{ª_n a}{2} = \frac{n®a}{2b}$, leads to following eigenvalue equation for critical loads:

$$p_1(p_2^2 - ¬)(p_1^2 - 2 + ¬ + ¥_n^2)\tanh p_1 ¸_n = p_2(p_1^2 - ¬)(p_2^2 - 2 + ¬ + ¥_n^2)\tanh p_2 ¸_n \tag{2.1}$$

The equation (2.1) has root $¥_n = 2$, which corresponds the trivial solution $w \equiv 0$. In the following we consider a question if the equation (2.1) has a root in range

$$¥_n < 2 \tag{2.2}$$

The transcendental equation (2.1) defines eigenvalues $¥_n$ (critical loads), which have to be real numbers, despite the fact that coefficients of the equation are complex numbers. Applying some transforms, It is possible to rewrite the equation with all coefficients being real numbers in the following form:

$$0.5¥_n\left((3+¬)(1-¬)-¥_n^2\right)\sinh 2s_n¸_n - s_n\left((1-¬)^2-¥_n^2\right)\sin ¥_n¸_n = 0 \tag{2.3}$$

Consider narrow plate approximation

$$b << a\ ,\ ¸_n >> 1 \tag{2.4}$$

From (2.3) for parameter defining the critical load we obtain:

$$¥_n^2 = (3+¬)(1-¬) < 4 \tag{2.5}$$

In a particular case of minimal critical load *(n=1)*, according to (1.6) and (2.5), it follows $P_* = 3®^2 b^{-2} D$ when *v=0* and $P_* = 1.75®^2 b^{-2} D$ when *v =0*.5. It is important to note, that the value of critical load (2.5) yields not only for limit case $¸_n \to \infty$, but also when

$$¸_n = m®\left((3+¬)(1-¬)-¥_n^2\right)^{-1/2} \qquad m=1,2,\ldots$$

For example, when *v=0 .25*, according to (2.5), it follows that $¥_n = \sqrt{39}/4 \approx 1.561$, and expression (2.5) is valid for $¸_n = 4®/\sqrt{39} \approx 2.012$ as well as for $¸_n = 8®/\sqrt{39} \approx 4.024$. A Matlab program is written to obtain numerical values of $¥_n$ vs. $¸_n$ and ³ , and results are represented in Table 1.

Table 1.

³	$¸_n$	$¥_n$
0.25	2	1.5625
0.25	2.5	1.5358
0.25	3	1.5402
0.25	3.5	1.5524
0.25	4	1.5609

Numerical values of $¥_n$ vs. $¸_n$ and ³

Also provided some plots of $f(¥_n)$ according to Eq. (2.3) for values of $¸_n = 2, 2.5, 3, 3.5, 4$. Results in terms of non-dimensional buckling loads, $\overline{P} = \frac{Pb^2}{®^2 D}$, versus plate aspect ratio , a/b are represented in Figure 1.

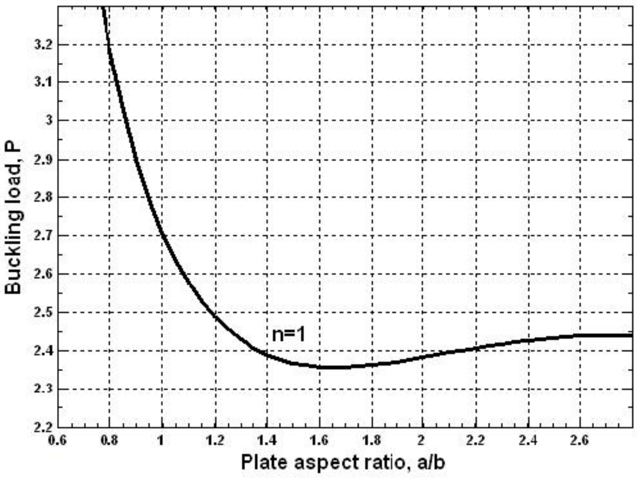


Fig.1. Nondimensional buckling loads, $\overline{P} = \dfrac{Pb^2}{\pi^2 D}$, versus plate aspect ratio , a/b and *n=1*

The minimum value of the buckling load $\overline{P} = 2.357$ occurs at $a/b = 1.7$ for *n=1*, and $\overline{P} = 9.428$ Occurs at $a/b = 0.84$ for *n=2.*

3. Follower load

Let the load acting on the edges of the plate be a follower force. The requirement that the symmetric solution should satisfy to boundary condition of non-conservative problem (1.4) yields to equation:

$$p_1(p_2^2 - \nu)(p_1^2 - 2 + \nu)\tanh p_1 \mu_n = p_2(p_1^2 - \nu)(p_2^2 - 2 + \nu)\tanh p_2 \mu_n \quad (3.1)$$

Equation (3.1) differs from the corresponding equation of conservative problem in that it does not contain λ_n explicitly. Applying to (3.1) the same transformations as for (2.1), we obtain:

$$0.5\lambda_n\left((3+\nu)(1-\nu)+\nu\lambda_n^2\right)\sinh 2s_n\mu_n - s_n\left((1-\nu)^2-\nu\lambda_n^2\right)\sin\lambda_n\mu_n = 0 \quad (3.2)$$

The equation (3.2) is the analog of equation (2.3) for follower load case. From (3.2) follows that under assumptions of narrow plate (2.4), no roots exists that would satisfy to condition (2.2). In case of general plate this statement is still valid. Under condition $\lambda_n > 2$ the roots of equation (3.2) are defined by following expressions: $\sqrt{\lambda_n^2 - 4}\,\mu_n = k\pi$, $\lambda_n \mu_n = m\pi$ *k,m=1,2,…* (3.3)

This system of equations will have real positive roots under condition m>k

$$\lambda_n = \frac{2m}{\sqrt{m^2-k^2}} \text{ , when } \mu_n = \frac{\pi}{2}\sqrt{m^2-k^2} \quad (3.4)$$

According to (3.4) the parameter representing critical load satisfies to condition $\lambda_n > 2$. Thus for considered plate under follower load also static (divergent) loss of stability is possible.

4. Anti-symmetric shape of buckling

The requirement that the solution (1.9) satisfies to conditions (1.3) when *x=0.5* a lead to the following equation relative to the desired parameter of critical load λ_n

$$J_1 \tanh p_2 \mu_n = J_2 \tanh p_1 \mu_n \quad (4.1)$$

Using the identity (2.5) the equation (4.1) similar to the p.2, is reduced to

$$0.5\lambda_n\left((3+\nu)(1-\nu)-\lambda_n^2\right)\sinh 2s_n\mu_n + s_n\left((1-\nu)^2-\lambda_n^2\right)\sin\lambda_n\mu_n = 0 \quad (4.2)$$

The equation (4.2) differs from the equation (2.3) only by the sign of second term.

REFERENCE

1. A. Yu. Ishlinskii, On a limiting process in the theory of the stability of elastic rectangular plates. Dokl. Akad. Nauk SSSR 95, 3, 477-479, 1954
2. N. V. Banichuk and A. Yu. Ishlinskii, Some special features of problems of the stability and vibrations of rectangular plates. J. Appl. Maths. Mechs. , Vol. 59, No 4, pp. 593-597, 1995
3. N.V. Banichuk and A. A. Barsuk, Localization of Eigen forms and limit transitions in problems of stability of rectangular plates. J. Appl. Maths. Mechs. , Vol. 72, No 2, pp. 302-307, 2008
4. V.M. Belubekyan, on the problem of stability of orthotropic rectangular plate with two free opposite edges. The problem of Ishlinskii. Proc. International Sc. And Tech. conf. “Architecture and construction – contemporary problems” Yerevan, Yerevan State University of Architecture and Construction, 2008, Vol.3, pp. 80-83.
5. L.A. Movsisyan, on the stability of rectangular plate with two free edges. Proc. Armenian National Sc. Academy, Mechanics, 2008, Vol. 61, pp. 33-35.
6. M.V. Belubekyan, Problems of localized instability of plates. Optimal control, stability and robustness of mechanical systems. Yerevan, YSU, 1997, pp 95-99.
7. V.M. Belubekyan, On the problem of stability of plates with account of transverse shears. Proc Russian Academy of Sc., Mechanics of Solid Body (MTT), 2004, No 2. p 126-131
8. M.V. Belubekyan and E. V. Chil-Akobyan, Problems of localized instability of plates with a free edge. Proc. Armenian National Sc. Academy, Mechanics, 2004, Vol. 57, No 2.
9. S.P. Timoshenko and S. Voinovski-Kriger, Plates and shells. Moscow: Phys-Math-Lit, 1963. 636p.
10. V.V. Bolotin, Non-conservative problems of elastic stability. –Moscow: Fismatgiz, 1961. 341 p.

Information about authors

Sharifian Reza–Chair of Department of Mechanics, Hadid Arak-Iran Training Center of Applied Science and Technology under the University of Applied Science and Technology. (+98 861) 3662352
E-mail: sharifian@hepcoir.com

Belubekyan Vagharshak – assistant professor, Yerevan State University, Faculty of Mathematics and Mechanics (374 10) 58 00 96, (374 91) 20 95 18
E-mail: vbelub@gmail.com

ALGORITHMS FOR CRACK RECONSTRUCTION IN THREE-DIMENSIONAL INVERSE ELASTIC PROBLEMS OF THE SCATTERING THEORY

Sumbatyan M.A., Brigante M.

We study the 3d inverse reconstruction problem for a plane crack of penny-shaped geometry located in the linear homogeneous material. It is assumed that the process is harmonic in time. The direct problem is reduced a boundary integral equation, and a numerical collocation technique is developed to solve this equation. The inverse reconstruction problem is formulated on the basis of far-field back-scattered amplitude, known for all observation angles at a certain fixed frequency. The formulated inverse problem is reduced to a minimization of the discrepancy functional by methods of global random search.

1. Let us assume that a certain US sensor is scanning (echo-method) around any crack detected in an elastic material. Usually, the position of the cracks can be found from the "time-of-flight" information [1], since any delay in time of US signal, reflected from crack's boundary surface, can simply be recalculated in terms of distance between the transducer and the defect. Let us also assume the shape of the crack to be of simplest "penny-shaped" form. We also assume that among two existing types of US waves, longitudinal and transverse, the dominant wave in the solid under the testing is longitudinal. Let us start from the case of acoustically soft crack, when the boundary condition is $p|_S = 0$. Then in frames of the scalar model, where the process is harmonic in time with the factor $e^{-i\mu t}$ (μ is the angular frequency), the diffraction by the crack is described by the following basic Kirchhoff-Helmholtz integral representation [2]:

$$p^{sc}(x) = \int_S G(y,x) g(y) ds_y, \quad x \in R^3 \setminus S, \qquad g(y) = \left.\frac{\partial p(y)}{\partial n_y}\right|_{S^+} + \left.\frac{\partial p(y)}{\partial n_y}\right|_{S^-},$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3), \qquad G(y,x) = G(r) = \frac{e^{ikr}}{4\circledR r}, \tag{1.1}$$

$$r = |y - x| = \left[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2\right]^{1/2}, \qquad k = \frac{\mu}{c}.$$

Here $p(x) = p^{sc}(x) + p^{inc}(x)$ is the full acoustic pressure; $p^{inc}(x)$, the incident one; and $p^{sc}(x)$, the scattered wave acoustic pressure field; $g(y)$ is an unknown function defined over crack S; $\overline{n}_y$ is the outer unit normal to surface S at point $y \in S$; and ds_y, elementary area at the same point. Obviously, parameter k is the wave number. Representation (1.1) is valid at any point x located outside crack's surface S.

Now the basic integral equation for the direct problem in the considered case of acoustically soft crack can simply be obtained from (1.1) and the boundary condition $p^{sc}(x) = -p^{inc}(x)$ if point x tends to surface S:

$$\int_S G(y,x) g(y) ds_y = -p^{inc}(x), \qquad x \in S, \tag{1.2}$$

where we have taken into account that the potential of single layer is a continuous function in R^3 [2].

Equation (1.2) is a Fredholm integral equation of the first kind arising in the classical potential theory of mathematical physics. Its kernel has a weak, i.e integrable singularity as $y \to x$.

Since the position of the crack is detected by the time-of-flight measurements, we may couple the center of the global Cartesian coordinate system just with the center of the crack. The "internal" global variable which is used for any integration over S is denoted $y = (y_1, y_2, y_3)$ and the "external" variable is designated as $x = (x_1, x_2, x_3)$, see Fig. 1.

Besides, when solving any integral equation over domain S occupied by the crack, it is convenient to introduce a local coordinate system coupled with the crack. By analogy to global coordinates, the "internal" variable is denoted in the local coordinate system as $¸ = (¸_1, ¸_2, ¸_3)$ (analogous to y) and the "external" variable as $z = (z_1, z_2, z_3)$ (analogous to x). They are arranged so that axes $¸_3$ and z_3 are directed in parallel to normal $\overline{n}$ to domain S, and the origin for both them is placed at the center of the penny-shaped crack. Then the face of the crack in both coordinate systems corresponds to the third coordinate equal to zero, namely $S : ¸_3 = 0; z_3 = 0$. Besides, the unit normal vector in the local coordinate system is $\overline{n} = \{0,0,1\}$. There is shown in Fig. 1 the penny-shaped crack with a unit normal $\overline{n}$. The plane of the crack is inclined with respect to the global horizontal plane $x_1 - x_2$ by the angle ¯ , hence the angle between vector $\overline{n}$ and axis x_3 is ¯ too. The straight-line of the intersection between the crack and the plane $x_1 - x_2$ contains a certain diameter of the crack situated in the global horizontal plane. We direct axis z_1 of the local coordinate system along this diameter. One thus can see that axis z_1 belongs to plane $x_1 - x_2$, so that the angle between axes x_1 and z_1 is ¨ . Having already defined axes z_1 and z_3, the remaining axis z_2 is uniquely defined on the crack's plane. The relations between global and local coordinates are given by simple formulas.

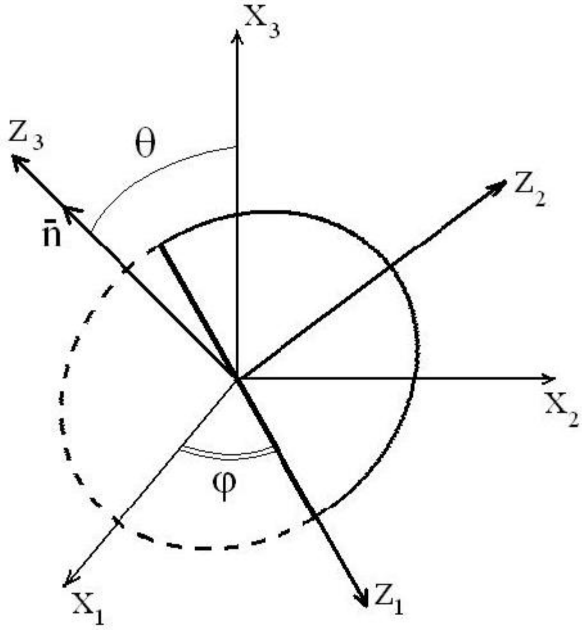


Fig 1. Penny-shaped crack in global (x_1, x_2, x_3) and local (z_1, z_2, z_3) Cartesian coordinate systems

Let us assume that the defect is sufficiently distant from the transducer. Then the incident wave is approximately plane. If the unit vector $\overline{m}$ directed from the origin to the far-point x is defined by the two spherical angles, ~ and then:

$$m_1 = \sin{\sim} \cos \ , \quad m_2 = \sin{\sim} \sin \ , \quad m_3 = \cos{\sim}, \quad 0 \le {\sim} \le ®, \quad | \quad | \le ®. \tag{1.3}$$

Besides, the plane incident wave in this case is given as follows: $p^{inc}(x) = e^{-ik(x \cdot m)}$. This expression should be substituted as the right-hand side when solving integral equation (1.2). It can be shown that the back-scattered diagram, i.e. the amplitude of the scattered pressure as $|x| \to \infty$ can be expressed in the following way:

$$A({\sim}, \ ) \sim \left| \int_S g(y) e^{-ik(y_1 \sin{\sim} \cos \ + y_2 \sin{\sim} \sin \ + y_3 \cos{\sim})} ds_y \right|, \qquad R = |x| \to \infty, \tag{1.4}$$

where amplitude $A({\sim}, \ )$ of the registered signal is the same as real amplitude $\left| p^{sc} \right|$ in the far-zone. Here only dependence upon spherical observation angles is kept in the expression and some secondary factors are omitted.

Now let us pass to the case of acoustically hard crack when the boundary condition on crack's face is $(\partial p/\partial n)|_S = 0$. Then it directly follows from the Kirchhoff-Helmholtz integral formula that

$$p^{sc}(x) = \int_S h(y)\frac{\partial G(y,x)}{\partial n_y} ds_y, \quad x \in R^3 \setminus S, \qquad h(y) = p(y)\big|_{S^+} - p(y)\big|_{S^-}, \tag{1.5}$$

where $h(y)$ is a new unknown function defined on the surface of the crack.

Since the boundary condition here is given for the normal derivative of acoustic pressure, it is necessary to apply next the derivative with respect to normal at point x when the latter approaches surface S. Then one applies the boundary condition $(\partial p^{sc}/\partial n)|_S = -(\partial p^{inc}/\partial n)|_S$. This leads to the following basic integral equation holding in the case of acoustically hard crack:

$$\begin{gathered}\int_S K(y,x)h(y)ds_y = f(x), \qquad x \in S, \qquad f(x) = -\frac{\partial p^{inc}(x)}{\partial n_x}, \\ K(y,x) = \frac{\partial^2 G(y,x)}{\partial n_x \partial n_y} = K(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2}\left(\frac{1}{r} - ik\right), \quad r = |\xi - z| = \left[(\xi_1 - z_1)^2 + (\xi_2 - z_2)^2\right]^{1/2},\end{gathered} \tag{1.6}$$

The right-hand side in equation (1.6) can also be written out in explicit form:

$$f(z) = ik[\sin\beta \sin\gamma \sin(\varphi - \;) + \cos\beta \cos\gamma]\, e^{-ik(x\cdot m)}, \tag{1.7}$$

It is very interesting to estimate the order of the singularity in the kernel as $r \to 0$. Obviously,

$$K(r) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r^3} - \frac{k^2}{2r} + O(1)\right], \qquad r \to 0. \tag{1.8}$$

One can see that the leading asymptotic term for small r determines the so-called *hyper-singular* kernel [3], of the order $O(1/r^3)$. The Cauchy-type singularity of the order $O(1/r^2)$ is absent in this expansion as two terms of this order are mutually canceled when applying Taylor expansion to the exponential function in (1.6). Now it becomes clear that, except the leading hyper-singular term in (1.8), the only term containing singularity is the one corresponding to the kernel of the classical potential theory. The latter has been thoroughly investigated in literature, hence our principal goal regarding equation (1.6) is to describe the simplest properties of hyper-singular integrals, in order that to clarify what direct numerical methods can be efficiently applied to this type of integral equations.

Here we allocate some space to pay attention to quadrature formulas for hyper-singular integrals. Let us assume that domain S can be covered by a rectangular grid whose nodes, to be more specific, are chosen with the constant step h_x along the first Cartesian coordinate ξ_1 and with the constant step h_y along axis ξ_2. This grid subdivides domain S to a number of small rectangles of the size $h_x \times h_y$. For more symmetry, we place each node (ξ_1, ξ_2) at the center of respective rectangular cell. Let us apply for numerical treatment the so-called *collocation* method, when the set of ''internal" nodes coincides with the set of ''external" nodes: $\{(z_1^M, z_2^J)\} = \{(\xi_1^m, \xi_2^j)\}$. Assuming function $u(\xi_1, \xi_2)$ to be sufficiently smooth, it is accepted to be approximately constant over each small cell. Then, by using some tabular integrals we obtain

$$\begin{aligned} I(z_1^M, z_2^J) &= \int_S \frac{u(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{[(\xi_1 - z_1^M)^2 + (\xi_2 - z_2^J)^2]^{3/2}} \approx \\ &\approx \sum_{m,j} u(\xi_1^m, \xi_2^j) \int_{\xi_2^j - h_y/2}^{\xi_2^j + h_y/2} d\xi_2 \int_{\xi_1^m - h_x/2}^{\xi_1^m + h_x/2} \frac{d\xi_1}{[(\xi_1 - z_1^M)^2 + (\xi_2 - z_2^J)^2]^{3/2}} = \\ &= \sum_{m,j} u(\xi_1^m, \xi_2^j) \int_{\xi_2^j - h_y/2}^{\xi_2^j + h_y/2} \frac{(\xi_1 - z_1^M)d\xi_2}{(\xi_2 - z_2^J)^2\,[(\xi_1 - z_1^M)^2 + (\xi_2 - z_2^J)^2]^{1/2}} \Bigg|_{\xi_1 = \xi_1^m - h_x/2}^{\xi_1^m + h_x/2} . \end{aligned} \tag{1.9}$$

The integration here over ¸$_1$ has been carried out by using the table antiderivative: $\int dx/(x^2+b^2)^{3/2} = x/[b^2(x^2+b^2)^{1/2}]$, and by setting the value of variable ¸$_1$ equal to lower and upper limits of integration. Now a standard integration over ¸$_1$: $\int dx/[x^2(x^2+b^2)^{1/2}] = -(x^2+b^2)^{1/2}/(b^2 x)$ results in the following quadrature formula for integral I:

$$
\begin{gathered}
I(z_1^M, z_2^J) \approx -\sum_{m,j} u(z_1^m, z_2^j)\Bigg[L\left(z_1^m - z_1^M + \frac{h_x}{2}, z_2^j - z_2^J + \frac{h_y}{2}\right) - \\
- L\left(z_1^m - z_1^M + \frac{h_x}{2}, z_2^j - z_2^J - \frac{h_y}{2}\right) - L\left(z_1^m - z_1^M - \frac{h_x}{2}, z_2^j - z_2^J + \frac{h_y}{2}\right) + \\
+ L\left(z_1^m - z_1^M - \frac{h_x}{2}, z_2^j - z_2^J - \frac{h_y}{2}\right)\Bigg], \qquad L(z_1, z_2) = \frac{(z_1^2 + z_2^2)^{1/2}}{z_1 z_2}.
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

2. To be more specific, further treatment is demonstrated for acoustically soft case. If the position and the size of the penny-shaped crack is known, by solving numerically equation (1.2) for acoustically soft crack, then one can define function g over crack's face. Then one can calculate the far-field scattering diagram $A(\sim, \ )$ from Eq. (1.4). The inverse reconstruction problem is vice versa to determine the geometry of the crack from the input data on the registered scattered pattern $A(\sim, \ )$ known in all directions, for a fixed frequency. For such a reconstruction problem function $A(\sim, \ )$ is known, however both crack's surface S and function $g(y)$, $y \in S$ are unknown.

Let us apply the quadrature formula for integral operator in (1.2) written in the local polar coordinate system, with $R(«,²) = \left[«^2 + °_M^2 - 2«°_M \cos(² - t_J)\right]^{1/2}$:

$$
\int_S G(¸, z) g(¸) ds_¸ = \sum_{m,j} a_{mj,MJ}\, u(°_m, t_j), \quad a_{mj,MJ} \approx \frac{e^{ikR(°_m, t_j)}}{4®} \int_{t_j - h_t/2}^{t_j + h_t/2} d² \int_{°_m - h_°/2}^{°_m + h_°/2} \frac{«d«}{R(«,²)}. \tag{2.1}
$$

Then one can rewrite integral equation (1.2) in the symbolic form:

$$
\mathbf{G}g = f, \mathbf{G} = \{c_{ij}\}, g = \{g_j\}, f = \{f_i\}, \quad (i, j = 1, \ldots, N). \tag{2.2}
$$

Here $g = \{g_1, \ldots, g_N\}$ is the unknown vector in linear algebraic system (2.2), while the right-hand side is determined by the incident wave. Matrix $\mathbf{G}$ is of dimension $N \times N$.

Let us write the solution to linear algebraic system (2.2) in terms of the inverse matrix:

$$
g = \mathbf{G}^{-1} f, \quad \Rightarrow \quad g_i = \left[\mathbf{G}^{-1} f(\sim, \ )\right]_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{2.3}
$$

Obviously, the elements of matrix $\mathbf{G}^{-1}$ depend upon the unit normal vector $\overline{n}$ to the plane of the crack and radius a (see Fig. 1), that is equivalent to dependence upon parameters ¯,¨,a: $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}(\overline{n}, a) = \mathbf{G}^{-1}(¯, ¨, a)$.

When solving the inverse reconstruction problem, the input data is the back-scattered diagram (1.4), which we write in the discrete form

$$
A(\sim_p, \ _q) = \left| \sum_{j=1}^{N} g_j e^{-ik(y_1^j \sin\sim_p \cos\ _q + y_2^j \sin\sim_p \sin\ _q + y_3^j \cos\sim_p)} s_j \right|, \tag{2.4}
$$

where s_j are elementary areas in subdivision of the crack surface S to small patches under the discretization process. Besides, we assumed here that a finite number of "directions of illumination" (i.e. directions of incidence) $\sim = \sim_p$, $p = 1, \ldots N_p$, $\ = \ _q$, $q = 1, \ldots N_q$ may be taken, to reconstruct the geometry of the crack.

Now the quantities g_j should be substituted from (2.3) to (2.4). This leads to the strongly nonlinear system of algebraic equations which can be solved by a minimization of the discrepancy functional:

$$\min \Omega(\text{¯},\text{¨},a);\Omega(\text{¯},\text{¨},a)=\sum_{p,q}\left\langle\left|\sum_{j=1}^{N} s_j e^{-ik(y_1^j \sin\sim_p \cos\ _q + y_2^j \sin\sim_p \sin\ _q + y_3^j \cos\sim_p)}\times\left[\mathbf{G}^{-1}(\text{¯},\text{¨},a) f(\sim_p,\ _q)\right]_j\right| - A(\sim_p,\ _q)\right\rangle^2 . \tag{2.5}$$

It should be noted that in practice the back-scattered diagram is known with some experimental error. Therefore, the proposed algorithm must guarantee the stability with respect to small perturbations of the input data. Obviously, in the case of absolute precision in the input data the true geometry of the crack brings zero minimum value to functional Ω.

Any classical method can be applied for the minimization of functional (2.5). However, in practice the regular iterative schemes converge, as a rule, to a local minimum of respective functional. That is why we used the method of global random search described in [5].

3. Let us notice that the geometry of the penny-shaped crack is so symmetric that many combinations of angles ¯ and ¨ repeat the same crack's disposition. In order to describe uniquely the disposition it is enough to set these two angles belonging to the following intervals: $0 \le \sim \le ®/2$, $-®/2 \le \quad \le ®/2$. By using the method described in the previous section, we performed many calculations for various combinations of the basic three parameters, ¯, ¨, a, and some examples of the reconstruction are presented in Table 1 below.

Table 1. Reconstruction of three soft-boundary round cracks: $k = 3$

a	¯	¨	type of result
0.8 0.793	® /4=0.785 0.814	0 0.015	exact restored, 240 trials
1.1 1.138	® /4=0.785 0.757	® /3=1.047 1.079	exact restored, 240 trials
1.35 1.438 1.305 1.339	® /3=1.047 1.037 1.142 1.094	® /6=0.524 0.576 0.517 0.539	exact restored, 240 trials restored, 375 trials restored, 1200 trials

The authors are grateful to Italian Ministry of University. The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (RFBR), Project 10-01-00557.

REFERENCES

1. Krautkrämer J., Krautkrämer H. Ultrasonic Testing of Materials, Springer-Verlag: Berlin, 1983.
2. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory, John Wiley & Sons: New York, 1983.
3. Samko S. Hypersingular Integrals and Their Applications, Taylor & Francis: New York, 2002.
4. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equations and Their Applications, CRC Press: Boca Raton (Florida), 2004.
5. Corana M. et al. Minimizing multimodal functions of continuous variables with the Simulated Annealing algorithm, ACM Trans. Math. Software, 1987, **13**, 262-280.

Information about authors

Sumbatyan Mezhlum – Southern Federal University, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Street 8a, 344090 Rostov-on-Don, Russia
E-mail: sumbat@math.rsu.ru

Brigante Michele – University of Naples - Federico II, Department of Structural Engineering, Street 8a, Via Claudio 21, 84125 Napoli, Italy
E-mail: brigante@unina.it

THE USE OF COMPOSITE FOR STRENGTHENING AND REHABILITATION OF CONCRETE COLUMNS

TAMUŽS V., VALDMANIS V.

The strength, deformability and stability of concrete columns confined by carbon composite sheets is considered at axial compressive loading. The formulas for prediction of ultimate strength, ultimate strain, and the tangent modulus above the limit of nonlinearity are given. Confined reinforced concrete columns also are considered.
The loss of stability of columns above the strength of plain concrete is analyzed and it is proved that FRP confinement is efficient only for columns having low or moderate slenderness (λ<40).

Fiber-reinforced polymer composites have found wide applications in the civil engineering due to their high corrosion resistance and the ease of application. One important application of the fiber-reinforced composites is as confinement of the concrete columns to enhance the strength and ductility. Such confinement can be used when the strength of concrete structure should be improved (for damaged structures or for increased service load).

It is well observed by many researchers that the confined concrete above the ultimate compressive strength of the plain concrete f_{co} continues to carry the increased load, but in the bilinear manner with a second tangent modulus $E_2 << E_1$ (Figure 1).

The behavior of the confined concrete is characterized by the following quantities:

- E_1 initial elastic modulus of the concrete;
- f_{co} ultimate compressive strength of the plain concrete, which coincides with the limit of nonlinearity of the confined specimens;
- f_{cc} compressive strength of the confined concrete;
- E_2 tangent modulus the confined concrete after axial stress exceeds f_{co};
- $\pounds_{cc}$ ultimate axial strain of the confined concrete.

Different formulas have been proposed for prediction of $\pm_{cc}$ and $\pounds_{cc}$. Less attention has been paid to value of E_2.

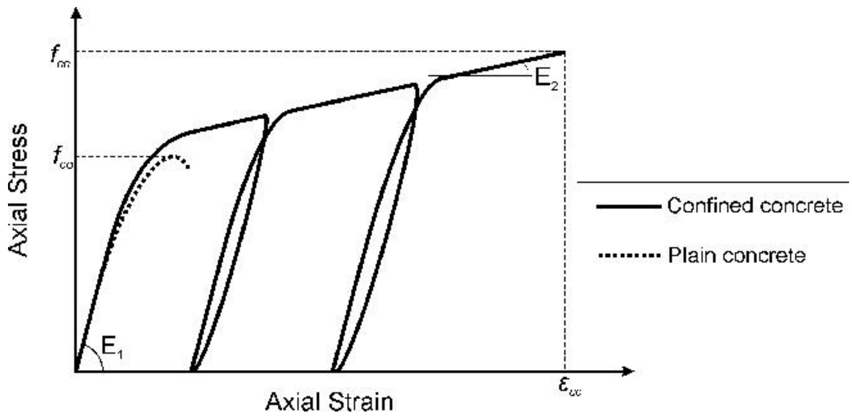


Figure (1): Cyclic axial stress – strain curve of the confined concrete specimens.

In the present report the results concerning strength, deformability, and stability of confined concrete columns obtained during the last years in the Institute of Polymer Mechanics of University of Latvia are summarized. These results have been published in the series of papers in journal Mechanics of Composite Materials [1-6].

1) In 2006 the formula for the strength f_{cc} of confined concrete column was analyzed:

$$f_{cc} = f_{co} + \frac{4\pm_{ju}h}{R}, \tag{1}$$

where R is the radius of column, h **-** thickness of composite confinement, $\pm_{ju}$ – ultimate tensile strength of composite, "jacket" which should be determined very carefully [2].

2) The formula for the modulus E_2 (Figure 1) was obtained in [3]

$$E_2 = 24 E_{lat} \cdot \left(\frac{f_{co}}{E_{lat}}\right)^{0.65}, \tag{2}$$

where $E_{lat} = E_j \dfrac{h}{R}$ is the "lateral modulus", but E_j – modulus of composite jacket.

3) Immediately from (2) and Figure 1 follows the formula for ultimate axial strain

$$\pounds_{cc} = \pounds_{co} + \frac{f_{cc} - f_{co}}{E_2},$$

which can be rewritten:

$$\pounds_{cc} = \pounds_{co} + 0.17 \cdot \left(\pounds_{ju} - \neg_o \pounds_{co}\right)\left(\frac{E_{lat}}{f_{co}}\right)^{0.65}. \tag{3}$$

4) In praxis only the columns reinforced by steel bars are used. But the steel bars start to yield when the stress level reaches the plain concrete strength. During yielding the elastic modulus of the steel bars is almost zero and they no more contribute to the stiffness of the column. The FRP jacket prevents the buckling of the yielding steel bars until the failure of the specimens.

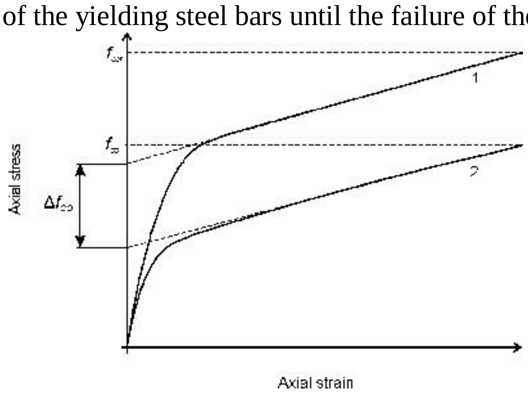


Figure (2): Compressive behavior of confined concrete columns with (1) and without (2) steel bar reinforcement.

Consequently the formula for the strength of confined reinforced columns f_{cc} looks as:

$$f_{ccr} = f_{co} + \frac{4\pm_{ju}h}{R} + n_s f_y \left(\frac{r}{R}\right)^2, \tag{4}$$

where r is the radius of steel bars, n – the number of steel bars, f_y – yield stress of steel [4].

5) It is seen from Figure 1 that $\frac{E_2}{E_1} << 1$. Therefore the danger of the confined column instability appears when the axial stress exceeds f_{cc}. In [5] the analysis of instability of confined columns was carried out and it was found that confinement is effective only for columns of moderate slenderness (ª < 40).

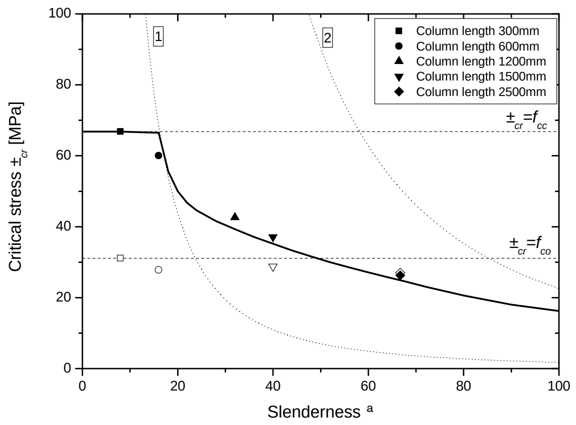


Figure (3): Predicted and experimentally obtained values of the critical stress as a function of the slenderness. Closed symbols – results from the confined specimen tests, Solid line – prediction of the critical stress. Line *1* - Euler's hyperbola, where $E_t=E_2$. Line *2* - Euler's hyperbola, where $E_t=E_1$.

REFERENCES

1. Tamužs, V., Tepfers, R., Chi-Sang You, Rousakis, T., Repelis, I., Skruls, V. and Vilks, U. (2006a). "Behavior of concrete cylinders confined by carbon-composite tapes and prestressed yarns. 1. Experimental data". Mechanics of Composite Materials, Volume 42, N° 1, pp. 13-32.
2. Tamužs, V., Tepfers, R. and Spārniņš, E. (2006b). "Behavior of concrete cylinders confined by a carbon composite. 2. Prediction of strength". Mechanics of Composite Materials, Volume 42, N° 2, pp. 109 - 118.
3. Tamužs, V., Tepfers, R., Zīle, E. and Ladnova, O. (2006c). "Behavior of concrete cylinders confined by a carbon composite 3. Deformability and the ultimate axial strain". Mechanics of Composite Materials, Volume 42, N° 4, pp. 303 – 314.
4. Tamužs, V., Valdmanis, V., Gylltoft, K., and Tepfers, R.. (2007a) "Behavior of CFRP-confined concrete cylinders with a compressive steel reinforcement". Mechanics of Composite Materials, Volume 43, № 3, 191-202.
5. Tamužs, V., Tepfers, R., Zīle, E. and Valdmanis, V. (2007b). "Stability of round concrete columns confined by composite wrappings". Mechanics of Composite Materials, Volume 43, № 5, 445-452.
6. Zīle, E., Daugevičius, M., Tamužs, V. (2009). "The effect of pretensioned FRP on the behavior of concrete columns in axial compression". Mechanics of composite materials, Volume 45, № 5, 457-466.

<u>Information about author</u>

Tamuzs Vitauts – Head of laboratory, Dr. Sc. Prof. Acad., Institute of Polymer Mechanics University of Latvia, Institute of Polymer Mechanics, Aizkraukles str.23 Riga LV 1006 Latvia
Phone : +37129410902 Fax : +371 67820467 E-mail : tamuzs@pmi.lv

CONTENTS AND ABSTRACTS

We consider several boundary-value problems for the Euler equations describing flows of an ideal incompressible fluid in a bounded domain: the problem NP with nonpenetration condition at the boundary as well as so called through flow problems describing flows of the fluid through the domain, with different types of boundary conditions (then three problems appear, we call them TF.I, TF.II and TF.III). We are interested in global (i. e., "in the whole" in time and input data) existence and uniqueness theorems for these problems formulated in the widest possible classes of solutions. Such interest if stimulated by well-known global existence problem for three-dimensional Euler equations, where solutions become nonsmooth even if they are smooth at the initial moment of time, so the named problem seems to meet its solution only in the classes of extremely irregular functions. In the other words, we have to study nonsmooth solutions of the Euler equations and prove their existence and uniqueness. We present two main results. The first result consists in uniqueness of solutions to the problems NP, TF.II and TF.III (for any dimensions of the flow) in the classes with unbounded vorticity. These classes are presented using the Orlicz classes and seem to be easy to verify in applications since they are formulated in a rather clear form as against well-known results. The second result consists in global existence theorem for the two-dimensional problem TF.I in the classes of solutions with unbounded vorticity that belongs to the Lebesgue spaces L_p with $p>4/3$. Our methods discover curious relations of the named problems with the theory of integral transforms.

We consider a three-dimensional problem of propagation of magnetoelastic waves along the boundary. The problem is investigated for a model of isotropic perfectly conducting material. The new dispersion equation is obtained and solved.

Asymptotic method of constructing two-dimensional and one-dimensional equations of micropolar elastic isotropic plates and bars is developed in [1-4]. In this paper two-dimensional dynamic equations, boundary and initial conditions of generalized plane stress orthotropic micropolar elasticity of the body in a thin rectangular area are considered. On the base of the internal problem the dynamic equations of bending of orthotropic micropolar elastic bar with free rotation, with constrained rotation, with small shift rigidity are obtained. Micropolar boundary layers on the coordinates (quasistatic) and on time are constructed and studied. On the base of studying the problem of interaction of one-dimensional problem and micropolar boundary layers boundary and initial conditions of one-dimensional theory are defined.

In this work, the problem of bending of a plate under the action of tangential loads is considered on the base of classical theory, theory of Reissner-Genki-Mindlin by Vasilyev variant, and theory of Ambartsumyan. The comparisons between deflections, crosscutting forces and moments by refined theory of first-order and by higher-order refined theory are then obtained.

In this article elongated elastic plate hinged along the long edges in supersonic gas flow is considered. The influence of structural friction in the hinges on its stability is investigated.

Hovhannisyan E. K. ....

Strained-deformed condition of two rugged underthe corner of lines in field of gravity force.

Considered in field of gravity force body limited by two lines and situated in position when the line of crossing these stripes perpendicular by direction of self weight vector. The problem dares a method of finite elements. Schedules normal and tangent pressure in studied surfaces are resulted.

Hovhannisyan H. V. ....

A Contact Problem for a Elastic Piecewise Homogeneous Infinite Plate Strengthened with a Non-homogeneous Infinite Elastic Stringer

In the present paper, a contact problem is considered for a piecewise homogeneous infinite elastic plate consisting of two semi-infinite plates with different elastic characteristics and strengthed with an infinite elastic stringer. The problem is formulated as a singular integral equation, with a kernel consisted of a singular and regular parts. The solution of the above-mentioned singular integral equation is based on the generalized Fourier integral transformation, which is reduced to a solution of a functional equation, which solution is reduced to a solution of Fredholm integral equation of second order.

Ohanyan G.G., Sahakyan S.L. ....

On approximation in theory of axialsymmetric vibrations of shell with monodispersive gas–fluids mixture

The vibrations of infinite circular cylindrical shell, filled by mixture of ideal fluid with isentropic gas bubbles are investigated. The dispersion equation is obtained, which is solved numerically. It is shown, that in axial symmetric system shell–mixture with the big bubbles, for the short waves we have effect of dispersion, while in case of a small bubbles the dispersion is absent. In case of pure fluid it takes place for every wave. The taking into account of bubbles in fluid brings to reducing of frequency of vibrations of shell.

Odintsev I.N. ....

Coherent optics methods in experimental mechanics of materials

The presentation considers some problems and results of practical applications of coherent optics methods in material mechanical testing including study of deformation as a process. Common techniques updated with holographic interferometry or speckle interferometry are presented. Nonstandard approaches to study of elastic-anisotropic bodies and double-modulus materials based on the special mathematical interpretation of experimental data are proposed. Approaches to study of dissipative properties of materials under vibration loading are described separately.

Osipov M.N. ....

Application of the "sandwich" speckle interferometry with the ring aperture and holographic interferometry for determination of the displacement fields

In work the application simultaneously of the methods speckle interferometry with ring apertures and holographic interferometry for determination of full field displacements at deformation of objects is described.

Parshin D. A. ....

Modelling a process of accretion of a radially inhomogeneous elastic spherical body in the field of self-gravitation

A process of centrosymmetrical accretion of a radially inhomogeneous elastic spherical body in the field of self-gravitation is investigated. It is given a statement of a nonclassical initial-boundary value problem of solid mechanics that describes a quasistatic process of deforming the accreted solid under consideration in the case of small strains. The solution of this problem is built. The obtained stress state of the considered accreted body is compared with the state of an instantly formed self-gravitating spherical body which is analogous to the accreted one in size and properties. The second state is found by solving the corresponding classical problem of the elasticity theory for a solid of constant composition.The results of the work can be used in particular as a basis for construction of a geomechanical model that takes into consideration the process of the Earth gradual forming due to spherical accretion.

Petrosyan T.L....
Dependence of form and area of hysteresis loop from kind of change of stress in time
The theoretical data of hysteresis according to theory of heredity at different change of external loading are presented in the work. For the theory of heredity the exponential relations are applied as the creep kernels. There is considered the influence of constant component (characteristic of asymmetry) of periodic stress on form and area of hysteresis loop.

Pogosian A.K., Meliksetyan N.G. ....
Influence of frictional transfer on mechanics of contact of brake materials
It is shown that the process of frictional transfer is constantly operating factor at a high-temperature friction for brake frictional materials irrespective of composite structures as well as influence on mechanics of contact for rough surfaces and define workability of a friction pair. It is established, that at new frictional materials creation it is necessary to develop compositions capable to form a transfer film on a counterbody surface at rather heats of frictional contact as thus the maximum value of a friction coefficient moves to the more heats area.

Pogosian A.K., Saroyan W.V., Boniatian C.R. ....
Additives influence upon the wear characteristics under boundary lubrication
Tribological characteristics' dependences upon the content of various additives in lubricants have been studied. On the basis of the exploration of the experimental results the dependences of the additive content, normal load, linear wear and friction coefficient interactions from each other has been represented, which gives possibility to select the best composition and type of additives for the lubricants.

Poghosyan D.M. ....
One limiting transitions in the theory Stability of rectangular plates beyond the elastic
In this paper given problem of incompressible infinite rectangular plate stability beyond the elastic. On one edge acting compressive stress, the other edges are free. And are prove, that the principle Sen-Venanan in some sense inapplicable for this type plates.

Romashov G.A. ....
Wedging of the elastic material with formation of tearing zones
The problem of movement of a solid body in jelastic material in the presence of a possible tearing zone of material in body's nasal part in asymmetry case is considered on subsonic and transonic velocity range. On all range of considered speeds the scheme of a flow of the body is determined for contours in the form of a wedge and ogive. An analytical solution of the problem is found and the analysis of dependence of the length of the tearing zone on the parameters of the problem is provided. It is shown when the body moves with velocity higher than the velocity of transverse waves there exists a limiting value of the velocity at which the tearing zone in the nasal part of the body disappears. Determined the forces acting on the body from the continuum, and dependence of these forces on the parameters of the problem is investigated.

Rudoy E.M. ....
On an asymptotic analysis of energy functional for elastic bodies with rigid inclusions and cracks: two-dimensional problem
The equilibrium problem of the elastic body, containing a rigid inclusion is considered. There exists a crack between the rigid inclusion and the body. The problem is formulated as variational one. We investigate asymptotic of the energy functional under the general perturbation of the domain with the cut and the rigid inclusion. The main result of the work is the deriving of the formula for a derivative of the energy functional with respect to parameter of

the perturbation. The received results have practical interest in various areas of engineering: mechanical engineering, construction, etc. They are useful at designing and the analysis of behavior of bodies and designs with cracks or technological cuts.

Sahakyan A.V.

Quadrature formulas for calculation of the integral with a variable upper limit

Quadrature formulas for calculation of the definite integral with a variable upper limit when integral density is presented as bounded continuous function and Jacobi weight function composition are built. The obtained formulas allow us to solve singular integro-differential equations, which contain the primitive function of unknown function as a term, by the method of discrete singularities. On the other hand, the same formulas allow to define measure of crack disclosing in problems of elasticity theory for bodies with cracks, especially, in the case when for solution of problem the method of discrete singularities is used.

Sanoyan Yu. G.

Stress deformed state of a compound rectangle

Superposition method solved biharmonic problem of the thermoelastic stress state of the compound rectangle for different additional boundary conditions on its adjacent corners. The effect of additional conditions on the behavior of elastic characteristics in the neighborhood of the vertices adjacent angles has been researched.

Sargsyan A.M.

The influence of the boundary conditions type, given on the arch part of the round sector boundary, on the behaviour of the stresses in the conditions of the smooth contact on the radial sides

We discuss a plane stress state of a round sector with unique radius and arbitrary angle of $\alpha\ (0<\alpha<2\pi)$, when on the arch part of the contour normal stresses $\sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi)$ and tangential displacement $u_\varphi(1,\varphi)=f_2(\varphi)$ are given, and on the radial sides the condition contact with rigid punch (stamp) without friction is realized. A closed solution of the problem is obtained with the help of Fourier method. The singularity of the stresses in the vicinity of the sector top is considered. Between the first coefficients of Fourier decomposition of the function $f_1(\varphi)$ and $f_2(\varphi)$ a condition is established, under which the stresse in the vicinity of the sector top tend to infinity only when $\alpha>\pi$. In paper [1] based on the results [2], an elastic equilibrium of the circular sector, when on its arch part normal and tangential stresses are given, is investigated. It was shown, that when tending of the angle α to 2π, the stresses singularity order tends to –1, and the coefficient with such singularity in the conditions of general loading of the boundary $r=1$ is different from zero. Here is analysed another case of loading of the arch part of the sector boundary.

Sargsyan M.Z.

Free vibrations in the zone of boundary layer of orthotropic plate in the presence of viscous resistance

The free vibrations in the zone of boundary layer of orthotropic plate freely lying on the rigid substrate are investigated under condition of viscous resistance. On the upper plane of plate are given either the boundary conditions of free edge or constrained fastening. The asymptotic solutions corresponding to the boundary layer are obtained. The damping of values in the boundary layer at removal from a lateral surface is investigated.

Sargsyan A.H. ....

Free vibrations of micropolar elastic thin bars, rectangular plates and cylindrical shells

In work on the basis of the general dynamic theories of micropolar elastic thin bars, plates and shells with independent fields of transitions and rotations at which deformations are completely considered cross-section shift and related by it, free vibrations of hinge supported bars, rectangular plates and cylindrical shells (axisymmetric problem) are studied. For tasks in view exact decisions are constructed. Frequencies and forms of free vibrations of micropolar bars, rectangular plates and cylindrical shells are as a result defined. The results of numerical calculations showing specific features of free vibrations of thin bars, plates and shells from a micropolar elastic material are resulted.

Sargsyan S.H., Sargsyan L.S. ....

Magnetoelasticity of Micropolar Electro Conducting (Non-ferromagnetic) Thin Shells

In the present paper we aim at considering the three-dimensional equations, boundary and initial conditions of micropolar theory of magnetoelasticity with independent fields of transition and rotation. For the beginning, the hypotheses of straight line (supplanted by static hypothesis) and magnetoelasticity for electromagnetic values are applied. The mentioned hypotheses are of asymptotic approximation. On the basis of the mentioned hypotheses, depending on the values of sizeless physical parameters, the general theory of magnetoelasticity of micropolar elastic electro conducting thin shells with independent fields of transition and rotation; with constraint rotation; with "small shift rigidity". In the constructed theories of magnetoelasticity of micropolar shells all the lateral shift and related thereof deformations are taken into account.

Sargsyan S.H., Farmanyan A. J. ....

The theory of micropolar layered plates, consisting of odd numberof layers, symmetrically located in relation to mid-plane.

In the present paper with the application of the qualitative results of the asymptotic method of integration of the boundary problem of micropolar elastic layered medium there are formulated hypotheses, on the basis of which, depending on the values of sizeless physical parameters, there are constructed the applied theories of micropolar layered plates (containing odd number of layers, symmetrically located in relation to mid-plane) with independent fields of transition and rotation; with constraint rotation; and with small shift rigidity**.**

Sarukhanyan A.A., Manukyan A.A. ....

Laminar flow of viscous fluid in a cylindrical pipe of rectangular cross-section

The paper presents laminar flow of incompressible viscous fluid in a cylindrical pipe of rectangular cross-section. A mathematical model of the problem has been developed in dimensionless form. Solution of the problem is given in the form of Fourier infinite series. It has been proved that the suggested solution is reduced to the solution of the problem of torsion of a bar of rectangular cross-section. Formulae for velocity distribution, per second volume flow and average velocity in the effective cross-section in dimensionless and dimensional forms have been obtained.

Seyranian A.P., Mailybaev A.A. ....

Multiparameter stability problems. Theory and applications in mechanics (presentation of the book)

A new book of the authors published in Russian by Fizmatlit deals with fundamental problems, concepts, and methods of multiparameter stability theory with applications in mechanics. It presents recent achievements and knowledge of bifurcation theory, sensitivity analysis of stability characteristics, general aspects of nonconservative stability problems, analysis of singularities of boundaries for the stability domains, stability analysis of multiparameter linear periodic systems, and optimization of structures under stability constraints. Systems with finite degrees of freedom and continuous models are both considered. The book combines mathematical foundation with interesting classical and modern mechanical problems.

Seyranyan S.P. ....

Limiting transition from locally distributed uniform loading to concentrated force in expression for the components of the gradient of the deflection of a simply supported rectangular plate

Limiting transition in components of the Navier solution for a simply supported plate, locally loaded on a rectangular platform by uniform external pressure, to the Navier solution for the same plate but the concentrated loading is discussed. The extreme values for the first partial derivatives of a deflection on variables x and y by tending the sides of the rectangular of loading platform to zero with remaining the total force constant are obtained. The continuity of these values in the closed rectangular of the plan of a plate as a function of two variables is proved. It is established that partial differentiation on x or y and limiting transition from local to concentrated loading, successively applied to a deflection, are permutable. The theorem of differentiation of the sums of slowly converging sine trigonometric series is proved.

Simonyan A.M. ....

Some questions of analysis of creep theories

Four theories of creep (theory of aging, theory of flowing, theory of heredity and theory of hardening) are examined. Their analysis is based on prediction of some appearance which can be verified by the experimental way. There are the reverse creep the violation of commutation and the succession. The question of generalization of creep operator on cases of complex stress states is considered too. It is shown that the proportionality of deviators of strains and stresses can be used for the theory of aging only, for the other considered theories of creep it can not be used.

Smirnov A. V....

Stress state of a piecewise-homogeneous plate supported by two semi-infinite stringers

The reinforcement problem for a piecewise-homogeneous elastic semi-infinite plate with two different stringers rigidly attached to the plate along the line of materials separation is considered. It is assumed that under the influence of external forces applied to the stringers the plates realized generalized plane stress. The problem is reduced to the Prandtl equation with piecewise-constant coefficient, which is firstly converted to a system of difference equations and then - to the scalar Riemann boundary value problem for a two-sheeted Riemann surface whose solution is constructed explicitly in quadratures. The behavior of the contact stresses near the junction point of stringers under various external loads is studied.

Sosnovskiy L.A....

From tribology to tribo-fatigue

Friction – a surprising phenomenon of the nature; wear process – the artful enemy of moving and deformable systems; fatigue – a terrible scourge of modern technics. Tribo-fatigue – whole, conceivable as much (a friction, wear process, fatigue). In the report is presented ehe short review of some researches on a way from tribology to tribo-fatigue.

Sosnovskiy L.A., Sherbakov S.S. ....

New class of contact problems and methods of their solution

Fields of stresses and strains in the system subject to the action of contact and non contact forces. Stress state was obtained by superposing the fields of stresses conditioned by action of normal and tangential elliptically distributed contact forces and by non contact bending. A significant change of the stress-strain state in comparison with the solution for the pure contact problem is shown.

Stepanyan A. A. ....

On one problem of meeting of several controllable objects The problem of meeting of several linear dynamic objects is considered at unfixed final position. Optimal controll and movements of objects are constructed in the cases of the controll with minimal force and minimal energy.

Stepanyan S.P. ....

On the problem of two-layered orthotropic circular plates with allowance for transverse shear

In this paper the plane problem and the problem of bending of the plate, composed of two different orthotropic circular layers are solved. In solving the problem of bending the précised theory of anisotropic plates is applied. The hypothesis of a linear distribution of tangential displacement for the package as a whole is accepted. A numerical analysis is performed qualitative and quantitative conclusions are made.

The analysis of the basic characteristics of the filtration through the body of homogeneous dam of tailing dump of liquid waste

In this article the process of unsteady filtration through a homogeneous dam, when there is a drain of the certain depth in lower pool and the depth of water is changed by the cosinus law in lower pool, is considered.

On one problem for a rectangular membrane

With help of Fourier double trigonometric series solution of Dirichlet problem for a second order elliptic equation is obtained, when the domain is a rectangle. Solution of the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. A numerical example is considered.

The analytical solution of the contact problem for the functionally graded wedge of complicate structure

A procedure for reduction of the contact problem for a radiance inhomogeneous wedge to dual integral equations is described. The variation of the elastic wedge characteristics over radial co-ordinate in the wedge is of the arbitrary function simulating mechanical properties of general nature. Here a method of modeling functions will used to construct kernel transform of the integral equation. The numerically constructed kernel transform is approximated by the expression of special type, so that it is possible to obtain a closed solution of the approximate integral equation. It is shown that the resulting approximate solution is asymptotically accurate for as small as large evaluations of the dimensionless parameter. Influence of inhomogeneity law oscillation to the kernel transforms and the problem solution is investigated.

Mechanics and physics of fatigue crack propagation

Technique for modeling of stable fatigue crack growth has been developed which are based on the theory of local high-energy-type fracture mechanism acting at a crack front in the second stage of fatigue crack kinetics. The technique has been verified with the use of 3D finite element modeling and microfractographic reconstitution of fatigue crack growth.

Application of the weak electrical fields for control of propane flames

In hydrocarbon-air flames there is significant amount of the charged particles, i.e. electric fields are effective means of influence on burning processes. Mechanisms of interaction of fields and flames are studied for a long time, but till now there is not common opinion about influence on kinetics of burning processes. In this work results of experimental researches of influence of weak electric field on combustion are presented. Influence of parameters of DC and pulse-periodic electric field on stabilization conditions and flame distribution velocity was studied. It is shown that electric fields are effective way of combustion management.

The vibrations of elastic orthotropic unmoment open cylindrical shell with free and simple support ends, when boundary generatrices are riged-clamped

The problem of existence of free vibrations of an elastic orthotropic open cylindrical shell (with arbitrary directional curve) with free and simple support ends, when boundary generatrices are riged–clamped is studied.

Khachatryan L. S.

On the reflection of flexural waves from an elastic fixing

To problems of the reflection of the curved waves from flet border of the ambience dedicated to the multiple studies. Relativly littie works are connected with questions of the reflection curved waves from flet edge of the fine plate. In this work happen to the decisions of the problem of the plate under complicated border condition. For partiat case of the free edge, as limiting case of the adsence of the reflected wave, is got decision of the problem localized bending variations.

Shavlakadze N.N. ....

The contact problem for piecewise homogeneous orthotropic plane with finite inclusion

It is considered a piecewise homogeneous elastic orthotropic plate strengthened by the finite inclusion, which emerges on the border of the partition at right angle and is loaded with tangential forces. Contact stresses along the line of contact are determined, the behavior of contact stresses in the neighborhood of singular points is established. By use of methods of the theory of analytic functions the problem is reduced to the integral differential equation on the finite segment. By help of the integral transformation it is obtained the Riemann problem, whose solution is represented explicitly.

Shahinyan S.G., Darbasyan A.T., Andreasyan L.A. ....

About one problem of optimal stabilization of the mathematical pendulum having mobile hanging point.

In this work the problems of optimal stabilization of the small fluctuations of the mathematical pendulum around and at the bottom and the top positions of balance are considered when the pendulum hanging point moves according to the set law in a vertical direction. The operating moment arises by means of the device which is in the pendulum hanging point. Problems are led to the problem of optimal stabilization of the system of the differential equations of the second order with variable factors which in its turn is solved by Lyapunov-Bellman's method. Lyapunov's optimal function is got in the form of the square-law form with variable factors for the definition of which the system of the nonlinear differential equations is got. The solutions of these equations are received by means of computer program. Optimal operating influence is formed.

Shahinyan S.G., Rezaei M. ....

About of Stabilization of Rotational Movement of a Rigid Body whit Integrally Small Perturbations.

The problem of stability and optimal stabilization of rotational movement around a point on the axes of dynamic symmetry of an absolute solid body, when integrally small perturbing forces act during an infinitive interval of time, is considered. It is suggested that the point around which the body rotates moves on the horizontal plane.The problem has been solved with both classical and suggested in work methods and a comparisons of values of functional has been carried out. This comparison revealed that in case of acting force optimal stabilization the energy consumption is less than in case of classical stabilization method.

Shekoyan A.V. ....

The acoustic waves in the clauds atmosphere The propagation of acoustic in media containing gas, vapor and drops is considered. The effects of coagulation of drops and condensation of vapor on the drops are taken into account. The linear dispersion equation is derived. The more accurate condition of infrasonic generation is obtained.

Shekyan H.G., Nazaryan E.A., Ogannisyan H.V. ....

Oscillations of rotor on rolling contact bearings with zero radial clearance

Non linear oscillations of rotor on rolling contact bearings placed on the shaft and in the body without preliminary stretch with zero radial clearance is considered in the paper. The systems of non–linear differential equations of the rotor oscillations which solution is realized by the method of harmonic linearization are obtained. It is discovered that amplitude–frequency curves have a resonance character, i.e. because of non–linear pliability of bearings the resonance regime of oscillation take the place, and amplitude–frequency curves have a non–linear character. It is shown that for horizontal flexible rotor the resonance frequencies are depended on the value of non–steadiness and on static loading. Moreover the critical velocities can be essentially less than own frequency of rotor on rigid support, and the increase of the radial clearance in the bearing brings to the bifurcation of resonance peak in horizontal and vertical directions. In comparison with the vertical rotor the non–linearity of system with statically loaded horizontal rotor is expressed considerably less, moreover derangement of amplitudes take the place for flexible and for strongly loaded rotors only.

Sherbakov S.S., Komissarov V.V. ....
Volume measure of damage by stress intensity criterion at contact problem
The method of determining of dangerous volume as measure of damage interreacting bodies in friction pair is stated. Formation of dangerous volumes by stress intensity criterion in conditions of three-dimensional stress state is shown for the contact between two deformable rigid bodies.

Babeshko V.A., Pavlova A.V. ....
Factorization methods for solving dynamic mixed problems for structural-inhomogeneous media
Using differential factorization method the steady vibrations of an elastic medium layered structure containing internal defects such as rigid inclusions and cavities are investigated. The systems of integral equations which bind the stresses and displacements in the planes of the layers with the jumps of stresses on the boundaries of inclusions and displacement jumps on the banks of the cracks have been found. Solutions of received integral equation's systems for particular cases of areas occupied by defects constructed in closed form with integral factorization method of Wiener–Hopf or fictitious absorption.

Bagdoev A.G., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V...
The solution of problems of closing of crack in thermoelastic media and of stamps on halfplane in presence of wear
The problem on closing of thin semiinfinite crack in presence on its surface of layer of particles, containing in fluid, entering in crack, is solved by method of Wienner-Hopf with application to biology. The stresses on crack are calculated numerically, and the region in which crack is closed is clarified.

Banshchikova I.A...
Shaping of panels in view of behaviour features of metal alloys at creep
The properties of anisotropy on directions (longitudinal, transverse, normal to the plate) and different resistance to a tension and compression, hardening and softening at creep have the majority of the sheet materials. That makes mathematical simulation of process of shaping very difficult. In case of the shaping plane panels at creep special interest for testing is represented by the problems of a bending of a square plate, which can realized experimentally. Calculation by finite element method in three-dimensional statement and analytical estimations in one-dimensional statement for the problems of plate bend testify to essential influence of anisotropy on normal direction to sheet in comparison with calculation in isotropic statement: delay of deformation process for a problem of plate torsion in a saddle surface and acceleration of process of deformation for problems of plate bend in a cylindrical surface. Not taking into account of real properties of creep at the decision of applied problems of details shaping and forecasting of their further exploitation can result in essential mistakes.

Barakat M. S., Asatryan V. M, Belubekyan E. V...
Plate flexure, strengthened by additional layer or stiffening ribs
The problems of the rectangular plate flexure, strengthened by additional layer of another more strength material and strengthened by the four symmetrically located oblique stiffening ribs equal to it by weight are investigated. The comparison of the obtained results shows that strengthening plate by stiffening ribs leads to a notable increase in its rigidity and strength in comparison with the two-layered plate of the same weight.

Bratov V.A., Morozov N.F., Petrov Y.V...

Numerical simulations of dynamic phase transformations: brittle fracture

The paper is discussing problems connected with embedment of the incubation time criterion for brittle fracture into finite element computational schemes. Incubation time fracture criterion is reviewed, practical questions of its numerical implementation are discussed. Several examples of how the incubation time fracture criterion can be used as fracture condition in finite element computations are given. The examples include simulations of dynamic crack propagation and arrest, impact crater formation (i.e. fracture in initially intact media), propagation of cracks in pipelines. Applicability of the approach to model initiation, development and arrest of dynamic fracture is claimed.

Casciati F., Faravelli L...

Recent advances in structural control

The last two decades of research in structural mechanics were focused on smart material and systems. Nevertheless the momentum for a technological revolution is still lacking. This paper discusses first the current state of the art and goes further in the more promising directions across ongoing progresses

Danoyan Z. N., Atoyan L.H., Danoyan N.Z. ....

Shear horizontal electro-magneto-elastic surface waves in a layered piezoelectric structure in the presence of an electric or magnetic screen The existence and behaviour of electro-elastic surface Love waves in a structure consisting of a piezoelectric substrate of crystal classes 6mm, 4mm, an elastic layer and an adjoining dielectric medium on the top is considered. The electro-elastic Love wave problem is solved for the above mentioned layered structure. The existence of electro-elastic surface Love waves and the behaviour of the modes of these waves are revealed.

Ghazaryan K., Marzocca P., Vardanov A...

Magnetoelastic vibrations of perfectly conductive elastic layer in an external longitudinal magnetic field

Within the plane problem of the elasticity theory, the problem of magnetoelastic waves in an isotropic layer is considered. The layer is immersed in external longitudinal magnetic field and has the properties of a perfect conductor. One side of the layer is fixed, and the other is free from mechanical loads. The dispersion equation is derived and detailed numerical analysis on the phase velocity of the magnetoelastic wave is obtained.

Ghulghazaryan R., Hatem O., Bora M., Lazaryan H., Wilson J., Markosian A. ....

Application of contact mechanics to chemical mechanical polishing modeling for chip verification and hotspot detection

Chemical Mechanical Polishing (CMP) is one of the key processes used in semiconductor manufacturing for planarization of interlayer dielectrics and metal layers. A chip-scale CMP simulator, called CMP Optimize (CMPO), developed at Mentor Graphics is presented in this work. Contact mechanics model is used for modeling the pressure distribution over an entire die. It takes into account long range polishing effects at mm-scale due to the stiffness of the polishing pad. For calculating the local removal rate, a mechanical model using Preston material removal behavior has been used. It empirically relates the removal rate of materials to the local pressure, rotation speed of the pad relative to the wafer and slurry activity driven by the frictional force. CMPO has the capability to model various deposition processes and one or multi material polishing during CMP. The latter is done by using an effective trench approximation and assigning different removal rates to different materials. The contact mechanics driven CMP model presented in this work is used for modeling die-level CMP behavior and detection of potential manufacturing hotspots. It has been validated on numerous process technology nodes, down from 90nm to 45nm, with accuracy within 10% of experimental data on production chips.

Gupta N....

Modes of plastic collapse and phenomenon of large deformation of thin walled structures under impact loading – a perspective

The paper presents an overview of the plasto-mechanics of large deformation of thin walled structures subjected to external impact loads and resulting collapse modes in relation to absorption of kinetic energy of an external impact or a crash as in road or air accidents. Despite several studies that have appeared in recent years, mechanics involved in such phenomenon and its dependence on various parameters like strain rate, inertia, history of loading, annealing and thermal processes, and the geometry are still not fully understood. Structured experiments become necessary to study the phenomenon in its varied aspects, and provide plausible description, assumptions and parameters needed for realistic analysis of such problems based on the mechanics observed. Several studies have appeared in literature in recent years which present formulations that describe large deformations and attempt to bring together various facets affecting the deformation. However, many problems relating to the deformation modes and their dependence on various parameters remain unresolved. In this paper, an over view of observations in some large deformation studies, which are of interest, involving thin walled structures of varying geometry and size and subjected to impact of a drop hammer, projectiles of different features and air and underwater blast loading, is presented in a hope that plausible explanation for these having been found, would help in further understanding of the phenomenon and its dependence on different parameters.

Jaiani G. ....

Cusped prismatic shells and beams

The present paper is devoted to up-dated exploratory survey in the field of cusped prismatic shells and beams.

Jenabi J., Khazaeinejad P. ....

The effect of combined loading on buckling loads of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic medium

The first order shear deformation theory is developed to examine the effect of combined load interaction parameter on elastic buckling loads of combined-loaded functionally graded circular cylindrical shells with properties varying continuously in the thickness direction. A load interaction parameter is appropriately defined to express the ratio of applied axial compression and lateral pressure. To model the elastic foundation, the Winkler and Pasternak foundations are used. The elastic foundation reacts in compression as well as in tension. The stability equations are established using the equilibrium equations and the adjacent equilibrium criterion method. Approximate solutions are assumed to solve these equations to obtain the buckling loads. Critical loads are obtained for a given load interaction.

Jenabi J., Najafizadeh M.M. ....

The buckling of axially compressed non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium

An analytical solution is presented for the buckling problem of non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium subjected to axial compression. To model the elastic foundation, the Winkler and Pasternak foundations are used. The elastic foundation reacts in compression as well as in tension. The analysis is based on the first order shear deformation theory including the shear correction factor with the nonlinear strain-displacement relations. The shell properties vary continuously through the thickness direction. Suitable displacement functions that identically satisfy the boundary conditions and stability equations are employed to determine the buckling loads. Numerical results reveal that the non-homogeneity parameter and coefficients of elastic foundations significantly affect the critical buckling loads of non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium.

Lychev S.A. ....

Finite deformations of accreted elastic globe

The centrally symmetric problem for an accreted elastic globe is considered. The deformations are supposed to be finite and the material is to be incompressible. The constitutive equations are formulated with respect to complete distortion tensor which may be representing as the composition of initial distortion and compatible deformation gradient. The initial distortion induces the linear connection on the material manifold which becomes a flat space of affine connectivity with nontrivial torsion.

Lyubashevskaya I.V...

High-temperature creep of rod elements and estimations of its intensity

Processes of creep in the conditions of high-temperature modes of stress are considered. As the defining equations parities of a power variant of the theory of creep in which frameworks a measure of intensity of process is capacity of dissipated energy at irreversible deformation of the creep, which size at the steady state inversely proportional time before destruction of an element of a design are used. It is experimentally shown that for a non-uniform stress state average on volume capacity of dispersion well characterizes intensity of process of creep and duration before destruction of an element of a design as a whole. Using analogy between behavior of typical design elements in problems of ideally plastic environment and high-temperature creep, on a number of examples possibility of reception of estimations of intensity of creep process of design elements is illustrated at the set external thermo-power parameters. Comparison of behavior of elements of designs is offered to be spent, comparing among themselves the external generalized forces with some weight factors (equivalence factors), reducing these forces to equivalent size of the same dimension for various kinds of stress. The top and bottom estimations of factors of equivalence are received at the set size of external loading. The received results prove to be true conformity to experimental data.

Manzhirov A.V. ....

New results in mechanics of growing solids

Basic fundamentals of the mathematical theory of growing solids are under consideration. The classification of various methods of solids accretion is presented. Special attention is paid to the accretion of 3D solids by 2D surfaces. The constitutive equations are formulated with respect to complete distortion tensor which may be representing as the composition of initial distortion and compatible deformation gradient. The initial distortion induces the linear connection on the material manifold which becomes a flat space of affine connectivity with nontrivial torsion. In the majority of papers which deal with the mechanics of growing solids the theory is constructed as some special replicas of solid mechanics in three-dimensional Euclidean space. Nevertheless the geometric properties of Euclidean space are not enough to describe the stress-strain state of a solid which was formed by the continuous joining of pre-stressed parts. It is extremely important that the growing solid can be considered as a special class of inhomogeneous body, in which inhomogeneity arises because of nonholonomic distortion, caused by the joining of incompatible stressed parts. From this point of view the mechanics of growing solids have much in common with the theory of defects, in particular with the theory of continuously distributed dislocations. The theory of fiber bundles of differentiable manifolds is taken as the geometric foundation of mathematical theory of growing solids. Analytic properties of differentiable manifolds are determined without utilization of prescribed connection. This allow to formulate a boundary value problem in terms of quiet general geometrical properties of reference configuration and determine the particular type of connectivity taking into account specific kinematic and static characteristics of the accretion process.

Melkonyan A. V., Sarkisyan S. V.

To a space problem of propagation of waves in a layer in presence of magnetic field

The space problem of propagation of waves in an elastic perfect conductive layer is considered in presence of an external constant magnetic field. On planes limiting a layer, the conditions of the constrained free edge are given. For phase speed of symmetric and antisymmetric vibrations the characteristic equations are received. The limiting cases are considered: length of a wave is very great and is very small in comparison with thickness of a layer.

Minnetyan, L., Janoyan, K.D., Rocheleau, J.A. ....

Transverse cracking of composite bridge decks

Cracking of reinforced concrete bridge decks is a major issue in the transportation infrastructure durability as it opens the door to many other potential detrimental effects. The ability to control the amount of cracking in bridge decks has been sought by countless professionals, ranging from those who design the structures to those who physically construct the bridge. A majority of transverse cracks on the deck develop due to early-age behaviors of concrete. A drastic temperature increase occurs during the curing process, which creates thermal stresses inside the concrete. Shrinkage and creep also cause stresses to build. The severity of these effects heavily depends on the concrete mix design and also on the physical dimensions of the deck. The objective of this paper is to develop a method to evaluate residual stresses because of temperature increase during the hydration of concrete. The method combines finite element methods and composite mechanics analyses to simulate the stresses developed in the deck at early ages due to thermal effects.

Minnetyan, L., Marzocca, P. ....

Aerostructural design of composite windmill blades

Methods and computer codes are discussed for the design of composite windmill blades for durability and damage tolerance. Damage progression is computationally simulated with increasing number of load cycles. Effects of constituent material and fabrication parameters on the response are computed to assess failure. The sensitivity of response to design variables is evaluated. The method is demonstrated for a polymer matrix composite airfoil specimen under lateral pressure cyclic loading. Suggested improvements of design variables based on analysis are discussed.

Najafizadeh M.M., Khazaeinejad P., Sharifian R. ....

The stability of non-homogeneous cylindrical thin shells subjected to combined loading The aim of the present paper is to study the buckling problem of non-homogeneous circular cylindrical thin shells under combined lateral pressure and axial compression. As is common for functionally graded cylindrical shells, the shell properties are assumed to vary continuously across the thickness direction. The analysis is presented using the first-order shear deformation theory. The stability equations are derived by the adjacent equilibrium criterion method. To solve the resulting equations and to obtain the critical loads, the closed-form solution is applied. The critical loads are obtained for cylindrical thin shells with non-homogeneity properties. The results reveal that by carefully choosing the material properties, the buckling capacity of shell will be increased.

Podio-Guidugli P...

On a scale-bridging mechanical model of carbon nanotubes

In this expository paper, intended as a short account of the contents of [1], a bottom-up method to model the mechanical behavior of carbon nanotubes is presented. This method is meant to bridge between three different scales: the *microscopic* scale of *molecular mechanics*; a *mesoscopic* scale, at which concepts from *discrete structure mechanics* apply; and the *macroscopic* scale of *continuous structure mechanics*.

Sharifian R., Belubekyan V.M. ....

Comparative study of non-conservative and conservative problems of stability of a rectangular plate

In the present paper buckling a plate is considered, when, in contrary to [1], the plate is loaded along the edges which are free in terms of displacement and rotation angle. In such case it is possible to consider both problem when the load is conservative, as well as a problem when the load is a non-conservative follower force. For these problems critical loads are determined for limit cases of narrow and very wide plates.

Sumbatyan M.A., Brigante M. ....

Algorithms for crack reconstruction in three-dimensional inverse elastic problems of the scattering theory

We study the 3d inverse reconstruction problem for a plane crack of penny-shaped geometry located in the linear homogeneous material. It is assumed that the process is harmonic in time. The direct problem is reduced a boundary integral equation, and a numerical collocation technique is developed to solve this equation. The inverse reconstruction problem is formulated on the basis of far-field back-scattered amplitude, known for all observation angles at a certain fixed frequency. The formulated inverse problem is reduced to a minimization of the discrepancy functional by methods of global random search.

Tamužs V., Valdmanis V.

The use of composite for strengthening and rehabilitation of concrete columns

The strength, deformability and stability of concrete columns confined by carbon composite sheets is considered at axial compressive loading. The formulas for prediction of ultimate strength, ultimate strain, and the tangent modulus above the limit of nonlinearity are given. Confined reinforced concrete columns also are considered. The loss of stability of columns above the strength of plain concrete is analyzed and it is proved that FRP confinement is efficient only for columns having low or moderate slenderness (λ<40).

CONTENTS AND ABSTRACTS

We consider several boundary-value problems for the Euler equations describing flows of an ideal incompressible fluid in a bounded domain: the problem NP with nonpenetration condition at the boundary as well as so called through flow problems describing flows of the fluid through the domain, with different types of boundary conditions (then three problems appear, we call them TF.I, TF.II and TF.III). We are interested in global (i. e., "in the whole" in time and input data) existence and uniqueness theorems for these problems formulated in the widest possible classes of solutions. Such interest if stimulated by well-known global existence problem for three-dimensional Euler equations, where solutions become nonsmooth even if they are smooth at the initial moment of time, so the named problem seems to meet its solution only in the classes of extremely irregular functions. In the other words, we have to study nonsmooth solutions of the Euler equations and prove their existence and uniqueness. We present two main results. The first result consists in uniqueness of solutions to the problems NP, TF.II and TF.III (for any dimensions of the flow) in the classes with unbounded vorticity. These classes are presented using the Orlicz classes and seem to be easy to verify in applications since they are formulated in a rather clear form as against well-known results. The second result consists in global existence theorem for the two-dimensional problem TF.I in the classes of solutions with unbounded vorticity that belongs to the Lebesgue spaces L_p with p>4/3. Our methods discover curious relations of the named problems with the theory of integral transforms.

We consider a three-dimensional problem of propagation of magnetoelastic waves along the boundary. The problem is investigated for a model of isotropic perfectly conducting material. The new dispersion equation is obtained and solved.

Asymptotic method of constructing two-dimensional and one-dimensional equations of micropolar elastic isotropic plates and bars is developed in [1-4]. In this paper two-dimensional dynamic equations, boundary and initial conditions of generalized plane stress orthotropic micropolar elasticity of the body in a thin rectangular area are considered. On the base of the internal problem the dynamic equations of bending of orthotropic micropolar elastic bar with free rotation, with constrained rotation, with small shift rigidity are obtained. Micropolar boundary layers on the coordinates (quasistatic) and on time are constructed and studied. On the base of studying the problem of interaction of one-dimensional problem and micropolar boundary layers boundary and initial conditions of one-dimensional theory are defined.

In this work, the problem of bending of a plate under the action of tangential loads is considered on the base of classical theory, theory of Reissner-Genki-Mindlin by Vasilyev variant, and theory of Ambartsumyan. The comparisons between deflections, crosscutting forces and moments by refined theory of first-order and by higher-order refined theory are then obtained.

In this article elongated elastic plate hinged along the long edges in supersonic gas flow is considered. The influence of structural friction in the hinges on its stability is investigated.

and properties. The second state is found by solving the corresponding classical problem of the elasticity theory for a solid of constant composition.The results of the work can be used in particular as a basis for construction of a geomechanical model that takes into consideration the process of the Earth gradual forming due to spherical accretion.

The theoretical data of hysteresis according to theory of heredity at different change of external loading are presented in the work. For the theory of heredity the exponential relations are applied as the creep kernels. There is considered the influence of constant component (characteristic of asymmetry) of periodic stress on form and area of hysteresis loop.

It is shown that the process of frictional transfer is constantly operating factor at a high-temperature friction for brake frictional materials irrespective of composite structures as well as influence on mechanics of contact for rough surfaces and define workability of a friction pair. It is established, that at new frictional materials creation it is necessary to develop compositions capable to form a transfer film on a counterbody surface at rather heats of frictional contact as thus the maximum value of a friction coefficient moves to the more heats area.

Tribological characteristics' dependences upon the content of various additives in lubricants have been studied. On the basis of the exploration of the experimental results the dependences of the additive content, normal load, linear wear and friction coefficient interactions from each other has been represented, which gives possibility to select the best composition and type of additives for the lubricants.

In this paper given problem of incompressible infinite rectangular plate stability beyond the elastic. On one edge acting compressive stress, the other edges are free. And are prove, that the principle Sen-Venanan in some sense inapplicable for this type plates.

The problem of movement of a solid body in jelastic material in the presence of a possible tearing zone of material in body's nasal part in asymmetry case is considered on subsonic and transonic velocity range. On all range of considered speeds the scheme of a flow of the body is determined for contours in the form of a wedge and ogive. An analytical solution of the problem is found and the analysis of dependence of the length of the tearing zone on the parameters of the problem is provided. It is shown when the body moves with velocity higher than the velocity of transverse waves there exists a limiting value of the velocity at which the tearing zone in the nasal part of the body disappears. Determined the forces acting on the body from the continuum, and dependence of these forces on the parameters of the problem is investigated.

The equilibrium problem of the elastic body, containing a rigid inclusion is considered. There exists a crack between the rigid inclusion and the body. The problem is formulated as variational one. We investigate asymptotic of the energy functional under the general perturbation of the domain with the cut and the rigid inclusion. The main result of the work is the deriving of the formula for a derivative of the energy functional with respect to parameter of the perturbation. The received results have practical interest in various areas of engineering: mechanical engineering, construction, etc. They are useful at designing and the analysis of behavior of bodies and designs with cracks or technological cuts.

Quadrature formulas for calculation of the definite integral with a variable upper limit when integral density is presented as bounded continuous function and Jacobi weight function composition are built. The obtained formulas allow us to solve singular integro-differential equations, which contain the primitive function of unknown function as a term, by the method of discrete singularities. On the other hand, the same formulas allow to define measure of crack disclosing in problems of elasticity theory for bodies with cracks, especially, in the case when for solution of problem the method of discrete singularities is used.

Superposition method solved biharmonic problem of the thermoelastic stress state of the compound rectangle for different additional boundary conditions on its adjacent corners. The effect of additional conditions on the behavior of elastic characteristics in the neighborhood of the vertices adjacent angles has been researched.

We discuss a plane stress state of a round sector with unique radius and arbitrary angle of $\alpha\ (0<\alpha<2\pi)$, when on the arch part of the contour normal stresses $\sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi)$ and tangential displacement $u_\varphi(1,\varphi)=f_2(\varphi)$ are given, and on the radial sides the condition contact with rigid punch (stamp) without friction is realized. A closed solution of the problem is obtained with the help of Fourier method. The singularity of the stresses in the vicinity of the sector top is considered. Between the first coefficients of Fourier decomposition of the function $f_1(\varphi)$ and $f_2(\varphi)$ a condition is established, under which the stresse in the vicinity of the sector top tend to infinity only when $\alpha>\pi$. In paper [1] based on the results [2], an elastic equilbrium of the circular sector, when on its arch part normal and tangential stresses are given, is investigated. It was shown, that when tending of the angle α to 2π, the stresses singularity order tends to –1, and the coefficient with such singularity in the conditions of general loading of the boundary $r=1$ is different from zero. Here is analysed another case of loading of the arch part of the sector boundary.

The free vibrations in the zone of boundary layer of orthotropic plate freely lying on the rigid substrate are investigated under condition of viscous resistance. On the upper plane of plate are given either the boundary conditions of free edge or constrained fastening. The asymptotic solutions corresponding to the boundary layer are obtained. The damping of values in the boundary layer at removal from a lateral surface is investigated.

In work on the basis of the general dynamic theories of micropolar elastic thin bars, plates and shells with independent fields of transitions and rotations at which deformations are completely considered cross-section shift and related by it, free vibrations of hinge supported bars, rectangular plates and cylindrical shells (axisymmetric problem) are studied. For tasks in view exact decisions are constructed. Frequencies and forms of free vibrations of micropolar bars, rectangular plates and cylindrical shells are as a result defined. The results of numerical calculations showing specific features of free vibrations of thin bars, plates and shells from a micropolar elastic material are resulted.

In the present paper we aim at considering the three-dimensional equations, boundary and initial conditions of micropolar theory of magnetoelasticity with independent fields of transition and rotation. For the beginning, the hypotheses of straight line (supplanted by static hypothesis) and magnetoelasticity for electromagnetic values are applied. The mentioned hypotheses are of asymptotic approximation. On the basis of the mentioned hypotheses, depending on the values of sizeless physical parameters, the general theory of magnetoelasticity of micropolar elastic electro conducting thin shells with independent fields of transition and rotation; with constraint rotation; with "small shift rigidity". In the constructed theories of magnetoelasticity of micropolar shells all the lateral shift and related thereof deformations are taken into account.

In the present paper with the application of the qualitative results of the asymptotic method of integration of the boundary problem of micropolar elastic layered medium there are formulated hypotheses, on the basis of which, depending on the values of sizeless physical parameters, there are constructed the applied theories of micropolar layered plates (containing odd number of layers, symmetrically located in relation to mid-plane) with independent fields of transition and rotation; with constraint rotation; and with small shift rigidity**.**

The paper presents laminar flow of incompressible viscous fluid in a cylindrical pipe of rectangular cross-section. A mathematical model of the problem has been developed in dimensionless form. Solution of the problem is given in the form of Fourier infinite series. It has been proved that the suggested solution is reduced to the solution of the problem of torsion of a bar of rectangular cross-section. Formulae for velocity distribution, per second volume flow and average velocity in the effective cross-section in dimensionless and dimensional forms have been obtained.

A new book of the authors published in Russian by Fizmatlit deals with fundamental problems, concepts, and methods of multiparameter stability theory with applications in mechanics. It presents recent achievements and knowledge of bifurcation theory, sensitivity analysis of stability characteristics, general aspects of nonconservative stability problems, analysis of singularities of boundaries for the stability domains, stability analysis of multiparameter linear periodic systems, and optimization of structures under stability constraints. Systems with finite degrees of freedom and continuous models are both considered. The book combines mathematical foundation with interesting classical and modern mechanical problems.

Limiting transition in components of the Navier solution for a simply supported plate, locally loaded on a rectangular platform by uniform external pressure, to the Navier solution for the same plate but the concentrated loading is discussed. The extreme values for the first partial derivatives of a deflection on variables x and y by tending the sides of the rectangular of loading platform to zero with remaining the total force constant are obtained. The continuity of these values in the closed rectangular of the plan of a plate as a function of two variables is proved. It is established that partial differentiation on x or y and limiting transition from local to concentrated loading, successively applied to a deflection, are permutable. The theorem of differentiation of the sums of slowly converging sine trigonometric series is proved.

Four theories of creep (theory of aging, theory of flowing, theory of heredity and theory of hardening) are examined. Their analysis is based on prediction of some appearance which can be verified by the experimental way. There are the reverse creep the violation of commutation and the succession. The question of generalization of creep operator on cases of complex stress states is considered too. It is shown that the proportionality of deviators of strains and stresses can be used for the theory of aging only, for the other considered theories of creep it can not be used.

The reinforcement problem for a piecewise-homogeneous elastic semi-infinite plate with two different stringers rigidly attached to the plate along the line of materials separation is considered. It is assumed that under the influence of external forces applied to the stringers the plates realized generalized plane stress. The problem is reduced to the Prandtl equation with piecewise-constant coefficient, which is firstly converted to a system of difference equations and then - to the scalar Riemann boundary value problem for a two-sheeted Riemann surface whose solution is constructed explicitly in quadratures. The behavior of the contact stresses near the junction point of stringers under various external loads is studied.

Friction – a surprising phenomenon of the nature; wear process – the artful enemy of moving and deformable systems; fatigue – a terrible scourge of modern technics. Tribo-fatigue – whole, conceivable as much (a friction, wear process, fatigue). In the report is presented ehe short review of some researches on a way from tribology to tribo-fatigue.

Fields of stresses and strains in the system subject to the action of contact and non contact forces. Stress state was obtained by superposing the fields of stresses conditioned by action of normal and tangential elliptically distributed contact forces and by non contact bending. A significant change of the stress-strain state in comparison with the solution for the pure contact problem is shown.

 The problem of meeting of several linear dynamic objects is considered at unfixed final position. Optimal controll and movements of objects are constructed in the cases of the controll with minimal force and minimal energy.

In this paper the plane problem and the problem of bending of the plate, composed of two different orthotropic circular layers are solved. In solving the problem of bending the précised theory of anisotropic plates is applied. The hypothesis of a linear distribution of tangential displacement for the package as a whole is accepted. A numerical analysis is performed qualitative and quantitative conclusions are made.

The analysis of the basic characteristics of the filtration through the body of homogeneous dam of tailing dump of liquid waste
In this article the process of unsteady filtration through a homogeneous dam, when there is a drain of the certain depth in lower pool and the depth of water is changed by the cosinus law in lower pool, is considered.

On one problem for a rectangular membrane
With help of Fourier double trigonometric series solution of Dirichlet problem for a second order elliptic equation is obtained, when the domain is a rectangle. Solution of the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. A numerical example is considered.

The analytical solution of the contact problem for the functionally graded wedge of complicate structure
A procedure for reduction of the contact problem for a radiance inhomogeneous wedge to dual integral equations is described. The variation of the elastic wedge characteristics over radial co-ordinate in the wedge is of the arbitrary function simulating mechanical properties of general nature. Here a method of modeling functions will used to construct kernel transform of the integral equation. The numerically constructed kernel transform is approximated by the expression of special type, so that it is possible to obtain a closed solution of the approximate integral equation. It is shown that the resulting approximate solution is asymptotically accurate for as small as large evaluations of the dimensionless parameter. Influence of inhomogeneity law oscillation to the kernel transforms and the problem solution is investigated.

Mechanics and physics of fatigue crack propagation
Technique for modeling of stable fatigue crack growth has been developed which are based on the theory of local high-energy-type fracture mechanism acting at a crack front in the second stage of fatigue crack kinetics. The technique has been verified with the use of 3D finite element modeling and microfractographic reconstitution of fatigue crack growth.

Application of the weak electrical fields for control of propane flames
In hydrocarbon-air flames there is significant amount of the charged particles, i.e. electric fields are effective means of influence on burning processes. Mechanisms of interaction of fields and flames are studied for a long time, but till now there is not common opinion about influence on kinetics of burning processes. In this work results of experimental researches of influence of weak electric field on combustion are presented. Influence of parameters of DC and pulse-periodic electric field on stabilization conditions and flame distribution velocity was studied. It is shown that electric fields are effective way of combustion management.

The vibrations of elastic orthotropic unmoment open cylindrical shell with free and simple support ends, when boundary generatrices are riged-clamped
The problem of existence of free vibrations of an elastic orthotropic open cylindrical shell (with arbitrary directional curve) with free and simple support ends, when boundary generatrices are riged–clamped is studied.

On the reflection of flexural waves from an elastic fixing

To problems of the reflection of the curved waves from flet border of the ambience dedicated to the multiple studies. Relativly littie works are connected with questions of the reflection curved waves from flet edge of the fine plate. In this work happen to the decisions of the problem of the plate under complicated border condition. For partiat case of the free edge, as limiting case of the adsence of the reflected wave, is got decision of the problem localized bending variations.

The contact problem for piecewise homogeneous orthotropic plane with finite inclusion
It is considered a piecewise homogeneous elastic orthotropic plate strengthened by the finite inclusion, which emerges on the border of the partition at right angle and is loaded with tangential forces. Contact stresses along the line of contact are determined, the behavior of contact stresses in the neighborhood of singular points is established. By use of methods of the theory of analytic functions the problem is reduced to the integral differential equation on the finite segment. By help of the integral transformation it is obtained the Riemann problem, whose solution is represented explicitly.

About one problem of optimal stabilization of the mathematical pendulum having mobile hanging point.
In this work the problems of optimal stabilization of the small fluctuations of the mathematical pendulum around and at the bottom and the top positions of balance are considered when the pendulum hanging point moves according to the set law in a vertical direction. The operating moment arises by means of the device which is in the pendulum hanging point. Problems are led to the problem of optimal stabilization of the system of the differential equations of the second order with variable factors which in its turn is solved by Lyapunov-Bellman’s method. Lyapunov’s optimal function is got in the form of the square-law form with variable factors for the definition of which the system of the nonlinear differential equations is got. The solutions of these equations are received by means of computer program. Optimal operating influence is formed.

About of Stabilization of Rotational Movement of a Rigid Body whit Integrally Small Perturbations.
The problem of stability and optimal stabilization of rotational movement around a point on the axes of dynamic symmetry of an absolute solid body, when integrally small perturbing forces act during an infinitive interval of time, is considered. It is suggested that the point around which the body rotates moves on the horizontal plane.The problem has been solved with both classical and suggested in work methods and a comparisons of values of functional has been carried out. This comparison revealed that in case of acting force optimal stabilization the energy consumption is less than in case of classical stabilization method.

The acoustic waves in the clouds atmosphere
The propagation of acoustic in media containing gas, vapor and drops is considered. The effects of coagulation of drops and condensation of vapor on the drops are taken into account. The linear dispersion equation is derived. The more accurate condition of infrasonic generation is obtained.

Oscillations of rotor on rolling contact bearings with zero radial clearance
Non linear oscillations of rotor on rolling contact bearings placed on the shaft and in the body without preliminary stretch with zero radial clearance is considered in the paper. The systems of non–linear differential equations of the rotor oscillations which solution is realized by the method of harmonic linearization are obtained. It is discovered that amplitude–frequency curves have a resonance character, i.e. because of non–linear pliability of bearings the resonance

regime of oscillation take the place, and amplitude–frequency curves have a non–linear character. It is shown that for horizontal flexible rotor the resonance frequencies are depended on the value of non–steadiness and on static loading. Moreover the critical velocities can be essentially less than own frequency of rotor on rigid support, and the increase of the radial clearance in the bearing brings to the bifurcation of resonance peak in horizontal and vertical directions. In comparison with the vertical rotor the non–linearity of system with statically loaded horizontal rotor is expressed considerably less, moreover derangement of amplitudes take the place for flexible and for strongly loaded rotors only.

The method of determining of dangerous volume as measure of damage interreacting bodies in friction pair is stated. Formation of dangerous volumes by stress intensity criterion in conditions of three-dimensional stress state is shown for the contact between two deformable rigid bodies.

Using differential factorization method the steady vibrations of an elastic medium layered structure containing internal defects such as rigid inclusions and cavities are investigated. The systems of integral equations which bind the stresses and displacements in the planes of the layers with the jumps of stresses on the boundaries of inclusions and displacement jumps on the banks of the cracks have been found. Solutions of received integral equation's systems for particular cases of areas occupied by defects constructed in closed form with integral factorization method of Wiener–Hopf or fictitious absorption.

The problem on closing of thin semiinfinite crack in presence on its surface of layer of particles, containing in fluid, entering in crack, is solved by method of Wienner-Hopf with application to biology. The stresses on crack are calculated numerically, and the region in which crack is closed is clarified.

The properties of anisotropy on directions (longitudinal, transverse, normal to the plate) and different resistance to a tension and compression, hardening and softening at creep have the majority of the sheet materials. That makes mathematical simulation of process of shaping very difficult. In case of the shaping plane panels at creep special interest for testing is represented by the problems of a bending of a square plate, which can realized experimentally. Calculation by finite element method in three-dimensional statement and analytical estimations in one-dimensional statement for the problems of plate bend testify to essential influence of anisotropy on normal direction to sheet in comparison with calculation in isotropic statement: delay of deformation process for a problem of plate torsion in a saddle surface and acceleration of process of deformation for problems of plate bend in a cylindrical surface. Not taking into account of real properties of creep at the decision of applied problems of details shaping and forecasting of their further exploitation can result in essential mistakes.

The problems of the rectangular plate flexure, strengthened by additional layer of another more strength material and strengthened by the four symmetrically located oblique stiffening ribs equal to it by weight are investigated. The comparison of the obtained results shows that strengthening plate by stiffening ribs leads to a notable increase in its rigidity and strength in comparison with the two-layered plate of the same weight.

The paper is discussing problems connected with embedment of the incubation time criterion for brittle fracture into finite element computational schemes. Incubation time fracture criterion is reviewed, practical questions of its numerical implementation are discussed. Several examples of how the incubation time fracture criterion can be used as fracture condition in finite element computations are given. The examples include simulations of dynamic crack propagation and arrest, impact crater formation (i.e. fracture in initially intact media), propagation of cracks in pipelines. Applicability of the approach to model initiation, development and arrest of dynamic fracture is claimed.

The last two decades of research in structural mechanics were focused on smart material and systems. Nevertheless the momentum for a technological revolution is still lacking. This paper discusses first the current state of the art and goes further in the more promising directions across ongoing progresses

 The existence and behaviour of electro-elastic surface Love waves in a structure consisting of a piezoelectric substrate of crystal classes 6mm, 4mm, an elastic layer and an adjoining dielectric medium on the top is considered. The electro-elastic Love wave problem is solved for the above mentioned layered structure. The existence of electro-elastic surface Love waves and the behaviour of the modes of these waves are revealed.

Within the plane problem of the elasticity theory, the problem of magnetoelastic waves in an isotropic layer is considered. The layer is immersed in external longitudinal magnetic field and has the properties of a perfect conductor. One side of the layer is fixed, and the other is free from mechanical loads. The dispersion equation is derived and detailed numerical analysis on the phase velocity of the magnetoelastic wave is obtained.

Chemical Mechanical Polishing (CMP) is one of the key processes used in semiconductor manufacturing for planarization of interlayer dielectrics and metal layers. A chip-scale CMP simulator, called CMP Optimize (CMPO), developed at Mentor Graphics is presented in this work. Contact mechanics model is used for modeling the pressure distribution over an entire die. It takes into account long range polishing effects at mm-scale due to the stiffness of the polishing pad. For calculating the local removal rate, a mechanical model using Preston material removal behavior has been used. It empirically relates the removal rate of materials to the local pressure, rotation speed of the pad relative to the wafer and slurry activity driven by the frictional force. CMPO has the capability to model various deposition processes and one or multi material polishing during CMP. The latter is done by using an effective trench approximation and assigning different removal rates to different materials. The contact mechanics driven CMP model presented in this work is used for modeling die-level CMP behavior and detection of potential manufacturing hotspots. It has been validated on numerous process technology nodes, down from 90nm to 45nm, with accuracy within 10% of experimental data on production chips.

Modes of plastic collapse and phenomenon of large deformation of thin walled structures under impact loading – a perspective

The paper presents an overview of the plasto-mechanics of large deformation of thin walled structures subjected to external impact loads and resulting collapse modes in relation to absorption of kinetic energy of an external impact or a crash as in road or air accidents. Despite several studies that have appeared in recent years, mechanics involved in such phenomenon and its dependence on various parameters like strain rate, inertia, history of loading, annealing and thermal processes, and the geometry are still not fully understood. Structured experiments become necessary to study the phenomenon in its varied aspects, and provide plausible description, assumptions and parameters needed for realistic analysis of such problems based on the mechanics observed. Several studies have appeared in literature in recent years which present formulations that describe large deformations and attempt to bring together various facets affecting the deformation. However, many problems relating to the deformation modes and their dependence on various parameters remain unresolved. In this paper, an over view of observations in some large deformation studies, which are of interest, involving thin walled structures of varying geometry and size and subjected to impact of a drop hammer, projectiles of different features and air and underwater blast loading, is presented in a hope that plausible explanation for these having been found, would help in further understanding of the phenomenon and its dependence on different parameters.

Cusped prismatic shells and beams

The present paper is devoted to up-dated exploratory survey in the field of cusped prismatic shells and beams.

The effect of combined loading on buckling loads of functionally graded cylindrical shells surrounded by an elastic medium

The first order shear deformation theory is developed to examine the effect of combined load interaction parameter on elastic buckling loads of combined-loaded functionally graded circular cylindrical shells with properties varying continuously in the thickness direction. A load interaction parameter is appropriately defined to express the ratio of applied axial compression and lateral pressure. To model the elastic foundation, the Winkler and Pasternak foundations are used. The elastic foundation reacts in compression as well as in tension. The stability equations are established using the equilibrium equations and the adjacent equilibrium criterion method. Approximate solutions are assumed to solve these equations to obtain the buckling loads. Critical loads are obtained for a given load interaction.

The buckling of axially compressed non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium

An analytical solution is presented for the buckling problem of non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium subjected to axial compression. To model the elastic foundation, the Winkler and Pasternak foundations are used. The elastic foundation reacts in compression as well as in tension. The analysis is based on the first order shear deformation theory including the shear correction factor with the nonlinear strain-displacement relations. The shell properties vary continuously through the thickness direction. Suitable displacement functions that identically satisfy the boundary conditions and stability equations are employed to determine the buckling loads. Numerical results reveal that the non-homogeneity parameter and coefficients of elastic foundations significantly affect the critical buckling loads of non-homogeneous cylindrical shells embedded in an elastic medium.

The centrally symmetric problem for an accreted elastic globe is considered. The deformations are supposed to be finite and the material is to be incompressible. The constitutive equations are formulated with respect to complete distortion tensor which may be representing as the composition of initial distortion and compatible deformation gradient. The initial distortion induces the linear connection on the material manifold which becomes a flat space of affine connectivity with nontrivial torsion.

Processes of creep in the conditions of high-temperature modes of stress are considered. As the defining equations parities of a power variant of the theory of creep in which frameworks a measure of intensity of process is capacity of dissipated energy at irreversible deformation of the creep, which size at the steady state inversely proportional time before destruction of an element of a design are used. It is experimentally shown that for a non-uniform stress state average on volume capacity of dispersion well characterizes intensity of process of creep and duration before destruction of an element of a design as a whole. Using analogy between behavior of typical design elements in problems of ideally plastic environment and high-temperature creep, on a number of examples possibility of reception of estimations of intensity of creep process of design elements is illustrated at the set external thermo-power parameters. Comparison of behavior of elements of designs is offered to be spent, comparing among themselves the external generalized forces with some weight factors (equivalence factors), reducing these forces to equivalent size of the same dimension for various kinds of stress. The top and bottom estimations of factors of equivalence are received at the set size of external loading. The received results prove to be true conformity to experimental data.

Basic fundamentals of the mathematical theory of growing solids are under consideration. The classification of various methods of solids accretion is presented. Special attention is paid to the accretion of 3D solids by 2D surfaces. The constitutive equations are formulated with respect to complete distortion tensor which may be representing as the composition of initial distortion and compatible deformation gradient. The initial distortion induces the linear connection on the material manifold which becomes a flat space of affine connectivity with nontrivial torsion. In the majority of papers which deal with the mechanics of growing solids the theory is constructed as some special replicas of solid mechanics in three-dimensional Euclidean space. Nevertheless the geometric properties of Euclidean space are not enough to describe the stress-strain state of a solid which was formed by the continuous joining of pre-stressed parts. It is extremely important that the growing solid can be considered as a special class of inhomogeneous body, in which inhomogeneity arises because of nonholonomic distortion, caused by the joining of incompatible stressed parts. From this point of view the mechanics of growing solids have much in common with the theory of defects, in particular with the theory of continuously distributed dislocations. The theory of fiber bundles of differentiable manifolds is taken as the geometric foundation of mathematical theory of growing solids. Analytic properties of differentiable manifolds are determined without utilization of prescribed connection. This allow to formulate a boundary value problem in terms of quiet general geometrical properties of reference configuration and determine the particular type of connectivity taking into account specific kinematic and static characteristics of the accretion process.

The space problem of propagation of waves in an elastic perfect conductive layer is considered in presence of an external constant magnetic field. On planes limiting a layer, the conditions of the constrained free edge are given. For phase speed of symmetric and antisymmetric vibrations

load is a non-conservative follower force. For these problems critical loads are determined for limit cases of narrow and very wide plates.

We study the 3d inverse reconstruction problem for a plane crack of penny-shaped geometry located in the linear homogeneous material. It is assumed that the process is harmonic in time. The direct problem is reduced a boundary integral equation, and a numerical collocation technique is developed to solve this equation. The inverse reconstruction problem is formulated on the basis of far-field back-scattered amplitude, known for all observation angles at a certain fixed frequency. The formulated inverse problem is reduced to a minimization of the discrepancy functional by methods of global random search.

The strength, deformability and stability of concrete columns confined by carbon composite sheets is considered at axial compressive loading. The formulas for prediction of ultimate strength, ultimate strain, and the tangent modulus above the limit of nonlinearity are given. Confined reinforced concrete columns also are considered. The loss of stability of columns above the strength of plain concrete is analyzed and it is proved that FRP confinement is efficient only for columns having low or moderate slenderness (λ<40).

О Г Л А В Л Е Н И Е

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВЛИЯНИЕ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ, ЗАДАННЫХ НА ДУГОВОЙ ЧАСТИ КОНТУРА КРУГОВОГО СЕКТОРА, НА ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ

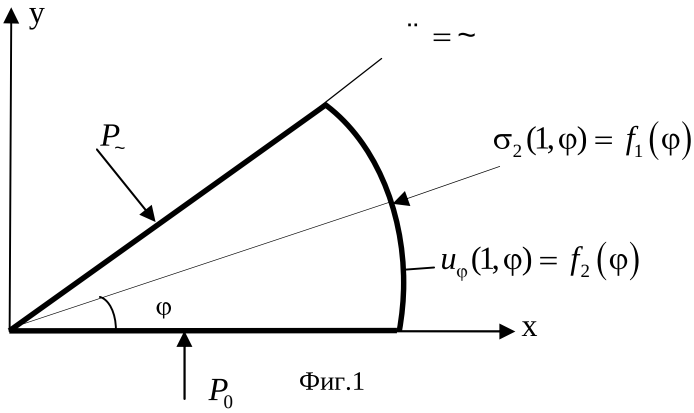
Саргсян А.М.

Исследуется плоское напряженное состояние кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора α $(0<\alpha<2\pi)$, когда на дуговой части контура заданы нормальное напряжение $\sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi)$ и окружное перемещение $u_\varphi(1,\varphi)=f_2(\varphi)$, а на радиальных сторонах осуществляется условие соприкасания с жестким штампом без трения .

Замкнутое решение задачи получено с помощью метода Фурье. Исследуется сингулярность напряжений в окрестности вершины сектора. Между первыми коэффициентами разложения Фурье функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ установлено условие, при котором напряжения в окрестности вершины сектора стремятся к бесконечности только при $\alpha>\pi$.

В работе [1], опираясь на результаты [2], исследованно упругое равновесие кругового сектора, когда на дуговой части контура заданы нормальные и касательные напряжения. Было показано, что при стремлении угла α к 2π порядок особенности напряжений стремится к -1, а коэффициент при такой особенности в условиях общего нагружения границы r = 1 отличен от нуля. Здесь анализируется другой случай напряжения дуговой части границы сектора.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для однородного кругового сектора (фиг. 1), когда на его границе заданы следующие условия:



Фиг.1

$$\tau_{r\varphi}(r,0)=0,\ u_\varphi(r,0)=0 \tag{1}$$

$$\tau_{r\varphi}(r,\alpha)=0,\ u_\varphi(r,\alpha)=b_0 r \tag{2}$$

$$\sigma_r(1,\varphi)=f_1(\varphi),\ u_\varphi(1,\varphi)=f_2(\varphi) \tag{3}$$

$$f_2(0)=0\ ,\ f_2(\alpha)=b_0 . \tag{4}$$

Упругое состояние кругового сектора определяется решением бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta\Phi(r,\varphi)=0 . \tag{5}$$

Учитывая граничные условия (2), решение уравнения (5) представим в виде

$$\Phi(r,\varphi)=r^{\lambda+1}\left[AS_\varphi^{+}+BC_\varphi^{+}+CS_\varphi^{-}+DC_\varphi^{-}\right]+B_0 r^2\ln r\ , \tag{5′}$$

где A, B, C, D – постоянные интегрирования, B_0 и λ – произвольные параметры,

$$S_\varphi^{\pm}=\sin(\lambda\pm1),\quad C_\varphi^{\pm}=\cos(\lambda\pm1)\varphi .$$

Выражения компонентов напряжений через функции $\Phi(r,\varphi)$ имеют вид

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{r^2\partial\varphi^2}\ ,\ \sigma_\varphi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\ ,\ \tau_{r\varphi}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) \tag{6}$$

Используя уравнения состояний, уравнения Коши и соотношения (5′), (6), для перемещений $u_\varphi(r,\varphi)$ получим

$$u_\varphi(r,\varphi)=\frac{r^\lambda}{E}\Big[-A\lambda^+\nu^+C_\varphi^+ + B\lambda^+\nu^+S_\varphi^+ - C\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C_\varphi^- +$$
$$D\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)S_\varphi^-\Big]+\frac{4B_0\varphi}{E}r + a\cos\varphi - b\sin\varphi + dr, \tag{7}$$

где $\nu^+=\nu+1$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга; A, B, C, D, B_0 – неизвестные коэффициенты; a,b,d – постоянные интегрирования.

Удовлетворяя граничным условиям (1) – (3), получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования A, B, C, D [1,2]:

$$\lambda^+A+\lambda^-C=0,\quad \left[\lambda^+\nu^+A+\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C\right]r^\lambda=-E\left(a+dr\right)$$
$$\lambda^+C_\alpha^+A-\lambda^+S_\alpha^+B+\lambda^-C_\alpha^-C-\lambda^-S_\alpha^-D=0 \tag{8}$$
$$\left[\lambda^+\nu^+C_\alpha^+A-\lambda^+\nu^+S_\alpha^+B+\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C_\alpha^-C-\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)S_\alpha^-D\right]r^\lambda=$$
$$=E\left(b_0r-a\cos\alpha+b\sin\alpha-d\right)$$

Определяя коэффициент B_0 из условий

$$4\alpha B_0=E(b_0-d) \tag{7′}$$

и анализируя неоднородную систему (8), будем иметь $a=b=d=0$, т.е. приходим к однородной системе линейных уравнений относительно A, B, C, D.

Тогда, из первых двух уравнений (8) следует:

$$A=C=0$$

а из двух последних –

$$\sin\left(\lambda+1\right)\alpha\cdot\sin\left(\lambda-1\right)\alpha=0\,. \tag{9}$$

Корни уравнения (9) – действительные и простые

$$\lambda_k=\alpha_0k+1,\ \ \tilde{\lambda}_n=\alpha_0n-1,\ \ \alpha_0=\pi/\alpha\,, \tag{10}$$

причем [1,2]

$$\lambda_k>0\ ,\tilde{\lambda}_n>0\,. \tag{11}$$

Условие (11), в зависимости от величины угла раствора сектора α, ограничивает пределы изменения k и n, а именно:

I. для $0<\alpha<2\pi$, $(k=0,1,2,...)$, $(n=2,3,4,...)$,

II. для $0<\alpha<\pi$, $(k=0,1,2,...)$, $(n=1,2,3,...)$,

III. для $\pi<\alpha<2\pi$, $(k=-1,0,1,...)$, $(n=2,3,4,...)$.

Здесь рассматривается первый случай $\left(0<\alpha<2\pi,\ (k=0,1,2,...),\ (n=2,3,4,...)\right)$.

Функция напряжения Эри (5) для этого случая принимает вид

$$\Phi(r,\varphi)=D_0r^2+D_1r^{\lambda_1+1}\cos\left(\lambda_1-1\right)\varphi+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_kr^{\lambda_k+1}+B_kr^{\tilde{\lambda}_k+1}\right]\cos\alpha_0k\varphi+B_0r^2\ln r\,, \tag{12}$$

где B_0 определяется из условий (7′).

С помощью (6), (7), (12) для компонентов напряжений и перемещения $u_\varphi(r,\varphi)$ будем иметь

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\varphi\\ \tau_{r\varphi}\end{Bmatrix}=D_0\begin{Bmatrix}2\\2\\0\end{Bmatrix}+D_1\begin{Bmatrix}(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\(1+\alpha_0)(2+\alpha_0)\cos\alpha_0\varphi\\ \alpha_0(1+\alpha_0)\sin\alpha_0\varphi\end{Bmatrix}r^{\alpha_0}+B_0\begin{Bmatrix}(2\ln r+1)\\(2\ln r+3)\\0\end{Bmatrix}+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\lambda_k\begin{Bmatrix}(2-\alpha_0k)\\(2+\alpha_0k)\\ \alpha_0k\end{Bmatrix}r^{\alpha_0k}+B_k\alpha_0k\left(\alpha_0k-1\right)\begin{Bmatrix}-1\\1\\1\end{Bmatrix}r^{\alpha_0k-2}\right]\begin{Bmatrix}\cos\alpha_0k\varphi\\ \sin\alpha_0k\varphi\\ \cos\alpha_0k\varphi\end{Bmatrix}, \tag{13}$$

$$Eu_{\varphi}(r,\varphi)=D_1\left(\lambda_1^-\nu^+ +4\right)r^{\lambda_1}\cdot\sin\lambda_1^-\varphi+4B_0r\varphi+$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^+ +4\right)r^{\lambda_k}+B_k\lambda_k^-\nu^+r^{\tilde{\lambda}_k}\right]\sin\alpha_0k\varphi,\ \lambda_k^-=\lambda_k-1.$$

Удовлетворяя граничным условиям (3) , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2D_0+D_1(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)r^{\alpha_0}\cos\alpha_0\varphi+B_0+ \\ +\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[D_k\lambda_k(\lambda_k-3)-B_k(\lambda_k-2)(\lambda_k-1)\right]\cos\alpha_0k\varphi=f_1(\varphi) \\ D_1\cdot\dfrac{\lambda_1^-\nu^+ +4}{E}\sin\alpha_0\varphi+\dfrac{b_0\varphi}{\alpha}+\dfrac{1}{E}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_k^-\nu^+ +4\right)+B_k\lambda_k^-\nu^+\right]\sin\alpha_0k\varphi=f_2(\varphi) \end{cases} \tag{14}$$

Умножая первое уравнение (14) на $\cos\alpha_0m\varphi$ $(m=0,1,2,...)$, а второе – на $\sin\alpha_0m\varphi$ $(m=1,2,3,...)$ и интегрируя по φ в интервале $(0,\alpha)$, находим

$$\begin{gathered} 2D_0+B_0=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}f_1\varphi d\varphi,\quad D_1=\frac{2}{\alpha}\frac{\tilde{f}_{11}}{(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)}, \\ D_1=\frac{2}{\alpha}\left[\tilde{f}_{21}-\frac{b_0}{\alpha_0}\right]\frac{E}{\alpha_0\nu^+ +4} \end{gathered} \tag{15}$$

$$D_k=\frac{\tilde{f}_{1k}\nu^+ +\tilde{f}^*_{2k}(\alpha_0k-1)}{\alpha\left[\nu^+ +2(\alpha_0k-1)\right]},\quad \tilde{f}^*_{2k}=\tilde{f}_{2k}-\frac{b_0}{\alpha_0}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$B_k=\frac{-\tilde{f}_{1k}\left(\alpha_0k\nu^+ +4\right)+\tilde{f}^*_{2k}(\alpha_0k+1)(2-\alpha_0k)}{\alpha\alpha_0k\left[\nu^+ +2(\alpha_0k-1)\right]}$$

$$\tilde{f}_{1k}=\int_0^{\alpha}f_1(\varphi)\cos\alpha_0k\varphi d\varphi,\quad \tilde{f}_{2k}=\int_0^{\alpha}f_2(\varphi)\sin\alpha_0k\varphi d\varphi.$$

Между первыми коэффициентами разложения Фурье функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ имеет место соотношение

$$-\tilde{f}_{11}\left(\alpha_0\nu^+ +4\right)+\tilde{f}^*_{21}(1+\alpha_0)(2-\alpha_0)\cdot E=0 \tag{16}$$

$f^*_{21}=\tilde{f}_{21}-b_0/\alpha_0$.

Итак, решение поставленной задачи получено в виде сходящихся степенных рядов (13), коэффициенты которых определяются в явном виде (15).

Из (13) видно, что при приближении к угловой точке сектора $(r\to0)$ все три напряжения имеют степенную особенность для любого значения угла α из интервала $\pi<\alpha<2\pi$. Степенная особенность напряжений обусловлена соответствующим членом ряда (13) с множителем r^{α_0k-2} $(k=2,k=3)$.

Причем, степень особенности, в зависимости от величины угла α, изменяется в пределах

1) $-1<\alpha_0k-2<0$ при $k=2$ и $\pi<\alpha<2\pi$,

2) $-0,5<\alpha_0k-2<0$ при $k=3$ и $3\pi/2<\alpha<2\pi$.

Коэффициенты при степенных особенностях 1) и 2) в общем случае отличны от нуля. Но в первом случае, когда $\alpha\to2\pi$, коэффициенты при особенности типа $r^{-1+\varepsilon}$ $(\varepsilon\to+0)$ стремятся к нулю благодаря наличию в них множителя (α_0k-1). Этот результат существенно отличается от той, который был получен в работе [1] , где на дуговой части контура кругового сектора были заданы внешние усилия. И поэтому, с точки зрения предотвращения хрупкого разрушения граничные условия (3) физически более приемлемы, чем принятые в работе [1] граничные условия [3,4] .

В случае 2), т.е. при $k=3$, когда $\alpha \to 2\pi$, все компоненты напряжений имеют степенную особенность типа $r^{-1/2+\varepsilon}(\varepsilon \to +0)$, коэффициенты которого в общем случае также отличны от нуля.

Появление логарифмической особенности в выражениях нормальных напряжений связано с линейным перемещением точек границы $\varphi=\alpha$, и при $b_0=0$ этот тип особенности исчезает.

Отметим одно важное обстоятельство. Из выражений (15) для B_k формально определив B_1 (полагая $k=1$), легко заметить, что числитель выражения B_1 совпадает с выражением левой части условии (16), а степень особенности напряжений $(\alpha_0 k-2)$ принимает отрицательные значения уже при $\alpha>\pi/2$. Т.е. соотношение (16) является условием малонапряженности окрестности вершины кругового сектора [7], если угол раствора клина $\alpha<\pi$.

Как и в работах [1,5,6], из условий статического равновесия системы сектор + штампы следует, что внешнее усилие, действующее на границе $r=1$, должно быть самоуравновешено в направлении оси x при $\alpha=\pi$ и $\alpha=2\pi$.

Равнодействующие внешних сил, действующие на штампы (силы P_0 и P_α), определяются интегрированием $\sigma_\varphi(r,\varphi)$ по r в интервале (0,1) при $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Актуальные проблемы механики сплошной среды (Тр. Международной конференции, посвященные 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна). Ереван, 2007. С. 368–372.
2. Аветисян А.Г. Особенности напряжений в составном теле при контурных условиях гладкого контакта.// Исследование по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1976. Вып. 12. С. 85–94.
3. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under antiplane and plane deformations.// Modern problems of deformable bodies mechanics (collection of papers, vol. 1). Yerevan, 2005. 282p.
4. Саргсян А.М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С.48–53.
5. Саргсян А.М. Об упругом равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. (Тр.VI Международной конференции, сентябрь 21–26, Горис–Степанакерт, 2008). Ереван, 2008.456 с.
6. Саргсян А.М. О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Изв. НАН Армении. Механика. В печати
7. Чобанян К.С.Напряжения в составных упругих телах. Ереван. Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – к.ф.–м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24 б, тел. 58-60-54
E-mail: azat-sargsyan@mail.ru