ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Труды VII международной конференции
сентябрь 19-23
Горис-Степанакерт, 2011

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Proceedings of VII International Conference
September 19-23
Goris-Stepanakert, 2011

Госкомитет науки Министерства образования и науки РА
Нац.комитет по теоретической и прикладной механике РА
Институт механики НАН РА
Институт механики МГУ РФ
Институт проблем механики им. А.И.Ишлинского РАН
Горисский Государственный университет
Арцахский Государственный университет

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

Труды VII международной конференции
сентябрь 19-23, 2011, Горис-Степанакерт

Институт механики НАН РА
Ереван – 2011

ՀՏԴ 06:531/534
ԳՄԴ 22.3
Դ 447

Դ 447 Դեֆորմացվող միջավայրերի փոխազդեցության դինամիկայի պրոբլեմները.-,,Էդիկ Թանգյան,, տպարան Միկոյան 23/3, 2011.-470էջ:

ԳՄԴ 22.3

ISBN 978-99941-2-163-3

¸ º ü à ðØ ² ò ì àÔ

ØÆæ ² ì ²Úð º ðÆ

ö à Ê ²¼ ¸ ºò àôÂ Ú ² Ü

¸ ÆÜ ² ØÆ Î ²ÚÆ ä ð à ´ È º ØÜ º ðÀ

VII ÙÇç ³½· ³ÛÇÝ ·Ç ï ³ÅáÕá í

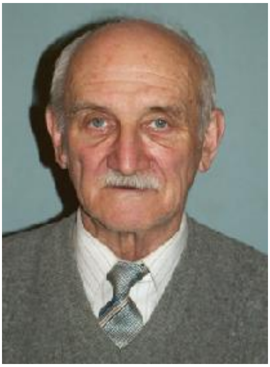
ë»å ï »Ùµ»ñÇ 19-23, 2011Ã.

¶ áñÇë-êï »÷ ³Ý³ Ï»ñï

THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF INTERACTION OF DEFORMABLE MEDIA

Proceedings of VII International Conference

September 19-23, 2008, Goris-Stepanakert



Оргкомитет VII международной конференции сердечно поздравляет сопредседателя оргкомитета д.ф.м.н., иностранного члена НАН Армении, профессора

Владимира Николаевича Кукуджанова

со славным юбилеем – 80-ти летием со дня рождения и желает ему крепкого здоровья и всего самого светлого в жизни.

Оргкомитет VII международной конференции сердечно поздравляет заместителя сопредседателей оргкомитета д.ф.м.н., профессора

Анушавана Аристакесовича Ванцяна

с юбилеем – 60-ти летием со дня рождения, желает ему крепкого здоровья и новых творческих успехов

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ДВУХ МАЯТНИКОВ В ЗАДАЧЕ ИЗБЕЖАНИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ

Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э.
Ереван, Армения

Рассматривается задача построения ограниченного управления колебательными движениями двух физических маятников с подвесами на подвижном основании. Требуется определить закон управляющей силы движением основания, обеспечивающего перемещение системы за конечное время из начального состояния покоя в заданное конечное состояние покоя и гарантирующего отсутствие столкновения маятников в колебательном движении. Предложен способ построения искомого управления. Получено условие на конечное время, при котором задача разрешима.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское движение механической системы, состоящей из трех твердых тел G_0, G_1, G_2 (рис. 1a). Тело G_0 с массой m_0 может двигаться поступательно без трения вдоль оси Ox, под действием силы F. Тела G_1, G_2 представляют собой физические маятники с точками подвесов O_1, O_2, соответственно, на подвижном основании G_0. Маятники состоят из нерастяжимых нитей одинаковой длины и жестко связанные с нитей шаровых грузов G_1, G_2 с массами m_1, m_2 соответственно. Обозначим через I_1, I_2 их моменты инерции относительно осей подвесов, через L – расстояния от осей подвесов O_1 и O_2 до центров инерции C_1 и C_2 грузов, через R – расстояние между подвесами, через r – радиус шаровых грузов.

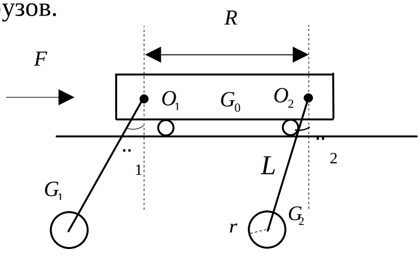


Рис.1a

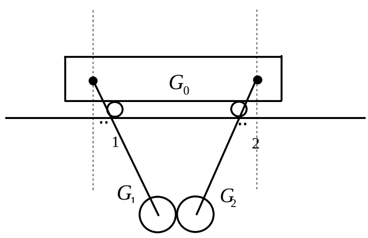


Рис. 1b

На тела G_1, G_2 с массами m_1 и m_2 действуют сила тяжести и силы реакции, под действием которых они совершают колебания в плоскости xy. Сила $F(t)$ может быть направлена параллельно горизонтальной оси O_1x в сторону возрастания ($F > 0$) или в сторону убывания x ($F < 0$). Для описания движения выберем в качестве независимых координат абсциссу x

центра инерции тела G_0 и углы φ_1 и φ_2 отклонения маятников от вертикальных осей (рис. 1). Уравнения движения системы на интервале времени $[0,T]$ имеют вид

$$(m_0+m_1+m_2)\ddot{x}-m_1L\ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1-m_2L\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2+m_1L\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1+m_2L\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2=F(t) \quad (1.1)$$

$$I_1\ddot{\varphi}_1-m_1L\ddot{x}\cos\varphi_1=-m_1Lg\sin\varphi_1$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2-m_2L\ddot{x}\cos\varphi_2=-m_2Lg\sin\varphi_2$$

Пусть на управление $F(t)$ наложено ограничение

$$|F(t)|\le F^0, \quad t\in[0,T] \quad (1.2)$$

В процессе управляемого колебательного движения маятников расстояние между центров инерции C_1, C_2 шаровых грузов, как функция от времени $d=d(t)$, в подвижной системе O_1xy вычисляется по формуле

$$d(t)=\sqrt{[x_2(t)-x_1(t)]^2+[y_2(t)-y_1(t)]^2} \quad (1.3)$$

$$x_1(t)=L\sin\varphi_1(t),\ y_1(t)=L\cos\varphi_1(t),\ x_2(t)=R+Lsin\varphi_2(t),\ y_2(t)=L\cos\varphi_2(t) \quad (1.4)$$

где x_1, y_1, x_2, y_2 - проекции центров инерции шаровых грузов на координатные оси O_1x, O_1y.

Скажем, что при управлении $F(t)$ (1.2) имеет место столкновение маятников G_1 и G_2, если в некоторый первый момент времени $t=t^*$ из интервала $[0,T]$ в процессе управляемого движения выполняется условие

$$d(t^*)=\sqrt{[x_2(t^*)-x_1(t^*)]^2+[y_2(t^*)-y_1(t^*)]^2}=2r,\ t^*\in[0,T] \quad (1.5)$$

которое, после подстановки (1.4) в (1.5) принимает вид

$$d(t^*)=\sqrt{[R+L(\sin\varphi_2(t^*)-\sin\varphi_1(t^*))]^2+L^2[\cos\varphi_2(t^*)-\cos\varphi_1(t^*)]^2}=2r,\ t^*\in[0,T] \quad (1.6)$$

Пусть управление $F(t)$ (1.2) такое, что система (1.1) совершает малые колебания, т.е.

$$|\varphi_i(t)|\le\varphi_i^*\le\varphi^*<<1,\quad \varphi^*=\max(\varphi_1^*,\varphi_2^*),\quad t\in[0,T] \quad (1.7)$$

Тогда, учитывая $\sin\varphi_i(t)\approx\varphi_i(t)$, $\cos\varphi_i(t)\approx 1$, $i=1,2$, $t\in[0,T]$, уравнения (1.1) линеаризуются и примут следующий упрощенный вид:

$$(m_0+m_1+m_2)\ddot{x}-m_1L\ddot{\varphi}_1-m_2L\ddot{\varphi}_2=F(t),\quad t\in[0,T] \quad (1.8)$$

$$I_1\ddot{\varphi}_1+m_1gL\varphi_1=m_1L\ddot{x}$$

$$I_2\ddot{\varphi}_2+m_2gL\varphi_2=m_2L\ddot{x}$$

а условие (1.6), с использованием линеаризованных формул $x_1=L\varphi$, $x_2=R+L\varphi_2$, $y_1=y_2=L$, запишется в виде

$$d(t^*)=|R+L(\varphi_2(t^*)-\varphi_1(t^*))|=2r,\quad t^*\in[0,T] \quad (1.9)$$

Из (1.9) следует, что столкновение может произойти только в случае, когда в момент времени $t^* \in [0,T]$

$$\varphi_1(t^*) > 0\,,\ \varphi_2(t^*) < 0 \text{ и} \qquad (1.10)$$

и столкновение не может иметь места, если

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) < (R-2r)L^{-1}\,,\quad t \in [0,T] \qquad (1.11)$$

Задача. Требуется найти управление $F(t)$ (1.2), перемещающее систему (1.8) из начального состояние покоя

$$x(0)=0\,,\ \dot x(0)=0\,,\ \varphi_i(0)=0\,,\ \dot\varphi_i(0)=0 \qquad (1.12)$$

на заданное расстояние a с гашением ее колебаний

$$x(T)=a\,,\ \dot x(T)=0\,,\ \varphi_i(T)=0\,,\ \dot\varphi_i(T)=0 \qquad (1.13)$$

и обеспечивающее выполнение условия не столкновения (1.11). Здесь T – неизвестное пока время окончания процесса.

Отметим, что аналогичная задача – задача построения ограниченных управлений пространственными движениями двух динамических объектов, избегающих столкновения – была рассмотрена [1].

2.Схема решения задачи. Опишем некоторые характерные положения системы маятников, для которых имеет место столкновение. Для заданных L, r рассмотрим пару углов (φ_1^R, φ_2^R), удовлетворяющих условиям

$$\varphi_1^R > 0\,,\quad \varphi_2^R < 0\,,\quad \varphi_1^R = -\varphi_2^R = \varphi^R\,,\qquad 0 \le \varphi^R \le \varphi_* \qquad (2.1)$$

где $\varphi_* = \min(\varphi_1^*, \varphi_2^*)$, $\quad \max\limits_{t\in[0,T]} \left|\varphi_i(t)\right| \le \varphi_i^*$

Учитывая (2.1), из (1.10) найдем

$$R = 2\varphi^R L + 2r \qquad (2.2)$$

Пусть управление $F(t)$ (1.2) такое (подлежащего нахождению), что решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ системы (1.8) с начальными условиями (1.12) удовлетворяют ограничениям

$$\left|\varphi_i(t)\right| \le \varphi^R\,,\ i=1,2\,,\ t\in[0,T] \qquad (2.3)$$

Если каждому значению φ^R, $0 \le \varphi^R \le \varphi_*$ взаимно однозначным образом сопоставить значение параметра R, $2r \le R \le R^*$, определяемого по (2.4), то паре (R, φ^R) будет соответствовать система маятников, симметрично расположенных относительно вертикальной прямой $x = R/2$ (рис. 1б). Поэтому, если $R > R^*$, то с учетом (1.11), (2.1), будем иметь

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) \le 2\varphi^* = (R^* - 2r)L^{-1} < (R-2r)L^{-1}\,,\quad t\in[0,T]$$

и, следовательно, ни при каком управлении (1.2) не может произойти столкновение.

Пусть $2r \le R \le R^*$. Тогда схема решения рассматриваемой задачи состоит в следующем. Зафиксируем некоторую пару $(R, \ddot{}^{R})$, $0 \le \ddot{}^{R} \le \ddot{}_{*}$, $2r \le R \le R^{*}$ и выберем закон изменения ускорения $\ddot{x}(t)$, $t \in [0,T]$ тела G_0 так, чтобы решения $\ddot{}_1(t)$, $\ddot{}_2(t)$ последних двух уравнений системы (1.8) удовлетворяли краевым условиям (1.12), (1.13). Тогда, для предотвращения возможного столкновения (1.9) в процессе колебательного движения достаточно, чтобы удовлетворялись строгие неравенства

$\left|\ddot{}_i(t)\right| < \ddot{}^{R}$, $i = 1,2$, $t \in [0,T]$ (2.4) при соблюдении ограничения (1.2). Это накладывает условие на время T процесса. Мажорируя и упрощая левые части неравенств (2.4), (1.2), можно получить достаточные условия на конечное время T.

3. Построение закона изменения управляющего ускорения. Введем новые переменные и обозначения

$$m_i gLI_i^{-1} = \mu_i^2,\ \ddot{}_i = m_i LI_i^{-1}\ddot{}_i{}',\ m_i^2 L^2 I_i^{-1} = p_i,\ m = m_0 + m_1 + m_2 \qquad (3.1)$$

В обозначениях (3.1) (с дальнейшим опусканием штрихов) система (1.8) запишется в виде

$$m\ddot{x} - p_1\dddot{}_1 - p_2\dddot{}_2 = F \qquad (3.2)$$

$$\dddot{}_1 + \mu_1^2\ddot{}_1 = \ddot{x} \qquad (3.3)$$

$$\dddot{}_2 + \mu_2^2\ddot{}_2 = \ddot{x} \qquad (3.4)$$

Сначала рассмотрим только уравнения (3.3), (3.4). После введения переменных

$$z_1 = x,\ z_2 = \dot{x},\ u = \ddot{x},\ z_3 = \mu_1\ddot{}_1,\ z_4 = \dddot{}_1,\ z_5 = \mu_2\ddot{}_2,\ z_6 = \dddot{}_2,\ z^R = \ddot{}^{R} \qquad (3.5)$$

уравнения колебательных движений (3.3), (3.4), граничные условия (1.12), (1.13) и ограничения (2.4) примут вид

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = u,\ \dot{z}_3 = \mu_1 z_4,\ \dot{z}_4 = -\mu_1 z_3 + u,\ \dot{z}_5 = -\mu_2 z_6,\ \dot{z}_6 = -\mu_2 z_5 + u \qquad (3.6)$$

$$z_i(0) = 0,\quad i = 1,\ldots,6 \qquad (3.7)$$

$$z_1(T) = a,\quad z_i(T) = 0,\quad i = 2,\ldots,6 \qquad (3.8)$$

$$\left|z_3(t)\right| < \mu_1 z^R,\quad \left|z_5(t)\right| < \mu_2 z^R,\quad t \in [0,T] \qquad (3.9)$$

Уравнения (3.5) запишем в векторной форме

$$\dot{z} = Az + Bu \qquad (3.10)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & (0) \\ (0) & A_2 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & -\mu_2 & 0 \end{pmatrix},\ (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z=(z_1,...,z_6)^T\ ,\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

Будем предполагать, что частоты μ_1,μ_2 положительны и различны. Введем обозначение

$$\Omega=\min(\mu_1,\mu_2-\mu_1)>0\ ,\ 0<\mu_1<\mu_2 \qquad (3.11)$$

Наша ближайшая цель найти управляющее ускорение $u(t)$, переводящее систему (3.10) из состояния (3.7) в конечное состояние (3.8) без учета ограничений (3.9).

Так как при $\Omega>0$ система (3.10) вполне управляема [2], то следуя подходу Калмана [3], управляющее ускорение $u(t)$ будем искать в виде линейной комбинации собственных движений однородной (неуправляемой) системы (3.10).

Введем в рассмотрение матрицу

$$R(t)=\int_0^t Q(²)Q^T(²)d² \qquad (3.12)$$

$$Q(t)=\Phi^{-1}(t)B\ ,\ Q^T(t)=\begin{pmatrix}-t & 1 & -\sin\mu_1 t & \cos\mu_1 t & \sin\mu_2 t & \cos\mu_2 t\end{pmatrix} \qquad (3.13)$$

где $\Phi(t)$ - фундаментальная матрица решений однородной системы (3.10).

Так как система (3.10) вполне управляема, то при некотором $t=T>0$ матрица $R(T)$ положительно определенная, т.е. неособая [4].

Выражение для управляющей функции $u(t)$, переводящей систему (3.10) из начало координат фазового пространства (3.7) в конечное состояние (3.8), может быть записано в виде

$$u(t)=(\Phi^{-1}(t)B)^T R^{-1}(T)z^*\ ,\ z^*=\Phi^{-1}(T)z^1=z^1\ ,\ z^1=\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T \qquad (3.14)$$

а решение, соответствующее управлению (3.14), в виде:

$$z(t)=W(t)R^{-1}(T)z^*\ ,\ W(t)=\Phi(t)R(t) \qquad (3.15)$$

4. Соблюдение ограничений на фазовые координаты. Сначала покажем, что выбирая время окончания процесса T достаточно большим, можно гарантировать выполнение ограничений (3.9) в процессе движения при управлении (3.14). Воспользуемся теоремой, аналогичной теореме 5.1[5].

Теорема. Пусть при некотором $T>0$ матрица $R(T)$ неособая, и пусть для любого шестимерного вектора v выполнены неравенства

$$\|W_1(t)K(T)v\|\le «_1(T)\|v\|\ \text{(a)},\ \|W_2(t)K(T)v\|\le «_2(T)\|v\|\ \text{(b)}\ t\in[0,T] \qquad (4.1)$$

$$\|R(T)K(T)v\|\ge ª_i(T)\|v\|\ ,\ i=1,2 \qquad (4.2)$$

где $W_1(t), W_2(t)$ – соответственно третья и пятая строки матрицы $W(t)=\Phi(t)R(t)$ (3.14), $K(T)=E_6$ – единичная матрица размера 6×6, $«_i(T)$, $ª_i(T)$ – положительные скаляры, а $\|\cdot\|$ – эвклидова норма вектора.

Тогда, если выполнены условия

$$z^R \text{a}_1(T)\text{«}_1^{-1}(T) \geq \left\| z^* \right\| \mu_1^{-1}, \ z^R \text{a}_2(T)\text{«}_2^{-1}(T) \geq \left\| z^* \right\| \mu_2^{-1} \qquad (4.3)$$

то управление $u(t)$ (3.14) переводит систему (3.10) из состояния (3.7) в состояние (3.8) в момент T и при этом удовлетворяются ограничения (3.9).

Отметим, что в силу условия (3.11)

$$\mu_i \geq \Omega \ , \ \mu_1 + \mu_2 \geq 3\Omega \qquad (4.4)$$

С учетом (4.4) получим следующие оценки элементов матрицы $R(T)$ (3.12):

$$\left| R_{13} \right| \leq 1/\Omega^2 + T/\Omega, \qquad \left| R_{14} \right| \leq 2/\Omega^2 + T/\Omega, \qquad \left| R_{15} \right| \leq 1/\Omega^2 + T/\Omega,$$

$$\left| R_{16} \right| \leq 2/\Omega^2 + T/\Omega$$

$$\left| R_{23} \right| \leq 2/\Omega \ , \quad \left| R_{24} \right| \leq 1/\Omega, \quad \left| R_{25} \right| \leq 2/\Omega, \quad \left| R_{26} \right| \leq 1/\Omega, \quad \left| R_{34} \right| \leq 1/2\Omega,$$

$$\left| R_{35} \right| \leq 1/3\Omega$$

$$\left| R_{36} \right| \leq 5/3\Omega, \quad \left| R_{45} \right| \leq 5/3\Omega, \quad \left| R_{46} \right| \leq 5/3\Omega, \quad \left| R_{56} \right| \leq 1/2\Omega \qquad (4.5)$$

Определим величины $\text{a}_i(T), \text{«}_i(T)$, $i = 1, 2$. Оценим левую часть неравенства (4.1) (a), применяя неравенство Коши-Буняковского и используя оценки (4.5)

$$\left\| W_i(t)K(T)v \right\| \leq \left\| W_i(t) \right\| \left\| v \right\| \leq \left[(1/2 + 2/\Omega^2)T^2 + (6/\Omega^3 + 1/2\Omega)T + 5/\Omega^4 + 821/72\Omega^2 \right]^{1/2} \left\| v \right\|$$

Следовательно, в (4.1)(a) можно положить

$$\text{«}_1(T) = \text{«}_2(T) = \left[(1/2 + 2/\Omega^2)T^2 + (6/\Omega^3 + 1/2\Omega)T + 5/\Omega^4 + 821/72\Omega^2 \right]^{1/2} \qquad (4.6)$$

Оценим левую часть неравенства (4.1)(b). Для любого вектора v имеем

$$\left\| R(T)v \right\| = \left\| (2T^3/5)v + [R(T) - (2T^3/5)E_6]v \right\| \geq (2T^3/5)\left\| v \right\| - \left\| Mv \right\|,$$

$$M = R(T) - (2T^3/5)E_6 \qquad (4.7)$$

Здесь введена симметрическая матрица M размера 6×6. Согласно неравенству Коши-Буняковского, имеем

$$\left\| Mv \right\|^2 \leq \left\| v \right\|^2 \sum_{i,j=1}^{6} M_{i,j}^2$$

Тогда, учитывая симметрию матрицы M и оценки для ее элементов, которые получаются с использованием соотношений (4.5) для элементов матрицы $R(T)$, получим

$$\left\| Mv \right\| \leq g(T), \qquad (4.8)$$

$$g(T) = \left[2T^6/75 + T^4/2 + 8T^2/\Omega^2 + 24T/\Omega^3 + 293/9\Omega^2 + 20/\Omega^4 \right]^{1/2}$$

Используя неравенства (4.7) и (4.8), получим

$$\left\| R(T)v \right\| \geq \left(2T^3/5 - g(T) \right) \left\| v \right\| \qquad (4.9)$$

Следовательно, условие (4.2) выполнено, если $2T^3/5 - g(T) > 0$. Исследование, с учетом выражения для функции $g(T)$ (4.8), показывает, что существует такое число $T_0 > 0$, что последнее неравенство выполняется для всех $T \in (T_0, +\infty)$. Тогда, сравнивая (4.2) и (4.9), получаем

$$\text{ª}_i(T) = 2T^3/5 - g(T) > 0\,,\ i = 1,2 \tag{4.10}$$

Подставляя в неравенства (4.3) выражения (4.6) и (4.10) получим, что ограничения (3.9) выполняются, если конечное время T выбрать из следуюшего множества:

$$M = \bigcap_{i=0}^{2} M_i \tag{4.11}$$

где

$$M_0 = \{T : T \in (T_0, +\infty), T_0 > 0\}\,,\ M_i = \{T > 0 : z^R \text{ª}_i(T)\text{«}_i^{-1}(T) > \left|z^*\right| \mu_i^{-1}\}\,, i = 1,2 \tag{4.12}$$

5. Соблюдение ограничения на управляющую функцию. Обратимся теперь к вопросу о выборе величины $T \in M$, обеспечивающем выполнение ограничения (1.2). Из (3.2)–(3.4) имеем

$$F(t) = (m - p_1 - p_2)u(t) + \mu_1^2 p_1 \text{¨}_1(t) + \mu_2^2 p_2 \text{¨}_2(t)\,,\ t \in [0,T] \tag{5.1}$$

Оценим

$$\left|F\right| = \left|(m - p_1 - p_2)u(t) + \mu_1^2 p_1 \text{¨}_1(t) + \mu_2^2 p_2 \text{¨}_2(t)\right| \le \left|(m - p_1 - p_2)u(t)\right| + \mu_1^2 p_1 \left|\text{¨}_1(t)\right| +$$
$$+ \mu_2^2 p_2 \left|\text{¨}_2(t)\right| \le \left|(m - p_1 - p_2)u(t)\right| + (\mu_1^2 p_1 + \mu_2^2 p_2)\text{¨}^R \le F^0$$

Из последнего неравенства получим

$$\left|u(t)\right| \le u^0 = (F^0 - (\mu_1^2 p_1 + \mu_2^2 p_2)\text{¨}^R)/\left|m - p_1 - p_2\right| \tag{5.2}$$

Таким образом, для того чтобы при управляющем ускорении (3.14) выполнялось ограничение (1.2) достаточно соблюдения неравенства (5.2) для всех $t \in [0,T]$, т.е.

$$\left|u(t)\right| = \left|Q^T(t)R^{-1}(T)z^*\right| \le u^0 \quad Q(t) = \Phi^{-1}(t)B\,,\ t \in [0,T] \tag{5.3}$$

Можно показать, что имеют место все условия теоремы 5.1[5], согласно которой, если для управляемой системы (3.10) и для любого шестимерного вектора v выполняются следующие неравенства:

$$\left\|Q(t)K(T)v\right\| \le \text{«}_u(T)\left\|v\right\|,\ t \in [0,T]\ \text{(a)} \quad \left\|R(T)K(T)v\right\| \ge \text{ª}_u(T)\left\|v\right\|\ \text{(b)} \tag{5.4}$$

$$u^0 \text{ª}_u(T)\text{«}_u^{-1}(T) \ge \left\|z^*\right\| \tag{5.5}$$

где $K(T) = E_6$, а $\text{ª}_u(T) > 0, \text{«}_u(T) > 0$ – положительные скаляры, то для построенного управляющего ускорения (3.14) удовлетворяется ограничение (5.3).

Действительно, так как левые части неравенств (4.2) и (5.4) (b) совпадают, то в качестве $\text{ª}_u(T)$ можно взять

$$\text{ª}_u(T) = \text{ª}(T) \tag{5.6}$$

Для определения $\text{«}_u(T)$ оценим левую часть неравенства (5.4)(a). Применяя неравенство Коши-Буняковского и используя выражения (3.13) для компонентов вектора $Q(t)$, получим

$$\|Q(t)K(T)v\| \leq \|Q(t)\|\|v\| \leq \sqrt{T^2+3}\,\|v\|$$

Следовательно, в (5.4)(a) можно взять

$$\text{«}_u(T) = \sqrt{T^2+3} \tag{5.7}$$

Так как для найденных $\text{«}_u(T)$ и $\text{ª}_u(T)$ неравенства (5.4)(a) и (5.4) (b) выполняются, то ограничение (5.3) и, следовательно, ограничение (1.2) будут соблюдены, если время T выбрать из множества:

$$M_3 = \{T > 0 : u^0\,\text{ª}_u(T)\,\text{«}_u^{-1}(T) \geq \|z^*\|\} \tag{5.8}$$

Таким образом, при построенном законе изменения ускорения (3.14) и соответствующей управляющей силе (5.1) задача (1.8), (1.2), (1.12)-(1.13), (1.11) разрешима, если $T \in \bigcap_{i=0}^{3} M_i$ где M_i определяются согласно (4.12), (5.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э. Ограниченные управления пространственными движениями двух динамических объектов, избегающих столкновения //Изв. НАН РА. Механика. 2010. № 4. с. 59-70.
2. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1978. 384с.
3. Калман Р. Об обшей теорий систем управления. //Труды 1-го конгресса международной федерации по автоматическому управлению. (IFAC). М.: АН СССР, 1961. Т.2, с. 521-547.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 392 с.
5. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Наука, 2006. 326 с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович – д. ф.-м. н., профессор кафедры теории оптимального управления и приближенных методов факультета математики и механики Ереванского государственного университета, (374 94) 44-95-60, e-mail: vanavet@yahoo.com

Чахмахчян Рафаел Эдвардович-аспирант кафедры теории оптимального управления и приближенных методов факультета математики и механики Ереванского государственного университета,(374 93) 28-52-24, e-mail: rafayel.ch@gmail.com

К ЗАДАЧЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

Агаларян О.Б.

Ереван, Армения

Исследования задач для однородных тел с трещинами по постановке линейной теории упругости в настоящее время достаточно хорошо развито [1.2]. При этом, в этих задачах к неизвестным величинам: компоненты тензора напряжений и компоненты вектора поля перемещенный прибавляются такие новые величины, какими являются коэффициент интенсивности напряжений [КИН], показатель особенности напряжений, скорость притока потенциальной энергии в устье трещины и связанный с ней независимый от пути интегрирования - J - интегралы. Определение этих величин позволяет получить с практической точки зрения необходимые и важные сведения о поведении материала в окрестностях нерегулярных точек и дать оценки о несущей способности упругого тела в целом.

Между тем, с практической точки зрения важное значение имеет определение взаимоотношения трещины с угловым точками соединения, поскольку как показывают многочисленные экспериментальные данные, что трещины выходят на поверхность материала, в основном, именно в окрестностях соединения. В данной статье рассматривается задача о составной упругой плоскости, состоящей из двух бесконечных клиньев, один из которых на своей биссектрисе содержит трещину конечной длины. Принимается, что на берегах разреза действуют нормальные и касательные нагрузки, равные по величине и противоположные по направлению. Требуется определить влияние характерных параметров напряженного состоянии на интенсивность напряжений около концов разреза и в окрестности угловой точки соединения.

1.Пусть $\Omega_i\left(i=1,2\right)$ - два бесконечных клина с углами $2\alpha, 2\beta\ \left(\alpha+\beta=\pi\right)$ в полярной координатной системе $\left(r,\vartheta\right)$, начало которой находится в вершине соединения, а ось $\vartheta=0$ направлена вдоль биссектрисы первого клина, имеем уравнения статики и уравнение неразрывности написанное в компонентах напряжений

Систему уравнений необходимо решить со следующими условиями: на общих гранях будем иметь условия непрерывностей составляющих напряжений и перемещений, то есть:

$$\begin{cases}\sigma_{\vartheta}^{(1)}(r,\alpha)=\sigma_{\vartheta}^{(2)}(r.\alpha)\\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,\alpha)=\tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,\alpha)\end{cases},\quad \begin{cases}u_1(r,\alpha)=u_2(r,\alpha)\\ v_1(r,\alpha)=v_2(r,\alpha)\end{cases}, \tag{1.1}$$

И соответственно

$$\begin{cases}\sigma_{\vartheta}^{(2)}(r,\pi+\beta)=\sigma_{\vartheta}^{(1)}(r,2\pi-\alpha)\\ \tau_{r\vartheta}^{(2)}(r,\pi+\beta)=\tau_{r\vartheta}^{(1)}(r,2\pi-\alpha)\end{cases},\quad \begin{cases}u_2(r,\pi+\beta)=u_1(r,2\pi-\alpha)\\ v_2(r,\pi+\beta)=v_1(r,2\pi-\alpha)\end{cases} \tag{1.2}$$

На границах разреза заданы внешние уравновешенные нормальные и касательные нагрузки. Такая постановка задач в научной литературе принято называть обобщенной задачей Гриффитса, чтобы напряжения в теле не повышали предела упругости и были конечны. Предварительно на основе преобразования условий непрерывности компонент перемещения на общих гранях клиньев и на линии продолжения трещины вводятся следующие новые неизвестные функции, отличающиеся от нуля лишь на берегах трещины

$$\begin{cases}\varepsilon_r^{+}(r,0)-\varepsilon_r^{-}(r,2\pi)=\varphi(r)=\begin{cases}\varphi(r) & r\in(l_1,l_2)\\ 0 & r\notin(l_1,l_2)\end{cases}\\ \dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\varepsilon_r^{+}(r,0)-\varepsilon_r^{-}(r,2\pi)\right]-\\ -\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\gamma_{r\vartheta}^{+}(r,0)-\gamma_{r\vartheta}^{-}(r,2\pi)\right]=\Psi(r)=\begin{cases}\Psi(r) & r\in(l_1,l_2)\\ 0 & r\notin(l_1,l_2)\end{cases}\end{cases} \tag{1.3}$$

где ε_r , $\gamma_{r\vartheta}$ – компоненты тензора деформации, l_1 и l_2 – координаты вершины трещины. При помощи интегрального преобразования Мелина краевая задача приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переобразованными граничными условиями. Решая эту систему и применяя обратные преобразования Меллина, получим для компонент напряжения интегральные выражения. Далее, из граничных условий на берегах трещины для определения неизвестных функций приходим к системе интегральных уравнений, которая после выделений особенностей и замены переменных примет вид (1.3‘).

Здесь $K_{ij}^{i}(\xi,x)$ выражаются через известные функции. При этом, характер компонент напряжения в окрестности соединения определяется соответствующим образом, расположенным корнем трансцендентного уравнения

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}\left[\dfrac{1}{\xi-x}+K_{11}^{(1)}(\xi,x)\right]\varphi_1(\xi)d\xi+\int_{-1}^{+1}\left[\dfrac{1}{\xi-x}+K_{12}^{(1)}(\xi,x)\right]\psi_1(\xi)d\xi=\mathrm{P}(x) \\ \int_{-1}^{1}\left[\dfrac{1}{\xi-x}+K_{21}^{(2)}(\xi,x)\right]\varphi_1(\xi)d\xi+\int_{-1}^{+1}\left[\dfrac{1}{\xi-x}+K_{22}^{(2)}(\xi,x)\right]\psi_1(\xi)d\xi=\mathrm{T}(x) \end{cases} \qquad (1.3‘)$$

$$D(\mu_{21},m_1,m_2,\alpha,\beta,)=0 \ \ (\mu_{21}=\mu_2/\mu_1 \ \ ) \ m_i=4(1-\nu_i), \ \ m_i=4/(1+\nu_i)$$

которое получается приравниванием к нулю главного определителя системы, полученно из преобразованных граничных условий.

С помощи комбинированных механических параметров [4,5]

$$a=\frac{\mu_2(m_1+1)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1} \quad b=\frac{\mu_1(m_2-1)-\mu_1}{\mu_2-\mu_1} \qquad (1.4)$$

Уравнение принимает следующий симметричный вид:

$$B=-\frac{8}{(s-1)^2}(\mathrm{Cos}2s\alpha-\mathrm{Cos}2s\beta)^2,$$

$$\Delta=Aa^2b^2+Ba^2b+Cab^2+Da^2+Eb^2+Fab+Ka+Mb+N=0$$

$$A=\frac{4}{(s-1)^2}(1-\mathrm{Cos}2\pi s)^2, \ \ C=\frac{8}{(s-1)^2}(\mathrm{Cos}2s\alpha-\mathrm{Cos}2s\beta)^2$$

$$D=\frac{4s^2}{(s-1)^2}\Big[1-\mathrm{Cos}2(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}2s(\pi-\alpha+\beta)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}2\big(\pi s-(s+1)(\alpha-\beta)\big)\Big]+\frac{2s^2}{(s-1)^2}\mathrm{Cos}2\big(\pi s-(s-1)(\alpha-\beta)\big)-$$

$$-\frac{4}{(s-1)^2}\big[1-\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)\big]^2$$

$$E=\frac{4s^2}{(s-1)^2}\Big[1-\mathrm{Cos}2(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}2s(\pi+\alpha-\beta)+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}2\big(\pi s+(s-1)(\alpha-\beta)\big)+\frac{1}{2}\mathrm{Cos}2\big(\pi s-(s-1)(\alpha-\beta)\big)\Big]-$$

$$-\frac{4}{(s-1)^2}\big[1-\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)\big]^2$$

$$F=\frac{4s^2}{(s-1)^2}\Big[4+\mathrm{Cos}4s\alpha+\mathrm{Cos}4s\beta-4\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)-$$

$$-(\pi s-\alpha+\beta)-2\mathrm{Cos}2(\pi s+\alpha-2\mathrm{Cos}2\beta)\Big]+$$

$$+\frac{4s^2}{(s-1)^2}\Big[2\mathrm{Cos}2(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}2(s+1)(\alpha-\beta)-$$

$$-\Big[\mathrm{Cos}2(s-1)(\alpha-\beta)+\mathrm{Cos}2\big(\pi s+(s-1)(\alpha-\beta)\big)+$$

$$+\mathrm{Cos}2\big(\pi s-(s-1)(\alpha-\beta)\big)+\mathrm{Cos}2\big(\pi s-(s+1)(\alpha-\beta)\big)+$$

$$+\ \mathrm{Cos}2\big(\pi s+(s+1)(\alpha-\beta)\big)-2\mathrm{Cos}2\pi s\Big]$$

$$K=-\frac{4s^2}{(s-1)^2}\Big[1+2\mathrm{Cos}2(\alpha-\beta)-2\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)+\mathrm{Cos}4s(\alpha-\beta)-$$

$$-Cos2(s-1)(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}2(s+1)(\alpha-\beta)\ \Big]+\frac{4(s+1)}{s-1}\Big[1-\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)\Big]$$

$$M=-\frac{4s^2}{(s-1)^2}\Big[1+2\mathrm{Cos}2(\alpha-\beta)-2\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)+\mathrm{Cos}4s(\alpha-\beta)$$

$$-\mathrm{Cos}2(s-1)(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}2(s+1)(\alpha-\beta)\ \Big]+\frac{4(s+1)}{s-1}\Big[1-\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)\Big]^2$$

$$N=\frac{4s^2(s+1)}{s-1}\Big[1-2\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)-\mathrm{Cos}2(s+1)(\alpha-\beta)+2\mathrm{Cos}2(\alpha-\beta)\Big]+$$

$$+Cos4s(\alpha-\beta)-\frac{4s^4}{(s-1)^2}\Big[1-\mathrm{Cos}2(s+1)(\alpha-\beta)\Big]\Big[1-\mathrm{Cos}2(s-1)(\alpha-\beta)\Big]-$$

$$-4(s+1)^2\Big[1-\mathrm{Cos}2s(\alpha-\beta)\Big]^2.$$

При этом, вклад в асимптотику могут внести лишь те собственные значения, для которых упругая энергия принимает конечное значение.

Требование по возможности равномерного распределения поля напряжений определяется соотношениями :

$$\begin{cases} D = 0 \\ D_1 = 0 \end{cases} \text{при } \mu_1 \neq \mu_2 \qquad (1,5)$$

При учете шова к этой системе прибавляется еще две системы, когда обе грани закреплены в окрестности вершины соединения и для частичных закрепленных граней. Проведя численнный анализ этих систем и с сочетаниием полученных результатов с областей малонапряженностей на их основе можно сделать практические важные выводы для прочностных свойств как в окрестности соединения, так и составного тела, в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М-Л: Изд, АН СССР, 1967.
2. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора //ПМ . 1972.
3. Аксентян О. К., Лущик О. И. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины стыкового соединения.// ПМ. 1982. Т. 7.
4. Агаларян О.Б. Напряженно-деформированное состояние составного тела, изготовленного из двух упругих клиньев различного раствора, Ереван, Изд, АНАрм, 1990,
5. Агаларян О.Б. К плоской задаче составного клина с радиальной трещиной конечной длины.// Изв, НАН РА Механика. 2007. Т.23.

Сведения об авторе:

Агаларян Оганес Бегларович
к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН РА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ТОНКИМ УПРУГИМ УСИЛИВАЮЩИМ СЛОЕМ

Агаян К.Л., Багдасарян Р.А.

Ереван, Армения

Рассматривается задача плоской деформации для упругого полупространства, контактирующего с тонким усиливающим слоем. Существуют многочисленные работы, посвященные исследованию вопросам распространения упругих и поверхностных волн Релея в системе полупространство–слой. Не останавливаясь на подробностях укажем лишь обзорную статью [1] и работы [2-6], примыкающие к рассматриваемой задаче.

В настоящей работе исследуется задача о распространении упругих волн в системе полупространство–слой, предполагая при этом, что воздействие усиливающего слоя заменяется определенными граничными условиями на границе полупространства. Полученные результаты сравниваются с результатами известной задачи с свободной границей [4,5] .

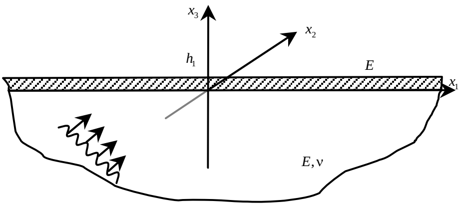


Рис.1

1. Пусть упругое полупространство, приведенное к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ по своей граничной поверхности $(x_3 = 0)$ усилена тонкой упругой пластиной толщины h_1. Полупространство (упругие характеристики – ª, «, °) и слой $(ª_1, «_1, °_1)$ соединены по поверхности $x_3 = 0$ и находятся в условиях полного контакта (рис.1)

Предположим, что вследствие малости толщины пластины h_1, ее жесткость на изгиб пренебрежимо мала. Тогда из граничного условия

$$\pm_{33}^{(1)}(x, h_1, t) = 0 \qquad (1.1)$$

следует, что можно пренебречь нормальными напряжениями действующими под пластиной и принять, что в зоне контакта действуют только касательные напряжения, т.е.

$$\pm_{13}^{(1)}\left(x_1,0,t\right)\neq 0, \qquad \pm_{33}^{(1)}\left(x_1,0,t\right)=0\,. \tag{1.2}$$

Тогда осреднее по толщине уравнение движения пластины:

$$\frac{\partial\pm_{11}^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\pm_{13}^{(1)}}{\partial x_3}=°_1\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2}$$

имея при этом закон Гука и (1.1), (1.2), получим

$$\frac{\partial^2 u_1^{(c)}}{\partial x_1}-\frac{1-¬}{2«_1 h_1}\pm_{31}^{(c)}\left(x_1,0,t\right)=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_1^{(c)}}{\partial t^2}, \quad c_1^2=2«_1\big/°_1\left(1-¬_1\right) \tag{1.3}$$

где $u_1^{(c)}\left(x_1,t\right)$–осредненное значение горизонтальных перемещений $u_1^{(1)}\left(x_1,x_3,t\right)$, а c_1 скорость распространения продольной волны в пластине.

Теперь, имея в виду контактные условия:

$$u_1^{(c)}\left(x_1,t\right)=u\left(x_1,0,t\right);\quad \pm_{13}^{(1)}\left(x_1,0,t\right)=\pm_{13}\left(x_1,0,t\right) \tag{1.4}$$

из (1.2) и (1.3) получим, что на границе $x_3=0$ имеют место следующие равенства:

$$\left[\left(ª+2«\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+ª\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]\Bigg|_{x_3=0}=0\,, \tag{1.5}$$

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-2ah_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)\right]\Bigg|_{x_3=0}=0 \tag{1.6}$$

где $a=«\left(1-¬_1\right)/«_1$

Условие (1.6) при $h_1=0$, т.е. при отсутствии усиливающей пластины, превращается в условие $\pm_{31}\left(x_1,0,t\right)=0$, которое совместно с (1.5) отражает обычные условия свободной поверхности, а при $«_1=\infty$ (пластина абсолютно жестко относительно растяжения) – в условие

$$u_1\left(x_1,0,t\right)=\pm_{33}\left(x_1,0,t\right)=0\,.$$

Таким образом, присутствие усиливающей пластины, при принятых выше предположениях заменялось в граничные условия (1.5) и (1.6) содержащие параметр усиливающего слоя. Следовательно, поставленную задачу теперь можно сформулировать в следующем виде: определить волновое поле в упругой полуплоскости при граничных условиях (1.5), (1.6).

Для решения задачи введем потенциалы:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \qquad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \tag{1.7}$$

которые удовлетворяют волновым уравнениям [4,5] (Δ –оператор Лапласа)

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad c_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{1.8}$$

где c_l и c_t – соответственно, скорости распространения продольной и поперечной волны.

Решения уравнений (1.8) представим в виде подающих и отраженных волн [4,5]:

$$\varphi = e^{i(\xi x_1 - \omega t)}\left(a_+ e^{i k_3 x_3} + a_- e^{-i k_3 x_3}\right), \; k_3 = \sqrt{k^2 - \xi^2} \tag{1.9}$$

$$\psi = e^{i(\xi x_1 - \omega t)}\left(b_+ e^{i \kappa_3 x_3} + b_- e^{-i \kappa_3 x_3}\right), \; \kappa_3 = \sqrt{\kappa^2 - \xi^2} \tag{1.10}$$

где ω –частота колебаний, $k = \omega/c_l$, $\kappa = \omega/c_t$, $\xi = \omega/c$ волновые числа, c –скорость распространения волны бегущей вдоль поверхности, $a_\pm, b_\pm$ –амплитуды.

Граничные условия (1.5) и (1.6) запишутся в виде:

$$\left.\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - ip\varphi\right)\right|_{x_3=0} = 0 \tag{1.11}$$

$$\left.\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + ip\psi + ah_1\left(\varphi + \frac{i}{\xi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x_3}\right)\right]\right|_{x_3=0} = 0 \tag{1.12}$$

где

$$h_1 = \omega/c_1, \qquad p = \xi - \kappa^2/2\xi \tag{1.13}$$

Обозначая через θ и θ_1 соответственно угол падения продольной волны и угол отражения поперечной волны, составленные нормалью фронта волны и отрицательной полуосью Ox_3, получим [4]

$$\sin\theta_1 = (k/\kappa)\sin\theta = (c_t/c_l)\sin\theta, \tag{1.14}$$

позволяющие найти θ_1 при заданном θ.

Предположим, что в полупространстве к направлению границы распространяется продольная волна $a_+ \neq 0,\ b_+ = 0$. Подставляя ¨ и · из (1.9) и (1.10) в граничные условия (1.11) и (1.13), для $\mathrm{V}_{ll} = a_- / a_+$ (коэффициент отражения продольной волны) и $\mathrm{V}_{lt} = b_- / a_+$ (коэффициент трансформации продольной волны в поперечную волну) получим следующие выражения:

$$\mathrm{V}_{ll} = \frac{M^{(-)} + iN}{M^{(+)} - iN}; \quad \mathrm{V}_{lt} = \frac{S}{M^{(+)} - iN} \tag{1.15}$$

$$M^{(\pm)} = 4\left(c_t / c_l\right)\cos¯\ \cos¥\ \sin^2¥ \pm \cos^2 2¥$$
$$N = 2ah_1\left(¢^2\ ¡^{-2} - \sin^2¥\right), \qquad S = 4\left(c_t / c_l\right)\cos¯\ \sin¥\ \cos 2¥ \tag{1.16}$$

Предположим, далее, что к границе полупространства под углом ¥ набегает поперечная волна.

В этом случае из граничных условии (1.11) и (1.12) для $\mathrm{V}_{tt} = b_- / b_+$ (коэффициент отражения поперечной волны) и $\mathrm{V}_{tl} = a_- / b_+$ (коэффициент трансформации поперечной волны в отраженную продольную волну) получим

$$\mathrm{V}_{tt} = \frac{M^- + iN}{M^+ - iN}, \qquad \mathrm{V}_{tl} = -\mathrm{V}_{lt}\frac{c_l \cos¥}{c_t \cos¯}, \tag{1.17}$$

где $M^{\pm}, N$ и V_{lt} даются формулами (1.15), (1.16).

Следует отметить, что в формулах (1.15)–(1.17), принимая $h_1 = 0$, получим известные из [4] формулы, соответствующие задаче со свободной границей. Отметим также, что к случаю свободного края приходим, если в указанных формулах примем

$$¢^2\ ¡^{-2} = \sin^2¥, \ \text{т.е. если} \quad c_l^2 = c_1^2 \tag{1.18}$$

Последнее означает, что при принятых предположениях, если скорость продольной волны c_1 в тонкой пластине равняется скорости продольной волны в полупространстве, то полупространство „не чувствует” присутствия пластины.

Таким образом, решение задачи дается формулами (1.14)–(1.17). По этим формулам можно вычислить характеристики волнового поля и исследовать особенности отраженного поля в системе полупространство–слой при принятых выше упрощающих предположениях относительно пластины.

Рассмотрим некоторые частные случаи, вытекающие из (1.14)–(1.17).

а) При нормальном падении продольной волны $\left(\theta = 0^\circ\right)$, как и в случае свободного края, получим

$$V_{ll} = -1, \qquad V_{lt} = 0, \tag{1.19}$$

то есть имеет место полное отражение падающей волны с изменением фазы на π.

б) При нормальном падении поперечной волны $\left(\gamma = 0^\circ\right)$ получим

$$V_{tt} = -e^{i\varphi}, \qquad \varphi = 2\operatorname{arctg}\left(ha'^{2}/¡\right); \qquad V_{tl} = 0, \tag{1.20}$$

которое означает, что в разбираемом случае опять имеет место полное отражение падающей волны с изменением фазы на $\pi + \varphi$, где φ зависит от параметров пластины.

в) Из (1.15)–(1.17) следует, что как и в случае свободного края, при $\gamma = 45^\circ$ $\left(M^{+} = M^{-}\right)$ падающая поперечная волна полностью отражается, что не имеет место при падающей продольной волне.

г) Из формул (1.14)–(1.17) следует, что определение углов падения при которых осуществляется полное трансформация падающих волн, сводится к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \cos\theta \, \mathrm{tg}^2 2\gamma - \left(c_l/c_t\right)\cos\gamma = 0, \\ \sin\theta = c_l/c_1 . \end{cases} \tag{1.21}$$

Как известно [4], для всех возможных комбинаций упругих постоянных полупространства первое уравнение из (1.21) имеет решение, принадлежащие интервалам $37^\circ < \theta < 90^\circ$, $25^\circ < \gamma < 45^\circ$. Следовательно, при определенном значении $\theta_0 \in \left(37^\circ, 90^\circ\right)$, соответсвтующим подбором параметра c_1 можно регулировать вопрос о полном трансформации падающей волны. При этом, в случаях полной трансформации соответствующие коэффициенты определяются в виде

$$V_{lt}\big|_{\theta=\theta_0} = \mathrm{ctg}\, 2\gamma_0, \qquad V_{tl}\big|_{\theta=\theta_0} = -\,\mathrm{tg}\, 2\gamma_0, \tag{1.22}$$

где γ_0 определяется из (1.14) при $\theta = \theta_0$.

Таким образом, совместное выполнение условий

$$\theta_0 \in \left(37^\circ, 90^\circ\right) \qquad \text{и} \qquad \left(c_l/c_1\right) \in \left(\sin 37^\circ, 1\right) \tag{1.23}$$

необходимы, но очевидно недостаточно, для полной трансформации падающей волны. Так что, если $\bar{}_0 \in \left(37^\circ, 90^\circ\right)$ или $\left(c_l / c_1\right) \in \left(0, \sin 37^\circ\right)$, то имеет место и отражение и трансформация падающей волны.

2. Рассмотрим теперь вопрос неоднородной волны. Предположим, что угол падающей поперечной $\left(a_+ = 0\right)$ волны ¥ достаточно велик, так что $\sin ¥ > c_t / c_l$.

Тогда потенциал отраженной продольной волны из (1.10) запишется в виде [4]

$$¨ = \mathrm{V}_{tl} b_+ e^{|k_3| x_3} e^{i(¶ x_1 - µ t)}, \quad k_3 = ¡ \sqrt{\sin^2 ¥ - c_t^2 / c_l^2}, \qquad x < 0 \tag{2.1}$$

которое указывает, что в этом случае возбуждается отраженная волна распространяющаяся вдоль границы со скоростью $c = µ/¶$, с амплитудой экспоненциально убывающий при удалении от границы (неоднородная волна).

Коэффициенты отражения поперечной волны и трансформированной продольной волны определяются в виде

$$\begin{gathered} \mathrm{V}_{tt} = -B^{(-)} / B^{(+)}; \quad \mathrm{V}_{tl} = 2 ¡_3 p / B^{(+)} \\ B^{(\pm)} = p^2 \pm i ¡_3 \left[\left(¶^2 - ¢^2 \right) \left(h_1 a ¡^2 / 4 ¶^2 \right) + k_3 \right] \end{gathered} \tag{2.2}$$

которые при $h_1 = 0$ или $\xi = \delta$ совпадают с известными формулами из [4] для свободной границы и имеют вид

$$\mathrm{V}_{tt}^{(0)} = -e^{-i\alpha}, \quad \mathrm{V}_{tl}^{(0)} = 2\chi_3 p e^{-i\alpha/2} \Big/ \sqrt{p^4 + k_3^2 \chi_3^2} \tag{2.3}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(k_3 \chi_3 / p^2 \right) \tag{2.4}$$

Сопоставлением формул (2.2) с (2.3) можно в разбираемом случае, определить влияние усиливающего слоя на распределение отраженного поля при различных значениях параметров задачи. Для этого удобно разделить область изменения $\delta(0, \infty)$ на промежутки, показанные на рис.2 и рассматривать изменение V_{tt} и V_{tl} на этих промежутках:

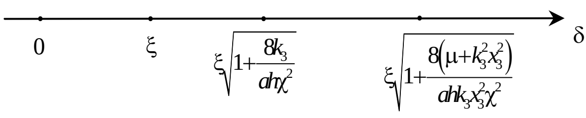


Рис.2.

1. при $0 < \delta < \xi$

$$V_{tt}^{(1)} = -e^{-i(\alpha+\beta)}, \quad V_{tl}^{(1)} = \frac{2\chi_3 p e^{-i\beta_1}}{\sqrt{p^4 + \chi_3^2 \left(k_3 + \alpha\varepsilon_0\right)^2}} \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\chi^2\left(\xi^2 - \delta^2\right)}{2\xi^2}, \quad \beta_1 = \operatorname{arctg}\frac{\chi_3}{p^2}\left(k_3 + \alpha\varepsilon_0\right)$$

$$\beta = 2\operatorname{arctg}\frac{\alpha\varepsilon_0\chi_3 p}{p^4 + k_3^2\chi_3^2 + 2\alpha\varepsilon_0 k_3\chi_3^2} \tag{2.6}$$

2. при $\xi < \delta < \xi\sqrt{1 + 2k_3/\alpha\chi^2}$

$$V_{tt}^{(2)} = -e^{-i(\alpha-\beta)}, \quad V_{tl}^{(2)} = V_{tl}^{(1)} \tag{2.7}$$

3. при $\delta = \xi\sqrt{1 + 2k_3/\alpha\chi^2}$

$$V_{tt}^{(3)} = -1, \quad V_{tl} = 2\chi_3/p \tag{2.8}$$

4. при $\xi\sqrt{1 + 2k_3/\alpha\chi^2} < \delta < \sqrt{1 + 2k_3/2\chi^2 + \dfrac{2p^4}{\alpha k_3\chi^2\chi_3^2}}$

$$V_{tt}^{(4)} = e^{-i(\alpha-\beta)}, \quad V_{tl} = \frac{2\chi_2 p e^{i\varphi}}{\sqrt{P^4 + \chi_3^2\left(\alpha\varepsilon_0 + k_3\right)^2}} \tag{2.9}$$

5.при $\delta = \xi\sqrt{1 + \dfrac{2k_3}{\alpha\chi^2} + \dfrac{2p^4}{\alpha k_3\chi^2\chi_3^2}}$

$$V_{tt}^{(5)} = e^{-i\alpha}, \quad V_{tl} = \frac{2k_3\chi_3^2}{p\sqrt{\chi_3^2 k_3^2 + p^4}} e^{i\varphi} \tag{2.10}$$

6. при $\delta > \xi\sqrt{1 + \dfrac{2k_3}{\alpha\chi^2} + \dfrac{2p^4}{\alpha k_3\chi^2\chi_3^2}}$

$$V_{tt}^{(6)} = e^{-i\alpha} e^{i(\beta)}, \quad V_{tl} = V_{tl}^{(4)} \tag{2.11}$$

Сопостовление полученных результатов с (2.3) показывает, что отраженная волна изменяется по фазе от падающей волны, но их амплитуды равны. Что касается отраженной продольной волны, то оно меняется и по модулю и по фазе.

В конце коротко остановимся на вопросе о существовании поверхностных волн в системе полуплоскоть–слой. Оказывется, что как в [6], здесь также могут возникнуть поверхностные волны и по волнам Релея, скорость распространения $\left(c_R = \text{µ}/\text{¶}_R\right)$ которых определяется из дисперсионного уравнения

$$2ah_1 \text{¡}^2\left(\text{¶}^2 - \text{¢}^2\right)\sqrt{\text{¶}^2 - \text{¡}^2} + 4\text{¶}^2\sqrt{\left(\text{¶}^2 - \text{¡}^2\right)\left(\text{¶}^2 - k^2\right)} - \left(2\text{¶}^2 - \text{¡}^2\right)^2 = 0$$

Исследование последнего уравнения показывает, что оно всегда имеет единственный корень $\text{¶}_R \in \left[\text{¡},\infty\right)$. При этом, в отличие от свободного края, здесь поверхностная волна распространяется с дисперсией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах. //В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван, Изд. НАН Армении 1997, с.79-96.
2. Белоконь А.В., Разимов М.Ю. Гармонические колебания в системе анизотропных полоса–полуплоскость при жестком и скользящем соединении сред.// Изв. вузов Северо–Кавказский регион. Естеств. науки 2002, №3, с.120-121.
3. Белубекян М.В. Волны типа Релея в системе тонкий слой–полупространство.// Изв. НАН Армении., 2005. Т.58, №2. С.9-15.
4. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука 1982. 333с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М. Мир.: 1975. 872с.
6. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками.// Изв. АН СССР. МТТ. 1972. №5.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович – к.ф.м.н.
Институт механики НАН РА
E–mail:karo.aghayan@gmail.com

Багдасарян Рафик Арменакович - к.ф.м.н.
Армянский государственный инженерный университет

МИНИМИЗАЦИЯ РАСХОДА ТОПЛИВА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТАМИ

Адамян В.Г., Манандян Л.Т. , Адамян Л.В,Галачян Р.З.

Гюмри, Армения

Целью настоящей работы является усовершенствование алгоритма построения траектории котангенциального перехода между эллиптической и параболической орбитами, предложенного в [1].

Пусть заданы эллиптическая и параболическая орбиты вокруг силового центра F_1 (рис.1). Эллиптичесчская орбита задана величинами большой полуоси a_1 и линейного эксцентриситета c_1, а параболическая орбита–параметром p_2. Точка O_1– центр эллиптической орбиты, а точка F_{21}– ее второй фокус. Известен также угол ´ между фокальными осями заданных орбит. Для задания эллиптической орбиты проведем две окружности $\left(O_1, a_1\right)$ и $\left(F_{21}, 2a_1\right)$ – ее эксцентр и деферент. Далее проведем директрису d_2 (деферент) параболической орбиты и ее вершинную касательную (эксцентр). Рассмотрим котангенциальный переход, когда переходная эллиптическая орбита касается в точке M_1 исходной эллиптической орбите, а в точке M_2 – конечной параболической орбите. Для того чтобы решить задачу аналитическим путем, введем прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с притягивающим центром F_1, а ось y – с осью параболы.

В работе [1] показано, что при котангенциальном переходе эксцентр орбиты перелета соприкасается с эксцентрами заданных эллиптической и параболической орбит в точках сопряжения S_1 и S_2 соответственно. Дальнейшие построения начинаем с выбора точки S_1 на начальном эксцентре. Угол ¨ поворота радиуса O_1S_1 начального эксцентра отсчитывается от прямой, параллельной оси y и проходящей через его центр O_1. Определим точку D_1 пересечения прямой F_1S_1 с окружностью $\left(F_{21,} 2a_1\right)$. Для построения начала перехода M_1 проведем прямую D_1F_{21} и далее через точку S_1

прямую, перпендикулярную к прямой F_1D_1. Эта вторая прямая, пересекаясь с прямой $F_{21}D_1$, дает искомую точку M_1 на начальной орбите.

Для пострения точки S_2 касания эксцентров переходной и конечной орбит проведем через точку S_1 прямую S_1B, перпендикулярную прямой O_1S_1 и определим точку B ее пересечения с вершиной касательной параболичес-

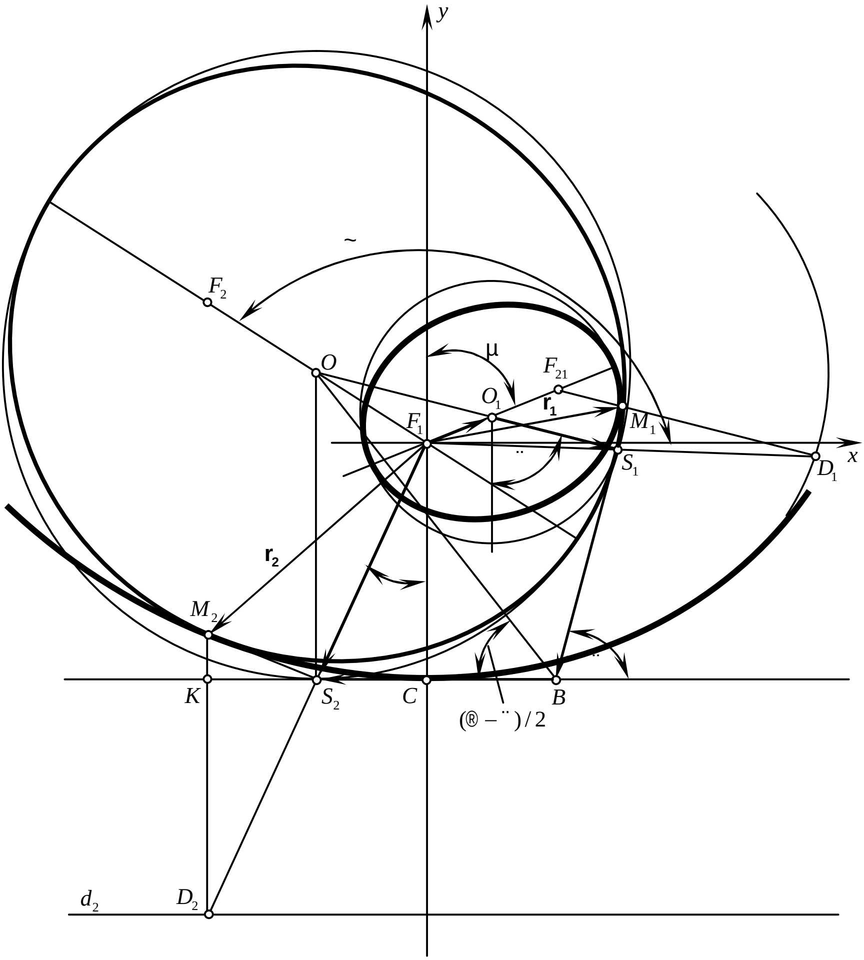


Рис.1

кой орбиты. Так как отрезки BS_1 и BS_2 являются касательными эксцентра орбиты перелета, проведенными через точку B, то будем иметь $BS_1 = BS_2$, длина которых является переменной величиной.

Проводим прямую F_1S_2 и строим точку D_2 ее пересечения с директрисой d_2 параболы. Далее через точки S_2 и D_2 проводим прямые, перпендикулярные к прямым F_1D_2 и d_2 соответственно, которые, пересекаясь, определяют искомую точку M_2 касания параболической и переходной орбит.

Определим абсциссу точки S_2 и длину отрезка BS_1 в зависимости от значений независимой переменной ¨. Так как ломаную линию $F_1O_1S_1BS_2$ можно представить в векторной форме: $\overline{F_1S_2} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1S_1} + \overline{S_1B} + \overline{BS_2}$, то, проектируя на оси x и y, находим

$$X_{S_2} = F_1O_1\sin\text{µ} + O_1S_1\sin\text{¨} - S_1B\cos\text{¨} - BS_2, \quad (1)$$

$$Y_{S_2} = F_1O_1\cos\text{µ} + O_1S_1\cos\text{¨} - S_1B\sin\text{¨}, \quad (2)$$

где $F_1O_1 = c_1$, $O_1S_1 = a_1$, $Y_{S_2} = -p_2/2$, $S_1B = BS_2$

Из выражения (2) при учете $Y_{S_2} = -p_2/2$ после преобразований получим

$$S_1B = \left(p_2 - \text{¶}\right)/2\sin\text{¨}, \qquad \text{¶} = 2\left(a_1\cos\text{¨} - c_1\cos\text{µ}\right) \quad (3)$$

Из выражения (1) при учете $S_1B = BS_2$ и (3) находим значение абсциссы точки S_2:

$$X_{S_2} = \frac{\left(\text{¦}\,\mathrm{tg}\frac{\text{¨}}{2} - p_2 + \text{¶}\right)}{2\mathrm{tg}\frac{\text{¨}}{2}}, \qquad \text{¦} = 2\left(a_1\sin\text{¨} + c_1\sin\text{µ}\right) \quad (4)$$

Из прямоугольного треугольника OBS_2 с углом $OBS_2 = \left(\text{®} - \text{¨}\right)/2$ при учете (3) определим длину радиуса эксцентра орбиты перелета

$$a = \left(p_2 - \text{¶}\right)/4\sin^2\text{¨}/2, \quad (5)$$

а также координаты точки O -центра орбиты перелета

$$Y_0 = a - p_2/2 = \left[\left(p_2 - 2a_1\right)\cos\text{¨} + 2c_1\cos\text{µ}\right]/4\sin^2\text{¨}/2,$$

$$X_0 = X_{S_2} \quad (6)$$

Так как точка M_2 параболической орбиты равноудалена от фокуса F_1 и директрисы d_2, то

$$r_2 = D_2M_2 = D_2K + KM_2 = p_2/2 + KS_2\,\mathrm{tg}\quad ,$$

откуда при учете $KS_2 = X_{S_2}$, $\mathrm{tg}\quad = 2X_{S_2}/p_2$ находим

$$r_2 = \left(p_2^2 + 4X_{S_2}^2\right)/2p_2 \qquad (7)$$

Учитывая это равенство, определим координаты переходной точки M_2:

$$Y_{M_2} = p_2 - r_2 = \left(p_2^2 - 4X_{S_2}{}^2\right)/2p_2\,, \qquad (8)$$

и истинную аномалию этой точки по параболической орбите

$$\cos g_2 = \frac{Y_{M_2}}{r_2} = \left(p_2^2 - 4X_{S_2}^2\right)/\left(p_2^2 + 4X_{S_2}^2\right) \qquad (9)$$

Определим радиус-вектор r_1 переходной точки M_1. Из треугольника $F_1F_{21}M_1$ со сторонами $F_1F_{21} = 2c_1, F_1M_1 = r_1, F_{21}M_1 = 2a_1 - r_1$ и углом $F_1F_{21}M_1 = \ddot{} + \mu$ по теореме косинусов находим

$r_1^2 = 4c_1{}^2 + \left(2a_1 - r_1\right)^2 - 4c_1\left(2a_1 - r_1\right)\cos\left(\ddot{} + \mu\right)$, откуда после упрощения получим

$$r_1 = \frac{a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1\cos\left(\ddot{} + \mu\right)}{a_1 - c_1\cos\left(\ddot{} + \mu\right)} \qquad (10)$$

величина радиуса-вектора r_1 определяется также известной формулой [2]

$$r_1 = \frac{a_1^2 - c_1^2}{a_1 - c_1\cos g_1}\,, \qquad (11)$$

где угол g_1 – истинная аномалия точки M_1 по начальной орбите.

Приравнивая правые части равенств (10) и (11), получим

$$\cos g_1 = \frac{\left(a_1^2 + c_1^2\right)\cos\left(\ddot{} + \mu\right) - 2a_1c_1}{a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1\cos\left(\ddot{} + \mu\right)} \qquad (12)$$

Определим положение линии апсид перелетной траектории. Так как точка O –центр орбиты перелета, а точка F_1 – ее фокус, то угол наклона линии апсид траектории перелета к оси X при учете (6) определяется формулой

$$\mathrm{tg}\sim = \frac{y_0}{x_0} = \left[\left(p_2 - 2a_1 \right) \cos\ddot{} + 2c_1 \cos\mu \right] / 4X_{S_2} \sin^{2\ddot{}} / 2 \qquad (13)$$

Модули скоростей V_1, V_2, V_{11} и V_{21} КА при движении по заданным орбитам и по орбите перелета определяются равенствами [2]:

$$V_{K1} = \sqrt{\frac{g_k r_k \left(2a - r_k\right)}{a}}, \; k = 1{,}2$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{g_1 r_1 \left(2a_1 - r_1\right)}{a_1}}, \; V_2 = \sqrt{2 g_2 r_2}, \qquad (14)$$

Величину приращения скорости ΔV_1 можно определить при учете равенств (14) как разность скоростей V_{11} и V_1 КА в точке M_1, необходимых для движения по орбите перелета и начальной орбите:

$$\Delta V_1 = \sqrt{g_1 r_1} \left(\sqrt{\frac{2a - r_1}{a}} - \sqrt{\frac{2a_1 - r_1}{a_1}} \right) \qquad (15)$$

Величину приращения скорости ΔV_2 можно определить при учете равенств (14) как разность скоростей V_2 и V_{21} КА в точке M_2, необходимых для движения по конечной и переходной орбитам:

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{g_1 r_1^{\,2}}{r_2}} \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{2a - r_2}{a}} \right) \qquad (16)$$

Суммарное приращение скорости для выполнения маневра определяется равенством

$$\Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2 \qquad (17)$$

Очевидно, что для нахождения оптимальной орбиты перелета между заданными эллиптической и параболической орбитами необходимо найти такую точку M_1 на начальной орбите, при которой для соответствующего котангенциального перехода требуются минимальные энергетические затраты.

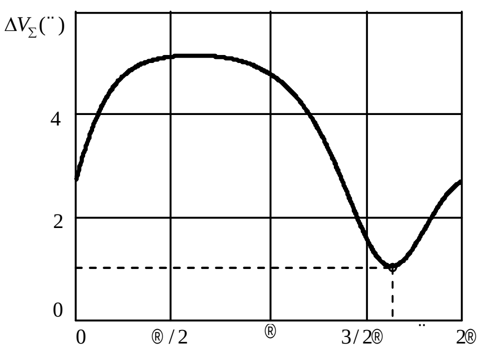


Рис.2

На рис.2 приведена зависимость суммарного приращения скорости ΔV_{Σ} (17) от ¨ при $a_1 = 25,\quad c_1 = 15,\quad p_2 = 90$ и $\mu = 23^0$.

Из графика видно, что суммарное приращение скорости имеет минимум при ¨ $= 1,6$® .

В программной среде ***Matchcad*** получены также графики начальной эллиптической, конечной параболической и оптимальной переходной орбит при аргументе ¨ $= 1,6$® (рис. 3).

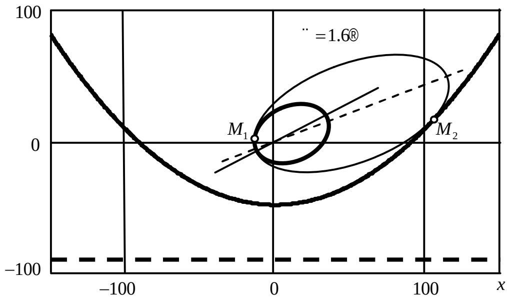


Рис.3

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамян В.Г. Геометрическая теория межорбитальных котангенциальных переходов. Ереван: Авторское издание, 2007. 152 с.
2. Адамян В.Г., Адамян Л.В., Заимцян Г.М., Манандян Л.Т. Двухимпульсные котангенциальные переходы между компланарными эллиптическими орбитами // Прикладная математика и механика. –2009. N6, с. 921-933.

<u>Сведения об авторах:</u>

Адамян Ваник Григорьевич
Д.т.н., профессор гюмрийского филиала ГИУА,
Кафедра прикладной механики,
Тел: (0312) 4-94-79 (раб.), (0312) 3-84-94 (дом.)
e-mail: vgadamyan@mail.ru

Манандян Левон Туманович
К.т.н., доцент гюмрийского филиала ГИУА,
Кафедра прикладной механики,
Тел: (0312) 5-93-94 (раб.), (0312) 5-95-23 (дом.)
e-mail: roman@gyumri.am

Адамян Лилит Ваниковна
Лаборант гюмрийского филиала ГИУА,
Кафедра прикладной механики,
Тел: (0312) 4-94-79 (раб.), (0312) 3-84-94 (дом.)
e-mail: vgadamyan@mail.ru

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДЕФЕКТАМИ

Акопян В.Н., Симонян А.Р.
Ереван, Армения

В настоящей работе, на основе разрывных решений уравнений теории упругости для ортотропной плоскости, предлагаются новые комплексные функции, позволяющие, как и в изотропном случае, плоскую задачу для ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии свести к задаче Римана для одной или двух функций. Рассмотрены некоторые частные случаи, представляющие самостоятельный интерес.

1. Пусть ортотопная упругая плоскость, отнесенная к декартовой системе координат $0xy$, направления осей которой совпадают с главными направлениями ортотропии материала, на линии $y=0$ по линии L, состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов, содержит разрез. Будем считать, что на интервалах $L^{(+)}$ и $L^{(-)}$ соответственно верхнего и нижнего берегов разреза заданы нормальные $P_0^{(\pm)}(x)$ и касательные напряжения $\tau_0^{(\pm)}(x)$, а на интервалах $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ соответственно верхнего и нижнего берегов разреза заданы вертикальные $v_\pm(x)$ и горизонтальные $u_\pm(x)$ смещения и равнодействующие действующих там напряжений $P_j^{(\pm)}$.

Ставится задача: построить замкнутое решение поставленной задачи.

Мысленно разделим плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости и снабдим индексами "+" и "-" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полуплоскостей. Тогда поставленную задачу математически можно **с**формулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}
&\sigma_y^{(+)}(x,0)=\sigma_y^{(-)}(x,0) \\
&\tau_{xy}^{(+)}(x,0)=\tau_{xy}^{(-)}(x,0) \\
&U_+(x,0)=U_-(x,0) \\
&V_+(x,0)=V_-(x,0)
\end{aligned}\quad (x\notin L),\qquad
\begin{aligned}
&U_\pm(x,0)=u_\pm(x) && (x\in S_\pm) \\
&V_\pm(x,0)=v_\pm(x) && (x\in S_\pm) \\
&\sigma_y^{(\pm)}(x,0)=-P_0^{(\pm)}(x) && (x\in L_\pm) \\
&\tau_{xy}^{(\pm)}(x,0)=\tau_0^{(\pm)}(x) && (x\in L_\pm)
\end{aligned}\qquad (1.1)$$

Здесь $U_\pm(x,y)$ и $V_\pm(x,y)$ – горизонтальные и нормальные компоненты смещений точек соответствующих полуплоскостей связаны с компонентами напряжений по формулам [3]

$$\sigma_y^{(\pm)} = \mu_{12}\left(a_{12}\frac{\partial U_\pm}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial V_\pm}{\partial y}\right), \; \tau_{xy}^{(\pm)} = \mu_{12}\left(\frac{\partial U_\pm}{\partial y} + \frac{\partial V_\pm}{\partial x}\right)$$

Кроме того, $u_\pm(x)$, $v_\pm(x)$, $P^{(\pm)}(x)$ и $\tau_0^{(\pm)}(x)$ – гладкие в указанных областях функции, а $a_{ij} = c_{ij}/c_{33}$; $\mu_{12} = c_{33}\;c_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ – компоненты тензора Коши.

Решение поставленной задачи можно свести к следующей задаче Римана для двух функций [1]:

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) = \nu_1(x)\Omega_2^-(x) + F_1(x) \\ \Omega_2^+(x) = \nu_2(x)\Omega_1^-(x) + F_2(x) \end{cases} \quad (x \in L) \tag{1.2}$$

Здесь $\Omega^\pm(x)$ – значения аналитической функции

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{s - z}ds, \quad \left(k_j = \frac{2(-1)^{j+1}c_1}{\alpha - 2(-1)^j a_1}\right) \; (j = 1, 2) \tag{1.3}$$

соответственно на верхнем и нижнем берегах линии L,

$$\nu_1(x) = \begin{cases} \nu & x \in L^{(+)} \\ -1 & x \in S^{(+)} \end{cases}, \quad \nu_2(x) = \begin{cases} 1/\nu & x \in L^{(-)} \\ -1 & x \in S^{(-)} \end{cases}, \quad \nu = \frac{\alpha - 2a_1}{\alpha + 2a_1}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} (1+\nu)\chi_0^+(x) & x \in L^{(+)} \\ \dfrac{\alpha}{b_1}w'_+(x) & x \in S^{(+)} \end{cases}, \quad F_2(x) = \begin{cases} -\dfrac{1+\nu}{\nu}\chi_0^-(x) & x \in L^{(-)} \\ \dfrac{\alpha}{b_1}w'_-(x) & x \in S^{(-)} \end{cases}$$

$$W'(x) = U'(x) + i\alpha V'(x), \quad \chi(x) = \sigma(x) - i\alpha\tau(x), \quad (\alpha = \sqrt[4]{a_{22}/a_{11}})$$

а $U(x), V(x), \sigma(x), \tau(x)$ - функции скачков компонент смещений и напряжений на L .

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению задачи Римана для двух функций (1.2). По результатам работы [2] решение этой задачи всегда можно построить в замкнутом виде, сводя ее к совместному решению одной линейной и одной нелинейной задач Римана.

2. Для иллюстрации рассмотрим некоторые частные случаи поставленной задачи, представляющие самостоятельный интерес.

а) Сначала рассмотрим плоско-деформированное состояние упругой ортотропной плоскости, которая на одном из главных направлений ортотропии материала $y=0$ содержит абсолютно жесткое тонкое включение длиной a, заполняющее интервал $(0,a)$и полубесконечную трещину, заполняющую интервал $(-\infty,0)$. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной касательной нагрузки T_0, приложенной в концевой точке включения $x=0$. В этом случае

$$\nu_1(x)=\begin{cases}\nu & x<0\\ -1 & 0<x<a\end{cases},\quad \nu_2(x)=\begin{cases}1/\nu & x<0\\ -1 & 0<x<a\end{cases},\quad F_1(x)=F_2(x)=0$$

и общее решение задачи Римана для двух функций (1.9) записывается в виде

$$\Omega_j(z)=\frac{C}{\sqrt{z(z-a)}}\left[\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-z}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-z}}\right]^{(-1)^{j-1}i\gamma} \tag{2.1}$$

$$\left(\gamma=-\ln\nu/2\pi,\quad j=1,2\right)$$

Здесь C – постоянная, подлежащая определению. Для определения этой постоянной заметим, что из (1.3) легко получить формулу

$$\frac{k_2-k_1}{2\pi i}\int_0^a\frac{\chi(s)ds}{s-z}=k_2\Omega_1(z)-k_1\Omega_2(z) \tag{2.2}$$

Сравнивая поведение обеих частей (2.2) при больших значениях z, найдем

$$C=(1+\nu)T_0/4\pi\sqrt{\nu}$$

После этого легко можно определить напряженно-деформированное поле во всей плоскости.

В качестве примера определим скачок напряжений, действующих на включение. Для этого используем формулу (2.2), откуда, при помощи формул Племеля-Сохоцкого и (2.1) получим

$$\text{¡}\left(x\right)=\frac{\sqrt{\text{¬}}\left(1+\text{¬}\right)T_0}{4\text{®}i\sqrt{x\left(a-x\right)}}\left\{\left[\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}\right]^{i\text{¥}}+\left[\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}\right]^{-i\text{¥}}\right\} \quad (2.3)$$

б) Теперь рассмотрим плоско-деформированное состояние упругой ортотропной плоскости, которая на одном из главных направлений ортотропии материала $y=0$ содержит полубесконечную трещину, заполняющую интервал $\left(-\infty,a\right)$ на интервале $\left(0,a\right)$ нижнего берега которого спаяно абсолютно жесткое тонкое включение длиной a. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки P_0, приложенной к включению. В рассматриваемом случае

$$\nu_1\left(x\right)=\nu\ \left(x<a\right),\quad \nu_2\left(x\right)=\begin{cases}1/\nu & x<0\\ -1 & 0<x<a\end{cases},\quad F_1\left(x\right)=F_2\left(x\right)=0$$

Общее решение (1.3) следующее:

$$\Omega_1\left(z\right)=\frac{C\left[\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-z}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-z}}\right]^{\gamma_1}}{z^{\gamma_1}\left(z-a\right)^{1-\gamma_1}},\ \Omega_2\left(z\right)=\frac{iC\left[\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-z}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-z}}\right]^{-\gamma_1}}{\sqrt{\nu}z^{\gamma_1}\left(z-a\right)^{1-\gamma_1}} \quad (2.4)$$

$$\left(\gamma_1=1/4-i\ln\nu/4\pi\right)$$

Для определения неизвестной постоянной C опять используем уравнение (2.2), которое справедливо также и в рассматриваемом случае. Сравнивая обе части этого уравнения при больших значениях аргумента z и учитывая условие равновесия включения, получим

$$C=\frac{\left(1+\nu\right)\left(1+i\right)P_0}{2\sqrt{2}\nu^{1/4}\pi}$$

Определим контактные напряжения под включением. Из (2.2) при помощи формул Племеля-Сохоцкого и (1.3) можем записать

$$\chi\left(x\right)=-\Omega_1^-\left(x\right)=\frac{\left(1+\nu\right)P_0}{2\pi\sqrt{\nu}\,x^{\gamma_1}\left(a-x\right)^{1-\gamma_1}}\left[\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}\right]^{\gamma_1}\quad\left(0<x<a\right)$$

откуда

$$\sigma_y^-\left(x,0\right)=-\frac{P_0\left(1+\nu\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-x}\right)}{2\pi\sqrt{\nu}\,x^{1/2}\left(a-x\right)^{3/4}}\cos\gamma\left(\ln\omega\left(x\right)\right)\quad\left(0<x<a\right)$$

$$\tau_{xy}^{-}(x,0)=\frac{P_0(1+\nu)\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-x}\right)}{2\pi\alpha\sqrt{\nu}\,x^{1/2}(a-x)^{3/4}}\sin\left(\ln\gamma\omega(x)\right)\qquad (0<x<a)$$

$$\omega(x)=\frac{x}{\sqrt{a(a-x)}+a-x}\qquad \gamma=\ln\nu/2\pi$$

При помощи полученной формулы легко вычислить коэффициент интенсивности напряжений в концевой точке включения $x=a$:

$$K_I(a)-i\sim K_{II}(a)=-\frac{b_1k_2(1+¬)(1+i)\left(\sqrt{¬}-i\right)P_0}{2\sqrt{2}\sim®¬^{3/4}}$$

в) В конце рассмотрим еще одну задачу для ортотропной плоскости, содержащей разрез на интервале $(-a,0)$ и абсолютно жесткое, тонкое включение на интервале $(0,a)$ на одном из главных направлений ортотропии $y=0$. Будем считать, что плоскость деформируется под воздействием сосредоточенной нагрузки P_0, приложенной к включению в точке $x=x_0$ и составляющий угол g_0 с осью ox. В рассматриваемом случае

$$\nu_1(x)=\begin{cases}\nu & -a<x<0\\ -1 & 0<x<a\end{cases},\ \nu_2(x)=\begin{cases}1/\nu & -a<x<0\\ -1 & 0<x<a\end{cases},\ f_1(x)=f_2(x)=0$$

общее решение (1.2) запишем в виде

$$\Omega_j(z)=\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}}\left[C_1\exp\left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\Gamma^{(1)}(z)\right)+C_2\exp\left(\frac{(-1)^{j+1}}{2}\Gamma^{(2)}(z)\right)\right]$$

$$\Gamma^{(j)}(z)=\frac{C_j^{(0)}}{2}\left\{1-\frac{B_1(z)}{®i}\int_0^a\frac{d²}{B_1^{+}(²)(²-z)}\right\}\qquad (2.5)$$

$$\Gamma_0^{(j)}(z)=\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right),\ C_j^{(0)}=2\ln¬-(-1)^j\,2®i$$

где C_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению. Для определения постоянных C_j $(j=1,2)$ и x_0 используем уравнение равновесия включения и равенства нулю скачков смещений в концевых точках трещины. В итоге для коэффициентов C_j $(j=1,2)$ и x_0 получим значения

$$C_j = \frac{iP_0^*}{2\text{®}}\cos\left(\text{®}/4 + (-1)^j i\text{®¥}/2\right),\quad x_0 = \frac{\sqrt{\text{¬}} + \text{¥}\left(\text{¬} - 1\right)}{\text{¬} + 1}a \qquad (2.6)$$

Используя полученные значения для $C_j\ (j = 1, 2)$, можем записать

$$\text{¡}(x) = \frac{\sqrt{2}P_0^* Q_0(x)}{2\text{®}\sqrt{\text{µ}(x)\left(a^2 - x^2\right)}}$$

$$W'(x) = -\frac{\sqrt{2\text{¬}}\,P_0^* Q_1(x)}{2\text{®}k_1\sqrt{\text{µ}(x)\left(a^2 - x^2\right)}} \qquad (2.7)$$

$$Q_0(x) = \left\{\left[1 + \text{µ}(x)\right]ch\left(\text{®¥}/2\right)\cos\left(\text{¥}\ln\text{µ}(x)\right) - \right.$$
$$\left. - \left[1 - \text{µ}(x)\right]sh\left(\text{®¥}/2\right)\sin\left(\text{¥}\ln\text{µ}(x)\right)\right\}$$

$$Q_1(x) = \left\{\left[1 + \text{µ}(x)\right]sh\left(\text{®¥}/2\right)\cos\left(\text{¥}\ln\text{µ}(x)\right) + \right.$$
$$\left. + \left[1 - \text{µ}(x)\right]ch\left(\text{®¥}/2\right)\sin\left(\text{¥}\ln\text{µ}(x)\right)\right\}$$

Следовательно, для скачков напряжений и производных разности смещений берегов разреза получим выражения:

$$\text{±}(x) = \frac{\sqrt{2}P_0\,\sin\text{g}_0\,Q_0(x)}{2\text{®}\sqrt{\text{µ}(x)\left(a^2 - x^2\right)}},\quad \text{²}(x) = \frac{\sqrt{2}P_0\,\cos\text{g}_0\,Q_0(x)}{2\text{®}\sqrt{\text{µ}(x)\left(a^2 - x^2\right)}}$$

$$V'(x) = \frac{\sqrt{2\text{¬}}\,P_0\,\cos\text{g}_0\,Q_1(x)}{2\text{®}k_1\sqrt{\text{µ}(x)\left(a^2 - x^2\right)}},\quad U'(x) = -\frac{\sqrt{2\text{¬}}\,P_0\,\sin\text{g}_0\,Q_1(x)}{2\text{®}k_1\sqrt{\text{µ}(x)\left(a^2 - x^2\right)}}$$

Приведем формулу для коэффициентов интенсивности напряжений в концевой точке трещины $x = a$:

$$K_I(a) = \frac{k_2 b_1(\nu - 1)P_0}{\sqrt{2\pi a}}\cos\vartheta_0 \mathrm{ch}(\pi\gamma/2),$$

$$K_{II}(a) = \frac{k_2 b_1(1 - \nu)P_0}{\alpha^2\sqrt{2\pi a}}\sin\vartheta_0 \mathrm{ch}(\pi\gamma/2)$$

Напишем также формулы для определения контактных напряжений под включением.

$$\sigma_y^{(\pm)}(x,0)=\frac{\sqrt{2}P_0\left[2\alpha A_* Q_2(x)\cos\vartheta_0\pm Q_0(x)\sin\vartheta_0\right]}{4\pi\sqrt{\omega(x)\left(a^2-x^2\right)}}$$

$$\tau_{xy}^{(\pm)}(x,0)=-\frac{\sqrt{2}P_0\left[2A_* Q_2(x)\sin\vartheta_0\pm\alpha Q_0(x)\cos\vartheta_0\right]}{4\pi\sqrt{\omega(x)\left(a^2-x^2\right)}}$$

$$Q_2(x)=\Big\{\left[1-\omega(x)\right]\mathrm{sh}(\pi\gamma/2)\cos\left(\gamma\ln\omega(x)\right)+$$

$$=\left[1+\omega(x)\right]\mathrm{ch}(\pi\gamma/2)\sin\left(\gamma\ln\omega(x)\right)\Big\},\quad\left(A_*=2\left(b_1c_1+a_1^2\right)/\alpha^2\right)$$

Отметим, что во всех полученных формулах приняв

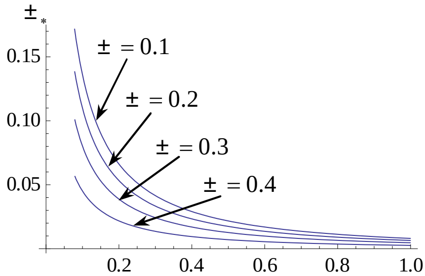
$$a_{jj}=a_{12}+2=\frac{2(1-\pm)}{1-2\pm},\quad «_{12}=\frac{E}{2(1+\pm)},\ a_j=-\frac{(1-2\pm)}{4(1-\pm)},$$

$$b_j=\frac{(1+\pm)(3-4\pm)}{4E(1-\pm)},\ c_j=\frac{E}{4\left(1-\pm^2\right)}$$

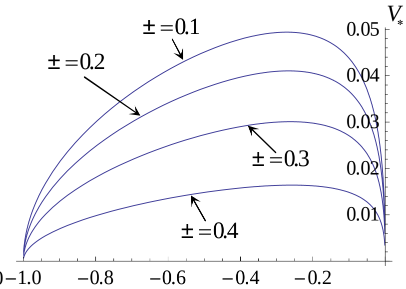
$$«_j=\sim=1,\quad A_*=1/2,\quad B_*=1/2k_1,\quad (j=1,2)$$

где $\pm$ и E – соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга для изотропного тела, получим соответствующие формулы для изотропной плоскости.

Проведен численный анализ рассматриваемой задачи в случае изотропной плоскости. Изучены закономерности изменения приведенных контактных напряжений $\pm_*=a\pm_y^+/P_0$; $^2{}_*=a^2{}_y^+/P_0$, приведенного расстояния точки приложения нагрузки от начала координат $x_0^*=x_0/a$ и приведенного раскрытия разреза $V_*(x)=V(x)/a$ в зависимости от изменения коэффициента Пуассона, когда $g_0=0$ и $P_0/aE=0{,}1$. Результаты вычислений показывают, что касательные контактные напряжения практически не зависят от коэффициента Пуассона. В то же время, при увеличении коэффициента Пуассона, нормальные контактные напряжения и максимальное раскрытие разреза уменьшаются (фиг.1-2), а точка приложения нагрузки, исключающая поворот включения, приближается к центру включения (таблица 1)



Фиг.1



Фиг.2

Таблица 1.

±	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
x_0^*	0,5204	0,5155	0,5106	0,5059	0,5019	0,5

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н., Симонян А.Р. О плоско-деформированном состоянии ортотропной плоскости с разрезами.//Изв.НАНРА, Механика. 2011. Т.64. No-2.С. 4-14.
2. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости.// ПММ. 1962. Т.26, Вып. 5. С. 907-912.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука, 1977. 415 с.

<u>Сведения об авторах:</u>

Акопян Ваграм Наслетникович – д.ф.-м.н.,

директор Института механики НАН РА,

e-mail: vhakobyan@sci.am

Симонян Артур Рафикович - соискатель Института механики НАН РА

О ПОСТРОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОСЕТОЧНЫХ ПЕРЕОБУСЛОВЛИВАТЕЛЕЙ ДЛЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МАТРИЦ

Акопян Ю.Р.
Ереван, Армения

Численное решение краевых задач для эллиптических уравнений с помощью метода конечных элементов состоит из следующих двух основных этапов:

- конечноэлементная аппроксимация краевой задачи;
- решение системы сеточных уравнений.

Система сеточных уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, неизвестные которой являются значениями искомого приближенного решения в узлах сетки. При этом, алгебраическая система обладает следующими характерными особенностями:

- система имеет высокий порядок, пропорциональный числу узлов сетки;
- система, как правило, плохо обусловлена.

Поэтому применение общих стандартных методов линейной алгебры для решения систем сеточных уравнений не всегда целесообразно. В связи с этим возникла необходимость в разработке специальных эффективных методов, учитывающих специфику задачи и позволяющих найти решение системы, затрачивая меньший объем вычислительной работы по сравнению с общими методами линейной алгебры.

Поясним суть предлагаемого подхода на примере первой краевой задачи для двумерного самосопряженного эллиптического уравнения второго порядка. Конечноэлементная аппроксимация задачи приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$Au = g \tag{1}$$

с симметричной положительно определенной матрицей A. Такие системы решаются, в основном, с помощью итерационных методов. Наиболее популярными и эффективными являются метод сопряженных градиентов и двухслойный чебышевский метод [1,2]. Скорость сходимости этих методов зависит от *числа обусловленности* ©(A) конечноэлементной матрицы A, которое определяется как отношение наибольшего и наименьшего из собственных чисел этой матрицы. Чем больше число обусловленности, тем больше требуется итераций для достижения заданной точности, что приводит к увеличению числа арифметических операций и, в конечном итоге, к увеличению машинного времени, требуемого для решения алгебраической системы (1) (см. [1]). Известно, что число обусловленности матрицы A

растет с уменьшением шага h сетки. В случае кусочно-линейной аппроксимации ©$(A)=O(h^{-2})$ (см. [3]). Поэтому в рассмотрение вводится так называемая *переобусловливающая матрица* или *переобусловливатель* P (симметричная положительно определенная матрица) и вместо системы (1) рассматривается равносильная система

$$P^{-1}Au=P^{-1}g\ . \qquad (2)$$

Для вновь рассматриваемой системы (2) скорость сходимости итерационных методов зависит от числа обусловленности ©$(P^{-1}A)$, равного отношению наибольшего и наименьшего из собственных чисел матрицы $P^{-1}A$. К переобусловливателю P предъявляются, как правило, два основных требования. Во-первых, матрица P должна хорошо аппроксимировать матрицу A в том смысле, что число обусловленности ©$(P^{-1}A)$ должно быть существенно меньше числа обусловленности ©(A) матрицы A. Во-вторых, в процессе реализации итерационного метода с переобусловливателем приходится неоднократно решать системы с матрицей P, и поэтому эта операция должна быть легко осуществимой.

Техника и методы построения переобусловливателей для конечноэлементных матриц довольно разнообразны. В частности, для построения оптимальных переобусловливателей хорошо приспособлены алгебраические многосеточные методы переобусловливания с внутренними итерациями, предложенные работах У.Аксельсона и П.Вассилевского [4] и Ю.А.Кузнецова [5]. Направление, представленное в работе [4] и развитое в последующих работах этих же авторов, получило название *алгебраических методов многоуровневых итераций* (Algebric Multilevel Iteration Methods). Второе направление, начало которому было положено в [5], и в основе которого лежит разбиение сеточной области на малые подструктуры, было названо *алгебраическими многосеточными методами с разбиениями на подструктуры* (Algebric Multigrid / Substructuring Methods). Отличительной чертой обоих направлений, между которыми существует тесная внутренняя связь, является возможность построения переобусловливателей чисто алгебраическим путем. Свое дальнейшее развитие эти направления получили в работах Ю.Р.Акопяна и Ю.А.Кузнецова [6], У.Аксельсона и Ю.Р.Акопяна [7], У.Аксельсона, Ю.Р.Акопяна и Ю.А.Кузнецова [8] и др.

Идея построения переобусловливателей в рамках алгебраических многосеточных методов с разбиениями на подструктуры состоит в следующем. В основе всей конструкции лежит строящаяся по определенному принципу последовательность иерархических сеток. Далее, на каждом уровне измельчения сетки для имеющейся матрицы жесткости строится так называемый *двухсеточный переобусловливатель* – путем исключения определенных связей между некоторыми узлами сетки внутри локальных конечноэлементных структур (элементов, суперэлементов и др.). В результате дополнение Шура двухсеточного переобусловлвателя лишь числовым множителем отличается от матрицы жесткости на более грубой сетке. Многосеточный переобусловливатель строится путем замены дополнения Шура в блочном представлении двухсеточного переобусловливателя на задаваемые неявно и рекурсивно определяемые матрицы. Эта рекурсия использует на каждом уровне измельчения сетки некоторые итерационные процедуры (например, чебышевские итерации), в которых в качестве переобусловливающей матрицы берется многосеточный переобусловливатель с предыдущего уровня, соответствующего более грубой сетке. Иначе говоря, многосеточный переобусловливатель для исходной матрицы жесткости строится рекурсивно, от одного уровня к другому, вплоть до самой грубой сетки, где система сеточных уравнений решается с помощью некоторого прямого метода (обычно эта система имеет небольшой порядок). При этом, благодаря способу декомпозиции сеточных структур, в процессе выполнения одного шага переобусловливания на промежуточных уровнях происходит обращение простых матриц (диагональных, либо блочно-диагональных с диагональными блоками низкого порядка). Тем самым шаг переобусловливания, заключающийся в переходе от самой мелкой сетки к самой грубой и обратно, предполагает лишь следующие вычислительные операции: сложение векторов, умножение вектора на число, умножение матрицы на вектор и решение алгебраической системы низкого порядка на самой грубой сетке.

Разработанные в работах [5,6] общие принципы построения алгебраических многосеточных переобусловливателей с внутренними итерациями позволяют строить оптимальные переобусловливатели не только для линейных конечных элементов, но также и для конечных элементов высокого порядка [9,10], включая серендиповые конечные элементы [11]. Получен ряд результатов для случая третьей краевой задачи для эллиптических уравнений [12,13]. Большой интерес представляет построение алгебраических многосеточных переобусловливателей для трехмерного случая, где возникают определенные трудности геометрического характера. Важной задачей является задача построения переобусловливателей для бигармонического уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений.- М.: Наука, 1978.
2. Y.Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems.- PWS Publishing, 1996.
3. Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.- Ереван, АН Арм.ССР, 1979.

4. O.Axelsson and P.S.Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods.I.- *Numer. Math.*,56, 1989, 157-177.
5. Yu.A.Kuznetsov. Algebraic multigrid domain decomposition methods.- *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, v. 4, № 5, 1989, 351-379.
6. Yu.R.Hakopian and Yu.A. Kuznetsov. Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids.- *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, v. 6, № 6, 1991, 453-483.
7. O.Axelsson and Yu.R.Hakopian. Algebraic multilevel preconditioners for perturbed finite element matrices.- *East- West J. Numer. Math.*, v. 6, № 1, 1997, 1-22.
8. O.Axelsson, Yu.R.Hakopian and Yu.A.Kuznetsov. Multilevel preconditioning for perturbed finite element matrices.- *IMA J. Numer. Anal.*,17, 1997, 125-149.
9. Yu.Hakopian. Algebraic multilevel preconditioners for third order finite element approximation.- *Algebra, Geometry & their Applications* (Seminar Proceedings), Yerevan State University, v.1, 2001, 20-39.
10. Yu.R.Hakopian and H.A.Hovhannisyan. Algebraic multilevel preconditioners for third order finite element approximations in rectangular domains.- *Algebra, Geometry & their Applications* (Seminar Proceedings), Yerevan State University, v.2, 2002, 58-72.
11. Yu.R.Hakopian and A.S.Harutyunyan. Two-level preconditioners for serendipity finite element matrices.- *Numer. Linear Algebra Appl.*, v.13, No.10, 2006, 847-864.
12. Ю.Р.Акопян, А.Г.Манукян. Построение алгебраических многосеточ-ных переобусловливателей для конечноэлементных матриц эллипти-ческих краевых задач. I. Двухсеточные переобусловливатели.- *Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета, серия: физико-математические и естественные науки*, № 1, 2007, 22-37.
13. Ю.Р.Акопян, А.Г.Манукян. Построение алгебраических многосеточ-ных переобусловливателей для конечноэлементных матриц эллипти-ческих краевых задач. II. Многосеточный переобусловливатель.- *Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета, серия: физико-математические и естественные науки*, № 2, 2007, 91-99.

Свидения об авторе:
Акопян Юрий Рубенович,
Ереванский государственный университет,
Зав. кафедрой численного анализа и математического моделирования,
доктор физико-математических наук, профессор,
Ереван, ул А.Манукяна 1,
тел. 57-51-40
yuri.hakopian@ysu.am

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ ПЛАСТИНКИ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТАКТА

Антонян С.А, Василян Н.Г

Ереван, Армения

Для пространственной задачи теории упругости условия скользящего контакта и стесненно скользящего контакта соответствует один вариант по теории Кирхгофа. Теории учитывающие поперечные сдвиги, приводят для указанных вариантов к различным граничным условиям. На основе теории С.А. Амбарцумяна, в этой работе определятся прогиб, изгибающий и крутящий моменты и перерезывающие усилия на краю с указанными граничными условиями. Для перерезывающих усилий устанавливается наличие существенных отличий.

1. В эти дни большое развитие и много внимания получили исследования по обоснованию и применению теорий, учитывающих поперечные сдвиги[1-3]. Известны два варианта граничных условий задачи изгиба прямоугольной пластинки в трехмерной постановке – а) $u_1 = u_2 = 0,\ \pm_{13} = 0$ (стесненно скользящий контакт), б) $u_1 = 0,\ \pm_{13} = 0\ \ \pm_{12} = 0$ (скользящий контакт)[4].

Этим условиям в теории Кирхгофа соответствуют условия –

а) $u = v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$, б) $u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$.

В теории Кирхгофа относительно финкции прогиба w получаются три граничных условия вместо необходимых двух. При удовлетворении условию самосопряженности задачи здесь возможны два варианта граничных условий для стесненно скользящего контакта: либо удовлетворяются первые два условия для w , что будет соответствовать задаче с жесткой заделкой, либо удовлетворяются первое и третье условия, что совпадает с задачей для скользящего контакта. Неоднозначность постановки задачи такими граничными условиями по теории Кирхгофа показывает очевидность необходимости применения уточненных теорий. Теория С.А. Амбарцумяна [5], учитывающая поперечные сдвиговые деформации, позволяет выявить различие граничных условий стесненно скользящего контакта и скользящего контакта. Также отметим, что для задач цилиндрического изгиба пластин получаются необходимые два граничных условия.

Для исследования напряженно-деформированного состояния для данных граничных условий на кромки пластинки применяется подход Надаи, согласно которому, для достаточно удлиненных пластин, можно пренебречь влиянием граничных условиий противоположной кромки. Решение Надаим [6] – задача изгиба пластинки– на основе теории Кирхгофа приводится в монографии [7].

2. Полубесконечная пластинка–полоска постоянной толщины 2h в прямоугольной декартовой системе координат занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b,\ -h \le z \le h.$ На пластинку действует распределенная нагрузка интенсивностью $q(y)$. Уравнения задачи изгиба пластинки с учетом поперечных сдвигов, согласно теории С.А. Амбарцумяна, имеют вид [4,5]

$$
\begin{gathered}
\frac{4h}{3}\left(\frac{\partial \text{¨}_1}{\partial x}+\frac{\partial \text{¨}_2}{\partial y}\right)+q(y)=0 \ , \\
D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta \text{¨}_1+\text{–}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \text{¨}_1}{\partial x}+\frac{\partial \text{¨}_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\text{¨}_1=0\,, \qquad (2.1) \\
D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-\frac{8h^3}{15}\left[\Delta \text{¨}_2+\text{–}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \text{¨}_1}{\partial x}+\frac{\partial \text{¨}_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{4h}{3}\text{¨}_2=0\,.
\end{gathered}
$$

где w –функция прогиба, $\text{¨}_1, \text{¨}_2$ – функции определяющие перерезывающие усилия, $D=\dfrac{2Eh^3}{3(1-\text{¬}^2)}$, $\text{–}=\dfrac{1+\text{¬}}{1-\text{¬}}$, E – модуль Юнга, ¬ – коэффициент Пуассона.

Предполагается, как и в задаче Надаи, что края пластинки $y=0,b$ шарнирно закреплены, что позволяет решение системы уравнений (2.1) представить в виде

$$
w=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\sin \text{ª}_n y,\quad \text{¨}_1=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\sin \text{ª}_n y,\quad \text{¨}_2=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)\cos \text{ª}_n y, \qquad (2.2)
$$

где $\text{ª}_n=\dfrac{n\text{®}}{b}$. Следуя подходу Надаи, потребуем, чтобы решения (2.2) при удалении от кромки $x=0$ стремились к решению задачи цилиндрического изгиба. Согласно (2.1) и (2.2) указанные условия будут иметь вид

$$
\lim_{x\to\infty} f_n(x)=\frac{q_n}{D\text{ª}_n^4}\left[1+\frac{4h^2\text{ª}_n^2}{5(1-\text{¬})}\right],\ \lim_{x\to\infty}\Phi_n(x)=0\,,\ \lim_{x\to\infty}F_n(x)=\frac{3q_n}{4h\text{ª}_n} \qquad (2.3)
$$

здесь q_n является коэффициентом ряда Фурье

$$
q(y)=\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \text{ª}_n y \qquad (2.4)
$$

Подстановка (2.2) в (2.1) приводит к последующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относитело искомых функций

$f_n(x), \Phi_n(x), F_n(x)$. Решение этих уравнений, удовлетворяющих условиям (2.3), будет

$$f_n = A_n e^{-\alpha_n x} + B_n x e^{-\alpha_n x} + \frac{q_n}{D\alpha_n^4}(1+\lambda_n),$$

$$\Phi_n = D_n e^{-\beta_n x} - \frac{5E}{4(1+\nu)}\lambda_n B_n e^{-\alpha_n x} \tag{2.5}$$

$$F_n = -\frac{\beta_n}{\alpha_n} D_n e^{-\beta_n x} + \frac{5E}{4(1+\nu)}\lambda_n B_n e^{-\alpha_n x} + \frac{3q_n}{4h\alpha_n}.$$

В (2.5) приняты следующие обозначения $\lambda_n = \dfrac{4\alpha_n^2 h^2}{5(1-\nu)}$, $\beta_n = h^{-1}\sqrt{2.5+\alpha_n^2 h^2}$.

Произвольные постоянные A_n, B_n и D_n должны определяться удовлетворением граничным условиям на кромке $x=0$.

3. В трехмерной постановке задач изгиба пластин на кромке пластинки $x=0$ рассматриваются два варианта граничных условий:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \tag{3.1}$$

$$u_1 = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \sigma_{12} = 0 \tag{3.2}$$

Для двух вариантов теория Кирхгофа приводит к следующим граничным условиям

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{3.1*}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{3.2*}$$

В теории С.А.Амбарцумяна для задачи с условиями (3.1*) и (3.2*) соответствуют [4]

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{4}{5G}\psi_2 = 0, \tag{3.1**}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \tag{3.2**}$$

Подставляя (2.2) в (3.1**) и учитывая (2.4) и (2.5), находим неизвестные постоянные

$$A_n = \frac{q_n}{D\alpha_n^4 \gamma_n}, \quad B_n = \frac{q_n}{D\alpha_n^3 \gamma_n}, \quad D_n = \frac{15(1-\nu)\lambda_n}{8h^3\alpha_n^3 \gamma_n} q_n. \tag{3.3}$$

где $\gamma_n = 2\lambda_n\left(1-\alpha_n^{-1}\beta_n\right)-1$. И для случая скользящего контакта (3.2**) получим

$$A_n = B_n = D_n = 0. \tag{3.4}$$

Для сравнения результатов решения по вариантам (3.1**) и (3.2**) достаточно рассматривать частный случай задания нагрузки

$$q(y) = q_0 \sin \alpha_1 y \ . \tag{3.5}$$

Для случая граничных условий (3.1**) решение задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{q_0}{D\alpha_1^4}\left[\frac{1}{{}_1} e^{-\alpha_1 x}(1+\alpha_1 x) + 1 + \lambda_1\right]\sin \alpha_1 y, \\ \psi_1 &= \frac{15(1-\nu)}{8}\frac{q_0 \lambda_1}{{}_1\alpha_1^3 h^3}\left[e^{-\beta_1 x} - e^{-\alpha_1 x}\right]\sin \alpha_1 y, \\ \psi_2 &= \frac{15(1-\nu)}{8}\frac{q_0 \lambda_1}{{}_1\alpha_1^4 h^3}\left[-\beta_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} + \frac{2}{5(1-\nu)}\alpha_1^3 h^2 \ {}_1\right]\cos \alpha_1 y. \end{aligned} \tag{3.6}$$

И для случия скользящего контакта искомое решение задачи при граничных условиях (3.2**) будет иметь вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{q_0}{D\alpha_1^4}\left[1+\lambda_1\right]\sin \alpha_1 y, \quad \psi_1 = 0, \\ \psi_2 &= \frac{3}{4h}\frac{q_0}{\alpha_1}\cos \alpha_1 y. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Можно определить все характерные величины задачи. Рассмотрим выражение для прогиба w при граничных условиях (3.1**) в точке (0,0.5b)

$$w(0{,}0.5b) = \frac{q_0}{D\alpha_1^4}\left[\frac{1}{{}_1} + 1 + \lambda_1\right]. \tag{3.8*}$$

$$w(0{,}0.5b) = \frac{q_0}{D\alpha_1^4}\left[1+\lambda_1\right] \tag{3.8**}$$

По теории Кирхгофа w– прогиб свое максимальное значение получает в углу пластинки: $\max w = w(0{,}0.5b) = q_0 / D\alpha_1^4$. Найденные решения будут совпадать с теорией Кирхгофа, если принять $\lambda_1 << 1$ для случая граничных условии (3.2**). Получим выражение также для изгибающего момента для (3.1**) и (3.2**).

$$M_1(0{,}0.5b) = -\frac{4\nu}{5(1-\nu)}q_0 h^2\left[1 - \frac{5(1-\nu)\left[\alpha_1(1+\nu)+\nu\alpha_1 \ {}_1(1+\lambda_1) + 2\lambda_1(1-\nu)(-\beta_1+\alpha_1)\right]}{4\nu h^2 \alpha_1^3 \ {}_1}\right] \tag{3.9}$$

$$M_1(0{,}0.5b) = -\frac{4\nu}{5(1-\nu)}q_0 h^2\left[1 - \frac{5(1-\nu)(1+\lambda_1)}{4h^2\alpha_1^2}\right] \tag{3.10}$$

Для перерезывающих сил в точках получается $N_1(0{,}0)_{стск} = N_1(0{,}0)_{ск} = 0$, что совпадает с решением по теории Кирхгофа. Опорные реакции для граничных условий (3.1**) и (3.2**) будут соответственно

$$N_2(0,0)=\frac{q_0}{ª_1}\left[1+\frac{15(1-¬)}{2h^2ª_1^4}(-¦_1+ª_1)\right]$$

$$N_2(0,0)=\frac{q_0}{ª_1} \qquad (3.12)$$

что также с точностью $¸_1 <<1$ совпадут с теорией Кирхгофа($N_2(0,0)=q_0/ª_1$).

Таким образом, получаем, что результаты классической теории совпадают с результатами уточненной теории при граничных условиях скользящего контакт с точностью пренебрежения квадратом относительной толщины. Но в случае стесненно скользящего контакта различия существенны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Costanda C. A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation. Longman Scientific Technical. 19920,170p.
2. Karama M., Afag K.S., Mistou S. A refinement of Ambartsumian multi-layer beam theory. Computers&Structures. 2008, №86, p 839-849.
3. Баблоян А.А., Токмаджян В.О. Смешанная задача изгиба пластины с учетом поперечных сдвигов.// Изв. НАН Армении, Механика, 2008. *Т61. №4.* С 44-51.
4. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. //В сб. ”Проблемы механики тонких деформируемых тел” Ереван, НАН Армении, 2002. С 67-88.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.:Наука., 1987. 360с.
6. Nadai A. Elastische Platten. *Берлин: 1925.с 72.*
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Изд. физ.-мат лит. 1963. 636с.

Сведения об авторах:

Антонян Саят Сержикович
Соискатель, Институт механики НАН РА
Тел.:(+374 99) 339299,(+374 10)624802
Адрес:Даниел Варуджан 9, #29, Ереван, Армения 0060
E-mail адрес: sayatantonyan@rambler.ru

Василян Нарине Гургеновна
Институт Механики НАН РА
Младший научный сотрудник, аспирант
Тел.:(+374 99) 707939,(+374 10)624802
Адрес:Даниел Варужан 9, #29, Ереван, Армения 0060
E-mail адрес: narine@mechins.sci.am

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ СИЛЫ РЕЗАНИЯ P_z ОТ ИЗНОСА РЕЖУЩЕЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ СИНТКОРА ПРИ ОБРАБОТКЕ ЦВЕТНЫХ МЕТАЛЛОВ

Арзуманян А. М., Акопян С. А., Минасян З. А., Манукян О. С.
Гюмри, Армения

Приведены расчетные данные и результаты экспериментов по определению сил резания при тонком фрезеровании цветных металлов и сплавов в зависимости от износа режущей пластины из синтетического корунда.

Для анализа сложных технологических процессов обработки широко применяются автоматизированные методы расчета по качественным моделям, которые с помощью управления режимными параметрами, приводят к повышению производительности и качества обработки без привлечения значительных трудовых и материальных затрат.

В настоящее время конкретные расчеты различных параметров процесса резания проводятся с помощью большого числа разнообразных эмпирических выражений, а повышение технологической эффективности достигается преимущественно изобретательским путем. Многие наблюдаемые физические закономерности до сих пор не имеют никакого объяснения с позиции механики деформируемого твердого тела [1].

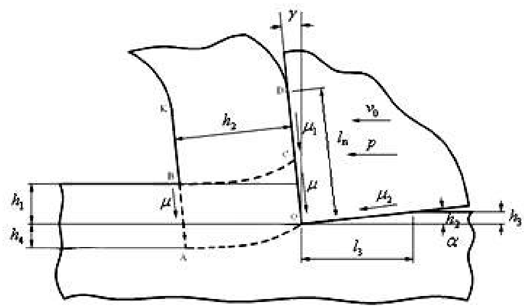


Рис. 1. Расчетная схема процесса резания

В данной работе для исследования силы резания P_z при обработке цветных металлов и сплавов режущими пластинами из синтетического корунда использована новая теория пластического течения, разработанная А. Л. Воронцовым [2].

На рис. 1 показана расчетная схема процесса резания.

Силы резания при фрезеровании однозубой фрезой можно определить следующим образом [2]:

$$P_z = 1.155 \cdot \pm_{st} \cdot u \cdot s \cdot t \cdot \left[\left(1 + \text{«}_1 \cdot (1 - tg\text{¥}) + \frac{(0.5 + \text{«}) \cdot u}{2 \cdot K_c} \right) \cdot \cos\text{¥} + \frac{K_c}{4 \cdot u \cdot \cos\text{¥}} + \text{«} \cdot \sin\text{¥} + \frac{\text{«}_2 \cdot h_3}{u \cdot s} + \frac{K_c \cdot s \cdot \sin^{2}\text{¨}'}{4 \cdot u \cdot t \cdot \cos\text{¥}} \right] \quad (1)$$

где $±_{st}$ – напряжение текучести обрабатываемого материала, ¥ – передний угол режущей части инструмента, « – коэффициент вязкого трения обрабатываемого материала, $«_1$ – коэффициент трения между передней поверхностью режущего инструмента и стружкой, $«_2$ – коэффициент трения между задней поверхностью режущего инструмента и обрабатываемым материалом, K_c – коэффициент утолщения стружки, $u = 1 - \sin ¥$ – коэффициент, учитывающий удельную энергию деформации, t – глубина резания, s – подача резания, ¨ – главный угол в плане, h_3 –износ задней поверхности режущего инструмента.

Износостойкость режущих пластин из синтетического корунда значительно зависит от величин внутренних напряжений в режущих пластинах.

Опыты показали, что при обработке бронзы БрАЖ9-4 и дуралюминия Д1 режущими пластинами из синтетического корунда зависимость износа по задней грани от режимов резания соответственно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
h_z &= 0.00007015 - 0.1122086 \cdot t + 0.27521345 \cdot s + 0.00001223 \cdot v - 0.41551448 \cdot t^2 - \\
&- 0.47522918 \cdot t \cdot s - 0.0003094 \cdot t \cdot v - 2.24372633 \cdot s^2 + 0.00024308 \cdot s \cdot v - \\
&+ 0.00000001 \cdot v + 15.48005271 \cdot t^2 \cdot s + 0.00213564 \cdot t^2 \cdot v + 39.15031170 \cdot t \cdot s^2 + \\
&+ 0.04219281 \cdot t \cdot s \cdot v + 0.00000058 \cdot t \cdot v^2 + 0.00059248 \cdot s^2 \cdot v - 0.00000037 \cdot s \cdot v^2 - \\
&- 244.61009796 \cdot t^2 \cdot s^2 - 0.16382105 \cdot t^2 \cdot s \cdot v - 0.00000345 \cdot t^2 \cdot v^2 - \\
&- 0.39442320 \cdot t \cdot s^2 \cdot v - 0.00004762 \cdot t \cdot s \cdot v^2 + 0.00000296 \cdot s^2 \cdot v^2 + \\
&+ 1.67164340 \cdot t^2 \cdot s^2 \cdot v + 0.00020737 \cdot t^2 \cdot s \cdot v^2 + 0.00046552 \cdot t \cdot s^2 \cdot v^2 - \\
&- 0.00211600 \cdot t^2 \cdot s^2 \cdot v^2
\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}
h_z &= 0.00022921 + 0.03530819 \cdot t + 0.17160813 \cdot s + 0.00000824 \cdot v - 0.03718980 \cdot t^2 + \\
&+ 2.89406085 \cdot t \cdot s + 0.00013194 \cdot t \cdot v - 1.31609825 \cdot s^2 + 0.00016459 \cdot s \cdot v - \\
&0.00000001 \cdot v^2 - 6.91993362 \cdot t^2 \cdot s - 0.00052274 \cdot t^2 \cdot v - 10.56662018 \cdot t \cdot s^2 + \\
&+ 0.01361435 \cdot t \cdot s \cdot v - 0.00000016 \cdot t \cdot v^2 + 0.00124915 \cdot s^2 \cdot v - 0.00000018 \cdot s \cdot v^2 + \\
&+ 39.28714664 \cdot t^2 \cdot s^2 - 0.00339442 \cdot t^2 \cdot s \cdot v + 0.00000079 \cdot t^2 \cdot v^2 - 0.05984766 \cdot t \cdot s^2 \cdot v - \\
&- 0.00000880 \cdot t \cdot s \cdot v^2 - 0.00000049 \cdot s^2 \cdot v^2 - 0.13048693 \cdot t^2 \cdot s^2 \cdot v - 0.00001605 \cdot t^2 \cdot s \cdot v^2 + \\
&+ 0.00001763 \cdot t \cdot s^2 \cdot v^2 + 0.00035267 \cdot t^2 \cdot s^2 \cdot v^2
\end{aligned} \qquad (3)$$

На рис. 2 показаны графики зависимости износа по задней грани от режимов резания при обработке бронзы БрАЖ9-4 и дуралюминия Д1 режущими пластинами из синтетического корунда.

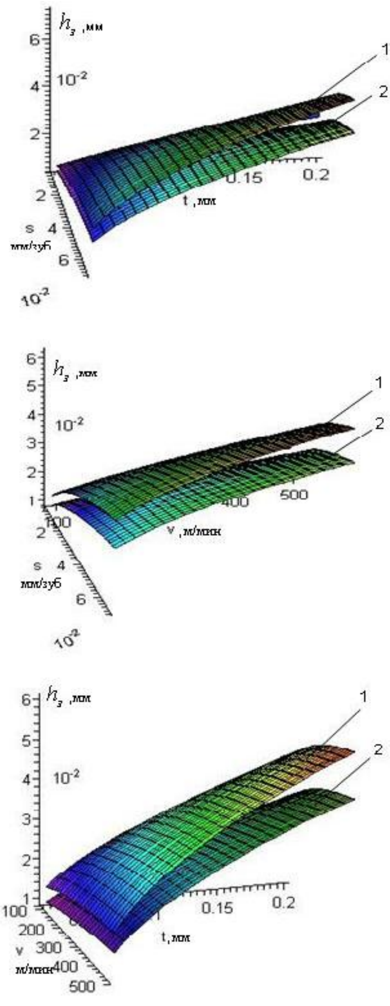


Рис. 2. Графики зависимости износа по задней грани от режимов резания при обработке: 1) бронзы БрАЖ9-4 и 2) дуралюминия Д1 режущими пластинами из синтетического корунда.

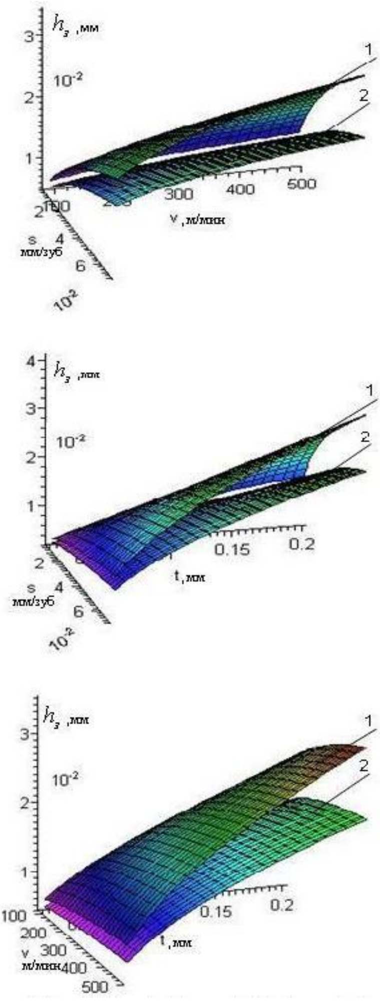


Рис. 3. Графики зависимости износа по задней грани от режимов резания в случае воздействия электрического поля при обработке 1) бронзы БрАЖ9-4 и 2) дуралюминия Д1 режущими пластинами из синтетического корунда.

Обработка режущими пластинами из синтетического корунда является финишной, поэтому пластины должны обладать максимальной износостойкостью и прочностью режущего лезвия. Существуют разные методы повышения вышеуказанных характеристик.

Одним из методов повышения прочности пластин из синтетического корунда является электропластический эффект, возникающий под воздействием постоянного электрического тока.

В полупроводниковых кристаллах CdS и ZnS электропластический эффект обнаружен Ю.А. Осипьяном [5].

Опыты показали, что под воздействием электрического поля при обработке бронзы БрАЖ9-4 и дуралюминия Д1 режущими пластинами из синтетического корунда зависимость износа по задней грани от режимов резания соответственно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} h_{z1} &= 0.00046518 - 0.00045548 \cdot t + 0.09896110 \cdot s - 0.00000431 \cdot v + 0.12853732 \cdot t^2 + \\ &+ 3.63065818 \cdot t \cdot s + 0.00047435 \cdot t \cdot v - 0.63230441 \cdot s^2 + 0.00022490 \cdot s \cdot v + \\ &+ 0.00000001 \cdot v^2 - 11.99404142 \cdot t^2 \cdot s - 0.00224995 \cdot t^2 \cdot v - 27.71754043 \cdot t \cdot s^2 - \\ &- 0.01045655 \cdot t \cdot s \cdot v - 0.00000079 \cdot t \cdot v^2 - 0.00105589 \cdot s^2 \cdot v - 0.00000021 \cdot s \cdot v^2 + \\ &+ 115.74543563 \cdot t^2 \cdot s^2 + 0.09805564 \cdot t^2 \cdot s \cdot v + 0.00000399 \cdot t^2 \cdot v^2 + \\ &+ 0.18303437 \cdot t \cdot s^2 \cdot v + 0.00002696 \cdot t \cdot s \cdot v^2 + 0.00000021 \cdot s^2 \cdot v^2 - \\ &- 1.22728250 \cdot t^2 \cdot s^2 \cdot v - 0.00018515 \cdot t^2 \cdot s \cdot v^2 - 0.00033856 \cdot t \cdot s^2 \cdot v^2 + \\ &+ 0.00211600 \cdot t^2 \cdot s^2 \cdot v^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} h_{z1} &= -0.00023387 + 0.02354699 \cdot t + 0.14217905 \cdot s + 0.00001152 \cdot v - 0.00239511 \cdot t^2 + \\ &+ 1.50973839 \cdot t \cdot s + 0.00001353 \cdot t \cdot v - 1.45813857 \cdot s^2 - 0.00067374 \cdot s \cdot v - 0.00000002 \cdot v^2 - \\ &- 5.33455266 \cdot t^2 \cdot s - 0.00029394 \cdot t^2 \cdot v - 0.95854995 \cdot t \cdot s^2 + 0.01195109 \cdot t \cdot s \cdot v + \\ &+ 0.00000011 \cdot t \cdot v^2 + 0.00910305 \cdot s^2 \cdot v + 0.00000121 \cdot s \cdot v^2 + 31.10526332 \cdot t^2 \cdot s^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражения (2), (3), (4), (5) в (1) и имея в виду, что $« = 0.17$,

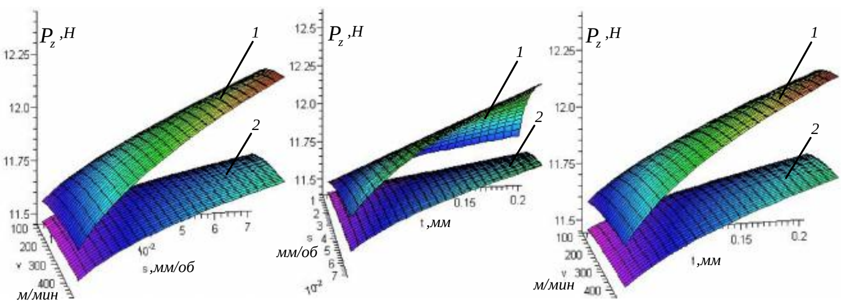


Рис. 4. Графики зависимости сил резания P_z от режимов резания при обработке бронзы БрАЖ9-4 режущими пластинами из синтетического корунда: 1) без воздействия электрического поля, 2) под воздействием электрического поля.

$«_1 = «_2 = 0.15$, $u = 0.895$, $\pm_{st} = 790$ МПа, при обработке бронзы БрАЖ9-4 режущими инструментами из синтетического корунда, которые имели следующую геометрию $\alpha = 6^0$, $\gamma = - 6^0$, $\varphi = \varphi_1 = 45^0$, r = 0,3мм, $\lambda = 6^0$, можно получить зависимости сил резания P_z от режимов резания с учетом и без учета воздействия электрического поля (рис. 4).

Анализ графиков показывает, что под воздействием электрического поля с увеличением режимов резания, сила P_z увеличается более медленно, чем при его отсутствии.

Это объясняется тем, что под воздействием электрического поля процесс торможения дислокации в режущей пластине становится наиболее интенсивным, так как к торможению дислокаций под воздействием силы резания добавляется эффект влияния электрического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов А. Л., Султан-Заде Н. М., Албагачиев А. Ю., Разработка новей теории резания. Введение.// Вестник машиностроения 2008. № 1, с. 57-67.
2. Воронцов А. Л., Султан-Заде Н. М., Албагачиев А. Ю., Разработка новей теории резания. Расчет параметров тарцевого фрезерования. Вестник машиностроения 2008. № 12, с. 65-73.
3. Арзуманян А. М., Акопян С. А. Манукян О. С. Определение сил резания P_z и P_y при тонком торцевом фрезеровании цветных металлов и сплавов в зависимости от параметров резания. //Материалы конференции, посвященной 40-летию образования Арцахского государственного университета. Том 2, Степанакерт, 2009, стр. 166-168.
4. Арзуманян А.М., Минасян З.А., Акопян С.А., Манукян О.С. Теоретическое исследование напряжений на передней и задней поверхностянх режущей пластины из синтетического корунда при обработке цветных металлов и сплавов. Механика XXI века. IX Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием: сборник докладов.– Братск: ГОУ ВПО “БрГУ”, 2010, с. 33 – 35.
5. Осипьян Ю. А., Петренко В. Ф. Экспериментальное наблюдение влияния электрического поля на пластическую деформацию кристаллов $ZnSe$. Письма в ЖЭТФ, 1973. Том 17, Вып. 10, с. 555 – 557.

<u>Сведения об авторах:</u>
Арзуманян Алексан Мкртычевич
Декан факультета профессионального инженерного обучения Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении, канд. техн. наук, доцент, (374 312) 4 50 60.
E-mail arzal@yandex.ru

Акопян Сережа Амаякович – ассистент кафедры “Технология художественной обработки материалов” Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении, магистр инженерии, (374 312) 4 62 81.
E-mail serghakob@mail.ru

Минасян Зограб Александрович – зав. кафедрой “Технология швейных и кожевенных изделий” Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении, канд. техн. наук, доцент, (374 312) 4 50 60.

Манукян Оганес Самвелович – доцент кафедры “Технология художественной обработки материалов” Гюмрийского филиала Государственного инженерного университета Армении, канд. техн. наук. (374 312) 4 62 81.

ФОРМУЛИРОВКА КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ СЖИМАЕМОЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЫ С ТРЕЩИНОЙ

Арутюнян А.Р., Арутюнян Р.А.

Санкт-Петербург, Россия

С учетом текущего коэффициента поперечной деформации вводятся реологические соотношения, описывающие поведение нелинейно-упругих материалов, упругая деформация в которых может достигать более 3%. Эти соотношения используются для формулировки критерия прочности образца с трещиной на основе энергетической концепции Гриффитса. В случае абсолютно хрупкой среды, когда коэффициент поперечной деформации равен нулю, полученный критерий совпадает с критерием Гриффитса. По полученным критериям прочности оцениваются значения теоретической и реальной прочности.

Как показано в работах [1, 2] можно сформулировать нелинейные соотношения теории упругости с учетом текущего коэффициента поперечной деформации $\nu = -\varepsilon_y / \varepsilon_x = -\varepsilon_z / \varepsilon_x$ (ε_x, ε_y, ε_z – продольная и поперечные деформации растягиваемого образца) и закона сохранения массы. Эти соотношения записываются в виде

$$\sigma = E\varepsilon e^{-2\nu\varepsilon}, \tag{1}$$

$$\sigma = E\varepsilon e^{-\varepsilon} \left(\rho_0 / \rho \right), \tag{2}$$

где $\sigma = P / F_0$, P – растягивающая сила, F_0 – начальная площадь поперечного сечения образца, $\varepsilon = \varepsilon_x$, ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность материала стержня, E – модуль Юнга.

Уравнения (1) и (2) могут быть использованы для более точного описания нелинейных эффектов в чистых металлах с различным типом кристаллической решетки и, соответственно, с различным начальным состоянием “пористости”, определяемой упаковкой атомов. Например, для трех типов структур (гексагональная плотно упакованная, кубическая гранецентрированная и кубическая объемно-центрированная), при упаковке атомов которых образуются пустоты равные, соответственно, 26%, 29% и 32%.

На рис. 1 показаны теоретические кривые напряжение – деформация согласно закону (1). Можно выделить два предельных случая. При $\nu = 1/2$ имеем несжимаемую, нелинейно деформируемую упругую среду. При $\nu = 0$ среда является жесткой линейно-упругой. Промежуточные случаи описывают поведение упругих материалов с различными механическими свойствами.

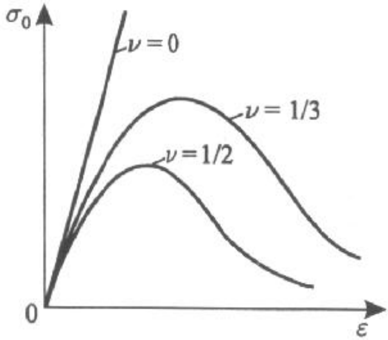


Рис. 1. Теоретические кривые напряжение – деформация для различных значений коэффициента поперечной деформации.

Далее ограничимся рассмотрением закона (1) и на его основе сформулируем критерий разрушения нелинейной упругой среды с трещиной. В качестве такой среды рассматривается поведение керамических композитов. Как показывают экспериментальные исследования [3, 4], в таких материалах можно создать (с использованием соответствующих технологических процессов обработки) определенные пористые структуры, обеспечивающие до 2-3% нелинейно-упругой деформации при комнатной температуре. При этом деформирование осуществляется без следов остаточной деформации. Как отмечают авторы [3, 4]: “Отсутствие следов остаточной деформации говорит о реализации в структурах материала существенно нелинейных механизмов формирования деформационного отклика на прилагаемую нагрузку“.

С учетом этих положений и энергетической концепции Гриффитса [5] соотношение (1) используется для формулировки критерия разрушения образца с трещиной. В нашем случае среда является нелинейно-упругой. При этом характер нелинейности определяется текущим коэффициентом поперечной деформации. Зависимость ¬ =¬(£) может быть определена экспериментально. Для конкретизации этой зависимости используются имеющиеся в мировой научной литературе экспериментальные результаты [6]. Впервые такие исследования были выполнены Баушингером над образцами, изготовленными из мягкой стали, в опытах на простое растяжение. Как показывают опыты, зависимость ¬ =¬(£) является немонотонной. На начальном участке деформации, когда материал переходит из упругого состояния в пластическое, коэффициент поперечной деформации монотонно возрастает до максимального значения ¬ =1/ 2, т. е. материал переходит в состояние несжимаемости. На участке упрочнения материал становится сжимаемым. Коэффициент поперечной деформации монотонно убывает и стремится к нулю с переходом в область разрушения, что связано с появлением в образце множества пор и трещин.

В опытах других авторов [7] также наблюдается состояние несжимаемости у материалов с явно выраженным пределом текучести при переходе из упругого состояния в пластическое. В случае хрупких материалов, в частности, керамических композитов экспериментальная зависимость $\nu = \nu(\varepsilon)$ является монотонной, медленно убывающей функцией на начальных этапах деформирования. С переходом в область разрушения следует ожидать также уменьшение коэффициента поперечной деформации до нулевого значения. Учитывая эти положения функциональную зависимость коэффициента поперечной деформации зададим следующим соотношением

$$\nu(\varepsilon) = \nu_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right)^k , \qquad (3)$$

где ν_0, ε_p, k – постоянные.

График зависимости (3) представлен на рис. 2 для различных значений k (1 – $k = 1$, 2 – $k = 0,4$, 3 – $k = 0,15$) и при $\nu_0 = 0,22$, $\varepsilon_p = 0,03$.

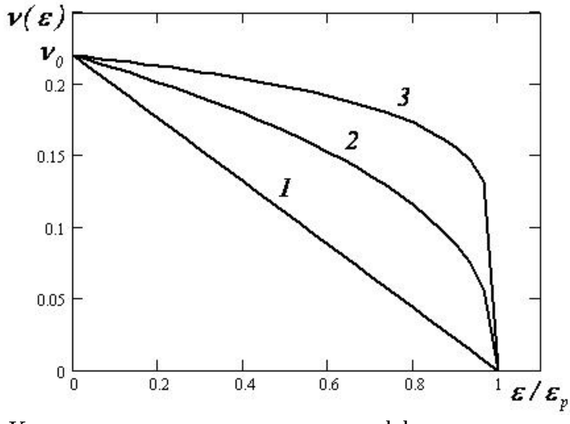


Рис. 2. Кривые изменения текущего коэффициента поперечной деформации согласно формуле (3) для различных значений k: 1 – $k = 1$, 2 – $k = 0,4$, 3 – $k = 0,15$.

Учитывая указанный характер изменения коэффициента поперечной деформации, рассмотрим две возможности формулировки критерия прочности образца с трещиной на основе концепции Гриффитса. В первом случае в соотношении (1) будем считать $¬ = const$. Для этого случая решается задача о разрушении неподвижно закрепленной тонкой пластины с трещиной, растягиваемой заданным напряжением $±$ (мягкое нагружение), или заданной деформацией $£$ (жесткое нагружение).

Запасенная в пластине упругая энергия, отнесенная к единице площади равна

$$Э(£) = \int_0^{£} ± \, d£ = \frac{1}{4} \frac{E}{¬^2} \left[1 - (2¬£ + 1) \cdot e^{-2¬£} \right] \tag{4}$$

Если в пластине появился дефект в виде трещины малой длины $2l$, расположенный перпендикулярно направлению растяжения, то упругая энергия пластины уменьшится на некоторую величину $аÝ$, равную произведению средней площади области на среднее значение плотности упругой энергии. Принимая, что площадь указанной области имеет порядок l^2, получим соотношение для освобожденной в пластине упругой энергии

$$аЭ = -cЭl^2 , \tag{5}$$

где с помощью постоянной c учитывается форма и размер выделенной области.

Освобожденная упругая энергия (5) расходуется на образование новых поверхностей. Если обозначить через $¥$ удельную работу разрушения на единицу площади новой поверхности, тогда работа, затрачиваемая на образование трещины длиною $2l$, будет равна

$$d = 4¥l \tag{6}$$

В итоге появление трещины изменяет энергию пластины на величину

$$Э_1 = -cЭl^2 + 4¥l \tag{7}$$

Рассматривая малые изменения длины трещины, будем иметь

$$\frac{dЭ_1}{dl} = -2cЭl + 4¥ \tag{8}$$

В состоянии равновесия энергия системы имеет экстремальное значение ($dЭ / dl = 0$). Из этого условия с учетом (4) можно найти критическую длину трещины $l = l_*$ в зависимости от критической деформации $£ = £_*$

$$l_* = \frac{8¥¬^2}{Ec} \left[1 - (2¬£_* + 1) \cdot e^{-2¬£_*} \right]^{-1} \tag{9}$$

В случае, когда среда является абсолютно хрупкой ($¬ = 0, £_* = ±_* / E$) из формулы (9) при $c = 2®$ следует критерий разрушения Гриффитса

$$l_* = \frac{2¥}{£_*^{2} E®} = \frac{2¥ E}{®±_*^{2}} \qquad (10)$$

На рис. 3 показаны теоретические кривые прочности $£_* - l_*$ по критерию Гриффитса ($¬ = 0$) (кривая 1) и по формуле (9) (кривая 2) при $¬ = 0{,}3$. При этом сохраняется гиперболический характер зависимости критической длины трещины от величины критического напряжения.

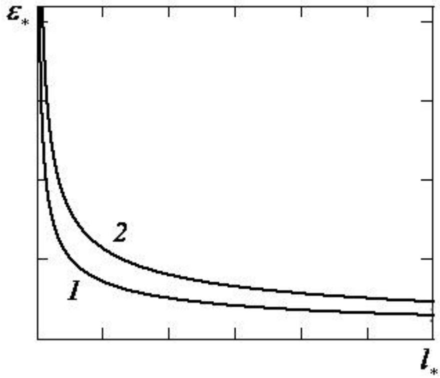


Рис. 3. Теоретические кривые прочности: по критерию Гриффитса ($¬ = 0$) (кривая 1) и по формуле (9) (кривая 2) при $¬ = 0{,}3$.

В случае, когда коэффициент поперечной деформации является переменной величиной и задается соотношением (3), решение задачи о разрушении пластины с трещиной приводит к формулировке критерия прочности, отличного от формулы (9). При этом, для $k = 1$ имеем наиболее простой вариант полученного критерия

$$l_* = \frac{12¥£_p}{Ec£_*^{2}} \left[3¬_0 £_*^{2} - 4¬_0 £_p £_* + 3£_p \right]^{-1} \qquad (11)$$

Принимая $¬_0 = 0$, $c = 2®$, $£_* = ±_* / E$, из формулы (11) получим критерий разрушения Гриффитса (10).

В заключение обратим внимание на проблему оценки теоретической и реальной прочности. Оценкой теоретической прочности занимались в начале прошлого века многие исследователи (Френкель, Гильман, Гриффитс, Борн и др.) [8, 9, 10]. При этом расчеты выполнялись для идеальной кристаллической структуры или решетки. Согласно расчетам прочность такой структуры на несколько порядков выше прочности реальных материалов. Такое различие объясняют наличием в материалах дефектов различного уровня (вакансии, дислокации, поры, микротрещины и др.). В дальнейшем для детальной оценки влияния дефектного состояния на прочностные характеристики материалов и формулировки соответствующих критериев прочности были выполнены многочисленные исследования методами физики и механики материалов.

Основы механического подхода были заложены в работах Кирша, Колосова и Инглиса, которые рассмотрели задачу о растяжении пластинки с круговым и эллиптическим разрезами [11]. В частности, в случае эллиптического разреза наибольшее напряжение $\pm_{max}$ наблюдается в вершине эллипса согласно формуле

$$\pm_{max} = \pm_{í}(1+2l/b), \tag{12}$$

где $\pm_{í}$ – номинальное напряжение, l, b – полуоси эллипса.

Из формулы (12) следует, что при $b \to 0$ (трещина “нулевой” толщины) напряжения в вершине такой трещины могут возрастать до бесконечности. Вводя в формулу (12) величину $° = b^2/l$ – радиус кривизны в вершине эллиптического узкого разреза, получим

$$\pm_{max} = \pm_{í}\left(1+2\sqrt{l/°}\right) \tag{13}$$

Формула (13) пригодна для оценки концентрации напряжений не только эллиптических отверстий, но и для отверстий любой формы с любым радиусом кривизны в его вершине, в частности, и для трещин “нулевой” толщины. Гриффитс использовал формулу (13) для оценки теоретической прочности стекла, которая, согласно расчетам, составляет $\pm_{max} = 15000\,МПа$. При этом предполагалось, что ответственными за реальную прочность стекла ($\pm_{н} \cong 75\,МПа$) являются малые трещины. Для таких трещин имеем следующие оценки. Рассмотрим трещину длиной $l = 10^{-6}\,м$ с радиусом кривизны в кончике трещины $° = 10^{-10}\,м$, равным атомному размеру. Согласно формуле (13) в кончике такой трещины напряжения составляют $\pm_{max} \cong 15071\,МПа$, что сопоставимо с теоретической прочностью.

В связи с исследованиями по теоретической прочности были выполнены многочисленные работы по созданию различных “бездефектных” материалов в виде нитевидных кристаллов, прочность которых приближается к теоретической. В настоящее время подобные исследования выполняются для нанокристаллических и нанокомпозитных материалов. В частности, получены сверхтвердые нанокомпозиты, механические свойства и закономерности нелинейной упругости которых свидетельствуют о достижении в этих материалах состояний, близких к теоретической прочности.

Можно выделить два класса нанокристаллических материалов: материалы с предельно малой величиной зерна меньшей $(5-6)\,нм$ и с размерами зерна более $10\,нм$. В первом случае отсутствуют генерация и распространение дислокаций. Во-втором случае деформация управляется дислокационными механизмами пластичности.

Согласно критериям прочности (9), (10), (11) (рис. 3) с уменьшением критической длины трещины l_* критическое напряжение или деформация бесконечно возрастают. При соответствующем выборе критической длины трещины критическую величину напряжения и деформации можно вычислить по этим формулам. В случае идеальной кристаллической решетки без дефектов значение l_* можно считать равным расстоянию между атомами ($10^{-10}\,м$), а критическое напряжение будет соответствовать значению теоретической прочности $\pm_{*1}$. Для рассмотренных нитевидных нанокристаллических и нанокомпозитных материалов с размерами дефектов в пределах $5\,нм$ (сравнимых с размером зерна) можно оценить величину технической прочности $\pm_{*2}$. Для лабораторного образца величина l_* имеет размер около $1\,мкм$. В этом случае расчетная величина прочности должна соответствовать значению реальной прочности $\pm_{*3}$. Подобные сравнительные расчеты были нами выполнены для разных материалов по критерию прочности (9). Для указанных трех значений критической длины трещины вычислялась величина $£_*$, а соответствующее значение критического напряжения определялось по формуле (1). В частности, для керамических материалов имеем оценки: при $l_{*1} = 10^{-10}\,м$, $\pm_{*1} = 10530\,МПа$; при $l_{*2} = 5 \cdot 10^{-9}\,м$, $\pm_{*2} = 1491\,МПа$; при $l_{*3} = 10^{-6}\,м$, $\pm_{*3} = 109{,}5\,МПа$. При расчетах по формуле (1) были использованы следующие значения коэффициентов [12]: $¥ = 0{,}15\ Дж/м^2$, $c = 2{,}5$, $¬ = 0{,}2$, $E = 10^5\ МПа$.

Отметим два вывода из полученных оценок. Первый, величина теоретической прочности на два порядка больше по сравнению со значением прочности лабораторного образца. Этот результат находится в согласии с известными в литературе оценками. Второй, в случае, когда в материале имеются малые дефекты (порядка нановеличин), наблюдается значительное, в пределах одного порядка, снижение прочности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 09-01-00513).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. С.-Петербург: Изд-во СПбГУ. 2004. 253с.
2. Robert A. Arutyunyan. Creep fracture of nonlinear viscoelastic media undergoing UV radiation // International Journal of Fracture. 2005. vol. 132. N1. P. L3-L8.
3. Кульков С.Н. Структура, фазовый состав и механические свойства наносистем на основе ZrO_2 // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10. N 3. С. 81-94.
4. Кульков С.Н., Масловский В.И., Буякова С.П., Никитин Д.С. Негуковское поведение пористого диоксида циркония при активной деформации сжатием // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 3. С. 38-42.
5. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921. vol. 221. P. 163-198.
6. Koster W., Franz H. Poisson’s ratio for metals and alloys // Metal Rev. 1961. vol. 6. N 21. P. 1-55.
7. Жуков А.М. О коэффициенте Пуассона в пластической области // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1954. N 12. С. 86-91.
8. Нотт Дж. Ф. Основы механики разрушения. М.: Металлургия. 1978. 257с.
9. Керштейн И.М., Клюшников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А. Основы экспериментальной механики разрушения. М.: Изд-во МГУ. 1989. 142с.
10. Разрушение / под ред. Г. Либовица. Т. 7: Разрушение материалов в композиционных материалах. Ч.1: Неорганические материалы (стекла, горные породы, композиты, керамики, лед). М: Мир. 1976. 634с.
11. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1975. 576с.
12. Справочник. Физические величины / под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232с.

Сведения об авторах:

Арутюнян Роберт Ашотович, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Арутюнян Александр Робертович, кандидат физ.-мат. наук, инженер, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, +7 (812) 4284164, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, e-mail: Robert.Arutyunyan@paloma.spbu.ru

ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Арутюнян Л. А., Торосян Д. Р.
Ереван, Армениа

Задачи с трещинами связаны с задачами определения напряженно-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, представляющих интерес в теоретических и практических вопросах прочности разнообразных конструкций, они стали предметом исследования многих авторов [2-6].

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

На прямоугольной декартовой системе координат (x, y) при $y \ge 0$ полуплоскость имеет упругие характеристики G_1 и ν_1, а при $y \le 0$ имеет упругие характеристики G_2 и ν_2 (G_1 и G_2 – модули сдвига материалов, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона).

Для решения задачи удобно использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x, y) с биполярными координатами (α, β) дается соотношением [1].

$$gx = \mathrm{sh}\alpha\,,\ gy = \sin\beta\,,\ ag = \mathrm{ch}\alpha + \cos\beta \qquad (1)$$

a - размерный параметр.

Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, в правой полу плоскости $\alpha > 0$, в левой $\alpha < 0$, ось 0y является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm a,\ y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней $\beta < 0$, отрезок (-a, a) является координатной линией $\beta = 0$.

Задачи решаются при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее ре шение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, можно представить через три гармонические функции, поскольку одна из них принимается произвольно. Пользуясь этой произвольностью, принимаем одну из функций равной тождественно нулю.

Приведем выражения перемещений U и V, напряжений σ_y и τ_{xy} через функцию Папковича-Нейбера [1]:

$$2GU(x,y) = -\frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial x}$$

$$2GV(x,y) = (3-4\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi_2(x,y)}{\partial y}$$

$$\sigma_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial y})\right] - y\frac{\partial^2 \Phi_2(x,y)}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial \Phi_2(x,y)}{\partial y}\right].$$

1. Пусть на участках граничной прямой y=0, а именно, на отрезке $|x| < a$

имеем трещину, а на участках $|x| > a$ имеем полный контакт материалов (рис.1).

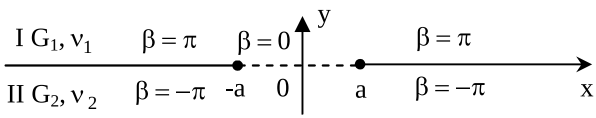


Рис.1

Рассмотрим смешанную краевую задачу, то есть на берегах трещины заданы касательные напряжения и нормальные перемещения.

$$\tau_{xy}^{(m)}(\alpha,0) = \tau_m(\alpha)\ ;\ \ V_m(\alpha,0) = V_m^{(0)}(\alpha) \qquad (3)$$

Предполагается, что функции $\tau_m(\alpha)$ и $V_m^{(0)}(\alpha)$ (m=1, 2) удовлетворяют условиям разложимости в интеграле Фурье.

На линии контакта имеем полное сцепление материалов, т.е. нормальное и касательное перемещения, так как нормальное и касательное напряжения равны:

$$U_1(\alpha,\pi) = U_2(\alpha,-\pi)\ ; \quad V_1(\alpha,\pi) = V_2(\alpha,-\pi)$$

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi) = \sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)\ ;\ \ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi) = \tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi) \qquad (4)$$

Подставляя в граничные условия (3) и (4) выражения (2) перемещений и напряжений через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)$ (m=1, 2) Папковича-Нейбера, мы приходим к следующей краевой задаче. При этом следует перейти от производных x и y к производным по α и β [1].

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[(1-2\nu_m)\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta) - \Phi_3^{(m)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=0} = \frac{a\tau_m(\alpha)}{ch\alpha + 1}$$

$$(3-4\nu_m)\Phi_2^{(m)}(\alpha,0) - \Phi_3^{(m)}(\alpha,0) = 2G_m V_m^{(0)}(\alpha) \quad (m=1,\ 2)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\pi}=\frac{G_1}{G_2}\left.\frac{\partial\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=-\pi} \qquad (5)$$

$$(3-4\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\pi)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\pi)=\frac{G_1}{G_2}\left[(3-4\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,-\pi)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,-\pi)\right]$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\right|_{\beta=\pi}=\left.\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\right|_{\beta=-\pi}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\right|_{\beta=\pi}=\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\right|_{\beta=-\pi}$$

где введены новые гармонические функции

$$\Phi_3^{(m)}(x,y)=\frac{\partial\Phi_0^{(m)}(x,y)}{\partial y}\quad (m=1,\ 2) \qquad (6)$$

Искомые функции (m = 1, 2; n = 2, 3) представим в виде интегралов Фурье.

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_n^{(m)}(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\beta+B_n^{(m)}(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\beta\right]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (5), мы приходим к системе восьми уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ (m=1,2; n=2, 3) с восьмью неизвестными.

После решения этих систем получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования:

$$A_2^{(m)}(\lambda)=\frac{2\left[\overline{V}_m(\lambda)-\overline{\tau}_m(\lambda)\right]}{\chi_m+1};\quad A_3^{(m)}(\lambda)=\frac{(\chi_m-1)\overline{V}_m(\lambda)-2\chi_m\overline{\tau}_m(\lambda)}{\chi_m+1};(m=1,\ 2)$$

$$B_2^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{\chi_1+\mu}\left[m_2(\lambda)-m_1(\lambda)-\mu m_3(\lambda)-\mu m_4(\lambda)\right]$$

$$B_2^{(2)}(\lambda)=\frac{1}{\mu\chi_2+1}\left[m_2(\lambda)+m_1(\lambda)+m_3(\lambda)-m_4(\lambda)\right] \qquad (8)$$

$$2B_3^{(1)}(\lambda)=\chi_1B_2^{(1)}(\lambda)-B_2^{(2)}(\lambda)+m_3(\lambda)-m_4(\lambda)$$

$$2B_2^{(2)}(\lambda)=\chi_2B_2^{(2)}(\lambda)-B_2^{(1)}(\lambda)-m_3(\lambda)-m_4(\lambda)$$

где

$$\overline{\tau}_m(\lambda)=\frac{ia}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_m(\alpha)e^{i\lambda\alpha}}{\mathrm{ch}\alpha+1}d\alpha;\quad \overline{V}_m(\lambda)=\frac{2G_m\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}V_m^{(0)}(\alpha)e^{i\lambda\alpha}d\alpha$$

(m=1,2)

$$m_2(\lambda)=\left[\mu\overline{V}_2(\lambda)-\overline{V}_1(\lambda)\right]\operatorname{cth}\lambda\pi \quad m_4(\lambda)=\left[\overline{\tau}_2(\lambda)-\overline{\tau}_1(\lambda)\right]\operatorname{cth}\lambda\pi \tag{9}$$

$$m_1(\lambda)=\left[\frac{(\chi_1-1)\overline{V}_1(\lambda)-2\chi_1\overline{\tau}_1(\lambda)}{\chi_1+1}+\frac{\mu(\chi_2-1)\overline{V}_2(\lambda)-2\mu\chi_2\overline{\tau}_2(\lambda)}{\chi_2+1}\right]\operatorname{th}\lambda\pi$$

$$m_3(\lambda)=\left[\frac{2\overline{V}_1(\lambda)+(\chi_1-1)\overline{\tau}_1(\lambda)}{\chi_1+1}+\frac{2\overline{V}_2(\lambda)+(\chi_2-1)\overline{\tau}_2(\lambda)}{\chi_2+1}\right]\operatorname{th}\lambda\pi$$

2. На участках граничной прямой y=0, а именно, на отрезках |x|>a имеем
трещину, а на участках |x|<a имеем полный контакт материалов (рис. 2).

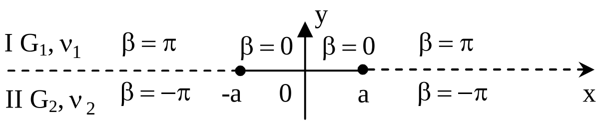


Рис. 2

Граничные и контактные условия в этом случае имеют вид:

$$\tau_{xy}^{(m)}(\alpha;(-1)^{m+1}\pi)=\tau_m(\alpha)\,;\ V_m(\alpha,(-1)^{m+1}\pi)=V_m^{(0)}(\alpha)\ \ (m=1,\,2)$$

$$U_1(\alpha,0)=U_2(\alpha,0)\ ;\ V_1(\alpha,0)=V_2(\alpha,0)$$

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,0)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,0)\,;\quad \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,0)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,0) \tag{10}$$

В этом случае $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)$ (m=1, 2 ; n=2, 3) ищем в следующем виде интегра лов Фурье:

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_n^{(m)}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda(\pi+(-1)^m\beta)+B_n^{(m)}(\lambda)\ (\pi+(-1)^m\beta)\right]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda \tag{11}$$

После удовлетворения краевым и контактным условиям (10), учитывая (1, 2, 11) для неизвестных величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ (m=1, 2; n=2, 3) получаем опять значения (8) и (9), только в этом случае функции $B_2^{(2)}(\lambda)$ и $B_3^{(2)}(\lambda)$ меняет знаки, а $\overline{\tau}_m(\lambda)$ (m=1,2) имеют следующие значения:

$$\overline{\tau}_m(\lambda)=-\frac{i\,a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_m(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha-1}e^{i\lambda\alpha}d\alpha$$

Дадим решение одной конкретной задачи, когда внешние условия, приложенные к берегам трещин, сводятся к загружению касательными условиями одинаковой постоянной интенсивности τ_0, а нормальные перемещения равны нулю.

Представляет интерес распределение напряжений на линии контакта и на берегах трещин.

В первом случае имеем следующие значения:

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)=0\,;$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi)=-\frac{a^2\tau_0}{\sqrt{x^2-a^2}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}$$

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha,0)=\left(-1\right)^m\frac{\chi_m-1}{\chi_m+1}\cdot\frac{x\tau_0}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (m=1,\ 2)$$

Во втором случае имеем следующие значения:

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,0)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,0)=0\,,$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(\alpha,0)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,0)=-\frac{a^2\tau_0}{\sqrt{a^2-x^2}\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)}$$

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha,(-1)^{m+1}\pi)=\left(-1\right)^m\frac{\chi_m-1}{\chi_m+1}\cdot\frac{a^3\tau_0}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

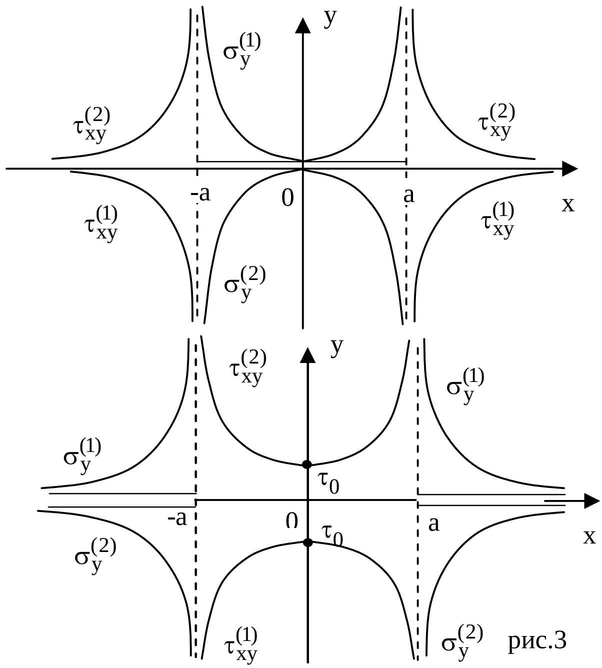


рис.3

На рис. 3 представлены эпюры напряжения на линии контакта и на бере гах трещин в первом и во втором случае

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401 с.
2. Попов Г.Я. Конструкция упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. - М.: Наука, 1982, 344 с.
3. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т.48. N48. Ст. 57-65.
5. Даштоян Л. Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости с двумя полубесконечными трещинами.// Мат. XII респ. конф. мол. уч. “Механика”, Ереван: 2003, с. 78-82.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. //Межд. Науч.-техн. конф. “Арх. и стр.”, 2008, Ереван: с. 34-37.

<u>Сведения об авторах:</u>

Арутюнян Левон Арсенович
к.ф.-м.н.; Институт механики НАН РА
Адрес: Ереван-19, пр. М.Баграмяна 24Б, т. 099-67-57-47

Торосян Давид Рубенович
к.ф.-м.н.; факультет мех.-мат, ЕГУ
Адрес: Ереван, Алек Манукян 1, т. 077-08-44-86

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ЗАТЯНУТОМ РЕЗЬБОВОМ СОЕДИНЕНИИ С ОТКЛОНЕНИЯМИ ПОЛОВИНЫ УГЛА ПРОФИЛЯ РЕЗЬБЫ

Бабаян С. А.

Степанакерт, НКР

В работе рассмотрено напряженное состояние и деформации витков резьбы, профиль которой имеет отклонение от номинала. В отличие от принятой расчетной схемы деформаций витков под действием равномерно распределенной нагрузки, предложены формулы для случая нагружения витков сосредоточенным усилием, которое имеет место для реальной резьбы с отклонениями угла профиля.

При расчете распределения усилий по виткам резьбовых соединений считают, что в начальный момент при нагружении соединений имеет место контакт по всей поверхности витков, деформируемых под воздействием распределенной нагрузки [1]. Такая схема расчета оправдана для идеальной резьбы, изготовленной без отклонения элементов.

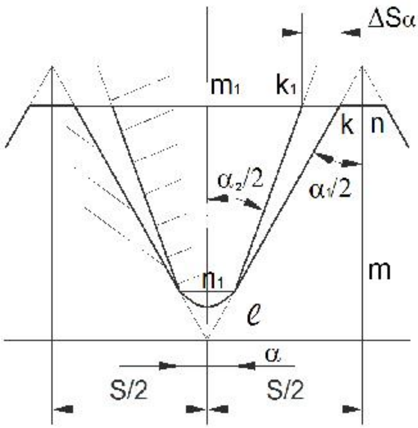


Рис. 1. Зазоры между витками
$\sim_1, \sim_2$ - углы профиля резьбы болта и гайки; S – шаг резьбы;
а – ширина среза вершины;

В то же время установлено, что на износостойкость поверхности витков конического резьбового соединения в числе ряда факторов существенное влияние оказывает также величина отклонения от номинала половины угла профиля. Максимальный износ в соединении типа “ниппель-муфта” имеет место при сочитании этих отклонений разного знака, т.к. в этом случае нарушаются условия контакта витков по всей поверхности [2]. Можно предположить, что по этой же причине изменится и напряженное состояние предвариотельно затянутого соединения, рассчитанное для витков с номинальными значениями половины угла профиля. Как видно из рис.1, в таком соеденении в начальный момент до затяжки образуется зазор ΔSα и поэтому нагружается верщина витка (тчк. l) Рассматривая трапеции *l к n m* и $l\ k_1\ n_1\ m_1$ (см. рис. 1), величину этого зазора можно определить по формуле

$$\Delta S_a = (\frac{S}{2} - a)(1 - \mathrm{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha_2}{2}) \qquad (1)$$

По мере затяжки соединения напряжения и деформации возрастают, что приводит к уменьшению зазора ΔSα. При полной компенсации зазора за счет деформации витки начнут контактировать по всей поверхности. В противном случае деформации витков следует расчитовать при воздействии сосредоточенной силы.

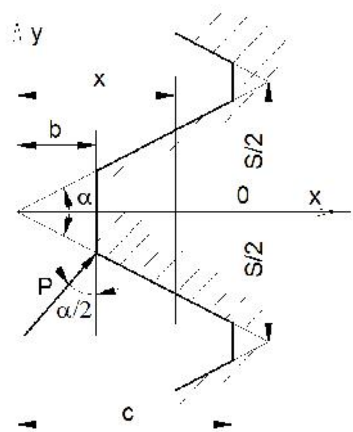


Рис. 2. Определение деформации витков

В работе [1] определены деформации изгиба и сдвига витков резбы, под воздействием равномерно распределенной нагрузки. Учтены так же поперечные деформации тела болта и гайки. Определим те же деформации в случае, когда нагрузка приложена к верщине витка (рис. 2).

Учитывая, что $(\sim_1/2)(\sim_2/2) \le 1^0$ в практических расчетах разницей в углах наклона прямых lk_1 и lk (рис.1) можно пренебречь и считать, что нагрузка Р перпендикулярна к боковой стороне витка. В этом случае вертикальное смещене точки l вследствие деформации изгиба найдем из интеграла Мора

$$¢_u = \int_a^c \frac{M_x M_{x1}}{EJ_x}\, dx, \qquad (2)$$

где

M_x – изгибающий момент в сечении х ;

M_{x1} – момент единичной силы в том же сечении;

Е – модуль упругости;

J_x - момент инерции сечения единичной ширины;

Из рис. 2 получим:

$$M_x = P\left[(x-b)\cos\sim/2 - Pb\sin\sim/2)\cdot \mathrm{tg}\frac{\sim}{2}\right]$$

$$M_{x1} = 1(x-b) \qquad (3)$$

$$J(x) = \frac{2}{3}x^3 \mathrm{tg}^3\frac{\sim}{2}$$

Раскрыв интеграл (2) с учетом (3), получим:

$$¢_u = \frac{3P}{2E\mathrm{tg}^3\sim/2}\left[(\ln\frac{c}{b} + \frac{2b}{c} - \frac{b^2}{2c^2} - 1{,}5)\cos\frac{\sim}{2} - (0{,}5 - \frac{b}{c} + \frac{b^2}{2c^2})\sin\frac{\sim}{2})\mathrm{tg}\frac{\sim}{2}\right] \qquad (4)$$

В этом выражении P – усилие на виток, отнесенное к длине окружности контакта витков, проходящей через вершину l.

Вертикальное смещение точки l вследствие деформации среза найдем также из интеграла Мора

$$¢_c = \frac{K}{G}\int_c^c \frac{P_в \cdot P_1}{F_x}\, dx, \qquad (5)$$

где

K – безразмерный коэффициент, зависящий от распределения касательных напреэяжений в сечении клина, К=6/5 [1];

G - модуль упругости сдвига;

$P_в$ – вертикальная составляющее усилия P, $P_в = P\cos\sim/2)$ (см. рис. 2);

P_1 - единичная сила, P_1=1;

F_x – площадь поперечного сечения х, $F_x = 2xtg\frac{\sim}{2}$

Раскрыв интеграл (4), ролучим

$$¢_c = K(2Gtg\frac{\sim}{2})^{-1} P\cos\frac{\sim}{2}\ln\frac{c}{b} \qquad (6)$$

Полученные выражения (1, 4, 6) были использованы для определения остаточного зазора между витками после деформации затянутого соединения “ниппель-муфта” типа ЗШ-146 по ГОСТ 5286-75 “Замки для бурильных труб”. Усилие затяжки принимали таким, чтобы в основании ниппеля возникали напряжения $\pm = 0{,}5\pm_s$, где $\pm_s$ - предел текучести материала ниппеля. Усилие на первый виток определяли по данным работы [3].

В результате установлено, что средняя величина начального зазора между витками в 2…3 раза превышает суммарную деформацию витков. Поэтому в реальных резьбовых соединениях с разнозначными отклонениями половины угла профиля деформации витков следует определять по нагрузке, сосредоточенной в вершине витка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И.А.Расчет резьбовых соединений. М.: Оборонгиз. 1959.
2. Бабаян С.А. Оптимизация отклонений параметров конической резьбы для уменьшения износа витков. // Вестник ГИУА. Сер. “Моделирование, оптимизация, управление”, - Ереван, 2007. – Вып. 10, т.1.- С. 101-106.
3. Бабаян С.А. и др. Распределение нагрузки по виткам конической резьбы //Химическое и нефтяное машиностроение. М.:, 1972. – N1. -–С. 9-11.

<u>Сведения об авторе:</u>

Бабаян Семен Амаякович, д.т.н., академик РАЕН, директор Арцахского научного центра. Тел. (097) 28 03 06,

e-mail: artsakhgk@rambler.ru

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ (ИНТЕРФЕЙСНЫЕ) ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРОМАГНЕТИКОВ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ

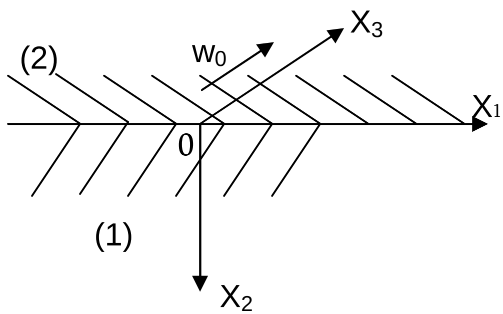
Багдасарян А.Д., Гараков В. Г.
Ереван, Армения

Имеются многочисленные исследования по распространению упругих волн в пьезоактивной среде на основе квазистатического приближения [1-5]. Однако известен ряд задач для пьезоэлектрических сред гексагональной симметрии класса 6мм, для которых получение точного решения не составляет особого труда по сравнению с квазистатическим приближением [6, 7].

В этом случае, точное решение позволяет оценить пределы применимости приближенных методов. В настоящей статье приводится решение задачи контакта двух полупространств на основе точной линейной теории взаимодействия электромагнитного поля и упругой волны для пьезоэлектрических материалов класса 6мм.

Сравнивается с известным решением этой же задачи на основе квазистатического приближения. Показывается возможность исследования электромагнитной волны в зависимости от параметра электромагнитной связи.

1. Пусть два полупространства из пьезоматерилов класса 6мм контактируют вдоль плоскости $X_2 = 0$



Применяется система единиц обозначения статьи [1]

Уравнения

$$c_{44}^{(i)}\Delta W_i - e_{15}^{(i)}\left(\frac{\partial E_1^{(i)}}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2^{(i)}}{\partial x_2}\right)=\rho_i\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}$$

$$e_{15}^{(i)}\Delta W_i + \varepsilon_{11}^{(i)}\left(\frac{\partial E_1^{(i)}}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2^{(i)}}{\partial x_2}\right)=0 \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial E_2^{(i)}}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1^{(i)}}{\partial x_2}=-\mu_o\frac{\partial H_3^{(i)}}{\partial t} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial H_3^{(i)}}{\partial x_2}=e_{15}^{(i)}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_1\partial t}+\varepsilon_{11}^{(i)}\frac{\partial E_1^{(i)}}{\partial t},\quad \frac{\partial H_3^{(i)}}{\partial x_1}=-e_{15}^{(i)}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_2\partial t}-\varepsilon_{11}^{(i)}\frac{\partial E_2^{(i)}}{\partial t} \qquad (1.3)$$

Здесь индекс (1) относится к полуплоскости $X_2 > 0$, индекс (2) – к $X_2 < 0$, w_i (в отличие от [1]) упругие перемещения в направления оси OX_3, соответственно для плоскости (i = 1) и верхней полуплоскости.
функнциональные связи (материальные уравнения)

$$\sigma_{32}^{(i)}=c_{44}^{(i)}\frac{\partial W_i}{\partial x_2}-e_{15}^{(i)}E_2^{(i)},\quad \sigma_{31}^{(i)}=c_{44}^{(i)}\frac{\partial W_i}{\partial x_1}-e_{15}^{(i)}E_1^{(i)} \qquad (1.4)$$

$$D_i^{(i)}=e_{15}^{(i)}\frac{\partial W_i}{\partial x_1}+\varepsilon_{11}^{(i)}E_1^{(i)},\quad D_2^{(i)}=e_{15}^{(i)}\frac{\partial W_i}{\partial x_2}+\varepsilon_{11}^{(i)}E_2^{(i)},\quad B_3=\mu_o H_3 \qquad (1.5)$$

Уравнения (1.1) - (1.3), согласно [1], приводятся к более простому виду

$$\Delta W_i=\frac{1}{c^2 t_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2},\quad \Delta H_3^{(i)}=\frac{1}{c_i^2}\frac{\partial^2 H_3^{(i)}}{\partial t^2} \qquad (1.6)$$

где Δ – двухмерный оператор Лапласа,

$$c_{ti}^2=\frac{\vec{c}_{44}^{(i)}}{\rho_i}=\frac{c_{44}^{(i)}}{\rho_i}(1+\chi_i),\quad c_i^2=\frac{1}{\varepsilon_{11}^{(i)}\mu_0},\quad \chi_i=\frac{\left[e_{15}^{(i)}\right]^2}{c_{44}^{(i)}\varepsilon_{11}^{(i)}} \qquad (1.7)$$

χ_i – коэффициент электромеханической связи.

На линии раздела $x_2 = 0$ можно рассматривать различные граничные условия. Во всех этих случаях должы быть удовлетворены условия затухания возмущений на бесконечности

$$\lim_{x_2\to\infty} W_1=0,\quad \lim_{x_2\to-\infty} W_2=0,\quad \lim_{x_2\to\infty} H_3^{(1)}=0,\quad \lim_{x_2\to-\infty} H_3^{(2)}=0 \qquad (1.8)$$

Решение уравнений (1.6) представляются в виде

$$W_i = f_i(x_2)\exp i(\omega t - k_3 x_1)$$
$$H_3^{(i)} = g_i(x_2)\exp i(\omega t - k_1 x_1) \qquad (1.9)$$

Подстановка (1.9) в уравнение (1.6) приводит к решению обыкновенных диффренциальных уравнений относительно функций f_i, g_i.

Решение указанных уравнений, удовлетворяющих условиям затухания (1.8),
имеют вид

$$f_1(x_2) = A_i e^{-k\sqrt{1-\eta^2}\cdot x_2}, \quad f_2(x_2) = A_2 e^{k\sqrt{1-\theta\eta^2}\cdot x_2}$$
$$g_1(x_2) = B_1 e^{-k\sqrt{1-\theta_1\eta^2}\cdot x_2}, \quad g_2(x_2) = B_2 e^{k\sqrt{1-\theta_2\eta^2}\cdot x_2} \qquad (1.10)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\eta^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_{t_1}^2}, \quad \theta = \frac{c_{t_1}^2}{c_{t_2}^2}, \quad \theta_i = \frac{c_{t_1}^2}{c_{t_2}^2} \qquad (1.11)$$

Если не нарушая общности и для определенности принять $\theta \le 1$, то решения (1.10) будут удовлетворять условиям затухания (1.8) при выполнении условий

$$0 < \eta^2 < 1 \qquad (1.12)$$

Компоненты электрического поля определяются из (1.3) с использованием (1.9), (1.10) следующим образом:

$$E_1^{(1)} = \frac{ik}{\varepsilon_{11}^{(1)}}\left(\frac{\sqrt{1-a_1\eta^2}}{\omega}B_1 e^{-k\sqrt{1-\theta_1\eta^2}\cdot x_2} + e_{15}^{(1)}A_1 e^{-k\sqrt{1-\eta^2}\cdot x_2}\right)\exp i(\omega t - kx_1)$$

$$E_1^{(2)} = -\frac{ik}{\varepsilon_{11}^{(2)}}\left(\frac{\sqrt{1-a_2\eta^2}}{\omega}B_2 e^{k\sqrt{1-\theta_2\eta^2}\cdot x_2} - e_{15}^{(2)}A_2 e^{k\sqrt{1-a\eta^2}\cdot x_2}\right)\exp i(\omega t - kx_1) \qquad (1.13)$$

$$E_2^{(1)} = \frac{k}{\varepsilon_{11}^{(1)}}\left(\frac{1}{\omega}B_1 e^{-k\sqrt{1-a_1\eta^2}\cdot x_2} + e_{15}^{(1)}\sqrt{1-\eta^2}\cdot A_1 e^{-k\sqrt{1-\eta^2}\cdot x_2}\right)\exp i(\omega t - kx_1)$$

$$E_2^{(2)} = \frac{k}{\varepsilon_{11}^{(1)}}\left(\frac{1}{\omega}B_2 e^{k\sqrt{1-a_2\eta^2}\cdot x_2} - e_{15}^{(2)}\sqrt{1-\theta\eta^2}\cdot A_2 e^{k\sqrt{1-\theta\eta^2}\cdot x_2}\right)\exp i(\omega t - kx_1)$$

С помощью выражений W_i, $H_3^{(i)}$, $E_1^{(i)}$, $E_2^{(i)}$ определяются также $\sigma_{32}^{(i)}$, $\sigma_{31}^{(i)}$, $D_1^{(i)}$, $D_2^{(i)}$ из (1.4), (1.5)

2. Условия полного (жесткого) контакта. Считается, что оба полупространства (при $x_3 = 0$) находятся при полном как механическом, так и электрическом контакте

$$\omega_i = \omega_2, \quad \sigma_{32}^{(1)} = \sigma_{32}^{(2)}, \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \; (2.1)$$

Подстановка решений, приведенных в пункте 1 граничных условий (2.1), приводит к системе однородных уравнений относительно произвольных постоянных A_i, B_i. Равенство нулю детерминанта этой системы дает дисперсионное уравнение задачи. В квазистатической (приближении) постановке задача полного контакта двух полупространств из пьезоэлектрических материалов класса 6 мм была исследована в [2] (Maerfeld – Tournios waves). Эта же задача в квазистатической постановке решена в [6]. Было бы интересно сравниванием точного решения установить, насколько приближенно квазигиперболическая постановка определяет электромагнитное поле.

3. Условие скользящего контакта. Считается, что полупространства могут свободно скользить друг относительно друга

$$\sigma_{32}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{32}^{(2)} = 0 \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad D_2^{(1)} = D_2^{(2)} \quad \text{при} \quad x_2 = 0 \qquad (3.1)$$

Задачи контакта двух пьезоэлектрических полупространств с граничными условиями (3.1) в квазистатической постановке рассматривались в [7, 8].

Постановка решений (1.9), (1.10), (1,39) с учетом функциональной связи (1.4), (1.5) приводит к следующей алгебраической системе уравнений относительно системы произвольных потоянных

$$\begin{aligned}
&(1+\chi_1)\sqrt{1-\eta^2}\cdot A_1 + \gamma_1 B_1 = 0 \\
&(1+\chi_1)\sqrt{1-\theta\eta^2}\cdot A_2 - \gamma_2 B_2 = 0 \\
&\frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(1)}} A_1 + \frac{e_{15}^{(2)}}{\varepsilon_{11}^{(2)}} A_2 - \frac{\sqrt{1-\theta_1\eta^2}}{\omega\varepsilon_{11}^{(1)}}\cdot B_1 - \frac{\sqrt{1-\theta_2\eta^2}}{\omega\varepsilon_{11}^{(2)}}\cdot B_2 = 0 \\
&B_1 = B_2
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

где $\gamma_i = \dfrac{e_{15}^{(i)}}{(\omega\varepsilon_{11}^{(iI}\cdot c_{44}^{(i)})}$

Равенство нулю детерминанта системы (3.2) приводит к следующему уравнению, определяющему фазовую скорость волны, локализованной в окрестности плоскости раздела $x_3 = 0$:

$$\left(\sqrt{1-\theta_1\eta^2} + \varepsilon_p\sqrt{1-\theta_2\eta^2}\right)\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\theta\eta^2} - \frac{\chi_1}{1+\chi_1}\sqrt{1-\theta\eta^2} - \frac{\varepsilon_p\chi_2}{1+\chi_2}\sqrt{1-\eta^2} = 0 \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) в приближении $\bar{\ }_1|^2 << 1$, $\bar{\ }_2|^2 << 1$ совпадает с уравнением системы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Yang S.S. Bleustein-Gulyaev. Waves in piezoelektromagnetic materials. Intern. Journ of Applied Elektromagnetic and Mechanics. 2000, 12, p 235-240.

2. Maerfeld C., Tounois P., Appl. Phys. Lett. 1971, v. 19, N4, p 117- 121. Pure shear ealastic surfase wave quided by the interface of two semi-infinite media.

3. Baghdasaryan A.D., Belubekyan M.V., On The Problem of Reflection of Shear Wave from a Boundary of Piezoelectric Media of Class 6mm. Prec. of the 8th Interneational Congress on Thermal Stresses TS 2009 University of Illinois at Urbana- Champain, USA CD. 4p.

4. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве при гексагональной симетрии. //В сб. : «Проблемы динамики взаимодействия сред» Ереван: Институт Механики НАН РА 2008. С. 125-130.

5. Багдасарян А.Д. К задаче распространения сдвиговых электроупругих волн в слое.//Сборник научных трудов международных конференций. Актуальные проблемы механики сплошной среды. Том. 1. 4 – 8 октября, Дилижан, Армения.

6. Li Sh. The elektromagnetic – acoustic wave in a piezoelektric medium. The Bleustein-Gulyaev mode. Journ. Appl. Phys. 1996, v 80 (9), N1, p 5264 – 5269.

7. Аветисян А.С., Маргарян Д.М. Электроупругие поверхности волы сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. //Изв. НАН Армении.Механика. 1994. Т. 47. N 3-4. С. 31-36.

8. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков. //Изв. НАН Армении .Механика 1994, 47, N 3 – 4, С. 78 – 82.

Сведения об авторах:

Багдасарян Армен Дорвардович

Соискатель Института механики НАН Армении,
тел (+37491) 415235,
E-mail: armenb2000@yahoo.com

Гараков Владимир Герасимович

К.ф.м.н, научный сотрудник Института механики НАН Армении,
тел (+37493)338166,
E-mail: garakow@yandex.ru

КОЛЕБАНИЯ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ТОРЦАМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Багдасарян Г.Е., Марухян С.А.
Ереван, Армения

Имеются многочисленные исследования, посвященные колебаниям цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1–4] и в обзорной статье [5]. В этих исследованиях, в основном, рассмотрен случай шарнирно опертой цилиндрической оболочки.

В настоящей работе рассмотрена задача колебаний защемленной по торцам, круговой цилиндрической оболочки конечной длины, частично заполненной несжимаемой жидкостью. Исследована зависимость частоты колебаний рассматриваемой гидроупругой системы от глубины заполнения, и показано, что указанная зависимость имеет экстремальный характер (существует точка минимума, зависящая от числа волн n по окружности). Как и в случае отсутствия жидкости, частота колебаний имеет точку минимума по n и расположение этой точки уменьшается с увеличением глубины заполнения.

Рассмотрим колебания цилиндрической оболочки конечной длины l, частично заполненной несжимаемой жидкостью глубины b $(b \le l)$. Будем пользоваться цилиндрическими координатами (α, r, θ), совместив полярную ось α с осью оболочек.

За основу принимаются следующие предположения:

а) гипотеза Кирхгофа – Лява о недеформируемых нормалях;

б) общеизвестные упрощения теории оболочек с большим показателем изменяемости;

в) жидкость совершает потенциальное движение;

г) волновое движение на свободной поверхности жидкости слабо влияет на колебание оболочки[6,7].

На основе принятых предположений система уравнений колебания оболочки имеет вид [8]

$$D\Delta^2 w - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z,$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}. \tag{1.1}$$

В системе (1.1) w –прогиб, Φ –функция напряжений, R –радиус, h –толщина, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала, Δ –двумерный оператор Лапласа, Z – нормально приложенная внешняя нагрузка.

В случае рассматриваемой задачи для Z имеем [6]:

$$Z = \begin{cases} Z_0 + \rho_0 g\left(b-\alpha\right)\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} & \text{при} \quad 0<\alpha<b \\ 0 & \text{при} \quad b<\alpha<l. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь Z_0 –возмущенное давление жидкости, g –ускорение силы тяжести, ρ_0 –плотность жидкости.

Из интеграла Коши - Лагранжа имеем

$$Z_0 = -\rho_0 \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{r=R}, \tag{1.3}$$

где φ -потенциальная функция возмущенного движения жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0, \tag{1.4}$$

в области, занятой жидкостью, и следующим краевым условиям на границе этой области[5]:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\alpha=b} = 0 \tag{1.5}$$

Предположим, что оболочка защемлена по торцам, которые свободно смещаются по направлению оси α. То есть

$$w = 0, \ \frac{\partial w}{\partial\alpha} = 0 \ \text{при} \ \alpha = 0, \ \alpha = l$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad \text{при} \ \alpha = 0, \ \alpha = l \tag{1.6}$$

Тогда решение системы (1.1), удовлетворяющее условиям (1.6), можно представить в форме

$$\begin{aligned} w &= W_0\left(t\right)\cos n\theta \sin^2 \lambda_m\alpha, \\ \Phi &= \Phi_0\left(t\right)\cos n\theta \ \sin^2 \lambda_m\alpha, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\lambda_m = \pi m / l$, m –число полуволн изогнутой поверхности вдоль образующей, n – число волн в окружном направлении, $W_0(\mathrm{t})$ и $\Phi_0(\mathrm{t})$ – искомые функции.

Гармоническую функцию φ представим в виде

$$\varphi = \cos n\theta \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} A_s(t) I_n(\lambda_s r) \sin \lambda_s \alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j(t) \operatorname{sh} \alpha_{nj} \alpha + D_j(t) \operatorname{ch} \alpha_{nj} \alpha \right] J_n(\alpha_{nj} r) \right\}, \qquad (1.8)$$

где I_n, J_n – функции Бесселя чисто мнимого и действительного аргумента первого рода порядка n; A_s, C_j, D_j – некоторые величины, которые определяются из поверхностных условий (1.5), $\lambda_s = \pi s / l$, α_{nj} – корни следующего уравнения:

$$J_{n-1}(\alpha_{nj} R) + J_{n+1}(\alpha_{nj} R) = 0$$

Подставляя (1.8) и (1.7) в (1.5), путем ортогонализации получим:

$$A_s(t) = \frac{2\Theta_{ms}}{l\lambda_s I_n'(\lambda_s R)} \frac{\partial W_0}{\partial t}, \qquad (1.9)$$

$$C_j(t) = -\frac{4\sum\limits_{s=0}^{\infty} \dfrac{\lambda_s}{\alpha_{nj}{}^2 + \lambda_s{}^2} \Theta_{ms}}{\alpha_{nj} R l \left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R^2}\right) J_n(\alpha_{nj} R)} \frac{\partial W_0}{\partial t},$$

$$D_j(t) = \frac{4\sum\limits_{s=0}^{\infty} \dfrac{\lambda_s \operatorname{sh} \alpha_{nj} b - \alpha_{nj} \sin \lambda_s b}{\alpha_{nj}{}^2 + \lambda_s{}^2} \Theta_{ms}}{\alpha_{nj} R l \left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R^2}\right) J_n(\alpha_{nj} R) \operatorname{ch} \alpha_{nj} b} \frac{\partial W_0}{\partial t}$$

где

$$\Theta_{ms} = \frac{2((-1)^s - 1)\lambda_m{}^2}{\lambda_s(\lambda_s{}^2 - 4\lambda_m{}^2)}.$$

В силу (1.9) и представления (1.8), из (1.3) находим следующие выражения для возмущенного давления жидкости:

$$Z_0 = -\frac{4\rho_0}{l}\cos n\theta \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left[B_s \sin\lambda_s \alpha + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left(C_{sj} \,\mathrm{sh}\, \alpha_{nj}\alpha + D_{sj}(s,\, j)\,\mathrm{ch}\,\alpha_{nj}\alpha \right) \right] \right\} \frac{d^2 W_0}{dt^2}. \quad (1.10)$$

Здесь

$$B_s = \frac{I_n(\lambda_s R)}{\lambda_s\left[I_{n+1}(\lambda_s R) + I_{n-1}(\lambda_s R)\right]}\Theta_{ms},$$

$$C_{sj} = -\frac{\lambda_s}{\alpha_{nj} R l \left(\alpha_{nj}{}^2 + \lambda_s{}^2\right)\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R^2}\right)}\Theta_{ms}, \quad (1.11)$$

$$D_{sj} = \frac{\lambda_s \,\mathrm{sh}\,\alpha_{nj} b - \alpha_{nj} \sin\lambda_s b}{\alpha_{nj} R l \left(\alpha_{nj}{}^2 + \lambda_s{}^2\right)\left(1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nj}^2 R^2}\right)\mathrm{ch}\,\alpha_{nj} b}\Theta_{ms}.$$

На основе вариационного метода Бубнова – Галеркина, с учетом (1.7), из второго уравнения системы (1.1), для искомой функции $\Phi_0(\mathrm{t})$ будем иметь

$$\Phi_0(\mathrm{t}) = \frac{Eh}{R}\frac{4\lambda_m^2}{\left[2\left(\dfrac{n}{R}\right)^4 + \left(4\lambda_m{}^2 + \dfrac{n^2}{R^2}\right)^2\right]}W_0(\mathrm{t}).$$

Таким образом, все искомые величины выражаются через функции $W_0(\mathrm{t})$.

Из первого уравнения системы (1.1), путем ортогонализации, для определения $W_0(\mathrm{t})$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(1 + M_{sj}\right)\frac{d^2 W_0}{dt^2} + \left(\Omega^2(m,n) + b_{ks}\right)W_0 = 0, \quad (1.12)$$

Здесь

$$\Omega^2(m,n) = \frac{D}{3h\rho}\left[2\left(\frac{n}{R}\right)^4 + \left(\frac{n^2}{R^2} + 4\lambda_m^2\right)^2 + \right.$$

$$+\frac{12(1-\nu^2)}{R^2h^2}\left(2\lambda_{\text{m}}\right)^2\left[2\left(\frac{n}{R}\right)^4+\left(\frac{n^2}{R^2}+4\lambda_{\text{m}}^2\right)^2\right]^{-1}\Bigg],$$

$$b_{mn}=\frac{\rho_0 g n^2}{3\rho h l R}\frac{12\lambda_m^2 b^2-16\sin^2\lambda_m b-\cos^2 2\lambda_m b}{8\lambda_m^2}, \tag{1.13}$$

$$M_{sj}=\frac{8\rho_0}{3\rho h l}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left[B_s\frac{\left(2\lambda_s^2\sin^2\lambda_m b-4\lambda_m^2\right)\cos\lambda_s b+4\lambda_m^2-2\lambda_m\lambda_s\sin 2\lambda_m b\sin\lambda_s b}{2\lambda_s\left(4\lambda_m^2-\lambda_s^2\right)}+\right.\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left(C_{sj}\frac{\left(2\alpha_{nj}\sin^2\lambda_m b+4\lambda_m^2\right)\operatorname{ch}\alpha_{nj}b-4\lambda_m^2\text{-}2\lambda_m\alpha_{nj}\operatorname{sh}\alpha_{nj}b\sin 2\lambda_m b}{2\alpha_{nj}\left(\alpha_{nj}{}^2+4\lambda_m{}^2\right)}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+D_{sj}\frac{\left(\alpha_{nj}{}^2+4\lambda_{\text{m}}^2\right)\operatorname{sh}\alpha_{nj}b-2\lambda_m\alpha_{nj}\operatorname{ch}\alpha_{nj}b\sin 2\lambda_m b+\alpha_{nj}{}^2\operatorname{sh}\alpha_{nj}b\cos 2\lambda_m b}{2\alpha_{nj}\left(\alpha_{nj}{}^2+4\lambda_m{}^2\right)}\right)\right]\right\},$$

где $\Omega\left(m,n\right)$ – частота собственных поперечных колебаний оболочки, b_{mn} – коэффициенты гидростатического давления жидкости, M_{sj} –коэффициенты присоединенных масс.

Решение системы (1.12) представим в виде

$$W_0(t)=e^{i\omega t}, \tag{1.14}$$

где ω –частота собственного колебания оболочки.

Подставляя (1.14) в (1.12), для определения частоты собственного колебания оболочки заполненной жидкостью, получим

$$\omega_{mn}^2=\frac{\Omega^2\left(m,n\right)+b_{mn}}{1+M_{sj}}. \tag{1.15}$$

На основе (1.15) с учетом (1.13) и (1.11) произведено вычисление значений частот колебаний оболочки, в случае «дюралюминиевая оболочка – вода» $c_t=5100\text{м}/\text{сек}$, $\rho/\rho_0=2.7$, $\nu=0.3$. Значения ω_{mn} в зависимости от b/l приведены в табл.1. при $m=1$, $R=2\text{м}$, $l=\pi R$, $h=10^{-3}\text{м}$ и различных n.

Таблица.1

b/l \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1471.9	1133.1	600.92	323.6	195.08	129.16	92.0742	70.2306	57.7985	52.0869	51.5124	54.7677
0.1	211.632	296.72	221.54	148.42	103.6	76.042	58.45	47.2044	40.6226	37.9421	38.6325	42.0713
0.2	55.0273	75.961	56.023	37.554	26.522	19.871	15.7211	13.1912	11.9009	11.6808	12.3978	13.8986
0.3	26.0545	34.788	24.872	16.348	11.479	8.7368	7.26931	6.68324	6.75264	7.30294	8.1994	9.35302
0.4	16.2032	21.109	14.821	9.6926	6.9515	5.6835	5.37676	5.7088	6.44143	7.42426	8.57635	9.85685
0.5	11.9175	15.305	10.666	7.0435	5.3344	4.8979	5.26671	6.10188	7.20242	8.47164	9.86465	11.3597
0.6	9.8662	12.602	8.7876	5.9357	4.8541	4.9739	5.78546	6.96288	8.35339	9.89136	11.547	13.3051
0.7	8.9054	11.379	7.9815	5.5597	4.9181	5.4539	6.61117	8.09192	9.77306	11.6036	13.5596	15.6284
0.8	8.5272	10.916	7.7197	5.5581	5.2589	6.13937	7.609	9.39129	11.3792	13.5282	15.8169	18.233
0.9	8.4331	10.797	7.6964	5.7172	5.7065	6.88778	8.6466	10.7213	13.0137	15.4826	18.1072	20.875
1	8.42634	10.773	7.7341	5.9111	6.1545	7.59867	9.61604	11.9568	14.5286	17.2921	20.2267	23.3196

Из табл.1 видно, что

а) присутствие жидкости приводит к существенному уменьшению частоты колебаний;

б) частота колебаний в зависимости от глубины заполнения имеет экстремальный характер (существует точка минимума, зависящая от числа волн n по окружности). Как и в случае отсутствия жидкости, частота колебаний имеет точку минимума по n и расположение этой точки уменьшается с увеличением глубины заполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буйвол В.Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев: Наукова думка, 1975, 192с.
2. Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек: Л.: ”Судостроение”. 1970, 356с.
3. Гузь А.Н., Кубенко Б.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек: Методы расчета оболочек. Киев.: Наук. Думка, 1982. Т.5. 400с.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320с.
5. Кубенко В. Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи динамики упругих оболочек, частично заполненных жидкостью. // Прикладная механика. 2000 т. 36 № 4.
6. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. //Докл. АН АрмССР. 1965 XI, № 4.
7. Mixon John S., Herr Robert W. An investigation of the vibration characteristics of pressurized thin-walled circular cylinders partly filled with liquid. Techn. Rept. NASA, Nr. R – 145, 1962.
8. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М: Гостехиздат, 1949.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН РА, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики,
Тел.: (374 10) 55 29 64
E-mail: Gevorgb@rau.am

Марухян Сатик Арамовна – лаборант Института механики НАН Армении
Тел.: (374 93) 37 25 04
E-mail: satineh.marukhyan@gmail.com

ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Белубекян В.М., Чил-Акопян Э.О.

Ереван, Армения

В статье [1] была установлена аналогия между задачами локализованных колебаний [2] и локализованной неустойчивости сжатой пластинки. В дальнейшем задачам локализованной неустойчивости был посвящен ряд исследований [3-6].

В настоящей работе исследуется задача, локализованной в окрестности свободного края, неустойчивости пластинки.

Рассматривается полубесконечная пластинка-полоса с параллельными полубесконечными шарнирно-закрепленными краями. Определяется значение минимальной критической нагрузки в зависимости от коэффициента, характеризующего упругое основание.

1.Постановка задач устойчивости прямоугольных пластин, предварительно сжатых по кромкам и лежащих на упругом основании, приводится в монографии [7]. Обзор последующих работ по устойчивости пластин на упругом основании дается в монографиях [8-9].

Предполагается, что упругая тонкая пластинка в декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) занимает область $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. По сторонам $y = 0, b$ пластинка сжата равномерно распределенной нагрузкой P. Уравнение устойчивости пластинки, скрепленной с упругим основанием, имеет вид [7] по модели Винклера.

$$D\Delta^2 w + P\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4k^4 w = 0,\ D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \qquad (1.1)$$

Пластинка по сторонам $y = 0, b$ шарнирно закреплена:

$$w = 0, \partial^2 w / \partial y^2 = 0. \qquad (1.2)$$

На кромке $x = 0$ заданы условия свободного края.

$$M_1 = 0,\ \tilde{N}_1 = 0, \qquad (1.3)$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ¬\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,,\ \ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - ¬)\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0\,. \qquad (1.4)$$

Требуется найти нетривиальное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.4) и условию затухания колебаний пластинки на бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty} w = 0\,. \qquad (1.5)$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), представляется в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)\sin ª_n y\,,\ \ ª_n = n® / b\,. \qquad (1.6)$$

Подстановка (1.6) в (1.1) приводит к следующей последовательной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$W_n^{IV} - 2ª_n^2 W_n^{II} + ª_n^4(1 + ¶_n^2 - ¦_n^2)W_n = 0\,, \qquad (1.7)$$

где

$$¶_n^2 = \frac{4k^4}{Dª_n^4}\,,\ \ ¦_n^2 = \frac{P}{Dª_n 2}\,. \qquad (1.8)$$

При условии:

$$¶_n^2 < ¦_n^2 < 1 + ¦_n^2\,, \qquad (1.9)$$

решение уравнения (1.7), удовлетворяющее условию затухания (1.5), будет иметь вид:

$$W_n = C_1 e^{-p_1 ª_n x} + C_2 e^{-p_2 ª_n x}\,, \qquad (1.10)$$

где

$$p_1 = (1 + \sqrt{¦_n^2 - ¶_n^2})^{1/2}\,,\ \ p_2 = (1 + \sqrt{¦_n^2 - ¶_n^2})^{1/2}\,. \qquad (1.11)$$

2. Условия свободного края (1.4), с учетом (1.6), будут следующими:

$$W_n^{II} - ¬ª_n^2 W_n = 0\,,\ \ W_n^{III} - (2 - ¬)ª_n^2 W_n^{I} = 0 \ \text{при}\ x = 0\,. \qquad (2.1)$$

Подстановка (1.10) в граничные условия (2.1) приводит к следующей последовательной системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$(p_1^{\,2} - ¬)C_1 + (p_2^{\,2} - ¬)C_2 = 0\,, \qquad (2.2)$$

$$p_1(p_1^{\,2} - 2 + ¬)C_1 + p_2(p_2^{\,2} - 2 + ¬)C_2 = 0$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.2) дает уравнение, которое определяет критическую нагрузку. Указанное уравнение после некоторых преобразований принимает вид [1]:

$$K(¦) \equiv (p_1 - p_2)K_1(¦) = 0\,, \qquad (2.3)$$

где

$$K_1(¦) = p_1^{\,2} p_2^{\,2} + 2(1-¬)\,p_1 p_2 - ¬^{\,2}\,. \qquad (2.4)$$

Из равенства $p_1 - p_2 = 0$ следует, что $¦_n^{\,2} = ¶_n^{\,2}$ или $P = 4k^4 ª_n^{-2}$. Однако нетрудно проверить, что значению $¦_n^{\,2} = ¶_n^{\,2}$ соответствует тривиальное решение $w = 0$. Следовательно, критическая нагрузка $(¦_n^{\,2})$ должна быть определена из решения уравнения:

$$K_1(¦) = 0\,. \qquad (2.5)$$

Функция $K_1(¦)$ имеет следующие свойства:

$$K_1(¶_n^{\,2}) = (3-¬)(1-¬) > 0\,, \qquad (2.5.1)$$

$$K_1(1 + ¶_n^{\,2}) = -¬^{\,2} < 0 \quad \text{при } ¬ \neq 0$$

Таким образом, при $¬ \neq 0$ непрерывная функция $K_1(¦)$ на концах интервала $¶_n^{\,2},\ 1 + ¶_n^{\,2}$ принимает значения разных знаков, и поэтому уравнение (2.5) имеет хотя бы один корень, удовлетворяющий условию затухания (1.5) или (1.9). Указанный корень определяется из решения уравнения (2.5) с учетом (1.11) следующим образом:

$$¦_n^{\,2} = 1 + ¶_n^{\,2} + 2(1-¬)\sqrt{(1-¬)^2 + ¬^{\,2}} - 2(1-¬)^2 - ¬^{\,2}\,. \qquad (2.6)$$

Согласно (1.8), формула (2.6) определяет критические нагрузки P_n, приводящие к потере устойчивости пластинки, локализованной в окрестности свободной кромки $x = 0$. В отсутствие упругого основания $(k^4 = 0 \Rightarrow \text{¶}_n^{\;2} = 0)$ минимальная критическая нагрузка получается при $n = 1$.

Из формулы (2.6) и обозначений (1.8) критические нагрузки определяются следующим образом:

$$P_n = (1 - \text{¥})D\text{a}_n^{\;2} + \frac{4k^4}{\text{a}_n^{\;2}}, \tag{2.7}$$

где

$$\text{¥} = 2(1 - \text{¬})\sqrt{(1 - \text{¬})^2 + \text{¬}^2} - 2(1 - \text{¬})^2 - \text{¬}^2. \tag{2.8}$$

Из (2.7) нетрудно получить, что минимальная критическая нагрузка получается при:

$$\text{a}_n^{\;2} = \frac{2k^2}{\sqrt{(1 + \text{¥})D}}. \tag{2.9}$$

Отсюда получается, что:

$$n = E\left(\frac{\sqrt{2}\ kb}{\text{®}\sqrt[4]{(1 + \text{¥})D}}\right), \tag{2.10}$$

где “E(выражение в скобках)” означает целую часть от выражения в скобках плюс единица.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. // В сб.: ,,Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем.’’ Ереван: Изд. Ереванского Госунта,1997. С. 95 – 99.
2. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа. // Акуст. журн. 1960. Т. 6. №1. С. 124–126.

3. Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.34-39.
4. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластинки с учетом поперечных сдвигов. //Изв. РАН. МТТ. 2004. №2. С. 126–131.
5. Баничук Н.В., Барсук А.А. Локализация собственных форм и предельный переход в задачах устойчивости прямоугольных пластин.// Прик. мат, и мех. 2008. Т.72. С. 302-307.
6. Белубекян В.М. К задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя противоположными свободными краями. Задача Ишлинского. //В сб.: “Архитектура и строительство – актуальные проблемы”. Ереван: Изд. Ер. Госуниверситета архитектуры и строительства. 2008. Т.3. С. 80-83.
7. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки плиты и оболочки на упругом основании. М.: Госиздат ФМ. 1960. С. 492.
8. Товстик П.Е. Колебания и устойчивость предварительно напряженной пластины, лежащей на упругом основании. //Прик. мат, и мех. 2009. Т.73. Вып 1. С. 106-120.
9. Морозов Н.Ф. Товстик П.Е. О формах потери устойчивости пластины на упругом основании.// Прик. мат, и мех. 2009. Т.73., вып 1. С. 106-120. //Изв. РАН. МТТ. 2010. №4. С. 30-42.

Сведения об авторах:

Белубекян В.М.

К.ф.м.н., преподаватель ЕГУ,

Адрес: ул. Абовяна 32, кв. 20, Ереван 0009, Республика Армения,

Тел.: +374-10-580096

Чил-Акопян Э.О.

К.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА,

Адрес: пр. Адмирала Исакова 42/2, кв. 25, Ереван 0014, Республика Армения,

Тел.: +374-10-725156, +374-91-280321

e-mail: echilakopyan@yahoo.com, echilakopyan@armwater.am

ОТРАЖЕНИЕ СДВИГОВОЙ УПРУГОЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛН ОТ ГРАНИЦЫ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Белубекян М.В., Гараков В.Г.

Ереван, Армения

В задаче падения магнитоупругой волны на границу полупространства установлены условия при которых излучаемая электромагнитная волна является неоднородной. Показано, что при исследовании отраженной магнитоупругой волны пренебрежение компонентом тензора Максвелла в вакууме оправдано. Однако в задаче падения электромагнитной волны на границу идеального проводящего полупространства это приближение существенно – оно приводит к исчезновению возбужденной магнитоупругой волны.

В монографии [1] исследованы ряд задач по отражению и преломлению магнитоупругих и электроупругих волн. Также приводится обзор работ по магнитоупругим волнам.

1. Идеально проводящее полупространство занимает область $-\infty < x < \infty,\quad 0 \le y < \infty,\ -\infty < z < \infty$ и находится в постоянном магнитном поле

$$\bar{H}_0 = H_{01}\hat{i} + H_{02}\hat{j} \tag{1.1}$$

где $i,\ j$ –единичные орты в направлении осей Ox, Oy. Свойства среды области $y > 0$ отождествляются со свойствами вакуума.

В случае задания магнитного поля в виде (1.1) уравнения задач плоской и антиплоской деформации разделяются [1,2]. Уравнение антиплоской деформации сдвиговой волны для идеально проводящего полупространства

$$\left(c_t^2 + \mathrm{v}_1^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(c_t^2 + \mathrm{v}_2^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где $\mathrm{v}_i^2 = \dfrac{\mu H_{0i}^2}{4\pi\rho},\quad c_t^2 = \dfrac{G}{\rho}$

w –упругое перемещение в направлении оси Oz,

G –модуль сдвига, ρ –плотность материала полупространства,

μ –магнитная проницаемость.

Необходимые соотношения для компонент возмущенного электромагнитного поля имеют вид

$$h_3 = H_{01}\frac{\partial w}{\partial x} + H_{02}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad e_1 = \frac{\mu}{c}H_{02}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad e_2 = -\frac{\mu}{c}H_{01}\frac{\partial w}{\partial t} \qquad (1.3)$$

Соответствующие уравнения для возмущенного электромагнитного поля в области $y > 0$ следующие [2]

$$\Delta h_3^{(e)} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_3^{(e)}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 h_3^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial e_1^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial e_2^{(e)}}{\partial y} = 0 \qquad (1.4)$$

В общей постановке граничные условия имеют вид

$$\sigma_{23} + t_{23} = t_{23}^{(e)}, \quad e_1 = e_i^{(e)} \qquad (1.5)$$

t_{23}, $t_{23}^{(e)}$ – компоненты тензора Максвелла.

С учетом закона Гука и соотношений (1.3), граничные условия (1.5) записываются т.о.

$$\left(c_t^2 + \mathrm{v}_2^2\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{H_{02}}{4\pi\rho}$$
$$\frac{\mu}{c}H_{02}\frac{\partial w}{\partial t} = e_1^{(e)} \qquad (1.6)$$

2. Пусть на границу раздела $y = 0$ падает сдвиговая магнитоупругая волна. Из общих решений уравнений (1.2) в виде гармонических волн, для падающей и отраженной волн следуют выражения

$$W_n = A\exp i\left[\omega t - h_1 x + \left(\alpha_1 k_1 + k\right)y\right]$$
$$W_0 = B\exp i\left[\omega t - h_1 x + \left(\alpha_1 k_1 - k\right)y\right] \qquad (2.1)$$

Волны для излучаемых от плоскости $y = 0$ электромагнитних волн (или преломленные элктромагнитные волны), в соответствии с уравнениями (1.4) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} h_3^{(e)} &= M\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_3 y\right) \\ e_1^{(e)} &= \frac{ck_3}{\omega}M\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_3 y\right) \\ e_2^{(e)} &= \frac{ck_1}{\omega}M\exp i\left(\omega t - k_1 x + k_3 y\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

В (2.1) приняты обозначения

$$k=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2+\mathrm{v}_2^2}-\alpha_2 k_1^2},\quad \alpha_1=\frac{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}{c_t^2+\mathrm{v}_2^2},\quad \alpha_2=\frac{c_t^2\left(c_t^2+\mathrm{v}_1^2+\mathrm{v}_2^2\right)}{\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right)^2} \tag{2.3}$$

Из выражения для k следует, что падающая волна возможна, если выполняется условие

$$\frac{\omega^2}{k_1^2}>\alpha_2\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right) \tag{2.4}$$

В (2.2) введено дополнительное обозначение

$$k_3=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-k_1^2},\quad f=\exp i\left(\omega t-k_1x+k_3y\right) \tag{2.5}$$

Подстановка из (2.1) $w=w_n+w_0$ и из (2.2) в граничные условия (1.6) приводит к следующей системе уравнений относительно B и M

$$\begin{gathered}\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right)kA-\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right)kB=-i\frac{H_{02}}{4\pi\rho}M\\ i\frac{\mu H_{02}\omega}{c}\left(A+B\right)=\frac{ck_3}{\omega}M\end{gathered} \tag{2.6}$$

Из (2.6) определяются

$$\begin{gathered}B=\frac{\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right)k-\dfrac{\omega^2}{k_3c^2}\mathrm{v}_2^2}{\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right)k+\dfrac{\omega^2}{k_3c_2^2}\mathrm{v}_2^2}A\\ M=i\frac{\mu H_{02}\omega^2}{k_3c^2}\frac{2\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right)k}{\left(c_t^2+\mathrm{v}_2^2\right)k+\dfrac{\omega^2}{k_3c^2}\mathrm{v}_2^2}A\end{gathered} \tag{2.7}$$

Выражения (2.7) показывают, что в частном случае при $H_{02}=0$ электромагнитная волна не излучается.

Случай пренебрежения $t_{23}\gg t_{23}^{(e)}$ равнозначен пренебрежению членом v_2^2 в (2.7).

Для излучаемой электромагнитной волны возможны два варианта – либо

$$\left(1+\frac{v_1^2}{c_t^2+v_2^2}c_t^2<\frac{\omega^2}{k_1^2}<c^2\right) \qquad (2.8)$$

либо

$$\omega^2/k_1^2>c^2 \qquad (2.9)$$

В первом случае, в отличие от второго, излучаемая волна является неоднородной и она затухает при удалении от поверхности раздела сред (приповерхностная волна). Аналогичный результат был получен в [3], в частном случае для задачи плоской деформации.

3. На границе $y=0$ формально возможны также следующие варианты граничных условий

$$w=0, \quad e_1=e_1^{(e)} \qquad (3.1)$$

$$w=0, \quad \sigma_{23}+t_{23}=t_{23}^{(e)} \qquad (3.2)$$

$$w=0, \quad h_3^{(e)}=0 \qquad (3.3)$$

$$\sigma_{23}+t_{23}=0, \quad h_3^{(e)}=0 \qquad (3.4)$$

Условия (3.1), (3.2) имеют смысл наличия экрана электрического поля, а условие (3.3), (3.4) – наличие экрана магнитного поля. Однако, вопрос– какие из этих условий реальные или осуществимы – остается открытым.

В случае (3.1) для искомых амплитуд получается

$$B=-A, \quad M=0 \qquad (3.5)$$

т.е. отражение аналогично отражению чисто упругой волны и электромагнитное поле не излучается. Для варианта (3.2) величина амплитуды отраженной волны не меняется, но излучаемая электромагнитная волна будет:

$$B=-A, \quad M=i8\pi\rho H_0^{-1}\left(c_t^2+v_2^2\right)kA \qquad (3.6)$$

В случае граничных условий (3.3) и (3.4) результаты совпадают с решением (3.5).

4. Рассматривается задача падения электромагнитной волны из области $y<0$ (вакуума) на поверхность идеально проводящего полупространства. Согласно уравнениям (1.4) падающая электромагнитная волна определяется следующим образом:

$$e_{1n}^{(e)}=-\frac{ck_3}{\omega}N\exp i\left(\omega t-k_1x-k_3y\right), \quad e_{2n}^{(e)}=\frac{ck_1}{\omega}N\exp i\left(\omega t-k_1x-k_3y\right)$$

$$h_3^{(e)}=N\exp i\left(\omega t-k_1x-k_3y\right) \qquad (4.1)$$

где k_3 определяется из (2.5) и условие падения волны будет

$$\omega^2 > k_1^2 c^2 \tag{4.2}$$

Аналогичным образом получаются выражения для компонент отраженной электромагнитной волны, которые согласно (25.2) имеют вид

$$e_{10}^{(e)} = \frac{ck_3}{\omega} M \exp i\left(\omega t - k_1 x + k_3 y\right), \quad e_{20}^{(e)} = \frac{ck_1}{\omega} M \exp i\left(\omega t - k_1 x + k_3 y\right)$$

$$h_{30}^{(e)} = M \exp i\left(\omega t - k_1 x + k_3 y\right) \tag{4.3}$$

При падении электромагнитной волны в идеально проводящем упругом полупространстве, в общем случае возбуждается упругая волна, выражение которой совпадает с выражением для w_0 из (2.1)

Пусть граница полупространства свободна.

Тогда в граничные условия (1.6) необходимо подставить $h_3^{(e)} = h_{3n}^{(e)} + h_{30}^{(e)}$, $e_1^{(e)} = l_{1n}^{(e)} + l_{10}^{(e)}$, $e_2^{(e)} = l_{2n}^{(e)} + l_{2n}^{(e)}$ согласно (4.1) и (4.2), а вместо w – выражение w_0 из (2.1) . Удовлетворение граничным условиям

Если, как и в пункте 2, принять приближение $t_{23} \gg t_{23}^{(e)}$ то получается

$$B = 0, \quad M = N \tag{4.4}$$

В этом приближении упругая волна не возбуждается. Такой же результат получается при граничном условии (3.1). В случае граничных условий (3.2)–(3.4) получается

$$B = 0, \quad M = -N \tag{4.5}$$

Для этих вариантов граничных условий также упругая волна не возбуждается, но фаза отраженной электромагнитной волны меняется по $\pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
2. Белубекян М.В. Введение в теорию магнитоупругости. Ереван: Изд. ЕГУ, 1996. 98с.
3. Гараков В.Г. Отражение магнитоупругой волны от экранированной поверхности // Изв. НАН Армении, Механика. 2009. Т.62, №2. с.39-42.

<u>Сведения об авторах:</u>

Белубекян Мелс Вагаршакович
Профессор, главный научный сотрудник Института механики Н.А.Н.Армении.
тел: (37493) 580096,
E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Гараков Владимир Герасимович
к.ф.м.н. – научный сотрудник Института механики НАН Армении;
тел: (37493) 3338166,
E-mail: garakov@yandex.ru

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХЗВЕННОГО МАЯТНИКА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ «СЛЕДЯЩЕЙ» СИЛЫ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р., Саноян Ю.Г.

Ереван, Армения

Устойчивость около положения равновесия двухзвенного маятника с вязкоупругими шарнирами, нагруженного «следящей» силой, впервые изучалась Г. Циглером [1,2] с одинаковыми коэффициентами диссипации и жесткостей в шарнирах в предположении отсутствия гравитационного поля, а в более расширенной версии – с двумя различными коэффициентами диссипации, но с одинаковыми жесткостями – Г. Геррманом и И.- К. Йонгом [3,4]. На примере этого маятника, применяя динамический метод исследования устойчивости, Г. Циглером впервые были обнаружены такие общие эффекты, как дестабилизация неконсервативной системы малыми диссипативными силами и неопределенность критической нагрузки при стремлении параметров диссипации к нулю. В предлагаемой работе исследуется устойчивость двухзвенного маятника с двумя различными коэффициентами диссипации и различными жесткостями в шарнирах.

1. Рассмотрим задачу устойчивости двухзвенного маятника, нагруженного «следящей» силой $\vec{P}$ в предположении, что шарниры O и A_1 (рис. 1) упругие и вязколинейные, а стержни OA_1 и A_1A_2, длины которых равны l, невесомые. Модули моментов сил в шарнирах O и A_1, соответственно, имеют вид

$$M_1 = c_1 \ddot{\ }_1 + b_1 \ddot{\ }_1 ,\; M_2 = c_2(\ddot{\ }_2 - \ddot{\ }_1) + b_2(\ddot{\ }_2 - \ddot{\ }_1) \qquad (1.1)$$

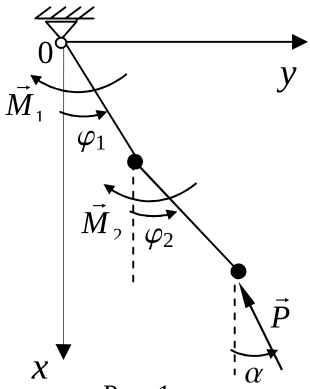


Рис. 1.

где c_1, c_2 – угловые жесткости спиральных пружин, соответственно, в шарнирах O и A_1; b_1 – коэффициент вязкости в шарнире O, учитывающий действие внешнего трения; b_2 коэффициент вязкости в шарнире A_1, отражающий влияние внутреннего трения.

В точках $A_1(x_1, y_1, 0)$ и $A_2(x_2, y_2, 0)$ имеются сосредоточенные массы $m_1 = 2m$ и $m_2 = m$ соответственно.

Будем считать, что в вертикальном положении звеньев $(\theta_1 = \theta_2 = 0)$ спиральные пружины в шарнирных соединениях O и A_1 недеформированы.

Составим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения двухзвенного маятника с помощью уравнений Лагранжа второго рода по обобщённым координатам θ_1 и θ_2 в предположении отсутствия гравитационного поля.

На маятник действуют следующие силы и моменты сил:

$$\vec{M}_1 = -\vec{k}\,M_1 , \quad \vec{M}_2 = -\vec{k}\,M_2 , \quad \vec{P} = -\vec{i}\,P\cos\varphi - \vec{j}\,P\sin\varphi , \qquad (1.2)$$

$\varphi = k_2\theta_2$ – угол, который образует «следящая» сила $\vec{P}$ с осью Ox, k_2 – коэффициент; M_1 и M_2 определены выражениями (1.1).

Кинетическая энергия двухзвенника определяется выражением

$$T_1 = 0.5m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + 0.5m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) , \qquad (1.3)$$

где декартовые координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 материальных точек A_1 и A_2 с массами, соответственно, $m_1 = 2m$ и $m_2 = m$, выражаются через независимые лагранжевы координаты θ_1 и θ_2 маятника соотношениями

$$x_1 = l\cos\theta_1 , \; y_1 = l\sin\theta_1 ; \quad x_2 = l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) , \quad y_2 = l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) . \qquad (1.4)$$

Виртуальная работа активных сил и моментов (1.2) равна

$$\delta A = -M_1\delta\theta_1 - M_2\delta(\theta_2 - \theta_1) - P\cos\varphi\cdot\delta x_2 - P\sin\varphi\cdot\delta y_2 . \qquad (1.5)$$

В соответствии с выражениями (1.1)-(1.5), дифференциальные уравнения движения маятника описываются следующими соотношениями:

$$(m_1 + m_2)l^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l^2\ddot{\theta}_2 cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l^2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_2 - \theta_1) = \qquad (1.6)$$

$$= -Pl\sin(k_2\theta_2 - \theta_1) - c_1\theta_1 - b_1\dot{\theta}_1 + c_2(\theta_2 - \theta_1) + b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) ,$$

$$m_2 l^2\ddot{\theta}_2 + m_2 l^2\ddot{\theta}_1 cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l^2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_2 - \theta_1) =$$

$$= -Pl\sin(k_2\theta_2 - \theta_2) - c_2(\theta_2 - \theta_1) - b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) ,$$

которые при достаточно малых θ_1 и θ_2 в линейном приближении, учитывая обозначения $m_1 = 2m$ и $m_2 = m$, соответственно, запишутся в виде

$$3ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 = -Pl(\theta_2 - \theta_1) - c_1\theta_1 + c_2(\theta_2 - \theta_1) - b_1\dot{\theta}_1 + b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) , \qquad (1.7)$$

$$ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 = -c_2(\theta_2 - \theta_1) - b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) .$$

Задача устойчивости двухзвенного маятника относительно исходного положения равновесия состоит в нахождении критического значения «следящей» силы $P_{кр}$, при котором система уравнений (1.7) имеет решения, отличные от тривиального.

2. Введением фазовых переменных $y_1 = \dot{\theta}_1$, $y_2 = \dot{\theta}_2$, $y_3 = \theta_1$ и $y_4 = \theta_2$, можно свести анализ возмущенного движения рассматриваемой механической системы с двумя степенями свободы к изучению поведения возмущенного движения четырехмерной динамической системы, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\text{а}^4 + a_1 \text{а}^3 + a_2 \text{а}^2 + a_3 \text{а} + a_4 = 0 \text{, (2.1)}$$

где

$$a_0 = 1, \; a_1 = \frac{b_1 + 6b_2}{2ml^2}, \; a_2 = \frac{1}{2ml^2}\left(\frac{b_1 b_2}{ml^2} + c_1 + 6c_2 - 2Pl\right), \qquad (2.2)$$

$$a_3 = \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{2m^2 l^4}, \; a_4 = \frac{c_1 c_2}{2m^2 l^4}.$$

В предположении неотрицательности коэффициентов демпфирования и жесткостей отсюда следует, что

$$a_1 \ge 0, \; a_3 \ge 0, \; a_4 \ge 0. \qquad (2.3)$$

Для устойчивости рассматриваемой механической системы необходимо, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения (2.1) были отрицательны. Критическое значение «следящей» силы $P_{кр}$, характеризующее переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю действительной части одного или нескольких собственных значений $(\mathrm{Re}\,\text{а} = 0)$. Для исследования поведения собственных значений а системы воспользуемся алгебраическим критерием устойчивости Рауса–Гурвица.

Согласно критерию Рауса–Гурвица, в соответствии с соотношениями (2.1)–(2.2), границами области устойчивости маятника в пространстве его параметров являются гиперповерхности [5]

$$T_1 = a_1 = 0, \; T_2 = a_1 a_2 - a_3 = 0, \; T_3 = a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 = 0, \; a_4 = 0, \text{(2.4)}$$

где T_1, T_2, T_3 – определители Рауса–Гурвица.

3. Пусть $b_i \succ 0$, $c_i \succ 0$, $i = 1,2$. При этом, в соответствии с выражениями (2.2), $a_1 \succ 0$, $a_3 \succ 0$, $a_4 \succ 0$. В этом случае границей области устойчивости маятника в пространстве его параметров является гиперповерхность $T_3 = a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 = 0$ [5], откуда, в соответствии с выражениями (2.2), получаем критическое значение «следящей» силы

$$P_{cr}^1 = \frac{b_1 b_2 (c_1 - 6c_2)^2 + 4(b_1 c_2 + b_2 c_1)^2}{2(b_1 + 6b_2)\cdot(b_1 c_2 + b_2 c_1) l} + \frac{b_1 b_2}{2ml^3}, \qquad (3.1)$$

которое определяет переход от устойчивости к флаттерной неустойчивости: при $P \succ P_{cr}^1$ возмущенное движение системы приобретает характер колебаний с возрастающими амплитудами.

При исчезающе малом демпфировании имеем

$$P_{cr}^0 = \lim P_{cr}^1 = \frac{(c_1 - 6c_2)^2 + 4(c_1 + c_2)^2}{14(c_1 + c_2) l} \; b_2 \to 0 \text{). (3.2)}$$

В соответствии с выражениями (2.2), при отсутствии демпфирования $(b_i = 0, i = 1, 2)$ изначально характеристическое уравнение (2.1) является биквадратным. В этом случае границей области устойчивости является гиперповерхность $D = a_2^2 - 4a_4 = 0$, откуда, в соответствии с выражениями (2.2), находим значение критической «следящей» силы, равное

$$\tilde{P} = \frac{c_1 + 6c_2 - 2\sqrt{2c_1c_2}}{2l} \quad (b_1 = b_2 = 0)\,. \qquad (3.3)$$

При всех $P \succ \tilde{P}$ корни биквадратного уравнения комплексные и среди них , очевидно, найдутся корни с положительной вещественной частью. В силу этого, возмущенное движение приобретает колебательный характер с возрастающими амплитудами, а исходное состояние равновесия становится неустойчивым.

Нетрудно показать, что при всех $c_1 \succ 0$ и $c_2 \succ 0$ разность а$P = \tilde{P} - P_{cr}^0$ неотрицательна. В самом деле, подставляя выражения (3.2) и (3.3) в а$P = \tilde{P} - P_{cr}^0$, получаем

$$\text{а}P = \frac{(\sqrt{2}\,c_1 - 7\sqrt{c_1c_2} + \sqrt{2}\,c_2)^2}{14l(c_1 + c_2)}\ . \qquad (3.4)$$

Отсюда следует, что а$P \succ 0$ при $c_1 \neq 0.25\cdot(45 \pm 7\sqrt{41})\cdot c_2$ и а$P = 0$ при $c_1 = 0.25\cdot(45 \pm 7\sqrt{41})\cdot c_2$. Следовательно, при всех $c_1 \neq 0.25\cdot(45 \pm 7\sqrt{41})\cdot c_2$ наличие исчезающе малого демпфирования в системе приводит к возникновению эффекта дестабилизации, а при всех $c_1 = 0.25\cdot(45 \pm 7\sqrt{41})\cdot c_2$ эффект дестабилизации отсутствует.

Аналогичные исследования, проведенные при рассмотрении частных случаев, показали следующее. При $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_1 = c_2 = 0$ изначально система неустойчива. При $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и исчезающе малых c_1, c_2 система теряет устойчивость при $P \succ P_{2cr} = b_1b_2(2ml^3)^{-1}$. При $c_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c_2 = b_2 = 0$ и $c_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_1 = b_1 = 0$ система неустойчива. При $c_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_2 = b_1 = 0$ и $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_1 = 0$ значение критической силы зависит только от c_1 и равно $P_{3cr} = c_1(3l)^{-1}$. При $c_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c_1 = b_2 = 0$ и $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$ значение критической силы зависит только от c_2 и равно $P_{4cr} = 2c_2(l)^{-1}$. При $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ и $b_1 \to 0$, $b_2 \to 0$, $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ система теряет устойчивость, соответственно, при $P \succ P_{5cr}$ и $P \succ P_{5cr}^0$, которые определяются выражениями

$$P_{5cr}=\frac{c_1(b_1+4b_2)}{2l(b_1+6b_2)}+\frac{b_1b_2}{2ml^3}\ ,\ P^0_{5cr}=\frac{5c_1}{14l}\,. \qquad (3.5)$$

А при $b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$, $c_2\neq 0$, $c_1=0$ и $b_1\to 0$, $b_2\to 0$, $c_2\neq 0$, $c_1=0$ получаем, соответственно, следующие значения критической силы:

$$P_{6cr}=\frac{2c_2(b_1+9b_2)}{l(b_1+6b_2)}+\frac{b_1b_2}{2ml^3}\ ,\ P^0_{6cr}=\frac{20c_2}{7l}\ . \qquad (3.6)$$

Из сопоставления критических значений $P_{3cr}=c_1(3l)^{-1}$ и $P_{4cr}=2c_2(l)^{-1}$, а также, значений (3.5) и (3.6), следует, что наличие жесткости c_2 в шарнире A_1 играет более стабилизирующую роль, чем наличие жесткости c_1 в шарнире O.

Результаты данной работы полностью совпадают с результатами работ [1–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. ZieglerH. Die Stabilitatskriterien der Elastomechanik. Ing.-Arch. 1952. Bd.20. H.1. (Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций.– М.: Мир. 1971. – 192 с.)

2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.:Наука. 1987. 352 с.

3. Herrmann G. and Jong I.-C. On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // Trans.ASME, J. Appl. Mech. 32, 1965, p.p. 592–597.

4. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике.– М.: Физматлит. 2009.–400с.

5. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.– М.: Наука. 1984.– 176 с.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович

Кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики НАН Армении,Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна

Кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 524890

E-mail: mechinsstella@mail.ru

Саноян Юрий Геворкович

Кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 541319, (+374 10) 524890

E-mail: yusanoyan@mechins.sci.am

ВОЛНА ЛЯВА В ПЬЕЗОСИСТЕМЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДУИРОВАННЫЙ МАТЕРИАЛ

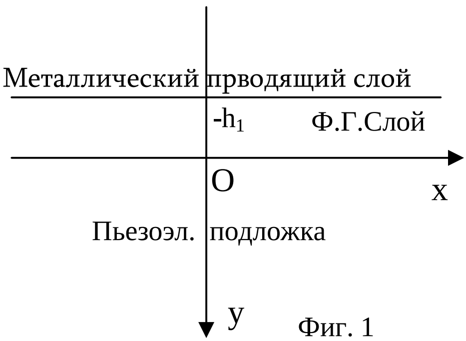
Берберян А.Х.
Ереван, Армения

Исследовано распространение электроупругих волн Лява в структуре, содержащей пьезоподложку и пьезослой из функционально-градуированного материала (ФГМ).

Начиная с 1980-ых годов, материалы нового типа, называемые ФГМ, были предназначенны для решения проблем термозащитных структур в аэрокосмических системах, с тех пор ФГМ-и заинтересовались и другие области, а с усовершенствованием производства в пьезосредах [1] могут быть использованы в акустоэлектрических устройствах.

В данной работе рассматривается акустоэлектрическая сдвиговая волна Лява в системе содержащей слой из ФГМ.

1. Постановка задачи. Пусть имеем слоистую систему, состоящую из пьезоэлектрического полупространства класса 6mm в декартовой системе координат Oxyz, занимающую область $-\infty < x < +\infty$, $0 \le y < \infty$, $-\infty < z < +\infty$, функционально-градуированный пьезоэлектрический (ФГП) слой толшиной h_1 с главной осью (L_4 или L_6) (фиг.1). Главная ось симметрии кристаллов L_6 или L_4 параллельна оси OZ. Поверхность слоя свободна от напряжений и заземлена при $y = 0$. Рассматривается антиплоское деформируемое состояние структуры:



Фиг. 1

$$u_1 = u_2 = 0,\ u_3 = u_3(x, y, t),$$

$$\ddot{} = \{0,0,\ddot{}_3(x, y, t)\}, \qquad (1.1)$$

где $u_3 = u$ – вектор перемещений в направлении оси x, ¨ – потенциал электрического поля.

Допустим, что ФГП имеет экспоненциальную зависимость вдоль оси y.

$$\rho(y) = \rho^0 e^{\beta y},\ c_{44}(y) = c_{44}^0 e^{\beta y},\ e_{15}(y) = e_{15}^0 e^{\beta y},\ \varepsilon_{11}(y) = \varepsilon_{11}^0 e^{\beta y}. \qquad (1.2)$$

При $= 0$ будем иметь гомогенную пьезосреду.

Согласно теориям электроупругости и электродинамики [2], для вышеуказанных сред после преобразования

$$\Psi = \ddot{} - u\, e_{15} / £_{11} \qquad (1.3)$$

будем иметь:1) в области $y > 0$ (в пьезоэлектрической среде):

$$\Delta u_1 = \frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = 0, \quad \Psi = \text{¨} - u\, e_{15} / \text{£}_{11} \qquad (1.4)$$

2) в области $-h < y < 0$ (в слое из ФГМ)

$$\frac{1}{\text{°}}(C_{44} + e_{15}^2 / \text{£}_{11})(\quad \frac{\partial u}{\partial y} + \Delta u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial y} + \Delta u = 0 \qquad (1.5)$$

А также функциональные зависимости для пьезосреды [2]:

$$\sigma_{xz} = c_{44}(y)\frac{\partial u}{\partial x} + e_{15}(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ \sigma_{yz} = c_{44}(y)\frac{\partial u}{\partial y} + e_{15}(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$D_y = e_{15}(y)\frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon_{11}(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \ D_x = e_{15}(y)\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{11}(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad (1.6)$$

Требуется найти решения уравнений (1.3), (1.4), удовлетворяющие граничным условиям:

$$\text{¨}^1 = \text{¨}^2, \ D^1 = D^2, \ \pm_{yz}^1 = \pm_{yz}^2, \ u_3^1 = u_3^2 \text{ при } y = 0 \qquad (1.7)$$

$$\pm_{yz}^2 = 0, \ \text{¨}^2 = 0 \text{ при } y = -h \qquad (1.8)$$

и условиям затухания $\text{¨}^1 = 0$ при $y \to -\infty$ (1.9)

$$u^0 = 0, \ \text{¨}^0 = 0 \text{ при } y \to +\infty \qquad (1.10)$$

Выше приняты следующие обозначения:

$$S_1 = \sqrt{C_{44}(1 + \text{¡}_1^2)/\text{°}}, \ \text{¡}_1^2 = e_{15}^2 / \text{£}_{11} C_{44}, \ \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \ (1.11)$$

S_1 – скорость сдвиговых объемных волн в пьезоэлектрической среде, χ_1 – коэффициент электромеханической связи, C_{44} – упругая постоянная, e_{15} – пьезомодуль, ε_{11} – диэлектрическая проницаемость, ° –массовая плотность.

Решения задачи (1.4) и (1.5) будем искать в виде сдвиговых плоских гармонических электроупругих волн Лява с частотой $\omega > 0$ и удовлетворяющих условиям затухания:

$$u_1 = U_{01}e^{-\text{¥} y}\, e^{i(px_{21} - \text{µ}t)}, \text{¨} = \Phi_0 e^{-qy}\, e^{i(px_{21} - \text{µ}t)}, \text{¥} = \sqrt{1 - V^2/(C_{44}/\text{°})} \ (1.10)$$

распространяющихся в плоскости Oxy. Здесь $q > 0$ и p – волновые числа соответственно; k –волновое число, фазовая скорость волны определяется выражением $V = \omega / p$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (1.5) могут быть выражены как

$$\cdot\,''(y) + \quad \cdot\,'(y) - k^2 \cdot\,(Y) = 0,\; u''(y) + \quad u'(y) + (1 - V^2/V_T^2)k^2 u(Y) = 0$$

Решениями данных уравнений [3] при $V^2 > V_T^2(1 + \quad ^2/4k^2)$ будут

$$\cdot\,(y) = A_1 e^{r_1 y} + A_2 e^{r_2 y},\; r_{1,2} = -\quad /2 \pm \sqrt{\quad ^2 + 4k^2}/2$$

$$u(y) = B_1 e^{d_1 y}\cos fx + B_2 e^{d_1 y}\sin fx,\; d = -\quad /2, \qquad (1.11)$$

$$f = \sqrt{4k^2(V^2/V_T^2 - 1) - \quad ^2}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (1.3), можем найти решение для электрического потенциала:

$$\ddot{\ }\,(x, y, t) = A_1 e^{r_1 y} + A_2 e^{r_2 y} + e_{15}/C_{44}(B_1 e^{d_1 y}\cos fx + B_2 e^{d_1 y}\sin fx)\, e^{ik(x - Vt)}$$

Для получения фазовой скорости сдвиговой волны Лява выполним условия затухания (1.9), (1.10) и граничные условия (1.7) и (1.8), а также потребуем нетривиального решениям полученно системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1 T.Kavai, S.Muyazaki, M.Araragi. A new method for forming piezoelectric FGM using a dual dispenser system, in: Yamanouchi et al. (Ed.), Prosidings of the First Internation Simposium on Functional Gradient Materials, Sendai, Japan, 1990, pp.191-196.

2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.

3. Камке Дифференциальные уравнения.

Сведения об авторе:
Берберян Армен Хачатурович
К.ф.м.н., науч. сотрудник Института механики НАН Армении
Mail: aberberyan@gmail.com
Армения, Ереван, ул. Ширака дом 7/1 кв.10,
тел: 46-20-96, 094-19-19-86

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Геворкян Г.З.

Ереван, Армения

Получены уравнения собственных колебаний круглой пластины переменной толщины с учетом влияния поперечных сдвигов и инерции вращения. Задача решается численно методом коллокаций. На примере частной задачи для кольцевой пластины показан учет указанных факторов на значения частот свободных поперечных колебаний.

1. Рассмотрим ортотропную кольцевую пластину переменной толщины $h(r)$ с внутренним и внешним радиусами a и b соответственно. Будем исследовать осесимметричные свободные изгибные колебания с учетом поперечного сдвига и инерции вращения. Используя уравнения движения [1] и учитывая инерционные члены и в поперечном, и в радиальном направлениях, получим:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r}+\frac{N_r}{r}=dh^3\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial M_r}{\partial r}+\frac{M_r-M_\theta}{r}-N_r=-\frac{dh^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial t^2}+\frac{dh^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} \tag{1}$$

где φ_1–функция, характеризующая распределение касательных напряжений, а остальные обозначения общеприняты [2].

Эта задача для изотропной пластины в классической постановке рассмотрена в [3]. В [4] рассмотрена аналогичная задача для ортотропной пластины линейно переменной толщины с учетом поперечного сдвига. Здесь рассматривается случай, когда толщина ортотропной кольцевой пластины изменяется по произвольному закону и учитывается ещё и инерция вращения.

Введем обезразмеривающие обозначения:

$$r=\rho b,\ z=h_0\delta,\ h=h_0H,\ a=kb,\ B_\theta=m^2B_r,\ a_rB_r=\chi,\ u_r=h_0ue^{i\omega_n t}$$
$$dh_0^2\omega_n^2/B_r=\Omega_n^2,\ w=h_0fe^{i\omega_n t},\ \varphi_1=B_r\varphi e^{i\omega_n t},\ y=s\partial f/\partial\rho-\chi\varphi, \tag{2}$$
$$N_r=\bar N_r h_0B_re^{i\omega_n t},\ M_r=\bar M_r h_0^2B_re^{i\omega_n t},\ M_\theta=\bar M_\theta h_0^2B_re^{i\omega_n t}$$

где ω_n –частота изгибных колебаний.

После некоторых выкладок систему уравнений (1) можно привести к одному уравнению относительно y

$$\frac{\partial^4 y}{\partial\rho^4}+K_1\frac{\partial^3 y}{\partial\rho^3}+K_2\frac{\partial^2 y}{\partial\rho^2}+K_3\frac{\partial y}{\partial\rho}+K_4 y=0 \qquad (3)$$

Амплитудные значения φ безразмерных перемещений, усилий и моментов выражаются через y посредством формул

$$\varphi=K_5\frac{\partial^2 y}{\partial\rho^2}+K_6\frac{\partial y}{\partial\rho}+K_7 y,\ \ f=K_8\frac{\partial^3 y}{\partial\rho^3}+K_9\frac{\partial^2 y}{\partial\rho^2}+K_{10}\frac{\partial y}{\partial\rho}+K_{11}y \qquad (4)$$

$$u=-\delta y,\ N_r=K_{12}\frac{\partial^2 y}{\partial\rho^2}+K_{13}\frac{\partial y}{\partial\rho}+K_{14}y,$$

$$M_r=K_{14}\frac{\partial y}{\partial\rho}+K_{15}y,\ M_\theta=K_{16}\frac{\partial y}{\partial\rho}+K_{17}y$$

Коэффициенты K_1-K_{17} зависят от, Ω_n, безразмерной толщины $H(\rho)$ и его производных, от упругих и геометрических параметров, довольно громоздки и здесь не приводятся.

К уравнению (3) следует добавить соответствующие граничные условия при $\rho=k$ и $\rho=1$.

Рассмотрим пластины-полосы переменной толщины, для которых безразмерная толщина $H(r)$ изменяется по законам (фиг. 1):

$$1)\,H(r)=1,\ \ 2)\,H(r)=\frac{3(1+k)r}{5k^2-k-4}+\frac{3(k-2)(k+1)}{(k-1)(5k+4)},$$

$$3)\,H(r)=\frac{3(1+k)r}{4k^2+k-5}+\frac{3(2k-1)(k+1)}{(k-1)(4k+5)},$$

$$4)\,H(r)=\frac{-6(1+k)r^2+12k(1+k)r+6(1+k)(k^2-4k+2)}{(k-1)^2(11k+9)},$$

$$5)\,H(r)=\frac{-6(1+k)r^2+12(1+k)r+6(1+k)(2k^2-4k+1)}{(k-1)^2(9k+11)}, \qquad (5)$$

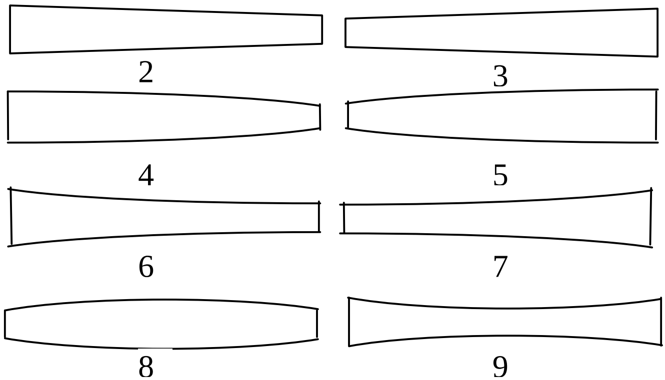
$$6)\,H(r)=\frac{6(1+k)r^2-12(1+k)r+6(1+k)(k^2-2k+2)}{(k-1)^2(9k+7)},$$

$$7)\,H(r)=\frac{6(1+k)r^2-12k(1+k)r+6(1+k)(2k^2-2k+1)}{(k-1)^2(7k+9)},$$

$$8)\, H(r)=\frac{12\, r^2+12(1+k)\, r+3(k^2-6\, k+1)}{5(k-1)^2},$$

$$9)\, H(r)=\frac{6\, r^2+6(1+k)\, r+3(k^2+1)}{2(k-1)^2}.$$

Все они имеют одинаковый объем и, при переменности толщины, толстая часть в два раза больше тонкой.



Фиг. 1

Для решения уравнения (3) модифицировнным методом коллокаций функцию y берем в виде

$$y=\sum_{i=0}^{n} a_i \rho^i$$

В качестве точек коллокаций берем нули смещённых полиномов Чебышева $T_n(2\rho-1)$, $\rho_k=\left[1+\cos\dfrac{\pi(k-1/2)}{n}\right]/2,\ k=1,2,\ldots n.$.

Удовлетворяя в точках коллокаций уравнению (3), а в концевых точках граничным условиям, получим однородную систему $n+4$ уравнений относительно a_i.

Приравнивая определитель этой системы нулю, получим значения частот изгибных колебаний. После определения частот можно определить и вид функции y, соответствующий этим значениям. Для этого надо полученные уравнения разделить на один из коэффициентов a_m, перевести соответствующий столбец в правую часть и отбросить одно из уравнений. Решая эти уравнения, можно с точностью постоянного множителя определить функцию y и по формулам (4) функции f и φ.

В качестве примера рассмотрим кольцевую пластину, внутренний контур которой жестко закреплен, а внешний контур свободен, при следующих значениях геометрических и физических параметров:

$s = 0.1,\ k = 0.2,\ \nu = 0.3,\ m = 1,\ \chi = 0, 3, 10.$

$\chi = 0$ соответствует классической постановке задачи, $\chi = 3$ –изотропной пластине, $\chi = 10$ -ортотропной пластине.

Таблица

H		Ω_1^1	Ω_2^1	Ω_3^1	Ω_1^2	Ω_2^2
1	кл.	0.01921	0.09439	0.2605	–	–
	из.	0.01882	0.08564	0.2185	1.073	1.247
	орт	0.01800	0.0722	0.1701	0.8876	1.0802
2	кл.	0.02597	0.1120	0.2860	–	–
	из.	0.02532	0.0993	0.2310	1.824	2.073
	орт	0.02395	0.08105	0.17520	0.9762	1.611
3	кл.	0.01579	0.0758	0.2363	–	–
	из.	0.0155	0.0706	0.2059	1.2169	1.457
	орт	0.01502	0.0619	0.1659	4.815	6.846
4	кл.	0.02613	0.1128	0.2881	–	–
	из.	0.02543	0.0997	0.2327	1.770	2.216
	орт	0.02395	0.0814	0.1771	1.151	1.385
5	кл.	0.01851	0.08752	0.2399	–	–
	из.	0.01825	0.08106	0.2065	0.83149	1.239
	орт	0.01768	0.0702	0.1646	0.8181	1.111
6	кл.	0.02589	0.1108	0.2861	–	–
	из.	0.02532	0.02532	0.2298	1.514	2.386
	орт	0.02412	0.0806	0.1728	1.014	1.286
7	кл.	0.01423	0.0724	0.2291	–	–
	из.	0.01402	0.0679	0.2015	0.9795	1.339
	орт	0.01357	0.0600	0.1637	0.7870	1.1703
8	кл.	0.03409	0.5779	0.5963	–	–
	из.	0.03347	0.4565	0.5023	0.8426	1.438
	орт	0.03319	0.3203	0.4254	0.7138	0.8498
	кл.	0.01397	0.0834	0.2509	–	–
	из.	0.01376	0.0779	0.2211	1.333	1.516
	орт	0.01329	0.06874	0.1829	1.229	1.373

В таблице приведены безразмерные значения частот двух групп изгибных колебаний. Первая строка для каждой полосы относится к классической постановке задачи, вторая строка к изотропной полосе, а третья – к ортотропной. Для каждой частоты можно определить вид функций f и φ, что позволяет определить характер колебаний. Первые частоты Ω_i^1 относятся, в основном, к поперечным колебаниям, которые сопровождаются сдвиговыми колебаниями малой амплитуды. Вторые частоты Ω_i^2 относятся к сдвиговым колебаниям, которые сопровождаются поперечными колебаниями малой амплитуды. При классической постановке Ω_i^2 отсутствуют.

На основе вычислений можно сделать следующие заключения.

1. Метод коллокаций достаточно быстро приводит к результатам. Уже после 8 точек коллокаций первая частота практически не меняется.
2. Учет инерции вращения приводит к появлению новых видов колебаний, которые преимущественно сдвиговые и их частоты в десятки раз больше частот преимущественно поперечных колебаний
3. Учет инерции вращения уменьшает значения частот поперечных колебаний. Это больше сказывается на второй и третьей частоте, чем на первой.
4. Учет влияния поперечнго сдвига и инерции вращения более ощутим при переменности толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киракосян Р.М. Основные уравнения ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и обжатия.// Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. №4. С. 12-20.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. С. Сони, Ч. Ашба-Рао. Осесимметричные колебания кольцевых пластин переменной толщины. / В. сб.: Механика. Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем. М. Мир. 1984. Вып. 32. С.7–16.
4. Акопян А.С., Киракосян Р.М. Свободные осесимметричные колебания ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетм поперечноо сдвига. // Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т. 51. №1. С.37-42.
5. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные поперечные колебания прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины при учете поперечных сдвигов и инерции вращения. / В. сб.: посв. 80-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С. 137-146.

Сведения об авторе:

Геворкян Гнун Завенович

К.ф.-м.н., в.н.с. Института механики НАН РА

E-mail: gnungev2002@yahoo.com

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛОС

Геворкян Р.С., Оганесян Р.Ж., Асратян М.Г.

Ереван, Армения. Москва, Россия

Асимптотический метод решения неклассических краевый задач теории упругости для балок-полос, пластин и оболочек был впервые предложен и применен в [1]. Эффективность метода позволила решить множество статических и динамических задач для анизотропных полос-балок, пластин и оболочек [1-8]. Эта эффективность также заключается и в том, что в отличие от асимптотического метода примененного в [9,10], выведенные предложенным подходом [1-8] рекуррентные формулы для компонент тензора напряжений и вектора перемещения упругого тонкого тела позволяют вычислить их значения с любой заранее заданной асимптотической точностью. Когда заданные в уравнениях и граничных условиях функции являются полиномами от продольных координат, итерационные процессы обрываются после конечного числа шагов и приводят к математически точному решению краевой задачи для анизотропных полос и пластин бесконечных продольных размеров . Исходя из вышеизложенного и того, что указанным методом решаются также связанные задачи термоупругости [11], электроупругости и магнитоупругости, возникает необходимость оценки асимптотической точности решений в зависимости от материала и размеров тонкого тела, количества шагов итераций и изменяемостей, заданных на его продольных границах достаточно гладких неполиномиальных функций.

1. Общий интеграл асимптотического решения статических уравнений внутренней задачи. Поставим задачу: в полосе бесконечной длины и толщины 2h $D=\{(x,z):|x|<\infty,\ |z|\le h\}$ найти решение системы уравнений и соотношений плоской деформации теории упругости

$$\frac{\partial\sigma^*_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma^*_{xz}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{1-\nu}{2G}\left(\sigma^*_{xx}-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma^*_{zz}\right)\quad (x,z)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{1}{G}\sigma^*_{xz}\qquad G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$\sigma^*_{zz}(x,h)=\sigma^*,\sigma^*_{xz}(x,h)=\tau^*,u_x(x,-h)=u_x^-,u_z(x,-h)=u_z^- \tag{1.2}$$

Следуя [1], в уравнениях и соотношениях (1.1) переходим к безразмерным координатам, перемещениям и напряжениям

$$¶ = x/l\,, \quad ¸ = z/h = £^{-1} z/l\,, \; £ = h/l$$
$$u = u_x/l\,, \quad w = u_z/l\,, \quad ±_{ij} = ±_{ij}^{*}/G \qquad (1.3)$$

(где l – характерный размер полосы) получается сингулярно возмущенная геометрическим малым параметром ε система, решение которой ищется в виде асимптотического разложения [1-3]

$$Q\;(x,z) = \sum_{s=0}^{S} £^{¡_Q} Q^{(s)}(¶, ¸) \qquad (1.4)$$

где Q – любая из неизвестных компонент u_x, u_z вектора перемещения и тензора напряжений $±_{ij}$, $¡_Q$ –асимптотический порядок соответствующей величины: $¡_u = 0$ – для всех перемещений, $¡_± = -1$ – для всех напряжений.

Подставив (1.4) в преобразованную систему уравнений и соотношений (1.1) и приравнивав коэффициенты при ε^s в левых и правых частях равенств получается непротиворечивая система уравнений, решение которой приводит к общему интегралу системы (1.1) во внутренней задаче в виде следующих рекуррентных формул:

$$±_{xz}^{(s)} = ±_{xz0}^{(s)}(¶) + ±_{xz*}^{(s)}(¶, ¸),\; ±_{zz}^{(s)} = ±_{zz0}^{(s)}(¶) + ±_{zz*}^{(s)}(¶, ¸)$$

$$±_{xx}^{(s)} = \frac{¬}{1-¬} ±_{zz}^{(s)} + \frac{2}{1-¬}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial ¶},\; u^{(s)} = u_0^{(s)}(¶) + ¸\, ±_{xz0}^{(s)} + u_*^{(s)}(¶, ¸)$$

$$±_{xz}^{(s)} = ±_{xz0}^{(s)}(¶) + ±_{xz*}^{(s)}(¶, ¸),\; ±_{zz}^{(s)} = ±_{zz0}^{(s)}(¶) + ±_{zz*}^{(s)}(¶, ¸) \qquad (1.5)$$

$$±_{jz*}^{(s)} = -\int_0^{¸} \frac{\partial ±_{jx}^{(s-1)}}{\partial ¶} d¸\,, \quad j = x, z, \qquad u_*^{(s)} = \int_0^{¸} \left[±_{xz*}^{(s)} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial ¶} \right] d¸$$

$$w_*^{(s)} = \int_0^{¸} \left[\frac{1-2¬}{2(1-¬)} ±_{zz*}^{(s)} - \frac{¬}{1-¬} \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial ¶} \right] d¸$$

Общее решение (1.5) содержит четыре функции интегрирования $\pm_{xz0}^{(s)}, \pm_{zz0}^{(s)}, u_0^{(s)}, w_0^{(s)}$, которые однозначно определяются из граничных условий (1.2), заданных на продольных краях $z = \pm h$ $(\zeta = \pm 1)$.

Рекуррентные формулы (1.4)–(1.6) позволяют вычислить напряженно-деформированные состояния полосы с любой заранее заданной формальной асимптотической точностью.
При этом предполагается, что заданные на продольных краях полосы функции $\sigma^*, \tau^*, u_x^-, u_z^-$ вместе со своими производными необходимого порядка – непрерывные, ограниченные и соответственно имеют изменяемости $O(\varepsilon^0)$ [9] . Найденное решение внутренней задачи, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на торцевых сечениях $x = \pm l$. Для полосы конечных размеров возникающая неувязка однозначно устраняется решением задачи типа пограничного слоя [2,3,12,13].

2. Решение поставленной краевой задачи и его анализ. Вычисленные по формылам (1.5) значения компонент тензора напряжений и вектора перемещения для четырех шагов итерации дают

$$\pm_{zz}^{(0)} = \pm,\ \pm_{\mathrm{xz}}^{(0)} = ²,\ \pm_{xx}^{(0)} = \ \pm,\ u^{(0)} = u^- + (¸ +1)²,\ w^{(0)} = w^- + \sim(¸ +1)\pm$$

$$\pm_{zz}^{(1)} = -(¸ -1)²',\ \pm_{xz}^{(1)} = - \ (¸ -1)\dot{\pm},\ \pm_{xx}^{(1)} = ¥\dot{u}^- + \left(¥(¸ +1) - \ (¸ -1)\right)²'$$

$$u^{(1)} = -(¸ +1)\dot{w}^- + \left(\ (¸ +1) - \frac{}{2}(¸^2 -1) - \frac{\sim}{2}(¸ +1)^2 \right)\dot{\pm}$$

$$w^{(1)} = - \ (¸ +1)\dot{u}^- + \frac{1}{2}\left(2\sim(¸ +1) - \sim(¸^2 -1) - \ (¸ +1)^2\right)²'$$

$$\pm_{zz}^{(2)} = \ \frac{(¸ -1)^2}{2}\ddot{\pm},\ \ \pm_{xz}^{(2)} = -¥(¸ -1)\ddot{u}^- + \left(\ \frac{(¸ -1)^2}{2} - ¥\,\frac{(¸ +1)^2 - 4}{2}\right)²''$$

$$\pm_{xx}^{(2)} = -¥(¸ +1)\ddot{w}^- + \left(\frac{^2}{2}(¸ -1)^2 + \ ¥\,\frac{3+2¸ - ¸^2}{2} - -\sim¥\,\frac{(¸ +1)^2}{2}\right)\ddot{\pm}$$

$$u^{(2)} = \left[\frac{¥}{2}(3+2¸ - ¸^2) + \frac{1}{2} \ (¸ +1)^2\right]\ddot{u}^- + \left(\frac{4¥ - \sim}{2}(¸ +1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sim}{2}(¸ +1)^2 + \frac{\sim}{6}(¸^3 +1) + \frac{-¥}{6}(¸ +1)^3 + \ \frac{(¸ -1)^3 + 8}{6}\right)²''.$$

$$w^{(2)} = \frac{(¸ +1)^2}{2}\ddot{w}^- + \Bigg(\sim \frac{(¸ -1)^3 + 8}{6} + \frac{\ ^2}{6}(¸^{\ 3} + 1) + \qquad (2.1)$$

$$+ \frac{\sim}{6}(¸ +1)^3 - \frac{\ ^2}{2}(¸ +1) - \frac{\ ^2}{2}(¸ +1)^2 \Bigg)\ddot{±}$$

$$±_{zz}^{(3)} = ¥\,\frac{(¸ -1)^2}{2}\ddot{u}^- + \Bigg(¥\,\frac{(¸ +1)^3 - 12¸ + 4}{6} - \quad \frac{(¸ -1)^3}{6} \Bigg)\ddot{ƨ}$$

$$±_{xz}^{(3)} = ¥\,\frac{(¸ +1)^2 - 4}{2} w^- +$$

$$+ \Bigg(\frac{¥}{6}(¸ -1)^3 - \frac{\ ^2}{6}(¸ -1)^3 - \frac{15\ \ ¥}{6}(¸ -1) + \sim ¥\,\frac{(¸ +1)^3 - 8}{6} \Bigg)\ddot{±}$$

$$±_{xx}^{(3)} = \Bigg[\frac{1}{2}¥^{\ 2}\Big(3 + 2¸ - ¸^{\ 2}\Big) + \quad ¥\Big(¸^{\ 2} + 1\Big) \Bigg]\ddot{u}^- + \Bigg(\frac{¥\big(4¥ - \sim\big)}{2}(¸ +1) -$$

$$- \frac{\sim ¥}{2}(¸ +1)^2 - 2\ \ ¥(¸ -1) + \frac{\sim ¥}{6}(¸^{\ 3} + 1) + \frac{¥(2\ \ - ¥)}{6}(¸ +1)^3 +$$

$$+ \frac{(¥ - \ \ )}{6}\Big(¸ -1\Big)^3 \Bigg)\ddot{ƨ}$$

$$u^{(3)} = \Bigg(\frac{¥ -}{6}(¸ +1)^3 - 2¥(¸ +1) \Bigg)\ddot{w}^- + \Bigg(\frac{\ ^2}{4}(¸ +1)^2 + \frac{\sim(¥ - \ \ )}{24}(¸ +1)^4 +$$

$$+ \frac{(\ \ - ¥)}{6}(¸ +1)^3 - \frac{¥}{12}(¸^{\ 2} - 1) + \frac{14\ \ ¥ - 8\sim\ \ - 8\sim ¥ - \ ^2}{6}\Big(¸ +1\Big) +$$

$$+ \quad (¥ - \quad)\frac{¸^{\ 4} - 1}{24} - \quad (\sim + \quad)\frac{(¸ -1)^4 - 16}{24} \Bigg)\ddot{±}$$

$$w^{(3)} = \Bigg[¥(\sim - 3\ \ )\frac{(¸ +1)}{2} - ¥(\sim + \quad)\Bigg(\frac{¸^{\ 2} - 1}{2} - \frac{¸^{\ 3} + 1}{6} \Bigg) - \quad ^2\,\frac{\big(¸ +1\big)^3}{6} \Bigg]\ddot{u}^- +$$

$$+\left(\frac{\sim¥-\ ^{2}}{24}(¸\ +1)^{4}-\frac{(\ \ +3¥-\sim)}{4}(¸\ +1)^{2}-\sim¥(¸^{2}-1)+\right.$$

$$+\frac{(\ \ +¥)}{6}(¸^{3}+1)+\frac{\sim}{6}(¸\ +1)^{3}+\frac{2\ ^{2}+2\ ¥-\sim\ -6\sim¥}{6}(¸\ +1)-$$

$$\left.-\ (\ \ +\sim-¥)\frac{¸^{4}-1}{24}-\sim\ \frac{(¸\ -1)^{4}-16}{24}\right)z.$$

$$\sim=\frac{1-2¬}{2(1-¬)},\qquad =\frac{¬}{1-¬},\quad ¥=\frac{2}{1-¬},\quad 0<¬<\frac{1}{2}$$

При этом следует учесть, что

$$Q=Q^{(0)}+£Q^{(1)}+£^{2}Q^{(2)}+£^{3}Q^{(3)},\ \ Q=\left\{±_{ij},u,w\right\} \qquad (2.2)$$

Из формул (2.1),(2.2) следует, что после n шагов итерации точность решения зависит от произведения $\varepsilon^{n}\frac{\partial^{n}F}{\partial\xi^{n}}$, $F=\left\{\sigma,\tau,u^{-}w^{-}\right\}$, $n=1,2,3,$ принимая $F=O(1).$ Исходя из этого и следуя [9] обозначим $\omega^{n}=\mathrm{Sup}\max\left|\frac{1}{F}\frac{\partial^{n}F}{\partial\xi^{n}}\right|,\ \ n=1,2,3,$ $\delta=\varepsilon\omega$ и вычислим относительную ошибку каждой компоненты тензора напряжений и вектора перемещения после первого, второго и третьего шагов итерации для $\delta=0.1$ и $\delta=0.05$ по формуле $P_{Q}^{(S)}=Q^{(S+1)}\Big/\sum_{s=0}^{S}Q^{(s)}\times100\%$ при $\nu=0.3.$

Таблица №1 S=0 (После первого шага итерации (в %-ах))

	$\delta=0.1$					$\delta=0.05$				
¸	$P_{±_{xx}}^{(0)}$	$P_{±_{zz}}^{(0)}$	$P_{±_{xz}}^{(0)}$	$P_{u_x}^{(0)}$	$P_{u_z}^{(0)}$	$P_{±_{xx}}^{(0)}$	$P_{±_{zz}}^{(0)}$	$P_{±_{xz}}^{(0)}$	$P_{u_x}^{(0)}$	$P_{u_z}^{(0)}$
1.0	143.3	0.0	0.0	5.7	7.3	71.7	0.0	0.0	2.9	3.6
0.4	109.3	6.0	2.6	3.8	3.6	54.7	3.0	1.3	1.9	1.8
0	86.7	10.0	4.3	2.5	1.7	43.3	5.0	2.1	1.3	0.8
-0.4	64.0	14.0	6.0	1.3	0.4	32.0	7.0	3.0	0.7	0.2
-1.0	30.0	20.0	8.6	0.0	0.0	15.0	10.0	4.3	0.0	0.0

Из таблицы № 1 следует, что для краевой задачи, обеспечивающей условие $\delta \geq 0.05$, после первого пага итерации ошибка отбрасываемого напряжения σ_{xx} составляет более 70% .Согласно таблице № 2, для краевой задачи, обеспечивающей условие $\delta \geq 0.1$, отбрасываемая компонента напряжеиия σ_{xz} третьего шага итерации приводит к более 11% -ной ошибке, а при условии $\delta \leq 0.05$ ошибка составляет менее 3%.Из таблицы № 3 следует, для краевой задачи, обеспечивающей условие $\delta \leq 0.1$, после третьего пага итерации ошибка напряжения σ_{xx} отбрасываемого четвертого шага менее 5%, а при условии $\delta \leq 0.05$ ошибка σ_{xx} менее 1%.

Таблица №2 S=1 (После второго шага итерации (в %-ах))

$\delta = 0.1$						$\delta = 0.05$				
د	$P^{(1)}_{\pm_{xx}}$	$P^{(1)}_{\pm_{zz}}$	$P^{(1)}_{\pm_{xz}}$	$P^{(1)}_{u_x}$	$P^{(1)}_{u_z}$	$P^{(1)}_{\pm_{xx}}$	$P^{(1)}_{\pm_{zz}}$	$P^{(1)}_{\pm_{xz}}$	$P^{(1)}_{u_x}$	$P^{(1)}_{u_z}$
1.0	$\underline{4.7}$	0.0	0.0	5.2	$\underline{0.5}$	$\underline{1.7}$	0.0	0.0	$\underline{1.3}$	$\underline{0.1}$
0.4	2.8	0.0	4.6	$\underline{5.5}$	0.3	1.0	0.0	1.2	1.3	0.1
0	3.4	0.2	7.1	5.2	0.2	0.5	0.1	1.8	1.3	0.0
-0.4	2.3	0.4	9.1	4.2	0.1	0.2	0.1	2.3	1.0	0.0
-1.0	1.0	$\underline{0.7}$	$\underline{11.0}$	0.0	0.0	0.2	$\underline{0.2}$	$\underline{2.9}$	0.0	0.0

Таблица №3 S=2 (После третьего шага итерации (в %-ах)

$\delta = 0.1$						$\delta = 0.05$				
د	$P^{(2)}_{\pm_{xx}}$	$P^{(2)}_{\pm_{zz}}$	$P^{(2)}_{\pm_{xz}}$	$P^{(2)}_{u_x}$	$P^{(2)}_{u_z}$	$P^{(2)}_{\pm_{xx}}$	$P^{(2)}_{\pm_{zz}}$	$P^{(2)}_{\pm_{xz}}$	$P^{(2)}_{u_x}$	$P^{(2)}_{u_z}$
1.0	4.2	0.0	$\underline{0.6}$	$\underline{0.2}$	$\underline{0.4}$	$\underline{0.7}$	0.0	0.1	$\underline{0.0}$	$\underline{0.0}$
0.4	4.2	0.1	0.4	0.2	0.2	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0
0	3.9	0.4	0.3	0.2	0.0	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0
-0.4	3.3	0.6	0.3	0.1	0.1	0.5	0.1	0.0	0.0	0.0
-1.0	1.5	$\underline{1.1}$	0.3	0.0	0.0	0.2	$\underline{0.2}$	$\underline{0.0}$	0.0	0.0

Таким образом, при асимптотическом методе решения статических краевых задач теорий упругости следует учесть, что с самого начала не все заданные на лицевых поверхностях функции влияют на все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения. Это влияние на все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения проявляется, начиная с третьего шага итерационного процесса. При этом, в зависимости от малого параметра и изменяемостей заданных на краях функций, ошибка решения составляет менее 5%, если $\delta \leq 0.1$ и менее 1%, если $\delta \leq 0.05$.

Если, в общем случае, решение краевой задачи математической физики подразумевает нахождение функции удовлетворяющей заданным и уравнению, и граничному условию, то решение считается приближенным, если хоть одно из них (или уравнение, или граничное условие, или и то и другое) удовлетворяется приближенно. Асимптотический метод решения краевых задач математической физики считается приближенным методом.Предложенный асимптотический метод [1-8] предоставляет возможность удовлетворить граничным условия математически точно, но уравнения теории упругости решаются приближенно, в общем случае, с любой асимптотической точностью.В частном случае, когда заданные в задаче функции полиномиальные, для полосы и слоя бесконечных размеров и уравнения, и граничные условия удовлетворяюся математияески точно. Если учесть, что конечный результат решения любой физической задачи связан с количественной оценкой результата, а любое числовое вычисление содержит определенную приближенность, то важность и эффективность предложенного асимптотического метода становится неоспоримой, поскольку выведенные рекуррентные формулы являются готовым алгоритмом для современных вычислительных средств, позволяющих получить аналитическое и численное решения задачи с любой точностью, если заданные в задаче функции непрерывные, ограниченные и имеют такие же производные необходимого порядка.

Заметим, что все выводы и рассуждения были сделаны для полос бесконечной длины. Они остаются в силе также для полос конечной длины. При этом к выведенным решениям (внутренних задач) следует добавить согласованные с ними решения задач вида пограничных слоев [12,13] с граничными условиями, заданными на торцах $x = \pm l$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела// Меж вуз. сборник н. трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1982. С. 7-12.

2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука, 1997. 414с.

3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во „Гитутюн" НАН РА, 2005. 468 с.
4.Агаловян Л.А., Саркисян Л.С. О собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы.//Тр. 18-ой Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997.Т.1.С. 30-38.
5.Агаловян М.Л. К определению частот собственных колебаний и собственных функций в пространственной смешанной краевой задаче для пластин.//Тр. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1997. С.128-131.
6.Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях.//Доклады НАН РА 1999. Т.99. С. 315-321.-301.
7. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. Optimization of the Resistance of Base-foundation Packet of constructions under Seismic and Force Actions // Third European Conference on Structural Control.Vienna. Austria.2004. P. M6-21–M6-24.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы.// ПММ. 2008.Т.72.Вып.4..С.633-643.
9. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука,1976. 512 с.
10. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
11. Геворкян Р,С, Асимптотические решения установившичся динамических (связанных) задач термоупругости для изотропных пластин. // ПММ. 2008. Вып.1. С.148-156.
12.Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач// Меж. Вуз. Сборник н.трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С.51-58.
13.Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв.АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. №6. С.3-15. Ереван. Институт механики НАН РА.

Сведения об авторах:

Рубен Степанович Геворкян

Профессор, д.ф.м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.

Тел.: +(37410) 270828; +(37493) 536883: e-mail:gevorgyanrs@mail.ru

Рубен Жораевич Оганесян Кандидат физ-мат наук (Москва)

Марианна Григорьевна Асратян Научный сотрудник института Механики НАН РА.

Старший преподаватель кафедры ”Высшая математика и теоретическая механика”

АСХУ,Тел.: +(37410) 270828: e-mail: magars@mail.ru

ПОВЕРХНОСТНЫЕ SH ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ КОНЕЧНОПРОВОДЯЩИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Геворкян А.В.
Ереван,Армения

Исследуется вопрос распространения магнитоупругих поверхностных сдвиговых волн на границе раздела двух конечнопроводящих полупространств с проскальзыванием при наличии внешнего постоянного магнитного поля, параллельного границе раздела.

Пусть упругие конечнопроводящие полупространства отнесены к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$: ось x_1 направлена вдоль границы, ось x_2 - вглубь нижнего полупространства.

Начальное магнитное поле $\vec{H}_0(H_0,0,0)$ направлено по оси x_1.

Магнитные проницаемости материалов полупространств принимаются равными единице.

Учитывая, что в антиплоской деформации поле смещений и характерис тики индуцированного электромагнитного поля имеют вид соответственно $\vec{u} \equiv [0,0,u_3(x_1,x_2,t)]$, $\vec{h} \equiv [0,0,h_3(x_1,x_2,t)]$, $\vec{e} \equiv [e_1(x_1,x_2,t), e_2(x_1,x_2,t),0]$ из системы линеаризованных уравнений магнитоупругости, описывающей поведение электромагнитного поля и движение пороводящего упругого тела, при пренебрежении током смещения относительно тока проводимости, получим следующую систему уравнений [1-3]

$$c_{ts}^2\nabla^2 u_3^{(s)} + \frac{H_0}{4®°_s}\partial_1 h_3^{(s)} = \partial_t^2 u_3^{(s)}$$

$$\nabla^2 h_3^{(s)} - \frac{4®±_s}{c^2}\partial_t h_3^{(s)} = -\frac{4®±_s}{c^2}H_0\partial_1\partial_t u_3^{(s)} \quad s=1,\ x_2>0$$

$$\nabla\times\vec{h}^{(s)} = \frac{4®±}{c}\left(\vec{e}^{(s)} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{u}^{(s)}\times H_0\right) \quad s=2,\ x_2<0 \qquad (1)$$

$$\nabla\times\vec{e}^{(s)} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{h}^{(s)}, \nabla^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2, \partial_m \equiv \frac{\partial}{\partial x_m}, \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial_t}, m=1,2$$

$$\nabla \equiv \vec{i}_1\partial_1 + \vec{i}_2\partial_2$$

где $c_{ts}^2 = G_s / \rho_s$ - квадрат скоростей поперечных волн в соответствующих полупространствах.

G_s, ρ_s и σ_s соответственно модуль сдвига, плотность и удельная электропроводимость материалов полупространств, c - электродинамическая постоянная.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид $\partial_2 u_3^{(1)} = 0$,

$$\partial_2 u_3^{(2)} = 0,\ h_3^{(1)} = h_3^{(2)},\ e_1^{(1)} = e_1^{(2)},\ x_2 = 0 \qquad (2)$$

В работе [4] показано, что в конечнопроводящем полупространстве могут распространяться магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны, а в случае внешнего постоянного магнитного поля, перпендикулярного к границе конечнопроводящего полупространства такие волны отсутствуют [5].

Решения систем (1) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} u_3^{(1)} \\ h_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \cdot e^{k\alpha x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)},\ x_2 > 0 \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix} u_3^{(2)} \\ h_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \cdot e^{k\beta x_2} e^{i(kx_1 - \omega t)}\quad x_2 < 0 \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в систему (1), приходим соответственно к характеристическим уравнениям

$$\alpha^4 - \left(2 - \eta_1 z_1 + z_1^2\right)\alpha^2 + \left(1 - \eta_1 z_1\right)\left(1 + z_1^2\right) - \eta_1 s_1 z_1 = 0 \qquad (5)$$

$$\beta^4 - \left(2 - \eta_2 z_2 + z_2^2\right)\beta^2 + \left(1 - \eta_2 z_2\right)\left(1 + z_2^2\right) - \eta_2 s_2 z_2 = 0 \qquad (6)$$

где

$$\eta_m = \frac{4\pi\sigma_m c_{tm}}{kc^2},\ z_m = \frac{i\omega}{kc_{tm}},\ s_m = \frac{v_m^2}{c_{tm}^2},\ v_m^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_m},\ m = 1,2$$

Так как рассматриваются поверхностные волны, то из корней уравнений (5) и (6) выберем только те, которым соответствуют затухающие по глубине волны

$$\alpha_{1,2} = -\alpha_{\pm} = -\left\{1 - \frac{1}{2}\eta_1 z_1 + \frac{1}{2} z_1^2 \pm \left[\frac{1}{4} z_1^2 \left(z_1 + \eta_1\right)^2 + \eta_1 s_1 z_1\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \qquad (7)$$

$$\beta_{1,2} = \beta_{\pm} = \left\{1 - \frac{1}{2}\eta_2 z_2 + \frac{1}{2} z_2^2 \pm \left[\frac{1}{4} z_2^2 \left(z_2 + \eta_2\right)^2 + \eta_2 s_2 z_2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \qquad (8)$$

$$z_2 = ¥_* \cdot z_1 ,\ \sim_2 = ±_* \cdot ¥_*^{-1} \cdot \sim_1 ,\ ¥_* = c_{t1} \cdot c_{t2}^{-1} ,\ ±_* = ±_2 \cdot ±_1^{-1}$$

при условии

$$\mathrm{Re}\, ª_{\pm} > 0 ,\ \mathrm{Re}\, ¦_{\pm} > 0 \qquad (9)$$

Таким образом, решения систем, следуемых (1), запишутся

$$u_3^{(1)} = \left(B_+ e^{-kª_+ x_2} + B_- e^{-kª_- x_2} \right) e^{i(kx_1 - µt)} \quad x_2 > 0 \qquad (10)$$

$$h_3^{(1)} = \left(\frac{ik\sim_1 z_1 H_0}{ª_+^2 + \sim_1 z_1 - 1} B_+ e^{-kª_+ x_2} + \frac{ik\sim_1 z_1 H_0}{ª_-^2 + \sim_1 z_1 - 1} B_- e^{-kª_- x_2} \right) e^{i(kx_1 - µt)}$$

$$u_3^{(2)} = \left(A_+ e^{k¦_+ x_2} + A_- e^{k¦_- x_2} \right) e^{i(kx_1 - µt)} \quad x_2 < 0 \qquad (11)$$

$$h_3^{(2)} = \left(\frac{ik\sim_2 z_2 H_0}{¦_+^2 + \sim_2 z_2 - 1} A_+ e^{k¦_+ x_2} + \frac{ik\sim_2 z_2 H_0}{¦_-^2 + \sim_2 z_2 - 1} A_- e^{k¦_- x_2} \right) e^{i(kx_1 - µt)}$$

Подставляя выражения (10) и (11) в граничные условия (2), получим систему алгебраических однородных линейных уравнений для произвольных постоянных и из условия совместности этой системы получим дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\frac{ª_+ \cdot ª_- + 1 + z_1^2}{ª_+ \cdot ª_- \left(ª_+ + ª_- \right)} + ±_* \cdot \frac{¦_+ \cdot ¦_- + 1 + ¥_*^2 \cdot z_1^2}{¦_+ \cdot ¦_- \left(¦_+ + ¦_- \right)} = 0 \qquad (12)$$

Если материалы полупространств являются одинаковыми, то дисперсионное уравнение записывается в форме

$$ª_+ ª_- + 1 + z^2 = 0 ,\ z_1 = z_2 = z \qquad (13)$$

При $±_* << 1$ уравнение (12) принимает вид:

$$ª_+ \cdot ª_- + 1 + z_1^2 = 0 \qquad (14)$$

т.е. магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны распространяются в нижнем полупространстве $x_2 > 0$, а в случае $±_* >> 1$ - в верхнем полупространстве $x_2 < 0$

$$¦_+ \cdot ¦_- + 1 + ¥_*^2 \cdot z_1^2 = 0 \qquad (15)$$

Подробное изучение уравнений (13)-(15) проведено в работе [4].

В заключение отметим, что при отсутствии внешнего магнитного поля $(H_0 = 0)$ подставленная задача теряет смысел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. 864 с.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. –М.: Наука, 1983. 521 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред– М.: Наука, 1982. 616 с.
4. Геворкян А. В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящем полупространстве.– //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т. 47. № 1-2 .С. 44-52.
5. Белубекян М.В., Геворкян А.В. Магнитоупругие поверхностные сдвиговые волны в конечнопроводящей среде. // Докл. НАН Армении 1995. Т. 95. № 2. С. 86-88.

Сведения об авторе:

Геворкян Артак Вараздатович
К.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (+37477)02-88-89,
E-mail: AGevorgyanV@gmail.com

ВЛИЯНИЕ ПРОФИЛЯ АРМАТУРЫ НА ЕГО СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ С БЕТОНОМ

Григорян Д.Г.
Ереван, Армения

Железобетон в качестве конструктивного материала существует благодаря совместной работе арматуры и бетона. На их совместную работу влияет ряд факторов, но, в первую очередь, она характеризуется и обуславливается арматурой и бетоном.

Принимая во внимание неоднородность бетонов, трудно найти закономерность для оценки их совместной работы с арматурой. Арматура или арматурная сталь по сравнению с бетоном обладает более устойчивыми механическими показателями. Арматурная сталь отличается от бетона большей однородностью. Величина зерен стали колеблются в пределах 30…40 мкм и даже в самых малых стальных конструкциях их количество велико. В отличие от арматуры, работа бетона в большей степени зависит от его объема. На практике встречаются размеры от нескольких миллиметров до нескольких метров. Таким образом, мы всегда имеем дело с материалами, имеющими разные механические свойства. Влияние “масштабного фактора” объема бетона затрудняет применение понятия прочности.

При изучении вопросов, касающихся совместной работы бетона и арматуры периодического профиля, “масштабный фактор” играет наиболее важную роль, поскольку между выступами арматуры возникают бетонные консоли, что является одной из главных особенностей совместной работы арматур периодического профиля с бетоном. Надежное сцепление бетона и арматуры обусловлено именно работой этих консолей, поскольку, в основном, именно они противодействуют сдвигу арматуры по отношению к бетону. При сравнительно малых напряжениях, передаваемых от арматуры к бетонным консолям, они действуют упруго, и в этом случае вероятность нарушения сцепления невелика и зависит от предельной сжимаемости бетона, формы и размеров выступов арматуры. При больших напряжениях в бетоне могут возникнуть пластические деформации, которые и приводят к сдвигу арматуры по отношению к бетону.

Исследование влияния профиля арматуры было осуществлено при помощи метода фотоупругости [1]. Было смоделировано и изучено явление вытягивания арматуры из бетонной массы (рис.1).

Было изучено влияние изменений шага и высоты выступов арматуры на распределение напряжений. Высота выступов вкладыша, моделирующего арматуру, изменилась в пределах 1-1.5 мм, а шаг – в пределах 7-18 мм.

В результате поставленных опытов выяснилось, что при плотном размещении выступов (шаг–10-13 мм) напряжения передаются от вкладыша к пластине, в основном, посредством выступов, тогда как участки между выступами почти не участвуют в передаче напряжений. На образце со вкладышем с шагом выступов 18мм порядок возникающих напряжений меньше, и напряжения начинают передаваться от вкладыша к пластине как посредством выступов, так и посредством лежащих между ними участков. При шаге между выступами 18 мм напряжения по длине сцепления распределяются более равномерно.

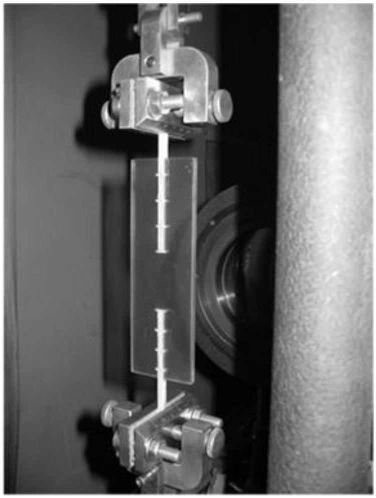


Рис. 1

Бетонные консоли, образовавшиеся между выступами арматуры периодического профиля, под воздействием выступов арматуры подвергаются смятию и срезу с соответствующими площадями $A_{см}$ и $A_{ср}$ [2].

Уменьшение шага выступов арматуры приводит к увеличению суммарной площади смятия бетона и уменьшению площади среза. Уменьшение шага выступов арматуры и соответственно высоты выступов положительно влияет только до его определенного значения, при котором ухудшение работы бетонных консолей компенсируется увеличением количества площадок смятия. При более плотном расположении выступов арматуры при небольших значениях напряжений смятия под выступами в бетоне произойдет разрыв бетонных консолей.

В ряде международных и иностранных стандартов эффективность арматуры определяется так называемой относительной площадью смятия арматуры, f_r :

$$f_r = {A_{cm}} \Big/ {\text{®} \cdot d \cdot t} \qquad (1)$$

где $A_{см}$ –площадь смятия,

d –диаметр арматуры,

t –шаг поперечных выступов арматуры.

В правой части уравнения знаменатель представляет собой площадь среза бетонных консолей, т. е. в стандартах регламентируется соотношение стирания и разрыва бетонных консолей.

Европейский стандарт установил минимальную величину f_r для ненапрягаемых арматур с диаметром 5…400 мм в 0.039…0.056. В стандартах, действующих в нашей республике, величина f_r не регламентируется. Но подсчеты показывают, что при арматурах с диаметром в 10…40 мм среднее значение f_r составляет 0.133…0.214 [3]. В таблице 1 приведены соотношения площадей стирания и разрыва бетона под воздействием выступов арматуры в соответствии с разными источниками и предложенные нами величины.

Таблица 1

Наименование	d, диаметр арматуры, мм	$f_r = A_{cm} / (® \cdot d)$	A_{cp} / Acm
EN 10080	5...40	0.039...0.056	17.8 ... 25.6
ГОСТ 5781	10...40	0.133...0.21	4.7 ... 7.5
По мнению автора	10...40	0.06…0.1	10…15 или $R_{см}/R_{ср}$

По нашему мнению, с точки зрения сцепления с бетоном оптимальный профиль стержневых арматур периодического профиля надо выбирать таким образом, чтобы напряжения смятия и среза, возникающие в бетонных консолях, одновременно достигали своих предельных значений. Так как предельная прочность на смятие превосходит предельную прочность на срез в среднем в 10…15 раз [4, 5], то для одновременного достижения предельных значений необходимо при выборе оптимального профиля арматуры обеспечить соответствующее соотношение площадей (таблица 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Д.Г., Акопян В.В., Исследование профилированности вкладыша на распределение нагрузок методом фотоупругости. //Труды VI международной конференции сентябрь 21-26 Горис-Степанакерт, 2008, Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. С. 183-186.

2. Գրիգորյան Դ. Հ., Ամրանի պրոֆիլի ազդեցությունը բետոնի և ամրանի համատեղ աշխատանքում: Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարան, Տեղեկագիր 1/2007թ (1/2), Երևան 2007, էջ 8-11:

3. Мадатян С.А. Арматура железобетонных конструкций. М.:Воентехлит. 2000. 256с.

4. Пирадов А. Б. Конструктивные свойства легкого бетона и железобетона. – М.: Издательство литературы по строительству. 1973. 133 с..

5. Холмянский М.М. Бетон и железобетон. Деформативность и прочность. М.: Стройиздат, 1997. 570 с..

Сведения об авторе:

Григорян Давид Гамлетович.

к.т.н., науч. сотруд. Института механики НАН РА,

Тел. +37493578796, Дом +37410423044,

E-mail: Davit-grigoryan@yandex.ru

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАПОЛНЕННОЙ ПРОТЕКАЮЩЕЙ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ СМЕСЬЮ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Ереван, Армения

Рассмотрена задача определения неосесимметричных собственных колебаний бесконечно длинной упругой оболочки, наполненной протекающей газожидкостной смесью с крупными и мелкими пузырьками.

При исследовании динамического взаимодействия деформируемой оболочки со слабосжимаемой жидкостью установлено [1-3], что система оболочка–жидкость обладает свойствами, не присущими отдельным ее компонентам. Взаимодействие оболочки с газожидкостной смесью при вибрационных воздействиях изучено в [3], где двухфазная среда моделируется как двухскоростная смесь, состоящая из слоев несущей жидкости с включениями в виде газовых пузырьков.

1. Пусть бесконечно длинная деформируемая цилиндрическая оболочка кругового сечения радиуса R полностью заполнена газожидкостной смесью, жидкая фаза которой является идеальная жидкость, а дисперсная – подчиняющиеся уравнению состояния адиабаты газовые пузырьки одинакового размера. Процессами дробления, коагуляции и образования новых пузырьков, а также эффектами поверхностного натяжения и межфазного теплообмена пренебрегаются. Принимается односкоростная модель течения смеси.

Уравнения движения смеси в цилиндрической системе координат x, r, θ имеют вид (начало координат размещено в сечении $x = 0$) [4]

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla V^2 - \vec{V} \times \mathrm{rot}\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{V} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \tag{1.2}$$

$$\rho = (1-\beta)\rho_1 + \beta\rho_2, \quad \frac{\beta\rho_2}{(1-\beta)\rho_1} = \mathrm{const}, \quad \rho_2 a^3 = \mathrm{const}. \tag{1.3}$$

$$P_2 - P = \rho_1 a \frac{d^2 a}{dt^2}, \quad \frac{P_2}{P_0} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_{20}}\right)^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_{p2}}{c_{V2}}, \quad \rho_1 = \text{const}. \tag{1.4}$$

Здесь t – время; V_x, V_r, V_θ – составляющие вектора скорости $\vec{V}$ по осям координат с ортами $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$; ρ и P – плотность и давление, γ – показатель адиабаты газа; c_p и c_V – его удельные теплоемкости, β – объемное газосодержание, a – радиус пузырька. Индексы 1, 2 и 0 отнесены к параметрам жидкой и газовой фаз и, соответственно, их значениям в стационарном состоянии равновесия. Параметры, характеризующие смесь в целом, индексов не имеют. В соотношениях (1.3) первое из них определяет плотность смеси, второе – понятие односкоростного течения, третье формулирует закон сохранения массы газа в пузырьке.

Исследуется безвихревое течение смеси внутри оболочки, когда $\text{rot}\vec{V} = 0$, что позволяет ввести в рассмотрение потенциал скоростей $\nabla\varphi(x, r, \theta) = \vec{V}$. Уравнение Эйлера (1.1) преобразуется в интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \int \frac{dP}{\rho} = f(t) \tag{1.5}$$

Пусть в любой момент времени и в каждой точке пространства значения параметров смеси мало отклоняются от своих значений в состоянии покоя (равновесия), что позволяет из (1.3) и уравнения состояния газа из (1.4) получить линейные соотношения

$$\frac{\rho_2'}{\rho_{20}} = \frac{P_2'}{\gamma P_0}, \quad \frac{\beta'}{\beta_0} = -(1-\beta_0)\frac{\rho_2'}{\rho_{20}}, \quad \rho' = \beta_0\rho_2' + (\rho_{20} - \rho_1)\beta',$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} P_2', \quad c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta_0 \rho_0}, \quad a' = -\frac{a_0}{3}\frac{P_2'}{\gamma P_0}, \quad a' = -\frac{a_0}{3}\frac{\rho_2'}{\rho_{20}}, \tag{1.6}$$

Здесь c_0 – невозмущенная скорость звука в смеси. Штрихи отнесены к малым возбуждениям. Из уравнения Рэлея–Лэмба (1.4) в приближении, когда учитывается наличие пузырьков в жидкости, будем иметь

$$P' = P_2' + \frac{1}{\omega_{ar}^2}\frac{\partial^2 P_2'}{\partial t^2}, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 a_0^2}, \tag{1.7}$$

где ω_{ar} – собственная адиабатическая частота пульсирующего пузырька.

Линеаризуя уравнение (1.5) и учитывая соотношения (1.6), определим константу интегрирования из условия, что в невозмущенном состоянии $\varphi' = 0, \quad P_2' = 0$. Тогда избыточное гидродинамическое давление в пузырьке P_2' выразится через φ': $P_2' = -\rho_0 \, \partial\varphi' / \partial t$.

Рассмотрим случай, когда внутри оболочки вдоль ее образующей (осью x) протекает однородный поток газожидкостной смеси со скоростью U. Введем в рассмотрение связанную с оболочкой систему координат

$$x = x' - Ut, \quad r = r', \quad \theta = \theta', \quad t = t'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + U\frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta'} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r'}. \tag{1.8}$$

Тогда в неподвижной относительно оболочки системе координат (1.8) возмущение давления в пузырьке P_2' и избыточное давление P' в смеси запишутся в виде

$$P_2' = -\rho_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

$$P = -\rho_0\left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi \tag{1.9}$$

Здесь штрихи над параметрами течения и координатами опущены. Линеаризация уравнений (1.1) и (1.2) и последующее их комбинирование друг с другом и с четвертой связью из (1.6) приводит к уравнению, которое, в силу (1.9), запишется в неподвижной системе координат (1.8) в виде

$$\frac{1}{\omega_{ar}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^4\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\varphi - c_0^2\Delta\varphi = 0 \tag{1.10}$$

где Δ – оператор Лапласа. Решение уравнения (1.10) будем искать в виде

$$\varphi(x, r, \theta, t) = f(r)e^{i(\omega t + \alpha x + n\theta)} \tag{1.11}$$

где ω – циклическая частота, $\alpha = \pi/L,\ L$ – длина полуволн вдоль образующей цилиндра, n – число волн по круговому сечению цилиндра. Искомая функция определяется из уравнения

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f = 0, \quad M_1 = \frac{1}{c_0} \left(\frac{\omega}{\alpha} + U \right), \tag{1.12}$$

$$\beta^2 = -\frac{\left(\omega_* + \alpha_* U_*\right)^4}{c_0^2 \omega_{ar}^2} + \frac{\left(\omega_* + \alpha_* U_*\right)^2}{c_0^2} - \alpha_*^2 = -\frac{\alpha_*^4 c_0^2}{\omega_{ar}^2} M_1^4 - \alpha_*^2 \left(1 - M_1^2\right)$$

Условие ограниченности величины скорости смеси на оси симметрии $r = 0$ позволяет записать возмущенный потенциал (1.11) через функцию Бесселя J_n действительного аргумента

$$\varphi\left(x, r, \theta, t\right) = b J_n\left(\beta r\right) e^{i\left(\omega t + \alpha x + n\theta\right)}, \quad b = \mathrm{const}. \tag{1.13}$$

где b –постоянная интегрирования, определяющая в начальный момент времени $t = 0$ амплитуду волны в центре сечения $x = 0,\ r = 0,\ \theta = 0$. Требование $\beta^2 > 0$ определяет интервал допустимых значений M_1 и налагает ограничение на его величину

$$1 < m_2^2 < M_1^2 < m_1^2, \quad m_{1,2}^2 = \frac{3}{2} \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0^2} \frac{1}{\alpha^2 a_0^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma P_0} \alpha^2 a_0^2} \right) \tag{1.14}$$

2. Уравнения движения оболочки. Линейные уравнения изгиба тонкостенных оболочек имеют вид [1,3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{Eh} \rho_* h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{1-\nu^2}{E} \rho_* h \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \theta} - \frac{w}{R^2} - \frac{h^2}{12R^2} \left(R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) =$$

$$= \frac{1-\nu^2}{Eh} \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{Eh} q.$$

Здесь u, v, w –смещения точек срединной поверхности соответственно в осевом направлении, вдоль дуги кругового сечения и по нормали к поверхности, E –модуль Юнга, ν –коэффициент Пуассона, R и h –радиус оболочки и толщина ее стенки, ρ_* –плотность материала, q –нормальное к поверхности внешнее давление. Прогиб w считается положительным вдоль нормали к центру кривизны. Формулируя граничные условия, учтем, что координаты x, r, θ, t в уравнении (1.10) и решении (1.13) следует отождествлять с координатами системы (2.1). Избыточное давление, воздействующее на стенки оболочки со стороны протекающей газожидкостной смеси, в силу (1.9), равно

$$P\Big|_{r=R} = -\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\omega_{ar}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 \right] \varphi \Bigg|_{r=R} \tag{2.2}$$

Условие непроницаемости деформируемой стенки имеет вид [1,3]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}\Bigg|_{r=R} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) w \tag{2.3}$$

Удовлетворяя решение (1.13) граничным условиям (2.2), (2.3), формулы для избыточного давления и потенциала скоростей можно выразить через прогиб w и представить в формах записи

$$\begin{gathered} P = \rho_0 R \frac{J_n(\beta r)}{\beta r J_n'(\beta R)} \left[1 + \frac{1}{\omega_{ar}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w \\ \varphi(x, r, \theta, t) = -R \frac{J_n(\beta r)}{\beta r J_n'(\beta R)} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad M_1 > 1 \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь штрихи отнесены к производной функции $J_n(\beta r)$. В качестве внешней нагрузки q системы (2.1) следует брать воздействие избыточного давления на внутреннюю поверхность оболочки, т.е. полагать $q = -P$, где P определено в (2.4). В соответствии с представлением (1.13) решение системы (2.1) будем искать в виде

$$(u, \mathrm{v}, w) = (u_*, \mathrm{v}_*, w_*) e^{i(\omega t + \alpha x + n\theta)},$$

что позволяет свести ее к системе однородных уравнений относительно амплитуд u_*, v_*, w_*. Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений получаемой системы является равенство нулю ее определителя, откуда следует трансцендентное уравнение

$$\left[1+\frac{l^2}{12}\left(\alpha_*^2+n^2\right)^2-\omega_*^2\right]\left[\ -\left(\alpha_*^2-\omega_*^2+\frac{1+\nu}{2}n^2\right)\left(\frac{1-\nu}{2}\alpha_*^2-\omega_*^2+n^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1+\nu}{2}\alpha_* n\right)^2\right]+\nu^2\alpha_*^2\left(\frac{1-\nu}{2}\alpha_*^2-\omega_*^2+n^2\right)+n^2\left(\alpha_*^2-\omega_*^2+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)-$$

$$-\nu\left(1+\nu\right)\alpha_*^2 n^2+\frac{\rho_0}{\rho_*}\frac{\left(\omega_*+\alpha_* U_*\right)^2}{l}\left[1-\frac{\rho_0 c_0^2}{3\gamma P_0}\delta^2\left(\omega_*+\alpha_* U_*\right)^2\right]\times$$

$$\times\left[\left(\alpha_*^2-\omega_*^2+\frac{1-\nu}{2}n^2\right)\left(\frac{1-\nu}{2}\alpha_*^2-\omega_*^2+n^2\right)-\left(\frac{1+\nu}{2}\alpha_* n\right)^2\right]\times$$

$$\times\frac{J_n\left(\beta R\right)}{J_n'\left(\beta R\right)}\frac{1}{\beta R}=0 \qquad (2.5)$$

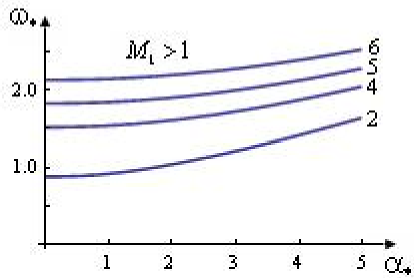
Здесь в рассмотрение введены безразмерные параметры

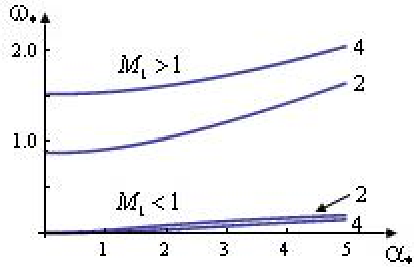
$$\omega_*=\frac{\omega R}{c_*},\quad \alpha_*=\alpha R,\quad U_*=\frac{U}{c_*},\ \ l=\frac{h}{R},\ \ \delta=\frac{a_0}{R},\ \ c_*^2=\frac{E}{\left(1-\nu\right)\rho_*} \qquad (2.6)$$

где c_* – скорость звука (распространения продольных волн) в материале оболочки.

Для иллюстрации изложенной теории проведен численный анализ уравнения (2.5) на примере стальной оболочки ($E=2\cdot 10^8$ МПа, $\rho_*=7800$ кг/м^3, $\nu=0.3$) толщиной $l=0.002$, наполненной с протекающей со скоростью $U_*=0.005$ водовоздушной смесью ($\beta_0=0{,}01,\ P_0=0.1$ МПа, $\rho_0=988$ кг/м^3, $\gamma=1.4$) с крупными $\delta=1/50$ и мелкими ¢ $=1/500$ пузырьками воздуха.

Сверхзвуковое течение $M_1>1$. Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов, выполненных по уравнению (2.5).

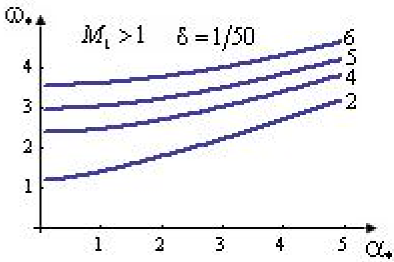


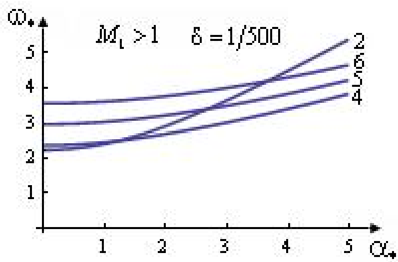


Фиг. 1 Фиг. 2

На фиг. 1 представлены кривые частот собственных колебаний оболочки, наполненной чистой водой в случае $M_1 > 1$ в зависимости от значений n, отнесенных здесь и далее к соответствующим кривым. С увеличением n частота возрастает, как для сравнительно коротких, так и длинных волн.

Фиг. 2 отнесена к случаям $M_1 < 1$ и $M_1 > 1$ колебаний той же оболочки с чистой водой. Видно, что для одинаковых n при сверхзвуковом перемещении жидкости частоты по величине существенно превосходят те же характеристики дозвукового течения. При дозвуковом режиме течения воды с увеличением n частота убывает.





Фиг. 3 Фиг. 4

На фиг. 3 приведены кривые зависимости ω_* от волнового числа α_* в случае $M_1 > 1$ для оболочки со смесью воды с крупными $\delta = 1/50$ пузырьками воздуха. С увеличением n при одинаковых $\sim_*$ частоты колебаний возрастают для обоих типов волн.

На фиг.4. представлены те же зависимости, что на фиг.3, однако, для смеси с мелкими ¢ $= 1/500$ пузырьками воздуха. Здесь для весьма длинных волн с увеличением n частоты возрастают, а для коротких – могут убывать (переход от кривой с $n = 2$ к остальным) .

Из сравнения кривых фиг.3 и 4 следует, что частоты колебаний оболочки со смесью с мелкими пузырьками превосходят частоты в случае наличия крупных пузырьков. В заключение отметим, что, для всех приведенных кривых, которым соответствуют волны с разными модами, действительно, выполняется неравенство $M_1 > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости М.: Наука, 1979. 320с.
2. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Параметрические колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. // Прикл. механика. 1966. Т.2. №3. С.21-26.
3. Кубенко В.Д., Лакиза В.Д. и др. Динамика упругогазожидкостных систем при вибрационных воздействиях. Киев: Наук. думка, 1988. 256с.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах:

Григорян Шушаник Акоповна, доцент кафедры математики и математического моделирования Российско–Армянского (Славянского) университета.
E-mail: grig–shushanik@rambler.ru

Оганян Гагик Гришаевич, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24б, тел. (+37493) 946-947,
E-mail: oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Левонович, ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. математики Ереванского госуниверситета.
Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, тел.: (+37477) 002-408,
E-mail: ssahakyan@ysu.am

ИЗГИБ НЕСИММЕТРИЧНО НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНКИ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Григорян Э.Ф.

Ванадзор, Армения

Впервые задача исследования пластин, симметрично неоднородных по толщине, была поставлена С.Г. Лехницким[1,2].

В настоящей работе исследуются задачи несимметрично неоднородных по толщине пластин на основе гипотезы Кирхгофа, определяются прогиб, изгибающий и крутящий моменты и перерезывающие усилия в окрестности закрепленного края пластинки. Несимметричность понимается в смысле, что если функции механических характеристик материала пластинки непрерывны по толщинной координате, то они несимметричны относительно срединной плоскости.

1.Пусть пластинка постоянной толщины является неоднородной: модули ее одинаковы для всех точек на плоскости, параллельной срединной, но меняются по толщине, притом несимметрично.Уравнения статики имеют вид [3]:

$$
\begin{aligned}
&B_0\Delta u + (C - B_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - K\frac{\partial}{\partial x}\Delta w = 0,\\
&B_0\Delta v + (C - B_0)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - K\frac{\partial}{\partial y}\Delta w = 0, \qquad (1)\\
&D_0\Delta^2 w - K\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = q(x, y),
\end{aligned}
$$

где

$$
C = \int_{-h_1}^{h_2}\frac{E}{1-\neg^2}dz, K = \int_{-h_1}^{h_2}\frac{zE}{1-\neg^2}dz, D_0 = \int_{-h_1}^{h_2}\frac{z^2E}{1-\neg^2}dz, B_k = \frac{1}{2}\int_{-h_1}^{h_2}\frac{z^kE}{1+\neg}dz, k = 0,1,2.
$$

Первое уравнение системы (1) дифференцируем по x, а второе – по y и складываем

$$B_0\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+(C-B_0)\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-K\Delta^2 w=0$$

или

$$C\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-K\Delta^2 w=0. \qquad (2)$$

Подстановка (2) в третье уравнение из (1) дает

$$D\Delta^2 w=q(x,y),\ D=D_0-K^2C^{-1}. \qquad (3)$$

Можно доказать, что эффективная жесткость всегда положительна: $D>0$.

Таким образом, можно в системе (1) третье уравнение заменить уравнением (3).

2. Цилиндрический изгиб пластинки. Предполагается, что пластинка достаточно широкая по направлению оси x и $q=const$. Из (1) и (3) следует

$$\frac{d^2u_0}{dy^2}=0,\ C\frac{d^2v_0}{dy^2}-K\frac{d^3w_0}{dy^3}=0,\ \frac{d^4w_0}{dy^4}=\frac{q}{D}. \qquad (4)$$

Пусть края пластинки $y=0;b$ шарнирно закреплены, тогда

$$T_2=0, u=0, w=0, M_2=0$$

или

$$\frac{dv_0}{dy}=0, u_0=0, w_0=0, \frac{d^2w_0}{dy^2}=0. \qquad (5)$$

Решение уравнений (4), удовлетворяющих граничным условиям (5), имеет вид:

$$w_0 = \frac{qb^3}{24D} y\left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b} - \frac{y^2}{b^2}\right), \qquad (6)$$

$$v_0 = -\frac{Kqb}{2CD} y\left(1 - \frac{y}{b}\right), u_0 = 0 . \qquad (7)$$

Решение уравнений (4) с граничными условиями (5) можно представить также в виде рядов Фурье:

$$w_0 = \frac{q}{D}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha_n^4} \sin \alpha_n y,\ v_0 = -\frac{Kq}{CD}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha_n^3} \cos \alpha_n y, u_0 = 0 \qquad (8)$$

где a_n есть коэффиценты ряда

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \alpha_n y,\ \alpha_n = \frac{n\pi}{b} . \qquad (9)$$

3. Задача Надаи. [5] Рассматривается прямоугольная пластинка $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Края пластинки $y = 0; b$ шарнирно закреплены,

$$T_2 = 0, u = 0, w = 0, M_2 = 0 \text{ при } y = 0; b . \qquad (10)$$

Предполагается, что край пластинки $x = a$ достаточно удален от края $x = 0$ и не влияет на напряженно-деформированное состояние пластинки в окрестности края $x = 0$.

Уравнение (1) с учетом (3) допускают решения вида:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \sin \alpha_n y,\ v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \cos \alpha_n y\ \ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \alpha_n y, \qquad (11)$$

которые удовлетворяют граничным условиям (10).

Требуется найти решение, которые при удалении от края $x = 0$ стремились к решению типа цилиндрического изгиба , т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} v_n = -\frac{Kq}{CD}\frac{a_n}{\alpha_n^3},\ \lim_{n\to\infty} w_n = \frac{q}{D}\frac{a_n}{\alpha_n^4} . \qquad (12)$$

Подстановка (11) в первые два уравнения системы (1) и в уравнение (3), с учетом $q = \text{const}$, приводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&Cu_n'' - \alpha_n^2 B_0 u_n - \alpha_n (C - B_0) v_n' = K\left(w_n''' - \alpha_n^2 w_n'\right),\\
&(C - B_0)\alpha_n u_n' + B_0 v_n'' - \alpha_n^2 C v_n = K\alpha_n \left(w_n'' - \alpha_n^2 w_n\right),\\
&w_n^{IV} - 2\alpha_n^2 w_n'' + \alpha_n^4 w_n = q_0 a_n D^{-1}.
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Система уравнений (13) имеет следующее общее решение, удовлетворяющее условиям (12):

$$
\begin{aligned}
&w_n = A_n e^{-\alpha_n x} + R_n x e^{-\alpha_n x} + \frac{q a_n}{D\alpha_n^4},\\
&u_n = E_n e^{-\alpha_n x} - \left[\frac{K}{C}\alpha_n R_n - 0.5\left(1 - \frac{B_0}{C}\right) S_n\right] x e^{-\alpha_n x}, \qquad (14)\\
&v_n = -E_n e^{-\alpha_n x} + \frac{1}{\alpha_n}\left[\frac{K}{C}\alpha_n R_n - 0.5\left(1 - \frac{B_0}{C}\right) S_n\right](1 + \alpha_n x) e^{-\alpha_n x} -\\
&- \frac{1}{\alpha_n} S_n e^{-\alpha_n x} + \frac{K}{CD}\frac{q_0 a_n}{\alpha_n^3}.
\end{aligned}
$$

4.Напряженно-деформированное состояние пластинки в окрестности жестко закрепленного края.

$$
u = v = w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{ при } \ x = 0. \qquad (15)
$$

Удовлетворяя граничным условиям (15), определяем произвольные постоянные A_n, R_n, E_n, S_n.

Окончательные выражения для искомых функций имеют вид:

$$
w_n = \frac{q_0 a_n}{D\alpha_n^4}\left[1 - (1 + \alpha_n x) e^{-\alpha_n x}\right],\ u_n = \frac{K q_0 a_n}{CD\alpha_n^2} x e^{-\alpha_n x},
$$

$$v_n = \frac{Kq_0 a_n}{CD\alpha_n^3}\left[1-\left(1+\alpha_n x\right)e^{-\alpha_n x}\right]. \quad (16)$$

По формулам (16) можно определить характерные в данной задаче величины:

$T_1(0,y)=0$, $S(0,y)=0$,

$M_1(0,y)=-\dfrac{q_0 a_n}{\alpha_n^2}\sin\alpha_n y$,

$N_1(0,y)=\dfrac{2q_0 a_n}{\alpha_n}\sin\alpha_n y$, $\lim\limits_{y\to 0} N_1(0,y)=0$, если $n\neq 0$ и

$\lim\limits_{y\to 0} N_1(0,y)=2q_0 a_n$, если $n=0$.

$$\lim_{x\to 0} N_2(x,0)=\frac{q_0 a_n}{D\alpha_n}\left(\frac{K^2}{C}-\frac{B_1 K}{C}\right), \qquad (17)$$

$$\max w(x,0.5b)\approx 0.0129\frac{q_0 b^4}{D}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.:Гостехиздат. 1957. 463 с.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропных тел. М.: Наука. 1977. 416 с.
3. Белубекян М.В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки//Изв. НАН Армении. Механика .2002, № 3 с. 34-41.
4. Григоренко Я.М., Василенько А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости нерднородных тел. Киев: Наукова думка ,1991. 228 с.
5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматлит, 1963. 636с.

Сведения об авторе:

Григорян Эрмине Фердинантовна- доцент кафедры мат. анализа ВГПИ, канд. физ.-мат. наук,Адрес:РА, г. Ванадзор, ул. Тигран-Меца 36, тел.(0322)4-40-64.

E-mail:grigherm@mail.ru

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК-ДИЭЛЕКТРИК

Григорян Э. Х., Джилавян С. А., Казарян А. А.
Ереван, Армения

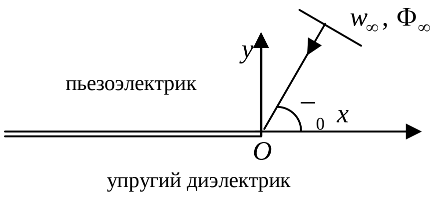
Рассматривается задача дифракции плоской волны сдвига в среде, когда в декартовой системе координат $Oxyz$ пьезоэлектрическое полупространство-пьезоэлектрик класса $6mm$ гексагональной симметрии с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла занимает полупространство $y > 0$, а упругая диэлектрическая среда-полупространство– $y < 0$. Среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x < 0$. Считаем, что между диэлектрическим и пьезоэлектрическим полупростанствами осуществляется акустический контакт в плоскости Oxz при $x > 0$. Пусть из бесконечности под углом $¯_0 \left(0 < ¯_0 < ® / 2\right)$ к плоскости Oxz распространяется плоская волна сдвига

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\infty\left(x, y, t\right) &= w_\infty\left(x, y\right) e^{-iµt} \\ \tilde{\Phi}_\infty\left(x, y, t\right) &= \Phi_\infty\left(x, y\right) e^{-iµt} \end{aligned} \qquad (1)$$

со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического потенциала, соответственно:

$$w_\infty\left(x, y\right) = e^{-ikx\cos ¯_0 - iky\sin ¯_0}, \qquad \Phi_\infty\left(x, y\right) = \frac{e_{15}}{£_{11}} e^{-ikx\cos ¯_0 - iky\sin ¯_0}. \qquad (2)$$

Здесь µ – частота колебаний. t – параметр времени, $k = µ/c$, $c = \sqrt{c_{44}(1+æ)°}$, $æ = e_{15}^{\,2} / £_{11}c_{44}$ – волновое число, скорость распространения сдвиговой электроупругой волны и коэффициент электромеханической связи в пьезоэлектрической среде, соответственно, $e_{15}, £_{11}, c_{44}$ – пьезоэлектрическая, диэлектрическая и упругая постоянные пьезоэлектрика, ° – плотность.



Рассматриваемая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля как для пьезоэлектрического полупространства $(y>0)$, так и для диэлектрического $(y<0)$. Для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала в двух полупространствах имеем следующие уравнения [1]:

при $y>0$

$$\Delta w + k^2 w = 0$$
$$\Delta\Phi + k^2 \frac{e_{15}}{\pounds_{11}} w = 0 \qquad (3)$$

при $y<0$

$$\Delta w_1 + k_1^2 w_1 = 0$$
$$\Delta\Phi_1 = 0, \qquad (4)$$

$w_1(x,y)$, $\Phi_1(x,y)$ – функции амплитуд перемещения и электрического потенциала упругого диэлектрика, $k_1 = \mu / c_{44}^{(1)} \circ_1$, $c_{44}^{(1)}$ – волновое число и упругая постоянная сдвига диэлектрического полупространства, $\circ_1$ – плотность, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

На берегах трещины для амплитуд напряжений $\pm_{yz}$, $\pm_{yz}^{(1)}$ имеем условия:

$$\pm_{yz}(x,y) = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0,\ x<0, \qquad (5)$$

$$\pm_{yz}^{(1)}(x,y) = c_{44}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0,\ x<0,$$

а также:

$$w(x,y) - w_1(x,y) = w_0(x) \text{ при } y=0,\ x<0. \qquad (6)$$

Решения уравнений (3), (4) должны удовлетворять контактным условиям:

$$\pm_{yz}(x,y) = \pm_{yz}^{(1)}(x,y) = q_0(x) \text{ при } y=0,\ x>0, \qquad (7)$$

$$w(x,y) - w_1(x,y) = 0 \text{ при } y=0,\ x>0, \qquad (8)$$

Введем функции $q_+(x) = q_0(x)^{-}(x)$, $\cdot_{-}(x) = w_0(x)^{-}(-x)$, $^{-}(x)$ – функция Хэвисайда, и условия (5)-(8) можно представить в виде:

$$\pm_{yz}(x,0) = \pm_{yz}^{(1)}(x,0) = q_+(x), \qquad (9)$$

$$w(x,0) - w_1(x,0) = \cdot_{-}(x), \qquad (10)$$

т.е. $q_+(x)$ напряжение при $y=0$, а $\cdot_-(x)$ представляет разницу перемещений на $y=\pm 0$.

Для амплитуд электрического потенциала и составляющей вектора электрической индукции имеем следующие контактные условия:

$$\Phi(x,y)=\Phi_1(x,y) \text{ при } y=0, \tag{11}$$

$$D_2(x,y)=D_2^{(1)}(x,y) \text{ при } y=0, \tag{12}$$

$$\text{где } D_2(x,y)=e_{15}\frac{\partial w}{\partial y}-£_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial y},\ D_2^{(1)}(x,y)=-£_0\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \tag{13}$$

– составляющие вектора электрической индукции в пьезоэлектрике и диэлектрике, $£_0$ – диэлектрическая постоянная среды $y<0$.

Для решения поставленной задачи применяем интегральное преобразование Фурье. Относительно функций получим уравнения:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}-\left(\pm^2-k^2\right)\bar{u}=0,\\ &\frac{d^2\bar{\ }}{dy^2}-\pm^2\bar{\ }+k^2\frac{e_{15}}{£_{11}}\bar{u}=0,\end{aligned} \quad \text{при } y>0, \tag{14}$$

$$\bar{u}(\pm,y)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)e^{i\pm x}dx,\ \bar{\ }(\pm,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{\ }(x,y)e^{i\pm x}dx,$$

здесь

$$\begin{aligned}&\bar{u}(\pm,y)=\bar{w}(\pm,y)-2®e^{-iky\sin\bar{\ }_0}¢(\pm-k\cos\bar{\ }_0)\\ &\bar{\ }(\pm,y)=\bar{\Phi}(\pm,y)-2®\frac{e_{15}}{£_{11}}e^{-iky\sin\bar{\ }_0}¢(\pm-k\cos\bar{\ }_0)\end{aligned} \tag{15}$$

$¢(\pm)$ – функция Дирака, т.е. введены функции

$$u(x,y)=w(x,y)-w_\infty(x,y),\ \ddot{\ }(x,y)=\Phi(x,y)-\Phi_\infty(x,y). \tag{16}$$

Относительно функций $\bar{w}_1(\pm,y)$, $\bar{\Phi}_1(\pm,y)$ получим уравнения:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\bar{w}_1}{dy^2}-\left(\pm^2-k_1^2\right)\bar{w}_1=0,\\ &\frac{d^2\bar{\Phi}_1}{dy^2}-\pm^2\bar{\Phi}_1=0,\end{aligned} \quad \text{при } y<0, \tag{17}$$

где $\bar{w}_1(\pm,y)=\int_{-\infty}^{\infty}w_1(x,y)e^{i\pm x}dx,\ \bar{\Phi}_1(\pm,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(x,y)e^{i\pm x}dx.$

Решения уравнений (14), (17), имея в виду (5), (9)-(13), (15), должны удовлетворять следующим условиям на границе раздела двух сред:

$$\overline{\Phi}(\pm, y) = \overline{\Phi}_1(\pm, y); \quad e_{15}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} - \pounds_{11}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} = -\pounds_0 \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial y} \text{ при } y = 0, \tag{18}$$

$$c_{44}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} = c_{44}^{(1)}\frac{\partial \overline{w}_1}{\partial y} = \overline{q}_+(\pm) \text{ при } y = 0, \tag{19}$$

$$\overline{w}(\pm, y) - \overline{w}_1(\pm, y) = \cdot^{-}_{-}(\pm) \text{ при } y = 0. \tag{20}$$

Ограниченные, представляющие уходящие волны решения уравнений (14), (17)-(20), имеют вид:
при $y > 0$

$$\begin{aligned} &\overline{u}(\pm, y) = A(\pm)e^{-\sqrt{\pm^2 - k^2}y}, \\ &\leftharpoonup(\pm, y) = B(\pm)e^{-|\pm|y} + \frac{e_{15}}{\pounds_{11}}A(\pm)e^{-\sqrt{\pm^2 - k^2}y}, \end{aligned} \tag{21}$$

при $y < 0$

$$\begin{aligned} &\overline{w}_1(\pm, y) = A_1(\pm)e^{\sqrt{\pm^2 - k_1^2}y}, \\ &\overline{\Phi}_1(\pm, y) = -\frac{\pounds_{11}}{\pounds_0}B(\pm)e^{|\pm|y}, \end{aligned} \tag{22}$$

здесь

$$\begin{aligned} &A_1(\pm) = \frac{1}{c_{44}^{(1)}}\frac{\overline{q}_+(\pm)}{\sqrt{\pm^2 - k_1^2}}, \\ &A(\pm) = A_1(\pm) + \cdot^{-}_{-}(\pm) - 2®¢(\pm - \cos^{-}{}_0), \\ &B(\pm) = -\frac{\pounds_0 e_{15}}{\pounds_{11}(\pounds_0 + \pounds_{11})}\left(A_1(\pm) + \cdot^{-}_{-}(\pm)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Выполняя условия уходящей волны, принимается, что $\sqrt{\pm^2 - k^2} \to |\pm|$, $\sqrt{\pm^2 - k_1^2} \to |\pm|$, при $|\pm| \to \infty$ и $\sqrt{\pm^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \pm^2}$, $\sqrt{\pm^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \pm^2}$. В этом случае действительная ось комплексной плоскости $\sim = \pm + i^2$ обходит точки ветвления: $-k, -k_1$ –сверху, а k, k_1 – снизу [2,3].

После определения функций $\overline{q}_+(\pm)$ и $\cdot^{-}_{-}(\pm)$ решение данной задачи можно представить в виде:

$$w(x,y) = w_\infty(x,y) + \frac{1}{2®}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\pm, y)e^{-i\pm x}d\pm,$$

$$\text{для } y > 0, \qquad (24)$$

$$\Phi(x,y) = \Phi_\infty(x,y) + \frac{1}{2®}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\ }(\pm, y)e^{-i\pm x}d\pm,$$

и

$$w_1(x,y) = \frac{1}{2®}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}_1(\pm, y)e^{-i\pm x}d\pm, \quad \Phi_1(x,y) = \frac{1}{2®}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_1(\pm, y)e^{-i\pm x}d\pm, \qquad (25)$$

для $y > 0$.

Относительно функций $\bar{q}_+(\pm)$ и $\dot{¯}_-(\pm)$ из условия (19) получим следующее функциональное уравнение, которое можно рассматривать как краевую задачу типа Римана на действительной оси:

$$\frac{c_1}{\sqrt{\pm^2 - k^2}} L(\pm)\cdot\bar{q}_+(\pm) + \dot{¯}_-(\pm) - 4® \frac{(1+æ)}{£_1 K(k\cos¯_0)} ¢(\pm - k\cos¯_0) = 0, \qquad (26)$$

где

$$L(\pm) = \frac{K_1(\pm) + K_2(\pm)}{£_1 c_1 c_{44} K_1(\pm) K(\pm)}; \; K_1(\pm) = c_{44}^{(1)}\sqrt{\pm^2 - k_1^2}; \qquad (27)$$

$$K_2(\pm) = £_1 c_{44}\sqrt{\pm^2 - k^2}K(\pm); \; £_1 K(\pm) = 1 + æ - \frac{æ£_0|\pm|}{(£_{11} + £_0)\sqrt{\pm^2 - k^2}},$$

$$£_1 = 1 + æ\frac{£_{11}}{£_{11} + £_0}; \; c_1 = \frac{c_{44}^{(1)} + c_{44}£_1}{c_{44}c_{44}^{(1)}£_1}.$$

Здесь $K(\pm) \to 1$; $L(\pm) \to 1$ при $|\pm| \to \infty$.

Функция $K(\pm)$ имеет нули если только $\pm = \pm\pm_1$, где $\pm_1 = k\dfrac{a}{a-1} > k$ единственный действительный корень уравнения $K(\pm) = 0$, $a = \dfrac{(1+æ)(£_{11} + £_0)}{æ£_0}$. Доказывается, что $K_1(\pm) + K_2(\pm) = 0$ имеет – единственное решение при $\pm = \pm\pm_2$, $\pm_2 > k$. Следовательно, принимается, что в данной задаче Римана действительная ось обходит не только точки ветвления функций $\sqrt{\sim^2 - k^2}$, $\sqrt{\sim^2 - k_1^2}$, но и точки $\pm = -\pm_1, \pm = -\pm_2$

сверху, а точки $\pm = \pm_1, \pm = \pm_2$ снизу, обеспечивая условия уходящей волны [2,3].

Таким образом, в рассматриваемой составной среде распространяются поверхностные (локализованные) волны, обусловленные дифракцией плоской волны сдвига и пьезоэффектом.

Функциональное уравнение (26) можно разрешить рассматривая его как краевую задачу Римана в теории аналитических функций, т.к. $\bar{q}_+(\pm)$ и $\bar{\cdot}_-(\pm)$ можно понимать как граничные значения аналитических функций $\bar{q}_+(\sim)$ и $\bar{\cdot}_-(\sim)$ $(\sim = \pm + i^2)$ регулярных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости [4]. Решение уравнения (26) строится факторизируя функцию $\frac{1}{\sqrt{\pm^2 - k^2}} L(\pm)$ представив в виде $\frac{1}{\sqrt{\pm^2 - k^2}} L(\pm) = \frac{1}{\sqrt{\pm + k}} L^+(\pm) \frac{1}{\sqrt{\pm - k}} L^-(\pm),$ где функции $L^\pm(\pm)$ регулярны и не имеют нулей при $\mathrm{Im}\sim > 0$ и $\mathrm{Im}\sim < 0,$ соответственно.

Уравнение (26) запишем в виде

$$\frac{c_1}{\sqrt{\pm + k}} L^+(\pm)\bar{q}_+(\pm) + \frac{\sqrt{\pm - k}}{L^-(\pm)} \bar{\cdot}_-(\pm) + 2\text{®} i \text{ª¢}\left(\pm - k\cos\bar{}_0\right) = 0, \qquad (28)$$

где $\text{ª} = \dfrac{2(1+\text{æ})\sqrt{2k}\sin\frac{\bar{}_0}{2}}{\text{£}_1 K(k\cos\bar{}_0) L^-(k\cos\bar{}_0)}.$

Имея в виду представление

$$2\text{®} i\text{¢}\left(\pm - k\cos\bar{}_0\right) = \frac{1}{\pm - k\cos\bar{}_0 - i0} - \frac{1}{\pm - k\cos\bar{}_0 + i0},$$

и используя такую же методику решения как в [3,4], получим следующие решения:

$$\bar{q}_+(\pm) = \frac{\text{ª}\sqrt{\pm + k}}{c_1 L^+(\pm)} \cdot \frac{1}{\pm - k\cos\bar{}_0 + i0}, \qquad (29)$$

$$\bar{\cdot}_-(\pm) = -\frac{\text{ª} L^-(\pm)}{\sqrt{\pm - k}} \cdot \frac{1}{\pm - k\cos\bar{}_0 - i0}. \qquad (30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К. Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982, 240 с.

2. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 279 с.
3. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. //Изв. НАН Армении. Механика, 2005. Т. 58. № 1. С. 38-50.
4. Григорян Э.Х Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Ученые записки ЕГУ, естественные науки, 1979, № 3, с. 29-34.

Сведения об авторах:

Григорян Эдвард Хосровович – д.ф.-м.н., профессор, кафедра механики, Ереванский госуниверситет, ф-т математики и механики. Tel: (+374 10) 23 03 89.

Джилавян Самвел Акопович – к.ф.-м.н., кафедра механики, Ереванский госуниверситет, ф-т математики и механики, Tel: (+374 10) 54 16 58. E-mail samjilavyan@ysu.am

Казарян Айказ Арменович – магистрант, ф-т математики и механики, Ереванский госуниверситет, Tel: (+374 10) 48 96 34. E-mail haargh @gmail.com

ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ УПРУГИМИ КОНЕЧНЫМ И БЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э. Х., Оганисян Г. В.

Ереван, Армения

В работе рассматривается контактная задача для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, составленный из двух сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин, обладающими различными упругими свойствами. Указанная составная (кусочно-однородная) упругая бесконечная пластина усилена двумя параллельными упругими конечным и бесконечным стрингерами, расположенными на разных сторонах раздела указанных полубесконечных пластин и приварены (приклеены) к этим полубесконечным пластинам. Стрингеры расположены несимметрично, относительно линии раздела указанных полубесконечных пластин, параллельны к линии разнородности полубесконечных пластин и имеют разные упругие свойства и площади поперечного сечения. Контактная пара (стрингер-пластина) деформируется сонаправленными и сосредоточенными силами, приложенными к стрингерам, и равномерно распределенным горизонтальным растягивающим напряжением постоянной интенсивности, действующем на бесконечности составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей. Далее при помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье и известного математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева, решение этой системы сингулярных интегральных уравнений приводится к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист, в виде тонкой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины h, составленный из двух сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на своей верхней поверхности линий $y = a$ $(a > 0)$ и $y = -c$ $(c > 0)$ содержит два параллельных различных упругих конечного и бесконечного стрингера с различными прямоугольными поперечными сечениями. Предполагается, что упругие конечный и бесконечный стрингеры расположены несимметрично относительно линии раздела указанных упругих полубесконечных пластин, жестко сцеплены (приклеены) к этим упругим полубесконечным пластинам, параллельны к линии разнородности полубесконечных пластин и находятся на разных сторонах раздела указанных полубесконечных пластин.

Цель работы заключается в определении закона распределения интенсивностей тангенциальных контактных усилий, действующих вдоль линий крепления упругих стрингеров с упругими полубесконечными пластинами и нормальных напряжений, возникающих в стрингерах, когда контактирующая пара (стрингер-пластина) деформируется сонаправленными и сосредоточенными силами $P\delta(x)\delta(y-a)$ и $Q\delta(x-d)\delta(y+c)$ $(d>0)$, которые действуют вдоль стрингеров, и равномерно распределенным горизонтальным растягивающим усилием постоянной интенсивности σ_0, действующем на бесконечности составной бесконечной пластины.

В исследуемой задаче относительно конечного и бесконечного стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии [1,2,6], т.е предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, а для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины предполагается, что во время деформации она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, благодаря чему она деформируется как плоскость.

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений поставленной контактной задачи заметим, что в горизонтальном направлении стрингеры растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряженном состоянии. Тогда в силу вышесказанного, дифференциальные уравнения равновесия стрингеров записанные в обобщенных функциях имеют вид:

$$\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx}=-\frac{1}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{P\theta(-x)}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}}+\frac{\sigma_0}{E}\quad(-\infty<x<\infty),\qquad(1.1)$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx}=-\frac{1}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}\int_{-b}^{d}\theta(u-x)\tau^{(2)}(u)du+\frac{Q}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}\qquad(-b\le x\le d),\qquad(1.2)$$

которые соответственно удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx}\right|_{|x|\to\infty}=\frac{\sigma_0}{E};\quad \left.\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=-b+0}=0;\quad \left.\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx}\right|_{x=d-0}=\frac{Q}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}.\qquad(1.3)$$

и условиям равновесия бесконечного и конечного стрингеров:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{(1)}(s)ds=P;\qquad \int_{-b}^{d}\tau^{(2)}(u)du=Q.\qquad(1.4)$$

Отметим, что нормальные напряжения в стрингерах на основе (1.1) и (1.2) на линиях $y=a$ и $y=-c$, можно считать следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=-\frac{1}{F_s^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{P\theta(-x)}{F_s^{(1)}}+\frac{E_s^{(1)}}{E}\sigma_0\quad(-\infty<x<\infty),\qquad(1.5)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c) = -\frac{1}{F_s^{(2)}}\int_{-b}^{d}\theta(u-x)\tau^{(2)}(u)du + \frac{Q}{F_s^{(2)}} \qquad (-b \le x \le d). \qquad (1.6)$$

Здесь $u_s^{(1)}(x)$ и $u_s^{(2)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек бесконечного и конечного стрингеров на линиях $y=a$ и $y=-c$ соответственно; $\tau^{(1)}(x) = d_s^{(1)}\tau^{(1)}(x;a)$, где $\tau^{(1)}(x;a)$ – тангенциальные контактные напряжения на линии $y=a$, $d_s^{(1)}$ – ширина этого стрингера; $\tau^{(2)}(x) = d_s^{(2)}\tau^{(2)}(x;-c)$, где $\tau^{(2)}(x;-c)$ – тангенциальные контактные напряжения на линии $y=-c$; $d_s^{(2)}$ – ширина конечного стрингера; $E_s^{(1)}$ и $E_s^{(2)}$ – модули упругости, а $F_s^{(1)} = d_s^{(1)}h_s^{(1)}$ и $F_s^{(2)} = d_s^{(2)}h_s^{(2)}$ – площади поперечных сечений бесконечного и конечного стрингеров соответственно; а $h_s^{(1)}$ и $h_s^{(2)}$ – высота стрингеров; P и Q – интенсивности сосредоточенных сил, приложенных на стрингеры соответственно в точках $(0;a)$ и $(b;-c)$; $\theta(x)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда; E – модуль упругости верхней полубесконечной пластины.

С другой стороны, для горизонтальной деформации упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, когда на верхней полубесконечной пластине на линии $y=a$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностью $\tau^{(1)}(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, а на нижней полубесконечной пластине на линии $y=-c$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностью $\tau^{(2)}(x)$ $(-b \le x \le d)$, одновременно на бесконечности составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины действует равномерно распределенное растягивающее горизонтальное усилие постоянной интенсивности σ_0, соответственно имеем:

$$hl\frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{11}(s-x)\tau^{(1)}(s)ds + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}K_{12}(u-x)\tau^{(2)}(u)du + \frac{hl}{E}\sigma_0, \qquad (1.7)$$

$$\left(-\infty < x < \infty\right),$$

$$hl_1\frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}K_{22}(u-x)\tau^{(2)}(u)du + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{21}(s-x)\tau^{(1)}(s)ds + \frac{hl_1}{E_1}\sigma_0. \qquad (1.8)$$

Здесь введены следующие обозначения [3]:

$$K_{11}(s) = \frac{1}{s} - \frac{d_1 s}{s^2+4a^2} + \frac{8d_2a^2s}{(s^2+4a^2)^2} + \frac{2d_3a^2s(s^2-12a^2)}{(s^2+4a^2)^3} \equiv \frac{1}{s} + K_{11}^*(s),$$

$$K_{22}(u)=\frac{1}{u}-\frac{b_1 u}{u^2+4c^2}+\frac{8b_2c^2u}{(u^2+4c^2)^2}+\frac{2b_3c^2u(u^2-12c^2)}{(u^2+4c^2)^3}\equiv\frac{1}{u}+K_{22}^{*}(u),$$

$$K_{12}(u)=\frac{d_4 u}{u^2+(a+c)^2}-\frac{2(a+c)(ad_6+cd_5)u}{(u^2+(a+c)^2)^2},$$

$$K_{21}(s)=\frac{b_4 s}{s^2+(a+c)^2}-\frac{2(a+c)(ab_5+cb_6)s}{(s^2+(a+c)^2)^2}, \qquad (1.9)$$

где $d_1\equiv d_1(k;\nu;\nu_1)=$

$$=\frac{k(3-\nu)\left[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\right]-(3-\nu_1)\left[8-(1+\nu)(3-\nu)\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_2\equiv d_2(k;\nu)=\frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu};\ d_3\equiv d_3(k;\nu)=\frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]},$$

$$d_4\equiv d_4(k;\nu;\nu_1)=\frac{8\left[k(3-\nu)+3-\nu_1\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_5\equiv d_5(k;\nu;\nu_1)=\frac{4(1+\nu_1)}{(3-\nu)\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]};d_6\equiv d_6(k;\nu)=\frac{4(1+\nu)}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]},$$

$$k=\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)};\quad l=\frac{8\mu}{3-\nu}=\frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)};\quad l_1=\frac{8\mu_1}{3-\nu_1}=\frac{4E_1}{(3-\nu_1)(1+\nu_1)},$$

$$b_1=d_1\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right);\quad b_2=d_2\left(\frac{1}{k};\nu_1\right);\quad b_3=d_3\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),$$

$$b_4=d_4\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right);\quad b_5=d_5\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right);\quad b_6=d_6\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),$$

а $u^{(1)}(x;a)$ и $u^{(2)}(x;-c)$ – горизонтальные перемещения точек полубесконечных пластин на линиях $y=a$ и $y=-c$; (E,μ,ν) и (E_1,μ_1,ν_1) – упругие характеристики верхней и нижней полубесконечных пластин соответственно; E и E_1 – модули упругости, μ и μ_1 – модули сдвига, а ν и ν_1 – коэффициенты Пуассона полубесконечных пластин.

Заметим, что на линиях крепления стрингеров с полубесконечными пластинами, должны удовлетворяться следующие контактные условия:

$$\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx}=\frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} \qquad (-\infty<x<\infty), \qquad (1.10)$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx}=\frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx} \qquad (-b\le x\le d). \qquad (1.11)$$

Теперь учитывая контактные условия (1.10) и (1.11), из (1.1), (1.2), (1.7) и (1.8) относительно неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностями $²^{(1)}(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ и $²^{(2)}(x)$ $(-b \le x \le d)$, которые являются основными неизвестными функциями в рассматриваемой контактной задаче, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{®}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{s-x}+ª®¯(s-x)+K_{11}^{*}(s-x)\right]²^{(1)}(s)ds+\frac{1}{®}\int_{-b}^{d}K_{12}(u-x)²^{(2)}(u)du=$$

$$=ªP¯(-x) \qquad (-\infty < x < \infty), \qquad (1.12)$$

$$\frac{1}{®}\int_{-b}^{d}\left[\frac{1}{u-x}+ª_1®¯(u-x)+K_{22}^{*}(u-x)\right]²^{(2)}(u)du+\frac{1}{®}\int_{-\infty}^{\infty}K_{21}(s-x)²^{(1)}(s)ds=$$

$$=ª_1 Q-\frac{hl_1}{E_1}±_0 \quad (-b \le x \le d), \qquad (1.13)$$

где $ª=\dfrac{hl}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}$, $ª_1=\dfrac{hl_1}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}$.

Здесь интегралы с ядрами Коши в точках $s = x$ и $u = x$ в системе сингулярных интегральных уравнений первого рода (1.12) и (1.13), трактуются в смысле их главного значения по Коши.

Таким образом, решение поставленной контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений первого рода (1.12) и (1.13) при условиях (1.4), с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей.

2. С целью решения системы сингулярных интегральных уравнений первого рода (1.12) и (1.13) при условиях (1.4), поступим следующим образом: применив к сингулярному интегральному уравнению первого рода (1.12) обобщенное интегральное преобразование Фурье, после некоторых преобразований, получим следующее функциональное уравнение относительно трансформанта Фурье функции $²^{(1)}(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ [5]:

$$\left[ª+|±|+K_1(|±|)\right]\bar{²}^{(1)}(±)=ªP+K_2(|±|)\ddot{\,}(±) \qquad (-\infty < ± < \infty), \quad (2.1)$$

при этом из первого условия (1.4) получим $\bar{²}^{(1)}(0)=P$.

Здесь приняты следующие обозначения:

$$K_1(|±|)=\left(-d_1+2d_2a|±|-d_3a^2±^2\right)|±|e^{-2a|±|};\quad \bar{²}^{(1)}(±)=\int_{-\infty}^{\infty}²^{(1)}(s)e^{i±s}ds,$$

$$(-\infty < ± < \infty), \quad (2.2)$$

$$K_2\left(|\pm|\right)=\left(-d_4+(cd_5+ad_6)|\pm|\right)|\pm|\,e^{-(a+c)|\pm|};\quad ¨(\pm)=\int_{-b}^{d} ²^{(2)}(u)e^{i\pm u}du,$$

где $\pm$ – параметр преобразования Фурье. Отметим, что (2.1) тождественно удовлетворяет условию $ƶ^{(1)}(0)=P$. Решая (2.1) относительно $ƶ^{(1)}(\pm)$ получим:

$$ƶ^{(1)}(\pm)=\frac{ªP}{ª+|\pm|+K_1\left(|\pm|\right)}+\frac{K_2\left(|\pm|\right)¨(\pm)}{ª+|\pm|+K_1\left(|\pm|\right)}\qquad(-\infty<\pm<\infty).\qquad(2.3)$$

Теперь применив к (2.3) обратное преобразование Фурье, получим связь между искомыми функциями $²^{(1)}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ и $²^{(2)}(x)$ $(-b\le x\le d)$:

$$²^{(1)}(x)=ªPB_1(x)+\int_{-b}^{d}B_2(u-x)²^{(2)}(u)du\qquad(-\infty<x<\infty),\qquad(2.4)$$

где

$$B_1(x)=\frac{1}{®}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\pm x)d\pm}{ª+\pm+K_1(\pm)};\quad \mathrm{B}_2(x)=\frac{1}{®}\int_0^{\infty}\frac{K_2(\pm)\cos(\pm x)d\pm}{ª+\pm+K_1(\pm)}.\qquad(2.5)$$

Таким образом, распределение неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностью $²^{(1)}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ в бесконечном интервале выражается через распределение неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностью $²^{(2)}(x)$ $(-b\le x\le d)$ в конечном интервале формулой (2.4).

3. С целью нахождения $²^{(2)}(x)(-b\le x\le d)$, подставив значение функции $²^{(1)}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ из формулы (2.4) в сингулярное интегральное уравнение первого рода (1.13), после некоторых преобразований для определения $²^{(2)}(x)(-b\le x\le d)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром, состоящим из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{®}\int_{-b}^{d}\left[\frac{1}{u-x}+ª_1®^{-}(u-x)+K_{22}^{*}(u-x)+B(u;x)\right]²^{(2)}(u)du=$$

$$=ª_1Q-\frac{hl_1}{E_1}\pm_0-\frac{ª_1P}{®}C(x)\qquad(-b\le x\le d),\qquad(3.1)$$

где

$$C(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K_{21}(s-x)B_1(s)ds;\qquad B(u;x)=\int_{-\infty}^{\infty}K_{21}(s-x)B_2(u-s)ds,\qquad(3.2)$$

Отметим, что сингулярное интегральное уравнение (3.1) должно удовлетворить второму условию (1.4).

Представим решение сингулярного интегрального уравнения первого рода (3.1) при наличии второго условия (1.4) в виде бесконечного ряда:

$$ ²^{(2)}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-h^2(u)}} \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n \left[h(u)\right]; \quad h(u) = \frac{2u+b-d}{b+d}; \quad \left|h(u)\right| < 1, \qquad (3.3) $$

здесь $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(n = 0,1,2,...)$ – многочлены Чебышева первого рода, а неизвестные коэффициенты $X_n (n = 0,1,2,...)$ подлежат определению.

Подставляя выражение $²^{(2)}(u)$ из представления (3.3) в сингулярное интегральное уравнение первого рода (3.1), при этом используя известные спектральные интегральные соотношения [2,4]:

$$ \frac{1}{®} \int_{-b}^{d} \frac{1}{u-x} \frac{T_n\left[h(u)\right]}{\sqrt{1-h^2(u)}} du = \begin{cases} 0; & n = 0, \\ U_{n-1}\left[h(x)\right]; & (n = 1,2,3,...), \end{cases} \qquad (-b \le x \le d), $$

$$ \frac{1}{®} \int_{-b}^{d} \sqrt{1-h^2(u)} U_{n-1}\left[h(u)\right] U_{m-1}\left[h(u)\right] du = \begin{cases} 0; & n \ne m, \\ \frac{b+d}{4}; & n = m, \end{cases} \quad (n;m = 1,2,3,...), \qquad (3.4) $$

где $U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$ $(n = 0,1,2,...)$ – многочлены Чебышева второго рода и поступив традиционным способом [2,4,6], получим следующую квазивполне регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов X_n $(n = 1,2,3,...)$:

$$ X_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} X_n = \sim_m \qquad (m = 1,2,3,...). \qquad (3.5) $$

Ядро неизвестных и свободный член бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (3.5) определяются следующим образом:

$$ A_{nm} = A_{nm}^{(1)} + A_{nm}^{(2)}; \quad \sim_m = \sim_m^{(1)} + \sim_m^{(2)} - X_0 A_{0m} $$

$$ A_{nm}^{(1)} = -\frac{ª_1(b+d)}{®} \begin{cases} 0; & \left|m-n\right| = 1, \\ \frac{2m\left[1+(-1)^{m+n}\right]}{\left[(m+n)^2-1\right]\left[(m-n)^2-1\right]}; & \left|m-n\right| \ne 1, \end{cases} \qquad (3.6) $$

$$ A_{nm}^{(2)} = \frac{4}{®^2(b+d)} \int_{-b}^{d}\int_{-b}^{d} \left[K_{22}^{*}(u-x) + B(u;x)\right] \frac{\sqrt{1-h^2(x)}}{\sqrt{1-h^2(u)}} T_n\left[h(u)\right] U_{m-1}\left[h(x)\right] du dx, $$

$$ \sim_m^{(2)} = -\frac{4ªP}{®^2(b+d)} \int_{-b}^{d} C(x)\sqrt{1-h^2(x)} U_{m-1}\left[h(x)\right] dx; \quad \sim_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \ne 1, \\ ª_1 Q - \frac{hl_1}{E_1} ±_0; & m = 1, \end{cases} $$

$(n; m = 1, 2, 3, \ldots).$

Здесь неизвестный коэффициент X_0 определяется из второго условия равновесия упругого конечного стрингера (1.4), и имеет следующий вид:

$$X_0 = \frac{2Q}{\text{®}(b+d)}. \qquad (3.7)$$

Так как интенсивность неизвестных тангенциальных контактных усилий $\text{²}^{(2)}(u)$ представлен в виде бесконечного ряда (3.3), то на основе (1.6) нормальные напряжения, возникающие в конечном стрингере, можно определить следующим образом:

$$\pm_x^{(2)}(x; -c) = \frac{Q}{\text{®} F_S^{(2)}}\left[\text{®} - \arccos h(x)\right] - \frac{b+d}{2F_S^{(2)}}\sqrt{1-h^2(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}X_n U_{n-1}\left[h(x)\right], \qquad (3.8)$$

$$(-b \le x \le d).$$

Отметим, что нормальные напряжения, возникающие в бесконечном стрингере на основе (2.4), определяются с помощью формулы (1.5).

В частном случае, когда конечный стрингер отсутствует и $P = 0$, то из (2.1) получим следующее однородное функциональное уравнение:

$$\left[\text{ª} + |\pm| + K_1\left(|\pm|\right)\right]\bar{\text{²}}^{(1)}(\pm) = 0 \qquad (-\infty < \pm < \infty), \qquad (3.9)$$

откуда следует, что $\bar{\text{²}}^{(1)}(\pm) = 0$, следовательно и $\text{²}^{(1)}(x) = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$. Это означает, что несмотря на то, что бесконечный упругий стрингер находится в напряженном состоянии, но напряженное состояние от него не передается основанию.

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (3.5) с ядром A_{nm} $(n, m = 1, 2, 3, \ldots)$ и свободным членом $\sim_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, которые даются формулами (3.6).

В конце отметим, что исследование бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (3.5) производится аналогично, как в [2,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. //ПМ. Труды Амер. Общ. Инж. мех. Сер. Е. 1968. №4. с. 124-135.
2. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. // ПММ. 1974. Т. 38. № 2. С. 321-330.

3. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. //Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т. 62. №3. С.29-43.
4. Оганисян Г.В. Контактная задача для кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной конечным и полубесконечным стрингерами. //Межвузовский сборник научных трудов. Механика, Ереван: изд. ЕГУ, 1986, № 4, с. 136-145.
5. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 831 с.
6. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. // М.: Машиностроение, 1980. 416 с.

Сведения об авторах:

Григорян Эдвард Хосровович- доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры механики ЕГУ, фак. математики и механики. Ереван, Алека Манукяна 1.
Тел: (+374 10) 23-03-89.

Оганисян Гамлет Вараздатович- кандидат физ.- мат. наук, ст. научный сотрудник, преподаватель кафедры механики ЕГУ, фак. математики и механики. Ереван, Алека Манукяна 1. Тел: (+374 93) 27-26-26.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ У СВОБОДНОГО ТОРЦА ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Гулгазарян Г.Р., Хачанян А.А

Ереван, Армения

Исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленным торцами при наличии жесткого защемления на граничных образующих. Используя систему уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом при наличии жесткого защемления на граничных образующих. На примерах незамкнутых ортотропных цилиндрических оболочек с разными длинами получены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответственных форм колебаний.

1. Постановка задачи. На срединной поверхности цилиндрической оболочки вводятся криволинейные координаты $(\sim,\ \ )$, где $\sim (0 \le \sim \le l)$ и $(0 \le \ \ \le s)$ являются соответственно длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности, l – длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей окружности. В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанные в выбранных криволинейных координатах $\sim$,

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{h^2}{12}n_{ij}+l_{ij}\right)u_j = {}^{\text{a}}u_i\ ,i=\overline{1,3} \qquad (1)$$

Здесь h–толщина оболочки, (u_1,u_2,u_3) – вектор перемещения, n_{ij} и l_{ij}, $i,\, j=\overline{1,3}$ – дифференциальные операторы, явный вид которых можно найти в [1]. $ª = \mu^2 °$, где ω – угловая частота собственных колебаний, $°$ – плотность материала. Граничные условия имеют вид [2]

$$T_1\big|_{\sim=0} = S_{12} + \frac{H}{R}\bigg|_{\sim=0} = N_1 + \frac{\partial H}{\partial}\bigg|_{\sim=0} = M_1\big|_{\sim=0} = 0 \qquad (2)$$

$$T_1\big|_{\sim=l} = u_2\big|_{\sim=l} = u_3\big|_{\sim=l} = M_1\big|_{\sim=l} = 0 \qquad (3)$$

$$u_1\big|_{=0,s} = u_2\big|_{=0,s} = u_3\big|_{=0,s} = \frac{\partial u_3}{\partial}\bigg|_{=0,s} = 0, \qquad (4)$$

где соотношения (2) являются условиями свободного края при $\sim = 0$, условия (3) являются условиями шарнирного закрепления при $\sim = l$, а соотношения (4) – условиями жесткого защемления при $= 0, \; = s$. Задача не допускает разделения переменных. Для нахождения собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича–Власова [3]. В качестве базисных функций используются собственные функции задачи

$$w^{IV} = \bar{}^{\,4} w, \quad w\big|_{=0,s} = w'\big|_{=0,s} = 0, \; 0 \le \; \le s. \qquad (5)$$

Собственным значениям $\bar{}^{\,4}_m, \; m = \overline{1,+\infty}$ задачи (5) соответствуют собственные функции

$$w_m(\theta_m\beta) = \sin\frac{\theta_m s}{2}(\mathrm{ch}\theta_m\beta - \cos\theta_m\beta) - \cos\frac{\theta_m s}{2}(\mathrm{sh}\theta_m\beta - \sin\theta_m\beta),$$
$$0 \le \beta \le s, m = \overline{1,+\infty}. \qquad (6)$$

Заметим, что $\bar{}_m, \; m = \overline{1,+\infty}$ находятся из уравнения $\mathrm{ch}\theta s \cos\theta s = 1$. Пусть

$$k = \frac{®}{s}; \;\; \bar{}_m = k\, m «_m, \; m \in N; \quad {}_m = \int_0^s w''^2{}_m(\bar{}_m \;)d \;\; / \int_0^s w'^2{}_m(\bar{}_m \;)d \; . \qquad (7)$$

2. Дисперсионные уравнения. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1), спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Представим радиус кривизны цилиндрической оболочки в виде $R^{-1} = kr_0/2$, где $k = ®/s$, а r_0 – безразмерный параметр. Решение системы (1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m(\theta_m\beta), v_m w'_m(\theta_m\beta), w_m(\theta_m\beta)\}\exp(k\chi\alpha), \; m = \overline{1,+\infty}. \qquad (8)$$

Здесь $w_m(\overline{\ }_m\ )$ – определяется по формуле (6) , u_m, v_m – неопределенные коэффициенты, ¡ – неопределенный коэффициент затухания. При этом, условия (4) выполняются автоматически. Подставим (8) в (1). Из первых двух уравнений имеем

$$(c_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m d_m) u_m = \frac{r_0 ¡}{2} \left\{ a_m - a^2 m_*^2 \frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}} l_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} d_m \right\} \quad (9),$$

$$(c_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m d_m) v_{cm} = \frac{r_0 m«_m}{2} \left\{ b_m - a^2 g_m l_m \right\}$$

где B_{ij} –коэффициенты упругости. Из третьего уравнения, учитывая соотношения (9), получим характеристическое уравнение (ср. [1,4])

$$R_{mm} c_m + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_m + m_*^2 b_m - \frac{B_{12}}{B_{22}} ¡^2 a_m + a^2 \left[R_{mm} g_m d_m - m_*^2 b_m \left(\frac{2(B_{12}+4B_{66})}{B_{22}} ¡^2 - \frac{m_*^2 (1+\ _m^2)}{_m^2} \right) \right] + \right. \quad (10)$$

$$\left. + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m (b_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} ¡^2) + a^4 m_*^2 g_m l_m \left(\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}} ¡^2 - \frac{m_*^2}{_m^2} \right) \right\} = 0;$$

$$a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} ¡^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} ¦_2^2, \quad b_m = B_1 ¡^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} ¦_1^2, \quad B_1 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}},$$

$$c_m = ¡^4 - B_2 m_*^2 ¡^2 + \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} ¦_1^2 + ¦_2^2 \right) m_*^2 ¡^2 + (m_*^2 - ¦_1^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} ¦_2^2 \right), \; d_m = \frac{4B_{66}}{B_{22}} ¡^2 - m_*^2,$$

$$B_2 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}, l_m = \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}} ¡^2 - m_*^2, g_m = \frac{B_{22}}{B_{66}} ¡^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} ¦_1^2, a^2 = «^4 k^2,$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} ¡^4 - \frac{2(B_{12}+2B_{66}) m_*^2}{B_{22}} ¡^2 + \frac{m_*^4}{_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} ¦_3^2, \; m_*^2 = m^2 «_m^2\ _m, \; ¦_i^2 = \frac{a_i}{B_{66} k^2}, \; i = \overline{1,3}.$$

Пусть $¡_j,\ j = \overline{1,4}$ – попарно различные нули уравнения (1) с неположительными действительными частями, тогда $¡_5 = -¡_1,\ ¡_6 = -¡_2,\ \chi_7 = -\chi_3,\ \chi_8 = -\chi_4$ также попарно различные нули этого уравнения. Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}),\ j = \overline{1,8}$ нетривиальные решения вида (8) системы (1) при $¡ = ¡_j, j = \overline{1,8}$ соответственно. Решение задачи (1)-(4) ищем в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^{8} w_j u_i^{(j)},\ i = \overline{1,3}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в граничные условия (2), (3), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1,8} \qquad (12)$$

$$M_{1j}^{(m)} = \text{¡}_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11}^2} d_m^{(j)} (m_*^2 - \text{¦}_1^2) -$$

$$- a^2 m_*^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} l_m^{(j)} \left(\text{¡}_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \text{¦}_1^2 \right),$$

$$M_{2j}^{(m)} = \text{¡}_j \left\{ a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2 \left[4c_m^{(j)} - l_m^{(j)} \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} \text{¡}_j^2 + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \text{¦}_1^2 \right) \right] + \right.$$

$$\left. + a^2 \frac{r_0^2}{4} \left(4b_m^{(j)} + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_m^{(j)} - 4a^2 \frac{B_{12}}{B_{22}} \text{¡}_j^2 g_m^{(j)} \right) \right\},$$

$$M_{3j}^{(m)} = \left(\text{¡}_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 \text{¡}_j^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \text{¡}_j^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} m_*^2 \right) - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right]$$

$$M_{4j}^{(m)} = \text{¡}_j \left\{ \left(\text{¡}_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 \text{¡}_j^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \text{¡}_j^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{22}} m_*^2 \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right] \right\}, \quad M_{5j}^{(m)} = M_{1j}^{(m)} \exp(z_j), \quad M_{6j}^{(m)} = (b_m^{(j)} - a^2 g_m^{(j)} l_m^{(j)}) \exp(z_j),$$

$$M_{7j}^{(m)} = \left(c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(j)} l_m^{(j)} \right) \exp(z_j), M_{8j}^{(m)} = M_{3j}^{(m)} \exp(z_j), \; z_j = k \text{¡}_j l, \; j = \overline{1,8}$$

Верхний индекс j в скобках означает, что соответствующая функция взята при $\text{¡} = \text{¡}_j$. Чтобы система (12) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$Det \left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^{8} = m_*^{34} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \, Det \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0 \qquad (13)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

$$x_j = \gamma_j / m_*, \ j = \overline{1,8}; \ \eta_{im} = \eta_i / m_*, \ i = \overline{1,3};$$

Выражения для m_{ij} не приводятся. Уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$Det\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = 0 . \qquad (14)$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3, заключаем, что уравнение (14) определяет частоты соответствующих типов колебаний. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ уравнение (10) - характеристическое уравнение системы (1); уравнение (14) – дисперсионное уравнение задачи (1)-(4).

3. Асимптотика дисперсионного уравнения при $r_0 \to 0$**.** Используя предыдущие формулы предположим, что $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m = \eta / m_*$. Тогда при $r_0 \to 0$ уравнение (10) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m = \gamma^4 - B_2 \gamma^2 m_*^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \gamma^2 + (m_*^2 - \eta^2)\left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2\right) = 0 , \qquad (15)$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \gamma^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})m_*^2}{B_{22}} \gamma^2 + \frac{m_*^4}{\eta_m^2}\right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0 \ . \qquad (16)$$

Уравнения (15), (16) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно, когда две противолежащие стороны жестко защемлены. Корни γ / m_* уравнений (15) и (16) с неположительными действительными частями обозначаются через y_1, y_2 и y_3, y_4 соответственно. Доказывается, что

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = (1 - \eta_m^2) N(\eta_m) N_0(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) \overline{L}_m(\eta_m) \overline{G}_m(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) = 0, \qquad (17)$$

$$N(\eta_m) = (y_3 + y_1)(y_3 + y_2)(y_4 + y_1)(y_4 + y_2), \ N_0(\eta_m) = (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) N(\eta_m),$$

$$\overline{L}_m(\eta_m) = K_{2m}(\eta_m)(1 - \exp(2(z_1 + z_2))) + (y_1 + y_2) K_{5m}(\eta_m)(\exp(z_1) + \exp(z_2))[z_1 z_2],$$

$$\overline{G}_m(\eta_m) = K_{1m}(\eta_m)(1 - \exp(2(z_3 + z_4))) + (y_3 + y_4) K_{4m}(\eta_m)(\exp(z_3) + \exp(z_4))[z_3 z_4],$$

$$[z_1 z_2] = k m_* l(\exp(z_2) - \exp(z_1))/(z_2 - z_1), \ [z_3 z_4] = k m_* l(\exp(z_3) - \exp(z_4))/(z_3 - z_4).$$

$$K_{im}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2)\left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2\right) + (-1)^{i-1} \eta_m^2 y_1 y_2, \ i = 2,5,$$

$$K_{im}(\eta_m)=y_3^2y_4^2+(-1)^{i-1}4\frac{B_{66}}{B_{11}}y_3y_4-\left(\frac{B_{12}}{B_{11}}\right)^2,\ i=1{,}4;\ z_j=km_*y_jl,\ j=\overline{1{,}4}.$$

$$K_{3m}(\eta_m)=(a_m^{(1)}-a^2m^2\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}}l_m^{(1)})(a_m^{(2)}-a^2m^2\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}}l_m^{(2)}).$$

Из (17) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$ уравнения (14) распадаются на уравнения

$$\overline{L}_m(\eta_m)=0,\ \overline{G}_m(\eta_m)=0,\ \ K_{3m}(\eta_m)=0. \qquad (18)$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний в аналогичной задаче для ортотропной прямоугольной пластинки (со свободной и шарнирно закрепленной противолежащими сторонами, когда другие стороны жестко защемлены). Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Если y_1, y_2 и y_3, y_4 – корни уравнения (15) и (16) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $m_*l \to \infty$ уравнение (14) преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8}&=(1-\eta_m^2)N(\eta_m)N_0(\eta_m)K_{1m}(\eta_m)K_{2m}(\eta_m)K_{3m}^2(\eta_m)+\\&+O(\varepsilon_m^2)+\sum\nolimits_{j=1}^{4}O(\exp(z_j))=0.\end{aligned} \qquad (19)$$

Из (19) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$ и $m_*l \to \infty$ дисперсионное уравнение (14) распадается на уравнения

$$K_{1m}(\eta_m)=0,\ K_{2m}(\eta_m)=0,\ K_{3m}(\eta_m)=0 \qquad (20)$$

Первые два уравнения (20) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом при наличии жесткого защемления на боковых краях соответственно. Следовательно, при малых ε_m и больших m_*l приближенные значения корней уравнения (14) являются корнями уравнения (20).

4. Асимптотика дисперсионного уравнения (14) при $l \to \infty$. При использовании предыдущих формул будем полагать, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (10)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (14) можно привести к виду

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8}=\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}\cdot\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=5}^{8}+\sum\nolimits_{j=1}^{4}O(\exp(k\chi_jl))=0. \qquad (21)$$

Откуда следует, что при $m_*l \to \infty$ уравнение (1) распадается на уравнения

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}=0;\quad \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=5}^{8}=0. \qquad (22)$$

Первое из них при $m \in N$ определяет всевозможные локализованные собственные колебания у свободного торца полубесконечной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих. Если $£_m \to 0$, имеем

$$Det\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}=N(¦_m)K_{1m}(¦_m)K_{2m}(¦_m)K_{3m}(¦_m)+O(£_m^2), \qquad (23)$$

$$Det\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=5}^{8}=(1-¦_m^2)N_0(¦_m)K_{3m}(¦_m)+O(£_m^2). \qquad (24)$$

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (17) и (19) дисперсионного уравнения (14) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (1)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулгазарян, Г.Р. Свободные колебания тонкой упругой ортотропной консольной цилиндрической оболочки // Прикл. механика. –2008. –44, № 5. с. 68–91.
2. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек– М.: Наука, 1974. 446с.
3. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // Инж.–физ. журн. 1982. 42, №6. с. 1007 – 1013.
4. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., R.D. Saakyan The vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges // J. of Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – 72, № 3. – P. 312 – 322.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, доктор физ.-мат. наук, Армгоспедуниверситет имени Х. Абовяна. Профессор кафедры мат. анализа и теории функций. Ул. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. *Тел.:* (+37410) 64-91-21, (+37491) 706700. *e-mail:* ghulgr@yahoo.com

Хачанян Алвард Артаваздовна, соискатель кафедры мат. анализа и теории функций АГПУ им. Х. Абовяна. Тел.: (+37410) 638683, (+37455)638683.

ЗАДАЧА ТИПА ЛЭМБА ДЛЯ СПИНОВОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Даноян Н.З.
Ереван, Армения

Рассматривается ферромагнитное полупространство, занимающее область $y > 0$ в декартовой системе координат $0xyz$. Ось $0y$ направлена вглубь полупространства, ось $0z$ совпадает с осью легкого намагничивания ферромагнетика, вне среды предполагается вакуум. Объемная плотность намагниченности $\vec{M}_0 = °_0 \vec{«}_0$, где $\vec{«}_0$ – плотность намагниченности, отнесенная к единице массы, $°_0 -$ плотность ферромагнетика. Возмущения в среде характеризуются вектором магнитного момента $\vec{«}\left(«\left(x,y,t\right),¬\left(x,y,t\right),0\right)$, где $«\left(x,y,t\right)$ и $¬\left(x,y,t\right) -$ компоненты вектора магнитного момента по оси $0x$ и $0y$, соответственно), а также напряженностью магнитного поля $\vec{h} = -\mathrm{grad}\, ¨\left(x,y,t\right)$, где $¨\left(x,y,t\right) -$ магнитостатический потенциал магнитного поля в среде. Возмущение в вакууме характеризуется напряженностью магнитного поля $\vec{h}_e = -\mathrm{grad}\, ¨_e\left(x,y,t\right)$, где $¨_e\left(x,y,t\right) -$ магнитостатический потенциал поля в вакууме. Волновое поле в среде представляется следующей системой уравнений [1,2] (при $y > 0$ и $ª = 0$):

$$\frac{\partial «}{\partial t} = \Omega_M\left(\frac{1}{°_0}\frac{\partial ¨}{\partial y} + \hat{b}¬\right), \frac{\partial ¬}{\partial t} = \Omega_M\left(-\frac{1}{°_0}\frac{\partial ¨}{\partial x} - \hat{b}«\right),\ \Delta ¨ = °_0\left(\frac{\partial «}{\partial x} + \frac{\partial ¬}{\partial y}\right), \quad (1)$$

где $\Omega_M = ¥_0 °_0 «_0, ¥_0 -$ гирромагнитное отношение, $¥_0 = 1,76 \times 10^7$ (эрс.$\times$сек)$^{-1}$, $\hat{b} -$ постоянная магнитной анизотропии.

В вакууме, в области $y < 0,$ процесс представляется уравнением:

$$\Delta ¨_e = 0,\ \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Постановка задачи. По аналогии с задачей Лэмба для упругого полупространства будем полагать, что по линии совпадающей с осью $0z,$ т.е. при $x = y = 0$ в момент времени $t = 0$ дается импульс магнитного потенциала:

$$\text{¨}\left(x,y,t\right)|_{y=o}=\text{¨}_0\,\text{¢}\left(x\right)\text{¢}\left(t\right), \tag{3}$$

где $\text{¨}_0-\mathrm{const},\text{¢}\left(x\right)$ и $\text{¢}\left(t\right)-$ дельта – функции Дирака. Намагниченность среды в начальный момент $t=0,$ описывается следующими функциями для компонент вектора намагничения $\vec{\text{«}}\left(x,y,t\right)$ ферромагнетика:

$$\text{«}\left(x,y,t\right)|_{t=0}=\text{«}_0\left(x,y\right),\text{¬}\left(x,y,t\right)|_{t=0}=\text{¬}_0\left(x,y\right), \tag{4}$$

где «_0 и ¬_0-заданные функции. Условия непрерывности магнитного потенциала на границе $y=0$ и условия затухания представляются так:

$$\text{¨}\,|_{y=0}=\text{¨}_e\,|_{y=0}=\text{¨}_0\,\text{¢}\left(x\right)\text{¢}\left(t\right), \tag{5}$$

$$\text{«},\text{¬},\text{¨}\to 0 \text{ при } y\to+\infty \text{ и } \text{¨}_e\to 0 \text{ при } y\to-\infty. \tag{6}$$

Окончательно задача формулируется следующим образом: решить систему (1) и уравнение (2) при начальных условиях (4), граничных условиях (5), с учетом условий затухания (6). Прежде, чем решить сформулированную задачу, сделаем некоторые преобразования системы (1), которые приведут нас к системе:

$$\frac{\partial\text{«}}{\partial x}+\frac{\partial\text{¬}}{\partial y}=\frac{1}{\Omega_M}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\text{«}}{\partial y}-\frac{\partial\text{¬}}{\partial x}\right)-\hat{b}\Omega_M\left(\frac{\partial\text{«}}{\partial x}+\frac{\partial\text{¬}}{\partial y}\right)\right], \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\text{«}}{\partial x}+\frac{\partial\text{¬}}{\partial y}\right)=\hat{b}\Omega_M\left(\frac{\partial\text{¬}}{\partial x}-\frac{\partial\text{«}}{\partial y}\right).$$

Введем обозначения:

$$\frac{\partial\text{«}}{\partial x}+\frac{\partial\text{¬}}{\partial y}=u,\ \frac{\partial\text{«}}{\partial y}-\frac{\partial\text{¬}}{\partial x}=v. \tag{8}$$

Система (7) в этих обозначениях примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\hat{b}\Omega_M v,\ \frac{\partial v}{\partial t}=\Omega_M\left(1+\hat{b}\right)u. \tag{9}$$

Отсюда следует уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\text{\textasciitilde}^2u=0,\ (10)$$

где $\sim^2 = \Omega^2_M\, \Omega^2_{SV}$, $\Omega^2_{SV} = \hat{b}\left(1+\hat{b}\right)$. Общее решение этого уравнения представляется так:

$$u(x,y,t) = A(x,y)\cos at + B(x,y)\sin at, \qquad (11)$$

где A и B – произвольные функции x и y. Добавив к (11) значение v, найденное из первого уравнения (9) мы получим решение системы (9):

$$u = A\cos at + B\sin at, v = \sqrt{\frac{1+\hat{b}}{\hat{b}}}\left(A\sin at - B\cos at\right). \qquad (12)$$

Переходя к « и ¬ , получим систему:

$$\frac{\partial«}{\partial x} + \frac{\partial¬}{\partial y} = A\cos at + B\sin at, \frac{\partial«}{\partial y} - \frac{\partial¬}{\partial x} = \sqrt{\frac{1+\hat{b}}{\hat{b}}}\left(A\sin at - B\cos at\right). \qquad (13)$$

Таким образом, исходная система (1) свелась к более простой системе (13). Неизвестные функции A и B можно найти, если записать систему (13) при $t = 0$ и воспользоваться начальным условием (4), тогда получим:

$$A = \frac{\partial«_0}{\partial x} + \frac{\partial¬_0}{\partial y}, B = -\sqrt{\frac{\hat{b}}{1+\hat{b}}}\left(\frac{\partial«_0}{\partial y} - \frac{\partial¬_0}{\partial x}\right). \qquad (14)$$

Теперь сделаем преобразование Фурье по x (параметр $\sim$) системы (13)

$$\begin{cases} -i\sim\overline{«}(y,\sim,t) + \dfrac{\partial\overline{¬}(y,\sim,t)}{\partial y} = \overline{A}(y,\sim)\cos at + \overline{B}(y,\sim)\cos at, \\ \dfrac{\partial\overline{«}(y,\sim,t)}{\partial y} + i\sim\overline{¬}(y,\sim,t) = \sqrt{\dfrac{1+\hat{b}}{\hat{b}}}\left(\overline{A}\sin at - \overline{B}\cos at\right). \end{cases} \qquad (15)$$

Граничное условие (3) примет вид:

$$\overline{¨}(y,\sim,t)|_{y=0} = \frac{\ddot{}_0}{\sqrt{2®}}¢(t), \qquad (16)$$

где черточка означает изображение данной величины. Из (15) следует уравнение:

$$\frac{\partial^2\overline{¬}}{\partial y^2} - \sim^2\overline{¬} = F_3(y,\sim,t), \qquad (17)$$

где

$$F_3\left(y,\sim,t\right) = F_1\cos at + F_2\sin at,$$

$$F_1\left(y,\sim\right) = \frac{\partial\bar{A}}{\partial y} - i\sim\sqrt{\frac{1+\hat{b}}{\hat{b}}}\,\bar{B}\left(y,\sim\right);\; F_2 = \frac{\partial\bar{B}}{\partial y} + i\sim\sqrt{\frac{1+\hat{b}}{\hat{b}}}\,\bar{A}.$$

Относительно $\bar{\neg}\left(y,\sim,t\right)$ мы получили неоднородное линейное уравнение.

Общее решение (17) имеет вид:

$$\bar{\neg}\left(y,\sim,t\right) = \left[c_1\left(\sim,t\right) + \int_0^y\left(\int_0^y F_3\left(y,\sim,t\right)e^{|\sim|y}dy\right)e^{-2|\sim|y}\right]e^{-|\sim|y}. \qquad (18)$$

Далее из первого уравнения (15) находим $\bar{\text{«}}$:

$$\bar{\text{«}} = ie^{-|\sim|y}\left[c_1\left(\sim,t\right) + \int_0^y\left(\int_0^y e^{|\sim|y}\cdot F_3dy\right)e^{-2|\sim|y}dy - \frac{e^{-2|\sim|y}}{|\sim|}\left(\int_0^y F_3e^{|\sim|y}dy\right) + \frac{e^{|\sim|y}}{|\sim|}\tilde{A}\right], \qquad (19)$$

где $\tilde{A} = \bar{A}\cos at + \bar{B}\sin at.$ Теперь с целью определения $\overline{\leftharpoonup}$ сделаем преобразование Фурье по x второго уравнения системы (1), получим:

$$\overline{\leftharpoonup} = \frac{\circ_0}{i\,|\sim|\,\Omega_M}\left(\frac{\partial\bar{\neg}}{\partial t} + \hat{b}\,\Omega_M\,\bar{\text{«}}\right), \qquad (20)$$

здесь $\bar{\neg}$ и $\bar{\text{«}}$ задаются выражениями (18) и (19).

Подставив (20) в (16), получим уравнение для определения $c_1\left(\sim,t\right)$:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + i\hat{b}\,\Omega_M c_1 = -\frac{i\hat{b}\,\Omega_M}{|\sim|}\tilde{A} + \frac{i\,|\sim|\,\Omega_M\,\ddot{\ }_0}{\circ_0\sqrt{2\text{®}}}\cdot\text{¢}\left(t\right). \qquad (21)$$

Итак изображения Фурье искомых величин в среде найдены.

Перейдем к нахождению поля в вакууме. Сделаем преобразование Фурье по x уравнения (2) и граничного условия (5), получим:

$$\frac{\partial^2\overline{\leftharpoonup}_e}{\partial y^2} - \sim^2\overline{\leftharpoonup}_e\left(y,\sim,t\right) = 0,\; \overline{\leftharpoonup}_e\,|_{y=0} = \frac{\ddot{\ }_0}{\sqrt{2\text{®}}}\,\text{¢}\left(t\right). \qquad (22)$$

Решив (22) и сделав далее обращение, мы придем к искомому решению:

$$\ddot{\ }_e\left(x,y,t\right)=\frac{\ddot{\ }_0}{\text{®}}\cdot\frac{y}{y^2+x^2}\text{¢}\left(t\right). \qquad (23)$$

Дальнейшее исследование задачи для различных начальных магнитных состояний среды входит в число ближайших целей авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.; Наука, 1991. 560 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А., Атоян Л.А. Отражение спиновых (магнитных) волн от границы ферромагнитного полупространства. ||Тр. VI межд.конф., сентябрь 21-26, Горис-Степанакерт, 2008.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович
Д.ф.-м.н., зав. Отделом Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б
E-mail: mechins@sci.am

Атоян Левон Арутюнович
К.ф.-м.н., ст.науч. сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б
E-mail: mechins@sci.am

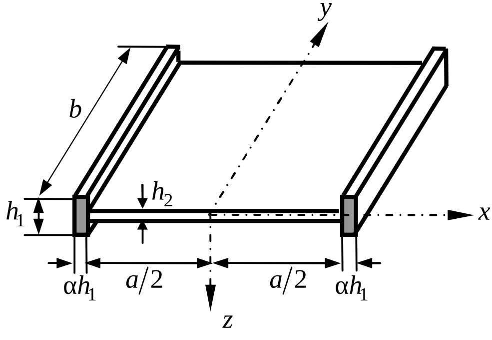
Даноян Нерсес Завенович
Научный сотрудник Института механики НАН Армении
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24б
E-mail: mechins@sci.am

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕБРИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ИЗГИБЕ

Дарбинян А.З.
Ереван, Армения

Вопросам изгиба пластинки, усиленной по краям ребрами жесткости, посвящена работа [1]. Здесь рассматривается случай одновременного действия на пластинку поперечной нагрузки и температурного поля. Получены решения, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания пластинки на ее противоположных кромках и условиям упругого опирания на свободных краях. Произведена численная реализация задачи. Определено значение температуры, при котором пластинка практически не подвергается изгибу.

Рассматривается прямоугольная ортотропная пластина размерами $a \times b \times h_2$, шарнирно опертая по продольным кромкам $y = 0$, $y = b$ и подкрепленная ребрами жесткости сечением $\alpha h_1 \times h_1$ на свободных краях $x = \pm a/2$ (фиг.1). Предполагается, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки $q(y)$ при наличии стационарного температурного поля $T(x, y, z)$. Пластина изготовлена из монослоев ВКМ, поочередно уложенных между ребрами под углами $\pm\varphi$ к оси абсцисс, а на ребрах вдоль оси ординат.



Фиг.1

Такую пластинку можно считать ортотропной, для которой уравнение изгиба пластинки при наличии температурного поля имеет вид [2,3]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}+ \\ +\frac{\partial^2 R'_e(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R''_e(x,y)}{\partial y^2}=q(y) \tag{1}$$

где

$$R'_e(x,y)=(B_{11}\alpha_{1t}+B_{22}\alpha_{2t})\int_{-h_2/2}^{h_2/2} zT(x,y,z)\,dz$$

$$R''_e(x,y)=(B_{22}\alpha_{2t}+B_{12}\alpha_{1t})\int_{-h_2/2}^{h_2/2} zT(x,y,z)\,dz$$

$$B_{11}=B_{11}^0\cos^4\varphi+2\left(B_{12}^0+2B_{66}^0\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+B_{22}^0\sin^4\varphi$$

$$B_{22}=B_{11}^0\sin^4\varphi+2\left(B_{12}^0+2B_{66}^0\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+B_{22}^0\cos^4\varphi$$

$$B_{12}=B_{12}^0+\left[B_{11}^0+B_{22}^0-2\left(B_{12}^0+2B_{66}^0\right)\right]\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$B_{66}=B_{66}^0+\left[B_{11}^0+B_{22}^0-2\left(B_{12}^0+2B_{66}^0\right)\right]\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$D_{ik}=\frac{h_2^3}{12}B_{ik}$$

α_{1t} и α_{2t} – коэффициенты температурного линейного расширения.

Допустим, что изменение температуры по толщине пластины следует линейному закону и что в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки, температура остается постоянной. Предположим, что верхняя поверхность прямоугольной пластины имеет положительную температуру, равную $T_0=\text{const}$, нижняя – отрицательную $(-T_0)$. Выбор такого распределения температуры обусловлен тем, что в таком случае изгиб пластины от температурных напряжений будет происходить вверх и, тем самым, противодействовать действию поперечной нагрузки $q(y)$.

В этом случае, $T(x,y,z) = 2zT_0/h_2$ и

$$R'_e(x,y) = R'_e = (B_{11}\alpha_{1t} + B_{22}\alpha_{2t})T_0 \frac{h_2^2}{6}$$

$$R''_e(x,y) = R''_e = (B_{22}\alpha_{2t} + B_{12}\alpha_{1t})T_0 \frac{h_2^2}{6}$$

Прогиб $w(x,y)$ представляется в виде [2]

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y)$$

где $w_1(x,y)$ – прогиб от нагрузки $q(y)$, а $w_2(x,y)$ – прогиб от действия температуры, который предполагается изменяющимся по параболическому закону [4]

$$w_2(x,y) = 0.5\frac{R''_e}{D_{22}} y(b-y)$$

Граничные условия запишутся в виде:
на кромках $y = 0,\ y = b$ – условия шарнирного опирания

$$w = 0, \qquad D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R''_e = 0 \tag{2}$$

на средней линии $x = 0$ – условия симметрии

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{3}$$

на кромке $x = a/2$ – условия упругого опирания на ребра жесткости

$$C\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R'_e \tag{4}$$

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \alpha h_1 q = D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(D_{12} + 4D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

где $C = G\alpha h_1^4 \beta$ – жесткость ребра при кручении, D_{ik} – цилиндрическая жесткость пластинки, $J = \alpha h_1^4 / 12$ – момент инерции ребра, $\beta = \alpha^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\alpha \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \mathrm{th}\frac{\pi n}{2\alpha}\right]$, E, G, B_{ik} – упругие постоянные материала пластинки.

Разлагая решение уравнения (1) в ряд Фурье и используя разложения

$$y\left(b - y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \lambda_k y, \qquad q\left(y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \lambda_k y$$

где

$$b_k = \frac{2}{b}\int_0^b y\left(b - y\right)\sin \lambda_k y dy$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{b},$$

$$q_k = \frac{2}{b}\int_0^b q\left(y\right)\sin \lambda_k y dy$$

получим систему относительно коэффициентов разложения.

Решение полученной системы, удовлетворяющее условиям (2) и (3), может быть различным в зависимости от корней характеристического уравнения

$$D_{11} m^4 - 2D_3 m^2 + D_{22} = 0 \qquad (5)$$

где

$$D_3 = D_{12} + 2D_{66}.$$

Очевидно, что

$$m^2 = \frac{1}{D_{11}}\left(D_3 \pm \sqrt{D_3^2 - D_{11} D_{22}}\right)$$

В зависимости от значений жесткостей пластинки показатель m может принимать как вещественные, так и комплексные значения, и, следовательно, решение однородного уравнения (1) будет иметь различные представления

1) пусть $D_3^2 - D_{11}D_{22} < 0$, тогда $m = \pm(\alpha + i\beta)$ и

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{q_k}{D_{22}\lambda_k^4} + c_{1k}\sinh\alpha\lambda_k x\sin\beta\lambda_k x + \right.$$
$$\left. + c_{3k}\cosh\alpha\lambda_k x\cos\beta\lambda_k x + 0.5\frac{R_e''}{D_{22}}b_k\right]\sin\lambda_k y \tag{6}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_{11}D_{22}}}{2D_{11}}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{D_{11}D_{22} - D_3^2}{2D_{11}\left(D_3 + \sqrt{D_{11}D_{22}}\right)}}$$

2) если $D_3^2 - D_{11}D_{22} > 0$, то

$$m_1 = \sqrt{\frac{D_3 + \sqrt{D_3^2 - D_{11}D_{22}}}{D_{11}}}; \quad m_2 = \sqrt{\frac{D_3 - \sqrt{D_3^2 - D_{11}D_{22}}}{D_{11}}}.$$

Тогда

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{q_k}{D_{22}\lambda_k^4} + c_{1k}\cosh m_1\lambda_k x + \right.$$
$$\left. + c_{3k}\cosh m_2\lambda_k x + 0.5\frac{R_e''}{D_{22}}b_k\right]\sin\lambda_k y \tag{7}$$

3) если $D_3^2 - D_{11}D_{22} = 0$, то $m_0 = m_1 = m_2 = \sqrt{\frac{D_3}{D_{11}}}$.

тогда

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{q_k}{D_{22}\lambda_k^4}+c_{1k}\cosh m_0\lambda_k x+\right.$$
$$\left.+c_{3k}x\sinh m_0\lambda_k x+0.5\frac{R_e''}{D_{22}}b_k\right]\sin\lambda_k y \qquad (8)$$

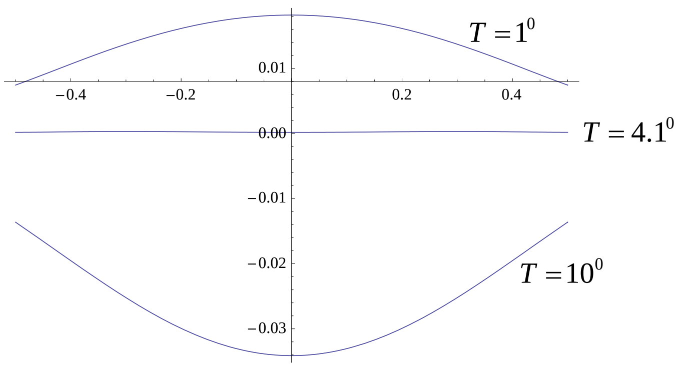
Коэффициенты c_{1k} и c_{3k} определяются из граничных условий (4). их выражения здесь не приводятся из-за громоздкости.

Численные расчеты проведены для квадратной пластины $(a=b=1м)$ при $q=1т/м^2$, изготовленной из Kevlar49/ERLA4617, для которой принято

$$E_1=69\,ГПа,\quad E_2=4.52\,ГПа,\quad G=2.48\,ГПа,\quad \nu_{12}=0.41,$$

$$\alpha_{1t}=-5.17\times10^{-6}K^{-1},\quad \alpha_{2t}=68.7\times10^{-6}K^{-1},$$

Для различных значений температуры построены графики изменения прогибов пластинки на линии $y=0.5b$ (фиг. 2).



Фиг.2

Как следует из приведенных графиков, при температуре $T=1^0$ прогибы пластинки получаются положительными, т.е. большее влияние на прогибы оказывает изменение температуры. Большим значениям температуры ($T=10^0$) соответствуют отрицательные прогибы, здесь влияние поперечной нагрузки более существенно. Можно определить значение температуры, при которой максимальный прогиб пластинки от совместного действия поперечной нагрузки и температуры становится равным нулю. В настоящем примере значение этой температуры получается равным $T=4.1^0$.

Как следует из графиков на фиг. 2 наибольшие значения прогибов на линии $y=0.5b$ получаются равными нулю, а в других точках пластинки они незначительны. Таким образом, соответствующим выбором температуры можно добиться того, чтобы пластинка практически не подвергалась изгибным деформациям.

Автор выражает благодарность проф. М.В.Белубекяну и проф. Э.В.Белубекяну за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З. Оптимизация по прочности прямоугольной пластинки из композиционного материала, усиленной по краям ребрами жесткости. // 6-ая Всесоюзная конф. по композ. матер. Ереван – Ленинакан: 1987. Т.2. С. 51-52.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., Наука, 1987.
3. Белубекян М.В., Саргсян М.Г., Саноян Ю.Г. Управление перемещениями в пьезопластинках с помощью электрического поля. //Вестник инженерной академии Армении. 2009. Т.6. №2. С.255-261.
4. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.

Сведения об авторе:

Дарбинян Артавазд Завенович,
К.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении,
Тел.: (374 77)30 48 81

ПЛОСКО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

Ереван, Армениа

Рассмотрим плоско-деформированное состояние составной плоскости, состоящей из двух различных полуплоскостей с коэффициентами Ламэ μ_1,λ_1 и μ_2,λ_2, когда на линии их соединения имеется периодическая система абсолютно жестких тонких включений длиной $2a$, нижние стороны которых жестко сцеплены с нижней полуплоскостью, а верхние стороны гладко контактируют с верхней полуплоскостью. Будем считать, что составная полуплоскость деформируется под действием сосредоточенных сил P_0, перпендикулярно приложенных к центру включений.

Ставится задача: построить замкнутое решение поставленной задачи.

Из-за периодичности поставленной задачи будем рассматривать напряженное состояние составной бесконечной полосы шириной $2l$, которая на линии стыка двух полубесконечных полос, занимающих области $D_{\pm}=\left\{-l\le x\le l; 0\le \pm y<\infty\right\}$, содержит абсолютно жесткое тонкое включение длиной $2a$, нижняя сторона которого жестко сцеплена с нижней полуплоскостью, а верхняя сторона гладко контактирует с верхней полуплоскостью. При этом, на граничных линиях полос $x=\pm l$ будут иметь место условия симметрии. Тогда, сохраняя обозначения [1], поставленную задачу можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}&\sigma_y^{(1)}(x,0)=\sigma_y^{(2)}(x,0),\ \ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0)\\ &u^{(1)}(x,0)=u^{(2)}(x,0),\ \ v^{(1)}(x,0)=v^{(2)}(x,0)\qquad (l>|x|>a)\end{aligned}\qquad(1.1а)$$

$$\begin{aligned}&v^{(1)}(x,0)=v^{(2)}(x,0)=\delta\\ &\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=u^{(2)}(x,0)=0\qquad |x|<a\end{aligned}\qquad(1.1б)$$

$$\begin{aligned}&\tau_{xy}^{(1)}\left(\pm l,y\right)=u^{(1)}\left(\pm l,y\right)=0\qquad \left(0<y<\infty\right)\\ &\tau_{xy}^{(2)}\left(\pm l,y\right)=u^{(2)}\left(\pm l,y\right)=0\qquad \left(-\infty<y<0\right)\end{aligned}\qquad(1.1в)$$

Здесь ₵ – жесткое смещение включения.

Для решения этой задачи используем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с периодическими дефектами, приведенными в работе [1]. Разделим в этих формулах действительные и мнимые части и удовлетворим условиям (1.1б), предварительно продифференцировав первое из них. В итоге, относительно скачков напряжений ± (x),² (x) и производной разности горизонтальных смещений $u'(x)$ придем к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} -d_0\sigma(x)+\dfrac{l_0}{\vartheta_2^{(2)}}u'(x)+\dfrac{d_1}{2l}\displaystyle\int_{-a}^{a} ctg\,\dfrac{\pi(s-x)}{2l}\tau(s)ds=0 \\ d_0\tau(x)+\dfrac{d_1}{2l}\displaystyle\int_{-a}^{a} ctg\,\dfrac{\pi(s-x)}{2l}\sigma(s)ds+ \\ +\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{l_2}{2l\vartheta_2^{(2)}}\int_{-a}^{a} ctg\,\dfrac{\pi(s-x)}{2l}u'(s)ds=0 \\ l_0\tau(x)-\dfrac{l_2}{2l}\displaystyle\int_{-a}^{a} ctg\,\dfrac{\pi(s-x)}{2l}\sigma(s)ds-\dfrac{l_3}{2l}\int_{-a}^{a} ctg\,\dfrac{\pi(s-x)}{2l}u'(s)ds=0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

При этом искомые функции должны удовлетворять условиям равновесия включения и непрерывности смещений в концевых точках включения, т.е. условиям

$$\int_{-a}^{a}\sigma(x)dx=P_0,\qquad \int_{-a}^{a}\tau(x)dx=0,\qquad \int_{-a}^{a}u'(x)dx=0 \qquad (1.3)$$

Чтобы построить решение уравнений (1.2), перейдем к новым переменным по формулам $\tau=\mathrm{tg}\left(\pi s/2l\right)$, $t=\mathrm{tg}\left(\pi x/2l\right)$ и введем обозначения

$$\sigma_*(t)=\sigma\left(\frac{2l}{\pi}\mathrm{arctg}t\right),\ \tau_*(t)=\tau\left(\frac{2l}{\pi}\mathrm{arctg}t\right) \qquad (1.4)$$

$$u_*'(t)=\frac{1}{\vartheta_2^{(2)}}u'\left(\frac{2l}{\pi}\mathrm{arctg}t\right),\ \alpha=\mathrm{tg}\frac{\pi a}{2l},\ A_1=\frac{d_1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\tau_*(\tau)}{1+\tau^2}\tau d\tau$$

Тогда система (1.2) и условия (1.3) примут вид:

$$\begin{cases} -d_0\sigma_*(t)+l_0u'_*(t)+\dfrac{d_1}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{\tau_*(\tau)}{\tau-t}d\tau=A_1 \\ d_0\tau_*(t)+\dfrac{d_1}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{\sigma_*(\tau)}{\tau-t}d\tau+\dfrac{l_2}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{u'_*(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \\ l_0\tau_*(t)-\dfrac{l_2}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{\sigma_*(\tau)}{\tau-t}d\tau-\dfrac{l_3}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{u'_*(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sigma_*(\tau)}{1+\tau^2}d\tau=\frac{\pi P_0}{2l},\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\tau_*(\tau)}{1+\tau^2}d\tau=0,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{u'_*(\tau)}{1+\tau^2}d\tau=0 \tag{1.6}$$

Построим решение системы (1.5) при условиях (1.6). Следуя [2], из последних двух уравнений (1.5) найдем

$$M\pm_*(x)+Nu'_*(x)=C_0\left(a^2-x^2\right)^{-1/2}/® \tag{1.7}$$

$$\left(M=l_0d_1+l_2d_0=\vartheta_2^{(1)}\Delta/2,\ N=\vartheta_1^{(2)}\vartheta_2^{(1)}\Delta\right) \tag{1.8}$$

где C_0 – неизвестная постоянная. Учитывая (1.6), получим

$$C_0=MP_0\sqrt{1+\alpha^2}\,/\,2l$$

Далее, определим из (1.8) функцию $u'_*(t)$ через функцию $\sigma_*(t)$ и подставим в первые два уравнения (1.6). В итоге, для определения скачков напряжений, получим систему двух сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_*(t)-\dfrac{\alpha_*}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{\tau_*(\tau)d\tau}{\tau-t}=\dfrac{C_0^*}{\pi\sqrt{\alpha^2-t^2}}-A_1^* \\ \tau_*(t)-\dfrac{\beta_*}{\pi}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{\sigma_*(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Здесь

$$\tilde{\Delta}=\vartheta_2^{(1)}\left(\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}\right)-\left(\vartheta_1^{(1)}-\vartheta_1^{(2)}\right)^2,\qquad C_0^*=l_0C_0/\tilde{\Delta}$$

$$\alpha_*=\vartheta_1^{(2)}\left(\vartheta_2^{(1)}+\vartheta_2^{(2)}\right)/\tilde{\Delta},\qquad \beta_*=\vartheta_2^{(2)}/\vartheta_1^{(2)}$$

Система (1.9) верна только в случае $\tilde{\Delta} \neq 0$. В этом случае, введя функции,

$$\varphi_j(x) = \sigma(x) + \lambda_j \tau(x), \quad (\lambda_j = (-1)^{j+1}\sqrt{\alpha/\beta} = (-1)^{j+1}\lambda, \quad j = 1,2)$$

систему уравнений (1.9) представим в виде двух отдельных сингулярных интегральных уравнений

$$\varphi_j(t) + \frac{q_j}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\varphi_j(\tau)}{\tau - t}d\tau = F\left(t\right) \tag{1.10}$$

$$\left(F\left(t\right) = C_0^*\pi^{-1}\left(a^2 - t^2\right)^{-1/2} - A_1^*,\ q_j = (-1)^j\sqrt{\alpha_*\beta_*} = (-1)^j q,\ \ j = 1,2\right)$$

При этом

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\varphi_j(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi P_0}{2l} \qquad \left(j = 1,2\right) \tag{1.11}$$

Сначала рассмотрим случай, когда числа $q_j\left(j = 1,2\right)$ – действительные числа, т.е. когда $\tilde{\Delta} > 0$. Тогда можем записать [3]

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{1+q_j^2}\left[F(t) - \frac{q_j X_j^+(t)}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F(\tau)d\tau}{X_j^+(\tau)(\tau - t)}\right] + C_j X_j^+(t)$$

$$X_j(z) = (z+a)^{-\gamma_j}(z-a)^{\gamma_j - 1}, \quad \gamma_1 = \vartheta_1/2\pi = \gamma,\ \gamma_2 = 1-\gamma \tag{1.12}$$

$$0 < \vartheta_1 = \arg g_j < 2\pi, \qquad g_j = \left(1 - iq_j\right)/\left(1 + iq_j\right), \quad \left|g_j\right| = 1$$

Удовлетворив условию (1.11) и учитывая представление A_1 через функцию $^{2}{}_{*}\left(t\right)$, определим постоянные $C_j\ \left(j = 1,2\right)$ и A_1^*. Подставляя полученные значения этих постоянных в (1.12), определим нормальные и касательные составляющие скачков напряжений на включение. Далее, возвращаясь к исходным переменным будем иметь

$$\sigma\left(x\right)=K_I\omega_{1/2}\left(x\right)+K_{II}\left[\omega_\gamma(x)+\omega_\gamma(-x)\right]+$$
$$+K_{III}\left[\omega_\lambda(x)+\omega_\gamma(-x)\right]\operatorname{tg}\left(\pi x/2l\right) \tag{1.13}$$

$$\tau(x)=K_{IV}\left[\omega(x)-\omega(-x)\right]+K_V\left[\omega(x)+\omega(-x)\right]tg\left(\pi x/2l\right) \tag{1.14}$$

$$K_I=C_0^*/\pi,\ K_{II}=\frac{A_1^*G_1}{G_0\sqrt{1+q^2}}-\frac{q}{\pi\sqrt{1+q^2}}\left[\frac{C_0^*}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\frac{\pi P_0}{2lG_0}\right]$$

$$K_{III}=A_1^*\left(1+q^2\right)^{-1/2},\ \ K_{IV}=K_{II}/2\lambda,\ K_{IV}=K_{III}/2\lambda$$

$$G_1-iG_0=\left(i+a\right)^{-¥}\left(i-a\right)^{¥-1},\ \sim_0=\left(1-2¥\right)\sim$$

$$\mu_¥\left(x\right)=\frac{\cos\left(®a/2l\right)\cos\left(®x/2l\right)}{\left(\sin\left(®\left(a+x\right)/2l\right)\right)^{¥}\left(\sin\left(®\left(a-x\right)/2l\right)\right)^{1-¥}}$$

Таким образом, определены все искомые функции с помощью которых можно определить напряженно-деформированное состояние составной плоскости полностью.

Аналогично можно построить замкнутые решения поставленной задачи и в случаях, когда $\tilde{\Delta}<0$ или $\tilde{\Delta}=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В. Н. Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин //Докл. НАН РА, 2002. Т. 102. No1. С. 29-34**.**
2. Акопян В.Н., Саргсян А.О. О концентрации напряжений возле абсолютно жесткого включения составной упругой полуплоскости // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т. 63. N4. С. 12-22.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.М.: Наука, 1966. 708с.

Сведения об авторах:

Даштоян Лилит Левоновна – к.ф.-м.н., ученый секретарь Института механики НАН РА

Акопян Лусине Ваграмовна – младший научный сотрудник Института механики НАН РА

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ТОНКОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ТРЕЩИНОЙ

Джилавян С.А., Шахбазян Г.А.

Ереван, Армения

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса $6mm$ гексагональной симметрии, отнесенное к декартовой системе координат $Oxyz$, когда среда содержит заземленный полубесконечный металлический слой в плоскости $y = h$ при $x < 0$, и имеет бесконечную трещину в плоскости $y = -h.$ Толщина слоя настолько мала, что пренебрегается жесткость, т.е. слой рассматривается как электрод, занимающий всю полуплоскость $y = h \left(x < 0\right).$ Ось Oz совпадает с осью симметрии кристалла.

На полубесконечный электрод под углом $\beta_0 \left(0 < \beta_0 < \pi/2\right)$ падает распространяющаяся из бесконечности плоская электроупругая волна сдвига со следующими значениями амплитудных составляющих перемещения и электрического понтенциала:

$$w_\infty \left(x, y\right) = e^{-ikx\cos\beta_0 - iky\sin\beta_0}$$

$$\Phi_\infty \left(x, y\right) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-ikx\cos\beta_0 - iky\sin\beta_0} \tag{1}$$

Учитывается гармоническая зависимость от времени всех составляющих электроупругого поля–временный множитель $e^{-i\omega t}$, $t-$ параметр времени, $\omega -$ частота колебаний. Здесь $k = \omega/c$ –волновое число, $c = \sqrt{c_{44}(1+\chi)\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны в рассматриваемой среде, $\chi = e_{15}{}^2/\varepsilon_{11}c_{44}$ – коэффициент электромеханической связи пьезоэлектрика, $e_{15}, \varepsilon_{11}, c_{44}$ – пьезоэлектрическая, диэлектрическая, упругая постоянные пьезоэлектрического пространства, соответственно, а $\rho -$ плотность.

Пьезоэлектрическая среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении волнового поля. Для определения амплитуд перемещения и электрического потенциала имеем следующие уравнения [1,2]

$$\Delta w + k^2 w = 0$$

$$\Delta \Phi + k^2 \frac{e_{15}}{\pounds_{11}} w = 0 \qquad (2)$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}.$

На берегах трещины для амплитуды напряжения $\pm_{yz}$ имеем условие

$$\pm_{yz} = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = -h, \qquad (3)$$

а для амплитуд электрического потенциала и составляющего вектора электрической индукции

$$\Phi(x,y)\big|_{y=-h+0} = \Phi(x,y)\big|_{y=-h-0},\; D_2(x,y)\big|_{y=-h+0} = D_2(x,y)\big|_{y=-h-0},$$

где $D_2 = e_{15} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \pounds_{11} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y},$ (4)

принимаем также:

$$w(x,y)\big|_{y=-h+0} - w(x,y)\big|_{y=-h-0} = w_0(x), \qquad (5)(5)$$

где функция $w_0(x)$ определяет разницу амплитуды перемещения.

Решения уравнений (2) должны удовлетворять контактным условиям, при $y = h$:

$$w(x,y)\big|_{y=h+0} = w(x,y)\big|_{y=h-0},\; \pm_{yz}(x,y)\big|_{h-0} = \pm_{yz}(x,y)\big|_{y=h+0},$$

$$\Phi(x,y)\big|_{y=h\pm 0} = \Phi_+(x),\; D_2(x,y)\Big|_{y=h+0} - D_2(x,y)\big|_{y=h-0} = -\pounds_{11} \cdot_-(x), \qquad (6)$$

где введены функции $\Phi_+(x) = \Phi(x)^{-}(x),\; \cdot_-(x) = \cdot(x)^{-}(-x),$ здесь $^{-}(x)$ – функция Хевисайда, т.е. $\Phi_+(x)$ –электрический потенциал при $y = h,$ а $\cdot_-(x)$ представляет разницу составляющего вектора электрической индукции на $y = h \pm 0.$

Для решения поставленной задачи введем функции

$$u(x,y) = w(x,y) - w_\infty(x,y),\; \ddot{}\,(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi_\infty(x,y), \qquad (7)$$

тогда для напряжения и индукции получим формулы

$$\pm_{yz}(x,y) = c_{44} \frac{\partial u}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \ddot{}}{\partial y} - ikc_{44}(1+\text{æ})\sin{}^{-}{}_0 e^{-ikx\cos{}^{-}{}_0 - iky\sin{}^{-}{}_0},$$

$$D_2(x,y) = e_{15} \frac{\partial u}{\partial y} - \pounds_{11} \frac{\partial \ddot{}}{\partial y}, \qquad (8)$$

а для определения функций $u(x,y)$, $\ddot{}\,(x,y)$, которые должны еще и удовлетворять условиям уходящей волны, из (2) получим следующие уравнения:

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$
$$\Delta \ddot{} + k^2 \frac{e_{15}}{£_{11}} u = 0. \qquad (9)$$

Применяя интегральное преобразование по переменной x, получим

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \left(\pm^2 - k^2\right)\bar{u} = 0,$$
$$\frac{d^2 \leftharpoonup}{dy^2} - \pm^2 \leftharpoonup + k^2 \frac{e_{15}}{£_{11}} \bar{u} = 0, \qquad (10)$$

где $\bar{u}(\pm, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{i\pm x} dx$, $\leftharpoonup(\pm, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ddot{}\,(x,y) e^{i\pm x} dx.$

Из условий (3), (4), (5), (6) имея в виду (7), (8), применив преобразование Фурье, получим следующие условия

$$\leftharpoonup\big|_{y=h\pm 0} + 2® \frac{e_{15}}{£_{11}} e^{-ikh\sin\bar{}_0} ¢\left(\pm - k\cos\bar{}_0\right) = \bar{\Phi}_+(\pm), \qquad (11)$$

$$e_{15}\frac{d\bar{u}}{dy}\bigg|_{h+0} - £_{11}\frac{d\leftharpoonup}{dy}\bigg|_{h+0} - e_{15}\frac{d\bar{u}}{dy}\bigg|_{h-0} + £_{11}\frac{d\leftharpoonup}{dy}\bigg|_{h-0} = -£_{11}\bar{\cdot}_-(\pm),$$

$$\bar{u}\big|_{h+0} = \bar{u}\big|_{h-0},$$

$$\frac{d\bar{u}}{dy}\bigg|_{-h+0} = \frac{d\bar{u}}{dy}\bigg|_{-h-0}, \quad \frac{d\leftharpoonup}{dy}\bigg|_{-h+0} = \frac{d\leftharpoonup}{dy}\bigg|_{-h-0}, \quad \leftharpoonup\big|_{-h+0} = \leftharpoonup\big|_{-h-0}, \qquad (12)$$

$$c_{44}\frac{d\bar{u}}{dy}\bigg|_{h+0} + e_{15}\frac{d\leftharpoonup}{dy}\bigg|_{h+0} = c_{44}\frac{d\bar{u}}{dy}\bigg|_{h-0} + e_{15}\frac{d\leftharpoonup}{dy}\bigg|_{h-0},$$

$$\bar{u}\big|_{-h+0} - \bar{u}\big|_{-h-0} = \bar{w}_0, \qquad (13)$$

$$c_{44}\frac{d\bar{u}}{dy}\bigg|_{-h+0} + e_{15}\frac{d\leftharpoonup}{dy}\bigg|_{-h\pm 0} - 2® ikc_{44}(1+æ)\sin\bar{}_0 e^{ikh\sin\bar{}_0} ¢(\pm - k\cos\bar{}_0) = 0, \qquad (14)$$

здесь $¢(\pm)$ –функция Дирака.

Чтобы выполнялись условия уходящей волны, принимается, что $¥(\pm) = \sqrt{\pm^2 - k^2} \to |\pm|$ при $|\pm| \to \infty$ и $\sqrt{\pm^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \pm^2}$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\sim = \pm + i²$ обходит точки ветвления: $-k$ – сверху, а k – снизу [2,4].

Ограниченное, удовлетворяющее (12)- (13) условиям и представляющее уходящую волну, решение уравнений (10) имеет вид
при $y > h$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\pm, y) &= A_1(\pm)e^{-¥ y}, \\ \bar{-}(\pm, y) &= B_1(\pm)e^{-|\pm| y} + \frac{e_{15}}{£_{11}}\bar{u}(\pm, y), \end{aligned} \qquad (15)$$

при $|y| < h$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\pm, y) &= \frac{1}{2}\bar{w}_0 e^{-¥(y+h)} + \frac{e_{15}}{2c_{44}(1+æ)}\frac{\dot{¯}_-(\pm)}{¥}e^{¥(y-h)}, \\ \bar{-}(\pm, y) &= -\frac{1}{2}\frac{e_{15}}{£_{11}}\bar{w}_0 e^{-|\pm|(y+h)} - \frac{1}{2}\frac{\dot{¯}_-(\pm)}{|\pm|}e^{|\pm|(y-h)} + \frac{e_{15}}{£_{11}}\bar{u}(\pm, y), \end{aligned} \qquad (16)$$

при $y < -h$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\pm, y) &= A_2(\pm)e^{¥ y}, \\ \bar{-}(\pm, y) &= B_2(\pm)e^{|\pm| y} + \frac{e_{15}}{£_{11}}\bar{u}(\pm, y), \end{aligned} \qquad (17)$$

где

$$A_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\bar{w}_0 e^{\mp ¥ h} + \frac{e_{15}}{2c_{44}(1+æ)}\frac{\dot{¯}_-(\pm)}{¥}e^{\pm ¥ h}$$

$$B_1 e^{-|\pm| h} = -\frac{e_{15}}{2£_{11}}\bar{w}_0 e^{-2¥ h} - \frac{1}{2}\frac{æ\,\dot{¯}_-(\pm)}{(1+æ)¥} + \bar{\Phi}_+(\pm) - 2®\,\frac{e_{15}}{£_{11}}e^{-ikh\sin ¯_0}¢\left(\pm - k\cos ¯_0\right)$$

$$B_2 = \frac{e_{15}}{2£_{11}}\bar{w}_0 e^{|\pm| h} - \frac{1}{2}\frac{\dot{¯}_-(\pm)}{|\pm|}e^{-|\pm| h}, \qquad (18)$$

и из (11) и (14) находим

$$\begin{aligned} c_{44}\bar{w}_0\sqrt{\pm^2 - k^2}\,K(\pm) - e_{15}E(\pm)\dot{¯}_-(\pm) &= \\ = -4®\,(1+æ)ikc_{44}\sin ¯_0 e^{ikh\sin ¯_0}¢(\pm - k\cos ¯_0), \end{aligned} \qquad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_+(\pm) - \frac{1}{2}\cdot\frac{K(\pm)}{(1+æ)|\pm|}\cdot\dot{¯}_-(\pm) - \frac{1}{2}\frac{e_{15}}{£_{11}}\bar{w}_0 E(\pm) &= \\ = 2®\,\frac{e_{15}}{£_{11}}\cdot e^{-ikh\sin ¯_0}¢(\pm - k\cos ¯_0) \end{aligned} \qquad (20)$$

где $K(\pm) = 1 + æ - \frac{æ|\pm|}{\sqrt{\pm^2 - k^2}}$, $E(\pm) = e^{-2\sqrt{\pm^2 - k^2}h} - e^{-2|\pm| h}$.

Из (19) определяется функция $\bar{w}_0$:

$$\bar{w}_0 = \frac{e_{15}}{c_{44}} \frac{E(\pm)}{\sqrt{\pm^2 - k^2}\, K(\pm)} \overline{\cdot}_-(\pm) + 4\text{®} \frac{(1+\text{æ})\, e^{ikh\sin \bar{}_0}}{K(k\cos \bar{}_0)} \text{¢}\,(\pm - k\cos \bar{}_0). \qquad (21)$$

Таким образом, получили следующее функциональное уравнение относительно $\overline{\cdot}_-(\pm)$ и $\bar{\Phi}_+(\pm)$, которое представляет собой уравнение типа Римана на действительной оси:

$$\frac{1}{2|\pm|(1+\text{æ})} L(\pm)\cdot\overline{\cdot}_-(\pm) + \bar{\Phi}_+(\pm) = 2\text{®ª¢}\,(\pm - k\cos \bar{}_0), \qquad (22)$$

$$L(\pm) = \frac{K_1(\pm)\cdot K_2(\pm)}{K(\pm)},\; K_{1,2}(\pm) = K(\pm) \mp M(\pm)\cdot E(\pm), \qquad (23)$$

$$M(\pm) = \left(\frac{\text{æ}(1+\text{æ})\,|\pm|}{\sqrt{\pm^2 - k^2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\text{æ}(1+\text{æ})\left[1+\text{æ} - K(\pm)\right]\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{ª} = \frac{e_{15}}{\text{£}_{11}}\left(\frac{E(k\cos \bar{}_0)(1+\text{æ})}{K(k\cos \bar{})} e^{ikh\sin \bar{}_0} + e^{-ikh\sin \bar{}_0}\right),$$

здесь $K(\pm) \to 1,\; K_{1,2}(\pm) \to 1$ при $|\pm| \to \infty$.

Таким образом, решение поставленной задачи, после определения функций $\overline{\cdot}_-(\pm)$ и $\bar{\Phi}_+(\pm)$, имея в виду (15)-(17), представляется в виде

$$w(x,y) = w_\infty(x,y) + \frac{1}{2\text{®}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\pm, y) e^{-i\pm x} d\pm,$$

$$\Phi(x,y) = \Phi_\infty(x,y) + \frac{1}{2\text{®}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\cdot}(\pm, y) e^{-i\pm x} d\pm. \qquad (24)$$

Функция $K_1(\pm)$ имеет нули только если $\pm = \pm\pm_1$, где $\pm_1$ –единственный действительный корень уравнения $K_1(\pm) = 0$ при $\pm > k$. Доказывается, что и функция $K_2(\pm)$ имеет нули только если $\pm = \pm\pm_2$, где уже $\pm_2$ –единственный действительный корень уравнения $f(\pm) = -K(\pm)/M(\pm)E(\pm) = 1$ при $\pm > k$, т.к. $f'(\pm) < 0$ при $k < \pm < \pm_п$. Функция $K(\pm)$ имеет нули, если только $\pm = \pm\pm_п,\ \pm_п = \dfrac{k}{(1+\text{æ})\sqrt{1\text{-æ}^2}}$ [2]. Таким образом, $k < \pm_2 < \pm_п < \pm_1$. Следовательно, принимается, что в данной задаче типа Римана действительная ось обходит не только точки ветвления $\pm k$ функции $\sqrt{\sim^2 - k^2}$, но и точки $\pm = -\pm_1$, $\pm = -\pm_п$, $\pm = -\pm_2$ сверху, а точки $\pm = \pm_1$,

$\pm = \pm_{п}$, $\pm = \pm_2$ - снизу, тем самым обеспечивая условие уходящей волны [2,5,6].

В рассматриваемой пьезоэлектрической среде в наличии дифракции приводить к распространению поверхностных, локализованных волн. Решение уравнения (22) строится, факторизируя функцию $\frac{1}{|\pm|}L(\pm)$, представив в виде $\frac{1}{|\pm|}L(\pm) = \frac{1}{(\pm + i0)^{1/2}}L^{+}(\pm)\frac{1}{(\pm - i0)^{1/2}}L^{-}(\pm)$, где функции $L^{\pm}(\pm)$ регулярны и не имеют нулей при $\mathrm{Im}\sim > 0$ и $\mathrm{Im}\sim < 0$, соответственно.

Теперь уже уравнение (22) запишем в виде

$$\frac{1}{(1+\text{æ})(\pm - i0)^{1/2}} L^{-}(\pm)\,\dot{}^{-}_{-}(\pm) + 2\frac{\bar{\Phi}_{+}(\pm)\cdot(\pm + i0)^{1/2}}{L^{+}(\pm)} = .$$
$$= \frac{4\text{®ª¢}(\pm - k\cos{}^{-}_{0})(k\cos{}^{-}_{0} + i0)^{1/2}}{L^{+}(k\cos{}^{-}_{0})} \qquad (25)$$

Методика решения уравнения (25) та же, что и в [3]. Имея в виду представление

$$2\text{®}i\text{¢}(\pm - k\cos{}^{-}_{0}) = \frac{1}{\pm - k\cos{}^{-}_{0} - i0} - \frac{1}{\pm - k\cos{}^{-}_{0} + i0},$$

получим следующие решения

$$\dot{}^{-}_{-}(\pm) = \frac{2\text{ª}(1+\text{æ})(k\cos{}^{-}_{0} + i0)^{1/2}}{iL^{+}(k\cos{}^{-}_{0})}\cdot\frac{(\pm - i0)^{1/2}}{L^{-}(\pm)\cdot(\pm - k\cos{}^{-}_{0} - i0)}, \qquad (26)$$

$$\bar{\Phi}_{+}(\pm) = -\frac{\text{ª}(k\cos{}^{-}_{0} + i0)^{1/2}}{iL^{+}(k\cos{}^{-}_{0})}\cdot\frac{L^{+}(\pm)}{(\pm + i0)\cdot(\pm - k\cos{}^{-}_{0} + i0)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
2. Григорян Э.Х., Джилавян С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. № 1, С. 38-50.
3. Григорян Э.Х Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Ученые записки ЕГУ, естественные науки, 1979, № 3, с. 29-34.

4. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. М.: Мир, 1962. 279 с.
5. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем.// Изв. НАН Армении 2010.Т.62. №1.С.40-51.
6. Джилавян С.А., Шахбазян Г.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем.Актуальные проблемы механики сплошной среды. // Тр. II межд.конф. Дилижан, 2010г.,т.1,с.232-235.

Сведения об авторах:

Джилавян Самвел Акопович – к.ф.-м.н., кафедра механики, Ереванский госуниверситет, ф-т математики и механики. Tel: (+374 10) 54 16 58, E-mail samjilavyan@ysu.am

Шахбазян Гегам Артаваздович – магистрант, ф-т математики и механики, Ереванский госуниверситет, Tel: (+374 93) 97 92 09. E-mail geg.shahbazyan@gmail.com

РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ ОБОБЩЕННЫХ КОНТИНУУМОВ В ТРУДАХ ФРАНСУА И ЭЖЕНА КОССЕРА

Ерофеев В.И., Виноградова Ю.В., Ерофеева Т.В.
Нижний Новгород, Россия

В 1909 году была опубликована книга французских исследователей братьев Эжена и Франсуа Коссера (Cosserat) «Теория деформируемых тел», заложившая основы механики обобщенных континуумов.

Известно, что одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равнодействующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения, но и моментные напряжения, образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры. Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рассмотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы: ротационными, осцилляторными или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

В теории Коссера каждая материальная точка континуума наделяется свойствами твердого тела путем учета ротационных степеней свободы. Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

Приведем некоторые сведения о жизни и деятельности Э. и Ф. Коссера.

Старший брат – Франсуа Коссера родился 26 ноября 1852 года в городе Дуэ во Французской Фландрии. В 1870 году окончил в Париже Высшую политехническую школу (Ecole Polytechnique), а в 1872 году – Национальную школу мостов и дорог. В 1875 году получил должность гражданского инженера третьего класса. Женился, в 1878 году у него родилась дочь Амелия-Адель. В 1879 году переводится на должность железнодорожного (по северной зоне) инженера-строителя второго класса. В 1883 году становится гражданским инженером первого класса. Кавалер ордена Почетного легиона (1893 г.), главный инженер (1895 г.). В 1912 году избирается Вице-Президентом, а в 1913 году – Президентом Французского математического общества.

Научная работа Ф. Коссера идет параллельным курсом с его деятельностью гражданского инженера, занимающегося строительством путей, тоннелей, мостов, железных дорог. Об этой работе лишь кратко упоминается в его служебных характеристиках: «Мистер Франсуа Коссера – это выдающийся инженер, имеющий богатый опыт практической деятельности, которую он сочетает с проведением теоретических исследований; недавно он представил во Французскую академию наук несколько замечательных работ по механике (27 июня 1898 г.)»; «Мистер Франсуа Коссера является ценным сотрудником, он очень эффективен, особенно в общественных работах. Среди научного сообщества он известен как автор замечательных исследований по вопросам математики и механики (11 октября 1910 г.)»; «Мистер Франсуа Коссера обладает высоким уровнем компетенции для строительства тоннелей, мостов, он является также выдающимся математиком, Президентом Французского математического общества. Кроме того, он внес существенный вклад в работы для нужд армии (20 октября 1913 г.)».

Ф. Коссера умер 22 марта 1914 года на 62 году.

Примечательно, что следующим после него Президентом Французского математического общества стал Э. Вессио (1865-1952), получивший всемирную известность работами по представлению групп Ли, создавший (вместе с Э. Пикаром) дифференциальную теорию Галуа и применивший теорию Фредгольма к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Младший брат – Эжен Коссера (полное имя: Эжен-Морис-Пьер) родился 4 марта 1866 года на севере Франции, в городе Амьене. С 1883 по 1888 годы учился в Высшей нормальной школе в Париже (Ecole Normale Superiere), по окончании которой занял должность астронома-ассистента в обсерватории города Тулуза. В 1889 году защитил докторскую диссертацию по математике, в которой развивались идеи Ю. Плюккера и Г. Дарбу; переведен на должность адъюнкта Астрономической обсерватории. С 1895 года – профессор кафедры дифференциального и интегрального исчисления университета Тулузы. С 1908 года Э. Коссера становится директором Астрономической обсерватории Тулузы и занимает эту должность до конца своей жизни (умер 31 мая 1931 года в возрасте 65 лет). Его астрономические исследования включают кольца и спутники Сатурна, кометы и двойные звезды. Именно как астроном Э. Коссера был избран в 1919 году членом Французской академии наук. По отзывам коллег: «Сдержанный, добрый человек и прилежный работник, Эжен Коссера был одной из движущих сил в университете Тулузы в течение тридцати пяти лет».

Мы не знаем, как выглядел Франсуа, до нас дошло только одно изображение (карандашный рисунок) Эжена.

О потомках братьев Коссера известно следующее. У Эжена был только один сын, он умер в гостинице во время поездки, на руках у отца.

Единственная дочь Франсуа вышла замуж за морского инженера Эдуарда Даво (что интересно, переведшего с русского языка на французский курс физики петербургского профессора О.Д.Хвольсона), у них было два сына, один из которых умер в 1939 году, а второй, Пьер-Франсуа, прожил до конца 1980-х годов и застал триумфальное возвращение в мир теории своего деда.

В период между 1895 и 1910 годами Э. и Ф. Коссера опубликовали серию статей и монографию по механике. Кроме теории континуума твердых тел, именуемого сегодня континуумом Коссера, в девяти статьях 1898-1901 г.г. братья излагают результаты своих исследований спектра пучка операторов статической теории упругости для трехмерной изотропной среды.

Работы по спектру Коссера были продолжены в 60-х – 70-х годах двадцатого века С.Г. Михлиным, показавшим, в частности, что исследование спектра открывает перспективу построения теории многомерных интегральных уравнений.

Нынешние исследователи полагают, что главным в творческом союзе братьев был Франсуа, а Эжен лишь ассистировал. В подтверждение сказанного, приводится то обстоятельство, что после смерти старшего брата, Эжен, активно работавший в науке еще полтора десятилетия, не опубликовал более ни одной работы по механике и совсем не пропагандировал теорию обобщенного континуума.

Современники не были столь единодушными в своих суждениях. Известно, что когда Франсуа претендовал на должность заведующего кафедрой механики Высшей политехнической школы и конкурировал с Адамаром и Жуге, кто-то из ответственных лиц высказал сомнение о его участии в совместных работах, и предпочтение было отдано Жуге.

До недавних пор считалось, что работа Коссера существует как бы «в вакууме», не имея ни предшественников, ни, долгое время, последователей. Но это не соответствует действительности.

Праотцами полярных сред следует считать Якоба Бернулли, который в 1686 году ввел в рассмотрение момент количества движения и Леонарда Эйлера, описавшего в 1765 году кинематику твердого тела конечных размеров.

До конца 19 века физиками разрабатывались две теории эфира, конкурирующие между собой. Из наиболее известных ученых на позиции квазижидкого (газоподобного) эфира стояли Р.Декарт, Д.Максвелл, Г.Лоренц. Они предполагали, что в эфире существуют вихри из каких-то очень мелких частиц. Потоки этих частиц образуют магнитные поля, а движения частиц от одного заряженного тела к другому обеспечивают электростатическое взаимодействие. Последовательными сторонниками квазитвердого эфира выступали Дж.Мак-Куллаг, В.Томсон (лорд Кельвин) и Стокс. По их теориям магнитные и электрические поля возникают в эфире в результате определенного вида деформаций.

В 1839 году Дж.Мак-Куллаг предложил модель эфирной среды, как упругого тела, невосприимчивого к деформациям сжатия и изменения формы, но реагирующего на деформацию кручения относительно абсолютного пространства.

А.Зоммерфельд заметил, что эта теория, будучи чисто механической, хорошо согласуется с теорией электромагнитных и оптических явлений Д.Максвелла.

Вслед за Дж.МакКуллагом В.Томсон (Кельвин) смоделировал эфир с помощью волчков, т.е. рассмотрел полярную среду, состоящую из вращающихся осесимметричных частиц, способных совершать большие повороты и перемещения общего вида.

Легко видеть, что модель МакКуллага является частным случаем модели Коссера, а модель Кельвина следует причислить к «Коссера-подобным» (определение А.К.Эрингена) моделям.

Во Франции среди современников работу Э. и Ф.Коссера оценили немногие, собственно, только трое, но кто! Это А.Пуанкаре, Э.Пикар и Э.Картан. О Э.Картане следует упомянуть особо. Его, будущего автора классической книги «Теория спиноров», знакомство с трудом Коссера вдохновило на создание теории пространств с кручением. Именно у Коссера нашел он подсказку: связать тензор кручения с внутренними вращательными степенями свободы сплошных сред, что, в свою очередь, позволило связать кручение пространства-времени с конкретными свойствами материальных систем, а именно со спином. Такая связь достигается в рамках динамической теории гравитационных взаимодействий Эйнштейна-Картана.

В Германии теорию микрополярного континуума пропагандировал К.Хейн, несколько лет читавший лекции по механике Коссера в университете Карлсруэ.

Подробный обзор книги Э. и Ф. Коссера опубликовал профессор Массачусетского технологического университета Э.Вильсон в альманахе «Достижения теоретической механики» за 1913 год.

А далее было забвенье на несколько десятилетий. Но, воистину, идеям Коссера «как драгоценным винам, настанет свой черед». Без теории Коссера механика неполна. И эта теория вернулась в мир, и эта теория живет сегодня.

Обобщенные континуумы представляют как теоретический, так и практический интерес и заслуживают внимания, как теоретиков, так и экспериментаторов, специализирующихся в различных отраслях механики и физики.

Актуальность таких исследований повышается и тем обстоятельством, что, в сущности, для всех природных и искусственных материалов и систем проявляются взаимодействия механических процессов различного пространственного масштаба. В настоящее время обобщенные континуумы применяются при разработке новых металлургических технологий, позволяющих синтезировать искусственные материалы с управляемой микроструктурой. Они помогают прогнозировать поведение таких хрупких материалов, как бетон или лед. Некоторые методы технической диагностики и неразрушающего контроля базируются на усредненных материальных свойствах обобщенных континуумов. Большие надежды возлагаются на моделирование, базирующееся на концепциях обобщенных континуумов, для успешного и скорейшего развития нанотехнологий. Обобщенные континуумы, такие, как микрополярные или ориентированные материалы, микроморфный континуум, высокоградиентные материалы, тела со слабыми или сильными нелокальными взаимодействиями привлекаются, также, при разработке интегральных многомасштабных вычислительных процедур. Такие компьютерные технологии имеют целью объединение различных пространственных масштабов в одной численной схеме. Начало берется в квантово-механическом описании, моделировании процессов на атомарном, молекулярном, микроскопическом и, затем, континуальном масштабах.

В 2009 г. к столетнему юбилею монография Э. и Ф. Коссера переиздана на французском языке. Думается, что пришло время для выхода в свет и русской версии этой эпохальной книги.

Сведения об авторах:

Ерофеев Владимир Иванович, Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, заместитель директора по научной работе, доктор физико-математических наук, профессор, тел.: (831) 432-05-76, адрес: 603024, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, 85, erf04@sinn.ru

Виноградова Юлия Валерьевна, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, аспирантка, адрес: 603950, ГСП-1000, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, yuvinog@gmail.com

Ерофеева Татьяна Вячеславовна, Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, научный сотрудник, кандидат педагогических наук, адрес: 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65, erf04@sinn.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНЫЕ И ПРОДОЛЬНО-ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ

Ерофеев В.И., Зинченко А.С.
Нижний Новгород, Россия

Рассмотрим прямолинейный стержень, отнесенный к декартовой системе координат (x, y, z), совершающий изгибные и продольные колебания в плоскости (x,z).

Система уравнений, описывающих взаимодействие изгибных и продольных колебаний стержня с учетом геометрической нелинейности, имеет вид[1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c_o^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_o^2 r_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = c_o^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{c_o^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right], \qquad (2)$$

Здесь *u (x,t)* – продольные, а *w(x,t)* – поперечное перемещение частиц срединной линии стержня; $c_o = \sqrt{E/\circ}$ – скорость распространения линейных продольных возмущений (стежневая скорость); E – модуль Юнга; $\circ$ – плотность материала; $r_y = \sqrt{J_y/F}$ – осевой радиус инерции; $J_y = \iint_F z^2 dF$ – осевой момент инерции; F – площадь поперечного сечения стержня.

Предполагаем, что стержень является бесконечным. Такая идеализация допустима, если на границах стержня находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. В [2] на основе точных решений модельных задач для упругих систем обосновано существование согласованных концевых гасителей различных видов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе. Это позволяет рассматривать модель стержня (1), (2) без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по стержню, рассматривать как бегущие упругие волны.

Из (1) и (2) видно, что продольные и изгибные волны в стержне взаимодействуют лишь в нелинейном приближении. При этом нелинейные слагаемые входят в уравнения (1) и (2) несимметрично: продольные волны воздействуют на изгибные волны параметрическим образом, а изгибные волны служат нелинейным источником для продольных волн.

Взаимодействие квазигармонических продольных и изгибных волн исследовано[1].

Рассмотрим случай распространения по стержню интенсивных вибраций, когда уже нельзя ограничиться изучением квазигармонических процессов, а необходимо учитывать широкополостность нелинейных продольно-изгибных волн.

Решение уравнений (1), (2) будем искать в классе стационарных волн

$u = u(\P),\ w = w(\P),$ (3)

где $\P = x - Vt -$ «бегущая» координата, V = const – скорость волны.

Из уравнения (1) при подстановке (3) определится связь между продольным и поперечным перемещениями:

$$\frac{du}{d\P} = \frac{c_o^2}{2\left(V^2 - c_o^2\right)}\left(\frac{dw}{d\P}\right)^2. \quad (4)$$

Уравнение (2) при подстановке (3) и с учетом соотношения (4) сведется к уравнению Дуффинга:

$$\frac{d^2\text{—}}{d\P^2} + m_1\text{—} + m_2\text{—}^3 = o \quad (5)$$

Здесь $\text{—} = d\,{}^{w}\!/_{d\P}$ - угол поворота поперечного сечения стержня;

$$m_1 = \frac{v^2}{c_o^2 r_y^2},\quad m_2 = -\frac{1}{2r_y^2\left(1 - \frac{c_o^2}{V^2}\right)}.$$

О возможности существования нелинейных стационарных продольно-изгибных волн можно судить по знакам коэффициентов m_1 и m_2, при этом первый коэффициент всегда положителен, а знак второго коэффициента определяется величиной отношения ${}^{c_o}\!/_{V}$.

Если $V > c_o$, то есть, если нелинейная волна распространяется по стержню быстрее, чем линейные возмущения, то $m_2 < o$. На фазовой плоскости уравнения $\left(\text{—}, \frac{d\text{—}}{d\P}\right)$(5) точка (*0,0*) является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точка ($\pm\sqrt{-\frac{m_1}{m_2}},0$) – неустойчивыми положениями равновесия типа «седло». Фазовый портрет показывает, что в стержне могут существовать как периодические стационарные волны (им соответствуют движения по фазовой траекториям вокруг положения равновесия), так и уединенная стационарная волна (движение по сепаратрисе, идущей из «седла» в «седло»).

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом, форма которого близка к меандру:

$$\bar{\ } = Asn(K\P, s). \quad (6)$$

Здесь A – амплитуда волны; $K = \sqrt{\dfrac{2m_1 + m_2A^2}{2}}$ – волновое число; $s^2 = \dfrac{m_2A^2}{2m_1 + m_2A^2}$ – модуль эллиптической функции, изменяющейся в интервале $0 \le s^2 \le 1$.

Через параметры исходной задачи амплитуда и волновое число выражаются следующими соотношениями:

$$A = \frac{2V}{c_o}\sqrt{\left(1 - \frac{c_0^2}{V^2}\right)\left(\frac{s^2}{1+s^2}\right)}, \quad (7)$$

$$K = \frac{V}{c_o r_y}\sqrt{\frac{1}{1+s^2}} \quad (8)$$

Уединенная стационарная волна имеет форму перепада (кинка) и описывается гиперболическим тангенсом:

$$\bar{\ }(\P) = A^{(c)} th(\P/\Delta), \quad (9)$$

где

$$A^{(c)} = \sqrt{2} \cdot \frac{V}{c_o}\sqrt{\left(1 - \frac{c_o^2}{V^2}\right)} \quad (10)$$

–амплитуда волны,

$$\Delta = \frac{c_o}{V} r_y \sqrt{2} \quad (11)$$

– ее ширина.

Если $V<c_o$, то есть, если линейные возмущения распространяются по стержню быстрее, чем нелинейная волна, то $m_2 >0$.

На фазовой плоскости уравнения (5) в этом случае точка (*0,0*) является единственным устойчивым положением равновесия. Это положение равновесия типа «центр». В стержне могут существовать только периодические стационарные волны. Они описываются эллиптическим косинусом

$$\bar{\ } = Acn(K\P, s). \quad (12)$$

Амплитуда (A) и волновое число (K) определяются соотношениями:

$$A = 2\frac{V}{c_o}\sqrt{\left(c_o^2 - 1\right)\left(\frac{s^2}{1 - s^2}\right)}\ . \qquad (13)$$

$$K = \frac{V}{c_o r_y}\sqrt{\frac{1}{1 - s^2}}\ . \qquad (14)$$

Если срединная линия стержня является нерастяжимой, то $u=o$ и рассматриваемая стационарная волна становится чисто изгибной. Она будет описываться уравнением Дуффинга (5) с коэффициентами

$m_1 = \frac{V^2}{c_o^2 r_y^2}$, $m_2 = -\frac{1}{2r_y^2}$, первый из которых всегда положителен, а второй – всегда отрицателен.

Нелинейная изгибная стационарная волна может быть как периодической, так и уединенной. Периодическая волна описывается эллиптическим синусом (6). Ее амплитуды (A) и волновое число (K) описываются соотношениями:

$$A = \frac{2V}{c_o}\sqrt{\frac{s^2}{1 + s^2}}\ , \qquad (15)$$

$$K = \frac{V}{c_o r_y}\sqrt{\frac{1}{1 + s^2}}\ . \qquad (16)$$

Примечательно, что отношение амплитуды стационарной волны к волновому числу является величиной постоянной,

$$\frac{A}{K} = 2r_y s = \text{const}, \qquad (17)$$

определяемой только радиусом инерции поперечного сечения стержня.

Уединенная волна описывается гиперболическим тангенсом (9). Ее амплитуда *($A^{(c)}$)* и ширина *(Δ)* описываются соотношениями

$$A^{(c)} = \sqrt{2}\,\frac{V}{c_o}\ , \qquad (18)$$

$$\Delta = \sqrt{2}\,r_y\,\frac{c_o}{V}\ . \qquad (19)$$

Заметим, что произведение амплитуды уединенной волны на ее ширину является постоянной величиной

$$A^{(c)}\Delta = 2r_y = \text{const}\,. \qquad (20)$$

При s=1 выражения (17) и (20) тождественны, что очевидно, поскольку при этом значении эллиптический синус выражается в гиперболический тангенс. Для стержня кругового поперечного сечения осевой радиус инерции равен половине радиуса. Соотношение (20) в этом случае можно переписать в виде $2A^{(c)}\Delta = d$, где d – диаметр стержня.

Определим, как соотносятся между собой параметры нелинейных стационарных волн, распространяющихся в растяжимом и нерастяжимом стержнях. Для этого сравним соотношения (7) и (15), (8) и (16), (10) и (18), (11) и (19).

Получим:

$$\frac{A_{раст.}}{A_{нераст.}} = \frac{A^{(c)}_{раст.}}{A^{(c)}_{нераст.}} = \sqrt{1 - \frac{c_o^2}{V^2}}\,, \frac{K_{раст.}}{K_{нераст.}} = 1, \quad \frac{\Delta_{раст.}}{\Delta_{нераст.}} = 1. \tag{21}$$

Из (21) следует, что амплитуды нелинейных продольно-изгибных стационарных волн (как периодических, так и уединенных) всегда меньше, чем соответствующие амплитуды нелинейных изгибных стационарных волн. Эта разница тем заметней, чем больше скорость нелинейной волны отличается (превышает) от скорости линейных возмущений. Отношение длины стационарной периодической волны, распространяющейся в растяжимом стержне к длине стационарной периодической волны, распространяющейся в нерастяжимом стержне, всегда равно единице. Единице равны и отношения ширин уединенных стационарных волн, распространяющихся в растяжимом и нерастяжимом стержнях.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-08-97066).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. - 208 с.
2. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. Нижний Новгород: Изд-во «Наш дом». 2010. - 248 с.

Сведения об авторах:

Ерофеев Владимир Иванович, Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, заместитель директора по научной работе, доктор физико-математических наук, профессор, тел.: (831) 432-05-76, адрес: 603024, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, 85, erf04@sinn.ru

Зинченко Антон Сергеевич, Шуйский государственный педагогический университет, инженер, адрес: 155908, Россия, Ивановская область, г. Шуя, ул. Кооперативная, 24, FerrusFerk@mail.ru

ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ ФЛОКА В ПЛАСТИНКЕ-ПОЛОСЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ ИНТЕРФЕЙСОВ

Казарян К.Б., Казарян Р.А.
Ереван, Армения

Существование частотных зон запирания и пропускания волн, обусловленных неоднородностью свойств материалов среды (волн Флока), распространяющихся в упругой однонаправленной периодической среде впервые было установлено в работе Релея [1]. Применению теории Флоке к задачам распространения упругих волн в периодических структурах посвящена работа [2]. Дисперсионные соотношения, описывающие волны Флоке в однонаправленной периодической упругой структуре и обзор работ по этой тематике приведены в [3]. Анализу изгибных волн Флоке в упругой балке посвящена работа [4]. В настоящей работе показано существование частотных зон запирания для изгибных волн в составной однородной пластинке, разделенной интерфейсами периодических плоскостей неполного упругого контакта.

Рассматривается задача о распространении упругих изгибных волн в бесконечной пластинке-полосе, срединная плоскость которой занимает в декартовой системе координат область $-\infty < x < \infty, \quad 0 \le y \le b$.

Рассматриваются два случая составной однородной пластинки, разделенной интерфейсами периодических плоскостей неполного упругого контакта.

На рис.1 приведен симметричный элементарный узел $x \in \left(-a/2, a/2\right)$ периодической системы, где сплошными линиями отмечены интерфейсные поверхности неполного упругого контакта:

1) в пластинке на линиях $x = na \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ имеются интерфейсные шарнирно соединенные поверхности, на которых моменты равны нулю и обеспечивается условие непрерывности перемещений и обобщённых перерезывающих усилий (условия).
2) в пластинке на линиях $x = na \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ имеются интерфейсные опертые поверхности, на которых нормальные перемещения равны нулю и обеспечивается условие непрерывности моментов и углов поворота.

Края пластинки $y = 0$ и $y = b$ шарнирно оперты.

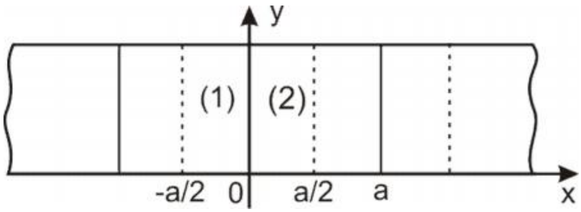


Рис.1

Согласно теории Флоке [2] задача распространения волн в периодической пластинке требует рассмотрения уравнения изгибных колебаний пластинки в области $x \in \left(-a/2, a/2\right)$

$$D\Delta^2 W^{(s)} = -2\,°\,h \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial t^2} \qquad s = 1, 2 \tag{1}$$

выполнения условий контакта при $x = 0$:

1. для первой задачи

$$M_x^{(1)} = 0, \qquad M_x^{(2)} = 0, \qquad N_x^{(1)} = N_x^{(2)}, \qquad W^{(1)} = W^{(2)} \tag{2}$$

2. для второй задачи

$$W^{(1)} = 0; \qquad W^{(2)} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=0}; \qquad M_x^{(1)} = M_x^{(2)} \tag{3}$$

и граничных условий Флоке [2], которые идентичны длq обеих задач

$$W^{(1)}\left(-a/2\right) = ª\, W^{(2)}\left(a/2\right), \qquad \left.\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=-a/2} = ª \left.\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=a/2}$$

$$M_x^{(1)}\left(-a/2\right) = ª\, M_x^{(2)}\left(a/2\right), \qquad N_x^{(1)}\left(-a/2\right) = ª\, N_x^{(2)}\left(a/2\right) \tag{4}$$

$$ª = \exp(ika)$$

Условия шарнирного опирания при $y = 0$ и $y = b$ запишем в виде

$$M_y^{(s)} = 0; \quad W^{(s)} = 0 \tag{5}$$

В (1-5) k -волновое число Флоке, $W^{(s)}$ – нормальные упругие перемещения, D – жесткость на изгиб, ° – плотность материала, h - толщина пластинки, ³ – коэффициент Пуассона, $M_x^{(s)}, M_y^{(s)}$ – моменты сил, $N_x^{(s)}$ – обобщенные перерезывающие усилия

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \neg \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right), \quad M_y = D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \neg \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)$$
$$N_x = D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \neg)\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2}\right) \tag{6}$$

Решение (1), удовлетворящее условиям (5), представим в виде

$$W^{(s)}(x, y, t) = W_o^{(s)}(x) \sin\left(\frac{\text{®} m y}{b}\right) \exp\left(i \mu t\right)$$
$$(m = 1, 2, 3...) .$$

Для функции $W_o^{(s)}(x)$ получим следующее уравнение:

$$\left(\frac{d^2}{dx_0^2} - p^2\right)^2 W_0^{(s)}(x_0) - \Omega^2 W_0^{(s)}(x_0) = 0 \tag{7}$$

где $x_0 = x/a$ –безразмерная координата, μ – частота колебаний

$$p = \frac{\text{®} m a}{b}; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{2 \circ h \mu^2 a^4}{D}} \tag{8}$$

Общими решениями уравнения (1) будут

$$W_0^{(s)}(x_0) = A_s \sin(q x_0) + B_s \cos(q x_0) + C_s \sinh(r x_0) + D_s \cosh(r x_0) \tag{9}$$

где

$$q = \sqrt{\Omega - p^2}; \quad r = \sqrt{\Omega + p^2}; \tag{10}$$

Из условий неполного контакта имеем

1. для первой задачи

$$M_{x0}^{(1)}(0) = 0 \qquad M_{x0}^{(2)}(0) = 0$$
$$N_{x0}^{(1)}(0) = N_{x0}^{(2)}(0) \qquad W_{x0}^{(1)}(0) = W_{x0}^{(2)}(0) \tag{11}$$

2. для второй задачи

$$M_{x0}^{(1)}(0)=M_{x0}^{(2)}(0) \qquad W_{x0}^{(1)}(0)=W_{x0}^{(2)}(0)$$

$$\left.\frac{\partial W_{x0}^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{12}$$

Из условий Флоке получим

$$\left.\frac{dW_{x0}^{(1)}}{dx_0}\right|_{x_0=-1/2}=\text{ª}\left.\frac{dW_{x0}^{(2)}}{dx_0}\right|_{x_0=1/2}, \qquad M_{x0}^{(1)}\left(-1/2\right)=\text{ª}M_{x0}^{(2)}\left(1/2\right)$$

$$N_{x0}^{(1)}\left(-1/2\right)=\text{ª}N_{x0}^{(2)}\left(1/2\right), \quad W_{x0}^{(1)}\left(-1/2\right)=\text{ª}W_{x0}^{(2)}\left(1/2\right) \tag{13}$$

Удовлетворяя условиям (11-13) получим линейную однородную систему уравнений относительно коэффициентов A_s, B_s, C_s, D_s. Чтобы эта система имела нетривиальное решение, её определитель должен быть равен нулю, отсюда получим следующее дисперсионное уравнение:

1. для первой задачи

$$(\text{ª}^2+1)\left(\text{¥}_1\sin q-\text{¥}_2\sinh r\right)-2\text{ª}\left(\text{¥}_1\cosh r\sin q-\text{¥}_2\sinh r\cosh q\right)=0 \tag{14}$$

где

$$\text{¥}_1=r\left(r^2+p^2\left(\text{¬}-2\right)\right)\left(q^2+p^2\text{¬}\right)$$

$$\text{¥}_2=q\left(q^2-p^2\left(\text{¬}-2\right)\right)\left(r^2-p^2\text{¬}\right)$$

2. для второй задачи

$$(\text{ª}^2+1)\left(r\sin q-q\sinh r\right)-2\text{ª}\left(r\cosh r\sin q-q\sinh r\cosh q\right)=0 \tag{15}$$

Принимая во внимание, что $\text{ª}=\exp(ika)$ дисперсионные уравнения (14,15) , запишем как

$$\cos ka=R_m(\mu,p); \qquad m=1,2 \tag{16}$$

$$R_1(\mu,p)=\frac{\text{¥}_1\cosh r\sin q-\text{¥}_2\sinh r\cos q}{\text{¥}_1\sin q-\text{¥}_2\sinh r}$$

$$R_2(\mu,p)=\frac{r\cosh r\sin q-q\sinh r\cos q}{r\sin q-q\sinh r}$$

В случае отсутствия интерфейсных поверхностей дисперсионные уравнения имеют вид

$$k = \sqrt{\Omega - p^2}$$

В диапазоне частот $\Omega < p^2$ (cut-off frequencies) распространяющихся вдоль оси x волн не существует. Помимо этого диапазона в периодических структурах существуют и другие области частот (gap frequencies), где также нет распространяющихся волн.

Дисперсионные уравнения (16) при заданных значениях частоты μ и параметра p определяют волновое число k. Если при фиксированном значении параметра p имеются области значений $\tilde{\Omega}$, для которых $\left|R(\tilde{\Omega}, p)\right| > 1$, то в этой области частот распространение изгибной волны не имеет места (в этом случае волновое число k не является действительным).

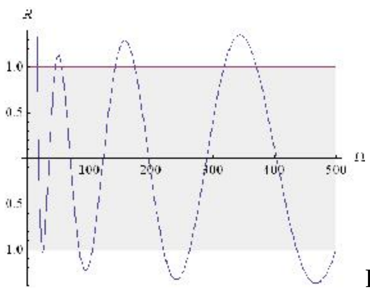
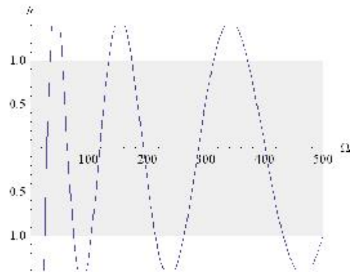
Рис.2 

Рис3. 

На рис.2,3 для пластинки с параметрами (³ $=1/4$), $p = 4$ приведены графики зависимости функций $R_1(\Omega)$ и $R_2(\Omega)$ от безразмерной частоты Ω. Отметим, что коэффициент Пуассона не входит в дисперсионное уравнение второй задачи.

Последовательности точек значений частот Ω_i, Ω_j, где $R(\Omega_i) = 1$, а $R(\Omega_j) = -1$ определяют границы зон запирания частот. Анализ функции $R(\Omega, p)$ показывает, что эффект существования зон запирания имеет место при всех значениях параметра p, (коэффициента Пуассона ³) и, что эти зоны распределены вдоль всей оси Ω, длина этих зон увеличивается с увеличением Ω.

Таким образом, нами установлена возможность существования изгибных волн Флоке в упругой составной однородной пластинке, разделенной интерфейсами периодических плоскостей неполного упругого контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, On the maintenance of vibrations of forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, Phil. Mag., 24, (1887), pp. 145–159.
2. W. Kohn, J. A. Krumhans, H. Lee, Variational methods for wave propagation and elastic constants of composite materials, J. Appl. Mech., 1972, 39, pp. 327-336.
3. A.Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 69, No. 3, pp. 670–689, 2008.
4. V. G. Papanicolaou, The Floquet Theory of the Periodic Euler Bernoulli Equation, Journal of differential equations, 1998, ,v.150, p.24-41.

Работа выполнена в рамках гранта 11-2с436 Государственного комитета по науке МОН РА.

<u>Сведения об авторах:</u>

Казарян Карен

Ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении,доктор физико-математических наук,

email:ghkarren@gmail.com

Казарян Рафаел старший научный сотрудник Института механики НАН Армении,кандитат физико-математических наук.

ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ПО ОТНОШЕНИЮ К СЛОЯМ УКЛАДКИ НА ВЛАЖНОСТНУЮ УСАДКУ И ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ СТАРОГО БЕТОНА

Карапетян К.А., Клекчян Д.Г., Манукян Е.С.

Ереван, Армения

Известно, что в способности деформироваться во времени на ряду с другими причинами весьма существенна роль десорбции химически несвязанной влаги из пор и капилляров бетона. Для оптимальной оценки влияния этого процесса на закономерность изменения усадки и ползучести бетона в зависимости от ориентации по отношению к слоям его укладки необходимо, что при экспериментировании по возможности исключить влияние других факторов (контракционные явления, увеличение прочности, модуля упругости, а также вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня в период проведения опытов и т.д.).

В работе рассматриваются результаты исследований влажностной усадки и ползучести при осевом растяжении весьма старого бетона с учетом ориентации по отношению к слоям его укладки.

Опытные образцы-цилиндры с диаметром 5,55см и высотой 22см были выбурены из исходных цилиндрических литоидпемзобетонных элементов с диаметром 25см и высотой 60см. Сразу после изготовления часть исходных элементов была гидроизолирована, а другая часть была оставлена без изоляции. Все элементы до выбуривания из них опытных образцов в возрасте 27 лет хранились в лабораторном помещении. Использовался вибрированный бетон состава в массе 1 : 1,539 : 2,400, В/Ц=0,95, Ц=295кг/м^3. Для приготовления бетона применялись песок (γ_n =1090кг/м^3), щебень ($\gamma_щ$ =820кг/м^3) с фракцией 10-40мм, взятые из карьера Джрабер (Республика Армения) и портландцемент активностью 40МПа. Кубиковая прочность литоидпемзобетона в месячном возрасте составляла 20,4МПа.

Сразу после изготовления была определена прочность опытных образцов на растяжение. Затем длительному растяжению при σ =0,6МПа были подвергнуты образцы, выбуренные из исходных гидроизолированных элементов по направлениям как перпендикулярному (образцы ПЕС), так и параллельному (образцы ПАС) по отношению к слоям укладки бетона и образцы ПЕС, выбуренные из неизолированных элементов. Спустя 174сут. все образцы были разгружены и в течение 70сут. велись наблюдения за обратимыми деформациями. Параллельно на ненагруженных образцах-близнецах замерялись усадочные деформации. Повторность опытов в каждом случае была принята 3-х кратной. Максимальный разброс измеренных опытных данных деформаций по отношению к их среднему арифметическому значению составил +5,1 и −4,8%. Температура лабораторного помещения в период проведения исследований составляла 22±5°С, а относительная влажност −70±5%.

Результаты исследований представлены на рис. 1 и 2 и в табл.1.

Отметим, что часть полученных результатов исследований ползучести литоидпемзобетона была анализирована с определенной точки зрения и опубликована в работе [1].

По проведенным измерениям мера влажности литоидпемзобетона в возрасте 28сут. составляла 13,3%. В случае надежной гидроизоляции влажность бетона в возрасте 27лет должна была составить 11,6% [2]. Однако по причине ненадежной гидроизоляции фактическая влажность опытных образцов ПЕС и ПАС к моменту проведения исследований составляла 7,5 и 7,7% сооствественно.

Согласно приведенным на рис.1 графикам, уровень начальной высокой скорости развития усадочных деформаций, наблюдаемый у образцов как ПЕС, так и ПАС, освобожденных от изоляции в момент начала опытов, в течение первых 35 дней с начала проведения измерений практически один и тот же.

Рис. 1. Кривые деформаций усадки литоидпемзобетона

Влияние ориентации по отношению к направлению слоев укладки бетона проявляется в период с 35 до 100 дней наблюдения за развитием усадочных деформаций. К концу этого промежутка времени величина деформаций усадки у образцов ПЕС достигает значения примерно $35x10^{-5}$, а у образцов ПАС – до $27x10^{-5}$(см. рис.1).

Из графиков рис.1 также видно, что после 100 дней с начала проведения измерений, наблюдается практически параллельное изменение кривых усадочных деформаций литоидпемзобетонных образцов ПЕС и ПАС, которое, главным образом, обусловлено колебанием влажности окружающей среды в течение этого промежутка времени. При этом до конца проведения исследований сохраняется приобретенная к указанному моменту наблюдения разница в 26-30% между величинами усадочных деформаций образцов ПЕС и ПАС.

Проведенные измерения показали, что величина объемной массы литоидпемзобетонных опытных образцов ПЕС и ПАС в момент удаления гидроизоляции составляла соответственно 1570кг/м^3 и 1574кг/м^3. После нахождения в течение 174 сут. в лабораторном помещении при влажности среды 70±5%, объемные массы упомянутых образцов приобрели значение 1515кг/м^3 и 1525кг/м^3 соответственно. Это свидетельствует о том, что за указанный промежуток времени опытные образцы ПЕС потеряли влагу примерно на 13% больше, чем образцы ПАС.

Объемная же масса опытных образцов ПЕС, выбуренных из литоидпемзобетонных неизолированных исходных элементов, практически не терпела изменения в течение проведения измерений и ее значение колебалось в пределах 1516-1509кг/м^3.

Таким образом, десорбция влаги из пор и капилляров литоидпемзобетона, хранившегося в течение 27 лет в гидроизолированном состоянии и освобожденного от изоляции в момент начала проведения измерений, приводит к появлению существенных усадочных деформаций. При этом неодинаковость сопротивления старого литоидпемзобетона влажностной усадке в зависимости от ориентации по отношению к слоям укладки бетона может оказаться существенной. Можно ожидать, что это явление не должно зависеть от возраста материала к моменту начала проведения измерений.

Объяснением выявленной последней закономерности может служить то, что деформативная сопротивляемость сжимающим напряжениям, возникающим в результате прохождения процесса десорбции влаги, в направлении, параллельном слоям укладки капиллярно-пористого бетона, более существенна, чем перпендикулярно к слоям, так как по данным работы [3] в первом случае уменьшение рабочей площади элементов из-за высыхания оказывается менее существенной, чем во втором случае.

Согласно данным рис.2 с началом процесса десорбции влаги опытные образцы претерпевают существенные деформации ползучести, которые во времени развиваются более интенсивно у образцов ПЕС, чем у образцов ПАС.

Приведенные на рис.2 экспериментальные данные ползучести образцов, гидроизолированных после изготовления и освобожденных от изоляции к моменту нагружения были аппроксимированы следующими зависимостями [4]:

для образцов ПЕС

$$\varepsilon_u^+(t) = A_u \cdot f(t) \times \sigma^+ = 21{,}67\left[1 - 0{,}5\left(e^{-0{,}015\,t} + e^{-0{,}02\,t}\right)\right] \times 0{,}6 \times 10^{-5}, \qquad (1)$$

для образцов ПАС

$$\varepsilon_u'^+(t) = A_u' \cdot f(t) \times \sigma^+ = 17{,}5\left[1 - 0{,}5\left(e^{-0{,}015\,t} + e^{-0{,}02\,t}\right)\right] \times 0{,}6 \times 10^{-5}, \qquad \text{‘}(2)$$

а для образцов ПЕС, неизолированных после расформовки –

$$\varepsilon_H^+(t) = A_H \cdot f(t) \times \sigma^+ = 3{,}5\left[1 - 0{,}5\left(e^{-0{,}015\,t} + e^{-0{,}02\,t}\right)\right] \times 0{,}6 \times 10^{-5}, \qquad (3)$$

где t – длительность нахождения образцов под нагрузкой в сутках.

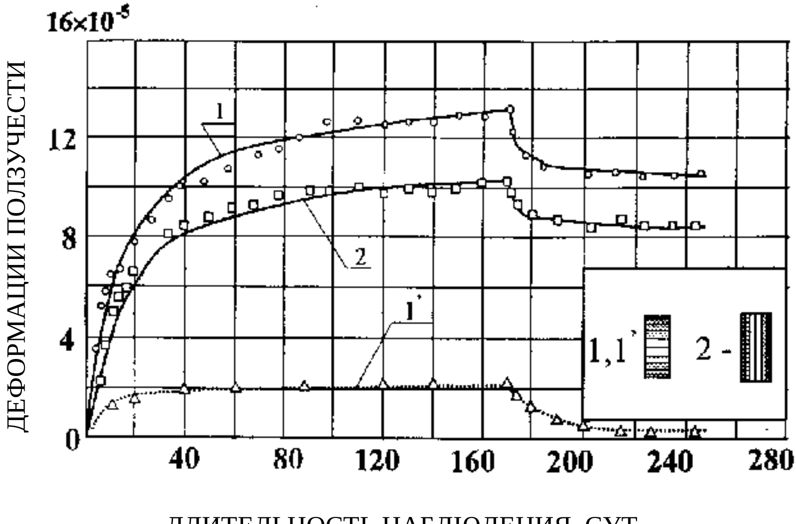


Рис.2. Кривые деформаций ползучести литоидпемзобетона при растяжении

Из графиков рис.2 можно заключить, что описание экспериментальных данных ползучести зависимостями (1) – (3) можно считать приемлемым.

Из сравнения (1) и (2) следует, что величина отношения деформации ползучести образцов ПЕС и ПАС, зафиксированная в один и тот же момент времени, не зависит от длительности нахождения образцов под нагрузкой и составляет

$$K^{+} = \frac{\varepsilon_u^{+}(t)}{\varepsilon_u'^{+}(t)} \approx 1{,}24$$

Таблица 1

Результаты опытов по исследованию прочности и ползучести литоидпемзобетона при осевом растяжении

Вид опытных образцов	Направление нагрузки по отношению к слоям укладки бетона	Прочность в момент нагружения R, МПа	Упруго-мгновенная деформация в момент нагружения x10^{-5}	Конечная величина деформаций ползучести x10^{-5}	Абсолютное значение обратимых деформаций x10^{-5}	
					Упруго-мгновенных	Ползучести
Гидроизоли-рованные после изготов-ления	перпенд.	1,54	3,7	12,7	4,3	1,9
	паралл.	1,87	3,3	10,4	5,4	1,8
Неизолир-ванные	перпенд.	1,18	4,9	2,1	5,1	1,9

Известно, что ползучесть бетона при осевом растяжении, нагруженного до уровня напряжения R_T, (при котором наблюдается микротрещинообразование), является следствием вязкой текучести гелевой структурной составляющей и деформации кристаллической структуры цементного камня, а при уровнях напряжений, превышающих R_T – еще и следствием появления и развития микротрещин в бетоне [5].

В рассматриваемых опытах уровень длительного растягивающего напряжения был меньше значения R_T и, поэтому, деформации ползучести за счет образования и развития микротрещин в бетоне в данном случае не имели места. Что же касается деформации, обусловленной вязкой текучестью гелевой структурной составляющей и деформацией кристаллической структуры цементного камня, то они не могли быть значительными, так как испытанный бетон был старого возраста. Следовательно, наблюдаемые деформации ползучести при осевом растяжении старого литоидпемзобетона, сохранившего в своих порах и капиллярах исходную влагу, можно объяснить, в основном, накоплением упругих деформаций из-за монотонного снижения во времени модуля деформации вследствие десорбции влаги [6].

Следует отметить также, что в условиях невысокой влажности среды деформации ползучести при растяжении старого литоидпемзобетона с начальным влагосодержанием могут более чем в 6 раз превосходить деформации ползучести аналогичного бетона с влажностью, примерно равной влажности окружающей среды (см. кривые 1 и 1´ рис.1 и табл.1).

Согласно данным табл.1 обратимые упруго-мгновенные деформации гидроизолированных после изготовления и освобожденных от изоляции в момент нагружения образцов ПЕС и ПАС оказались соответственно на 16 и 64% больше упруго-мгновенных деформаций этих же образцов, зафиксированных в момент нагружения. А относительное значение обратимых деформаций ползучести образцов ПАС оказалось более чем на 13% больше, чем образцов ПЕС.

В случае образцов ПЕС, неизолированных после расформовки, как упруго-мгновенные деформации, так и деформации ползучести восстанавливаются практически полностью (табл.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян К.А. Исследование ползучести весьма старого бетона с учетом процесса десорбции химически несвязанной воды. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №4. С. 66-72
2. Симонов М.З. Основы технологии легких бетонов. М.: Изд. лит. по строительству, 1973. 584с.
3. Карапетян К.С. Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. // Докл. АН Арм. ССР. 1957. Т. 24. №4. С. 145-152.

4. Карапетян К.С. Влияние фактора времени на прочность и деформативность бетона на литоидной пемзе и некоторые его другие свойства. В кн. «Гидротехнический бетон на литоидной пемзе». Ереван: Изд. АН Арм. ССР. 1958. С. 111-118.
5. Карапетян К.С. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона при сжатии и растяжении. // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 38. №3. С. 135-142.
6. Карапетян К.А. Влияние десорбции химически несвязанной воды на механические свойства бетона при кратковременных силовых воздействиях. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №3. С. 70-77.

Сведения об авторах:

Карапетян Корюн Ашотович
Д.т.н., зав. лабораторией Института механики НАН РА.
Адрес**:** пр. Маршала Баграмяна 24^{б}, 0019, Ереван, Армения
Тел: (+37410) 52-48-52,
E-mail: koryan@mechins.sci.am

Клекчян Давид Грачикович
К.т.н., председатель промышленного кооператива «Бетон».
Тел.: (091) 200894
E-mail: klekchyan@mail.ru

Манукян Егише Самвелович
Инженер, Институт механики НАН РА.
Тел.: (099) 500755

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЛИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ СТРИНГЕРОМ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГА

Керопян А. В.

Ереван, Армения

Рассматривается задача для упругой полуплоскости или бесконечной пластины, которые вдоль линии $y = 0$ в плоскости xoy (для пластины xoy - ее средняя плоскость) усилены кусочно-однородным бесконечным стрингером, состоящим из трех конечных и двух полубесконечных кусков с различными модулями упругости. Контактное взаимодействие между стрингером и деформируемым основанием осуществляется через тонкий слой клея, каждый дифференциальный элемент которого находится в условиях чистого сдвига (с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками). Контактирующая тройка (стрингер, слой клея, основания) деформируются под действием **сил,** приложенных к стрингером. Задача определения неизвестных контактных напряжений при помощи интегрального преобразования Фурье сведена к решению систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода с двумя неизвестными функциями на различных интервалах, которые в банаховом пространстве B можно решать методом последовательных приближений. Рассмотрены некоторые возможные частные случаи и выяснен характер и поведения контактных напряжений, действующих в конечных и полубесконечных участках.

Для краткого изложения работы в основе постановки задачи в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость, а по ходу ее решения приведены результаты для упругой бесконечной пластины, по возможности с одинаковыми обозначениями.

§1. Постановка задачи и вывод исходных разрешающих уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E или модуль сдвига G, коэффициент Пуассона ¬) усилена на границе $y = 0$ (в плоскости xoy) кусочно-однородным бесконечным стрингером малой толщины h и с модулями упругости E_1 при $|x| < a$, E_2 при $a < |x| < b$ и E_3 при $|x| > b$. Контактное взаимодействие между стрингером и деформируемым основанием осуществляется через тонкий слой клея с характеристиками (E_k , ν_k , h_k). Задача заключается в определении контактных напряжений, когда вдоль оси стрингера в точке $x = 0$ приложена сосредоточенная сила P .

Для стрингера принимается модель контакта по линии, а для слоя клея – условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингером действуют только касательные контактные напряжения [1-5].

Согласно вышепринятому, уравнения ровновесия стингера с помощью обобщенных функций можно записать в виде [2-6]:

$$\frac{dU^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_0(x)}{E_1h}+\frac{\tau_1(x)}{E_2h}+\frac{\tau_2(x)}{E_3h}-\frac{P\delta(x)}{E_1h}-u'_a\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]-$$

$$-u'_b\left[\delta(x+b)+\delta(x-b)\right],\quad -\infty<x<\infty, \qquad (1.1)$$

при условиях

$$\left(du^{(1)}/dx\right)_{x=a-0}-\left(du^{(1)}/dx\right)_{x=a+0}=u'_a=u'_{-a}\neq 0\,.$$

$$\left(du^{(1)}/dx\right)_{x=b-0}-\left(du^{(1)}/dx\right)_{x=b+0}=u'_b=u'_{-b}\neq 0\,.$$

Здесь

$$U^{(1)}(x)=U_0^{(1)}(x)+U_1^{(1)}(x)+U_2^{(1)}(x)\,,$$

$$U_0^{(1)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]d\,u^{(1)}/d\,x, \qquad (1.2)$$

$$U_1^{(1)}(x)=\left[\theta(x+b)-\theta(x+a)+\theta(x-a)-\theta(x-b)\right]d\,u^{(1)}/d\,x,$$

$$U_2^{(1)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(1)}/dx$$

$$\tau_0(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\tau(x),$$

$$\tau_1(x)=\left[\theta(x+b)-\theta(x+a)+\theta(x-a)-\theta(x-b)\right]\tau(x),$$

$$\tau_2(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]\tau(x)\,,\ \tau(x)=\tau_0(x)+\tau_1(x)+\tau_2(x),$$

где $u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингера, $\tau(x)$ – интенсивность касательных контактных напряжений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная, u'_a, u'_b – пока неизвестные постоянные.

В дальнейшем, для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями:

$$\bar f(\alpha)=F\left[f(x)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\alpha x}d\,x,\quad f(x)=F^{-1}\left[\bar f(\alpha)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar f(\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha\,.$$

Далее предполагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь условие [1-5] :

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k\tau(x),\ -\infty<x<\infty, \qquad (1.3)$$

где $k = h_k / G_k$, $G_k = E_k / 2(1 + ¬_k)$, $u^{(2)}(x,0)$ –горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

С другой стороны, для деформации в граничных точках упругой полуплоскости, когда на ее границе $y = 0$ действуют только касательные напряжения с интенсивностью $²(x)$, имеем

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} = \frac{1}{® A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{²(s)\,ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.4}$$

где $A = 2G(1 - ¡^2)$, $¡^2 = (1-2¬)/2(1-¬)$, G –модуль сдвига материала полуплоскости.

При решении задачи для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, в предположении, что стрингер находится на поверхности пластины по линии $y=0$ (*xoy* – средняя плоскость пластины), в (1.4) следует A заменить на $A^{*} = 8Gd / b_1^{*}(3 - ¬)$, где d – толщина пластины, а в (1.1) – h следует заменить площадью поперечных сечений стрингера F, а в (1.3) – k на $k^{*} = k / b_1^{*}$, b_1^{*} – ширина стрингера в контактном участке.

Теперь, примеинв к (1.1), (1.3) и (1.4) преобразование Фурье, получим следующее функциональное уравнение на действительной оси:

$$\left(ª_1^2 + 2\;|±| + ±^2\right)\overline{²_0}(±) + \left(ª_2^2 + 2\;|±| + ±^2\right)\overline{²_1}(±) + \left(ª_3^2 + 2\;|±| + ±^2\right)\overline{²_2}(±) = \\ = \overline{f}(±), \qquad -\infty < ± < \infty, \tag{1.5}$$

где

$$ª_j^2 = 1/kE_j h\,(j = 1,2), \quad = 1/2kA, \; \overline{²_i}(±) = F\left[²_i(x)\right] \;(i = 0,1,2), \\ \overline{f}(±) = ª_1^2 P + \frac{2u_a'}{k}\cos a± + \frac{2u_b'}{k}\cos b± . \tag{1.6}$$

Для бесконечной пластины в (1.5) $ª_j^2$ следует заменить на $\overline{ª_j^2} = 1/k^{*}E_j F \; (j = 1,2,3)$, на $^{*} = 1/2k^{*}A^{*}$.

Уравнение (1.5) запишем в двух видах

$$\left(ª_2^2 + 2\;|±| + ±^2\right)\overline{²}(±) + \left(ª_1^2 - ª_2^2\right)\overline{²_0}(±) + \left(ª_3^2 - ª_2^2\right)\overline{²_2}(±) = \overline{f}(±), \tag{1.7}$$

$$\left(ª_3^2 + 2\;|±| + ±^2\right)\overline{²}(±) + \left(ª_1^2 - ª_3^2\right)\overline{²_0}(±) + \left(ª_2^2 - ª_3^2\right)\overline{²_1}(±) = \overline{f}(±), \\ -\infty < ± < \infty, \tag{1.8}$$

Таким образом, задача сведена к решению функциональных уравнений типа (1.7), (1.8). Для определенности рассмотрим уравнение (1.7).

§2. Решение функционального уравнения (1.7) и ее исследование. Для этой цели представим (1.7) в следущем виде:

$$\overline{2}(\pm)+\frac{\left(\text{a}_1^2-\text{a}_2^2\right)\overline{2}_0(\pm)}{\text{a}_2^2+2\quad|\pm|+\pm^2}+\frac{\left(\text{a}_3^2-\text{a}_2^2\right)\overline{2}_2(\pm)}{\text{a}_2^2+2\quad|\pm|+\pm^2}=\overline{g}_2(\pm),$$

$$-\infty<\pm<\infty, \tag{2.1}$$

Применив к (2.1) обратное преобразование Фурье, получим

$$2(x)+\left(\text{a}_1^2-\text{a}_2^2\right)\int_{-a}^{a}K_2(x-s)2_0(s)ds+\left(\text{a}_3^2-\text{a}_2^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x-s)2_2(s)ds= \tag{2.2}$$

$$=g_2(x),\quad -\infty<x<\infty.$$

Здесь

$$2(x)=F^{-1}\left[\overline{2}(\pm)\right],\ K_2(x)=F^{-1}\left[\overline{K}_2(\pm)\right],\ \overline{K}_2(\pm)=\frac{1}{\text{a}_2^2+2\quad|\pm|+\pm^2},$$

$$g_2(x)=F^{-1}\left[\overline{g}_2(\pm)\right]=P\,\text{a}_1^2K_2(x)+ \tag{2.3}$$

$$+\frac{u_a'}{k}\left[K_2(x-a)+K_2(x+a)\right]+\frac{u'}{k}\left[K_2(x-b)+K_2(x+b)\right].$$

При рассмотреннии уравнения (1.8), вместо $K_2(x)$ и $g_2(x)$ следует принять обазначения $K_3(x)=F^{-1}\left[\overline{K}_3(\pm)\right]$и $g_3(x)=F^{-1}\left[\overline{g}_3(\pm)\right]$, что соответствует с изменением параметра a_2^2 на a_3^2 .

Теперь, поскольку при $|x|<a$, $2(x)=2_0(x)$ и $2(x)=2_2(x)$ при $|x|>b$, из (2.2) будем иметь:

$$2_0(x)+\left(\text{a}_1^2-\text{a}_2^2\right)\int_{-a}^{a}K_2(x-s)2_0(s)\,ds+$$

$$+\left(\text{a}_3^2-\text{a}_2^2\right)\int_{b}^{\infty}[K_2(x-s)+K_2(x+s)]2(s)\,ds=g_2(x),\quad |x|<a, \tag{2.4}$$

$$2(x)+\left(\text{a}_1^2-\text{a}_2^2\right)\int_{-a}^{a}K_2(x-s)2_0(s)\,ds+$$

$$+\left(\text{a}_3^2-\text{a}_2^2\right)\int_{b}^{\infty}[K_2(x-s)+K_2(x+s)]2(s)\,ds=g_2(x),\quad b<x<\infty,$$

причем теперь (2.2) запишем в виде

$$\text{²}\left(x\right)=\left(\mathsf{a}_2^{\,2}-\mathsf{a}_1^{\,2}\right)\int\limits_{-a}^{a} K_{\;2}(x-s)\text{²}_0(s)\,ds+ \qquad (2.5)$$

$$+\left(\mathsf{a}_2^{\,2}-\mathsf{a}_3^{\,2}\right)\int\limits_{b}^{\infty}[K_{\;2}(x-s)+K_{\;2}(x+s)]\text{²}\,(s)\,ds+g_{\;2}(x)\;,\;-\infty<x<\infty.$$

Таким образом, задача сведена к решению системы интегральных уравнений вида (2.4). Для исследования разрешимости системы (2.4) заметим, что имеет место [3-5]:

$$K_{\;2}\left(x\right)=\frac{\text{¥}_1}{\text{®}}\ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)+\text{¥}_1R\left(x\right), \qquad (2.6)$$

где

$$b_1=\frac{\mathsf{a}_2^{\,2}}{+\sqrt{\;^2-\mathsf{a}_2^{\,2}}},\; b_2=\frac{\mathsf{a}_2^{\,2}}{-\sqrt{\;^2-\mathsf{a}_2^{\,2}}},\; \text{¥}_1=\frac{1}{b_2-b_1}=\frac{1}{2\sqrt{\;^2-\mathsf{a}_2^{\,2}}},$$

$$R\left(x\right)=R_{b_1}\left(x\right)-R_{b_2}\left(x\right), \qquad (2.7)$$

$R_{b_j}\left(x\right)$ $j=1,2$, определяются как в [3-5],

Из (2.6) следует, что $K_{\;2}\left(x\right)$ непрерывная функция в рассматриваемых интервалах, а ее значение в точке $x=0$ конечно, причем $K_{\;2}\left(0\right)=\left(\text{¥}_1/\text{®}\right)\ln\left(b_2/b_1\right)$. Отметим также, что $K_{\;2}\left(x\right)\sim x^{-2}$ при $\left|x\right|\to\infty$.

Теперь, пользуясь представлением (2.6), систему (2.4) запишем в виде

$$\text{²}_0\left(x\right)+\text{¥}_1\left(\mathsf{a}_1^{\,2}-\mathsf{a}_2^{\,2}\right)\int\limits_{-a}^{a}R(x-s)\text{²}_0(s)\,ds+$$

$$+\left(\mathsf{a}_3^{\,2}-\mathsf{a}_2^{\,2}\right)\int\limits_{b}^{\infty}[K_{\;2}(x-s)+K_{\;2}(x+s)]\text{²}\,(s)\,ds=g_1(x)\;,\quad \left|x\right|<a, \qquad (2.8)$$

$$\text{²}\left(x\right)+\left(\mathsf{a}_1^{\,2}-\mathsf{a}_2^{\,2}\right)\int\limits_{-a}^{a}K_{\;2}(x-s)\text{²}_0(s)\,ds+$$

$$+\left(\mathsf{a}_3^{\,2}-\mathsf{a}_2^{\,2}\right)\int\limits_{b}^{\infty}[K_{\;2}(x-s)+K_{\;2}(x+s)]\text{²}\,(s)\,ds=g_2(x)\;,\quad b<x<\infty,$$

где

$$g_1\left(x\right)=g_{\;2}\left(x\right)+\frac{\text{¥}_1\left(\mathsf{a}_2^{\,2}-\mathsf{a}_1^{\,2}\right)}{\text{®}}\ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)\int\limits_{-a}^{a}\text{²}_0\left(s\right)ds, \qquad g_2\left(x\right)=g_{\;2}\left(x\right).$$

Теперь отметим некоторые возможные частные случаи, которые непостредственно можно получить из (2.4) или (2.8) подстановками: а) при $\mathrm{a}_3^2 = \mathrm{a}_2^2$ (т.е. $E_3 = E_2$, случай кусочно-однородной бесконечной накладки, при этом постоянная $u'_b = 0$), тогда будем иметь фредгольмовское интегральное уравнение второго рода относительно неизвестной функции $2_0(x)$, $x \in (-a, a)$ с непрерывним ядром [3], б) при $\mathrm{a}_2^2 = \mathrm{a}_1^2$ (т.е. $E_2 = E_1$, случай кусочно-однородной бесконечной накладки, при этом постоянная $u'_a = 0$), тогда будем иметь фредгольмовское интегральное уравнение второго рода относительно неизвестной функции $2(x)$, $x \in (b, \infty)$ с непрерывным ядром и т. д..

Далее, имея в виду (2.3) из (2.5) и (2.8), легко заметить, что $2(x)$ – непрерывная функция в рассматриваемых интервалах, а в точках $x = 0$ $x = \pm a,\ x = \pm b,$ принимает конечные значения. Отметим, что такое поведение $2(x)$ обусловлено наличием прослоек материала склеивания в контактных участках. При отсутствии прослоек в этих точках стрингера $2(x)$ имеем логарифмическую особенность [6]. .После решения системы (2.8), значения контактных напряжений при $a < |x| < b$ будут определяться из (2.5) при требовании $a < |x| < b$.

Далее, систему (2.8) запишем в виде:

$$\cdot = K \cdot + g\ , \tag{2.9}$$

где

$$\cdot = \begin{pmatrix} 2_0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} ¥_1\left(\mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_1^2\right)k_{11} & \left(\mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_3^2\right)k_{12} \\ \left(\mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_1^2\right)k_{21} & \left(\mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_3^2\right)k_{22} \end{pmatrix},$$

$$k_{11}2_0 = \int_{-a}^{a} R(x-s)2_0(s)\,ds, \quad k_{12}2 = \int_{b}^{\infty}[K_2(x-s) + K_2(x+s)]2(s)\,ds, \tag{2.10}$$

$$k_{21}2_0 = \int_{-a}^{a} K_2(x-s)2_0(s)\,ds, \quad k_{22}2 = \int_{b}^{\infty}[K_2(x-s) + K_2(x+s)]2(s)\,ds.$$

Теперь, рассмотрим (2.9) в банаховом пространстве B [7] вектор-функции $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, где $x_1 \in L_1(-a,a),\ x_2 \in L_1(b,\infty)$ и с нормой $\|x\| = \max\left\{\|x_1\|_{L_1(-a,a)}, \|x_2\|_{L_1(b,\infty)}\right\}$.

Очевидно, что оператор K действует в пространстве B и является Фредгольмовым. Тогда операторное уравнение (2.9) в указанном пространстве можно решать методом последовательных приближений, если $\|K\|<1$, причем

$$\|K\| = \max\left\{\left|¥_1\left(a_2^2 - a_1^2\right)\right|\|k_{11}\| + \left|a_2^2 - a_3^2\right|\|k_{12}\|,\ \left|a_2^2 - a_1^2\right|\|k_{21}\| + \left|a_2^2 - a_3^2\right|\|k_{22}\|\right\}.$$

Следовательно, получим условие разрешимости задачи в виде :

$$\max\left\{\left|1-\frac{a_1^2}{a_2^2}\right| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{a_3^2}{a_2^2}\right|,\quad \left|1-\frac{a_3^2}{a_2^2}\right| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{a_1^2}{a_2^2}\right|\right\} < 1.$$

Поступая аналогичным образом с уравнением (1.8) и повторяя вышеуказанные рассуждения, получим условие разрешимости в виде :

$$\max\left\{\left|1-\frac{a_1^2}{a_3^2}\right| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{a_2^2}{a_3^2}\right|,\quad \left|1-\frac{a_2^2}{a_3^2}\right| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{a_1^2}{a_3^2}\right|\right\} < 1.$$

В случае $a_2^2 = a_1^2$ контактные напряжения $²(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ определяются методом последовательных приближений при всех допустимых значениях $0 < a_j^2 < {}^2 < \infty,\quad j=1,3$, а в случае $a_3^2 = a_1^2$ - при всех допустимых значениях $0 < a_j^2 < {}^2 < \infty,\quad j=1,2$.

При получении этих неравенств имелось в виду, что

$$\int_0^\infty K_j(x)\,dx = \frac{1}{2a_j^2},$$

$$K_j(x) > 0,\quad j=2,3,\ 0<x<\infty,\ 0<b_2 \le 2b_1.$$

Значения $²(x)$ в точках $x=a,\ x=b$ можно определять из (2.5), подставляя $x=a$ и $x=b,$ а неизвестные постоянные u_a' и u_b' определяются из условий

$$u_a' = \frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2 h}\left[\int_{-a}^{a} ²_0(s)\,ds - P\right],\qquad u_b' = \frac{E_3 - E_2}{E_2 E_3 h}\int_b^\infty ²(s)\,ds\ .$$

Из (2.1) в силу разложения $K_j(\pm)$ при $|\pm| \to 0$ получим, что $^{2}(x) = F^{-1}\left[\overline{^{2}}(\pm)\right]$ при $|x| \to \infty$ имеет степенной порядок $O\left(x^{-2}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. – Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol. XXIII, 1970, p. 521.
2. Григорян Э.Х. Контактная задача для упругой полуплоскости, на границе которой приклеена бесконечная кусочно-однородная накладка.//Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990. №4. с. 24-34.
3. Саркисян В.С., Керопян А.В. К решению задач для упругих бесконечных тел, границы которых усиленны склеенными с ними упругой кусочно-однородной бесконечной накладкой. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995.№1.С. 42-48.
4. Григорян Э.Х.,Керопян А.В.,Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками. // Изв.РАН. МТТ. 1992. №3. С. 180-184.
5. Керопян А.В. Контактные задачи о передаче нагрузки от стрингеров различных длин к упругой полуплоскости или к бесконечной пластине при наличии сдвигов. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Тр. VI междунар. конф., Изд. НАН РА, Ереван,2008 , с. 246-252.
6. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 259 с.
7. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

<u>Сведения об авторе:</u>

Керопян Агаси Вачаганович,
канд.физ-мат. наук, доцент кафедры механики ЕГУ.
Адрес: ул. А.Манукяна 1, тел. 551148(раб.), 461941 (дом),
E-mail: agas50@ysu.am

ОБ ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Киракосян Р.М., Степанян С.П.
Ереван, Армения

Вопросам оптимального проектирования упругих и упруго-пластических элементов конструкций посвящена обширная литература ([1]-[7] и др.). В качестве критерия оптимальности принимаются различные условия: условие наименьшего объема, наименьшего значения наибольшего прогиба, равнопрочности, равноизгибаемости и т.д.

В настоящей статье рассматривается задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объема. Сплошная пластинка получается как частный случай кольцевой пластинки, когда радиус ее внутреннего контура стремится к нулю. В качестве критерия оптимальности принимается условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки. Считается, что пластинка обладает слабыми сдвиговыми свойствами по поперечному направлению.

Рассматривается случай действия равномерно распределенной нормальной нагрузки как при учете, так и пренебрежении собственного веса и влияния поперечного сдвига. Для конкретности считается, что внутренний контур пластинки свободен от нагрузок, а ее внешний контур шарнирно оперт. Однако, применяемый метод решения задачи позволяет рассмотреть и другие варианты нагрузок и краевых условий. Задача формулируется относительно безразмерных величин и решается численно по пакету Mathematica 7, с помощью команды NDSOLVE. Отдельно рассматривается случай отсутствия поверхностной нагрузки, когда действует только собственный вес.

Приводятся таблица и графики окончательных результатов решения, на основе которых делаются количественные и качественные заключения.

1.Рассмотрим цилиндрически ортотропную кольцевую пластинку объема V с внутренним и внешним радиусами a и b. Пластинку отнесем к цилиндрической системе координат $r\theta z$ так, чтобы координатная плоскость $z\theta$ совпала с ее срединной плоскостью $z=0$.

Рассмотрим множество линейно-переменных толщин пластинки

$$h=\beta h_0+h_1 r \tag{1.1}$$

Здесь β и h_1 – параметры, при которых толщина пластинки h принимает допустимые значения, h_0 – средняя толщина –

$$h_0=\frac{V}{\pi\left(b^2-a^2\right)} \tag{1.2}$$

Для пластин фиксированного объема V, или фиксированной средней толщины h_0 параметры β и h_1 связаны соотношением:

$$h_1 = \frac{3(1-\beta)\left(a+b\right)h_0}{2\left(a^2+ab+b^2\right)} \tag{1.3}$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$z = h_0\delta,\ a = kb,\ r = b\rho,\ s = \frac{h_0}{b},\ u_r = h_0\bar{u}_r$$

$$B_\theta = m^2 B_r,\ B_r = n\sigma_0,\ a_r\sigma_0 = \chi,\ \ w = h_0\bar{w} \tag{1.4}$$

$$\frac{d\bar{w}}{d\rho} = \alpha,\ \varphi_1 = \sigma_0\bar{\varphi}_1,\ y = s\alpha - \chi\bar{\varphi}_1,\ N_r = \sigma_0 h_0 \bar{N}_r$$

$$M_r = \sigma_0 h^2 \bar{M}_r,\ M_\theta = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_\theta,\ \left(\upsilon_\theta = \upsilon_r m^2\right),\ h = h_0 H$$

Здесь σ_0 – характерное напряжение, играющее роль масштаба, u_r – радиальное перемещение, w – прогиб, $\upsilon_r, \upsilon_\theta, B_r, B_\theta$ – механические параметры материала [8], N_r – поперечная сила, M_r, M_θ – изгибающие моменты пластинки.

С учетом (1.1), (1.3) и (1.4) имеем:

$$H = \beta + \gamma\rho,\ \gamma = \frac{3(1-\beta)\left(1+k\right)}{2\left(1+k+k^2\right)} \tag{1.5}$$

Рассмотрим конкретный случай, когда внутренний контур пластинки свободен от нагрузок, а внешний- шарнирно оперт.

Пусть пластинка несет равномерно распределенную нормальную поверхностную нагрузку интенсивности q, а плотность материала равна d.

Уравнения осесимметричного изгиба пластинки имеют вид [8]:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r}{r} = -q - \rho g d h \tag{1.6}$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = N_r\ , \tag{1.7}$$

где g – ускорение свободного падения. Решение уравнения (1.6) при краевом условии

$$N_r\big|_{r=a} = 0 \tag{1.8}$$

с учетом обозначений (1.4) имеет вид:

$$\bar{N}_r = -\frac{q^*\left(\rho^2 - k^2\right)}{2S\rho} - \frac{q_0^*}{6S\rho}\left[3\beta\left(\rho^2 - k^2\right) + 2\gamma\left(\rho^3 - k^3\right)\right] \tag{1.9}$$

Здесь

$$q^* = \frac{q}{\sigma_0}\ ,\ \ q_0^* = \frac{dgh_0}{\sigma_0} \tag{1.10}$$

Безразмерные величины $\bar{u}_r$, $\bar{N}_r$, $\bar{M}_r$ и $\bar{M}_\theta$ в рамках теории [9], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, с учетом (1.4) имеют вид:

$$\begin{gathered}\bar{u}_r = -\delta y,\ \ \bar{N}_r = \frac{H}{12}\left[8\bar{\varphi}_1 - n\gamma s^2 H\left(\frac{dy}{d\rho} + \upsilon_r m^2 \frac{y}{\rho}\right)\right],\\ \bar{M}_r = -\frac{nSH^3}{12}\left(\frac{dy}{d\rho} + \upsilon_r m^2 \frac{y}{\rho}\right),\ \ \bar{M}_\theta = -\frac{nSm^2H^3}{12}\left(\upsilon_r \frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho}\right)\end{gathered} \tag{1.11}$$

Приравнив выражения $\bar{N}_r$ (1.9) и (1.1), для функции получим:

$$\begin{gathered}\varphi_1 = \frac{n\gamma S^2 H}{8}\left(\frac{dy}{d\rho} + \upsilon_r m^2 \frac{y}{\rho}\right) - \frac{1}{4S\rho H}\Big[3\left(q^* + \beta q_0^*\right)\left(\rho^2 - k^2\right) +\\ +2q_0^*\gamma\left(\rho^3 - k^3\right)\Big]\end{gathered} \tag{1.12}$$

Имея в виду (1.9), (1.11) и учитывая обозначения (1.4), можно уравнение (1.7) привести к виду

$$\begin{gathered}H\frac{d^2y}{d\rho^2} + \left(3\gamma + \frac{H}{\rho}\right)\frac{dy}{d\rho} + m^2\left(3\upsilon_r\gamma - \frac{H}{\rho}\right)\frac{y}{\rho} =\\ = \frac{2}{nS^3H^2\rho}\Big[3(q^* + \beta q_0^*\left(\rho^2 - k^2\right) + 2q_0^*\gamma\left(\rho^3 - k^3\right)\Big]\end{gathered} \tag{1.13}$$

К этому уравнению следует присоединить краевые условия:

$$\left(\frac{dy}{d\rho} + \upsilon_r m^2 \frac{y}{\rho}\right)_{\substack{\rho=k\\ \rho=1}} = 0\ ,\ \ \left(M_r\Big|_{\substack{r=a\\ r=b}} = 0\right) \tag{1.14}$$

После решения уравнения (1.13) безразмерные значения прогиба определятся формулой

$$\bar{w} = -\frac{1}{S}\int_\rho^1\left(y + \chi\bar{\varphi}_1\right)d\rho\ , \tag{1.15}$$

Эта формула удовлетворяет условию равенства нулю прогиба на внешнем контуре пластинки $\rho = 1$.

Таким образом, определение прогибов пластинки заданной линейно-переменной толщины при учете влияния поперечного сдвига сводится к решению дифференциального уравнения (1.13) при краевых условиях (1.14).

2.Круглые кольцевые пластинки линейно-переменной толщины заданного объема образуют однопараметрическое бесконечное множество с безразмерной толщиной

$$H = \beta + \frac{3(1-\beta)(1+k)}{2(1+k+k^2)}\rho \tag{2.1}$$

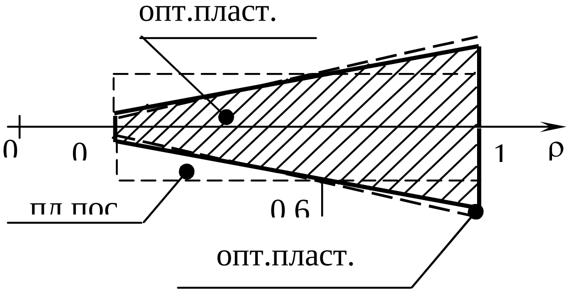
Из условия положительности толщины для допустимого интервала изменения параметра этого множества β получим:

$$-\frac{3k(1+k)}{2-k-k^2} < \beta < \frac{3(1+k)}{1+k-2k^2}\ ,\ (0 \le k < 1) \tag{2.2}$$

Численное определение оптимальной линейно-переменной толщины кольцевой (в том числе и сплошной) пластинки реализуется по следующей схеме.

Интервал (2.2), определенный для заданного значения безразмерного радиуса внутреннего контура пластинки „k”, с достаточно малым шагом разбивается на равные части и для каждого промежуточного значения параметра β по описанному выше методу определяется безразмерный прогиб $\overline{w}$ как функция радиальной координаты ρ. Забегая вперед, отметим, что, как и следовало ожидать, в рассмотренной задаче наибольший прогиб всегда получается в центре сплошной пластинки $\rho = 0$ и на внутреннем контуре кольцевой пластинки $\rho = k$. Значение параметра β_0, соответствующее наименьшему значению наибольших прогибов $\overline{W}_0^{\max}$ и определит оптимальную линейно-переменную толщину данной кольцевой пластинки (т.е. при данном значении „k”). Хотя и описанный метод является численным, тем не менее, он приводит к вполне надежному и достаточно точному результату. Дело в том, что современные мощные компьютеры позволяют с умеренной затратой времени вычисления проводить при делении интервала (2.2) на десятки тысячи частей. В таблице 1 приведены некоторые результаты вычислений при значении характерного напряжения $\sigma_0 = 1000\,\Pi a$.Рассмотрены три типа анизотропии материала: $m = 0{,}5\ (B_r = 4B_\theta)$, $m = 1\ (B_r = B_\theta)$, $m = 2\ (B_r = 0{,}25B_\theta)$ при одном и том же значении коэффициента Пуассона $\upsilon_r = 0{,}3$. Рассмотрены случаи сплошных $(k = 0)$ и кольцевых $(k = 0{,}1; 0{,}2;\ 0{,}3)$ пластинок, для каждой из которых приведены результаты вычислений как при пренебрежении, так и при учете влияния поперечного сдвига и собственного веса.

Для сравнения приведены также значения безразмерных наибольших прогибов соответствующих пластин постоянной толщины. Таблица составлена для четырех вариантов безразмерной интенсивности поверхностной нагрузки q^* и параметра собственного веса q_0^*. Для наглядности на фиг. 1 представлен радиальный разрез оптимальной кольцевой пластинки, когда $m = 0,5$; $k = 0,2$, $q^* = q_0^* = 0,1$ как при пренебрежении $(\chi = 0)$, так и при учете поперечного сдвига $(\chi = 0,01)$. С целью сравнения пунктирно показан еще и разрез соответствующей пластинки постоянной толщины. На фиг.2 для отмеченных пластинок представлены графики изменения



Фиг.1

$m = 0.5$, $k = 0.2$, $q^* = q_0^* = 0.1$

безразмерных прогибов по радиальной координате ρ .

Данные таблицы и графики приводят к следующим заключениям.

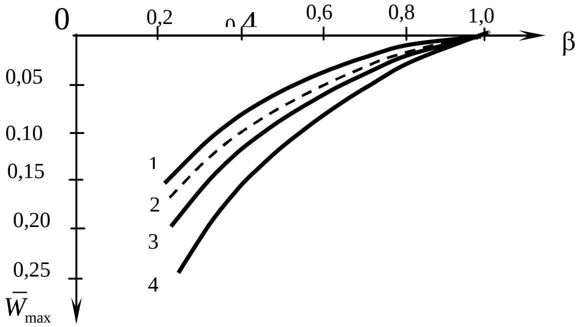
1. Оптимальная форма пластинок звисит от анизотропии материала (значения m), характера нагрузок (значений q^* и q_0^*) и от относительного радиуса внутреннего контура пластинки (значения „ k ”).

2. В случае $m = 2\left(B_\theta = 4B_r\right)$, когда действует только собственный вес $\left(q^* = 0 \text{ ; } q_0^* = 0,2\right)$ при $k = 0$; $0,1$; $0,2$ функция $\overline{W}^{\max} = f(\beta)$ в окрестности точки $\beta = 1$ имеет очень слабо выраженный минимум. В силу этого, соответствующие пластинки постоянной толщины можно считать практически оптимальными. Аналогичная ситуация имеет место еще и в случае $m = 0,5\left(B_r = 0,25B_\theta\right)$, но когда пластинка сплошная $(k \simeq 0)$, собственный вес пренебрегается и действует только равномерно распределенная нормальная нагрузка $\left(q^* = 0,2 \text{ ; } q_0^* = 0\right)$.

3. Во всех остальных случаях оптимальные пластинки заметно или существенно отличаются от соответствующих пластинок постоянной толщины. Один из таких случаев иллюстрирован на фиг. 1, где представлены радиальные разрезы пластинки постоянной толщины и пластинки оптимальной толщины при учете и пренебрежении поперечного сдвига.

Таблица 1

			$m=0,5$			$m=1$			$m=2$		
			Оптималльная пластинка		Пластин. пост.тол	Оптимальная пластинка		Пластин. пост.тол.	Оптимальная пластинка		Пласт пост.т.
			β_0	$\bar{W}_0^{\max}$	$\bar{W}^{\max}$	β_0	$\bar{W}_0^{\max}$	$\bar{W}^{\max}$	β_0	$\bar{W}_0^{\max}$	$\bar{W}^{\max}$
$q^*=0,2;$ $q_0^*=0$	$k=0$	χ=0	1,100	0,233	0,234	1,460	0,146	0,154	1,515	0,074	0,082
		χ=0.01	1,150	0,281	0,282	1,515	0,192	0,202	1,548	0,120	0,130
	$k=0,1$	χ=0	0,526	0,245	0,258	1,543	0,154	0,163	1,568	0,073	0,081
		χ=0.01	0,476	0,286	0,303	1,542	0,200	0,208	1,578	0,117	0,127
	$k=0,2$	χ=0	0,191	0,182	0,217	1,163	0,157	0,158	1,763	0,070	0,083
		χ=0.01	0,141	0,214	0,257	0,923	0,198	0,198	1,743	0,110	0,123
	$k=0,3$	χ=0	-0,125	0,116	0,156	0,114	0,118	0,129	2,034	0,067	0,081
		χ=0.01	-0,175	0,142	0,190	-0,006	0,145	0,163	1,984	0,102	0,115
$q^*=0,1;$ $q_0^*=0,1$	$k=0$	χ=0	0,611	0,227	0,234	1,121	0,153	0,154	1,331	0,078	0,082
		χ=0.01	0,531	0,271	0,282	1,061	0,201	0,202	1,261	0,127	0,130
	$k=0,1$	χ=0	0,186	0,210	0,258	1,116	0,163	0,163	1,386	0,078	0,081
		χ=0.01	0,146	0,243	0,303	0,916	0,208	0,208	1,306	0,124	0,127
	$k=0,2$	χ=0	-0,097	0,147	0,217	0,183	0,147	0,158	1,593	0,076	0,083
		χ=0.01	-0,137	0,173	0,257	0,033	0,176	0,198	1,473	0,118	0,123
	$k=0,3$	χ=0	-0,426	0,091	0,156	-0,346	0,096	0,129	1,834	0,074	0,081
		χ=0.01	-0,466	0,111	0,190	-0,426	0,117	0,163	1,654	0,111	0,115
$q^*=0;$ $q_0^*=0,2$	$k=0$	χ=0	0,031	0,179	0,234	0,561	0,149	0154	1,100	0,082	0,082
		χ=0.01	0,011	0,205	0,282	0,281	0,187	0,202	0,800	0,129	0,130
	$k=0,1$	χ=0	-0,175	0,129	0,258	-0,175	0,136	0,163	1,126	0,081	0,081
		χ=0.01	-0,175	0,150	0,303	-0,175	0,157	0,208	0,926	0,127	0,127
	$k=0,2$	χ=0	-0,409	0,083	0,217	-0,409	0,089	0,158	1,391	0,081	0,083
		χ=0.01	-0,409	0,100	0,257	-0,409	0,106	0,198	1,041	0,123	0,123
	$k=0,3$	χ=0	-0,727	0,049	0,156	-0,727	0,053	0,129	-0,727	0,073	0,081
		χ=0.01	-0,727	0,063	0,190	-0,727	0,066	0,163	-0,727	0,087	0,115



1.*оптимальная пластинка* $\chi = 0$, 2.*оптимальная пластинка* $\chi = 0.01$,
3.*пласт.пост.толщины* $\chi = 0$, 4.*пласт.пост.толщины* $\chi = 0.01$.
$k = 0.2;\ m = 0.5;\ q^* = q_0^* = 0.1$

Фиг.2

В этом случае существенно отличаются еще и значения максимальных прогибов. Из графиков фиг.2 видно, что наибольший прогиб оптимальной пластинки примерно в 1,5 раза меньше, чем у соответствующей пластинки постоянной толщины. Однако, поправки к значению наибольшего прогиба от учета поперечного сдвига как для пластинки постоянной толщины, так и оптимальной толщины практически равны и составляют примерно 18%.

4. Во всех рассмотренных случаях оптимальная форма пластин практически не зависит от значения χ, т.е. от от того учитывается влияние поперечного сдвига или нет.

5. При $B_r > B_\theta$ с приближением к внешнему контуру толщина оптимальной пластинки, в основном, возрастает. В случае же $B_r < B_\theta$ имеет место обратная картина, т.е. с приближением к внешнему контуру толщина оптимальной пластинки убывает. Эта закономерность нарушается при достаточно большом радиусе внутреннего контура пластинки. В этом можно убедиться данными таблицы 1, относящимися к случаю $k = 0,3$; $m = 2$; $q^* = 0$, $q_0^* = 0,2$. Тогда функция $\bar{W}^{\max} = f(\beta)$ является монотонно возрастающей, в силу чего оптимальное значение параметра β_0 совпадает с левой границей интервала (2.2). Картина сохраняется для более больших значений радиуса внутреннего контура пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.:Мир, 1977. 142 с.
2. Баничук Н. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.
3. Саркисян В., Гегамян Б. Теория и приложения оптимального проектирования конструкций. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1990.
4. Киракосян Р.М., Минасян В.Н. К рациональному проектированию упруго–пластической пластинки, работающей в поле действия объемных сил. // В кн.: Теоретична и приложна механика. Трети конгрес. Доклади. Кн. I. София: Изд-во на Българската Академия на Науките, 1977, с.458-462.
5. Киракосян Р.М. О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок.- ДАН Арм.ССР, 1981, т. LXXII, №5, с. 291-295.
6. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Проектирование равнопрочной балки с учетом касательного напряжения. В сб.:Труды Международной конференции. Нижний новгород, 1999.
7. Айрапетян В.Ж., Гегамян Г.Б. Задача минимизации наибольшего прогиба анизотропных пластин. Труды II международной конференции 4-8 октября, Дилижан, Армения, 2010, т.I . Ереван, стр. 53-53.
8. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
9. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. „Гитутюн” НАН РА, 2000.122 с.

Сведения об авторах:

Киракосян Размик Макарович – доктор техн. наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН РА.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б].Тел.: (+37410) 56-81-88.

E-mail: Kiraz@freenet.am

Степанян Сейран Павлович – кандидат физ.мат. наук, доцент.Кафедра числ.анализа и мат. моделирования факультета информ. и прикл. математики Ереванского госуниверситета. Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1.Тел.: (+37410) 55-90-96. E-mail: SEYRANSTEP @yahoo.com

ТЕРМОМИКРОМЕХАНИЧЕСКАЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АДИАБАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПОВРЕЖДЕННОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ

В.Н. Кукуджанов

Москва, Россия

Предложена микромеханическая связанная модель упруго-вязкопластического деформирования с учетом поврежденности для общего случая напряженно-деформируемого состояния (НДС). Модель обобщает дислокационную теорию пластичности Тейлора-Гилмана на случай разупрочняющегося деформирования, предшествующего разрушению. Полученные на микроуовне уравнения, с помощью качественных корреляционных соотношений между микро- и макропараметрами, записываются относительно макропараметров. В результате получаются упруговязкопластические уравнения для пористой среды с модифицированным условием пластичности Гарсона. При обращении пористости в нуль условие Гарсона переходит в условие пластичности Мизеса с температурным разупрочнением. Установлено предельное значение коэффициента трехосности, которое определяет смену механизма разрушения пористого материала отрывом – сдвиговым. Доказана корректность полученных уравнений. Численное решение задач подтверждает корректность и адекватность модели экспериментальным результатам для разных НДС.

Впервые поврежденность в упругую модель была введена Л.М. Качановым [1] и почти одновременно Ю.Н. Работновым [2] и описывалась скалярной величиной. АА.Ильюшин обобщил эту модель и предложил рассматривать поврежденность как тензорную величину в различных моделях сплошной среды [3].

В настоящей работе, в отличие от предшествующих исследований, поврежденность рассматривается на основе микромеханического подхода Тейлора-Гилмана [4-6]. Цель –обобщение этой теории на случай разупрочняющейся вязкопластической среды. Принимается, что поврежденность характеризуется тензором 2-го ранга. Модель микропластичности основывается на термофлуктуационном механизме движения дислокаций, которые при упрочнении описываются уравнениями

$$¥^{p} = abN_m V \tag{1}$$

$$V = V_0 \exp\left(\frac{U_0 - (s - s^r)}{k^{-}}\right) \tag{2}$$

$$N_m = \left(N_0 + a\dot{\gamma}^{p}\right)^n \exp(-N/N_*) \tag{3}$$

$$(1-\eta)\,p_{ij} = \omega_{ij} \tag{4}$$

где $\dot{\gamma}^{p}$ – скорость пластических деформаций, N_m – число подвижных дислокаций, V – средняя скорость дислокаций, s, s^r – девиатор полных и остаточных напряжений, θ – абсолютная температура. p_{ij} – полный поток дислокаций, ηp_{ij} – поток подвижных дислокаций, ω_{ij} – поток дислокаций, аккумулирующихся на границах зерен.

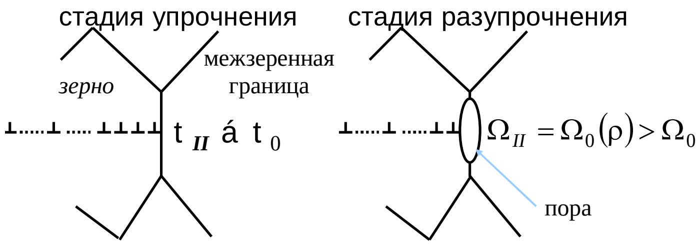


Рис. 1. Аннигиляция дислокаций и образование пор.

Для описания механизма разупрочнения необходимо рассмотреть уравнения баланса дислокационных потоков на стадии появления дефектов – микропор

$$(1-\eta)\dot{p}_{ij} = \dot{\omega}_{ij} + \dot{b}_{ij} \tag{5}$$

Поток аннигилирующих дислокаций $\dot{b}_{ij}$ пропорционален потоку скопившихся дислокаций на границе

$$\dot{b}_{ij} = \beta\,\omega_{ij} \tag{6}$$

Интенсивность тензора аннигилирующих дислокаций $\dot{B}_{II}$ предполагается монотонной функцией избыточной интенсивности ω_{ij}.

$$\dot{B}_{II} = \frac{1}{\tau_p}\hat{Q}\left(\Omega_{II} - \Omega_0\right) \quad \hat{Q}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0 \\ Q(z) & \text{при } z \ge 0 \end{cases} \tag{7}$$

τ_p – время релаксации остаточных напряжений.

Окончательное уравнение для потока ω_{ij} следуют из уравнения баланса (5)-(7)

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} + \frac{\hat{Q}\left(\Omega_{II} - \Omega_0\right)}{\tau_p \Omega_{II}}\omega_{ij} = \frac{1-\eta}{\eta}\frac{d\dot{\gamma}_{ij}^{p}}{dt} \tag{8}$$

Когда интенсивность тензора аккумулирующихся на границах зерен дислокаций $\Omega_{II} = \left(\frac{1}{2}\text{µ}_{ij}\text{µ}_{ij}\right)^{1/2}$ достигает критического значения Ω_{0}, начинается процесс аннигиляции дислокаций и образование пор между зернами кристаллического материала.

Корреляция микро- и макропараметров. Между микро- и макропараметрами имеет место соответствие: $\text{µ}_{ij} \to s_{ij}^{r}$, $\text{¦}\,\dot{p}_{ij} \to \text{¥}_{ij}^{p}$,

$\dot{\text{µ}}_{ij} = \frac{1-\text{¦}}{\text{¦}}\text{¥}_{ij}^{p}$, $s_{ij}^{r} = 2\text{«}^{*}\text{µ}_{ij} = 2\sim\text{¥}_{ij}^{p}$, $\sim = \text{«}^{*}\frac{1-\text{¦}}{\text{¦}}$ – модуль упрочнения.

на макроуровне эволюционное уравнение микропор (8) дает релаксационное уравнение для тензора остаточных напряжений

$$\frac{ds_{ij}^{r}}{dt} + \frac{2\text{«}^{*}}{\text{²}_{p}}\frac{\hat{Q}\left(S_{II}^{r} - S_{0}^{r}\right)}{S_{II}^{r}}s_{ij}^{r} = 2\sim\frac{d\text{¥}_{ij}^{p}}{dt} \qquad (9)$$

Релаксационный член $\dot{b}_{ij}$ соответствует девиатору повреждаемости $\dot{d}_{ij}$

$$\dot{b}_{ij} \to \dot{d}_{ij} = \frac{2\text{«}^{*}}{\text{²}_{p}}\frac{\hat{Q}\left(S_{II}^{r} - S_{0}^{r}\right)}{S_{II}^{r}}s_{ij}^{r} \qquad (10)$$

шаровая часть тензора повреждаемости соответствует пористости материала $b_{ii} \to f$.

Критерий образования дефектов $S_{II}^{r} = S_{0}^{r}$, где S_{0}^{r} – критическая интенсивность остаточных напряжений

Корректность задачи. Исследование корректности начально-краевой задачи для полученной системы уравнений показывает:

- однозначная зависимость $\sigma=\sigma_{Y}(\varepsilon)$ на участке разупрочнения ***c-d’’*** приводит к некорректной постановке начально-краевых задач;
- для корректного описания процесса разупрочнения необходимо считать предел текучести многопараметрической функцией $\sigma_{Y} = \sigma_{Y}(\varepsilon,f,T,\sigma^{r},k)$, $\frac{\partial\pm_{Y}}{\partial\text{£}} > 0$, а $d\pm_{Y} < 0$ – полный дифференциал (рис. 2).

где f – повреждаемость, T – температура, $k = \frac{\frac{1}{3}\pm_{kk}}{\pm_{e}}$ – коэффициент трехосности НДС, $\pm_{e} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений,

σ^r – остаточные напряжения и падающая ветвь ***c-d’’*** связана с повреждаемостью, а не с деформацией.

Для получения зависимости $\sigma_Y = \sigma_Y(\varepsilon, f, T, \sigma^r, k)$ привлекаются сведения о разрушении из микромеханики. Коэффициент k определяет НДС материала и играет наиважнейшее значение для механизмов и характера разрушения.

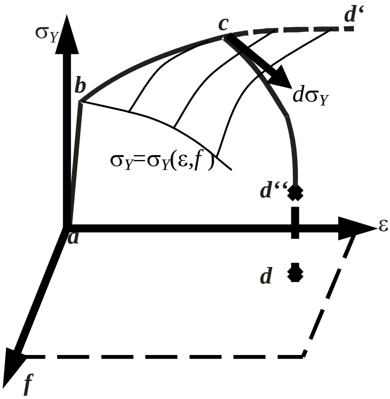


Рис. 2. Нагружение и разрушение в трехмерном пространстве σ–ε–f.

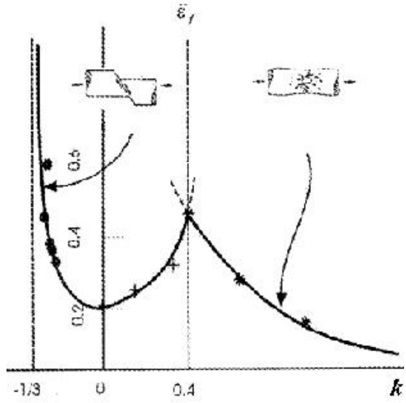


Рис. 3. Тип разрушения в зависимости от параметра трехосности k [13].

Для того, чтобы имело место разупрочнение материала, должны выполняться ограничения на частные производные функции σ_Y, которые следуют из условий

$$d\sigma_Y = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial f} df + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \sigma^r} d\sigma^r < 0 \quad \text{при} \quad k > 0.4$$

$$f = 0, \quad d\sigma_Y = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \sigma^r} d\sigma^r < 0 \quad \text{при} \quad k < 0.4$$

при этом, следует учитывать, что $\dfrac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} \geq 0, \ \dfrac{\partial \sigma_Y}{\partial T} dT < 0, \ \dfrac{\partial \sigma_Y}{\partial \varepsilon^p} > 0$.

Приведем характерные величины коэффициента трехосности для некоторых НДС

- Сдвиг ($\sigma_{12} \neq 0$, все другие компоненты равны 0) – $k = 0$.
- Одноосное растяжение ($\sigma_{11} \neq 0$, все другие компоненты 0) – $k = 1/3$.
- Плоская деформация (растяжение при упругой и пластической несжимаемости) $k = \sqrt{3}/3 \approx 0.577$.

- Стержни с вырезами – k = 0.6 – 2.5.
- Вблизи конца трещины – $k \approx 3$ для неупрочняющегося материала и затупленного конца трещины. Для упрочняющегося материала – $k \approx 5$.
- Одноосная деформация ($\varepsilon_{11} \neq 0$, остальные компоненты 0) – $k \to \infty$ при $\nu \to 1/2$.

Ограничение для GTN-модели. Модель Гарсона [7] и её модификация GTN [8,9] применимы при $k \geq 0.4$ (рис. 3).

Кривые, отвечающие разрушению в плоскости эквивалентной деформации и коэффициента трехосности напряженного состояния. Справа ($k > 0.4$) разрушение за счет образования пор. Слева ($k < 0.4$) разрушение по полосам адиабатического сдвига (рис. 3).

Экспериментальные данные [13] получены при квазистатическом нагружении, ε_f – критическая интенсивность деформаций, при которых происходит разрушение.

Ассоциированный закон вязкопластичности. Условие пластичности типа Гарсона для пористых материалов с упруговязкопластической матрицей при кинематическом упрочнении:

$$F(\sigma_{ij}, f, T_s) = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^a s_{ij}^a}{S_Y^2} + 2fq_1 \cosh\left(\frac{3q_2}{2}\frac{\sigma_{kk}^a}{S_Y}\right) - 1 - q_1^2 f^2 = 0 \qquad (11)$$

где s_{ij}^a – девиатор активных напряжений σ_{ij}^a, S_Y – предел текучести пористого упруговязкоплстического материала, определяемый из условия равенства пластических работ для эффективного материала и матрицы

$$\sigma_{ij}^a \dot{\varepsilon}_{ij}^p = (1-f)\varepsilon^p \left[S_Y(\varepsilon^p) + \Psi(\tau\varepsilon^p)\right]; \quad S_Y = S_Y(\varepsilon^p) + \Psi^{-1}(\tau\varepsilon^p) \qquad (12)$$

где $\dot{\varepsilon}_e^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$ – интенсивность пластических деформаций, τ – время релаксации Ψ – функция влияния скорости деформаций.

Для получения определяющих уравнений (12) использован ассоциированный закон при аддитивности деформационного и скоростного упрочнений

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}; \qquad \Lambda = \frac{T_s}{\tau}\Psi\left(T_s - \sigma(\varepsilon^p)\right)\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\sigma_{ij}\right)^{-1} \qquad (13)$$

Определяющие уравнения эволюции дефектов. Зарождение и рост микропор. Сферическая часть тензора аннигиляции $\dot{b}_{ii}$ пропорциональна пористости $f = \Delta V_p / V$. Эволюционное уравнение для пористости состоит из двух слагаемых

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{gr}} + \dot{f}_{\text{nucl}} \qquad (14)$$

где $\dot{f}_{\text{gr}} = (1 - f)\dot{\varepsilon}^{p}_{kk}$ – рост пор определяется законом сохранения массы, $\dot{f}_{\text{nucl}} = A\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}_{m}$ – зарождение пор управляется величиной интенсивности пластических деформаций в матрице, $A = \dfrac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\bar{\varepsilon}^{p}_{m} - \varepsilon_N}{s_N}\right)^{2}\right]$. нормальное распределение деформаций $\bar{\varepsilon}^{p}_{m}$ с главным значением ε_N и стандартным отклонением s_N, f_N – объемная доля зарождающихся пор [8].

Определяющие соотношения при отсутствии пористости ($k < 0.4$, $f = 0$). Условие Гарсона [7] переходит в условие пластичности Мизеса для упруговязкопластического материала с деформационным и скоростным упрочнениями и термическим разупрочнением. При мультипликативном законе упрочнения в форме Johnson-Cook [11] предел текучести записывается в виде

$$\sigma_Y = \sigma^{0}_{Y}\left(\varepsilon^{p}_{e}, \hat{T}\right)R\left(\dot{\varepsilon}^{p}_{e}\right) = \left[A + B\left(\varepsilon^{p}_{e}\right)^{n}\right]\left[1 + C\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}^{p}_{e}}{\dot{\varepsilon}_{0}}\right)\right]\left(1 - \hat{T}^{m}\right)$$

где безразмерная температура

$$\hat{T} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad T < T_{\text{transition}} \\ \left(T - T_{\text{transition}}\right)/\left(T_{\text{melt}} - T_{\text{transition}}\right) & \text{при} \quad T_{\text{transition}} \le T \le T_{\text{melt}} \\ 1 & \text{при} \quad T > T_{\text{melt}} \end{cases}$$

Модель разрушения. Критерии разрушения:

- $f = f_{\text{cr}}$ (по пористости) – при преобладании растягивающих напряжений $k \geq 0.4$;
- $\varepsilon^{p}_{e} = \left(\frac{2}{3}\varepsilon^{p}_{ij}\varepsilon^{p}_{ij}\right)^{1/2} = \varepsilon^{p}_{cr}$ (по интенсивности пластической деформации) – при преобладании сжатия $k < 0.4$.

Модель разрушения (подход Майнчена и Сака [12] – разрушение отдельных элементов). Если в лагранжевой ячейке выполняется критерий разрушения, то связи между узлами в таких ячейках освобождаются и напряжения либо релаксируют к нулю, либо сопротивление сохраняется только по отношению к сжатию. Лагранжевы узловые массы при разрушении превращаются в самостоятельные частицы, уносящие массу, импульс и энергию, движущиеся по инерции как жесткое целое и не взаимодействующие с неразрушенными частицами [9, 10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы ОЭММПУ РАН №13 и РФФИ (грант 09-01-00270-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения // Сб. «Вопросы прочности материалов и конструкций». М.: Изд-во АН СССР. 1959. С. 5-7.
3. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 3. С. 21-35.
4. Taylor J.W. Dislocation dynamics and dynamic yielding // J. Appl. Phys., 1965. V. 36. No. 10. P. 22599-2602.
5. Gilliman J.J. Dislocation dynamics and the response of material to impact // Appl. Mech. Rev. 1968. V. 21. No. 8. P. 767-783.
6. Гилман Дж.Д. Микродинамическая теория пластичности // Микропластичность. М.: Металлургия, 1972. С. 18-37.
7. Gurson A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I – Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Materials // Journal of Engineering Materials and Technology. 1977. V. 99. P. 2–15.
8. Chu C.C., Needleman A. Void Nucleation Effects in Biaxially Stretched Sheets // Journal of Engineering Materials and Technology. 1980. V. 102. P. 249–256.
9. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение задач континуального разрушения // Препринт № 746. М.: ИПМ РАН, 2004. 40 с.
10. Кукуджанов В.Н. Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 103-135.
11. Johnson G.R., Cook W.H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures // Proc. 7th Intern. Symp. Ballistics. 1983. P. 541-547.
12. Maenchen G., Sack S. The "Tensor" code // Methods Comput. Phys. N.Y.:Acad. Press, 1964. V. 3. P. 188-210.
13. Bao Y., Wierzbicki T. A Comparative Study on Various Ductile Crack Formation Criteria. Journal of Engineering Materials and Technology. 2004 (126), 314-324.

Сведения об авторе:

Кукуджанов Владимир Николаевич

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
главный научный сотрудник, д.ф.-м.н.,профессор
тел. раб. +7-(495)-434-46-39
ИПМех РАН, просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия
kukudz@ipmnet.ru ,http://ipmnet.ru/~kukudz

ИЗМЕНЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА С ДЕФЕКТАМИ ЗА СЧЕТ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Кукуджанов В.Н. , Коломиец-Романенко А.В.

Москва, Россия

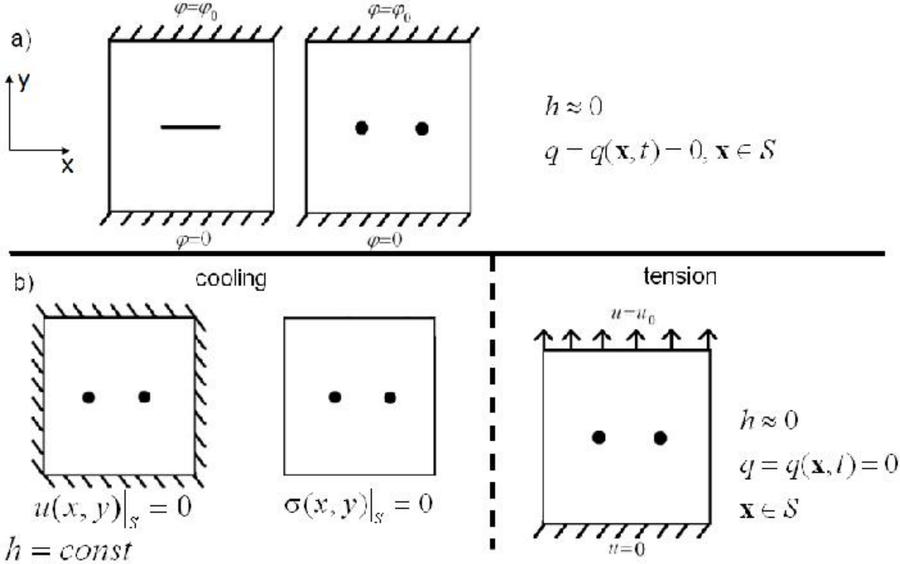
Введение

Исследовано одновременное и последовательное электротермо-механическое воздействие с учетом изменения в материале структуры микродефектов. Рассмотрен представительный элемент материала, содержащий дефект в виде разреза. Результатом исследования является обнаружение на начальном этапе схлопывания и зарастания микродефектов в виде разреза при пропускании электрического тока и локализации термонапряжений между дефектами, что приводит к упрочнению материала за счет преобразования структуры материала (возникновение цилиндрических дефектов). Показано, что при наличии круговых цилиндрических дефектов под воздействием электрического тока возникает слабая концентрация температуры, в то время как для плоских разрезов (микротрещин) эта концентрация существенна. Получены диаграммы растяжения образца после обработки электрическим током с учетом термоизоляции. А так же определены диаграммы при одновременных процессах охлаждения и релаксации температуры, и после полного охлаждения образца до температуры внешней среды. Проведено сравнение результатов в плоской и осесимметричной постановке задачи раздельного воздействия электрического тока и растяжения образца из идеальноупругопластического материала. Полученные результаты проясняют механизм изменения термоэлектропластических свойств материала.

Постановка задачи

Исследовано термоэлектродинамическое воздействие с учетом изменения в материале структуры микродефектов. Рассмотрен представительный элемент материала, содержащий дефект в виде разреза. В работе [1] уже был рассмотрен материал, состоящий из периодических распределенных представительных элементов, содержащих дефекты различного типа (цилиндрические микропоры, плоские микротрещины), и было показано, что для получения качественного результата достаточно рассматривать изолированный представительный элемент (фиг. 1).

Задача решается в несколько этапов. На первоначальном этапе рассматривается термоэлектрическая задача, где результатом является образование цилиндрических дефектов из дефекта в виде разреза при пропускании электрического тока и получение распределения температуры в представительном элементе [2,3]. Для расчета электрического тока в токопроводящем материале используется уравнение Максвелла сохранения заряда.



Фиг. 1 *Постановка задачи*

а) - термоэлектрическая задача, b) - термомеханическая задача

Принимая, что постоянный ток находится в установившемся режиме, уравнение Максвелла сохранения заряда имеет вид:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V r_c dV \tag{1}$$

где V –произвольный объем с поверхностью S; $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к S; $\mathbf{J}$ – плотность тока и r_c – внутренний объемный источник тока на единицу объема. Плотность электрического тока определяется законом Ома:

$$\mathbf{J} = \pm^{E} \cdot \mathbf{E} = -\pm^{E} \cdot \frac{\partial \ddot{}}{\partial \mathbf{x}} \tag{2}$$

где $\mathbf{E}(x)$ – интенсивность электрического поля, определенная как отрицательный градиент электрического потенциала $\mathbf{E} = -\partial \ddot{} / \partial x$, $\ddot{}$ – электрический потенциал, $\pm^{E}(\overline{})$ –матрица электропроводности, $\overline{}$ - температура. Закон Джоуля-Ленца, описывающий интенсивность электрической энергии, рассеиваемой током, который течет по проводнику:

$$P_{ec} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial \ddot{}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \pm^{E} \cdot \frac{\partial \ddot{}}{\partial \mathbf{x}} \tag{3}$$

Количество электрической энергии, выделяемой в качестве внутреннего тепла, равно

$r_c = \eta_v P_{ec}$ (4)

где η_v - соответствующий коэффициент преобразования электрической энергии в тепловую. Использование закона Ома в уравнении сохранения заряда, записанное в вариационной форме, дает уравнение баланса энергии в вариационной форме:

$$\int_V \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \sigma^E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} dV = \int_S \delta\varphi J dS + \int_V \delta\varphi r_c dV \qquad (5)$$

Уравнение баланса энергии для определения распределения температуры в представительном элементе в вариационной форме имеет вид:

$$\int_V \rho \dot{U} \delta\theta \, dV + \int_V \frac{\partial \delta\theta}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} dV = \int_V \delta\theta \, r dV + \int_S \delta\theta q dS \qquad (6)$$

где $\dot{U}$ - материальная производная внутренней энергии. Граничные условия при решении термоэлектрической задачи имеют вид:

$$\varphi(x,l) = \varphi_0, \ \varphi(x,0) = 0 \ \text{или} \ J(x,l) = J_0, \ \varphi(x,0) = 0 \qquad (7)$$

Условие конвективного теплообмена с внешней средой:

$$q = h(\theta - \theta_0) \qquad (8)$$

где $h = h(\mathbf{x},t)$ – коэффициент конвективного теплообмена, θ_0 – температура внешней среды. На этапе решения термоэлектрической задачи принимается условие теплоизоляции: $h \approx 0 \Rightarrow q = q(\mathbf{x},t) = 0$.

При действии электрического тока плоские дефекты в виде разреза ”залечиваются”, а в кончиках трещин за счет концентрации температуры и плавления образуется круговая пора, на границе которой выполняется условие выплавления. Таким образом, из образца с упорядоченной структурой плоских дефектов в виде разрезов получается материал с упорядоченной структурой цилиндрических дефектов. Дальнейшее воздействие электрическим током на представительный элемент с цилиндрическими дефектами не приводит к их закрытию вследствие малости сжимающих перемещений (Фиг. 2, где а) – поле перемещений вдоль вертикальной оси представительного элемента с плоским дефектом в виде разреза, б) - поле температур для представительного элемента с плоским дефектом в виде разреза).

Тензор полных деформаций образца термопластического материала равен:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \qquad (9)$$

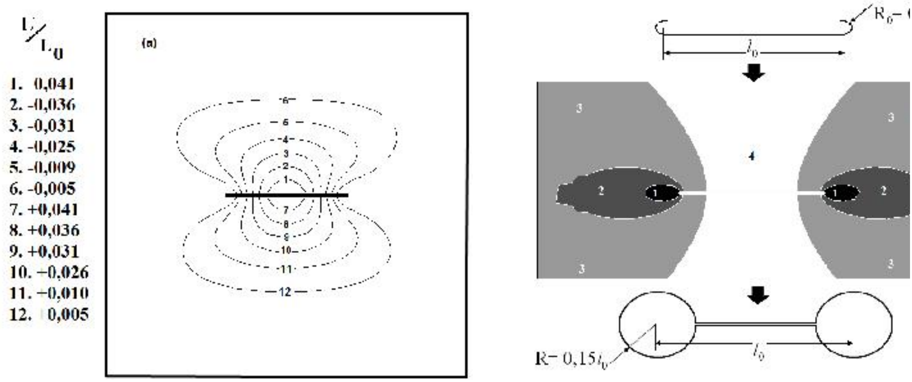
где, $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ –тензоры упругих, пластических и температурных деформаций. Тепловое расширение в дифференциальной форме имеет вид:

$$d\varepsilon^{th} = \sim(\bar{\ })d\bar{\ } \qquad (10)$$

где ~ – коэффициент термического расширения. Условие пластичности принимается по Мизесу:

$$\pm_Y = \sqrt{3/2\,\mathbf{S} : \mathbf{S}} \qquad (11)$$

где $\pm_Y = \pm_Y(\bar{\ })$ –предел текучести.



а) **б)**

Фиг. 2 ***Схема образования структуры цилиндрических дефектов из периодической структуры дефектов в виде разрезов***

Для решения задачи определения напряженно деформированного состояния (НДС) представительного элемента в процессе охлаждения используются уравнения баланса энергии (6) и уравнение, которое имеет вид:

$$\int_V \pm : ¢D dV = \int_V f^T \cdot ¢v dV + \int_S t^T \cdot ¢v dS \qquad (12)$$

где $D = d^2U / d£^2$, f^T – плотность объемных сил, t^T – плотность поверхностных сил, $¢v$ – изменение скорости материальных частиц.

Начальные условия для термомеханической задачи принимаются в таком виде: недеформированное состояние образца, распределение температуры берется из решения электротермической задачи. Граничные условия при решении задачи охлаждения принимаются такими:

$$\pm(x,y)\big|_S = 0 \text{ или } u(x,y)\big|_S = 0 \qquad (13)$$

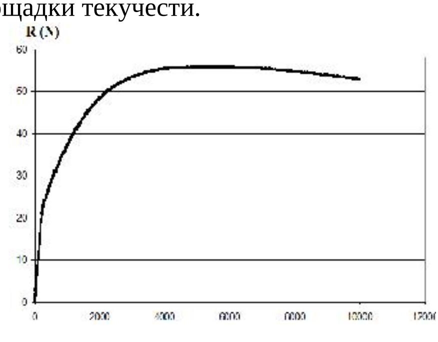
Граничные условия при решении задачи растяжения представительного элемента имеют вид:

$$u(x,l) = u_0,\ u(x,0) = 0 \text{ или } u(x,l) = u_0,\ u(x,0) = -u_0,\ q = 0 \qquad (14)$$

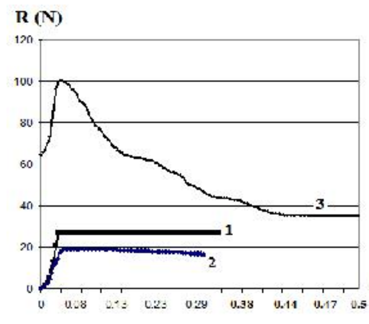
Так же учитывается условие конвективного теплообмена (8) при условии, что $h = \text{const}$. Распределение температуры в изолированном представительном элементе, полученное из предыдущего этапа, является начальным условием в задачи охлаждения. НДС в элементе, полученное после процесса охлаждения – начальное условие в задачи растяжения элемента с цилиндрическими дефектами.

Одновременное и последовательное электротермомеханическое нагржуние. При рассмотрении одновременного действия электрического тока и механического нагружения на всех этапах исследования принималось условие теплоизоляции $h \approx 0 \Rightarrow q = q(\mathbf{x}, t) = 0$. При рассмотрении последовательного электротермомеханического нагружения учитывается процесс охлаждения при двух вариантах граничных условий: жесткое закрепление образца или образец со свободными границами (13) и $h = \text{const}$.

При учете жесткого закрепления образца ($u(x, y)\big|_S = 0$) на этапе охлаждения в изолированном представительном элементе в окрестностях цилиндрических дефектов возникают пластические деформации (фиг. 4), что приводит к улучшению пластических свойств материала, но при этом предел текучести выше, если растяжение происходит после охлаждения, чем в исходном состоянии (фиг. 5), где 1 – бездефектный представительный элемент, 2 – с дефектами в виде разреза, 3 – с цилиндрическими дефектами и данная кривая растяжения получена после процесса охлаждения. Кривые 1 и 2 соответствуют исходному состоянию без обработки электрическим током, а кривая 3 – при при предварительном воздействии электрического тока. Кривая 3 берет начало в момент окончания процесса охлаждения и ее начальной точкой является конец кривой на фиг. 4. Таким образом, результатом является увеличение прочности материала с увеличением площадки текучести.



Фиг. 4. ***Кривая деформирования для представительного элемента с цилиндрическими дефектами при***

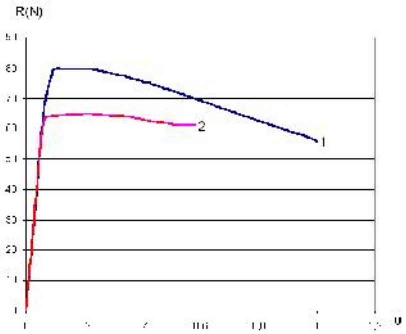


Фиг. 5. ***Диаграммы растяжения материалов с дефектами и сплошного***

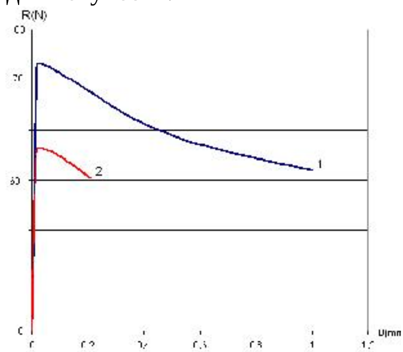
охлаждении ($u(x,y)\big|_S = 0$ ***)*** ***материала***

При рассмотрении образца со свободными границами ($\pm(x,y)\big|_S = 0$) на этапе охлаждения возникают температурные деформации, но их не достаточно для возникновения пластичности по всему материалу, но так как форма дефектом изменилась предел текучести материала увеличился и пластические свойства улучшились (фиг. 6, где 1 – измененная структура, 2 – исходное состояние).

При последовательном процессе обработки электрическим током и растяжения с охлаждением пластические свойства материала также улучшаются, но так как образец за время растяжения не успевает сильно остыть и влияние поля температур внутри образца велико на его механические свойства, предел текучести эффективного материала понижается и происходит увеличение площадки текучести.



а) для материала с упорядоченной структурой дефектов

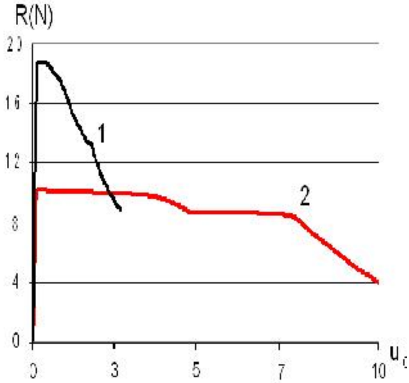


б) для представительных элементов

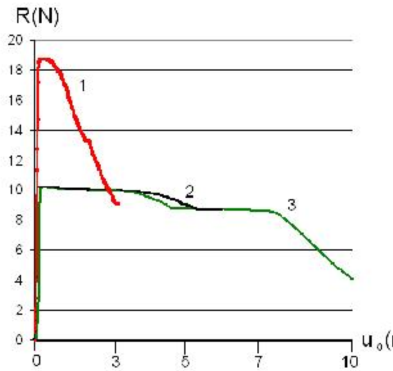
Фиг. 6 *Кривые деформирования при растяжении после обработки электрическим током при учете процесса охлаждения образца со свободными границами (* $\pm(x,y)\big|_S = 0$ ***)***

Данный эффект показан на фиг. 7, где 1– элемент материала с дефектом в виде разреза после холодной прокатки, 2– элемент с цилиндрическими дефектами после обработки током и охлаждения. Подобная картина повторяется и при рассмотрении осесимметричной задачи раздельного воздействия электрического тока и растяжения идеальноупругопластического материала (фиг. 8, где 1 –элемент материала с дефектом в виде разреза после холодной прокатки; 2– элемент с цилиндрическими дефектами после обработки током (учет условия теплоизоляции); 3 – элемент с цилиндрическими дефектами после обработки током и охлаждения).

Таким образом, процесс охлаждения вносит существенные отличия между последовательным и одновременным электротермомеханическими воздействиями. При этом во всех рассмотренных случаях получено улучшение пластических свойств материала за счет воздействия электрическим током.



Фиг. 7 Диаграммы растяжения (плоская деформация)



Фиг. 8 Диаграммы растяжения (осесимметричная задача)

Выводы

При пропускании электрического тока через образец с плоскими дефектами в виде разрезов происходит схлопывание дефектов и вследствие локализации температурного поля у концентраторов дефектов образуется структура цилиндрических дефектов.

Под воздействием электрического тока вокруг цилиндрических дефектов возникают сжимающие напряжения, но величина этих напряжений недостаточна для полного залечивания дефекта

В материале с упорядоченной структурой дефектов, при взаимодействии с электромагнитным полем происходит увеличение текучести материала

При растяжении после охлаждения образца происходит повышение предела текучести и улучшение пластических свойств материалов.

При одновременном процессе охлаждения и релаксации температуры внутри образца возникают остаточные деформации в окрестности дефектов, что приводит к разупрочнению материала и увеличению допустимой деформации при растяжении

Результаты решения плоской и осесимметричной задачи раздельного воздействия электрического тока и растяжения идеальноупругопластического материала подобны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы ОЭММПУ РАН №13 и РФФИ (грант 09-01-00270-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов В.Н., Коломиец-Романенко А.В. Исследование влияния динамического воздействия электрического тока на механические свойства материалов с упорядоченной структурой дефектов // Изв. РАН. МТТ. 2010. N3. С. 188-199.
2. Кукуджанов В.Н., Коломиец-Романенко А.В. Исследование механических свойств материалов с упорядоченной структурой дефектов при динамическом воздействии электрическим током // Материалы VIII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2010) 25-31 мая 2010, Алушта, Крым, М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ. 2010. с. 503-506.
3. Кукуджанов В.Н., Коломиец-Романенко А.В. О электропластическом эффекте при одновременном и раздельном действии электротермического поля и механического нагружения // Актуальные проблемы механики сплошной среды: //Труды II международной конференции 4-8 октября, Дилижан, Армения. Ер.: ЕГУАС, 2010. Том 1. с. 335-339.

Сведения об авторах:

Кукуджанов Владимир Николаевич
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
главный научный сотрудник
д.ф.-м.н., профессор
тел. раб. +7-(495)-434-46-39
ИПМех РАН, просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия
kukudz@ipmnet.ru
http://ipmnet.ru/~kukudz

Коломиец-Романенко Андрей Валерьевич
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
программист
тел. раб. +7-(495)-434-34-56
ИПМех РАН, просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия
oracle04_08_84@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПО ОДНО- И ДВУХСКОРОСТНОЙ МОДЕЛЯМ.

Кукуджанов К.В.

Москва, Россия

1. Введение. Динамическое деформирование и разрушение конструкций из композитов представляет интерес для исследования ввиду все расширяющегося использования в современном авиа- и ракетостроении различных композиционных материалов. При этом, в конкретных расчетах исходная микронеоднородная среда, которую представляет собой композит, моделируется некоторым континуумом, свойства которого определяются экспериментально на представительных образцах или аналитически по известным свойствам компонентов композита и их геометрии. Конструкции из композитов обычно имеют многослойную структуру, слои которой представляют собой волокнистые композиты, т.е. микронеоднородную среду. Количество слоев и направления волокон в них (направления армирования) выбирают под определенным углом друг к другу в зависимости от назначения конструкции. Ниже будем рассматривать пластину, состоящую из двух слоев, направления армирования в которых взаимноперпендикулярны.

Необходимо отметить, что при построении континуальной модели, описывающей процессы интенсивного динамического нагружения, необходимо учитывать такие факторы, как влияние микронеоднородности материала на процесс распространения в нем волн, нелинейное поведение матриц композитов, а также сложный кинетический характер динамического разрушения композитов и возможности расслоения составных конструкций из них. Ниже используются континуальные модели, учитывающие в той или иной степени эти факторы.

2. Основные уравнения. Будем моделировать каждый композитный слой как некоторую анизотропную односкоростную или двухскоростную сплошную среду.

В случае упругих деформаций, уравнения односкоростной смеси представляют собой хорошо известные уравнения теории эффективных модулей. Теория эффективных модулей, заменяющая исходный неоднородный материал некоторым однородным анизотропным континуумом, не описывает наблюдаемую дисперсию плоских волн в композитах. Дисперсия вызвана многократным отражением-преломлением волн на многочисленных границах раздела волокно-матрица, она является важной интегральной характеристикой материала, играющей определяющую роль в распространении нестационарных волн в композите. В расчетах будем моделировать исходный волокнистый композитный слой с гексагональной или хаотической укладкой волокон в рамках односкоростной модели, предложенной в [1], полагая, что волокна остаются упругими, а матрица ведет себя упруговязкопластически. Модель позволяет заменить такой композит обобщенной трансверсально изотропной упруговязкопластической средой с кинематическим упрочнением, все механические константы которой вычисляются по известным свойствам и геометрии его компонентов.

Модель двухскоростной смеси, которую будем использовать в расчетах, была предложена в работе [2]. Она лишена основного недостатка модели односкоростной смеси, а именно, хорошо описывает дисперсию плоских волн в композите, распространяющихся в произвольном направлении [3]. Это позволяет ей довольно точно воспроизводить имеющиеся экспериментальные и точные аналитические результаты как в случае распространения упругих, так и упруговязкопластических волн в композитах [4]. В настоящей работе эта модель применяется к таким же волокнистым композитным слоям, как и описанная выше односкоростная модель. Будем моделировать их некоторым двухскоростным взаимодействующим континуумом, представляющим собой совокупность двух классических односкоростных сред, имеющих свое собственное движение и заполняющих один и тот же объем, равный объему исходной неоднородной среды. Таким образом, в каждой точке, занимаемой исходной неоднородной средой (композитом), в любой момент времени предполагается одновременное существование двух различных материальных частиц, принадлежащих разным односкоростным средам и характеризующихся своей совокупностью переменных параметров. Введем обычным образом для каждого из компонентов смеси объемное содержание $\eta_\alpha = V_\alpha / V$, где V_α – объем α-го компонента композита ($\sim = 1,2\,(V = V_1 + V_2)$), V – характеристический элемент объема, парциальную плотность (приходящуюся на единицу объема композита) $\rho_\alpha = \eta_\alpha \rho_\alpha^*$, где ρ_α^* – реальная плотность материала α-фазы композита, вектор скорости, а также другие параметры, общепринятым образом характеризующие свой компонент смеси. При этом считаем, что первому компоненту смеси соответствует матрица, а второму – волокна.

Полная система уравнений движения двухфазной смеси в предположении упругой деформации волокон и упруговязкопластической деформации матрицы приводится в [2]:

$$
\left(\rho_1+\rho_{12}\right)\dot{v}_i^{(1)}=\sigma_{ij,j}^{(1)}+K\left(u_i^{(2)}-u_i^{(1)}\right)+l\left(v_i^{(2)}-v_i^{(1)}\right)+\rho_{12}\dot{v}_i^{(2)}
$$

$$
\left(\rho_2+\rho_{12}\right)\dot{v}_i^{(2)}=\sigma_{ij,j}^{(2)}+K\left(u_i^{(1)}-u_i^{(2)}\right)+l\left(v_i^{(1)}-v_i^{(2)}\right)+\rho_{12}\dot{v}_i^{(1)}
$$

$$
\dot{u}_i^{(\alpha)}=v_i^{(\alpha)} \qquad \alpha=1,2
$$

$$
\sigma_{ij}^{(\alpha)}=L_{ijkl}^{(\alpha)}\left[\tfrac{1}{2}\left(v_{k,l}^{(\alpha)}+v_{l,k}^{(\alpha)}\right)-H(\alpha)\varepsilon_{kl}^{(\alpha)p}\right] \qquad i,j=1,2,3
$$

$$
\varepsilon_{ij}^{(1)p}=\begin{cases}0, & S^{(1)}<k_m\left(I^{(1)p}\right)\\[2mm] \dfrac{1}{\tau_{0m}}\dfrac{\eta_m\left(\dfrac{S^{(1)}-k_m\left(I^{(1)p}\right)}{k_m(0)}\right)}{S^{(1)}}s_{ij}^{(1)}, & S^{(1)}\geq k_m\left(I^{(1)p}\right)\end{cases}
$$

$$
K,l,\rho_{12}=\begin{cases}K^e,0,\rho_{12}^e & S^{(1)}<k_m\left(I^{(1)p}\right)\\ K^p,l,\rho_{12}^p & S^{(1)}\geq k_m\left(I^{(1)p}\right)\end{cases}
$$

$$
H(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha=1\\ 0, & \alpha=2\end{cases}
$$

где ρ_α – парциальная плотность фазы, ρ_{12} – присоединенная плотность, $\mathbf{u}^{(\alpha)}=\left(u_i^\alpha\right)$ – вектор перемещений, $\mathbf{v}^{(\alpha)}=\left(v_i^\alpha\right)$ – вектор скорости, $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ – тензор напряжений, $L^{(\alpha)}$ – матрица упругих модулей α-го компоненты смеси, $S^{(1)}$ – второй инвариант тензора аналога девиатора напряжений $s_{ij}^{(1)}$ для первого компонента смеси (матрицы), $I^{(1)p}$ – интенсивность пластических деформаций в первом компоненте смеси (матрице), $k_m(I^{(1)p})$ – зависимость предела текучести матрицы от интенсивности пластических деформаций, τ_{0m} – время релаксации материала матрицы.

Все механические константы смеси ρ_α, $L^{(\alpha)}_{ijkl}$, ρ_{12}^e, ρ_{12}^p l K^e, K^p, $s_{ij}^{(1)}$ определяются на основе микромодельного анализа в явном виде по известным характеристикам компонентов однонаправленного волокнистого композита [2].

Уравнения (1) образуют замкнутую систему уравнений двускоростной анизотропной упруговязкопластической смеси. Из этих уравнений видно, что полученная двухскоростная смесь представляет собой совокупность двух односкоростных трансверсально изотропных сред (в нашем случае однонаправленного волокнистого композита), связанных друг с другом посредством соответствующих членов в уравнениях движения.

3. Начальные и граничные условия. Определение начальных и граничных условий, сформулированных в скоростях и напряжениях, не встречает принципиальных трудностей.

Начальные условия предполагаются всегда нулевыми. Граничные условия для односкоростной смеси общеизвестны и не требуют конкретизации.

Для двухскоростной смеси на границе, свободной от напряжений, для каждого из компонентов смеси ставятся обычные условия свободной границы, как если бы второго компонента не было. Это же относится и к условиям излучения.

Ниже мы будем решать двумерные задачи, поэтому при нормальном ударе жестким ударником плотности ρ_0 и высоты h_0 с начальной скоростью V_0 граничные условия записываются на поверхности $z = \mathrm{const}$ как:

$$\rho_0 h_0 \frac{\partial \mathrm{v}_\mathrm{z}^{(\alpha)}}{\partial t} = \sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(2)}, \;\; \mathrm{v}_\mathrm{z}^{(\alpha)}\Big|_{t=0} = \mathrm{v}_0, \;\; \sigma_{xz}^{(\alpha)} = 0, \;\; \alpha = 1{,}2$$

т.е. условия завязаны для обеих компонент смеси.

На границе раздела двух композитных слоев $z = \mathrm{const}$ принимаются условия полного контакта (прилипания) в виде:

$$\sigma_{zz}^{(\alpha)+} = \sigma_{zz}^{(\alpha)-}, \; \sigma_{xz}^{(\alpha)+} = \sigma_{xz}^{(\alpha)-}, \;\; \mathrm{v}_\mathrm{x}^{(\alpha)+} = \mathrm{v}_\mathrm{x}^{(\alpha)-}, \;\; \mathrm{v}_\mathrm{z}^{(\alpha)+} = \mathrm{v}_\mathrm{z}^{(\alpha)-}, \;\; \alpha = 1{,}2$$

4. Разрушение. Разрушение слоистой пластины по границам раздела композитных слоев или иначе расслоение пластины будем моделировать следующим образом. Если в какой-либо момент времени в некоторой контактной точке на межслойной границе для среднего напряжения в композите на площадке с нормалью вдоль z выполняется $\left|\pm_{zz}^{(1)} + \pm_{zz}^{(2)}\right| \geq \pm_1$ или $\left|\pm_{xz}^{(1)} + \pm_{xz}^{(2)}\right| \geq \pm_2$, где $\pm_1$ и $\pm_2$ – пределы прочности соответственно на межслойный отрыв и сдвиг, то считается, что в рассматриваемой точке произошло расслоение. При этом считается, что если расстояние *l* (среднее по смеси) от рассматриваемой точки до поверхности смежного тела равно нулю, то на берегах межслойной трещины ставится условие скольжения без трения:

$$\pm_{zz}^{(\sim)+} = \pm_{zz}^{(\sim)-}, \;\; \mathrm{v}_\mathrm{z}^{(\sim)+} = \mathrm{v}_\mathrm{z}^{(\sim)-}, \;\; \pm_{xz}^{(\sim)+} = \pm_{xz}^{(\sim)-} = 0, \;\; \sim\, = 1{,}2$$

Если *l>0*, то берега трещины принимаются свободными от напряжений.

Кроме расслоения по межслойной границе, будем учитывать также континуальное разрушение самих композитных слоев.

В динамических процессах в композитах, как и в однородных телах, разрушение носит кинетический характер [5-7]. Для композитов с полимерной матрицой характерно наличие двух вида (масштаба) разрушения: микроскопическое и макроскопическое [7]. При микроразрушении происходит образование микротрещин в матрице и на границах раздела волокно-матрица. При макроразрушении происходит полное разрушение матрицы и возможен разрыв волокон (вплоть до образования их мелких фрагментов), приводящие к совершенной утрате композитом своих функциональных свойств. Математически будем описывать эти процессы при помощи интегралов накопления повреждений. Вид этих интегралов для обоих масштабов разрушения примем одним и тем же.

В рассматриваемой точке считаем материал композитного слоя разрушенным в момент времени tp, если

$$J_{rr} = \int_0^{t_p} \frac{dt}{2\left(\pm_{rr}(t)\right)} \geq 1, \quad 2\left(\pm_{rr}\right) = \begin{cases} 2\left(\pm_{rr}\right), & \pm_{rr} \geq \pm_0 \\ \infty, & \pm_{rr} < \pm_0 \end{cases}$$

где $\pm_{rr}$ – одно из средних по композиту нормальных напряжений $\pm_{xx}$, $\pm_{yy}$, $\pm_{zz}$, σ_0 – пороговое напряжение, начиная с которого растут дефекты, $\tau(\sigma)$ имеет смысл времени разрушения материала при $\pm = \mathrm{const}$. Примем $\tau(\sigma) = A\exp(-B\sigma)$ согласно данным работы [7], в которой экспериментально найдены константы A, B, $\pm_0$ для двух рассматриваемых видов разрушения и показано, что эта зависимость хорошо описывает наблюдаемое разрушение кварц-фенольного композита при ударном нагружении. Таким образом, для каждого из двух видов разрушения будем рассчитывать по три интеграла накопления повреждений для каждого из средних по композиту нормальных напряжений. Если для какого-нибудь из этих напряжений выполняется условие (4.1), то материал в этой точке оказывается разрушенным.

6. Результаты расчетов. Системы уравнений динамики анизотропной сплошной среды вида (2.1) решались численно методом пространственных характеристик, предложенным в [8]. Этот метод позволяет корректно удовлетворять граничным и контактным условиям, а также более точно получать решение в областях его резкого изменения («фронтов» волн), что особенно важно для решения такого класса задач которые рассматриваются в настоящей работе.

Рассматривается деформирование и разрушение двухслойной композитной пластины на основе выше упомянутых односкоростной и двухскоростной моделей при ударе по ней жестким ударником. Из сравнения результатов, получаемых по двухскоростной и односкоростной моделям, можно понять возможности применимости последней в неодномерных расчетах.

Считам деформацию пластины, составленной из двух однонаправленных волокнистых кварц-фенольных композитных слоев, имеющих одинаковую толщину, плоской. Слои имеют взаимно перпендикулярные направления армирования волокнами.

Как упомянулось выше, материал композитных слоев моделируется в одном случае двухскоростной средой (локально неоднородный материал), а в другом случае односкоростной средой (локально однородный материал). В обоих случаях получающаяся сплошная среда оказывается трансверсально изотропной, при этом характеристики моделей определяются по известным свойствам кварцевых волокон и фенольной матрицы.

В начальный момент по лицевой поверхности пластины наносится удар жестким кварцевым ударником имеющим форму плоского штампа. Тыльная поверхность пластины свободна от нагрузки. Считаем, что образование межслойной трещины происходит только под действием растягивающих напряжений.

В результате расчетов установлено, что

– в области фронта (область резкого изменения решения) решения по двум вышеупомянутым моделям отличаются довольно существенно;

– для больших времен в областях гладкости решение в односкоростном случае близко к решению в двухскоростном;

– в двухскоростном случае возмущения распространяются быстрее вследствие учета неоднородности материала слоев;

– односкосростная модель несколько занижает пластическое течение в материале;

– односкоростная модель существенно (в разы) завышает степень расслоения пластины по сравнению с двухскоростной примерно и распространение межслойной трещины при расчетах по ней происходит существенно быстрее;

- односкоростная модель завышает степень континуального разрушения пластины по сравнению с двухскоростной при качественной схожести картин разрушения, что объясняется тем, что поле напряжений в волне разгрузки оказывается размытым за счет учета неоднородности композитных слоев и вызываемой им геометрической дисперсией в материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов К.В. Динамическое деформирование и разрушение неупругих слоистых композитов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 87-98.
2. Кукуджанов К.В. Двухскоростная модель упруговязкопластического деформирования композитных материалов // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 74-86.
3. Кукуджанов К.В. Исследование дисперсии упругих волн в композитах на основе двухскоростной модели // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Вып. 67. С. 111-118.
4. Кукуджанов К.В. Распространение одномерных упруговязко-пластических волн в композиционных материалах // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С. 165-173.
5. Справочник по композиционным материалам: в 2-х кн. /Под ред. Дж. Любина/. М.: Машиностроение, 1988. 1032 с.
6. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 296 с .
7.Cohen L.J., Berkowitz H.M. Dynamic fracture of a quartz-phenolic composites under stress wave loading in uniaxial strain // J. Franklin Inst. 1972. V. 293. P. 25-45.
8. Кукуджанов К.В. Численный метод решения уравнений динамики ортотропных упругих и упруговязкопластических сред. М.: ВИНИТИ, Деп. 20.07.1989. 28 с.

Сведения об авторе:

Кукуджанов Константин Владимирович
Институт проблем механики РАН, РФ, Москва, пр. Вернадского, 101, научный сотрудник, к. ф.-м. н., тел. +7 495 434-46-39,
e-mail: kconstantin@mail.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ШТАМПЕ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ СКВОЗНОМ НУЛЕВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИИ НА ГРАНИЦЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

Мартиросян А.Н., Мартиросян Г.А., Динунц А.С., Давтян А.В.
Горис, Армения

В настоящей работе решается плоская задача, когда изотропная упругая среда, занимающая полуплоскость y>0, движется с произвольной скоростью по направлению оси Ох. Уравнения движения в перемещениях для изотропной упругой среды в плоском случае при отсутствии массовых сил имеют вид

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\quad(1)$$

где U,V– компоненты перемещений, a и b–скорости продольных и поперечных волн. Рассмотрим следующую сингулярную граничную задачу (y=0):

$$\pm_{yy}=\circ\left[(a^2-2b^2)\frac{\partial U}{\partial x}+a^2\frac{\partial V}{\partial y}\right]=0\ ,-\infty<x<\infty$$

$$\pm_{xy}=\pm^{+}_{xy}=\circ b^2\left[\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right]=0\ ,x>l(t)\qquad(2)$$

$$U=U_{-}=-PH(x-\text{¶})H(t-\text{²})\ ,x<l(t)$$

$$U,V=O(r^{1/2}),r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0\quad\text{(условие на ребре).}$$

где P=const, ° –плотность среды, *H(x)*– единичная функция. При $t=0$ имеем нулевые начальные условия. Решение задачи (2) ищется методом интегральных преобразований Лапласа по t и Фурье по x. Обозначив через $\overline{U},\overline{V}$ преобразования Лапласа по t от U,V и через $\overline{\overline{U}},\overline{\overline{V}}$ преобразования Фурье по x от $\overline{U},\overline{V}$, решенние задачи ищется в виде

$$\overline{U};\overline{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\overline{\alpha}x+i\overline{\beta}_n y}\overline{\overline{U}}_n;\overline{\overline{V}}_n d\overline{\alpha}\qquad(3)$$

$s = -i\mu$ – параметр преобразования Лапласа по t. Применяя эти преобразования к уравнениям (1) и к граничному условию (2), получаем связь между перемещениями и напряжениями в виде

$$\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{S}}\,\overline{\overline{\sigma}}_{xy} \qquad (4)$$

где

$$\overline{\overline{S}} = \frac{-s^2\overline{\beta}_2}{b^4\rho i R\left(\overline{\alpha}\right)},\ \overline{\beta}_n = i\sqrt{\frac{s^2}{c_n^2} + \overline{\alpha}^2},\ c_1 = \overline{a},\ c_2 = b,$$

$$\overline{\overline{V}}_1 = \frac{\overline{1}}{\widetilde{=}}\overline{\overline{U}}_1,\ \overline{\overline{V}}_2 = -\frac{\widetilde{\overline{\ }}}{=_2}\overline{\overline{U}}_2,\ \overline{\overline{U}}_2 = -\frac{\left(\frac{s^2}{b^2} + 2\overline{\alpha}^2\right)\overline{\beta}_2}{2\overline{\alpha}^2}\overline{\overline{U}}_1,$$

$$R\left(\overline{\alpha}\right) = \left(\frac{s^2}{b^2} + 2\overline{\alpha}^2\right)^2 - 4\overline{\alpha}^2\sqrt{\frac{s^2}{a^2} + \overline{\alpha}^2}\sqrt{\frac{s^2}{b^2} + \overline{\alpha}^2}$$ - функция Рэлея.

Отметим, что оригинал $S(t,x)$ соответствующий $\overline{\overline{S}}$, равен $U(t,x)$ при $\sigma(t,x) = \delta(t)\delta(x)$, где δ функция Дирака. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{S}}_-\overline{\overline{\sigma}}_{xy} \text{ или } \overline{\overline{P}}_+\overline{\overline{P}}_-\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{\sigma}}_{xy},$$

где

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{S}}_+\overline{\overline{S}}_-,\ \overline{\overline{P}}_\pm = \frac{1}{\overline{\overline{S}}_\pm} \qquad (5)$$

Полагая $0 < \dot{l}(t) < c_R$, можно записать

$$\overline{\overline{S}}_+\left(\overline{\alpha}, s\right) = \frac{\sqrt{\frac{s}{b} - i\overline{\alpha}}}{\frac{s}{c_R} - i\overline{\alpha}}D_+\left(i\frac{\overline{\alpha}}{s}\right),\ \overline{\overline{S}}_-\left(\overline{\alpha}, s\right) = \frac{-a^2\sqrt{\frac{s}{b} + i\overline{\alpha}}}{2\rho b^2\left(a^2 - b^2\right)\left(\frac{s}{c_R} + i\overline{\alpha}\right)}D_-\left(i\frac{\overline{\alpha}}{s}\right) \qquad (6)$$

$$D_\pm\left(i\frac{\overline{\alpha}}{s}\right) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_1(u)\,du}{u \mp i\frac{\overline{\alpha}}{s}},\ D_\pm^{-1}\left(i\frac{\overline{\alpha}}{s}\right) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_2(u)\,du}{u \mp i\frac{\overline{\alpha}}{s}} \qquad (7)$$

где $F_1(u)=\gamma(u)\exp\left[\chi(u)\right]$, $F_2(u)=-\gamma(u)\exp\left[-\chi(u)\right]$,

$$\chi(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-u},\qquad \gamma(u)=\frac{\frac{4}{\pi}u^2\sqrt{\frac{1}{b^2}-u^2}\sqrt{u^2-\frac{1}{a^2}}}{\sqrt{\left(b^2-2u^2\right)^4+16u^4\left(\frac{1}{b^2}-u^2\right)\left(u^2-\frac{1}{a^2}\right)}}$$

Из формулы (6), с помощью обратных преобразований, используя такие преобразования, как интегрирование по частям, дифференцирование по параметру под знаком интеграла, вычисление интеграла с помощью вычетов, учитывая (7), получается

$$S_+(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{a}\right)\left[1-\frac{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{1}{b}}}{\sqrt{\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}}}BH\left(\frac{1}{c_R}-\frac{t}{x}\right)H\left(\frac{t}{x}-\frac{1}{b}\right)-\int\limits_{\frac{at}{x}}^{\frac{a}{b}}\frac{\left(\frac{1}{b}-u\right)F_1(u)\,du}{\left(\frac{1}{c_R}-u\right)\sqrt{\frac{t}{x}-u}}duH\left(\frac{1}{b}-\frac{t}{x}\right)\right]\right\}$$

Где

$$B=1-\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_1(u)\frac{du}{\frac{1}{c_R}-u} \tag{8}$$

Аналогичным образом, учитывая, что $\overline{\overline{P}}_\pm=1/\overline{\overline{S}}_\pm$, можно получить выражение для оригинала $P_+(t,x)$ в следующем виде

$$P_+(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\delta\left(t-\frac{x}{b}\right)+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_3(h)\,\delta(t-hx)\,dh\right]\frac{H(x)}{\sqrt{x}}\right\} \tag{9}$$

$$F_3(h)=1-\int\limits_{\frac{1}{a}}^{h}\left[\frac{d}{du}\frac{F_2(u)}{\sqrt{\frac{1}{b}-u}}\right]\frac{du}{\sqrt{h-u}},\quad D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)=1+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_2(u)\,du}{u-\frac{1}{b}}$$

функции $S_-(t,x);P_-(t,x)$ получаются из $S_+(t,x);P_+(t,x)$ заменой x на $-x$ и умножением, соответственно, на постоянные $\frac{-a^2}{2\rho b^2\left(a^2-b^2\right)}$ и $-\frac{2\rho b^2\left(a^2-b^2\right)}{a^2}$.

Обозначим $U(t,x)=U_+(t,x)$ при $x>\ell(t)$, $\sigma_{xy}=\sigma_{xy}^-(t,x)$ при $x<\ell(t)$ неизвестны. Из формулы (10), (11) нетрудно заметить, что функция $\overline{\overline{S}}(s,\bar{\sim})$

такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $\overline{\overline{S}}_{\pm}, \overline{\overline{P}}_{\pm}$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$S_+(t,x) = P_+(t,x) = 0 \text{ при } x < bt,$$
$$S_-(t,x) = P_-(t,x) = 0 \text{ при } x > -bt,$$
$$-b < \dot{\ell}(t) = d\ell/dt < b \qquad (10)$$

Тогда для функций $U(t,x); \sigma_{xy}(t,x)$, как в [1], можно получить решение поставленной задачи в форме сверток по x,t в виде

$$U_+ = -S_+ ** \left[\left(P_+ ** U_- \right) H\left(x - l \right) \right],$$
$$\sigma_{xy}^- = P_- ** \left[\left(P_+ ** U_- \right) H\left(l - x \right) \right] \qquad (11)$$

Поскольку из (1) имеем , что $U_- = -PH\left(x-\xi\right)H\left(t-\tau\right)$, можно с учетом (8), $P_+ ** U_-$ представить в виде

$$P_+ ** U_- = \frac{P}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\frac{b}{c_R} D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H\left(t-\tau\right)H\left(x-\xi-b\left(t-\tau\right)\right)}{\sqrt{b}\sqrt{t-\tau}} - \frac{1}{c_R}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_3(u)}{\sqrt{u}} \frac{H\left(x-\xi-\frac{t-\tau}{u}\right)}{\sqrt{t-\tau}} du + \right.$$

$$\left. + D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H\left(x-\xi\right)}{\sqrt{x-\xi}} H\left(t-\tau-\frac{x-\xi}{b}\right) + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_3(u)H\left(t-\tau-u\left(x-\xi\right)\right)}{\sqrt{x-\xi}} du \right\} \qquad (12)$$

Подставляя выражения $P_+ ** U_-$ и $P_-(t,x)$ в (15), после громоздких вычислений получается

$$\sigma_{xy}^- = \frac{2b^2\left(a^2-b^2\right)\rho P}{a^2\pi} \left(D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{b\left(1+\frac{\dot{l}\left(t_0''\right)}{c_R}\right)}{b+\dot{l}\left(t_0''\right)} \frac{H\left(t-t_0''\right)}{\sqrt{l\left(t_0''\right)-x}} I_1 + I_2 + I_3 + \left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\xi}\right) I_4 \right) \qquad (13)$$

где

$$I_1 = \sqrt{b} D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H\left(1-L_0\right)H\left(t_0''-\tau\right)}{\sqrt{t_0''-\tau}} - D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) \frac{H\left(l\left(t_0''\right)-\xi\right)H\left(L_0-1\right)}{\sqrt{l\left(t_0''\right)-\xi}} +$$

$$+ \frac{1}{c_R}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_3(u)H\left(ub-L_0\right)}{\sqrt{u}} du - \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_3(u)H\left(L_0-ub\right)}{\sqrt{l\left(t_0''\right)-\xi}} du$$

$$I_2 = D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_3(h)H(t-t_1'')}{\sqrt{l(t_1'')-x}} \frac{1+\frac{\dot{l}(t_1'')}{c_R}}{\frac{1}{h}+\dot{l}(t_1'')}\left(\frac{b}{c_R}\frac{H(t_1''-\tau)H(1-L_1)}{\sqrt{b(t_1''-\tau)}} - \frac{H(l(t_1'')-\xi)H(L_1-1)}{\sqrt{l(t_1'')-\xi}}\right)dh$$

$$I_3 = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{F_3(h)H(t-t_1'')}{\sqrt{l(t_1'')-x}} \frac{1+\frac{\dot{l}(t_1'')}{c_R}}{\frac{1}{h}+\dot{l}(t_0'')}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\left(\frac{H(bu-L_1)}{c_R\sqrt{u}\sqrt{t_1''-\tau}} - \frac{H(L_1-bu)}{\sqrt{l(t_1'')-\xi}}\right)F_3(u)\,du\,dh$$

$$I_4 = b\left[D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\right]^2\left(\ln\left|\frac{\varphi_0-1}{\varphi_0+1}\right|H(L_0-1)+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-1}{T+1}}-1}{\sqrt{\frac{T-1}{T+1}}+1}\right|H(1-L_0)-\frac{2}{c_R}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-t_0''}}{\sqrt{t_0''-\tau}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{c_R}H(T-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T-1}{T+1}}\right)-\frac{2b\sqrt{b}}{c_R}D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\int_{\frac{L_0}{b}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_3(u)}{\sqrt{u}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-t_0''}}{\sqrt{t_0''-\tau}}-H(T-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\frac{T}{ub}-1}{uT+1}}\right)du+$$

$$+bD_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\left[\ln\left|\frac{\varphi_0-1}{\varphi_0+1}\right|\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{L_0}{b}}\frac{d}{du}\frac{2F_2(u)}{\sqrt{1-ub}}\sqrt{L_0-ub}\,du+\int_{\frac{L_0}{b}}^{\frac{1}{b}}F_3(h)\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-hb}{T+1}}-1}{\sqrt{\frac{T-hb}{T+1}}+1}\right|dh\right]-$$

$$-\frac{2b}{c_R}D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_3(h)}{\sqrt{h}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-t_1''}}{\sqrt{t_1''-\tau}}-H(T-1)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{T-1}{\frac{T}{hb}+1}}\right)dh-$$

$$-\frac{2}{c_R}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_3(h)}{\sqrt{h}}dh\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_3(u)}{\sqrt{u}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t-t_1''}}{\sqrt{t_1''-\tau}}-H(bu-T)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\frac{T}{ub}-1}{\frac{T}{hb}+1}}\right)du+$$

$$+D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_3(h)\left(\ln\left|\frac{\varphi_1+1}{\varphi_1-1}\right|H(L_1-1)+\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-1}{T+hb}}+1}{\sqrt{\frac{T-1}{T+hb}}-1}\right|H(1-L_1)\right)dh+$$

$$+\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_3(h)dh\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}F_3(u)\left(\ln\left|\frac{\varphi_1-1}{\varphi_1+1}\right|H(T-bu)+H(bu-T)\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{T-ub}{T+ub}}+1}{\sqrt{\frac{T-ub}{T+ub}}-1}\right|\right)du$$

$$l\left(t_n^{"}\right)-x-\frac{t-t_n^{"}}{h_n}=0,\quad h_0=\frac{1}{b},\quad h_1=h,\quad n=0;1 \tag{14}$$

$$T=\frac{b\left(t-\tau\right)}{x-\xi},$$

$$\varphi_n=\sqrt{\frac{l\left(t_n^{"}\right)-\xi}{l\left(t_n^{"}\right)-x}},L_n=\frac{b\left(t_n^{"}-\tau\right)}{l\left(t_n^{"}\right)-\xi},F_3\left(h\right)=\int\limits_{\frac{1}{a}}^{h}\frac{d}{du}\left(\frac{F_2\left(u\right)}{\sqrt{\frac{1}{b}-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{h-u}}.$$

Рассмотрим поведение решения (13) в окрестности точки смены граничных условий. Для этого вычислим коэффициент интенсивности напряжений при $x\to\ell(t)-0$. Так как при $x\to\ell\left(t\right)$ $t_n''\to t$, то записывая $\ell\left(t_n''\right)\approx\ell\left(t\right)+\dot{\ell}\left(t\right)\left(t_n''-t\right)$ для малых $t_n''-t,$ можно получить $\ell\left(t_n''\right)-x\approx\ell\left(t\right)-x+\dot{\ell}\left(t\right)\left(t_n''-t\right).$ Из (14) подставляя $t-t_n=h_n\left(\ell\left(t_n\right)-x\right)$ формула (13) может быть записана в виде [2,3,4] $l\left(t_n''\right)-x\approx\ell\left(t\right)-x-h_n\dot{\ell}\left(t\right)\left(\ell\left(t_n''\right)-x\right)$ или

$$\frac{\ell\left(t\right)-x}{\ell\left(t_0''\right)-x}\to1+h_n\dot{\ell}\left(t\right)\ \text{при}\ \ x\to\ell\left(t\right)-0 \tag{15}$$

Из (17) можно с учетом (15) сразу получить значение коэффициента интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x\to l(t)-0}\left(\sigma_{xy}^{-}\sqrt{l(t)-x}\right)=\frac{2b^2\left(a^2-b^2\right)\rho P\left(1+\frac{\dot{l}(t)}{c_R}\right)}{a^2\pi}\left\{\frac{D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)}{\sqrt{1+\frac{\dot{l}(t)}{b}}}\left(bD_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)H(1-T)-D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\sqrt{T}H(T-1)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c_R}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{\sqrt{b(t-\tau)}}{\sqrt{u}}F_3(u)H(ub-\grave{O})du-\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\sqrt{T}F_3(u)H(\grave{O}-ub)du\right)+D_+^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{hF_3(h)}{\sqrt{1+h\dot{l}(t)}}\left(\frac{b}{c_R}\frac{H(1-T)}{\sqrt{b(t-\tau)}}-\sqrt{T}\frac{H(T-1)}{\sqrt{b(t-\tau)}}\right)dh+$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{F_3\left(h\right)h}{\sqrt{1+h\dot{l}\left(t\right)}}\int\limits_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\left(\frac{\sqrt{b}}{c_R\sqrt{u}}\frac{H\left(ub-T\right)}{\sqrt{b\left(t-\tau\right)}}-\frac{\sqrt{T}H\left(T-ub\right)}{\sqrt{b\left(t-\tau\right)}}\right)F_3\left(u\right)dudh\right\} \tag{16}$$

В результате получается, что если задана постоянная нагрузка на берегах трещины, тогда имеется особенность вида $\frac{1}{\sqrt{l\left(t\right)-x}}$. Отметим, что можно получить коэффициент интенсивности напряжений при произвольной нагрузке на берегах трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян А.Н. Математические исследования нестационарных линейных граничных задач для сплошных сред/‘’Зангак-97’’, 2007, стр. 244.
2. Мартиросян А.Н. Движение трещины в анизотропной среде. //Изв. АН Арм. ССР. Механика.1987. Т.40. N6.
3. Мартиросян А.Н. Задача соударения двух четверть плоскостей при наличии движущейся твердой опоры.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989.Т. 42. N1.
4. Мартиросян А.Н. Решение пространственной задачи об импульсах, приложенных на границах полуплоской движущейся трещины. //Изв. АН Арм. ССР. Механика.1989. Т. 42, N6.

Сведения об авторах:

Мартиросян Ашот Навасардович
Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. матем., Горисский гос. университет.
Адрес: Авангард 4, тел: (0284)23638, 22048; (093)192465

Мартиросян Гайк Ашотович
Доцент, кандидат физ.-мат. наук, каф. мат., ГГУ.
E-mail: ayk9911@rambler.ru

Динунц Арпине Серобовна
Кандидат физ.- мат. наук, каф. мат., ГГУ.
E-mail: dinunts2007@rambler.ru

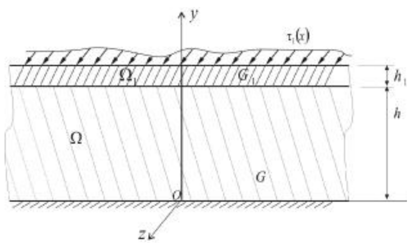
Давтян Ануш Володяевна
Магистрант, каф. мат., ГГУ.
E-mail: anush-davtyan88@rambler.ru

О ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ДВУХСЛОЙНОГО КОМПОЗИТА ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Мартиросян А.В.
Ереван, Армения

Задача о напряженном состоянии упругого трехслойного композита при антиплоской деформации в точной постановке теории упругости рассмотрена в [1]. В [2] выведены дифференциальные уравнения деформирования отдельних слоев в рамках различных физических моделей. В настоящей работе методом интегрального преобразования Фурье строится точное решение задачи о напряженном состоянии упругого двухслойного композита при антиплоской деформации. Для одного из слоев в рамках модели Мелана [2,3] решается та же задача. Проведен сравнительный анализ точного и приближенного решений.

Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ двухслойный композит состоит из нижнего слоя $\Omega = \{-\infty < x, z < \infty;\ 0 \le y \le h\}$ и верхнего слоя $\Omega_1 = \{-\infty < x, z < \infty;\ h \le y \le h + h_1\}$ с модулями сдвига G, G_1 и высотами h, h_1 соответственно. Пусть нижняя грань композита жестко защемлена, а верхняя грань композита нагружена касательными силами интенсивности $\tau_1(x)$ (фиг.1).



Фиг.1

Считается, что при такой нагрузке композит находится в состоянии антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy. Тогда отличной от нуля компонентой смещений точек композита будет только компонента в направлении оси Oz $u_z = w(x, y)$, которая в соответствующей области удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 . \qquad (1)$$

При этом отличными от нуля компонентами напряжений будут

$$\tau_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad 2)$$

Требуется определить закон распределения касательного контактного напряжения $\tau(x)$ на линии контакта $y = h$ разнородных слоев композита Ω и Ω_1.

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи сначала рассмотрим равновесие нижнего слоя. Эту задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи для уравнения Лапласа в области полосы $\Pi = \{-\infty < x < \infty;\ 0 < y < h\}$:

$$\begin{cases} \Delta w(x,0) = 0 & (-\infty < x < \infty) \\ \tau_{yz}\big|_{y=h} = G\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=h} = \tau(x) & (-\infty < x < \infty). \end{cases} \qquad (3)$$

Решение граничной задачи (3) построим при помощи математического аппарата интегрального преобразования Фурье [4]. С этой целью введем в рассмотрение трансформанты Фурье по переменной x:

$$\{\overline{w}(\alpha, y); \overline{\tau}(\alpha)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{w(x, y); \tau(x)\} e^{i\alpha x} dx, \qquad (4)$$

где α - спектральный параметр Фурье.

Теперь при помощи известного соотношения между трансформантами Фурье оригинала и его производной [4], граничная задача (3) преобразуется в образах Фурье в следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{w}}{dy^2} - \alpha^2\overline{w} = 0 & (0 < y < h) \\ \overline{w}(\alpha, 0) = 0; \quad G\dfrac{d\overline{w}}{dy}\Big|_{y=h} = \overline{\tau}(\alpha). \end{cases} \qquad (5)$$

Общее решение дифференциального уравнения из (5) имеет вид

$$\overline{w}(\alpha, y) = A(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha y) + B(\alpha)\operatorname{sh}(\alpha y) \quad (0 \le y \le h). \qquad (6)$$

Используя граничные условия задачи (5), получим выражения неизвестных коэффициентов:

$$A(\alpha) = 0, \quad B(\alpha) = \frac{\overline{\tau}(\alpha)}{G\alpha\operatorname{ch}(\alpha h)}.$$

Подставляя эти выражения в (6), получим

$$\overline{w}(\alpha, y) = \frac{\overline{\tau}(\alpha)\operatorname{sh}(\alpha y)}{G\alpha \operatorname{ch}(\alpha h)} \quad (0 \le y \le h). \tag{7}$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи о равновесии верхнего слоя Ω_1, в результате чего придем к следующей граничной задаче для полосы $\Pi_1 = \{-\infty < x < \infty;\, h \le y \le h + h_1\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty;\, h < y < h + h_1), \\ G_1 \left.\dfrac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=h} = \tau(x) \quad (-\infty < x < \infty); \\ G_1 \left.\dfrac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=h+h_1} = \tau_1(x) \quad (-\infty < x < \infty). \end{cases} \tag{8}$$

Опять введем трансформанты Фурье

$$\{\overline{w_1}(\alpha, y);\, \overline{\tau}_1(\alpha);\, \overline{\tau}_1(\alpha)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{w_1(x, y);\, \tau_1(x)\} e^{i\alpha x} dx$$

и к граничной задаче (8) применим интегральное преобразование Фурье. В итоге, задача (8) перейдет в задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{w_1}}{dy^2} - \alpha^2 \overline{w_1} = 0 \quad (h < y < h + h_1) \\ G_1 \left.\dfrac{d\overline{w_1}}{dy}\right|_{y=h} = \overline{\tau}(\alpha); \quad G_1 \left.\dfrac{d\overline{w_1}}{dy}\right|_{y=h+h_1} = \overline{\tau}_1(\alpha). \end{cases}$$

Решение этой граничной задачи представится формулой $(h \le y \le h + h_1)$

$$\overline{w_1}(\alpha, y) = \frac{\overline{\tau}_1(\alpha)\operatorname{ch}[\alpha(y - h)] - \overline{\tau}(\alpha)\operatorname{ch}[\alpha(y - h - h_1)]}{\alpha G_1 \operatorname{sh}(\alpha h_1)}. \tag{9}$$

Для определения $\overline{\tau}(\alpha)$ запишем условие контакта этих двух полос в смещениях на линии контакта $y = h$:

$$w(x, h) = w_1(x, h) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

или в образах Фурье-

$$\overline{w}(ª, h) = \overline{w}_1(ª, h) \qquad (-\infty < ª < \infty). \tag{10}$$

Используя (7) и (9), из (10) находим

$$\overline{²}(ª) = \frac{G\overline{²}_1(ª)}{\mathrm{ch}(ªh_1)\left[G + G_1 \mathrm{th}(ªh_1)\,\mathrm{th}(ªh)\right]}. \tag{11}$$

По формуле обратного преобразования Фурье из (11) получим

$$²(x) = \frac{1}{2®}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{²}(ª) e^{-iªx} dª =$$

$$= \frac{G}{®}\int_{-\infty}^{\infty} ²_1(s)\,ds \int_0^{\infty} \frac{cos\, ª(s-x)\,dª}{\mathrm{ch}(ªh_1)\left[G + G_1 \mathrm{th}(ªh_1)\,\mathrm{th}(ªh)\right]}. \tag{12}$$

Рассмотрим частный случай нагружения композита

$$²_1(x) = T \cdot ¢(x), \tag{13}$$

где $¢(x)$– известная дельта-функция Дирака [5]. В этом случае на верхней гране композита действует сосредоточенная в точке $x = 0$ сила величиной T . Тогда из (12) получим

$$²(x) = \frac{TG}{®}\int_0^{\infty} \frac{cos\, ªx\,dª}{\mathrm{ch}(ªh_1)\left[G + G_1 \mathrm{th}(ªh_1)\,\mathrm{th}(ªh)\right]}. \tag{14}$$

Введем безразмерные величины

$$¶ = x/h; \quad h_0 = h_1/h; \quad ª = \sim/h; \quad k = G/G_1;$$

$$\overline{²}(¶) = ²(¶h)(G + G_1)/2GG_1; \quad T_0 = \frac{T(G + G_1)}{2GG_1 h}, \tag{15}$$

после чего (14) примет вид

$$\frac{\overline{²}(¶)}{T_0} = \frac{k}{®}\int_0^{\infty} \frac{cos(\sim¶)\,d\sim}{\mathrm{ch}(\sim h_0)\left[k + \mathrm{th}(\sim h_0)\,\mathrm{th}(\sim)\right]}. \tag{16}$$

Теперь рассмотрим ту же задачу с применением модели Мелана [2], которая на нижней грани верхнего слоя описывается дифференциальным уравнением ((6), [2])

$$h_1 G_1 \frac{d^2 w_1(x,h)}{dx^2} = ²(x) - ²_1(x).$$

В образах Фурье это уравнение примет вид

$$h_1 G_1 \alpha^2 \overline{w}_1(\alpha, h) = \bar{\tau}_1(\alpha) - \bar{\tau}(\alpha). \tag{17}$$

Условие контакта в образах Фурье (10) с использованием (7) и (17) примет следующую форму:

$$\frac{\bar{\tau}(\alpha) th(\alpha h)}{G\alpha} = \frac{\bar{\tau}_1(\alpha) - \bar{\tau}(\alpha)}{h_1 G_1 \alpha^2}.$$

Отсюда

$$\bar{\tau}(\alpha) = \frac{G\bar{\tau}_1(\alpha)}{G + G_1 h_1 \alpha \operatorname{th}(\alpha h)}.$$

и по формуле обратного преобразования Фурье получим

$$\tau(x) = \frac{TG}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x d\alpha}{G + G_1 h_1 \alpha \operatorname{th}(\alpha h)}. \tag{18}$$

Здесь также перейдем к безразмерным величинам (15), в результате чего окончательно будем иметь

$$\frac{\bar{\tau}_M(\xi)}{T_0} = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\zeta\xi) d\zeta}{k + h_0 \zeta \operatorname{th}(\zeta)}. \tag{19}$$

Для различных значений параметров k и h_0 осуществлена численная реализация формул (16) и (19) и проведен сравнительный анализ полученных результатов. При численных расчетах для характерных параметров k и h_0 приняты следующие значения:

$$k = 0{,}1; 0{,}5\,; \; h_0 = 0{,}05; 0{,}1; 0{,}3; 0{,}5\,.$$

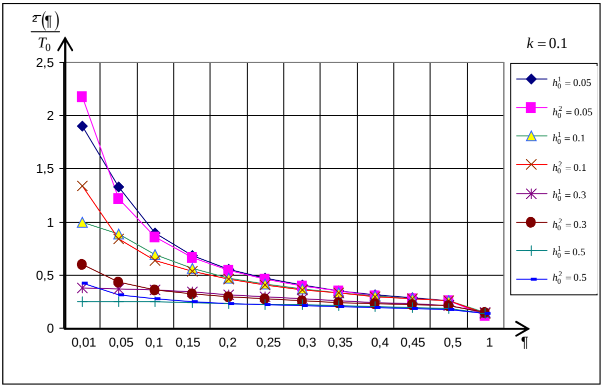
При этих значениях по точному решению (16) и по модели Мелана по приближному решению (19) в точках

$$\xi = 0{,}01; 0{,}05; 0{,}1; 0{,}15; 0{,}2; 0{,}25; 0{,}3; 0{,}35; 0{,}4; 0{,}45; 0{,}5; 1$$

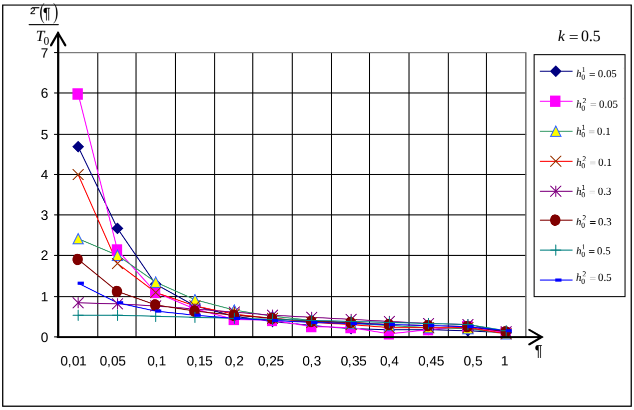
вычислены безразмерные касательные напряжения $\bar{\tau}(\xi)/T_0$ и $\bar{\tau}_M(\xi)/T_0$. Результаты вычислений приведены в таблице и по ней на фигурах 2, 3, 4 построены графики изменения этих напряжений. На фиг.5 построена поверхность изменения касательных контактных напряжений в точке $\xi = 0{,}5$ в зависимости от параметров k и h_0. При этом на указанных графиках параметры k и h_0 с верхним индексом 1 соответствуют точному решению, а с индексом 2 – к приближенному решению, причем на фиг.4 показаны графики измененя точных касательных контактных напряжений для различных, указанных на графиках, значений k и h_0. Сравнение приведенных графиков показывает, что вдали от точки приложения сосредоточенной силы касательные контактные напряжения, вычисленные по точному решению (16) и по модели Мелана (19), с достаточно большой точностью совпадают.

Таблица . Значения 2(¶)/T_0

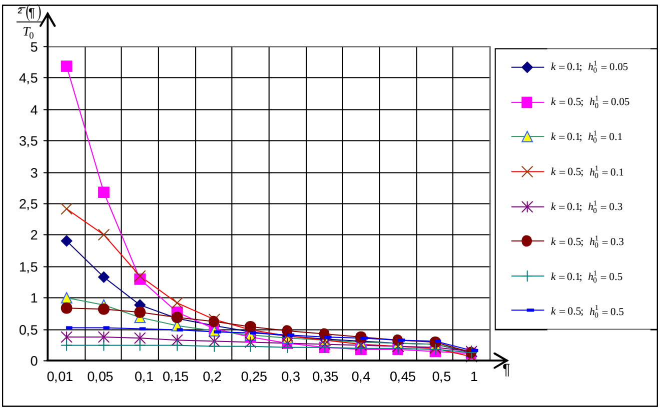
ξ	$h_0^1 = 0{,}05$	$h_0^2 = 0{,}05$	$h_0^1 = 0{,}1$	$h_0^2 = 0{,}1$	$h_0^1 = 0{,}3$	$h_0^2 = 0{,}3$	$h_0^1 = 0{,}5$	$h_0^2 = 0{,}5$
$k = 0{,}1$								
0,01	1,903	2,177	0,998	1,333	0,377	0,604	0,251	0,420
0,05	1,330	1,221	0,882	0,839	0,372	0,435	0,249	0,318
0,1	0,892	0,857	0,694	0,640	0,357	0,364	0,246	0,275
0,15	0,682	0,668	0,561	0,531	0,337	0,323	0,241	0,250
0,2	0,555	0,545	0,475	0,457	0,315	0,295	0,234	0,232
0,25	0,468	0,464	0,414	0,404	0,293	0,274	0,226	0,219
0.3	0,401	0,397	0,369	0,362	0,273	0,256	0,218	0,208
0.35	0,350	0,349	0,333	0,328	0,256	0,242	0,209	0,198
0,4	0,313	0,304	0,304	0,299	0,241	0,229	0,201	0,190
0,45	0,287	0,277	0,280	0,277	0,228	0,218	0,194	0,183
0,5	0,258	0,255	0,259	0,258	0,216	0,209	0,186	0,177
1	0,134	0,116	0,143	0,142	0,147	0,146	0,137	0,134
$k = 0{,}5$								
0,01	4,686	5,971	2,418	3,990	0,842	1,917	0,526	1,333
0,05	2,678	2,140	2,008	1,808	0,823	1,112	0,522	0,839
0,1	1,296	1,083	1,352	1,084	0,770	0,799	0,510	0,640
0,15	0,766	0,697	0,918	0,760	0,698	0,635	0,491	0,531
0,2	0,512	0,443	0,661	0,558	0,620	0,526	0,467	0,457
0,25	0,371	0,403	0,501	0,457	0,545	0,452	0,439	0,404
0.3	0,278	0,255	0,396	0,353	0,479	0,392	0,411	0,362
0.35	0,216	0,241	0,322	0,302	0,422	0,348	0,383	0,328
0,4	0,183	0,068	0,267	0,221	0,373	0,307	0,355	0,299
0,45	0,177	0,171	0,226	0,221	0,333	0,281	0,330	0,277
0,5	0,150	0,257	0,195	0,221	0,298	0,259	0,306	0,258
1	0,112	0,097	0,071	0,083	0,132	0,124	0,159	0,142



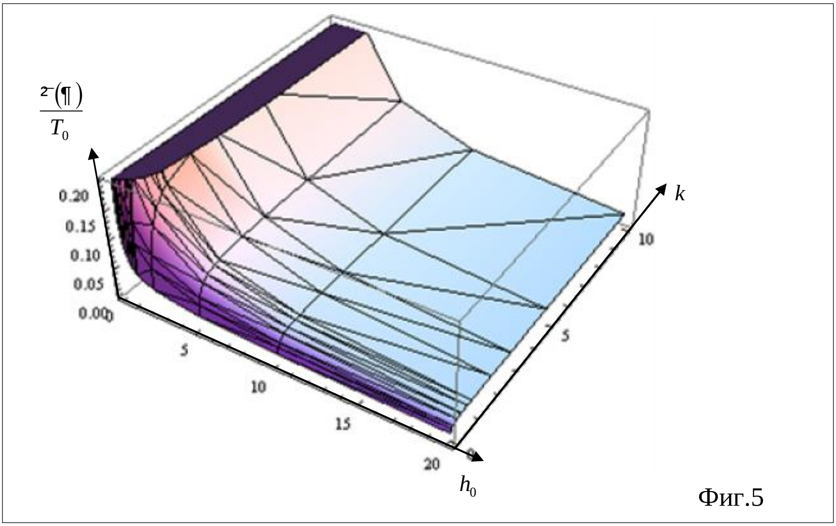
Фиг.2



Фиг.3



Фиг.4



Фиг.5

ЛИТЕРАТУРА

1. Мхитарян С.М., Мартиросян А.В., Микаелян В.В. О напряженном состоянии упругого трехслойного композита при антиплоской деформации // Известия Ереванского гос. ун-та архитектуры и строительства. 2011, № 3.
2. Мхитарян С.М., Мартиросян А.В., Микаелян В.В. О физических моделях деформирования тонких упругих слоев и контактных задачах для них при антиплоской деформации // Известия Ереванского гос. ун-та архитектуры и строительства. 2011, № 4.
3. Melan E. Ein Beitrag zur Theoric geschweisster Verbindungen.-Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, № 2. S. 123-129.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: И.Л., 1955, 667с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965, 327с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108с.

Сведения об авторе:

Мартиросян Ангин Викторовна – соискатель, специалист отдела оценки и контроля качества образования Ереванского государственного университета архитектуры и строительства.

Тел.:(374 10) 44 20 42, (374 94) 76 23 96

E-mail: angin84@mail.ru

ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНО – ПРОВОДЯЩЕМ СЛОЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Мелконян А.В., Саркисян С.В.

Ереван, Армения

Рассматривается трехмерная задача распространения волн в упругом идеально-проводящем слое при наличии внешнего постоянного магнитного поля. На плоскостях, ограничивающие слой, заданы условия стесненного свободного края. Для фазовой скорости симметричных и антисимметричных колебаний получены характеристические уравнения. Рассмотрены предельные случаи: длина волны очень велика и очень мала по сравнению с толщиной слоя.

Рассмотрим изотропный упругий идеально-проводящий слой ($x\in(-\infty;\infty), y\in(-\infty;\infty)$, $z\in[-h;h]$). Слой характеризуется коэффициентами Ламе λ и μ, плотностью ρ и коэффициентом магнитной проницаемости μ_0, находится во внешнем постоянном продольном магнитном поле $\vec{H}_0(0,H,0)$, и граничит с вакуумом. Пусть в слое распространяется периодическая волна с фазовой скоростью c.

Уравнение движения в перемещениях для идеально – проводящего слоя при наличии внешнего постоянного магнитного поля имеет следующий вид [1,2]

$$c_2^2\Delta\vec{u}+\left(c_1^2-c_2^2\right)\mathrm{graddiv}\,\vec{u}+\vec{R}=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} \tag{1}$$

здесь $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ - вектор перемещения, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$,

$\vec{R}=\dfrac{\mu_0}{4\pi\rho}\left(\mathrm{rotrot}\left(\vec{u}\times\vec{H}_0\right)\right)\times\vec{H}_0$ - пондермоторная объемная сила Лоренца электромагнитного происхождения.

Для идеально – проводящего слоя индуцированное электромагнитное поле определяется по следующим формулам [1-3]

$$\vec{h}=\mathrm{rot}\left(\vec{u}\times\vec{H}_0\right),\qquad \vec{e}=-\frac{\mu_0}{c_0}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\times\vec{H}_0\right) \tag{2}$$

где c_0 - электродинамическая постоянная.

Отметим, что для идеально – проводящей среды вектор перемещения определяется непосредственно из решения уравнения (1). Имея значение перемещений $\vec{u}$ из (2) можно определить индуцированное в среде электромагнитное поле.

Для уравнения движения (1) введем следующее преобразование

$$u_1 = \frac{\partial \ddot{}}{\partial x} - \frac{\partial \cdot}{\partial z} \qquad\qquad u_3 = \frac{\partial \ddot{}}{\partial z} + \frac{\partial \cdot}{\partial x} \tag{3}$$

где $\ddot{}\left(x,y,z,t\right)$ и $\cdot\left(x,y,z,t\right)$ неизвестные функции.

Преобразование (3) такое же, что и для задачи плоской деформации в плоскости xoz [4,5]. Необходимо отметить, что преобразование (3) было применено в [5] для трехмерной задачи статики пьезоактивной среды, а также М.В. Белубекяном и В.М. Белубекяном [4] при исследовании трехмерной задачи распространения поверхностных волн Рэлея.

Подстановка (3) в первое и третье уравнения (1) дает

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[c_1^2\Delta_{xz}\ddot{} + c_2^2\frac{\partial^2\ddot{}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\ddot{}}{\partial t^2} + \left(c_1^2 - c_2^2\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} + a^2\Delta\ddot{}\right] - \\
&-\frac{\partial}{\partial z}\left[c_2^2\Delta\cdot + a^2\frac{\partial^2\cdot}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2}\right] = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial z}\left[c_1^2\Delta_{xz}\ddot{} + c_2^2\frac{\partial^2\ddot{}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\ddot{}}{\partial t^2} + \left(c_1^2 - c_2^2\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} + a^2\Delta\ddot{}\right] + \\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left[c_2^2\Delta\cdot + a^2\frac{\partial^2\cdot}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2}\right] = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

здесь $\Delta_{xz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - двумерный оператор Лапласа.

Уравнения(4) будут удовлетворены, если имеют место следующие уравнения

$$c_1^2\Delta_{xz}\ddot{} + c_2^2\frac{\partial^2\ddot{}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\ddot{}}{\partial t^2} + \left(c_1^2 - c_2^2\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} + a^2\Delta\ddot{} = 0 \tag{5}$$

$$c_2^2\Delta\cdot + a^2\frac{\partial^2\cdot}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

Из (5) определим

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{1}{1-{-}}\left(\Delta_{xz}\ddot{} + {-}\frac{\partial^2\ddot{}}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\ddot{}}{\partial t^2} + \frac{a^2}{c_1^2}\Delta\ddot{}\right) \tag{7}$$

Продифференцируем второе уравнение (1) по y и подставляя преобразование (3) и выражения $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ из (7) будем иметь

$$\Delta\Delta\text{¨} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2}\frac{\partial^{4}\text{¨}}{\partial t^4} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{\text{¥}}{c_1^2}\right)\frac{\partial^2\left(\Delta\text{¨}\right)}{\partial t^2} + \text{¥}\left(\text{¯}\Delta_{xz}\Delta\text{¨} + \frac{\partial^2\left(\Delta\text{¨}\right)}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (8)$$

Представим решение уравнений (6) и (8) в виде

$$\begin{aligned} &\text{¨}\left(x,y,z,t\right) = \text{¨}^{*}\left(z\right)\cdot \exp i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right) \\ &\cdot\left(x,y,z,t\right) = \cdot^{*}\left(z\right)\cdot \exp i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right) \end{aligned} \qquad (9)$$

где $\text{¯} = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \text{¥} = \frac{a^2}{c_2^2}, k^2 = k_1^2 + k_2^2,\ a = \sqrt{\frac{\text{«}_0 H^2}{4\text{®°}}}$ - скорость Альфвена.

Подстановка (9) в (6) и (8) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решение которых имеет вид:

$$\begin{aligned} &\text{¨}\left(x,y,z,t\right) = (A_1\,\mathrm{sh}\left(\text{¸}_1 z\right) + A_2\,\mathrm{ch}\left(\text{¸}_1 z\right) + \\ &\qquad + A_3\,\mathrm{sh}\left(\text{¸}_2 z\right) + A_4\,\mathrm{ch}\left(\text{¸}_2 z\right))\cdot \exp i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right) \\ &\cdot\left(x,y,z,t\right) = \left(C\,\mathrm{sh}\left(\text{¸}_3 z\right) + B\,\mathrm{ch}\left(\text{¸}_3 z\right)\right)\cdot \exp i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right) \end{aligned} \qquad (10)$$

где

$$\text{¸}_1^2 = k_1^2\left(1+\text{¶}^2\right)\frac{2-\text{¦}-\text{¦¯}+\text{¥}\left(1+\text{¯}\left(1-\text{¦}\right)\right)+\sqrt{D}}{2\left(1+\text{¥}\right)}$$

$$\text{¸}_2^2 = k_1^2\left(1+\text{¶}^2\right)\frac{2-\text{¦}-\text{¦¯}+\text{¥}\left(1+\text{¯}\left(1-\text{¦}\right)\right)-\sqrt{D}}{2\left(1+\text{¥}\right)}$$

$$\text{¸}_3^2 = k_1^2\left(\left(1+\text{¶}^2\right)\left(1-\text{¦}\right)+\text{¥¶}^2\right),\ \text{¶} = \frac{k_2}{k_1}$$

$$D = \text{¦}^2\left(1-\text{¯}\right)^2 + \text{¥}^2\left(\left(1-\text{¯}\right)^2 + \text{¦¯}\left(\text{¦¯} - 2\text{¯} + 2\right)\right) + 2\text{¥¦}\left(1-\text{¯}\right)\left(1+\text{¯}-\text{¦¯}\right)$$

A_i, C, B - неизвестные постоянные интегрирования.

Наряду с уравнениями (6) и (8) следует рассматривать линеаризованные уравнения электродинамики для внешней области (вакуум), которые в данном случае сводятся к следующим уравнениям

$$c_0^2\Delta h_2^{(e)} - \frac{\partial^2 h_2^{(e)}}{\partial t^2} = 0, \quad c_0^2\Delta e_1^{(e)} - \frac{\partial^2 e_1^{(e)}}{\partial t^2} = 0 \qquad (11)$$

Здесь и в последующем, величины, характеризирующие внешнюю область, отмечаются индексом $\left(e\right)$, h_2 и e_1 компоненты индуцированного электромагнитного поля $\vec{h}$ и $\vec{e}$.

Решение уравнений электродинамики для окружающей среды (11) запишутся следующим образом

$$h_2^{(e)} = M_1 \exp\left(-\neg_0 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

$$\left(z \geq h\right)$$

$$e_1^{(e)} = N_1 \exp\left(-\neg_0 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

(12)

$$h_2^{(e)} = M_2 \exp\left(\neg_0 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

$$\left(z \leq -h\right)$$

$$e_1^{(e)} = N_2 \exp\left(\neg_0 z + i\left(k_1 x + k_2 y - ckt\right)\right)$$

где $\neg_0^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2}\right)$, M_1, M_2, N_1 и N_2 неизвестные постоянные, которые связаны между собой следующими зависимостями

$$c_0 \neg_0 M_1 = -ikcN_1$$
$$c_0 \neg_0 M_2 = ikcN_2 \qquad (13)$$

Зависимость (13) следует из линеаризованных уравнений электродинамики для вакуума [3].

Примем, что на плоскостях, ограничивающие слой, заданы следующие восемь граничных условий [1-3]

$$\pm_{13} + T_{13} = T_{13}^{\pm}$$
$$\pm_{33} + T_{33} = T_{33}^{\pm} \qquad (npu\, z = \pm h)$$
$$u_2 = 0$$
$$e_1 = e_1^{\pm} \qquad (14)$$

Здесь $\pm_{13}$ и $\pm_{33}$ компоненты тензора напряжений, T_{13} и T_{33} - компоненты тензора Максвелла, имеющий следующее представление

$$T_{ij} = \frac{\text{«}_0}{4\text{®}}\left(H_i h_j + H_j h_i\right) - \text{¢}_{ij}\frac{\text{«}_0}{4\text{®}}\vec{H}_0 \cdot \vec{h}\,.$$

Из уравнения (7), с учетом (9) и (10), для перемещения $u_2\left(x, y, z, t\right)$ получим

$$u_2\left(x, y, z, t\right) = M\left(x, z, t\right) \cdot \int_{-\infty}^{y} e^{ik_2 s} ds \qquad (15)$$

где

$$M(x,z,t) = -\frac{1}{1-¯}\left(\left(-k_1^2 - k_2^{2¯} + k^2¦¯ - k^2¥¯\right) f_1^*(z) + \right.$$
$$+\left(1+¥¯\right)\left[¶_1^2\left(A_1 \operatorname{sh}(¶_1 z) + A_2 \operatorname{ch}(¶_1 z)\right) + \right.$$
$$\left.\left.+¶_2^2\left(A_3 \operatorname{sh}(¶_2 z) + A_4 \operatorname{ch}(¶_2 z)\right)\right]\right)\exp i\left(k_1 x - ckt\right)$$

Поскольку принятые граничные условия при $z = \pm h$ симметричные, то данная задача разделяется на симметричные и антисимметричные колебания, как это имеет место для слоя со свободными краями [3].

Удовлетворяя решение (9) и (12) граничным условиям (14) при $z = h$, с учетом (13), и имея ввиду, что $\frac{c^2}{c_0^2} << 1$, после необходимых преобразований, для фазовой скорости симметричных и антисимметричных форм колебаний получим следующие дисперсионные уравнения

$$\Gamma_1 \operatorname{th}(¶_1 h) - \Gamma_2 \operatorname{th}(¶_2 h) + \Gamma_3 \operatorname{th}(¶_3 h) = 0 \qquad (16)$$

и

$$\Gamma_1 \operatorname{cth}(¶_1 h) - \Gamma_2 \operatorname{cth}(¶_2 h) + \Gamma_3 \operatorname{cth}(¶_3 h) = 0 \qquad (17)$$

где

$$\Gamma_1 = 4k_1^2 ¸_1 ¸_3 \left(p + ¸_2^2\left(1+¥¯\right)\right)$$
$$\Gamma_2 = -4k_1^2 ¸_2 ¸_3 \left(p + ¸_1^2\left(1+¥¯\right)\right)$$
$$\Gamma_3 = \left(¸_1^2 - ¸_2^2\right)\left(q\left(1+¥¯\right) - pg\right)$$
$$p = k_1^2\left(¯\left(1+¶^2\right)\left(¦ - ¥\right) - 1 - ¯¶^2\right)$$
$$q = k_1^2\left(\frac{\left(1+¶^2\right)\left(1-2¯\right)\left(1-¦+¥\right)}{1-¯} - ¥\right)$$
$$g = \frac{1+¥\left(2-3¯\right)}{1-¯}$$

Рассмотрим предельные случаи: длина волны очень велика и очень мала по сравнению с толщиной слоя. В первом случае заменяя в уравнение (16) гиперболические тангенсы их аргументами для определения значения фазовой скорости волны получаем следующее уравнение:

$$4k_1^2 p + \left(k_1^2 + ¸_3^2\right)\left(q\left(1+¥¯\right) - pg\right) = 0$$

Во втором предельном случае, l очень мала по сравнению с толщиной слоя, из (16) получаем характеристическое уравнение для поверхностных магнитоупругих волн Рэлея.

В общем случае симметричных колебаний фазовую скорость c следует определить из уравнения (16). Наличие в уравнениях (16) и (17) безразмерного параметра ¶ приводит к тому, что волна обладает свойством дисперсии.

Проведены числовые расчеты безразмерной фазовой скорости симметричных колебаний в зависимости от величины ¶ при различных значениях внешнего постоянного магнитного поля. Показано, что с возрастанием значения внешнего магнитного поля значение фазовой скорости возрастает, внешнее постоянное магнитное поле слабо влияет на фазовую скорость колебаний. С возрастанием параметра ¶ $= \frac{k_2}{k_1}$ значение фазовой скорости колебаний уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука,1977. 272с.
2. Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н. Электромагнитоупругие волны. Изд. ЕГУ, Ереван 2006, 491с.
3. Амбарцумян С.А., Саркисян С. В. О применимости гипотезы Кирхгофа при исследовании задач распространения магнитоупругих волн в пластинке, ДНАН РА 2010, том 110, №3, с. 235-240.
4. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Том 105. N4. C 362 –369.
5. Wàng Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional problems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. vol. 32. №1. p. 105 – 115.

Сведения об авторах:

Мелконян Аветик Варданович- к.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН РА

(374 10) 63 06 92, (374 91) 31 50 57

E-mail avetikmelkonyan@gmail.com

Саркисян Самвел Владимирович- доктор физ.мат. наук, профессор, зав. кафедры механики, Ереванский государственный университет, факультет математики и механики

(374 10) 61 17 78, (374 91) 38 43 67

E-mail vas@ysu.am

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ ПРИ ОБТЕКАНИИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Минасян Д.М., Камалян А.А.

Ереван, Армения

В теории колебаний механических систем известны различного рода воздействия приводящие к затуханию (уменьшению амплитуды) колебаний во времени. Такие воздействия называются диссипативными силами или силами трения. Известно, что в консервативных (самосопряженных) задачах устойчивости учет указанных сил, в общем случае, не влияет на величину критического параметра, или же может оказать стабилизирующее действие. Учет сил трения может привести к существенной дестабилизации для неконсервативных задач. Существует даже мнение, что неконсервативные задачи должны быть исследованы обязательно с учетом сил трения [1, 2].

1. Пусть пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $0 \le x \le l$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Пластинка в направлении оси ox обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью U. Принимается справедливость гипотезы Кирхгофа и поршневой теории [3]. Считается, что в направлении оси oy пластинка достаточна широкая, и поэтому можно считать, что колебания пластинки имеют форму цилиндрической поверхности, т.е. не зависят от координаты y. При указанных допущениях уравнение изгибных колебаний пластинки имеет вид [3]:

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_0 \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь ρ, ρ_0 – плотность материала пластинки и газа соответственно, a_0 – скорость звука в газе, w – функция прогиба пластинки, D – жесткость на изгиб: $D = 2Eh^3\left[3\left(1-\nu^2\right)\right]^{-1}$.

Решение уравнения (1.1) при различных статических граничных условиях на краях пластинки $x=0$ и $x=l$ было исследовано А.Мовчаном [4]. Для нахождения общего решения уравнения (1.1) необходимо найти корни характеристического уравнения четвертой степени общего вида, что приводит к большим трудностям вычислительного характера. В частности, для задачи пластинки свободной при $x=0$ и закрепленной на конце $x=l$, А.Мовчаном [4] получено следующее значение флаттерной критической скорости:

$$U_{кр}^{ф} = \pm 124.44 D a_0^{-1} \circ_0^{-1} l^{-3} \qquad (1.2)$$

Для сравнения приведем значение дивергентной критической скорости (критическая скорость при статической постановке, т.е. когда в уравнении (1.1) пренебрегаются динамические члены $\partial^2 w / \partial t^2$ и $\partial w / \partial t$)

$$U_{кр}^{\partial} \approx 6.33 D a_0^{-1} \circ_0^{-1} l^{-3} \qquad (1.3)$$

В настоящей работе вместо уравнения (1.1) используется уравнение

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_0 \circ_0 U \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (1.4)$$

Как и в [4], предполагается, что граница $x = l$ закреплена:

$$w = 0, \ \partial w / \partial x = 0 \ \text{при} \ x = l \qquad (1.5)$$

В отличие от задачи Мовчана считается, что на свободном конце пластинки приложен сосредоточенный инерционный момент и имеется трение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sim \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \pounds_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}, \ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \ \text{при} \ x = 0, \ \sim > 0, \ \pounds_1 \geq 0 \qquad (1.6)$$

Задача решения уравнения (1.4) с граничными условиями (1.5) и (1.6), в частном случае $\pounds_1 = 0$, рассмотрена в [5]. Модель с сосредоточенным инерционным моментом на свободном конце была предложена Ржаницынным в работе [6] для задачи устойчивости консольного стержня сжатого “следящей нагрузкой”.

2. Решение уравнения (1.4), как и в задаче Мовчана, представляется в виде

$$w = f(x) e^{i\mu t} \qquad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.4) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $f(x)$, характеристическое уравнение которого, хотя и является четвертой степени, однако имеет простые выражения для корней [5, 7]. Поэтому общее решение представляется в простом виде:

$$f(x) = A_0 + e^{\frac{sx}{2}} \left(A_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sx + A_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sx \right) + A_4 e^{-sx} \qquad (2.2)$$

где

$$s = \sqrt[3]{a_0 \circ_0 U D^{-1}} \qquad (2.3)$$

С учетом (2.1) граничные условия на свободном конце приводятся к виду

$$f'' + \mu\left(\sim\mu - i£_1\right) f' = 0\,, \;\; f''' = 0 \text{ при } x = 0 \qquad (2.4)$$

Подстановка (2.2) в (2.4) приводит к выражению произвольных постоянных A_2 и A_4 через A_1, после чего решение (2.2), удовлетворяющее граничным условиям при $x = 0$ (2.4), определяется следующим образом

$$f(x) = A_0 + $$
$$+ A_1 e^{\frac{sx}{2}} \left[\cos\frac{\sqrt{3}sx}{2} + \sqrt{3}\,\frac{s - \mu\left(\sim\mu - i£_1\right)}{s + \mu\left(\sim\mu - i£_1\right)} \sin\frac{\sqrt{3}sx}{2} - e^{-\frac{3sx}{2}} \right] \qquad (2.5)$$

Из требования, чтобы решение (2.5) удовлетворяло граничному условию (1.5)

$$f' = 0 \text{ при } x = l \qquad (2.6)$$

получается следующее дисперсионное уравнение (при условии $A_1 \neq 0$):

$$\sim\mu^2 - i£_1\mu - 2s\Pi\left(sl\right)B^{-1}\left(sl\right) = 0 \qquad (2.7)$$

Здесь приняты обозначения

$$\Pi\left(sl\right) = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}sl + \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}sl}$$
$$B\left(sl\right) = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}sl + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sl - e^{-\frac{3}{2}sl} \qquad (2.8)$$

Как показано в [5], при отсутствии трения ($£_1 = 0$) критическая скорость дивергентной неустойчивости получается из решения уравнения

$$\Pi\left(sl\right) = 0 \qquad (2.9)$$

откуда получается минимальная критическая скорость

$$\left(sl\right)_1 \approx 1.815\,, \; U_{кр}^{див} \approx 6.33 D a_0^{-1} \circ_0^{-1} l^{-3} \qquad (2.10)$$

Флаттерная критическая скорость получается из уравнения

$$B\left(sl\right) = 0 \qquad (2.11)$$

и имеет значение

$$\left(sl\right)^{\phi}_1 \approx 3.016\,, \; U_{кр}^{\phi} \approx 27.54 D a_0^{-1} \circ_0^{-1} l^{-3} \qquad (2.12)$$

Решение уравнения (2.7), записанное в виде

$$\mu = \frac{1}{2\sim}\left[i\pounds_1 \pm \sqrt{\frac{2s\sim \Pi\left(sl\right)}{B\left(sl\right)} - \pounds_1} \right], \qquad (2.13)$$

показывает, что и для произвольного значения $\pounds_1 > 0$ дивергентная неустойчивость получается при условии (2.9), а флаттерная – при условии (2.11). Т.е., в этом случае, учет трения не влияет на критические скорости дивергентной и флаттерной неустойчивости.

3. Рассмотрим теперь другой тип трения. Вместо граничных условий (1.6) пусть даны условия

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sim \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - \pounds_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ при } x = 0 \qquad (3.1)$$

или, с учетом (2.1)

$$\left(1 + i\pounds_2\mu\right) f'' + \sim\mu^2 f' = 0, \quad f''' = 0 \text{ при } x = 0 \qquad (3.2)$$

Решение (2.2), удовлетворяющее граничным условиям (3.2), будет иметь вид

$$f(x) = A_0 + $$
$$+ A_1 e^{\frac{sx}{2}} \left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} sx + \sqrt{3}\,\frac{s + i\pounds_2\mu - \sim\mu^2}{s + i\pounds_2\mu + \sim\mu^2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} sx - e^{-\frac{3}{2}sx} \right) \qquad (3.3)$$

Из условия закрепленного края (2.6) получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\sim B\left(sl\right)\mu^2 - 2i\pounds_2\Pi\left(sl\right) - 2s\Pi\left(sl\right) = 0 \qquad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) в виде

$$\mu = \frac{1}{\sim B\left(sl\right)}\left[i\pounds_2\Pi\left(sl\right) \pm \sqrt{2s\sim \Pi\left(sl\right)B\left(sl\right) - \pounds_2^2\Pi^2\left(sl\right)} \right] \qquad (3.5)$$

показывает, что как и в предыдущем случае, наличие трения с коэффициентом $\pounds_2 > 0$ не влияет на критические скорости потока газа.

Таким образом, установлено, что в неконсервативной задаче обтекания пластинки с сосредоточенным инерционным моментом на свободном конце, учет трения в различных формах ***не влияет*** на критическую скорость флаттера. Следует отметить что аналогичная задача (только без трения) была рассмотрена в работе М.В.Белубекяна, С.Р.Мартиросяна [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of dumping on stability of elastic systems

subjected to nonconservative forces. 1969, International journal of Solids and Structures. vol.5, №9, pp.965-989.
2. Elishakoff I. Controversy associated with the so-called “follower forces”: Critical overview. Applied Mechanics Reviews, 2005, vol.58, pp.117-142.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 360с.
4. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе// ПММ. 1956, т.20, вып.2, с.211-222.
5. Белубекян М.В., Геворкян С.Х., Самра Г.А. К задаче устойчивости пластики при обтекании сверхзвуковым потоком. V-ая Международная конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Ереван, 2005, с. 88-92.
6. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой// Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, т.38 (5). pp.33-44. ISSN 0002-3051.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979, 384с.
8. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одном неожиданном совпадении в задаче устойчивости пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа// Доклады НАН Армении, 2008, т.108, №3.

Сведения об авторах:

Минасян Давид Мелсович
Ереванский государственный университет
факультет математики и механики, кафедра механики
зав. учебной лабораторией кафедры механики
кандидат физ. мат. наук
тел: +37499020722
адрес: Армения, 0025, Ереван, Алек Манукян ул., 1 дом
эл.почта: minasyan@ysu.am

Камалян Андраник Арменович
Ереванский государственный университет
факультет математики и механики, кафедра механики
аспирант кафедры механики ЕГУ
тел: +37494909692
адрес: Армения, 0025, Ереван, Алек Манукян ул., 1 дом
эл.почта: kamalyan_andranik@yahoo.com

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ СТРИНГЕРОВ С ПОЛОСОЙ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

Мирзоян С.Е., Акопян В.В., Мирзоян Е.С.
Ереван, Армения

В рамках теории ползучести неоднородно наследственно-стареющих тел [1,2] рассматривается плоская контактная задача о передаче нагрузки от двух одинаковых стрингеров конечной длины к полосе с учетом фактора неоднородного старения. Рассмотрены симметрический и кососимметричес кие случаи загружения накладок. Задача сведена к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению по координате, содержащему операторы Вольтерра по времени. При помощи ортогональных полиномов Чебышева последнее сведено к вполне регулярной бесконечной системе линейных интегральных уравнений Вольтерра.

Пусть упругая бесконечная полоса толщиной H, на двух конечных отрезках $\left[-a,-b\right]$ и $\left[b,a\right]$ $(b<a)$, одной из своих граней усилена двумя одинаковыми стрингерами, малой толщины h, а по другой грани либо жестко защемлена (задача 1), либо свободна от внешних напряжений (задача 2). Требуется определить закон распределения контактных напряжений и коэффициенты их интенсивности, если в момент времени $t=\tau_0$ к концам стрингеров приложены сосредоточенные силы $P_1\left(t\right)$ и $P_2\left(t\right)$, а по верхним граням – тангенциальные силы интенсивности $q_0\left(x,t\right)$ либо симметричным, либо кососимметричным образом.

Из условия контакта $\varepsilon_x^{(1)}(x,t)=\varepsilon_x^{(2)}(x,t),\ (t\geq\tau_0)$, после некоторых преобразований для определения тангенциальных контактных напряжений $q(x,t)$ получим двумерное интегральное уравнение вида

$$(1-L_2)\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\left[\frac{1}{s-x}+K(s-x)\right]\varphi'(s,t)ds=$$
$$\lambda^*(t)(1-L_1)[\varphi(x,t)-f(x,t) \tag{1}$$

Где $L_i\left[y(t)\right]=\int_{\tau_0}^{t}E_i^*(t)K_i^*(t,\tau)Y(\tau)d\tau \quad (i=1,2)$

$$\lambda^*(t)=\frac{\pi(1-\nu_1^2)E_2^*(t)}{2h(1-\nu_2^2)E_1^*(t)} \qquad K_i(t,\tau)=K_i^*(t+\rho_i,\tau+\rho_i), \quad \rho_i=\tau_i-\tau_0(i=1,2)$$

τ_1,τ_2 – возрасты стрингеров и полосы, $K(s-x)$ –регулярная функция.

Отметим, что при симметричном нагружении накладок

$$\varphi(x,t)=\varphi_+(x,t)=\begin{cases}\int\limits_b^x q(s,t)ds, & x\in[b,a]\\ -\int\limits_x^{-b} q(s,t)ds, & x\in[-a,-b]\end{cases}$$

$$f(x,t)=f_+(x,t)=\begin{cases}P_1(t)-\int\limits_b^x q_0(s,t)ds, & x\in[b,a]\\ P_1(t)+\int\limits_x^{-b} q_0(s,t)ds, & x\in[-a,-b]\end{cases} \qquad (2)$$

а при кососимметричном нагружении

$$\varphi(x,t)=\varphi_-(x,t)=\begin{cases}\int\limits_b^x q(s,t)ds, & x\in[b,a]\\ -\int\limits_x^{-b} q(s,t)ds, & x\in[-a,-b]\end{cases}$$

$$f(x,t)=f_-(x,t)=\begin{cases}P_1(t)-\int\limits_b^x q_0(s,t)ds, & x\in[b,a]\\ -P_1(t)-\int\limits_x^{-b} q_0(s,t)ds, & x\in[-a,-b]\end{cases} \qquad (3)$$

Из условия равновесия накладок вытекает, что функции $\varphi_\pm(x)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi_\pm(b,t)=0,\quad \varphi_\pm(-b,t)=0,\quad \varphi_\pm(a,t)=P(t)$$
$$\varphi_+(-a,t)=P(t),\quad \varphi_-(-a,t)=-P(t), \qquad (4)$$
$$P(t)=P_1(t)-P_2(t)-\int\limits_b^a q_0(s,t)ds$$

Введя безразмерные координаты и величины

$$x=a\xi,\quad s=a\eta,\quad aq(a\xi,t)/P(t)=\tau(\xi,t)$$
$$aq_0(a\xi,t)/P(t)=\tau_0(\xi,t),\quad k=b/a<1$$

после некоторых преобразований получим в симметричном случае нагружения накладок следующее уравнение:

$$(1-L_2^0)\int\limits_k^1\left[\frac{2\eta}{\eta^2-\xi^2}+K_0^*(\xi,\eta)\right]\varphi_1'(\eta,t)d\eta=\lambda(t)(1-L_1^0)[\varphi_1(\xi,t)-f_1(\xi,t)]$$

$$\varphi_1(\xi,t)=\int_k^\xi \tau(\eta,t)d\eta, \quad f_1(\xi,t)=\frac{P_1(t)}{P(t)}-\int_k^\xi \tau_0(\eta,t)d\eta,$$

$$L_i^0[y(t)]d\eta=\int_{\tau_0}^t E_i^*(t)\frac{P(\tau)}{P(t)}K_i^*(t,\tau)y(\tau)d\tau \quad (i=1,2) \tag{5}$$

$$K_0^*(\xi,\eta)=a[K_0(a\eta-a\xi)-K_0(a\eta+a\xi)], \quad k<\xi<1$$

при граничных условиях

$$\varphi_1(k,t)=0, \quad \varphi_1(1,t)=1 \tag{6}$$

В кососимметричном случае нагружения накладок аналогичным образом получим

$$(1-L_2^0)\int_k^1[\frac{2\xi}{\eta^2-\xi^2}+K_0^{**}(\xi,\eta)]\varphi_2'(\eta,t)d\eta=\lambda(t)(1-L_1^0)[\varphi_2(\xi,t)-f_2(\xi,t)]$$

$$\varphi_2(\xi,t)=\int_k^\xi \tau(\eta,t)d\eta, \quad f_2(\xi,t)=\frac{P_1(t)}{P(t)}-\int_k^\xi aq_0(a\eta,t)d\eta, \tag{7}$$

$$K_0^{**}(\xi,\eta)=a[K_0(a\eta-a\xi)+K_0(a\eta+a\xi)], \quad k<\xi<1$$

при граничных условиях

$$\varphi_2(K,t)=0, \quad \varphi_2(1,t)=1 \ . \tag{8}$$

Отметим, что истинное контактное напряжение под накладками определяется формулой

$$q(x,t)=\frac{P(t)}{a}\varphi_i'(x/a,t), \ (i=1,2) \tag{9}$$

Перейдем к новым переменным u,v

$$u=(2\xi^2-k^2-1)\big/(1-k^2), \quad v=(2\eta^2-k^2-1)\big/(1-k^2) \quad |u,v|<1 \tag{10}$$

Тогда при симметриченом нагружении из (5) и (6) получим

$$(1-L_2^0)\int_{-1}^1[\frac{1}{v-u}+R_0^*(u,v)]\psi(v,t)dv=$$
$$=\lambda(t)a(1-L_1^0)[\psi(u,t)-f_1(\sqrt{\alpha u+\beta},t)] \tag{11}$$

при граничных условиях

$$\psi(-1,t)=0, \quad \psi(1,t)=1 \tag{12}$$

где

$$\psi(u,t)=\tau(\sqrt{\alpha u+\beta},t), \quad \psi(u,t)=\frac{\alpha}{2}\int_{-1}^u\frac{\psi(v,t)dv}{\sqrt{\alpha v+\beta}}$$

$$R_0^*(u,v)=\alpha K_0^*(\sqrt{\alpha u+\beta},\sqrt{\alpha v+\beta})/2\sqrt{\alpha v+\beta}, \tag{13}$$

$$\xi = \sqrt{\alpha u + \beta},\ \eta = \sqrt{\alpha u + \beta}$$

$$\alpha = \frac{1-k^2}{2},\ \ \beta = \frac{1+k^2}{2}, k = \frac{b}{a} < 1$$

При кососимметричном нагружении из (7) и (8) получим

$$(1-L_2^0)\int_{-1}^{1}[\frac{1}{v-u} + R_0^*(u,v)]\psi_0'(v,t)dv =$$

$$= \lambda(t)a\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha u+\beta}}(1-L_1^0)[\psi_0(u,t) - f_1(\sqrt{\alpha u+\beta},t)] \tag{14}$$

при граничных условиях

$$\psi_0(-1,t) = 0,\ \ \psi_0(1,t) = 1 \tag{15}$$

где

$$\psi_0(u,t) = \frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{u}\tau(\sqrt{\alpha v+\beta},t)\frac{dv}{\sqrt{\alpha v+\beta}},$$

$$R_0^{**}(u,v) = \alpha K_0^*(\sqrt{\alpha u+\beta},\sqrt{\alpha v+\beta})/2\sqrt{\alpha v+\beta},$$

Для тангенциальных контактных напряжений будем иметь

$$q(x,t) = \frac{P(t)}{a}\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha x/a+\beta}\varphi_0'(x/a,t)$$

$$\varphi_0(u,t) = \varphi_1(\sqrt{\alpha u+\beta},t) = \psi(u,t) \tag{16}$$

Решение уравнения (11) при граничных условиях (12) представим в виде бесконечного ряда (симметричный случай)

$$\psi(v,t) = (1-v)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}X_n(t)T_n(t)\quad (|v|<1) \tag{17}$$

тогда из (13) и (17) находим

$$\psi(u,t) = \frac{\alpha}{2}\int_{-1}^{u}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}X_n(t)T_n(v)dv}{\sqrt{1^2-v^2}\sqrt{\alpha v+\beta^2}} = \frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{\infty}G_n(u)X_n(t) \tag{18}$$

$$G_n(u) = \int_{-1}^{u}\frac{T_n(v)dv}{\sqrt{\alpha v+\beta^2}\sqrt{1^2-v^2}}$$

Из граничных условий (12) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(1)X_n(t) = 2/\alpha \tag{19}$$

Подставляя выражение $\psi(v,t)$ из (17) в (11) после некоторых преобразований, получим для определения неизвестных коэффициентов $X_n(t)$ квазивполне регулярную бесконечную систему линейных интегральных уравнений Вольтерра вида [4,5]

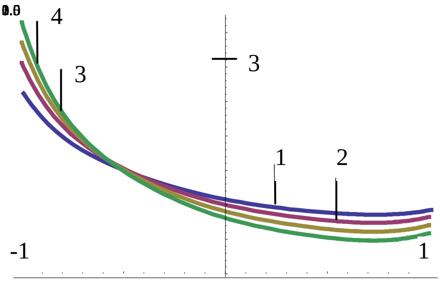
$$X_m(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[B_{m,n}(t)X_n(t)+\int_{\tau_0}^{t}K_{m,n}(t,\tau)X_n(\tau)d\tau]=N_m(t) \qquad (20)$$

$$\left(m=1,2,....,T\geq\tau_0\right)$$

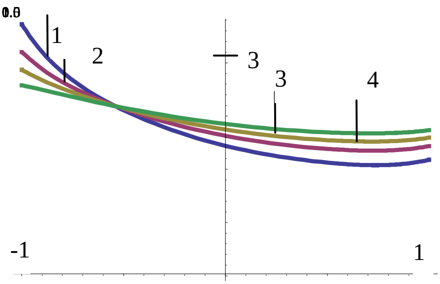
а коэффициент $X_0(t)$ определится из условия (18).

Отметим, что для коэффициентов интенсивности тангенциальных контактных напряжений, согласно (13) и (17) будем иметь следующие выражения:

$$A_1(t)=\lim_{\xi\to k}\sqrt{\xi-k}\,\tau(\xi,t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{k}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X_n(t)$$
$$A_2(t)=\lim_{\xi\to 1}\sqrt{1-\xi}\,\tau(\xi,t)=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}X_n(t) \qquad (21)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Проведен численный анализ в симметричном случае задачи при значениях параметров

$E_1=E_2=2\times10^4$ МПа,

$\nu_1=\nu_2=0.1,\ H/h=50,\ a/h=4,$

$b/a=0.4,\ \gamma_1=\gamma_2=0,026$ сут$^{-1}$

$C_0^1=C_0^2=9\times10^{-5}$ МПа, $\tau_0=14$

$A_0^1=A_0^2=4,82\times10^{-4}$ сут × МПа$^{-1}$

$\tau_0\left(x,t\right)=P_0H\left(t-\tau_0\right)$

На фиг. 1, 2 приведены графики зависимости $\sqrt{1-\xi^2}\,\tau\left(\xi,t\right)$ от ξ для симметричного случая нагружения для 4 значений $t_1=14,$ $t_2=28,\ t_3=70,\ t_4=140$.

На фиг. 1 $\tau_1=28,\ \tau_2=56$, а на

фиг. 2 – $\tau_1 = 56,\ \tau_2 = 28$.

Численный анализ показывает, что:

1. При приближении возраста τ_1 к τ_2 решение задачи с учетом ползучести приближается к решению соответствующей упруго-мгновенной задачи.
2. Изменение возрастов τ_1 и τ_2 больше влияет на распределение контактного напряжения в молодом возрасте, т.е. при малых значениях τ_1 и τ_2.
3. При условии $\tau_1 < \tau_2$ $\left(\tau_1 > \tau_2\right)$ и по мере возрастания возраста полосы τ_2 контактные напряжения вблизи точки $\xi = -1$ во времени возрастают (убывают), а в достаточно вблизи точки $\xi = 1$ убывают (возрастают) и везде стремятся к некоторому предельному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел //Изв.АН СССР. МТТ.1976. №3с.153-164
2. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б Теория ползучести неоднородных тел.М.: Наука,1983.336с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.И. Таблицы интегралов, сумм, и произведений. М.: Физматлит, 1972. 1100с.
4. Давтян З.А., Мхитарян С.М. О двух контактных задачах кручения цилиндров при помощи цилиндрических оболочек с учетом их вязкоупругих свойств. // Изв. АН Арм. ССР. Механика.. 1984. №3. С. 3-7.
5. Мирзоян С.Е., Мхитарян С.М К задаче контактного взаимодействия между тонкостенным включением конечной длины и плоскостью, находящимся в условиях ползучести. // ДАН Арм. ССР. 1983. Т. 76. №4. С. 177-177.

Сведения об авторах:

Мирзоян Саак Езникович
К.ф-м.н., с. н. с. Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
Тел: (+37410) 568188, E-mail: mechins@sci.am

Акопян Вазгануш Велихановна
К.ф-м.н., н. с. Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
Тел: (+37410) 568188,E-mail: mechins@sci.am

Мирзоян Езник Саакович
К.ф-м.н., Ереванский госуниверситет, E-mail: mirzoyan@ysu.am

СЛОЖНОПРОСТРАНСТВЕННЫЕ УЗК В ПРОЦЕССАХ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРЕССОВАНИЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

Михайлов А.Н., Артунян А.В., Григорян Г.Р., Христафорян Э.С., Гаспарян П.Ю.

Донецк,Украин;Ереван, Армения;Омск, Россия; Степанакерт, НКР

Рассмотрено влияние УЗК, как дополнительной подпитки энергией системы прессования, на эффективность заполнения закрытого объема при пластическом деформировании матриалов. Показано, что степень заполнения материалом закрытого объема повышается.

Ограниченный объем для случая пластического деформирования предполагает случай, когда деформируемый материал должен в итоге деформирования заполнить предоставленное ему ограниченное пространство. Степень и качество заполнения определяет итог технологического приема. Повышение возможностей и эффективности заполнения объема при пластическом деформировании подразумевает расширение возможностей в проектировании изделий сложных конфигураций и их изготовления, что безусловно нужно для изделий современной техники, в том числе специального назначения.

Известно, что наложение УЗК на внедряемые инденторы при вдавливании или царапаньи по известным методикам испытаний материалов на показатели набора свойств, приводит к явному изменению показателей испытуемых материалов, т.е. меняются известные показатели, что, с позиций изменения механики и кинематики схемы нагружения ввиду присутствия переменной “быстрой” силы, нашло объяснение исследователями [1,2, 4]. Эти итоги были получены при испытаниях, когда УЗК накладывались на индентор по схемам: на лезвие шабера, по оси действия статической нагрузки; при царапаньи, по оси индентора, или на испытуемый образец в направление царапанья; на шабер в направлении резания. Такие испытания не в состоянии ответить на вопрос – каковы эти показатели при испытаниях в случае наложения на схему испытаний сложного пространства УЗК- осевых индентора и крутильных образца? Если в ряде технологий можно использовать УЗК одного направления, то с позиции осуществления вибротехнологий с применением сложных схем наложения УЗК более удобно прессование в закрытом объеме. Для исследования этого вопроса были спроектированы и изготовлены специальные акустические системы (рис. 1,2) и подготовлены образцы, устанавливаемые в гнездо крутильно-радиальной акустической системы.

Исследовано влияние интенсивности энергоподпитки области формообразования энергией УЗК, вводимых в область деформирования по различным схемам, на показатель глубины внедрения индентора, с учетом схемы подвода энергии. Отметим, что удельное статическое давление сохранялось неизменным, причем необъязательно достаточным для заполнения закрытого объ-

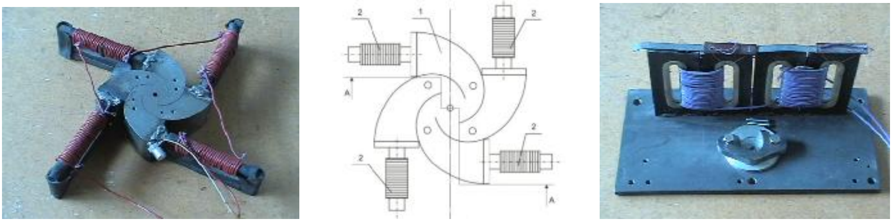


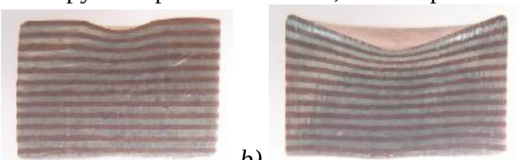
Рис.1. Системы для осуществления сложных схем наложения УЗК слева крутильно-радиальные УЗК /изделие и схема/, справа осевые УЗК пуансона

Рис.2 Установка для осуществления одновременных осевых пуансона и крутильно-радиальных матрицы УЗК

ема в итоге деформирования, т.к., во первых, ставилась задача оценки эффекта от наложения на процесс прессования УЗК в том числе сложнопространственных. Учтем, что при наложении на процессы УЗК их амплитуда - $A_{УЗК}$ при данной частоте УЗК является характеристикой энергетических и иных изменений в процессе, являющихся основой для повышения его эффективности процесса [3].

На итог пластического деформирования влияют схема подвода и количество подводимой УЗ и энергии. Лучшие резуль-таты отмечаются для $A_{УЗК}$, близких к максимально принятой для диапазона параметров, и схемы наложения УЗК – крутильно-радиальные совместно с осевыми [3], но заметим, что в ряде случаев лучший результат наблюдался и при средних величинах $A_{УЗК}$. Исследования процессов пластического дефор-мирования на слоистых образцах показали (рис.3), что при внедрении конуса с углом 120^0 в тело образца явно прослеживается зависимость глубины внед-рения от схемы наложения УЗК. Лучшие условия для пластического течения материала отмечено в случае наложения на процесс УЗК больших $A_{УЗК}$, кру-тильно-радиальных матрицы и осевых пуансона. При этом объем, заполнения свободного пространства максимален, т.е. при этом эффективность воздей-ствия переменно-периодических напряжений, обусловленных приведением в объем деформирования ”быстрых” сил, проявляется сильнее.

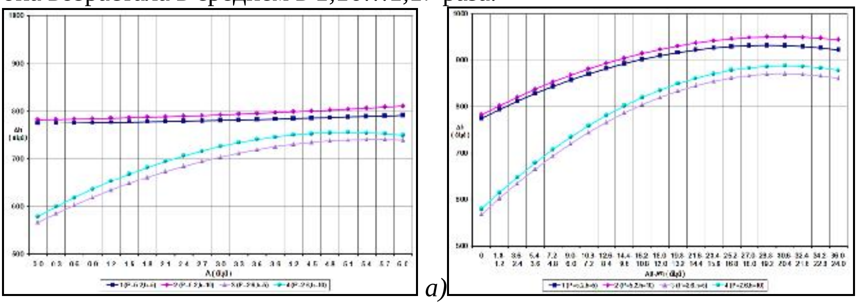
Анализ фотографий слоистых деформированных образцов, т.е. слоев, приобретающих характер сложных, сужающихся конфигураций (рис.3) показал, что характер сужения и их размеры у стенки матрицы отмечают реальность улучшения условий в контакте, т.е. сила трения на стенке матрицы при осевых или радиально-крутильных УЗК матрицы явно меньше, чем тогда, когда деформирование проведено лишь осевыми УЗК пуансона. Углы сходимости стенок трубки при этом больше, т.е. сопротивление трения на стенке трубки выше. При этом нет сомнения в том, что лучшие результаты будут наблюдаться в случае, если на матрицу удастся наложить одновременно осевые и крутильно-радиальные УЗК.



a) b)

Рис.3 Глубина внедрения конуса в тело слоистого образца при УЗК: a - осевых пуансона, b – крутильно-радиальных матрицы и осевых пуансона

Исследования показали, что в исследованном диапазоне изменений входных параметров процесса деформирования, влияние $A_{УЗК}$ и схемы её наложения на глубину внедрения конуса в образец проявляется однозначно подтверждая ожидания в вопросе повышения эффективности пластического деформирования в пространстве УЗК (рис.4 (Ag 999,9 пробы)). Так, при внедрении со статическим нагружением 5,2 кН наложение крутильно-радиальных УЗК матрицы и осевых пуансона при $A_{УЗК}$ соответственно 36 мкм и 24 мкм глубина внедрения в зависимости от высоты образца составила 922…944 мкм, при обычном внедрении она меньше и составляет 774…782 мкм, т.е. выросла в в 1,2 раза, а при наложении осевых УЗК матрицы 6 мкм и пуансона при 24 мкм она составила 902…917 мкм, т.е. по сравнению с традиционным внедрением она возрастала в среднем в 1,16…1,17 раза.



a) b)

Рис.4. Зависимости глубины внедрения индентора от амплитуды УЗК: a - осевых пуансона, b - крутильно-радиальных матрицы и осевых пуансона

Четко выявить степень влияния УЗК на внутреннее и внешнее трение, задача сложная, но заметим, что доля изменений в свойствах материалов ввиду их нагрева при релаксации УЗК не отмечена, т.к. в опытах не был даже случай разогрева до 50^0С, т.е. основная доля подводимой дополнительной энергии расходуется на преодоление внешнего и внутреннего трения.

Измерении (рис. 6) и фотографии (рис.5 (Ag 999,9-медь М1)) показали, что глубина отмеченного параметра растет, причем менее всего при деформирования только с осевыми УЗК пуансона, тогда как при наложении УЗК на матрицу по сложным схемам изменения глубины внедрения клина в брикет значимы и мало отличаются друг от друга. Видимо, при наложении осевых УЗК матрицы, на фоне меньшего эффекта повышения деформируемости материала в сравнении с крутильно-радиальными, здесь интенсивнее снижается коэффициент внешнего трения со стенкой матрицы. При наложения крутильно-радиальных УЗК - наоборот: пластическая деформируемость материала выше, снижение сопротивления внешнего трения на поверхности матрицы меньше и эффект аналогичен случаю наложения осевых УЗК на матрицу. В опытах проверялась зависимость глубины внедрения в образец конуса от статической нагрузки при разных схемах наложения УЗК. Отметим, схема наложения УЗ явно влияет на итог деформирования. Измерения (рис.6 (Ag 999,9)) показали, что от статической нагрузки величина отмеченных параметров возрастает и менее всего при наложении осевых УЗК пуансона. При наложении УЗК сложными схемами изменения глубины внедрения конуса существенны и мало отличаются друг от друга. При наложении осевых УЗК пуансона со статическими нагрузками, с ростом нагрузки, колебания пуансона демпфируются, а при наложении крутильно-радиальных и осевых УЗК матрицы воздействие релаксации незначительно. Отмечено, что эффективность применения УЗК принятых схем при деформировании высокая при малых статических нагрузках (рис.6). Так, при обычном внедрении конуса со статической нагрузкой 5,2 кН глубина внедрения в зависимости от начальной высоты образца составляет в среднем 778 мкм, при наложении осевых УЗК пуансона в зависимости от высоты образца и $A_{УЗК}$ в среднем 813…843 мкм, т.е. растет в среднем в 1,06 раза, а при наложении крутильно-радиальных УЗК матрицы и осевых УЗК пуансона в среднем 910…944 мкм, т.е. растет до1,21 раза.

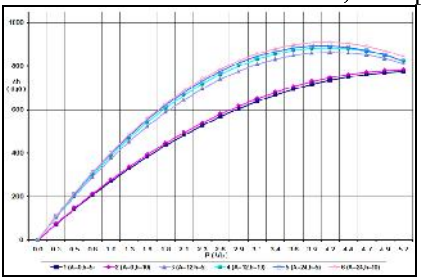

a)

b)

c)

Рис.5 Глубины внедрения конического индентора от статической нагрузки величиной 5,2 кН при применении УЗК: a - осевых пуансона, b - осевых пуансона и матрицы, c - крутильно-радиальных матрицы и осевые пуансона

При традиционном внедрении конуса со статической нагрузкой 2,6 кН глубина внедрения в зависимости от начальной высоты образца составляет в среднем 567…580 мкм, при наложении на пуансон осевых УЗК в зависимости от начальной высоты образца и $A_{УЗК}$ - в среднем 740…787 мкм,т.е. растет в среднем в 1,31…1,36 раза, а при наложении крутильно-радиальных УЗК матрицы и осевых УЗК пуансона - в среднем 820…879 мкм, т.е. растет в среднем в 1,5 раза. Отметим, что лучшие значения наблюдались, в зависимости от материала, в пределах нагружения 3,7…4,5 кН, что обусловлено демпфированием УЗК в направлении действия статической нагрузки, когда глубина внедрения составляла 864…1016 мкм, т.е. при высоких статических нагрузках прес-


a)

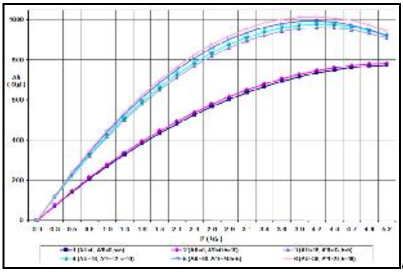

b)

Рис.6. Зависимости глубиныУЗ внедрения индентора от статической нагрузки при: a - осевых пуансона, b - крутильно-радиальных матрицы и осевых пуансона

сования нужны мощные УЗ системы, для которых демпфирование амплитуды УЗК под действием статической нагрузки будет малым. Определение эффективных характеристик материала и определения их моделей здесь не ставилась. Достаточно было явно наблюдать за их изменениями для материалов ввиду приложения сложных схем УЗК. Приведенный фотодокументальный материал является базой для проведения исследований прессуемости монолитных и слоистых материалов в ограниченном объеме для определения условий возможно максимального заполнения предоставленного объема.

Анализ итогов исследований влияния сложнопространственно схем наложения УЗК на процесс прессования монолитных и порошковых материалов в закрытом объеме показал, что исследования позволяют утверждать, что применение более схем подвода энергии и приведения “быстрых” сил в область структурирования материала деформированием допускает еще большее повышения эффективности процессов прессования в закрытом объеме. То есть перспективно проводить разработки нужных акустических систем и дальнейшие исследования процессов прессования. Установлено, что применение сложных схем подвода энергии в область структурирования целесообразно при изготовлении малогабаритных изделий со сложной пространственной конфигурацией, сфера применения которых непрерывно растает в связи с тенденцией миниатюризации средств специальной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марков А.И. Испытание внедрения и царапания при ультразвуковых колебаниях индентора. -В сб.: Склерометрия. –М.: Наука, 1968. с.183-192.

2. Христафорян С.Ш. Повышение эффективности точения труднообрабатываемых материалов использованием УЗК. Автореф. на соиск. уч. ст. докт. техн. наук: – Ереван, 1996.

3. Артунян А.В. Повышение эффективности процессов пластического деформирования применением УЗК. // Дисс. на соис. уч. ст. к.т.н., – Ереван, 2008.

4. Христафорян Э.С. Повышение эффективности процесса шабрения использованием УЗК. // Дисс. на соис уч. ст. к.т.н., Ереван, – 2000.

Сведения об авторах:

Михайлов Александр Николаевич – Председатель международного союза машиностроителей UJMB, Украина, Донецк. Донецкий национальный технический университет – ДонНТУ, зав.каф. Технология машиностроения, Руководитель научного центра,профессор, доктор технических наук.

Артунян Армен Вагеевич – доцент кафедры АиКММ ГИУА, доцент,канд.наук, член IUMB, тел. 23-54-65, E-mail: artunyan73@yahoo.com.

Григорян Гагик Рафаелович – исполнительный директор Росгосстрах–Армения, инженер, соискатель, член IUMB.

Христафорян Эрнест Степанович – технический директор AVA (Омск) Россия, канд.техн.наук, член IUMB.

Гаспарян Павлик Ярикович – ст.преп. АГУ, Степанакерт, канд.техн. наук.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ РАМНЫХ СИСТЕМ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ[1]

Мищенко А. В. , Немировский Ю. В

Новосибирск, Россия

Многие конструкционные материалы, такие как бетоны, древесина, пластмассы, некоторые металлические сплавы и другие, в исходном или модифицированном состоянии характеризуются нелинейностью деформирования в сочетании с разносопротивляемостью при растяжении и сжатии. Основная позиция, на которой базируется разрабатываемая расчетная модель, основана на гипотезе разномодульности деформирования материалов. При этом реальные нелинейные диаграммы $\sigma - \varepsilon$ на ограниченных расчетных участках представляются линейными законами в пределах одного знака деформации. Указанная аппроксимация при сравнительно малой трудоемкости хорошо описывает деформирование конструкционных материалов в ограниченном диапазоне. Подобный подход широко применяется в задачах статического деформирования однородных конструкций [1], известен в некоторых работах, посвященных динамике однородных стержней и пластин [2]. Однако, для задач динамического деформирования неоднородных конструкций такие расчетные модели не использовались.

1. **Соотношения для слоистого стержня**. В местной системе координат xyz, связанной с s-слойным стержнем, ось x совмещена с продольной геометрической осью стержня, а y расположена в плоскости изгиба, являющейся одновременно и плоскостью симметрии стержня. Однородный материал k-го слоя характеризуется: объемной плотностью ρ_k, модулями упругости E_k^+, E_k^- при растяжении и сжатии, коэффициентами вязкости η_k^+, η_k^- при положительной и отрицательной скорости деформации. В нормальном к оси x сечении слои имеют переменные размеры: ширину $b_k(x, y)$ в направлении оси z и высоту $h_k(x)$ – в направлении y. Основные соотношения построим на основе гипотез Бернулли-Эйлера и закона вязко-упругого разномодульного деформирования. В момент времени t для перемещений точек оси u, v, углов поворота θ, деформаций ε_x, ε_y и сдвигов γ_{yx} запишем

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ, номер проекта 2.1.2/4822

$$\varepsilon_x(x,y,t)=\varepsilon_0(x,t)-\kappa(x,t)y\,,\quad \varepsilon_y(x,y,t)=0\,,\quad \gamma_{yx}(x,y,t)=0\,, \tag{1}$$
$$\varepsilon_0(x,t)=u'(x,t)\,,\quad \kappa(x,t)=\theta'(x,t)\,,\quad \theta(x,t)=v'(x,t)\,,$$
$$\sigma_x^{(k)}(x,y,t)=E_k^{\pm}\varepsilon_x(x,y,t)+\eta_k^{\pm}\dot{\varepsilon}_x(x,y,t)\,, \tag{2}$$
где ε_0, κ – деформация и кривизна оси стержня; штрихом обозначено дифференцирование по координате x, а точкой – по времени.

Уравнения движения гибкого стержня для интегральных силовых факторов $N(x,t)$, $Q(x,t)$, $M(x,t)$ при воздействии динамических нагрузок $q_x(x,t)$, $q_y(x,t)$, $m_z(x,t)$ с учетом гипотез (1) принимают вид
$$N'+q_x=m_A\ddot{u}-m_S\ddot{\theta}\,,\quad Q'-(N\theta)'-q_y=-m_A\ddot{v}\,,\quad M'-Q-m_z=m_I\ddot{\theta}-m_S\ddot{u}\,, \tag{3}$$
а нелинейные физические соотношения, записанные на основе (2), –
$$\begin{cases} D_A\varepsilon_0-D_S\kappa+V_A\dot{\varepsilon}_0-V_S\dot{\kappa}=N, \\ -D_S\varepsilon_0+D_I\kappa-V_S\dot{\varepsilon}_0+V_I\dot{\kappa}=M. \end{cases} \tag{4}$$
В (3), (4) применены три группы интегральных характеристик слоистого стержня: массовые $m_\Omega(x)$, жесткостные $D_\Omega(x,\varepsilon)$ и вязкостные $V_\Omega(x,\dot{\varepsilon})$ ($\Omega\in[A,S,I]$), заданные выражениями
$$\left[m_A,m_S,m_I\right](x)=\sum_{k=1}^{s}\rho_k\iint_{A_k}[1,y,y^2]dA\,,$$
$$\left[D_A,D_S,D_I\right](x,\varepsilon)=\sum_k E_k^{\pm}\iint_{A_k}[1,y,y^2]dA\,, \tag{5}$$
$$\left[V_A,V_S,V_I\right](x,\dot{\varepsilon})=\sum_k \eta_k^{\pm}\iint_{A_k}[1,y,y^2]dA\,, \tag{6}$$
где A_k – площадь поперечного сечения k-го слоя.

При вычислении сумм в (5) и (6) с целью идентификации физических констант разносопротивляющихся материалов используется информация о знаках деформации и скорости деформации по пространству стержня и времени. В случае смены знака деформации (или ее скорости) в пределах поперечного сечения исходное число слагаемых в (5) или соответственно в (6) увеличивается на единицу.

Объединив (3), (4), получим систему двух дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно искомых перемещений
$$\begin{cases} (D_Au'-D_Sv''+V_A\dot{u}'-V_S\dot{v}'')'-m_A\ddot{u}+m_S\ddot{v}'=-q_x(x,t), \\ (D_Iv''-D_Su'+V_I\dot{v}''-V_S\dot{u}')''+m_A\ddot{v}-(m_I\ddot{v}'-m_S\ddot{u})'= \\ \qquad\qquad =m_z'(x,t)+q_y(x,t) \end{cases} \tag{7}$$

при удовлетворении соответствующих начальных и граничных условий.

2. Соотношения для слоисто-неоднородной рамной системы. Плоская рама произвольной структуры содержит n описанных выше слоисто-неоднородных стержней из разносопротивляющихся материалов, соединенных между собой в m жестких или шарнирных узлах. Сформируем следующие векторы: $\mathrm{F}(t)$ и $\mathrm{W}(t)$ – узловых динамических нагрузок и перемещений в глобальной системе *XYZ*, $\mathrm{S}(t)$ и $\mathrm{L}(t)$ – обобщенных концевых усилий и деформаций стержней рамы (*b* - *begin*, *e* – *end*)

$$\mathrm{F}(t)=\left[\mathrm{F}_1 \;\ldots \mathrm{F}_i \ldots \mathrm{F}_m\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{F}_i(t)=\left[F_X \;\; F_Y \;\; m\right]_i^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{W}(t)=\left[\mathrm{w}_1 \;\ldots \mathrm{w}_i \ldots \mathrm{w}_m\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{w}_i(t)=\left[w_X \;\; w_Y \;\; w_\varphi\right]_i^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{S}(t)=\left[\mathrm{S}_1 \;\ldots \mathrm{S}_j \ldots \mathrm{S}_n\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{S}_j(t)=\left[N\, M_b\, M_e\right]_j^{\mathrm{T}},$$

$$\mathrm{L}(t)=\left[\mathrm{L}_1 \;\ldots \mathrm{L}_j \ldots \mathrm{L}_n\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{L}_j(t)=\left[\Delta l \;\; \theta_b \;\; \theta_e\right]_j^{\mathrm{T}}.$$

Условия динамического равновесия рамной системы при учете больших перемещений и углов поворота представим в виде

$$\mathrm{A}_S(\mathrm{W})\mathrm{S}(t)+\mathrm{F}(t)+\mathrm{F}_d(t)=0, \tag{8}$$

где $\mathrm{F}_d(t)$ – вектор узловых инерционных нагрузок; $\mathrm{A}_S(\mathrm{W})$ – зависящая от перемещений $\mathrm{W}(t)$ матрица преобразования силового базиса $\mathrm{S}\rightarrow\mathrm{F}$ – формируется из матриц преобразования для отдельных гибких стержней

$$\mathrm{a}_{s,j}(\alpha_j)=\begin{bmatrix}\mathrm{a}_s^b\\ \hline \mathrm{a}_s^e\end{bmatrix}_j=\left[\begin{array}{c|c|c} c-\alpha s & -(s+\alpha c)/l & (s+\alpha c)/l \\ \hline s+\alpha c & (c-\alpha s)/l & -(c-\alpha s)/l \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -c+\alpha s & (s+\alpha c)/l & -(s+\alpha c)/l \\ \hline -s-\alpha c & -(c-\alpha s)/l & (c-\alpha s)/l \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]_j \tag{9}$$

$j=1,...,n$, $c=\cos\varphi$, $s=\sin\varphi$, $\alpha_j(t)=(v_e-v_b)/l$, φ – исходный угол, образованный осью стержня с осью X общей системы координат; α – угол поворота хорды, стягивающей концы стержня в деформированном состоянии; v_b, v_e - поперечные перемещения начала и конца стержня.

Для определения вектора инерционных нагрузок $\mathrm{F}_d(t)$ рассмотрим отдельный стержень с шестью степенями свободы по направлению обобщенных концевых перемещений

$$\mathrm{W}_{xy}(t)=[w_i(t)]=[u_b\; v_b\; \theta_b\; u_e\; v_e\; \theta_e]^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

Функции динамических поперечных и продольных перемещений аппроксимируем разложениями

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{6} f_{vi}(x)w_i(t)\,,\quad u(x,t)=\sum_{i=1}^{6} f_{ui}(x)w_i(t)\,, \tag{11}$$

в которых координатные функции отражают формы перемещений в шести базисных состояниях (10). Примем в качестве них статические перемещения в однородном стержне постоянного сечения от единичных концевых смещений $w_i=1$ ($i=1,\ldots,6$). Для шести из них получим

$$f_{u1}=1-\bar{x}\,,\quad f_{u4}=\bar{x}\,,\quad \bar{x}=x/l\,,$$

$$f_{v2}=1-3\bar{x}^2+2\bar{x}^3\,,\qquad f_{v3}=l\bar{x}(1-2\bar{x}+\bar{x}^2)\,,$$

$$f_{v5}=\bar{x}^2(3-2\bar{x})\,,\qquad f_{v6}=l\bar{x}^2(\bar{x}-1)\,.$$

Остальные шесть функций, отражающие связанность продольных и поперечных перемещений, получим на основе первого уравнения (7), которое в статике дает $(D_A u')'=(D_S v'')'$. Полагая жесткости постоянными, получим

$$f_{ui}=\frac{D_S^0}{D_A^0} f'_{vi}+c_{u1}x+c_{u0}\,,\quad f_{vi}=\frac{D_A^0}{D_S^0}\int f_{ui}\,dx+c_{v2}x^2+c_{v1}x+c_{v0}\,, \tag{12}$$

$$D_\Omega^{(0)}=l^{-1}\int_l D_\Omega(x)\,dx\,,\quad \Omega\in\left[A,S\right].$$

Для 1 и 4 состояний на основе второго выражения (12) при удовлетворении граничных условий $v(0)=v(l)=0$, $v'(0)=v'(l)=0$ имеем $f_{v1}=0$, $f_{v4}=0$. Для 2, 3, 5, 6 состояний при условиях $u(0)=u(l)=0$ получим функции продольных перемещений

$$f_{u2}=-f_{u5}=\frac{6D_S^0}{lD_A^0}\phi(x)\,,\quad f_{u3}=f_{u6}=\frac{3D_S^0}{D_A^0}\phi(x)\,,\ \ \phi(x)=\bar{x}\left(\bar{x}-1\right).$$

Аналогичные выкладки могут быть проделаны для стержней с другими граничными условиями.

Пусть в промежуточных сечениях $x=x_k$ стержень несет нецентрированные сосредоточенные массы. Применив принцип Лагранжа, для обобщенной концевой силы инерции, соответствующей j-й компоненте вектора (10), получим

$$J_j^{xy}(t)=\int_l q_x^{(d)} f_{uj}dx+\int_l q_y^{(d)} f_{vj}dx+\int_l m_z^{(d)} f'_{vj}dx+$$

$$+\sum_k\left[F_{x,k} f_{uj}(x_k)+F_{y,k} f_{vj}(x_k)+M_{z,k} f'_{vj}(x_k)\right].$$

Подставляя сюда распределенные и сосредоточенные инерционные нагрузки

$$q_x^{(d)}(x,t)=-m_A\ddot{u}+m_S\ddot{v}'\,,\quad q_y^{(d)}(x,t)=m_A\ddot{v}\,,\quad m_z^{(d)}(x,t)=-m_I\ddot{v}'+m_S\ddot{u}\,,$$

$$F_{x,k}(t) = -M\ddot{u}(x_k) + S_x\ddot{v}'(x_k)\,,\quad F_{y,k}(t) = -M\ddot{v}(x_k) - S_y\ddot{v}'(x_k)\,,$$
$$M_{z,k}(t) = S_x\ddot{u}(x_k) + S_y\ddot{v}(x_k) + J_r\ddot{v}'(x_k)\,,$$
$$[M, S_x, S_y, J_r] = \iiint\limits_V [1, y, x, (x^2 + y^2)]dm$$

с учетом (11) имеем вектор обобщенных сил инерции слоистого стержня в локальной системе координат

$$\mathrm{J}_{xy}(t) = -\mathrm{M}_{xy}\ddot{\mathrm{W}}_{xy}(t)\,. \qquad (13)$$

Компоненты матрицы обобщенных масс стержня M_{xy} в (13) определяются выражениями

$$\{\mathrm{M}_{xy}\}_{ij} = \int\limits_l \left(m_A f_{uj} - m_S f'_{vj}\right) f_{ui}dx + \int\limits_l m_A f_{vj} f_{vi}dx + \int\limits_l \left(m_S f_{uj} - m_I f'_{vj}\right) f'_{vi}dx +$$
$$+\sum_k \Big[-\mathrm{M}_k \left(f^k_{ui} f^k_{uj} + f^k_{vi} f^k_{vj}\right) + S_{xk}\left(f'^k_{vi} f^k_{uj} + f^k_{ui} f'^k_{vj}\right) +$$
$$+S_{yk}\left(f^k_{vi} f'^k_{vj} - f'^k_{vi} f^k_{vj}\right) + J_k f'^k_{vi} f'^k_{vj}\Big], \qquad f^k_i = f_i(x_k).$$

После учета инерционных факторов (13) и выполнения преобразования $\mathrm{J}_{xy} \to \mathrm{F}_d$, матричные уравнения движения (8) принимают вид

$$\mathrm{A}_S(\mathrm{W})\mathrm{S}(t) + \mathrm{F}(t) = \mathrm{M}_W\ddot{\mathrm{W}}(t)\,, \qquad (14)$$

где M_W – инерционная матрица рамы, сформированная из матриц масс стержней $\mathrm{M}_{W,j} = \mathrm{C}_j\mathrm{M}_{xy}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}_j$ ($j = 1,...,n$) в общей системе координат; C_j – матрица преобразования базиса j-го стержня; $\ddot{\mathrm{W}}(t)$ – вектор узловых ускорений.

Условия связи перемещений и обобщенных деформаций запишем в виде

$$\mathrm{A}_W(\mathrm{W})\,\mathrm{W}(t) + \mathrm{L}(t) = 0\,, \qquad (15)$$

где матрица $\mathrm{A}_W(\mathrm{W})$ с функциональными компонентами, зависящими от перемещений, сформирована из матриц преобразования базисов перемещений $\mathrm{W} \to \mathrm{L}$ для отдельных гибких элементов

$$\mathrm{a}_{W,j}(\alpha_j) = \left[\mathrm{a}^b_W \;\middle|\; \mathrm{a}^e_W\right]_j =$$
$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} c - \alpha s/2 & s + \alpha c/2 & 0 & -c + \alpha s/2 & -s - \alpha c/2 & 0 \\ \hline -(s + \alpha c)/l & (c - \alpha s)/l & 1 & (s + \alpha c)/l & -(c - \alpha s)/l & 0 \\ \hline (s + \alpha c)/l & -(c - \alpha s)/l & 0 & -(s + \alpha c)/l & (c - \alpha s)/l & -1 \end{array}\right]_j \qquad (16)$$

$c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$, $\alpha_j(t) = (v_e - v_b)/l$. При $\alpha = 0$ из (16) получим матрицу линейного преобразования перемещений с выполнением условия $\mathrm{A}_W = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}_S$.

Физическое равенство представим на основе (2) в виде

$$\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{W})\,\mathrm{L}(t)+\mathrm{B}_V^{-1}(\mathrm{W})\,\dot{\mathrm{L}}(t)=\mathrm{S}(t) \tag{17}$$

с использованием матриц податливости $\mathrm{B}(\mathrm{W})=\mathrm{diag}[\mathrm{B}_1...\mathrm{B}_n]$ по направлению обобщенных деформаций $\mathrm{L}(t)$ и вязкого течения $\mathrm{B}_V(\dot{\mathrm{W}})=\mathrm{diag}[\mathrm{B}_{V1}...\mathrm{B}_{Vn}]$ по направлению скоростей $\dot{\mathrm{L}}(t)$. Для j-го гибкого слоистого стержня из разномодульных материалов компоненты $\xi_{ij}(t)$ этих матриц представлены через характеристики жесткости (5) и вязкости (6) формулами

$$\xi_{11}=\int_l \frac{\Omega_I+v_h\Omega_S}{\Omega}dx\,,\quad \xi_{12}=\int_l \frac{(1-\overline{x})\Omega_S+\theta_h\Omega_I}{\Omega}dx\,,$$

$$\xi_{13}=\int_l \frac{\overline{x}\Omega_S-\theta_h\Omega_I}{\Omega}dx\,,\quad \xi_{21}=\int_l \frac{(1-\overline{x})\Omega_S+v_h\Omega_A}{\Omega}dx\,, \tag{18}$$

$$\xi_{22}=\int_l (1-\overline{x})\frac{(1-\overline{x})\Omega_A+\theta_h\Omega_S/l}{\Omega}dx\,,\quad \xi_{23}=\int_l (1-\overline{x})\frac{\overline{x}\Omega_A-\theta_h\Omega_S/l}{\Omega}dx\,,$$

$$\xi_{31}=\int_l \overline{x}\frac{\Omega_S+v_h\Omega_A}{\Omega}dx\,,\quad \xi_{32}=\int_l \overline{x}\frac{(1-\overline{x})\Omega_A+\theta_h\Omega_S/l}{\Omega}dx\,,$$

$$\xi_{33}=\int_l \overline{x}\frac{\overline{x}\Omega_A-\theta_h\Omega_S/l}{\Omega}dx\,,\quad \Omega(x)=\Omega_A\Omega_I-\Omega_S^2\,,\quad \Omega\in[D,V]\,.$$

При вычислении компонент матриц податливости следует в (18) положить $\Omega=D(\varepsilon,x)$ (5), а для матриц вязкого течения – $\Omega=V(\dot{\varepsilon},x)$ (6). В выражениях (18) использованы прогибы и углы поворота относительно хорды «*b-e*»

$$v_h(x,t)=v(x,t)-v_b(t)(1-\overline{x})-v_e(t)\overline{x},$$
$$\theta_h(x,t)=\theta(x,t)-[v_e(t)-v_b(t)]/l.$$

Матричные равенства (14), (15), (17) образуют замкнутую систему уравнений для динамического расчета рамной системы в геометрически и физически нелинейной постановке. Окончательно представим ее в обычной форме метода перемещений

$$\mathrm{M}_W\ddot{\mathrm{W}}(t)+\mathrm{R}_V\dot{\mathrm{W}}(t)+\mathrm{R}_W\mathrm{W}(t)=\mathrm{F}(t)\,, \tag{19}$$

с переменными матрицами: жесткости R_W, демпфирования R_V:

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_W(\mathrm{W})&=\mathrm{A}_S(\mathrm{W})[\mathrm{B}(\mathrm{W})]^{-1}\mathrm{A}_W(\mathrm{W}),\\ \mathrm{R}_V(\mathrm{W})&=\mathrm{A}_S(\mathrm{W})[\mathrm{B}_V(\dot{\mathrm{W}})]^{-1}\mathrm{A}_W(\mathrm{W}).\end{aligned} \tag{20}$$

Вектор искомого решения $\mathrm{W}(t)$ подчиним начальным условиям

$$\mathrm{W}(0)=0\,,\quad \dot{\mathrm{W}}(0)=0\,. \tag{21}$$

3. Построение численного решения. Решение нелинейной начальной задачи (19), (21) построим на основе шаговой процедуры по временной координате $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ ($i = 0,1,..$). Аналогично методам Ньюмарка и Вильсона [3] в пределах малого шага принимаем линейность ускорения между узловыми значениями $\ddot{\mathrm{W}}_i$, $\ddot{\mathrm{W}}_{i+1}$. Тогда для скоростей и перемещений в момент времени t_{i+1} получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{W}}_{i+1} &= \dot{\mathrm{W}}_i + \ddot{\mathrm{W}}_i \Delta t / 2 + \ddot{\mathrm{W}}_{i+1} \Delta t / 2, \\ \mathrm{W}_{i+1} &= \mathrm{W}_i + \dot{\mathrm{W}}_i \Delta t + \ddot{\mathrm{W}}_i \Delta t^2 / 3 + \ddot{\mathrm{W}}_{i+1} \Delta t^2 / 6 \end{aligned} \qquad (22)$$

а из (19) уравнение для ускорения $\ddot{\mathrm{W}}_{i+1}$

$$\tilde{\mathrm{M}}_i \ddot{\mathrm{W}}_{i+1} = \tilde{\mathrm{F}}_{i+1}, \qquad (23)$$

$$\tilde{\mathrm{M}}_i = \mathrm{M} + \Delta t \mathrm{R}_{\boldsymbol{Vi}} / 2 + \Delta t^2 \mathrm{R}_{Wi} / 6, \quad \mathrm{R}_{Vi} = \mathrm{R}_V (\dot{\mathrm{W}}_i), \quad \mathrm{R}_{Wi} = \mathrm{R}_W (\mathrm{W}_i),$$

$$\tilde{\mathrm{F}}_{i+1} = \mathrm{F}_{i+1} - \mathrm{R}_{Vi} \left[\dot{\mathrm{W}}_i + \Delta t \ddot{\mathrm{W}}_i / 2 \right] - \mathrm{R}_{Wi} \left[\mathrm{W}_i + \Delta t \dot{\mathrm{W}}_i + \Delta t^2 \ddot{\mathrm{W}}_i / 3 \right].$$

Вычисления на i-м шаге по известным векторам $\ddot{\mathrm{W}}_i$, $\dot{\mathrm{W}}_i$, W_i выполняются по следующей схеме. Через компоненты векторов W_i, $\dot{\mathrm{W}}_i$ находятся концевые перемещения $[u_b\ v_b\ \theta_b\ u_e\ v_e\ \theta_e]_{ij}$ и скорости $[\dot{u}_b\ \dot{v}_b\ \dot{\theta}_b\ \dot{u}_e\ \dot{v}_e\ \dot{\theta}_e]_{ij}$ в локальных базисах стержней рамы ($j = 1,...,n$), а затем – функции: перемещений $u_{ij}(x)$, $v_{ij}(x)$, скоростей перемещений $\dot{u}_{ij}(x)$, $\dot{v}_{ij}(x)$. Выявленная по ним картина распределения знаков деформаций $\varepsilon_{x,ij}(x, y)$ и скоростей $\dot{\varepsilon}_{x,ij}(x, y)$ позволяет идентифицировать по пространству j-го многослойного стержня физические константы разносопротивляющихся материалов $E_k^{\pm}$, $\eta_k^{\pm}$, а с их использованием – интегральные характеристики (5), (6), матрицы B_{ij}, $\mathrm{B}_{\boldsymbol{Vij}}$. При интегрировании компонент указанных матриц по формулам (20) целесообразно функциональные характеристики (5), (6) представить в дискретной форме в заданных расчетных сечениях стержней. Далее на основе (20) для рамы в целом строятся матрицы жесткости и вязкого сопротивления с использованием зависящих от перемещений статической A_{Si} (9) и геометрической A_{Wi} (16) матриц на i-м шаге. Затем с использованием (23), (22) определяются векторы $\ddot{\mathrm{W}}_{i+1}$, $\dot{\mathrm{W}}_{i+1}$, W_{i+1} для $i+1$-го шага.

Выполняя указанные этапы, выявляем последовательность динамических равновесных состояний рамы. В начальный момент времени полагаем удовлетворение условий $\mathrm{W}_0 = \dot{\mathrm{W}}_0 = \ddot{\mathrm{W}}_0 = 0$. На шаге $i = 0$ расчеты производятся для линейно деформируемой рамы.

Модель разномодульного материала по сравнению с другими физически нелинейными моделями разносопротивляющихся материалов характеризуется существенно меньшей трудоемкостью и, вместе с тем, – с хорошей достоверностью отражает основные особенности нелинейного деформирования таких материалов, как древесина, пластмассы и другие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. – М.: Наука, 1982. - 320 с.
2. Галоян А.Г., Хачатрян А.А. Поперечный изгиб балок, изготовленных из разномодульного материала // Доклады АН АрмССР, 1976. - Т. 62. 3. - с. 151-157.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; Под ред. А.Ф. Смирнова. — М.: Стройиздат, 1982. — 448 с.

Сведения об авторах:

Мищенко Андрей Викторович,
Россия, Новосибирск, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, доцент, к.т.н., e-mail: mavr@hnet.ru

Немировский Юрий Владимирович,
Россия, Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, главный научный сотрудник, д-р.физ.-мат.наук, профессор, (383) 330-38-04 (сл), nemirov@itam.nsc.ru

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО КЛИНА, СОДЕРЖАЩЕГО НА ЛИНИИ СПАЯ СИСТЕМУ ЩЕЛЕЙ И АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Мкртчян М.М., Мкртчян М.С.
Ереван, Армения

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного клина при антиплоских деформациях, одна из граней которого нагружена распределенными касательными силами, а другая грань составного клина жестко закреплена. При этом, на линии спая разнородных материалов расположены трещины и абсолютно жесткие включения. Аналогичная задача рассмотрена в [1].

1. Пусть, отнесенный к цилиндрической системе координат $r\theta z$, кусочно-однородный упругий клин состоит из двух областей $\Omega_{\alpha} = \{-\infty < z < \infty, 0 \le r \le \infty, 0 \le \theta \le \alpha\}$ с модулем сдвига G_{+} и $\Omega \ = \{-\infty < z < \infty, 0 \le r \le \infty, - \ \le \theta \le 0\}$ с модулем сдвига G_{-}, и в плоскости $\theta = 0$ содержит систему из произвольного конечного числа сквозных трещин и тонких абсолютно жестких включений, причем их следы в плоскости $r\theta$ составляют, соответственно, систему интервалов L_1 и L_2:

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \ a_k < b_k \quad (k = \overline{1, N_1}); \ b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1}),$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \ c_k < d_k \quad (k = \overline{1, N_2}); \ d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1}).$$

Пусть далее свободная грань клина нагружена распределенными каса тельными силами интенсивности $\tau_{\theta z}\big|_{\theta=\alpha} = f_{+}(r) \quad (0 < r < \infty)$, а другая грань составного клина жестко закреплена. Кроме того, берега трещин также нагружены силами с заданными интенсивностями $\tau_{\theta z}\big|_{\theta=\pm 0} = -\tau_{\pm}^{(1)}(r) \quad (r \in L_1)$, а на систему включений L_2 действуют силы с равнодействующими P_k, направленные вдоль оси Oz и вызывающие продольный сдвиг упругого клина в направлении оси Oz с базовой плоскостью $r\theta$.

Требуется определить плотность дислокаций смещений и скачков смещений на берегах трещин, скачков напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородный упругий клин вдоль оси Or разрежем на две части, а затем для действующих на их гранях $g=\pm 0$ напряжений введем следующие обозначения $\left(L' = R_+ \setminus L; R_+ = (0,\infty)\right)$:

$$
\begin{aligned}
&-2_{gz}\Big|_{g=+0} = T_+(r) = \begin{cases} 2_+^{(1)}(r) & (r\in L_1); \\ 2_+^{(2)}(r) & (r\in L_2); \\ 2(r) & (r\in L'); \end{cases} \\
&-2_{gz}\Big|_{g=-0} = T_-(r) = \begin{cases} 2_-^{(1)}(r) & (r\in L_1); \\ 2_-^{(2)}(r) & (r\in L_2); \\ 2(r) & (r\in L'). \end{cases}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

На системе включений L_2 смещения постоянны:

$$
u_z^+(r,g)\Big|_{g=+0} = u_z^-(r,g)\Big|_{g=-0} = ¢_k = \mathrm{const}; \quad r\in(c_k,d_k)\ (k=\overline{1,N_2}). \qquad (2)
$$

Запишем также граничные условия на $g=\sim$, $g=-$:

$$
2_{gZ}\Big|_{g=\sim} = G_+ \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^+}{\partial g}\Bigg|_{g=\sim} = f_+(r);\ u_z^-(r,g)\Big|_{g=-} = 0 \quad (0<r<\infty) \qquad (3)
$$

где $u_z^\pm(r,g)$ смещения точек, соответствующих клиньям $\Omega_\sim$ и Ω , которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа в полярной системе координат:

$$
\frac{\partial^2 u_z^\pm(r,g)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^\pm(r,g)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z^\pm(r,g)}{\partial g^2} = 0. \qquad (4)
$$

Далее введем в рассмотрение следующие величины:

$$
\Omega(r) = T_+(r) + T_-(r); \qquad h(r) = \frac{du_z^+(r,+0)}{dr} + \frac{du_z^-(r,-0)}{dr};
$$

$$
¡(r) = T_+(r) - T_-(r) = \begin{cases} \cdot(r) & (r\in L_2); \\ 2_+^{(1)}(r) - 2_-^{(1)}(r) & (r\in L_1); \\ 0 & (r\in L'), \end{cases} \qquad (5)
$$

а также плотность дислокаций смещений на берегах трещин:

$$w(r)=\frac{du_z^+(r,+0)}{dr}-\frac{du_z^-(r,-0)}{dr}=\begin{cases}\text{¨}(r) & (r\in L_1);\\ 0 & (r\in R_+/L_1).\end{cases} \tag{6}$$

Теперь с помощью прямого и обратного преобразования Меллина [2] по переменной r, из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) с учетом обозначений (5)-(6), придем к системе ключевых уравнений задачи относительно плотностей дислокаций на берегах трещин $w(r)$ и скачков касательных контактных напряжений $\text{¡}(r)$ на берегах включений:

$$\begin{cases}\frac{1}{®}\int\limits_{L_1}\frac{w(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{®}\int\limits_{L_1}K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)w(r_0)dr_0-\frac{G_+-G_-}{2G_+G_-}r\,\text{¡}(r)-\\ \quad-\frac{1}{®}\int\limits_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr_0-\frac{1}{®}\int\limits_{L_2}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr_0=\\ \quad=-\frac{G_++G_-}{2G_+G_-}r\Omega(r)-\frac{G_++G_-}{®G_+}\int\limits_0^\infty F_1\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)f_+(r_0)dr_0;\\ \frac{G_+-G_-}{2}rw(r)+\frac{G_+G_-}{®}\int\limits_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)w(r_0)dr_0+\frac{1}{®}\int\limits_{L_1}\frac{\text{¡}(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\\ +\frac{1}{®}\int\limits_{L_2}\frac{\text{¡}(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{®}\int\limits_{L_1}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr_0+\frac{1}{®}\int\limits_{L_2}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\text{¡}(r_0)dr_0=\\ =-\frac{G_++G_-}{2}rh(r)+\frac{G_++G_-}{®}\int\limits_0^\infty F_2\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)f_+(r_0)dr_0\quad(r\in R_+);\end{cases} \tag{7}$$

где

$$K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{G_+\text{th}(\sim s)\left[1-\text{th}(\ \ s)\right]-G_-\left[1-\text{th}(\sim s)\right]}{G_+\text{th}(\sim s)\text{th}(\ \ s)+G_-}\sin\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds;$$

$$M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int\limits_0^\infty\frac{\text{th}(\sim s)\text{th}(\ \ s)-1}{G_+\text{th}(\sim s)\text{th}(\ \ s)+G_-}\cos\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds;$$

$$Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int_0^\infty \frac{G_+\,\mathrm{th}(\ \ s)\left[1-\mathrm{th}(\sim s)\right]-G_-\left[1-\mathrm{th}(\ \ s)\right]}{G_+\,\mathrm{th}(\sim s)\,\mathrm{th}(\ \ s)+G_-}\sin\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds;$$

$$F_1\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{ch}(\sim s)[G_+\,\mathrm{th}(\sim s)\,\mathrm{th}(\ \ s)+G_-]}\cos\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds;$$

$$F_2\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{th}(\ \ s)}{\mathrm{ch}(\sim s)[G_+\,\mathrm{th}(\sim s)\,\mathrm{th}(\ \ s)+G_-]}\sin\left(s\ln\frac{r_0}{r}\right)ds.$$

Рассматривая первое уравнение системы (7) на L_1, а второе уравнение на L_2, придем к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{®}\displaystyle\int_{L_1}\frac{¨(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{®}\int_{L_1}K\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)¨(r_0)dr_0-\frac{1}{®}\int_{L_2}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\cdot(r_0)dr_0= \\ =-r\left[\dfrac{²^{(1)}_+(r)}{G_+}+\dfrac{²^{(1)}_-(r)}{G_-}\right]+\dfrac{1}{®}\displaystyle\int_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\left[²^{(1)}_+(r_0)-²^{(1)}_-(r_0)\right]dr_0- \\ \quad -\dfrac{G_++G_-}{®G_+}\displaystyle\int_0^\infty F_1\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)f_+(r_0)dr_0; \qquad (r\in L_1) \\ \dfrac{G_+G_-}{®}\displaystyle\int_{L_1}M\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)¨(r_0)dr_0+\frac{1}{®}\int_{L_2}\frac{\cdot(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}+\frac{1}{®}\int_{L_2}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\cdot(r_0)dr_0= \\ =-\dfrac{1}{®}\displaystyle\int_{L_1}\frac{\left[²^{(1)}_+(r_0)-²^{(1)}_-(r_0)\right]dr_0}{\ln r_0-\ln r}-\frac{1}{®}\int_{L_1}Q\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)\left[²^{(1)}_+(r_0)-²^{(1)}_-(r_0)\right]dr_0+ \\ \quad +\dfrac{G_++G_-}{®}\displaystyle\int_0^\infty F_2\left(\ln\frac{r_0}{r}\right)f_+(r_0)dr_0; \qquad (r\in L_2) \end{cases} \qquad (8)$$

Система (8) должна рассматриваться при условиях

$$\int_{a_k}^{b_k}¨(r)dr=0, \qquad (k=\overline{1,N_1}), \qquad (9)$$

$$\int_{c_k}^{d_k}\cdot(r)dr=P_k, \qquad (k=\overline{1,N_2}). \qquad (10)$$

Первое из них эквивалентно условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а второе представляет собой условие равновесия k -того включения:

Рассматривая первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, будем иметь:

$$\text{²}(r)=-\frac{G_+G_-}{\text{®}r(G_++G_-)}\int_{L_1}\frac{\text{¨}(r_0)dr_0}{\ln r_0-\ln r}-\frac{G_+G_-}{\text{®}r(G_++G_-)}\times$$
$$\times\int_{L_1}K(\ln\frac{r_0}{r})\text{¨}(r_0)dr_0+\frac{G_+G_-}{\text{®}r(G_++G_-)}\int_{L_1}M(\ln\frac{r_0}{r})\times$$
$$\times\left[\text{²}^1_+(r_0)-\text{²}^1_-(r_0)\right]dr_0+\frac{G_+G_-}{\text{®}r(G_++G_-)}\int_{L_2}M(\ln\frac{r_0}{r})\cdot(r_0)dr_0-\qquad(11)$$
$$-\frac{G_-}{\text{®}r}\int_0^\infty F_1(\ln\frac{r_0}{r})f_+(r_0)dr_0;\qquad(r\in L')$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии упругого клина с трещинами и абсолютно жесткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)-(10). После решения (8)-(10) разрушающее напряжение вне трещин определяется формулой (11).

2. Для решения определяющей СИУ (8)–(10) сначала переходим к новым переменным

системы (8)-(10) строится числено-аналитическом методом [3] с привлечением математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Антиплоское напряженное состояние составного анизотропного клина, содержащего трещину и абсолютно жесткое включение.//В сб.: “Современные проблемы теории контактных взаимодействий”- Ереван, Изд-во НАН РА, 1996, с. 45-50.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.- М.: АН СССР, 1963.
3. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.

<u>Сведения об авторах:</u>
Мкртчян Мгер Мушегович, мл. науч. сотрудник, Институт механики НАН РА, Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, $24^б$, ИМех. НАН
Тел: (37410)-43-16-52,
E-mail: mher_1982@mail.ru
Мкртчян Мушег Сережаевич, канд. физ.–мат.наук, ст. научный сотрудник, ИМех. НАН РА, Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, $24^б$,
Тел: 098801956, , E-mail: muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

ДВЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Мовсисян Л.А.

Ереван, Армения

Рассматриваются задачи одномерного распространения нелинейных волн (геометрическая нелинейность) и параметрических колебаний в пластине из пьезоэлектрика. В основу положена классическая теория изгиба пластин, а нелинейность учитывается на уровне теории Кармана.

1.Одномерные уравнения движения в принятых приближениях будут [1]

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\ \ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

К этой системе надо присоединять уравнения напряженности электрического поля и электрической индукции [2]

$$\mathrm{rot}\bar{E}=0\ ,\ \ \mathrm{div}\bar{D}=0 \tag{1.2}$$

В предположении, что пластинка полностью покрыта тонким металлическим слоем, для электрического потенциала можно принять [3]

$$\Phi=F\left(x,t\right)\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right),\ \ E_i=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \tag{1.3}$$

Будем изучать два вида пьезоэлектрика.

2. Для пьезоэлектрика $2mm$

$$\sigma_x=B_{11}e_x-e_1E_3\ ,\ \ D_1=\varepsilon_1E_1\ ,\ \ D_3=e_1e_x+\varepsilon_3E_3$$

статические величины

$$T=C_{11}U\ ,\ \ M=-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{2}{3}e_1hF$$
$$U=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\ ,\ \ C_{11}=hB_{11}\ ,\ \ D_{11}=\frac{h^3}{12}B_{11} \tag{2.1}$$

При этом электрический потенциал должен удовлетворять осредненному уравнению

$$\frac{2}{3}\varepsilon_1\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{8}{h^2}\varepsilon_3F+e_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{2.2}$$

Сначала рассмотрим задачу свободных колебаний такой пластинки, когда на концах заданы условия свободного опирания:

$$w=w''=F=0\quad \text{при}\ \ x=0\ и\ \ x=l \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) в (1.1), ищем решение вновь полученной системы и уравнения (2.2) в виде

$$w = f\sin\lambda x,\ u = \varphi\sin 2\lambda x,\ F = \psi\sin\lambda x,\ \lambda = \frac{\pi}{l} \tag{2.4}$$

При этом по известным причинам [1] пренебрежем продольным инерционным членом.

Тогда в окончательном виде для $f(t)$ получим

$$\begin{gathered}\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 + \mu f^3 = 0 \\ \omega_0^2 = \frac{D_{11}\lambda^4}{\rho h}\left[1 + \frac{e_1^2}{B_{11}\left(12\varepsilon_3 + \varepsilon_1 h^2\lambda^2\right)}\right],\quad \mu = \frac{B_{11}}{4\rho}\lambda^4\end{gathered} \tag{2.5}$$

Учет пьезоэлектрика увеличивает линейную собственную частоту, но характер нелинейности остается как обычно, т.е. нелинейная частота больше, чем линейная.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\mu a^2 \tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим задачу распределения волн в такой пластинке, к тому же в (1.1) оставим продольный инерционный член. Решение будем искать в виде

$$\begin{gathered}w = w_1 e^{i\tau} + \bar{w}_1 e^{-i\tau},\quad u = u_0 + u_2 e^{2i\tau} + \bar{u}_2 e^{-2i\tau} \\ F = F_1 e^{i\tau} + \bar{F}_1 e^{-i\tau},\quad \tau = kx + \omega t\end{gathered} \tag{2.7}$$

Черточками над буквами обозначены сопряженные величины, а u_0 – так называемое среднее течение.

При изучении данной системы применяется метод медленно меняющихся амплитуд [4] -

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\quad c = \frac{d\omega_0}{dk} \\ \omega_0 = hk^2\sqrt{\frac{B_{11}}{12\rho}B},\quad B = 1 + \frac{e_1^2}{12B_{11}\varepsilon_3}\end{gathered} \tag{2.8}$$

Нелинейное дисперсионное соотношение будет

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{9}{8}k^2 a^2\right),\quad a^2 = 4w_1\bar{w}_1 \tag{2.9}$$

Вот что интересно – учет продольной инерции совершенно меняет картину нелинейности [5].

3. Для второго материала $(\overline{6})$ пьезоэффект появляется уже в выражении продольного усилия, т.е.

$$T = C_{11}U + \frac{2}{3}he_1\frac{\partial F}{\partial x}\ ,\ M = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

и в связи с этим меняется выражение линейной продольной частоты.

Здесь для электрического потенциала уже будет уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{12\varepsilon_3}{h^2\varepsilon_1}F - \frac{3e_1}{2\varepsilon_1}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{3.2}$$

и решение вновь полученной системы будем искать, как и (2.7), только F в виде

$$F = F_2 e^{2i\tau} + \overline{F}_2 e^{-2i\tau} \tag{3.3}$$

Процедура получения дисперсионного уравнения такая же, как и в предыдущем случае, и в окончательном виде получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \alpha a^2 k^2\right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{D_{11}k^4}{\rho h}\ ,\ \ \alpha = \frac{9}{16}\left(1 + \frac{1}{27}\frac{e_1^2}{B_{11}\varepsilon_3}k^2h^2\right) \tag{3.4}$$

4. Для обсуждения вопроса модуляционной устойчивости следует составить нелинейное уравнение Шредингера и выяснить какую роль играет пьезоэффект (сыграет ли ?) для приведенных материалов. Такое уравнение приводится в [4] (стр.575, формула (17.65)). В нашем случае для ω_0 имеем (2.9) и (3.4). И вопрос устойчивости (неустойчивости) определяется помимо ω_0 еще и коэффициентом при кубической нелинейности в уравнении (17.65). Коэффициент этот у нас в первом случае $\beta = -\frac{9}{16}$, а во втором есть $-\frac{1}{2}\alpha$ и так как

$$\beta\omega_0'' < 0 \tag{4.1}$$

имеем неустойчивость распространения волн, т.е. пьезоэффект не нарушает условие неустойчивости. Как известно [4], при этом волновые пакеты распадаются на солитоны.

5. Задачу параметрических колебаний рассмотрим длдя первого пьезоэлектрика. В предположнеии, что на конце пластинки действует

периодическое усилие $T^0 = P_0 + P_1 \cos\theta t$, во втором уравнении (1.1) в левой части должен быть прибавлен член $T^0 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Тогда, поступая как в начале п.2 для $f(t)$, получим уравнение

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 \left(1 - 2\mu\cos\theta t\right) + \mu f^3 + 2\delta \frac{df}{dt} = 0 \tag{5.1}$$

В (5.1) присутствует член $2\delta f'$, как обычно делается [6], который характеризует в общем трение. Дело в том, что без этого члена амплитудно-частотная зависимость имеет вид двух прямых, наклоненных вправо ([1], стр.167). Добавлением такого члена амплитудно-частотная кривая получится замкнутой петлей.

В (5.1)

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_{kp}}\right), \quad 2\mu = \frac{P_1}{P_{kp} - P_0}$$
$$P_{kp} = \left(D_{11} + \frac{e_1^2 h^3}{12\varepsilon_3 + \varepsilon_1 h^2 \lambda^2}\right) \tag{5.2}$$

Как известно [1,2] и при нелинейных колебаниях условие главного параметрического резонанса сохраняется - $\theta = 2\Omega$, поэтому для определения амплитуды решение (5.1) ищется в виде

$$f = a\cos\frac{\theta t}{2} + b\sin\frac{\theta t}{2} \tag{5.3}$$

и в окончательном виде для амплитуды получится выражение

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3}}\left(\frac{\theta^2}{4\Omega^2} - 1 \pm \sqrt{\mu^2 - \frac{4\delta^2}{\Omega^2}}\right)^{1/2}, \quad A^2 = a^2 + b^2 \tag{5.4}$$

Так как и Ω и μ зависят от пьезоэффекта, то меняются как начало, так и область главных параметрических колебаний, в том числе, и значение амплитуды колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика с пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 434 с.

2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
3. Мовсисян Л.А. К модуляционной устойчивости нелинейных волн в пьезоэлектрической пластинке.// Докл. НАН Армении., 1997. Том 97. №3. С.3-7.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.:Мир, 1997.
5. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О дисперсионных уравнениях гибких пластин и цилиндрических оболочек.//Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1988. Т.41. №3. С.3-6.
6. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна 24[б]
Тел.: (+37410). 568215
E-mail: mechins@sci.am

ОБ УДАРЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПО ЗАЩЕМЛЕННОМУ УПРУГОМУ ШЕРОХОВАТОМУ СЛОЮ

Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л.А., Григорян М.С.
Ереван, Армения

В рамках теории удара Г. Герца [1] рассмотрена плоская контактная задача для упругого цилиндра, который движется поступательно и вдоль своих образующих ударяет по свободной поверхности упругого шероховатого слоя, защемленого по другой своей поверхности. В рассматриваемой плоской контактной задаче формулы, определяющие упругие перемещения граничных точек контактирующихся тел, избавлены от постоянной Фламана [2], что дает возможность решить задачу по указанной теории удара.

Предварительно рассматривая статическое сжатие этих тел, устанавливаются зависимости между шириной контактной области, мерой погруженя цилиндра в слой и равнодействующим внешних сжимающих сил. Затем, используя эти зависимости, получены асимптотические формулы, определяющие основные механические характеристики теории удара Г. Герца при малых скоростях удара.

Осесимметричная контактная задача об ударе штампа по упругому шероховатому полупространству была рассмотрена в [3].

1. Постановка задачи.

Пусть упругий цилиндр 1 радиуса R с упругими постоянными «$_1$ и ¬$_1$ (соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона) движется поступательно вниз со скоростью V_0 и в момент времени $t = 0$, вдоль своих образующих, ударяет по свободной поверхности $y = 0$ упругого слоя 2 (фиг.1), толщина которого равна h. Упругие постоянные слоя, соответственно, равны «$_2$ и ¬$_2$. Нижная поверхность слоя $y = -h$ жестко защемлена.

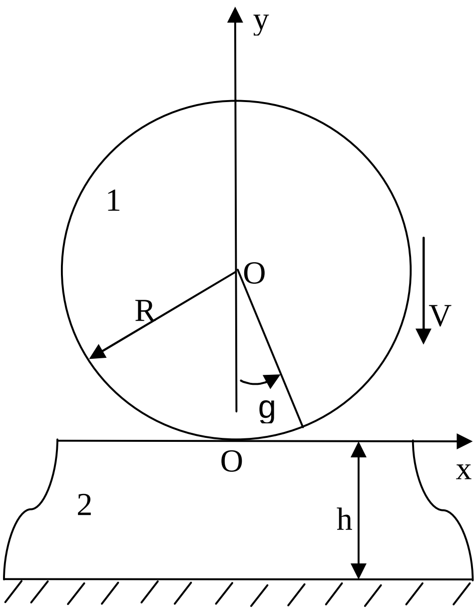
Требуется определить меру максимального погружения цилиндра ¢$_{\max}$ в слой, максимальную ширина области соприкаснонвения цилиндра со слоем, характеризующим центральным углом 2~$_{\max}$ цилиндра (фиг.2), максимальную прижимающую силу $F_{\max}$, действующую между цилиндром и слоем, а также продолжительность удара T .

Дифференциальное уравнение движения цилиндра в течение его контактирования со слоем имеет вид [1]

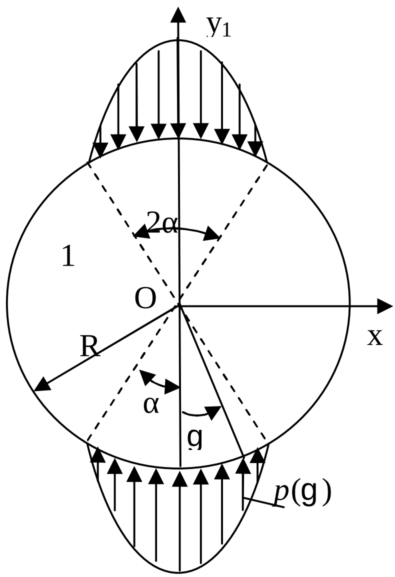
$$m\frac{d^2 ¢(t)}{dt^2} = -F(t), \quad (t > 0) \qquad (1)$$

где m – масса единичной длины цилиндра, $¢(t)$– мера погружения цилиндра в слой, а $F(t)$– равнодействующая контактных давлений, действующих на единичной длине цилиндра в текущий момент времени t. К дифференциальному уравнению (1) следует присоединить начальные условия задачи

$$¢\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{d¢}{dt}\bigg|_{t=0} = V_0 . \qquad (2)$$



Фиг.1



Фиг.2

Решение поставленной задачи в рамках теории удара Г. Герца получается в результате интегрирования дифференциального уравнения (1) при начальных условиях (2), когда в качестве зависимости между ¢ и F принимается та зависимость $F = F(¢)$, которая существует при статическом сжатии этих тел.

Для определения основных механических характеристик теории удара уравнение (1) преобразуем к виду

$$m\frac{dV}{d¢}\frac{d¢}{dt} = -F, \quad (t > 0) \tag{3}$$

где $V = d¢/dt$ – скорость цилиндра при $t \geq 0$. Далее, учитывая начальные условия (2), из (3) будем иметь

$$m\frac{V_0^{\,2}}{2} - m\frac{V^2}{2} = \int_0^{¢} F(¢)d¢. \tag{4}$$

Отсюда получаются формулы для определения $¢_{\max}$ и T

$$m\frac{V_0^{\,2}}{2} = \int_0^{¢_{\max}} F(¢)d¢, \quad T = 2\int_0^{¢_{\max}}\left[V_0^2 - \frac{2}{m}\int_0^{¢} F(¢)d¢\right]^{-\frac{1}{2}} d¢. \tag{5}$$

Далее, имея максимальное сближение $¢_{\max}$, на основании зависимости $F = F(¢)$, непосредственно найдем максимальную прижимающую силу $F_{\max} = F(¢_{\max})$, а для определении $\sim_{\max}$ воспользуемся зависимостью $\sim = \sim(¢)$, полученную при статическом сжатии этих тел, притом $\sim_{\max} = \sim(¢_{\max})$.

2. Зависимости между шириной контактной области, мерой погруженя цилиндра в слой и равнодействующим внешних сжимающих.

Рассмотрим соответствующую вспомогательную плоскую статическую контактную задачу о вдавливании цилиндра в упругий слой, когда на единичной длине цилиндра действует сжимающая сила F. В окрестности точки O их начального соприкосновения (фиг.1) возникает некоторая контактная область $(-\sim \leq ¨ \leq \sim)$, в которой действуют неизвестные контактные напряжения $p(¨)$. Здесь $\sim$ – неизвестный угол, характеризующий ширины контактной области.

Предполагаем, что ширина контактной области мала по сравнению с радиусом цилиндра. Тогда упругие перемещения граничных точек цилиндра, входящих в контакт со слоем, будут мало отличаться от соответствующих перемещений этих же точек при сжатии цилиндра с двух сторон контактными напряжениями $p(g)$ [4], приложенных симметрично относительно оси Ox_1 (фиг.2). При этом, направленные по оси Oy_1 упругие перемещения $u_1(g)$ граничных точек цилиндра в контактной области $g \in [-\sim;\sim]$, согласно [5], выражатся формулой

$$u_1(g) = k_1 R\int_{-\sim}^{\sim}\left(\ln\left|\frac{\cos g + \cos ¨}{\cos g - \cos ¨}\right| - 2\cos g\cos ¨\right)p(¨)d¨, \quad \left(k_1 = \frac{1-¬_1}{2®«_1}\right). \tag{6}$$

Далее, на основании [6], определим упругие перемещения $u_2(\varphi)$ верхних граничных точек слоя контактной области $\varphi\in[-\alpha;\alpha]$ в направлении, противоположном оси Oy, которые возникают вследствие глобальных деформаций слоя, когда на слой действуют контактные напряжения $p(\theta)$:

$$u_2(\varphi)=k_2R\int_{-\alpha}^{\alpha}K(\sin\varphi-\sin\theta)p(\theta)d\theta\,,\quad\left(k_2=\frac{1-\nu_2}{\pi E_2}\right),\tag{7}$$

где ядро $K(z)$ представляется интегралом

$$K(z)=\int_0^\infty\frac{(2\kappa\,\mathrm{sh}2u-4u)}{u\left(2\kappa\,\mathrm{ch}2u+1+\kappa^2+4u^2\right)}\cos\frac{uzR}{h}du,\qquad(\kappa=3\text{-}4\nu_2)\,.\tag{8}$$

Вследствие шероховатости поверхности упругого слоя, его верхние граничные точки контактной области $(-\alpha\le\varphi\le\alpha)$, находящейся под действием давления $p(\varphi)$, получают некоторые локальные перемещения $u_3(\varphi)$, которые, как и $u_2(\varphi)$, также направлены вниз (фиг.1) и, согласно экспериментам [7], выражаются формулой

$$u_3(\varphi)=k_3p^{1/\beta}(\varphi),\quad(-\alpha\le\varphi\le\alpha),\tag{9}$$

где k_3 и β -постоянные, характеризующие шероховатость поверхности слоя, причем $1\le\beta\le3$.

Условие контакта рассматриваемой вспомогательной статической плоской контактной задачи дает соотношение

$$u_1(\varphi)+u_2(\varphi)+u_3(\varphi)=\delta-R(1-\cos\varphi),\ (-\alpha\le\varphi\le\alpha),\tag{10}$$

которое на основании (6), (7) и (9), а также с учетом симметричности задачи, приводится относительно неизвестного контактного давления $p(\varphi)$ к следующему нелинейному интегральному уравнению $(0\le\varphi\le\alpha)$:

$$\begin{gathered}k_1R\int_0^\alpha\left(\ln\left|\frac{\cos\varphi+\cos\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}\right|-2\cos\varphi\cos\theta\right)p(\theta)d\theta+k_3p^{1/\beta}(\varphi)+\\+k_2R\int_0^\alpha[K(\sin\varphi-\sin\theta)+K(\sin\varphi+\sin\theta)]p(\theta)d\theta=\delta-R(1-\cos\varphi),\end{gathered}\tag{11}$$

где δ – мера погружения цилиндра в слой.

Заметим, что в уравнении (11) кроме неизвестной функции $p(\varphi)$ входят также неизвестные величины δ и α. Для определения $p(\varphi)$, δ и α, к уравнению (11) присоединим условие равновесия цилиндра

$$R\int_{-\sim}^{\sim} p(¨)d¨ = F \qquad (12)$$

и условия непрерывности контактных напряжений в крайних точках контактной зоны

$$p(-\sim) = p(\sim) = 0. \qquad (13)$$

Уравнения (11)-(13) образуют полную систему нелинейных уравнений относительно неизвестной четной функции $p(\mathrm{g})$ и неизвестных величин ¢ и $\sim$.

С целью исследования системы уравнений (11)-(13) введем следующие безразмерные величины

$$¶ = \frac{\mathrm{g}}{\sim},\ ¢_* = \frac{¢}{R},\ F_* = \frac{F}{2R}\left(\frac{k_3}{R}\right),\ q(¶;\sim) = ¢_* - 1 + \cos(\sim¶) - \frac{k_3}{R} p^{1/}(\sim¶). \qquad (14)$$

Тогда на основании (14) условие (13) даст

$$¢_* = q(1;\sim) + 1 - \cos\sim. \qquad (15)$$

Теперь, учитывая (14) и (15), уравнение (11) преобразуем к виду

$$q(¶;\sim) = \sim\left(\frac{R}{k_3}\right)\int_0^1 H(¶,¦;\sim)\left[q(1;\sim) - q(¦;\sim) + \cos(\sim¦) - \cos\sim\right] d¦,\ (0 \le ¶ \le 1), \qquad (16)$$

а условия равновесия (12) –к виду.

$$F_* = \sim\int_0^1 \left[q(1;\sim) - q(¦;\sim) + \cos(\sim¦) - \cos\sim\right] d¦. \qquad (17)$$

Здесь ядро $H(¶,¦;\sim)$, выражающееся формулой

$$H(¶,¦;\sim) = k_1\left(\ln\left|\frac{\cos\sim¶ + \cos\sim¦}{\cos\sim¶ - \cos\sim¦}\right| - 2\cos\sim¶\cos\sim¦\right) + \qquad (18)$$

$$+ k_2\left[K(\sin\sim¶ - \sin\sim¦) + K(\sin\sim¶ + \sin\sim¦)\right],\ (0 \le ¶,¦ \le 1,\ \ 0 < \sim < ®/2)$$

–непрерывная функция для всех значений переменных, за исключением точек линии $¶ = ¦$, в окрестности которой она имеет логарифмическую особенность $H(¶,¦;\sim) = o(\ln|¶ - ¦|)$.

Таким образом, соответствующая вспомогательная статическая плоская контактная задача сводится к определению $q(¶;\sim)$, $¢_*$ и $\sim$ из уравнений (15)-(17).

Для исследования системы уравнений (15)-(17) временно будем считать, что задано некоторое значение $\sim$ из области его изменения $(0 < \sim < ®/2)$, но при этом F_* является неизвестной. Тогда уравнение (16), отдельно взятое, будет нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна [8] относительно $q(¶;\sim)$.

Исследуя нелинейное интегральное уравнение (16), изложенное в [8] способом, в пространстве непрерывных функций с чебышевской метрикой доказывается, что существует область изменения характерных параметров задачи, при которых уравнение (16) в некорором замкнутом шаре имеет единственное решение, которое является, в частности, пределом последовательности функций $\{q_n(¶;\sim)\}_{n=0}^{\infty}$, определяющейся итеррационными формулами

$$q_{n+1}(¶;\sim) = \sim\left(\frac{R}{k_3}\right)\int_0^1 H(¶,¦;\sim)\left[q_n(1;\sim) - q_n(¦;\sim) + \cos(\sim¦) - \cos\sim\right] d¦, \quad (19)$$

$$q_0(¶;\sim) \equiv 0, \quad 0 \le ¶ \le 1, \ 0 < \sim < ®/2, \ \text{n} = 0,1,2,....$$

Далее, имея функцию $q(¶;\sim)$, являющейся решением уравнения (16), с помощью (15) и (17) определяются $¢_*$ и F_*, соответствующие принятому значению $\sim$. Установленные таким образом зависимости межу $\sim$, $¢_*$ и F_* сохраняют свою силу и в том случае, когда F_* задана, а $\sim$ и $¢_*$ неизвестные. При этом, неизвестное контактное напряжение $p(g)$ согласно (11) выражается формулой

$$p(g) = \left(\frac{R}{k_3}\right)\left[q(1;\sim) - q\left(\frac{g}{\sim};\sim\right) + \cos g - \cos\sim\right], \quad (0 \le g \le \sim). \quad (20)$$

На основании (19), из (15), (17) и (20) находим решение вспомогательной плоской статической контактной задачи в нулевом приближении:

$$p^{(0)}(g) = \left(\frac{R}{k_3}\right)\left[\cos g - \cos\sim\right], \ (0 \le g \le \sim), \quad (21)$$

$$¢_*^{(0)} = 1 - \cos\sim, \ F_*^{(0)} = \sim\int_0^1 \left[\cos(\sim¦) - \cos\sim\right] d¦, \quad (22)$$

в которых отсутствуют влияние глобальных упругих деформаций цилиндра и слоя на это решение.

Наиболее приемлемым решением системы (15)-(17) является ее первое приближение, которое, согласно (19), (15) и (17), выражается формулами

$$q_1(¶;\sim) = \sim\left(\frac{R}{k_3}\right)\int_0^1 H(¶,¦;\sim)\left[\cos(\sim¦) - \cos\sim\right] d¦, \quad (23)$$

$$¢_*^{(1)} = q_1(1;\sim) + 1 - \cos\sim, \quad (24)$$

$$F_*^{(1)} = \sim\int\limits_0^1 \left[q_1(1;\sim) - q_1(\text{¦};\sim) + \cos(\sim\text{¦}) - \cos\sim\right] d\text{¦}\,. \qquad (25)$$

3. Механические характеристики теории удара Г.Герца при ударе упругого цилиндра по шероховатому упругому слою.

Для определении механических характеристик теории удара Г.Герца при ударе цилиндра по шероховатому упругому слою в первом приближении, воспользуемся соотношениями (4), (5) и (23)-(25). Учитывая соотношения (23)-(25), по которым связь между ¢_* и F_* установлена через $\sim$, соотношения (4) и (5) преобразуем к виду

$$m\frac{V_0^2}{2} - m\frac{V^2}{2} = \int\limits_0^{\sim} F\frac{d\text{¢}}{d\sim}d\sim, \quad m\frac{V_0^2}{2} = \int\limits_0^{\sim_{\max}} F\frac{d\text{¢}}{d\sim}d\sim, \qquad (26)$$

$$T = 2\int\limits_0^{\sim_{\max}} \left[V_0^2 - \frac{2}{m}\int\limits_0^{\sim} F\frac{d\text{¢}}{d\sim}d\sim\right]^{-\frac{1}{2}} d\sim. \qquad (27)$$

Теперь, учитывая (23)-(25) и (14), из второго равенства (26) получим соотношение, связывающее $\sim_{\max}$ со скоростью удара

$$V_*^2 = \int\limits_0^{\sim_{\max}} \left\{\sim\left[\sin\sim + \frac{\partial q_1(1;\sim)}{\partial\sim}\right]\int\limits_0^1 \left[q_1(1;\sim) - q_1(\text{¦};\sim) + \cos(\sim\text{¦}) - \cos\sim\right] d\text{¦}\right\} d\sim, \qquad (28)$$

где V_* –безразмерная скорость удара

$$V_* = V_0\frac{\sqrt{m}}{2R}\left(\frac{k_3}{R}\right)^{\ \ /2}. \qquad (29)$$

Отсюда, с учетом (23) и (18) получим следующую асимптотическую формулу

$$V_*^2 = (\sim_{\max})^{3+2} \left[\frac{1}{3+2}\int\limits_0^1 \left(1-\text{¦}^2\right) d\text{¦} + O\left((\sim_{\max})^{2\ \ -1}\ln\frac{1}{\sim_{\max}}\right)\right]. \qquad (30)$$

Наконец, учитывая (30), (24), (25), (27) и (14), получим асимптотические выражения $\sim_{\max}$, $\text{¢}_{\max}$, $F_{\max}$ и T в зависимости от безразмерной скорости удара V_* в первом приближении. При этом, выясняются, что при малых скоростях удара основные механические характеристики теории удара Г.Герца $\sim_{\max}$, $\text{¢}_{\max}$, $F_{\max}$ и T пропорциональны скорости удара V_0 со степенями $2/(2\ \ +3)$, $4/(2\ \ +3)$, $(4\ \ +2)/(2\ \ +3)$, и $-(2\ \ -1)/(2\ \ +3)$ соответственно. Так как $1\le\ \ \le 3$, то отсюда следует, что с уменьшением V_0 продолжительность удара T неограниченно возрастает, т.е. сохраняется основная закономерность теории удара Г.Герца. При $=1$, когда зависимость (9) линейная, получается известный результат [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. Киев: Наукова думка. 1969. 248с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304с.
3. Мхитарян С.М., Шекян А.Л., Шекян Л.А. Об ударе штампа по упругому шероховатому полупространству. //Труды 6-ой межд. конф. ”Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис-Степанакерт, 2008. С.345-349.
4. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270с.
5. Sternberg E., Turteltaub M.J. Compression of an elastic roller between two rigid plates// Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. 711с.
6. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. - 455с.
7. Трение, изнашивание и смазка. Справочник. Кн. 1. М.: Наука, 1978. 400с.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960. 300с.
9. Мхитарян С.М., Шекян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.15-32.

Сведения об авторах:

Мхитарян Сурен Манукович – Член корр. НАН РА, докт. физ.-мат. наук, проф., главный научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24б
Тел: (+37410)621025; (+37493)936117

Шекян Артем Лаврентьевич - Канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник, Институт механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24б
Тел: (+37410)398901; (+37455)857227

Шекян Лаврентий Арамович - Канд. физ.-мат. наук, доц. Государственного инженерного университета Армении, кафедра прикладной механики
Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна 105
Тел: (+37410)398901; (+37499)283440; E-mail: lshekyan@mail.ru

Григорян Марине Самвеловна – Преподаватель кафедры высшей математики Ереванского государственного университета архитектуры и строительства
Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна 105, Тел: (+374222)36136; (+37491)639758

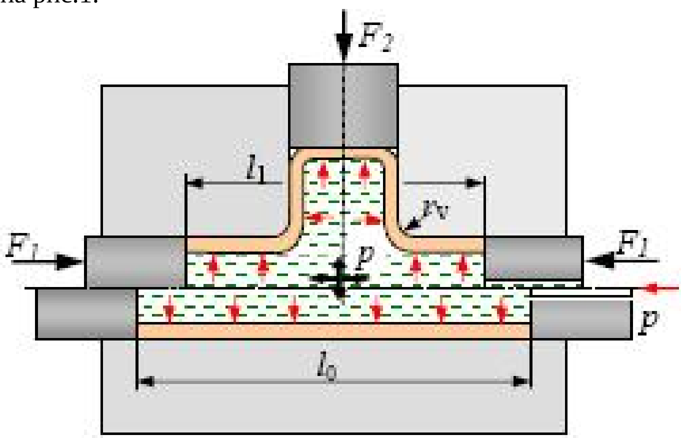
ОСОБЕННОСТИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ТРУБНОЙ ЗАГОТОВКИ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И ВНУТРЕННЕМ ДАВЛЕНИИ

Назарян Э.А., Кахризи М., Хандамян А.Ж.

Ереван, Армения

Одним из перспективных технологических процессов изготовления изделий типа крестовин и тройников из тонкостенных трубных заготовок является гидроформовка, когда внутрь заготовки подают жидкость от регулируемого источника высокого давления при одновременном действии осевой сжимающей нагрузки [1,2].

Принципиальная схема устройства для реализации указанного процесса представлена на рис.1.



Фиг.1 Принципиальная схема формоизменения цилиндрической оболочки при наличии внутреннего давления и осевого усилия.

Устройство состоит из разъемной в плоскости чертежа матрицы, двух осевых пуансонов и подпорного плужера. Разъемная матрица имеет продольную полость для размещения трубной заготовки и одну или несколько радиальных полостей.Число радиальных полостей, их форма и размеры определяются по конструктивным требованиям изделия.

Осевые пуансоны в процессе деформирования перемещаются навстречу друг к другу с одинаковой скоростью относительно матрицы. На торцевых поверхностях пуансонов имеются кольцевые выступы треугольной формы, которые, вдавливаясь в заготовку, обеспечивают герметичность. Один из осевых пуансонов имеет канал для подвода жидкости внутрь заготовки.

Формоизменение изделия происходит следующим образом. Исходная трубная заготовка длиной l_0 укладывается в полость матрицы, половинки матрицы соединяют вместе и сжимают таким образом, чтобы они не раскрывались в процессе формоизменения. Заготовку заполняют рабочей жидкостью и подводят осевые пуансоны к торцам. Под действием осевого усилия F_1 пуансоны своими выступами вдавливаются в торцы заготовки и уплотняют жидкость. В этот момент от насоса через канал в осевом пуансоне вовнутрь заготовки подается дополнительное количество жидкости и давление достигает требуемой величины. Под действием давления жидкости p и усилия осевых пуансонов F_1 материал заготовки переходит в пластическое состояние. Стенка тонкостенной трубы прогибается в радиальную полость и начинается течение металла из продольной плоскости с образованием отвода, при этом длина исходной заготовки уменьшается на величину $\Delta l = l_1 - l_0$.

Для получения качественных изделий и успешной реализации процесса соотношения между усилием осевого сжатия и давлением жидкости должно быть определенным. При недостаточном усилии F_1 и чрезмерном p в зоне отвода будет преобладать двухосное одноименное растяжение, что приведет к значительному утонению стенки и разрушению заготовки. Недостаточное давление жидкости способствует появлению складок на исходной заготовке.

Пластическое формоизменение полых изделий с отводом под действием осевых сжимающих усилий и внутреннего давления отличается чрезвычайно сложным характером распределения напряжений по всему объему заготовки вследствие сложности формы изделия и переменности формы и размеров очага пластических деформаций.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние материала на примере, приведенном на рис.1. Изделие типа тройника представляет собой две взаимно пересекающиеся цилиндрические поверхности, оси которых расположены под углом 90^0. Сопряжение двух цилиндрических поверхностей по линии перехода выполнено по радиусу.

Выберем две цилиндрические системы координат с осями Z, Z'. Ось первой системы Z совпадает с осью трубной заготовки, а ось вспомогательной системы Z' совпадает с осью отвода. Любая материальная частица на трубной части тройника будет задана координатами $z, \overline{\ }, \circ$, а на отводе, соответственно, $z', \overline{\ }', \circ'$.

Центральная часть тройника испытывает деформацию сжатия в направлении оси исходной заготовки e_z, удлинения в окружном направлении e_θ и утолщения стенки e_ρ, а также деформацию сдвига. Деформация концевых частей заготовки может быть принята как плоская, так как деформация в окружном направлении практически равна нулю.

Для создания оптимального технологического процесса формообразования необходимо выяснить не только качественно, но и количественно характер распределения деформаций. Полная картина деформированного состояния должна позволить определить размеры очага пластической деформации, размеры исходной заготовки, предельную степень формоизменения, размеры и качественные показатели изделия. Картина напряженного состояния должна позволить определить величины и соотношения внешних нагрузок, необходимые для перевода и поддержания заготовки в пластическом состоянии.

Определение перечисленных параметров путем теоретического анализа связано с чрезвычайными трудностями, вытекающими из неопределенности граничных условий и переменности очага пластических деформаций. Поэтому в настоящей работе использован реализованный нами экспериментальный метод оценки деформированного состояния.

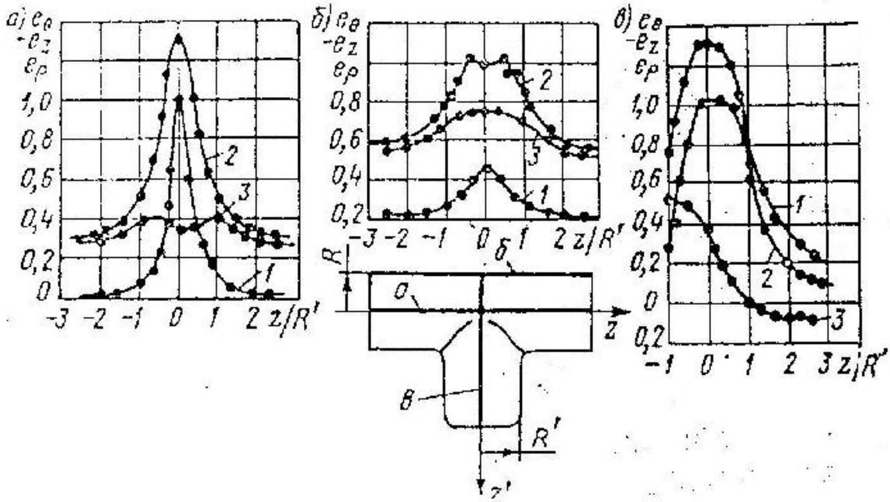
Из всего многообразия способов экспериментального исследования деформированного состояния в настоящей работе выбран метод нанесения делительных сеток на поверхность заготовки. Делительная сетка представляла собой совокупность кольцевых и продольных рисок, наносимых на расстоянии 3 мм. В процессе формоизменения исходные квадратные элементы сетки изменяли свою форму и размеры, по которым можно определить текущие и итоговые величины компонент деформаций. Измерение размеров деформированной сетки производили на инструментальном микроскопе.Описанная методика позволяет измерить деформацию только на поверхности заготовки, поэтому радиальную составляющую деформации определяли, исходя из условия сплошности деформируемого материала. Степень деформации в любой точке изделия определяли по соотношениям:

$$e_{\theta i} = \ln\frac{a_i}{a_0};\ e_{zi} = \ln\frac{b_i}{b_0};\ e_{\rho i} = \ln\frac{s_i}{s_0} = -(e_{\theta i} + e_{zi}); \qquad (1)$$

где $a_0, b_0, a_i, b_i,$ – соответственно, размеры элемента делительной сетки до и после деформации, s_0, s_i – толщины стенки заготовки и изделия.

Деформация на тройнике имеет ярко выраженную неравномерность, поэтому измерения производили в трех наиболее характерных направлениях: на боковой поверхности вдоль оси исходной заготовки, на противоположной отводу стороне вдоль оси заготовки, на боковой стороне тройника вдоль оси отвода, т.е. в плоскости поперечной симметрии. Измерения проводили на конечной стадии процесса формообразования.

На рис.2 представлены графики изменения компонент линейных деформаций в указанных выше характерных зонах изделия, деформированного изделия из медной трубы диаметром 25 мм.



Фиг. 2.Распределение осевой (2), окружной (1) и радиальной (3) компонент деформаций на боковой (а) и тыльной стороне (б) трубной части тройника, а также в плоскости поперечной симметрии (в).

Высота отвода на тройнике выбрана равной одному диаметру. Из представленных графиков следует сосредоточенность деформации в зоне перехода заготовки в отвод. На боковой поверхности окружная деформация e_{-} на концах заготовки практически равна нулю, а в центре заготовки – резко возрастает и достигает значения e_{-} =1,0. Аналогичный характер изменения имеет и осевая деформация сжатия e_z. Изменение толщины выражается деформацией утолщения. На концевых частях заготовки утолщение $e_{\circ}$ по абсолютной величине равно осевому сжатию, что позволяет предполагать наличие плоской схемы деформированного состояния. На противоположной отводу стороне характер изменения деформации подобен рассмотренному выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Изготовление сложных полых деталей. Под ред. Проф К.Н.Богоявленского, Ленинград, “Машиностроение”, 1979, 218 с.
2. E.Karabegovic, M.Jurkovic, M.Mahmic, M.Ficko. Comparation of analytical and experimental results of fluid pressure in hidroforming of tubes. 14 International Research/Expert Conference “Trends in the Development of Machinery and Associated Technology”. TMT2010, Mediterranean Cruise, 11-18 September 2010.

Сведения об авторах:

Назарян Эрнест Агаджанович, Ереванский государственный университет, ведущий научный сотрудник, доктор технических наук.
Тел. : 64-61-37, 093- 267256, E-mail adress: nazaryan.ernest@netsys.am

Кахризи Мохаммад, Ереванский государственный университет, аспирант.

Хандамян Ашот Жораевич. ГКН, тел.091 40 19 63.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Немировский Ю.В., Романова Т.П

Новосибирск, Россия

Рассмотрим динамическое поведение круглых железобетонных пластин радиуса R с жесткой шайбой или отверстием радиуса R_0 при различных условиях закрепления и воздействии нагрузок взрывного типа. Предполагается, что пластина содержит по толщине большое количество армированных слоев и связующих их изотропных прослоек, описываемых моделью идеального жесткопластического материала с условием пластичности для бетона типа модифицированного условия Треска для материала, разно сопротивляющегося на растяжение и сжатие. Считается, что волокна арматуры деформируются, как одномерные элементы, располагаются в виде симметричных относительно радиуса криволинейных траекторий (угловое армирование), в радиальном и окружном направлениях. Тогда условие пластичности и закон пластического течения для армированных пластин (рис. 1) в безразмерном виде описываются соотношениями [1, 2]:

$$AB:\ m_2 = a_2\,,\ ©_1 = 0\,,\ ©_2 > 0\,;\ BC:\ m_2 = km_1 + a_3\,,\ ©_1 < 0\,,\ ©_2 = -©_1 / k > 0\,; \quad (1)$$

$$CD:\ m_2 = m_1 / k + a_4\,,\ ©_1 < 0\,,\ ©_2 = -k©_1 > 0\,; \quad DE:\ m_1 = -a_1\,,\ ©_1 < 0\,,\ ©_2 = 0\,;$$

$$EF:\ m_2 = -a_2\,,\ ©_1 = 0\,,\ ©_2 < 0\,;\ FG:\ m_2 = km_1 - a_3\,,\ ©_1 > 0\quad ©_2 = -©_1 / k < 0\,;$$

$$GK:\ m_2 = m_1 / k - a_4\,,\ ©_1 > 0\,,\ ©_2 = -k©_1 < 0\,; \quad AK:\ m_1 = a_1\,,\ ©_1 > 0\,,\ ©_2 = 0\,;$$

$$a_i = \frac{2h^2(s\Omega + \mu_i s_i + \mu_i^y s_3)(ks\Omega + \mu_i s_i + \mu_i^y s_3)}{(k+1)s\Omega + 2\mu_i s_i + 2\mu_i^y s_3}\,,\ i = 1,2\,,$$

$$a_j = 2h^2\Sigma_{j-2}\left[1 - \frac{1}{2 + \Omega s(k-1)/\Sigma_{j-2}}\right],\ j = 3,4\,,$$

$$\Sigma_1 = s\Omega + \mu_2 s_2 + \mu_2^y s_3 s_{g1} + k(\mu_1 s_1 - \mu_1^y s_3 s_{g1})\,,$$

$$\Sigma_2 = s\Omega + \mu_1 s_1 - \mu_1^y s_3 s_{g2} + k(\mu_2 s_2 + \mu_2^y s_3 s_{g2})\,, \quad s_{gi} = \mathrm{sign}(-k^{2i-3} + \mathrm{tg}^2 «)\ \ (i = 1,2\,).$$

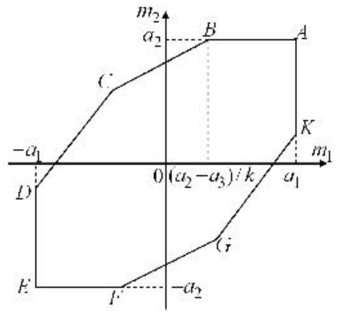
Здесь $m_k = \bar{M}_k / M_0^0\,,\ M_0^0 = ±_0^0 H_0^2 / 4\,,\ s = ±_0 / ±_0^0\,,\ s_i = ±_{0i} / ±_0^0\,,\ s_3 = ±_{03} / ±_0^0\,,$

$$\Omega = 1 - \mu_1 - \mu_2 - 2\mu_3\,,\ \mu_1^y = 2\mu_3 \cos^2 «\,,\ \mu_2^y = 2\mu_3 \sin^2 «\,,\ h = H / H_0\,,$$

$$©_1 = -\dot{v}''\,,\ ©_2 = -\dot{v}' / x\,,\ x = r / R\,,\ x_0 = R_0 / R\,,\ v = (H_0 / R)^2 w\,,\ w = \bar{w} / H_0\,,$$

$$(*)' = \partial(*) / \partial x\,,\ \dot{(*)} = \partial(*) / \partial t\,,\ t = \bar{t} / t_0\,,$$

$\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ – радиальный и окружной изгибные моменты; m_1, m_2 – их безразмерные значения; $k\pm_0$ и $\pm_0$ – пределы текучести связующего материала на растяжение и сжатие ($0 < k < 1$), $\pm_{01}$, $\pm_{02}$, $\pm_{03}$ – пределы текучести материалов радиальных, окружных и угловых волокон; « – угол армирования угловых волокон (рис. 2); $«_0 = «(x_0)$; $\bar{w}$ – прогиб; $\bar{t}$ – время; r – радиальная координата; μ_1, μ_2, μ_3, μ_{01}, μ_{02}, μ_{03} – интенсивности упаковки радиальных, окружных и угловых волокон и их значения при $x = x_0$; H – толщина пластины; $\pm_0^0$, H_0, t_0 – параметры обезразмеривания.



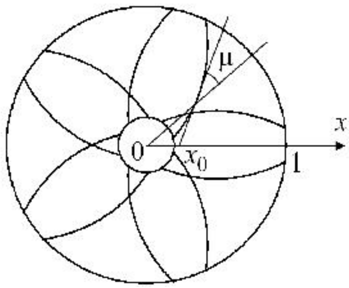


Рис. 1 Рис. 2

При армировании волокнами постоянного сечения имеем для радиальных и окружных волокон

$$\mu_1(x) = \mu_{01}x_0 / x\,,\ \mu_2 = \mu_2(x)\,. \quad (2)$$

Для различных структур углового армирования верны соотношения [3]:

а)спирали Архимеда: $$\mu_3(x) = \frac{\mu_{03}\sqrt{x_0^2 + (x\,\mathrm{tg}«)^2}}{x\sqrt{1+\mathrm{tg}^2«}}\,,\ \mathrm{tg}« = \frac{x\,\mathrm{tg}«_0}{x_0}\,; \quad (3)$$

б)логарифмические спирали: $$\mu_3(x) = \mu_{03}x_0 / x\,,\ «(x) = «_0 = \mathrm{const}\,; \quad (4)$$

в)“спицы велоколеса”: $$\mu_3(x) = \frac{\mu_{03}x_0\cos«_0}{\sqrt{x^2 - (x_0\sin«_0)^2}}\,,\ \sin« = \frac{x_0}{x}\sin«_0\,. \quad (5)$$

Безразмерная плотность армированной пластины будет равна

$$°(x) = °_0\Omega + °_1\mu_1 + °_2\mu_2 + 2°_3\mu_3 \quad (6)$$

и уравнения движения имеют вид:

$$(xm_1)' - m_2 = xQ\,, \quad (7)$$

$$(xQ)' + xp_n(x,t) = \sim °(x)x\ddot{v}\,, \quad (8)$$

$$°_i = \bar{°}_i / °_0^0\,,\ Q = \bar{Q}R / M_0^0\,,\ p_n = \bar{P}R^2 / M_0^0\,,\ \sim = h°_0^0R^4 / (t_0^2M_0^0)\,,$$

где ρ_i $(i=0,..,3)$ – плотности связующего материала и материалов радиальных, окружных и угловых волокон, ρ_0^0 – обезразмеривающий параметр плотности, $\bar{Q}$ – перерезывающая сила, $\bar{P}$ – нагрузка, распределенная по поверхности пластины. Для нагрузок взрывного типа примем зависимость

$$p_n(x,t) = p\varphi_1(x)\varphi_2(t)\,, \tag{9}$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$ – заданные и $\varphi_2(t)$ – невозрастающая.

Соотношения (1) – (9) представляют собой замкнутую систему уравнений, позволяющую в принципе решать задачи динамического изгиба армированных на отрезке $x_0 \le x \le 1$ кольцевых пластин при любых осесимметричных структурах армирования, условиях закрепления краев и произвольных заданных функциях $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(t)$. Следует при этом иметь в виду, что в пределах отрезка $x_0 \le x \le 1$ могут быть реализованы различные режимы, определяемые законами (1), для каждого из которых на соответствующем отрезке $x_j \le x \le x_{j+1}$ можно построить аналитическое решение. Границы участков могут быть определены при выполнении условий сопряжения функций m_1, Q, v, $\dot{v}$. Учитывая, что в динамических задачах эти границы участков меняются во времени, выписать общее решение, описывающее все возможные ситуации нагружения и закрепления пластин, технически сложно. Поэтому решение на основе соотношений (1) в каждом конкретном случае целесообразно получать отдельно.

В качестве примера рассмотрим шарнирно закрепленную на внешнем контуре армированную на отрезке $x_0 \le x \le 1$ кольцевую пластину при воздействии нагрузки взрывного типа и при наличии на участке $0 \le x \le x_0$ жесткой недеформированной шайбы с безразмерной удельной плотностью ρ_c. В этом случае на отрезке $x_0 \le x \le 1$ реализуется пластическое состояние, описываемое уравнениями:

$$m_2(x,t) = a_2(x)\,,\ \dot{v}'' = 0\,,\ \left[a_2(x) - a_3(x)\right]/k \le m_1(x,t) \le a_1(x)\,. \tag{10}$$

Тогда будем иметь

$$v(x,t) = V(t)(1-x)/(1-x_0)\,,\ xQ(x,t) = x_0Q(x_0,t) + \ddot{V}J_1(x) - p\varphi_2(t)J_2(x)\,,$$

$$x_0Q(x_0,t) = -\ddot{V}\rho_c x_0^2/2 - p\varphi_2(t)\int_0^{x_0} x\varphi_1(x)dx\,,\ (xm_1)' = a_2 + \ddot{V}(t)J_1(x) - p\varphi_2(t)J_2(x)\,,$$

$$xm_1 = x_0a_1(x_0) + J_3(x) + \ddot{V}(t)J_4(x) - p\varphi_2(t)J_5(x)\,. \tag{11}$$

Здесь $J_1(x) = \sim \left[\circ_c \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{1}{1-x_0} \int\limits_{x_0}^{x} \circ(y) y(1-y) d\,y \right]$, $J_2(x) = \int\limits_0^x \ddot{}\,_1(y) y dy$,

$$J_3(x) = \int\limits_{x_0}^{x} a_2(y) dy\ ,\ J_4(x) = \int\limits_{x_0}^{x} J_1(y) dy\ ,\ J_5(x) = \int\limits_{x_0}^{x} J_2(y) dy\ ,$$

$V(t)$ – безразмерный прогиб шайбы.

Из (11) и условия $m_1(1,t) = 0$ имеем уравнение

$$\ddot{V}(t) = p \ddot{}\,_2(t) d_1 - d_2\ , \tag{12}$$

$$d_1 = J_5(1) / J_4(1)\ ,\ d_2 = \left[J_3(1) + x_0 a_1(x_0) \right] / J_4(1)\ .$$

Из (12) и условия $\ddot{V}(0) = 0$ определяется минимальное значение p :

$$p \ge p_0 = d_2 / \left[\ddot{}\,_2(0) d_1 \right]. \tag{13}$$

Решение (12) при начальных условиях $\dot{V}(0) = V(0) = 0$ дает:

$$\dot{V}(t) = p d_1 I_1 - d_2 t\ ,\ V(t) = p d_1 I_2 - d_2 \frac{t^2}{2}\ ,\ I_1(t) = \int\limits_0^t \ddot{}\,_2(^2) d^2\ ,\ I_2(t) = \int\limits_0^t I_1(^2) d^2\ .$$

Движение пластины прекратится в момент времени t_f , когда $\dot{V}(t_f) = 0$. Тогда максимальный остаточный прогиб пластины будет равен

$$V_f = V(t_f) = p d_1 I_2(t_f) - d_2 t_f^2 / 2\ . \tag{14}$$

В соответствии с неравенством (10) данное решение будет справедливо при выполнении неравенства

$$a_2(x) - a_3(x) \le 0\ . \tag{15}$$

Для структур армирования, у которых нарушается неравенство (15), на отрезке $x_0 \le x \le 1$ будут существовать два пластических режима. Решение для них нетрудно получить в аналитической форме. Описание его выходит за пределы отпущенного объема статьи и поэтому здесь не приводится.

Для рассмотренного здесь решения из (11), (12) получим, что распределение изгибающего момента описывается соотношением

$$x m_1(x,t) = x_0 a_1(x_0) + J_3(x) + p \ddot{}\,_2(t) \left[d_1 J_4(x) - J_5(x) \right] - d_2 J_4(x)\ ,$$

и в соответствии с (10) на всем отрезке $x_0 \le x \le 1$ в течение всего рассматриваемого периода $0 \le t \le t_f$ должно быть $m_1(x,t) \le a_1(x)$. Для нагрузок взрывного типа, когда $\ddot{}\,_2(t)$ – невозрастающая функция, данное требование будет выполняться, если $m_1(x,0)$ будет невозрастающей функцией от координаты x , то есть $m_1'(x,0) \le 0$. Если $m_1'(x_0,0) = 0$, то при этом должно выполняться неравенство $m_1''(x_0,0) < 0$. Таким образом, из условия $m_1(x_0,0) = \min\limits_{x_0 \le x \le 1} m_1(x,0)\Big|_{p=p_1}$ определяется величина p_1 – максимальное значение p для рассматриваемой задачи. Это означает, что при учете (13), данное решение реализуется при амплитудах нагрузок

$$p_0 \le p \le p_1.$$

На рис. 3, 4 изображена зависимость предельной амплитуды p_0 (13) от x_0 в случае углового армирования по законам (4) – кривая *1* и (5) – кривая *2* при условии одинакового расхода арматуры: $\int\limits_{x_0}^{1} \mu_3(x)dx = \text{const}$.

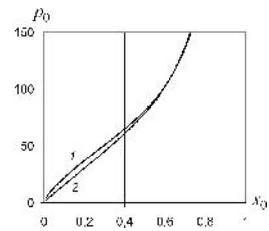


Рис. 3

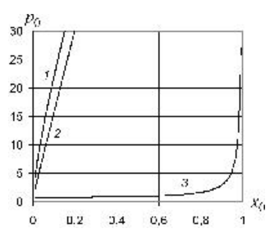


Рис. 4

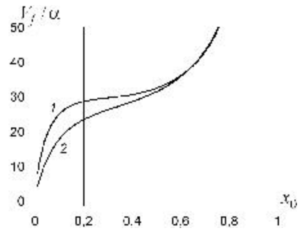


Рис. 5

Считалось $s = 1$, $k = 1/14$, $s_3 = 50$, $\mu_{03} = 0{,}25$ (для случая (4)), $«_0 = ® / 6$, $°_0 = 1$, $°_3 = °_c = 4$. Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности нагрузкой с прямоугольным импульсом: $¨_1(x) \equiv 1$, $¨_2(t) = 1$ при $0 \le t \le t_0$ и $¨_2(t) = 0$ при $t > t_0$. Кривая *3* относится к пластине без армирования. На рис. 5 изображена зависимость безразмерного максимального остаточного прогиба пластины $V_f /\sim$ (14) от величины x_0 при $p = 2p_0$; здесь кривая *1* относится к закону армирования (4), кривая *2* – (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nemirovsky Ju.V. Yield surfaces for reinforced concrete axi-symmetrical plates and shells // Archiwum Inzynierii Ladowej. – 1974. – T. XX. – No 4 – P. 575 – 590.
2. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement // Archiwum Inzynierii Ladowej. – 1975. – T. XXI. No 1. ,p. 57 – 67.

3. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования // Краевые задачи и математическое моделирование. // Сб. трудов 8-й Всерос. научной конференции. 1 – 3 декабря 2006 г., Новокузнецк, т. 1 / НФИ Кем. ГУ; под общ. ред. В.О. Каледина / – Новокузнецк, 2006, с. 25 – 31.

Сведения об авторах:

Немировский Юрий Владимирович, д.ф.–м.н., профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4\1; тел. (383) 3303804, E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

Романова Татьяна Павловна, к.ф.–м.н., старший научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4\1; тел. (383) 3303804, E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ УПРУГИХ КОНЕЧНЫХ СТРИНГЕРОВ К УПРУГОЙ СОСТАВНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

Оганисян Г.В., Агабекян П.В

Ереван, Армения

В работе рассматривается контактная задача для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, состоящей из двух сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими характеристиками. Предполагается, что составная (кусочно-однородная) упругая бесконечная пластина усилена двумя параллельными упругими конечными стрингерами, которые расположены на разных сторонах раздела указанных полубесконечных пластин и приварены (приклеены) к этим полубесконечным пластинам. Стрингеры расположены несимметрично относительно линии раздела указанных полубесконечных пластин, параллельны к линии разнородности полубесконечных пластин, имеют разные упругие свойства и площади поперечного сечения. Контактирующая пара (стрингер-пластина) деформируется сонаправленными и сосредоточенными силами, приложенными к концам стрингеров. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений при некоторых условиях, ядра которых состоят из сингулярной и регулярной частей. Далее эта система решается при помощи известного математического аппарата ортогональных многочленов Чебышева, которое превращает систему сингулярных интегральных уравнений в совокупность регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист, в виде тонкой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины h, состоящей из двух сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на своей верхней поверхности линий $y = a$ $(a > 0)$ и $y = -c$ $(c > 0)$ содержит два параллельных различных упругих конечных стрингера с различными прямоугольными поперечными сечениями. Предполагается, что упругие конечные стрингеры расположены несимметрично относительно линии раздела указанных полубесконечных пластин, приварены (приклеены) к этим полубесконечным пластинам, параллельны к линии раздела указанных полубесконечных пластин и находятся на разных сторонах линии разнородности полубесконечных пластин.

Цель работы заключается в определении распределения интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий вдоль линий крепления упругих конечных стрингеров с упругими полубесконечными пластинами и нормальных напряжений возникающих в стрингерах, когда контактирующая пара (стрингер-пластина) деформируется сосредоточенными силами $P\delta(x-d)\delta(y-a)$ $(d>0)$ и $Q\delta(x-d_0)\delta(y+c)$ $(d_0>0)$, которые приложены на концах стрингеров и имеющими одинаковые направления.

Здесь относительно стрингеров принимается модель одноосного напряженного состояния в сочетании с моделью контакта по линии [1,2,4], т.е. предполагается, что интенсивности распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, а для упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины считается справедливой модель обобщенного плоского напряженного состояния, благодаря чему она деформируется как плоскость.

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений рассматриваемой контактной задачи, заметим что дифференциальные уравнения равновесия стрингеров, записанные в обобщенных функциях, будут иметь вид:

$$\frac{du_s^{(1)}(x;a)}{dx}=-\frac{1}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}}\int_{-b}^{d}-(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{P}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}} \qquad (-b\le x\le d), \qquad (1.1)$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x;-c)}{dx}=-\frac{1}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}\int_{-b_0}^{d_0}-(u-x)\tau^{(2)}(u)du+\frac{Q}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}} \qquad (-b_0\le x\le d_0), \qquad (1.2)$$

которые соответственно удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{du_s^{(1)}(x;a)}{dx}\right|_{x=-b+0}=0; \qquad \left.\frac{du_s^{(1)}(x;a)}{dx}\right|_{x=d-0}=\frac{P}{E_S^{(1)}F_S^{(1)}}, \qquad (1.3)$$

$$\left.\frac{du_s^{(2)}(x;-c)}{dx}\right|_{x=-b_0+0}=0; \qquad \left.\frac{du_s^{(2)}(x;-c)}{dx}\right|_{x=d_0-0}=\frac{Q}{E_S^{(2)}F_S^{(2)}}, \qquad (1.4)$$

и условиям равновесия стрингеров:

$$\int_{-b}^{d}\tau^{(1)}(s)ds=P; \qquad \int_{-b_0}^{d_0}\tau^{(2)}(u)du=Q. \qquad (1.5)$$

Отметим, что из (1.1) и (1.2) нормальные напряжения возникающие в стрингерах при $y=a$ и $y=-c$, можно представить следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=-\frac{1}{F_s^{(1)}}\int_{-b}^{d}-(s-x)\tau^{(1)}(s)ds+\frac{P}{F_s^{(1)}} \qquad (-b\le x\le d), \qquad (1.6)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=-\frac{1}{F_s^{(2)}}\int_{-b_0}^{d_0}-(u-x)\tau^{(2)}(u)du+\frac{Q}{F_s^{(2)}} \qquad (-b_0\le x\le d_0), \qquad (1.7)$$

здесь $u_s^{(1)}(x;a)$ и $u_s^{(2)}(x;-c)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров на линиях $y=a$ и $y=-c$ соответственно; $\tau^{(1)}(x)=d_s^{(1)}\tau^{(1)}(x;a)$, где $\tau^{(1)}(x;a)$ – тангенциальные контактные напряжения на линии $y=a$,

$d_s^{(1)}$ – ширина этого стрингера; $\tau^{(2)}(x) = d_s^{(2)}\tau^{(2)}(x;-c)$, где $\tau^{(2)}(x;-c)$ – тангенциальные контактные напряжения на линии $y=-c$, $d_s^{(2)}$ – ширина этого стрингера; $E_S^{(1)}$ и $E_S^{(2)}$ – модули упругости, а $F_s^{(1)} = d_s^{(1)} h_s^{(1)}$ и $F_s^{(2)} = d_s^{(2)} h_s^{(2)}$ – площади поперечного сечения верхнего и нижнего стрингеров соответственно, а $h_s^{(1)}$ и $h_s^{(1)}$ – высота стрингеров; P и Q – интенсивности сосредоточенных сил, приложенных на стрингеры в точках $(d;a)$ и $(d_0;-c)$; $\theta(x)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда.

С другой стороны для горизонтальной деформации упругой составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины, когда на полубесконечных пластинах на линиях $y=a$ и $y=-c$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $\tau^{(1)}(x)$ $(-b \le x \le d)$ и $\tau^{(1)}(x)$ $(-b_0 \le x \le d_0)$ соответственно, имеем [4]:

$$hl\frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d} K_{11}(s-x)\tau^{(1)}(s)ds + \frac{1}{\pi}\int_{-b_0}^{d_0} K_{12}(u-x)\tau^{(2)}(u)du, \tag{1.8}$$

$$(-\infty < x < \infty),$$

$$hl_1\frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{-b_0}^{d_0} K_{22}(u-x)\tau^{(2)}(u)du + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d} K_{21}(s-x)\tau^{(1)}(s)ds. \tag{1.9}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_{11}(s) = \frac{1}{s} - \frac{d_1 s}{s^2+4a^2} + \frac{8d_2a^2s}{(s^2+4a^2)^2} + \frac{2d_3a^2s(s^2-12a^2)}{(s^2+4a^2)^3} \equiv \frac{1}{s} + K_{11}^*(s),$$

$$K_{22}(u) = \frac{1}{u} - \frac{b_1 u}{u^2+4c^2} + \frac{8b_2c^2u}{(u^2+4c^2)^2} + \frac{2b_3c^2u(u^2-12c^2)}{(u^2+4c^2)^3} \equiv \frac{1}{u} + K_{22}^*(u),$$

$$K_{12}(u) = \frac{d_4 u}{u^2+(a+c)^2} - \frac{2(a+c)(d_5c+d_6a)u}{\left[u^2+(a+c)^2\right]^2}, \tag{1.10}$$

$$K_{21}(s) = \frac{b_4 s}{s^2+(a+c)^2} - \frac{2(a+c)(b_5a+b_6c)s}{\left[s^2+(a+c)^2\right]^2};$$

где $d_1 \equiv d_1(k;\nu;\nu_1) =$

$$= \frac{k(3-\nu)\left[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\right]-(3-\nu_1)\left[8-(1+\nu)(3-\nu)\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_2 \equiv d_2(k;\nu) = \frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu}, \quad l = \frac{8\mu}{3-\nu} = \frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)},$$

$$d_3 \equiv d_3(k;\nu) = \frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]}, \qquad l_1 = \frac{8\mu_1}{3-\nu_1} = \frac{4E_1}{(3-\nu_1)(1+\nu_1)},$$

$$d_4 \equiv d_4(k;\nu;\nu_1) = \frac{8\left[k(3-\nu)+3-\nu_1\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_5 \equiv d_5(k;\nu;\nu_1) = \frac{4(1+\nu_1)}{(3-\nu)\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]}, \tag{1.11}$$

$$d_6 \equiv d_6(k;\nu) = \frac{4(1+\nu)}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]}, \qquad k = \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)},$$

$$b_1 = d_1\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\ \ b_2 = d_2\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),\ \ b_3 = d_3\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),$$

$$b_4 = d_4\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\ \ b_5 = d_5\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\ \ b_6 = d_6\left(\frac{1}{k};\nu_1\right);$$

а $u^{(1)}(x;a)$ и $u^{(2)}(x;-c)$ – горизонтальные перемещения точек полубесконечных пластин на линиях $y=a$ и $y=-c$ соответственно; (E,μ,ν) и (E_1,μ_1,ν_1) – упругие характеристики верхней и нижней полубесконечных пластин соответственно; E и E_1 – модули упругости, μ и μ_1 – модули сдвига, а ν и ν_1 – коэффициенты Пуассона полубесконечных пластин.

Заметим, что на линиях крепления упругих конечных стрингеров с упругими полубесконечными пластинами контактные условия будут:

$$\frac{du_s^{(1)}(x;a)}{dx} = \frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} \qquad (-b \le x \le d), \tag{1.12}$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x;-c)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx} \qquad (-b_0 \le x \le d_0). \tag{1.13}$$

Теперь, учитывая контактные условия (1.12) и (1.13), на основе (1.1), (1.2), (1.8) и (1.9) относительно распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностями $\tau^{(1)}(x)$ $(-b \le x \le d)$ и $\tau^{(2)}(x)$ $(-b_0 \le x \le d_0)$, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}\left[\frac{1}{s-x} + \text{ª}\pi\text{¯}(s-x) + K_{11}^{*}(s-x)\right]\tau^{(1)}(s)ds + \frac{1}{\pi}\int_{-b_0}^{d_0} K_{12}(u-x)\tau^{(2)}(u)du = \text{ª}P,$$

$$(-b < x < d), \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b_0}^{d_0}\left[\frac{1}{u-x}+\lambda_1\pi\text{¯}(u-x)+K_{22}^{*}(u-x)\right]\tau^{(2)}(u)du+\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{d}K_{21}(s-x)\tau^{(1)}(s)ds=\lambda_1 Q,$$

$$(-b_0<x<d_0),\ (1.15)$$

где $\lambda=\dfrac{hl}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}}, \quad \lambda_1=\dfrac{hl_1}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}.$

Здесь следует отметить, что интегралы с ядрами Коши в точках $s=x$ и $u=x$ в системе сингулярных интегральных уравнений (1.14) и (1.15) трактуются в смысле их главного значения по Коши.

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.14) и (1.15) с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей, при условиях (1.5).

2. С целью решения системы сингулярных интегральных уравнений (1.14) и (1.15) при условиях (1.5) имея в виду, что вблизи концов участка контакта интенсивности распределения тангенциальных контактных усилий имеют порядок квадратичного корня интегрируемого порядка, представим неизвестные функции $\tau^{(1)}(s)$ и $\tau^{(2)}(u)$ в форме бесконечных рядов [2,3,7]:

$$\tau^{(1)}(s)=\frac{1}{\sqrt{1-p^2(s)}}\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n\left[p(s)\right]; \quad p(s)=\frac{2s+b-d}{b+d}; \ \left|p(s)\right|<1, \qquad (2.1)$$

$$\tau^{(2)}(u)=\frac{1}{\sqrt{1-g^2(u)}}\sum_{n=0}^{\infty}Y_nT_n\left[g(u)\right]; \quad g(u)=\frac{2u+b_0-d_0}{b_0+d_0}; \ \left|g(u)\right|<1, \qquad (2.2)$$

где $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$ $(n=0,1,2,...)$ – многочлены Чебышева первого рода, а неизвестные коэффициенты разложений (2.1) и (2.2) X_n и Y_n $(n=0,1,2,...)$ подлежат определению.

Подставляя выражения $\tau^{(1)}(s)$ и $\tau^{(2)}(u)$ из представлений (2.1) и (2.2) в систему сингулярных интегральных уравнений (1.14) и (1.15) и пользуясь следующими спектральными интегральными соотношениями [5,6,7]:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{1}{t-x}\frac{T_n\left[h(t)\right]}{\sqrt{1-h^2(t)}}dt=\begin{cases}0; & n=0,\\ U_{n-1}\left[h(x)\right]; & (n=1,2,3,...),\end{cases} \qquad (a<x<b),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\sqrt{1-h^2(t)}U_{n-1}\left[h(t)\right]U_{m-1}\left[h(t)\right]dt=\begin{cases}0; & n\neq m,\\ \dfrac{b-a}{4}; & n=m,\end{cases} \qquad (n,m=1,2,3,...),$$

$$\frac{1}{®}\int_a^b \frac{T_n\left[h(t)\right]T_m\left[h(t)\right]}{\sqrt{1-h^2(t)}}dt = \begin{cases} 0; & n \neq m, \\ \dfrac{b-a}{4}; & n = m \neq 0, \\ \dfrac{b-a}{2}; & m = n = 0, \end{cases} \qquad (n,m = 1,2,3,...), \text{ (2.3)}$$

где $U_{n-1}(t) = \dfrac{\sin(n\arccos t)}{\sin(\arccos t)}$ $(n = 0,1,2,...)$ – многочлены Чебышева второго рода, и поступив традиционным способом [2,6], получим следующую совокупность квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов X_n и Y_n $(n = 1,2,3,...)$:

$$\begin{cases} X_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}X_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm}Y_n = \sim_m, \\ Y_m + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nm}Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} D_{nm}X_n = \quad_m. \end{cases} \qquad (m = 1,2,3,...), \qquad (2.4)$$

Ядра при неизвестных и свободных членах совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) определяются по следующим формулам:

$$A_{nm} = A_{nm}^* + A_{nm}^{(1)}; \qquad \sim_m = \sim_m^{(1)} + X_0\sim_m^{(2)} + Y_0\sim_m^{(3)},$$

$$C_{nm} = C_{nm}^* + C_{nm}^{(1)}; \qquad {}_m = {}_m^{(1)} + Y_0\, {}_m^{(2)} + X_0\, {}_m^{(3)},$$

$$A_{nm}^* = \frac{4}{®^2(b+d)}\int_{-b}^{d}\int_{-b}^{d}\frac{\sqrt{1-p^2(x)}}{\sqrt{1-p^2(s)}}K_{11}^*(s-x)T_n\left[p(s)\right]U_{m-1}\left[p(x)\right]dsdx,$$

$$B_{nm} = \frac{4}{®^2(b+d)}\int_{-b}^{d}\int_{-b_0}^{d_0}\frac{\sqrt{1-p^2(x)}}{\sqrt{1-g^2(u)}}K_{12}(u-x)T_n\left[g(u)\right]U_{m-1}\left[p(x)\right]dudx,$$

$$C_{nm}^* = \frac{4}{®^2(b_0+d_0)}\int_{-b_0}^{d_0}\int_{-b_0}^{d_0}\frac{\sqrt{1-g^2(x)}}{\sqrt{1-g^2(u)}}K_{22}^*(u-x)T_n\left[g(u)\right]U_{m-1}\left[g(x)\right]dudx,$$

$$D_{nm} = \frac{4}{®^2(b_0+d_0)}\int_{-b_0}^{d_0}\int_{-b}^{d}\frac{\sqrt{1-g^2(x)}}{\sqrt{1-p^2(s)}}K_{21}(s-x)T_n\left[p(s)\right]U_{m-1}\left[g(x)\right]dsdx,$$

$$A_{nm}^{(1)} = -\frac{ª(b+d)}{®}J_{nm}; \; C_{nm}^{(1)} = -\frac{ª_1(b_0+d_0)}{®}J_{nm}; \sim_m^{(3)} = -B_{0m}; \quad {}_m^{(3)} = -D_{0m}, \quad (2.5)$$

$$\sim_m^{(2)} = -A_{0m}^* + \begin{cases} -\dfrac{ª®(b+d)}{4}; & m=1, \\ \dfrac{ª(b+d)}{®} J_m; & m \neq 1, \end{cases} \qquad {}_m^{(2)} = -C_{0m}^* + \begin{cases} -\dfrac{ª_1®(b_0+d_0)}{4}; & m=1, \\ \dfrac{ª_1(b_0+d_0)}{®} J_m; & m \neq 1, \end{cases},$$

$$J_{nm} = \begin{cases} 0; & |m-n| = 1, \\ \dfrac{2m\left[1+(-1)^{m+n}\right]}{\left[(m+n)^2-1\right]\left[(m-n)^2-1\right]}; & |m-n| \neq 1, \end{cases} \qquad (n,m = 1,2,3,...),$$

$$\sim_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \neq 1, \\ ªP; & m = 1, \end{cases} \quad {}_m^{(1)} = \begin{cases} 0; & m \neq 1, \\ ª_1 Q; & m = 1, \end{cases}, \quad J_m = \begin{cases} 0; & m = 1, \\ \dfrac{2m\left[1+(-1)^m\right]}{(m^2-1)^2}; & m \neq 1. \end{cases}$$

Что касается неизвестных коэффициентов X_0 и Y_0, то они определяются из условий равновесия стрингеров (1.5) и имеют следующий вид:

$$X_0 = \frac{2P}{®(b+d)}, \quad Y_0 = \frac{2Q}{®(b_0+d_0)}, \tag{2.6}$$

Так как интенсивности неизвестных тангенциальных контактных усилий представлены в виде бесконечных рядов (2.1) и (2.2), то на основе (1.6) и (1.7) нормальные напряжения, возникающие в конечных стрингерах можно определить следующим образом:

$$\pm_x^{(1)}(x;a) = \frac{P}{®F_S^{(1)}}\left[® - \arccos p(x)\right] - \frac{b+d}{2F_S^{(1)}}\sqrt{1-p^2(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}X_n U_{n-1}\left[p(x)\right], \tag{2.7}$$

$$(-b \le x \le d),$$

$$\pm_x^{(2)}(x;-c) = \frac{Q}{®F_S^{(2)}}\left[® - \arccos g(x)\right] - \frac{b_0+d_0}{2F_S^{(2)}}\sqrt{1-g^2(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}Y_n U_{n-1}\left[g(x)\right], \tag{2.8}$$

$$(-b_0 \le x \le d_0).$$

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) с ядрами A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm} $(n,m = 1,2,3,...)$ и свободными членами $\sim_m$ и ${}_m$ $(m = 1,2,3,...)$, которые даются формулами (2.5).

Отметим, что исследование совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4) в смысле его квазивполне регулярности, можно проводить аналогично как в [2,4], поскольку регулярные ядра сингулярных интегральных уравнений (1.14) и (1.15) со своими частными производными– квадратично интегрируемые функции.

При этом, для любых значений физических и геометрических параметров суммы

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|A_{nm}\right| + \left|B_{nm}\right|\right); \qquad S_m^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|C_{nm}\right| + \left|D_{nm}\right|\right) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2.9)$$

имеют порядок $\text{O}(m^{-0,5-£})$ при $m \to \infty$, где $£$ – сколь угодно малое положительное число, а свободные члены $\sim_m$ и $_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ системы (2.4) стремятся к нулю со скоростью не менее, чем $\text{O}(m^{-1})$ при $m \to \infty$, и это обеспечивает квазивполне регулярность совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (2.4).

В конце отметим, что определив из (2.4) и (2.6) неизвестные коэффициенты X_n и Y_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, с помощью формул (2.1) и (2.2) найдем значения функций интенсивностей неизвестных тангенциальных контактных усилий $₂^{(1)}(x)$ $(-b < x < d)$ и $₂^{(1)}(x)$ $(-b_0 < x < d_0)$, а из формул (2.7) и (2.8) значения нормальных напряжений $\pm_x^{(1)}(x; a)$ $(-b \le x \le d)$ и $\pm_x^{(2)}(x; -c)$ $(-b_0 \le x \le d_0)$, возникающих в конечных стрингерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // ПМ. Труды Амер. общ. инж.–мех. Сер.Е. 1968. № 4. с. 124-135.
2. Григорян Э. Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. // ПММ. 1974. Т. 38. № 2. С. 321-330.
3. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Об одной контактной задаче для кусочно–однородной пластины с конечными стрингерами. // Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Ереван. Изд. ЕГУ. 1984. № 3. с.130-137.
4. Оганисян Г.В. Контактные задачи для упругой неоднородной (кусочно-однородной) бесконечной пластины со стрингерами. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ереван. 1986. 163 с.
5. Справочник по специальным функциям. // М.: Наука. 1979. 832 с.
6. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. // М.: Машиностроение. 1980. 416 с.
7. Попов Г. Я. О сведении интегральных уравнений теории упругости к бесконечным системам. // ПММ, 1966, т. 30, № 4, с. 672-682.

Сведения об авторах:

Оганисян Гамлет Вараздатович- кандидат физ.- мат. наук, ст. научный сотрудник, преподаватель кафедры механики ЕГУ, фак. математики и механики. Ереван, Алека Манукяна 1. Тел: (+374 93) 27-26-26.

Агабекян Пайкар Вараздатович- кандидат.физ.-мат. наук, научный. сотрудник Института Механики НАН Армении. Ереван, М.Баграмян 24б.Тел: (+37493)24-85-47.

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ВЕРЕТЕН МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОСТИ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕРАТОРА ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Папоян А.Р.

Гюмри, Армения

Динамический анализ веретена практически сводится к решению дифференциальных уравнений (1) [1].

$$m\ddot{x}+h_x\dot{x}+c_x x+c_{x\sim}\sim\ = me\left(\dddot{}\sin\ddot{}\ +\ \ddot{}^{2}\cos\ddot{}\ \right),$$

$$A\ddot{\sim}+J\ddot{}\ \dot{}\ +J\dddot{}\ \ +h_{\sim}\dot{\sim}+c_{\sim}\sim+c_{\sim x}x=(A-J)\text{¢}\dddot{}\sin(\ddot{}\ -\text{£})+$$
$$+(A-J)\text{¢}\ddot{}^{2}\cos(\ddot{}\ -\text{£}), \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}+h_y\dot{y}+c_y y+c_y\ \ \ \ =me(-\dddot{}\cos\ddot{}\ +\ddot{}^{2}\sin\ddot{}\ ),$$

$$A\ddot{}\ -J\ddot{}\dot{\sim}+h\ \dot{}\ +c\ \ \ +c\ _y y=-A\text{¢}\dddot{}\cos(\ddot{}\ -\text{£})+(A-J)\text{¢}\ddot{}^{2}\sin(\ddot{}\ -\text{£}),$$

где m – масса ротора (шпинделя веретена с насадком); J и A – соответственно осевой и экваториальный моменты инерции ротора; c_x, $c_{\sim}$, c_y , c , $c_{x\sim}$, $c_{\sim x}$, c_y , $c\ _y$ - коэффициенты жесткости, которые зависят от значений обобщенных координат x, ~, y, ; $h_{\sim}$ и h - коэффициенты линейных диссипативных сил; e, ¢ и £ -параметры динамической неуравновешенности ротора, зависящих от дисбаланса ротора в верхней и нижней плоскостях приведения $\overline{D}_{z1}$ и $\overline{D}_{z2}$ и угла ~ между этими векторами, зазоров $¢_1$ и $¢_2$ в опорах насадки шпинделя веретена.

Так величина эксцентриситета ротора e может быть найдена по формуле: $e=D_z\ /\ m$, где: D_z и m – статическая неуравновешенность и масса ротора.

Величина статической неуравновешенности D_z определяется из равенства: $D_z=\sqrt{D_{z1}^2+D_{z2}^2+D_{z1}D_{z2}\cos(\sim)}$, где ~ – угол между векторами $\overline{D}_{z1}$ и $\overline{D}_{z2}$. Угол ¢ между осью вращения катушки и ее главной центральной осью инерции определяется из соотношения $¢_k=J_{oz}\ /\ g(J-A)$, где: J и A – моменты инерции катушки относительно ее главных центральных осей инерции, g – ускорение силы тяжести, J_{oz} – модуль вектора центробежного момента инерции катушки. Угол между векторами статической и моментной неуравновешенностей ротора определяется из равенства $£=\cdot_1-\cdot_2$, где:

$$\cdot_1 = \mathrm{arctg}(-\mathrm{tg}\sim / (D_{z1} / (D_{z2}\cos\sim) + 1)), \quad \cdot_2 = \mathrm{arctg}(1/\mathrm{tg}\alpha - (J_{oz1} / (J_{oz2}\sin\sim))).$$

В этих выражениях J_{oz1} и J_{oz2} – векторы центробежного момента инерции ротора в приведенных плоскостях.

При исследовании динамических характеристик текстильных веретен, работающих с часто сменяемыми, не вполне уравновешенными катушками, посадка которых на шпинделе не является строго фиксированной, необходимо учитывать случайное распределение параметров неуравновешенности [2]. Один из возможных путей решения данной задачи состоит в использовании метода деревьев логических возможностей (ДЛВ), который позволяет определять вероятности реализации конкретных процессов и дает возможность находить основные статистические характеристики колебаний систем веретено-катушка [3,4]. Метод ДЛВ требует выполнения большого объема вычислений и затрат труда по анализу результатов исследований. Поэтому его рекомендуется применять в случае необходимости получения исчерпывающей информации о статистических характеристиках веретен. Для оценки основных характеристик воздействия случайного изменения параметров неуравновешенности в работе предложен экспресс-метод расчета, основанный на моделировании гистограмм параметров неуравновешенности с помощью функции, генерирующей псевдослучайные числа. Этот метод позволяет определять наиболее вероятные значения амплитуд колебаний, нагрузок в опорах и т.д. В рамках использования данного метода рекомендуется также определение динамических характеристик для наихудшего и наилучшего сочетания параметров неуравновешенности, вероятности которых малы, но с их помощью достигается возможность установления границ изменения вибрационных параметров системы веретено-катушка.

Предлагаемый ниже метод основан на наличии в библиотеке алгоритмического языка Borland C++ функций *int rand(void)* и *int random(int num)*, генерирующих псевдослучайные целые числа [5,6]. Эти числа для первой функции лежат в диапазоне от 0 до 32767, а для второй функции максимальное значение целого числа N = *int num* может быть задано пользователем.

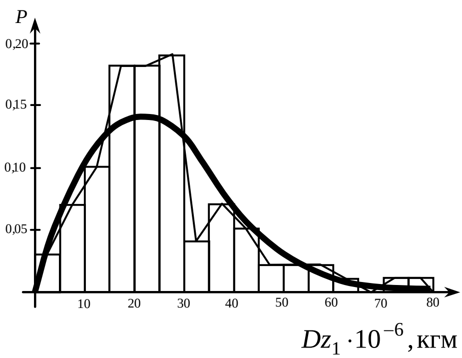


Рис. 1

Допустим, что мы имеем гистограмму распределения некоторой случайной величины, например, величины D_{Z1} и максимальное значение целого числа N (рис. 1). Тогда каждому столбику гистограммы с номером i соответствует известная величина частости (вероятности) P_i. Соответственно этим частостям определим промежутки псевдослучайных чисел $k_i = P_i N$. Далее на оси целых чисел от 0 до N отметим числа $n_1 = k_1$, $n_2 = k_1 + k_2$, ..., $n_i = \sum_{i=1}^{i} k_i$ и промежуткам n_i á $z < n_{i+1}$ сопоставим значения дисбалансов, равные $D_{Z1}(i)$, где x есть генерируемое псевдослучайное число. В результате при достаточно большом количестве вызовов функций *int rand(void)* или *int random(int num)* случайные значения z будут моделировать исходную гистограмму, а, следовательно, по значениям z в вычислительную программу можно будет вводить случайные значения дисбалансов D_{Z1}. Исходную гистограмму при выполнении практических расчетов можно упростить за счет объединения смежных столбиков с близкими значениями дисбалансов и суммирования их частостей. Так в результате объединения первых двенадцати столбиков гистограммы, приведенной на рис. 3.6-а, по три и последних четырех столбиков в один получим следующий алгоритм выбора значений дисбаланса D_{Z1}:

если $0 \le z < 6782$, то $D_{Z1} = 1 \cdot 10^{-5}$,
если $6782 \le zx < 24379$, то $D_{Z1} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$,
если $24379 \le z < 30179$, то $D_{Z1} = 4 \cdot 10^{-5}$,
если $30179 \le zx < 31719$, то $D_{Z1} = 5{,}5 \cdot 10^{-5}$,
если $31719 \le z \le 32767$, то $D_{Z1} = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Аналогичным образом можно моделировать и гистограммы всех остальных случайных первичных ошибок. (В нашем случае это относится к величинам D_{Z2}, ~, ¢$_1$ и ¢$_2$.).

Выбор случайных комбинаций этих значений может осуществляться как на каждом шаге численного решения уравнений динамики, так и через любое заданное количество шагов, соответствующее заранее определенным углам поворота веретена. Такая возможность обеспечивается за счет использования для численного решения уравнений движения веретена метода разложений искомых функций в ряды Тейлора. (Обратим внимание на то, что использование стандартного программного обеспечения для решения систем дифференциальных уравнений такой возможности не дает.)

Для проведения расчетов нами составлена программа на алгоритмическом языке С++, которая реализует процедуру решения дифференциальных уравнений движения веретена при изменении величин первичных ошибок на каждом шаге вычислений. Здесь, в отличие от уравнений с постоянными параметрами неуравновешенности, шаг вычислений уменьшен на порядок, что обусловлено необходимостью устранения влияния на точность вычислений скачкообразного изменения ряда входных величин, обусловленного введением алгоритма их случайного варьирования. Отметим, что изменение параметров неуравновешенности можно производить как на каждом шаге вычислений, так и через любое заданное количество шагов.

На рис. 2 представлены графики нагрузок в верхней опоре шпинделя веретена для трех вариантов изменения параметров неуравновешенности. В варианте а) значения величин D_{Z1}, D_{Z2}, ~, ¢$_1$ и ¢$_2$ изменяются на каждом шаге вычислений.

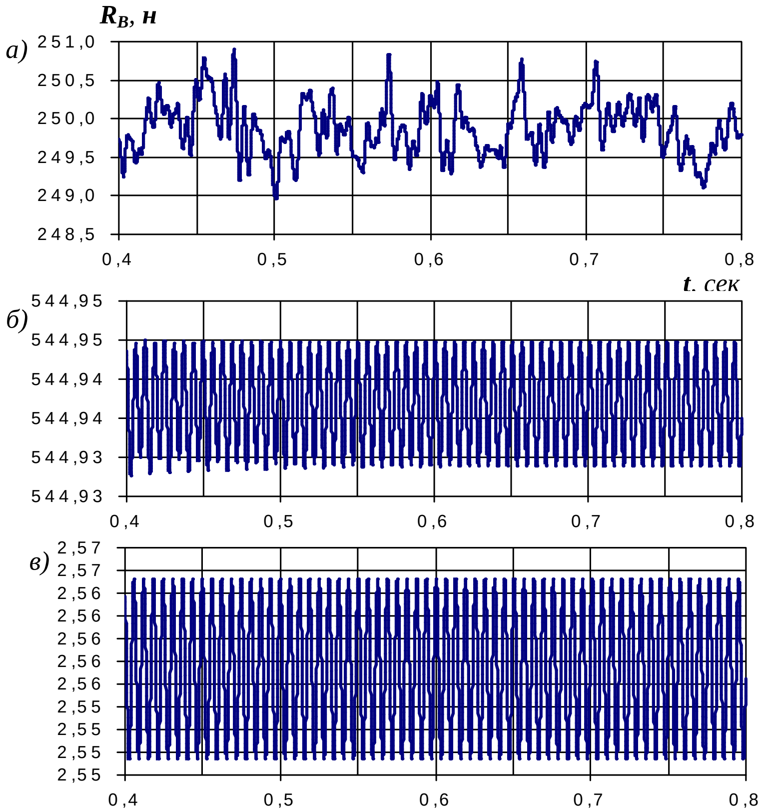


Рис. 2. Влияние изменения параметров неуравновешенности на динамические нагрузки в верхней опоре шпинделя веретена.

Графики динамических нагрузок в верхней опоре шпинделя веретена при наихудшей (максимальные нагрузки) и наилучшей (минимальные нагрузки) комбинациях параметров неуравновешенности приведены на рис. 2-б, в.

Наихудшим условиям соответствуют следующие параметры неуравновешенности: $D_{z1} = 8 \cdot 10^{-5}$ кгм, $D_{z2} = 8 \cdot 10^{-5}$ кгм, ~ =0,05 рад, ¢$_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м, ¢$_2 = 3{,}0 \cdot 10^{-4}$ м, а наилучшим: $D_{z1} = D_{z2} = 0$, ~ =1,57 рад, ¢$_1$ = ¢$_2$ =0.

Из данных рисунков видно, что нагрузки в верхней опоре шпинделя определяются, в основном, качеством балансировки и посадки катушки на шпиндель веретена. При этом особое внимание следует обратить на минимизацию зазоров в опорных втулках стволика катушки, так как для тщательно отбалансированных катушек основной вклад в общую неуравновешенность системы вносится именно этими зазорами.

Динамический анализ веретен показал, что неуравновешенность, обусловленная зазорами в опорах катушки, сопоставима с неуравновешенностью, вызываемой остаточным дисбалансом веретена и катушки, в связи с чем, необходимо проведение исследовательских и конструкторских работ по созданию фиксаторов, обеспечивающих исключение или минимизацию зазоров в опорах катушки.

В результате выполнения расчетов установлено, что с увеличением частоты вращения веретена возрастает чувствительность системы к первичным ошибкам, что проявляется в увеличении среднеквадратических отклонений значений амплитуд и усилий в опорах. Результаты показывают, что теоретическому динамическому анализу веретен должно предшествовать изучение статистических характеристик его неуравновешенности с обязательным установлением ее причин и выявлением значимости различных конструктивных факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Papoyan A. About dynamic unloading of the disk support of high-speed spindle supported rotor. Problems of mechanics, international scientific journal, Tbilisi, 2010, №4 (41), pp. 66-71.
2. Папоян А. О динамическом расчете ротора при случайной неуравновешенности. // Машиноведение. – М., №3, 1985. С. 37-41.
3. Сергеев В.И. Метод деревьев логических возможностей и его применение в задачах машиностроения. – Сб. «Автоматизация научных исследований и измерений размеров в машиностроении».–М.: Наука, 1976.
4. Папоян А. Применение метода деревьев логических возможностей (ДЛВ) при анализе амплитуд колебаний и реакций в опорах шпинделя веретена. //Оборудование для прядильного производства и пр-ва хим. волокон. ЦНИИТЭИлегпищемаш. – М., №2, 1982. С. 19-25.
5. Уинер Р. Язык Турбо Си. – М.: Мир, 1991.- 255 с.
6. Касаткин А.И., Вальвачев А.Н. От Turbo C к Borland C++. Справ. пособие; Под общ. ред. А.И. Касаткина. – Мн.: Выш. шк., 1992. 240 с.

Папоян Ашот Рафикович
Доктор технических наук, профессор
Гюмрийский филиал ГИУА, кафедра прикладной механики
377503, Гюмри, ул. М.Мкртчяна 2,
Тел:(312)46583 раб., мобил. (094) - 881500
Эл. почта - papash@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ ПЛОСКОЙ ПОЛОСЫ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПОРИСТОСТИ МАТЕРИАЛА И ЧИСЛА ОБОРОТОВ ВАЛКОВ

Петросян Г.Л., Моталлеби С.Р., Саакян В.А.

Ереван, Армения. Тегеран, Иран

В процессе обработки металлов давлением основное место занимает прокатка прямоугольного поперечного сечения плоской полосы, имеющая большое практическое значение. В зависимости от типа материала (сплошной, порошковый, спеченный или неспеченный) аналитические исследования [1] и компьютерное моделирование [2] этого процесса основаны на соответствующих теориях пластичности. При этом компьютерное моделирование [2] позволяет решить задачу более полно с учетом многочисленных параметров технологического процесса.

Обзор литературы показал, что тип деформированной зоны материала зависит от многочисленных технологических параметров, и, следовательно, задача является достаточно сложной. Это обусловлено тем, что значительно маленькая деформированная зона в основном разделяется на зоны отставания и опережения, в которых уравнения равновесия элементов различные и отличаются друг от друга знаком касательного напряжения. Другая сложность обусловлена применением метода аппроксимации контактной с валками цилиндрической поверхности [1].

В [1] задача решена аппроксимацией контактной с валками цилиндрической кривой (рис.1) параболической линией с использованием теории течения пористых материалов [3]. Нами приведен приближенный инженерный метод решения задачи моделированием контактного деформированного окружного края полосы двумя хордами, когда вместо двух дифференциальных получаются аналитические уравнения. Решением соответствующих систем уравнений получены компоненты напряженного состояния деформированной зоны полосы: осевого напряжения $\pm_x$, контактного нормального p и касательного fp давлений (где f- коэффициент трения).

Настоящая работа является продолжением [1,2] и посвящена учету влияния процесса прокатки пористости материала полосы и числа оборотов валков на технологические параметры.

Учет пористости материала. Отметим, что в [1] также обсуждался вопрос учета пористости материала. Однако ввиду сложности данного вопроса возникает необходимость его усовершенствования. Для упрощения процесса учета пористости материала без обсуждения используются основные начальные данные метода [1] применительно к сплошным материалам:

1. Безразмерные величины: $\bar{\sigma}_x = \sigma_x / \sigma_y$, $\bar{p} = p / \sigma_y$, где σ_y - предел текучести материала;
2. Условие отсутствия поперечной деформации полосы ($\varepsilon_z = 0$ - плоская деформация);
3. Допущение о главных напряжениях $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$– $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_z$, $\sigma_3 = -p$
4. Получение формул для поперечного и среднего напряжений: $\sigma_z = (\sigma_y - 2p)/2$ и $\sigma_0 = (\sigma_y / 2) - p$

На рис.1 показана схема прокатки плоской полосы прямоугольного поперечного сечения и элемента со стороной *аб* окружной дуги. При этом ψ – угол, определяющий положение нейтрального сечения, где отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения имеют максимальные значения. На рис. 2 показана основная диаграмма [1] (кривая *abc*) безразмерного контактного нормального давления $\bar{p}$ в зависимости от длины контактной зоны *x*.

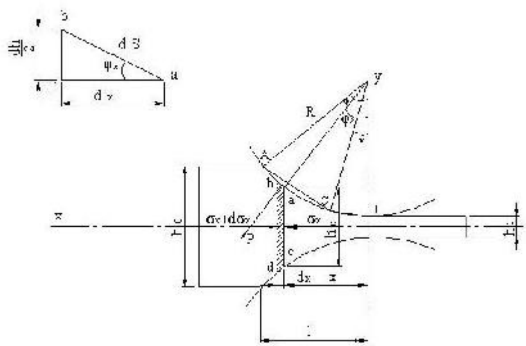


Рис.1. Схема прокатки плоской полосы прямоугольного поперечного сечения

Сложность учета пористости заключается в том, что давление $\overline{p}$ в данном случае изменяется в пределах 1,0 ... 2,8. Для этого задача решается ступенчато, и ее применение на практике представляет затруднения.

На рис. 2 показаны также диаграммы $\overline{p}$ - x (кривые a_1b_1c, a_2b_2c, a_3b_3c, a_4b_4c) при различных значениях контактного угла ~ . Как видно, при уменьшении угла ~ уменьшается и давление $\overline{p}$. Отметим, что при малых ~ (малых степенях деформации) давление $\overline{p}$ приближается к единице.

Учитывая, что технологический процесс прокатки обычно осуществляется многочисленными малыми проходами, возникает возможность решения задачи по проходам, принимая давление в каждом проходе равным $\overline{p}=1$.

Для решения поставленной задачи были использованы уравнения деформационной теории пластичности пористых материалов [3].

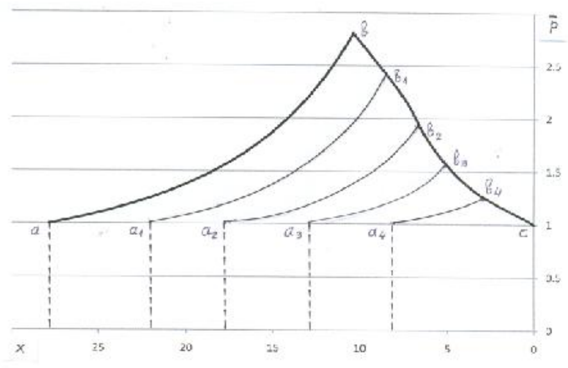


Рис. 2. Диаграммы $\overline{p}$ *- x при различных значениях контактного угла* ~

Формулу текущей пористости материала [3] представим в виде

$$v = 1-(1-v_0)\exp\left(-9v_0^m \pm_0 £_{eq} / (1-v)^{3n} \pm_{eq}\right), \qquad (1)$$

где $\pm_{eq}$ и $£_{eq}$- эквивалентные напряжения и деформации; v_0 и v - начальная и текущая пористости материала; m и n – параметры пористости; а $\pm_0 = \left(\pm_1 + \pm_2 + \pm_3\right)/3$ - среднее напряжение.

Отметим, что в формуле (1) основную роль имеет выражение

$$-9v_0^m \pm_0 £_{eq} / \left(1-v\right)^{3n} \pm_{eq} .$$

Постепенным формоизменением этого выражения получим

$$-9v_0^m \pm_0 £_{eq} / \left(1-v\right)^{3n} \pm_{eq} = -9\frac{v_0^m}{\left(1-v\right)^{3n}} \frac{\pm_0}{\pm_{eq}} £_{eq} = -9 f_1(v) f_2(\pm) £_{eq} ,$$

где функции пористости и напряжения, а также эквивалентная деформация имеют вид

$$f_1(v) = v_0^m / \left(1-v\right)^{3n} , \; f_2(\pm) = \pm_0 / \pm_{eq} = -\overline{p} + 0.5 , \; £_{eq} = \ln(h_0 / h_1) . \quad (2)$$

Отметим, что с помощью формул (1) и (2) можно определить пористость материала после одного прохода. Этот метод учитывает упрочнение материала: из диаграммы его деформирования по текущему значению эквивалентного напряжения можно определить текущий предел текучести материала, что невозможно осуществить использованием метода, представленного в [1].

В качестве примера определим пористость полосы после одного прохода при 20%-й начальной пористости материала ($¬_0 = 0{,}2$), когда $\sim = 3^0$ h_0 = 7*мм*, h_1 = 6,45*мм*, R=200мм, $m = 1$, $n = 0.25$ $\overline{p} = 1$. Из (2) получим, $f_1(v) = 0.236$, $f_2(\pm) = -0.5$, $£_{eq} = 0.0815$ а из (1): $v = 12.8\%$

Учет числа оборотов валков. Исследование процесса прокатки полосы выполнено автоматизированным программным средством DEFORM-2D, основанным на методе конечных элементов (МКЭ). В [2] приведены особенности моделирования этого процесса с учетом некоторых технологических факторов. В частности, задача горячей прокатки решена с использованием скорости деформирования. При этом изменение скорости деформирования обеспечивается различным числом оборотов валков (об/мин). В качестве материал полосы был взят алюминиевый сплав марки АА5083. В настоящей работе описывается только влияние скорости деформирования полосы на силовые параметры процесса, позволяющие выбрать станы и рассчитать соответствующее оборудование.

На рис. 3 изображены графики зависимостей сил, действующих на валок, от времени при различных числах их оборотов (об/мин). При этом величина силы определяется произведением площади эпюры давления *p и* ширины прокатываемой полосы.

Как видно из графиков, с увеличением числа оборотов валка величины сил увеличиваются, а время одного цикла прокатки уменьшается. Это соответствует известному на практике изменению механических свойств материалов в связи с процессами быстрого деформирования.

Заключение. Приведен инженерный метод определения величины пористости полосы из упрочненного материала после прокатки без исследования напряженного состояния зон отставания и опережения.

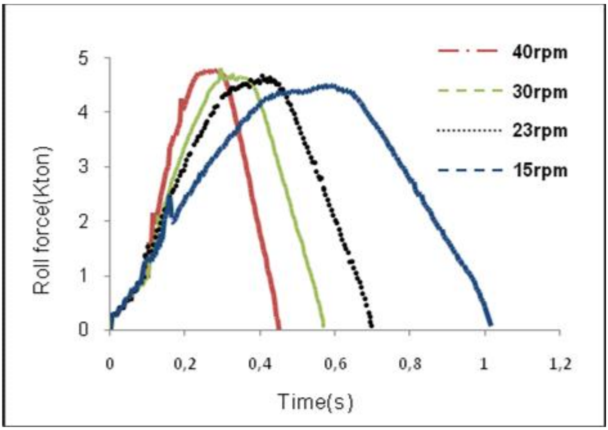


Рис. 3. Графики зависимостей сил, действующих на валок, от времени при различных числах их оборотов (40, 30, 23 и 15 об/мин)

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян. Г.Л., Аксиджян Г.К., Мусаелян Г.В., Методика учета.упрочнения при исследовании процессов прокатки пористых заготовок//. Изв. АН АрмССР. Сер. ТН.-1989.-Т 42, 5.-Ц 218-223.
2. Պետրոսյան Գ.Լ., Խաչատրյան Հ.Հ., Моталлеби С.Р., Լևոնյան Հ.Լ. Հարթ նմուշի գլոցման գործընթացի մոդելավորման առանձնահատկությունները ավտոմատացված ծրագրային միջավայրում // ՀՊՃՀ (Պոլիտեխնիկ) Լրաբեր: Գիտական և մեթոդական հոդվածների ժողովածու.- Երևան, 2011. - Հատոր 3, N 1.- էջ 67-72:
3. Петросян. Г.Л. Пластическое деформирование порошковыõ материалов.-М.: Металлургия, 1988.-153с.

Сведения об авторах:

Петросян Геворг Людвикович – д.т.н., проф., ГИУА, проф. кафедры машиноведения,
0009, Ереван, ул. Теряна, 105.
094-754-103,
gevorglp@seua.am

Саакян Ваган Арменович – магистр ГИУА.
0009, Ереван, ул. Рубинянца 5,
055-766-236,
sahakyanvahan@gmail.com

Моталлеби Сеид Реза – аспирант ЕГУ, Иран, Тегеран,
sr_motallebi@yahoo.com

ПОГЛОЩЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ГРУНТАХ

Петросян Т. Л., Маркосян Г. Б.

Ереван, Армения

Распространение ультразвуковых колебаний в среде определяется его разными свойствами. Поэтому скорость распространения и затухание ультразвуковых волн тесно связаны с упругими и деформационными свойствами материала, и их определение представляет собой важное средство исследования и контроля. Существуют многочисленные теоретические и экспериментальные работы, посвященные этому направлению [1].

В работах [2.3] приведены результаты исследований поглощения ультразвуковых колебаний твердыми телами. Исследованы образцы различных металлов, а также образцы монокристаллов кварца, поваренной соли и др. Получено, что поглощение ультразвуковых колебаний чрезвычайно сильно зависит от наличия в среде упругих неоднородностей.

В работе [4] осуществлены исследования упругих и поглощающих свойств горных пород при высоких всесторонних давлениях . Измеряя значения скоростей продольных и поперечных ультразвуковых волн с помощью известных зависимостей динамической теории упругости, получены упругие характеристики горных пород. Получены зависимости упругих характеристик горных пород, а также скорости распространения и коэффициенты затухания в них ультразвуковых волн в зависимости от всестороннего давления, которое представляет большой интерес для ряда разделов геофизики, сейсмологии, сейсмического зондирования, сейсморазведки и т.п.

Чрезвычайно важно изучение упругих и поглощающих свойств глинистых грунтов при выбре расчетных моделей грунтов и грунтовых основанй, применяемых в динамике оснований и фундаментов, в области сейсмостойкости сооружений, геофизических исследований и инженерной сейсмологии. Отметим, что ультразвуковой метод, который до сих пор широко применялся для определения упругих свойств твердых тел, к грунтам применялся эпизодически [5,6].

В работе [6] измерены скорости продольных и поперечных ультразвуковых волн, рассчитаны значения модуля упругости, модуля сдвига, коэффициента Пуассона и приведены зависимости последних от статического обжатия образцов песка и супеси.

Целью настоящей работы является исследование распрастранения и затухания ультразвуковых волн в глинистом грунте при разных его физических состояниях.

Изготовление образцов осуществлялось на компрессионном приборе с диаметром d=70мм и высотой h=20 мм. Для получения образцов с разными физическими параметрами (плотность $^{\circ}$, влажность w, коэффициент пористости е) паста, имеющая влажность $w_0 = 0,35$, консолидировалась под давлениями $\pm_0 = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0$ МПа. При каждом напряжении $\pm_0$ консолидировались по три образца–близнеца. Усредненные значения физических параметров водонасыщенных образцов глины, полученные после полной разгрузки и затуханий деформаций декомпрессий, приведены в таблице 1.

Генерирование ультразвуковых колебаний, их усиление и регистрация входа волн в датчики осуществлялись стандартными приборами. Датчики изготовлены из материала, обладающего пьезоэффектом: для продольных волн из кристалла сегнетовой соли.

Таблица 1

Физические параметры образцов

$\pm_0$ МПа	$°_s$ кг/см	° кг/см	$°_t$ кг/ см	w	e
0.025	2.760	1.874	1.437	0.304	0.837
0.05	2.760	1.927	1.511	0.275	0.747
0.1	2.760	1.933	1.528	0.265	0.728
0.2	2.760	1.974	1.579	0.247	0.672
0.4	2.760	1.985	1.611	0.236	0.638
1.0	2.760	2.035	1.677	0.214	0.574

Исследование заключеатся в следующем. Возбуждается короткий импульс высокочастотных колебаний и измеряется время распространения продольных волн через образец. По этим данным вычисляется скорость продольных волн V_p .

На рис. 1 приведен график зависимости скорости продольной волны V_p от плотности ° водонасыщенного грунта. График аналогичной зависимости V_p от коэффициента пористости грунта e приведен на рис. 2.

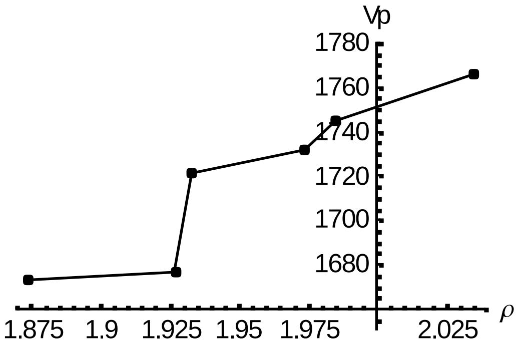


Рис. 1 Зависимость скорости продольных волн V_p от плотности грунта ° .

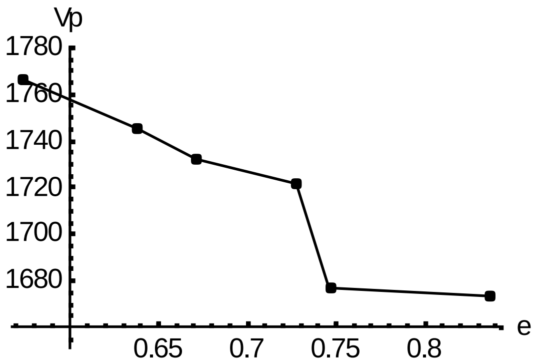


Рис. 2 Зависимость скорости продольных волн V_p от коэффициента пористости e.

Из рис.1 и 2 видно, что с увеличением плотности ° и уменьшением коэффициента пористости e глинистого грунта возрастает скорость продольных волн.

Отметим, что в работах [4] и [6] приведены графики зависимостей скорости продольных и поперечных волн от статического сжатия при компрессии для грунтов, из которых трудно отличать влияние напряженного состояния и физических пораметров на скорость распространения волн.

Для исследования затухания ультразвука в грунте использован метод, основанный на определении затухания ультразвуковых импульсов, многократно отраженных от оснований цилиндрического образца грунта. Стандартный генератор генерирует электрические импульсы с высокой частотой и длитеlьностью 18 мксек, которые поступают в датчик с сегнетовой солью, излучающей ультразвуковые импульсы в образец грунта. С помощью аналогичного датчика на другом конце образца осуществляется прием ультразвуковых импульсов, прошедших через образец и многократно отраженных от его концов. В результате на экране осциллографа наблюдается картина затухающих импульсов, распространяющихся в образце.

Амплитудный коэффициент ($\sim$ м$^{-1}$) затухания продольных ультразвуковых волн в образце вычислялся по известной формуле $A = A_0 e^{-\sim l}$ [1], где A_0 начальная амплитуда волны, A –амплитуда после прохождения волной длины l.

На рис. 3 приведены графики зависимости коэффициента затухания $\sim$ от начальной амплитуды A_0 для разных состояний плотности—влажности водонасыщнного глинистого грунта.

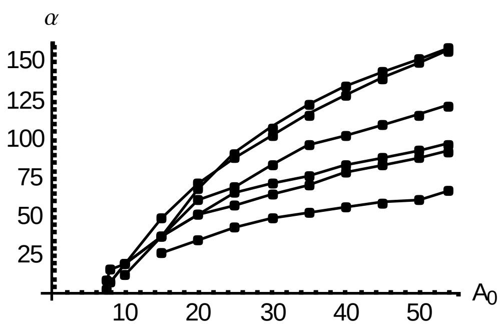


Рис. 3 Зависимость амплитудного коэффициента $\sim$ от начальной амплитуды A_0 .

На основании проведенных опытов можно сделать следующие выводы:

1. С увеличением плотности водонасыщенного грунта скорость продольных ультразвуковых волн возрастает.
2. Затухание ультразвуковых импульсов возрастает с увеличением начальной амплитуды импульса A_0 .
3. Затухание ультразвуковых импульсов уменьшается с увеличением плотности ° .
4. Влияние изменения начальной амплитуды A_0 на затухание импульса уменьшается с увеличением плотности ° .

ЛИТЕРАТУРА

1. Бражников Н.И. Ультразвуковые методы. М,-Л,: Изд. Энергия, 1965. 248 с.
2. Соколов С.Я. Поглощения ультразвуковых колебаний твердыми телами.// Доклаdы АН СССР, новая серия, 1948.Т. 59. N5. С. 883-886.
3. Соколов С.Я. Поглощение ультразвуковых колебаний монокристаллами.// ЖТФ. 1949.Т. 19. Вып.2., С.274-278.
4. Волатович М.П., Баюк Е.И., Левыкин А.И. Исследование упругих свойств горных пород и поглощения в них упругих волн при высоких всесторонних давлениях.//Сб. ,,Применение ультраакустики к исследованию вещества.'' Вып. 1961.13. М.: С. 55—61.
5. Красников Н.Д. Динамические свойства грунтов и методы их определения., Л.: Стройиздат 1970. 240 с.
6. Забылин М.И. Мойсейчик Е.К. Исследование упругих свойств грунтов ультразвуковым методом.// Изв. ВУЗ-ов, Стройительство и архитектура. 1979. N9. С. 135-139.

Сведения об авторах;

Петросян Тигран Людвикович
Науч. сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: Ереван, Джрвеж ул. 10, дом 21
Тел.: (37410) 67 43 04 (дом.)
E-mail: tlpetrosyan@mail.ru
Маркосян Гагик Вараздатович
Доцент кафедры геофизики ЕГУ, кандидат геолого-минералогических наук
Адрес: Ереван, Давидашен, I квартал, дом 45, кв. 25
Тел.: (37410) 36 52 22 (дом), E-mail: markos@web.am

ИССЛЕДОВАНИЕ ФРИКЦИОННОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ И НАГРУЗОЧНОЙ СПОСОБНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ САМОСМАЗЫВАЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПОЛИМЕРОВ

Погосян А.К., Карапетян А.Н., Оганесян К.В

Ереван, Армения

Приведены результаты экспериментальных исследований фрикционной долговечности и нагрузочной способности композиционных самосмазываюших полимерных материалов типа СИПАН. Установлен эксплуатационный диапазон этих материалов по эффективному применению в различных узлах трения машин и приборов.

Введение. В настоящее время не вызывает сомнения тот факт, что композиционные самосмазывающиеся полимерные материалы (**КСПМ**) прочно вошли в современную технику и широко применяются в узлах трения машиностроения и приборостроения. Потребность и область применения этих материалов, способных работать в металлополимерных и полимер-полимерных трибосопряжениях без смазки, приобретает актуальное значение для повышения качества, надежности и долговечности машин, устройств и приборов [1-3]. Следует учесть, что с развитием научно-технического прогресса и созданием принципиально новых машин и приборов возрастают требования к эксплуатационным характеристикам полимерных материалов, применяемых в различных трибосопряжениях. Все более значительное влияние на ресурс работы пар трения оказывают износостойкость и технологическая точность изготовления деталей, а также сохранение их высоких антифрикционных свойств при повышенных скоростях скольжения и нагрузках. Однако для внедрения этих материалов необходимо располагать также данными об их фрикционной усталости и нагрузочной способности. Поэтому исследование фрикционной долговечности и нагрузочной способности разработанных КСПМ является очень важным и актуальным при различных условиях эксплуатации.

Цель работы - исследование фрикционной долговечности и нагрузочной способности разработанных материалов с целью определения эксплуатационного диапазона по их применению в различных узлах трения машин и приборов.

Методика испытания. Для получения **КСПМ** в качестве связующих использовались следующие гетероцепные полимерные материалы: сополимер формальдегида с диоксоланом (СФД), алифатические полиамиды (ПА6, ПА66) и полифениленоксид (ПФО), в качестве наполнителей – армянские минеральные наполнители, модифицированные фторсодержащими олигомерами – фторалканами общей формулы $H(CF_2)_nCl$, где n=7-14 [4-6].

Трибологические свойства разработанных материалов оценивались на машинах трения СМЦ-2 и 2070 СМТ-1 по схеме “вал-частичный вкладыш”, а также на машине торцевого трения И-47 при скоростях от 0,25 до 5,0 м/с и в диапазоне нагрузок от 0,1 до 10,0 МПа. Полимерными образцами служили валик Ø10x15 мм и втулка Ø 22x12 мм, контртелами – диск 50x14 мм и втулка Ø 22x12 мм, изготовленные из сталей 45 (48-52 HRC) и 1Х13(150-170 НВ) с шероховатостью R_a=2,50-0,20 мкм. Температуру в зоне трения измеряли хромель-капелевой термопарой, помещенной в контртело на расстоянии 0,5 мм от поверхности трения, и регистрировали с помощью самопишущегося потенциометра типа КСП-4.

Фрикционную долговечность материалов определяли на основании теории фрикционной усталости по формуле [7]:

$$n=\left(\pm_o / \pm_s\right)^{t_y}, \qquad (1)$$

где $\pm_o$ -- статическая прочность материала, МПа, определяемая экстраполяцией аппроксимирующей прямой, построенной в координатах lgσ=F(lgn) к значению lgn=0 (n=1), а параметр фрикционной усталости -- t_y определяется как котангенс угла наклона этой прямой; $\pm_{\varepsilon}$ -- действующее напряжение, МПа.

Адгезионную прочность пленки фрикционного переноса к поверхности трения рассчитывали по соотношению Дюпре[8]:

$$W=2[(Y_{s1}^{d}Y_{s2}^{d})^{1/2}+(Y_{s1}^{h}Y_{s2}^{h})^{1/2}, \qquad (2)$$

где Y_{s1}^{d} и Y_{s2}^{d}, а также Y_{s1}^{h} и Y_{s2}^{h} -- соответственно дисперсионная и полярная составляющая поверхностной энергии для двух жидкостей: воды и метилениодида.

Работоспособность антифрикционных материалов в условиях фрикционного нагружения оценивали по методике, разработанной в трибоцентре ИММС НАН Беларуси [9].

Результаты исследования и обсуждение. Известно, что модифицированные армянские минеральные наполнители (МАМН) оказывают существенное влияние на структуру и свойства гетероцепных полимеров. Установлено, что разработанные композиции характеризуются повышенной износостойкостью, низким коэффициентом трения и улучшенными прочностными характеристиками [4-6, 10].

Полученные трибологические результаты (табл.1) позволяют сделать предположение о том, что изменение характера трения и изнашивания полученных материалов в зависимости от продолжительности скольжения и температуры связано в основном с образованием прочных пленок фрикционного переноса.

Таблица 1

Сравнительные трибологические свойства разработанных материалов на основе гетероцепных полимеров с оптимальным количеством МАМН [4-6]

Состав композиции, вес.%	Интенсивность изнашивания $I\cdot10^{-9}$	Коэффициент трения f	Температура на фрикционном контакте g ,^{0}C
СФД СФД+40% МАМН	12,2 / 46,5 5,2 / 20,2	0,24 / 0,30 0,14 / 0,20	90 / 100 70 / 80
ПА-6 ПА6+30% МАМН	12,2 / 46,5 5,2 / 20,2	0,24 / 0,30 0,14 / 0,20	90 / 100 70 / 80
ПА-66 ПА66+20% МАМН	10,5 / 48,3 4,8 / 18,2	0,26 / 0,34 0,16 / 0,22	100 / 125 80 / 90
ПФО ПФО+30% МАМН	15,0 / 54,7 5,4 / 23,7	0,24 / 0,30 0,16 / 0,22	110 / 120 70 / 80
АТМ - 2 ПТФЭ Эстеран - 51 СФД СФД - ДМ Хостаформ	11,8 / 55,4 8,6/ 32,6 9,42 / 38,2 10,29 / 45,8 9,06 / 43,2 10,12 / 46,2	0,18 / 0,28 0,16 / 0,24 0,25 / 0,35 0,16 / 0,23 0,15 / 0,22 0,15 / 0,22	95 / 115 95 / 115 90 / 110 90 / 110 85 / 105 90 / 110

В числителе указаны показатели испытания на машине трения СМТ-1 при трении по стали 45 (48-52HRC), P_a=1,91МПа и V=0,78 м/с, а в знаменателе – на машине торцевого трения ИМ-58 при трении по стали 1Х13 (150-170 НВ), P_a=0,2МПа и V=1,7 м/с.

Проведенный сравнительный анализ трибологических свойств полученных материалов с некоторыми распространенными полимерными материалами показал, что наименьшие значения интенсивности изнашивания и коэффициента трения соответствуют композициям, модифицированным ФА. Таким образом, проведенные исследования свидетельствуют о том, что разработанные материалы типа СИПАН, обладают улучшенными стабильными триботехническими характеристиками в условиях исследованных нагрузок, скоростей и температур.

Параметры фрикционно-контактной усталости для разработанных материалов в сравнении с аналогичными данными для некоторых распространенных полимеров приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры фрикционно-контактной усталости при трении без смазки

Материал	σ_o, МПа	t_y
СИПАН	180	2,26
СФД	147	1,3
Полиамид -6	170	1,86
Полиамид -66	180	1,92
Полифениленоксид	150	1,25

Из приведенных данных видно, что преимущество имеют материалы типа СИПАН, обладающие повышенным значением параметра t_y, который существенно влияет на фрикционную долговечность контакта. Проведенные расчеты (табл. 3) показывают, что фрикционная долговечность зависит от действующего напряжения и свойств материалов, причем определяющая роль принадлежит показателю степени t_y. Например, при действующем напряжении от 10 до 100 МПа фрикционная долговечность СИПАН-а примерно 20 раз выше фрикционной долговечности указанных материалов.

Известно [1-6], что работоспособность и долговечность полимерных материалов в целом определяется долговечностью пленок фрикционного переноса (ФП), то есть ее адгезионной способностью к поверхности трения. В процессе трения были рассмотрены два этапа формирования пленок ФП: начальный период трения (10 мин) и период установившегося трения (6 ч). Расчетные значения адгезионной прочности пленок ФП в зависимости от условий трения приведены в табл. 4.

Из приведенных результатов видно, что по адгезионной прочности пленок ФП преимущество имеют материалы типа СИПАН. Результаты трибологических испытаний свидетельствуют о значительном увеличении нагрузочной способности разработанных материалов (см. рис.). Предельные значения удельных нагрузок и скоростей скольжения, при которых сохраняется стабильная работоспособность материалов типа СИПАН, составляет PV≤2.5MPa·м/с, что существенно превосходит по указанным параметрам приведенных материалов и практически не уступает другим известным антифрикционным материалам.

Таблица 3

Расчетные значения фрикционной долговечности

Материал	Фрикционная долговечность n при ± ε, МПа			
	100	50	20	10
СИПАН	3,77	18,1	140	685
СФД	1,65	4,06	13,37	33
Полиамид -6	2,68	9,74	53,54	194
Полиамид -66	3,09	11,69	68	257
Полифениленоксид	1,66	3,94	12,41	32,6

Таблица 4

Влияние условий трения на толщину и адгезионную прочность пленок ФП

Материал	Условия трения		Толщина пленки ФП, мкм	Адгезионная прочность пленки ФП 10^{-3}, Дж/м^2
	время, мин	Температура на фрикционном контакте, ^{0}C		
СИПАН	10 360	35 55	0,64 3,8	38 101,3

СФД	10 360	40 100	0,45 2,8	21 72,4
ПА-6	10 360	40 100	0,40 2,6	18 62,8
ПА-66	10 360	50 110	0,38 2,4	26 69,6
ПФО	10 360	50 120	0,65 3,0	15,8 57

Заключение. Таким образом, проведенное исследование фрикционной долговечности и нагрузочной способности разработанных материалов типа СИПАН, позволило высказать ряд выводов по их трению, изнашиванию и смазыванию, а также определению возможного эксплуатационного диапазона их эффективного применения в различных узлах трения машин и приборов.

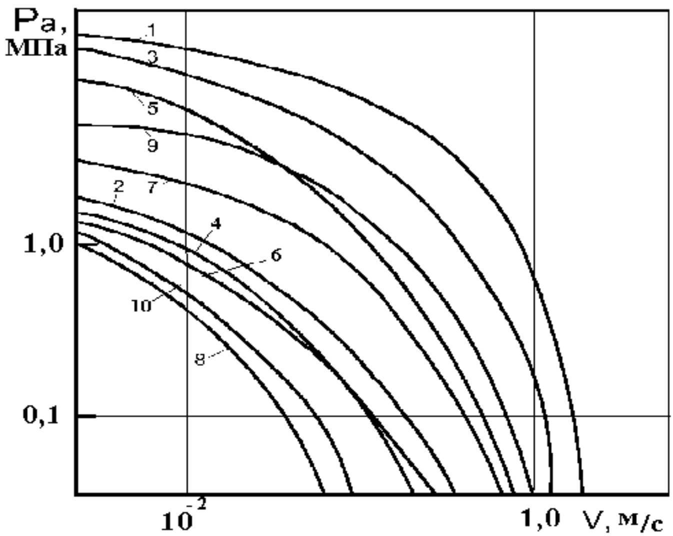


Рис. Совокупность предельных значений удельных нагрузок и скоростей скольжения: [PV] (1, 3, 5, 7, 9) и [PV] (2, 4, 6, 8, 10).

1, 2 - СИПАН; 3,4 - АТМ-2; 5, 6 - полиамид 6; 7, 8 - полиамид -66; 9, 10 – полифениленоксид

- Разработанные композиционные материалы типа СИПАН обладают повышенными параметрами фрикционной долговечности по сравнению с аналогичными данными некоторых распространенных полимеров, таких как полиформальдегид, полиамид, поликарбонат, капролон и полифениленоксид. Фрикционная долговечность разработанных композитов до 20 раз выше фрикционной долговечности указанных материалов.

- На основании результатов трибологических испытаний, проведенных на машине трения СМТ-1 по схеме “вал-частичный вкладыш”, а также на машине торцевого трения И-47 при скоростях от 0,25 до 5,0 м/с и в диапазоне нагрузок от 0,1 до 10,0 МПа установлено, что разработанные композиционные материалы обладают достаточно стабильными трибологическими свойствами в условиях исследованных нагрузок, скоростей и температур, что объясняется в основном образованием на поверхностях трения гладких, монолитных и когерентных пленок фрикционного переноса, адгезионная прочность которых в 1,4-1,8 раза больше, чем у указанных полимерных материалов.
- Разработанные композиционные материалы рекомендуются в приборостроении и машиностроении для изготовления подшипников скольжения (втулок, вкладышей), мелкомодульных зубчатых колес и направляющих скольжения, эксплуатирующихся без смазки при значениях $PV \leq 2{,}5$ МПа·м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белый В.А., Свириденок А.И. и др. Трение и износ материалов на основе полимеров. Минск: Наука и техника.-1976. -431с.
2. Полимерные композиты и трибология: Тез. докл. межд. научно-технической конф. Гомель: ИММС НАНБ. 2007.-216с.
3. Погосян А.К. Трение и износ наполненных полимерных материалов. М.: Наука.-1977. -138с.
4. Pogosian A.K., Karapetyan A.N., Hovhannisyan K.V. Study of Physico-Chemical Modification Process of Heterochained Polymers by the Fillers Minerals // Tribologia, Warsaw (Poland) -2004.- № 1.(193), pp.63-73.
5. Pogosian A.K., Karapetyan A.N., Hovhannisyan K.V. Development of Composite Antiftiction Materials based on the Thermoplastic Polymers // Tribologia, Warsaw (Poland) -2005.- № 5.(203), pp. 111-129.
6. Pogosian A. K., Bahadur S., Hovhannisyan K.V., and Karapetyan A.N. Investigation of the Tribochemical and Physico-mechanical Processes in Sliding of Mineral-filled Formaldehyde Copolymer Composites against Steel // Wear - 2006.- Volume 260, Issue 6, pp.662-668.
7. Крагельский И. В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 361с.

8. Ван-Кревелен Д. В. Свойства и химическое строение полимеров. Пер. с англ. / Под ред. А.Я. Малкина. - М.: Химия, 1976. 416с.
9. Кенко В. М. К вопросу стандартизации методов фрикционных испытаний пластмасс. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук, 1980, № 2, с. 52-57.
10. Карапетян А.Н., Грибова И. А., Краснов А. П., Студнев Ю.Н., Погосян А. К., Оганесян К. В. Исследование структуры и свойств модифицированных армянских минералов для полимерных композитов // Трение и износ.-2007. Т.28, № 6.-С.621-626.

Сведения об авторах:

Погосян Альберт Князевич, Государственный Инженерный Университет Армении (ГИУА), 0009, Ереван, ул. Теряна, 105. Заведующий лабораторией по трибологии, доктор техн. наук, профессор, член-корреспондент НАН Армении.
Тел. (0037410) 58-61-82, pogosian@seua.am

Карапетян Арсен Нагапетович, Государственный Инженерный Университет Армении (ГИУА), 0009, Ереван, ул. Теряна, 105. Канд. техн.наук, доцент кафедры по прикладной механике.
Тел. (0037410) 34-42-74, ankarapetyan@web.am

Оганесян Карине Валиковна, Государственный Инженерный Университет Армении (ГИУА), 0009, Ереван, ул. Теряна, 105. Канд. техн.наук, доцент кафедры по прикладной механике.
Тел. (0037410) 56-07-05, k_hovhan@yahoo.com

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ТОРМОЗНЫХ ФРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Погосян А.К., Меликсетян Н.Г.

Ереван, Армения, Ванадзор, Армения

Установлено, что механизм высокотемпературного разрушения поверхностных слоев тормозных фрикционных материалов характеризуется аккумуляцией повреждений в подповерхностном слое и наиболее полный процесс высокотемпературного изнашивания объясняется концепциями усталостно-деламинационного разрушения поверхностей трения. Динамика взаимодействия и разрушения (изнашивания) поверхностных слоев тормозных фрикционных материалов при трении в режиме высокотемпературного интенсивного изнашивания представляется следующим образом [1,2]:

– под действием нормальных и тангенциальных усилий, пластического деформирования поверхности, механохимических, структурных и фазовых превращений и процессов фрикционного переноса образуется рабочий слой, отличающийся по свойствам от основного материала;

– почти параллельно к поверхности трения, между рабочим слоем и основным материалом, зарождаются и распространяются подповерхностные трещины;

– в процессе трения происходит постепенное смыкание подповерхностной трещины с поверхностными термическими и механическими трещинами и усталостное растрескивание рабочего слоя;

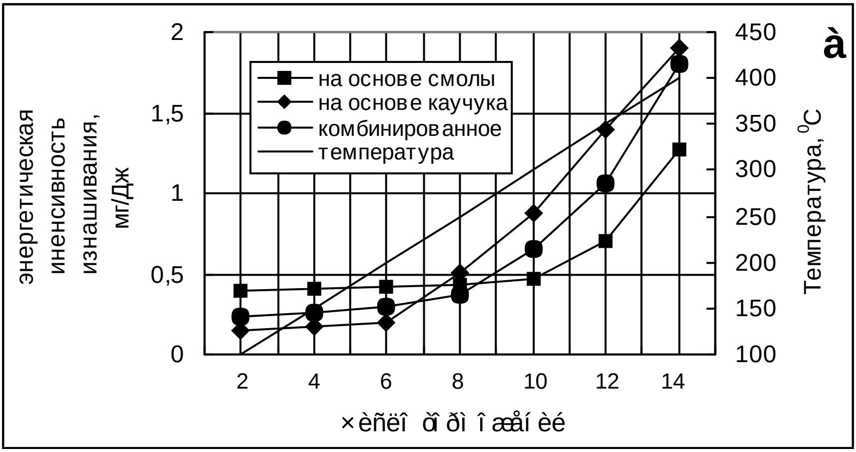
– образуются тонкие удлиненные продукты износа, которые переносятся на контртело и удаляются из зоны трения.

При таком механизме разрушения для прогнозирования долговечности тормозных фрикционных материалов необходимо рассмотреть напряженно–деформированное состояние их поверхностных слоев.

С этой целью экспериментальному исследованию подверглись серийные фрикционные материалы на основе каучукового, смоляного и комбинированного связующих, использующиеся в качестве запасных частей автомобильных тормозных колодок. Вначале для проверки качества выбранных материалов и сравнения полученных результатов с паспортными данными проводились испытания на инерционном стенде ТС-1 с моделированием режимных параметров высокотемпературного изнашивания фрикционных накладок дисковых колодочных тормозов легковых автомобилей серии ВАЗ. После экспериментов поверхности трения испытуемых образцов исследовались методами растровой электронной микроскопии (РЭМ ISM-

50А “Jeol”) и рентгеновской дифракции (дифрактометр ДРОН-2). Результаты стендовых испытаний представлены на рис.1.

Сопоставление полученных параметров с паспортными данными показывает, что выбранные материалы по своим трибологическим свойствам соответствуют нормативным требованиям [3] и являются пригодными для эксплуатации.



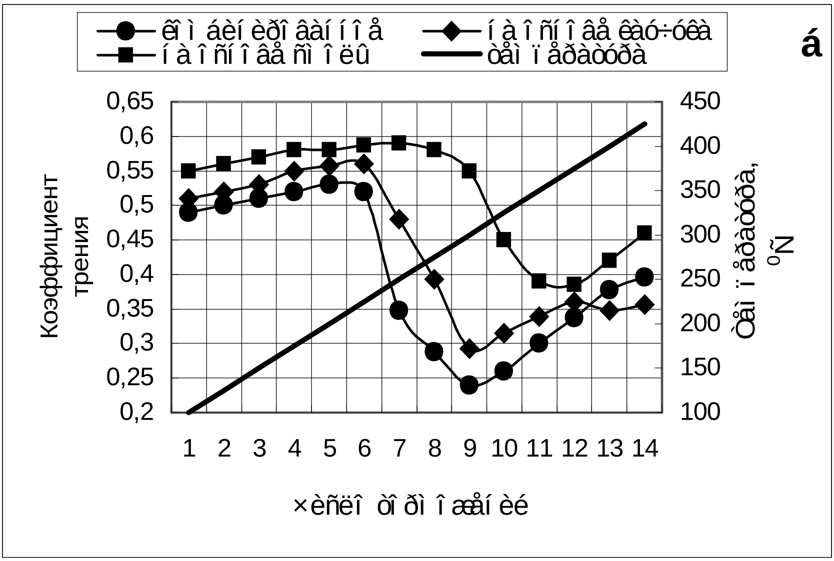


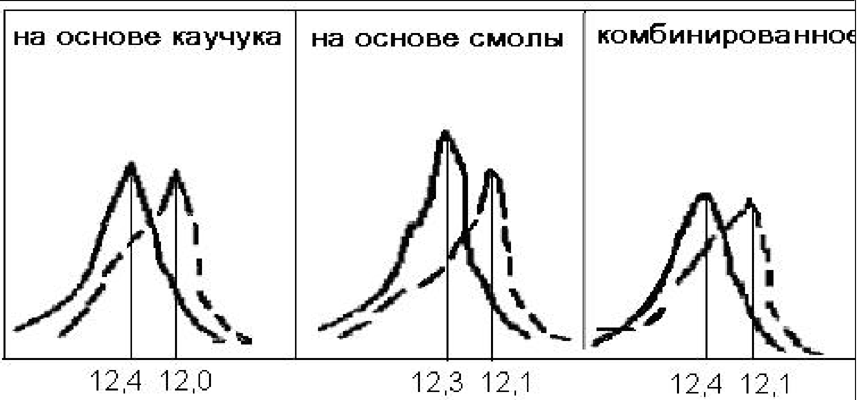
Рис.1. Зависимость энергетической интенсивности изнашивания (а) и

коэффициента трения (б) фрикционных материалов от температуры при $K_{вз}$= 0,104; $P_а$= 2,0 МПа; $V_{ск}$=22,2 м/с

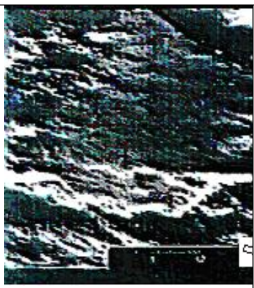
На рис. 2 приведены микрофотографии поверхностей после трения и рефлексы рентгенограмм наиболее теплостойкого и армирующего волокнистого наполнителя на тех же поверхностях при направлении лучей перпендикулярно и параллельно к направлению трения.

Видно, что у всех материалов имеется сдвиг углового рефлекса армирующего наполнителя. Расшифровка рефлексов по методике [4] указывает на наличие остаточных растягивающих и сжимающих напряжений в поверхностных слоях, приводящих к растрескиванию поверхностного слоя в направлении трения, что отмечается на микрофотографиях.

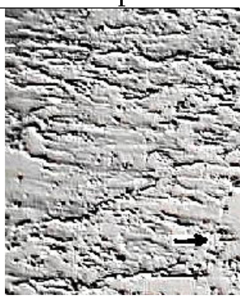
Показание дифрактометра



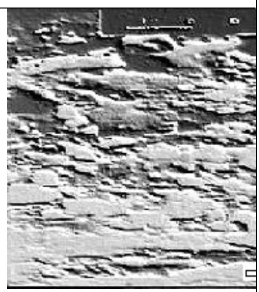
Состояние поверхности трения



х 1000



х 300



х 1000

Рис.2. Микрофотографии поверхностей трения и рефлексы рентгенограмм (угол падения первичного пучка) волокнистого наполнителя при направлении лучей параллельно (----) и перпендикулярно (——) направлению трения. Стрелкой указано направление трения

Значения остаточных напряжений, действующих параллельно (σ_1) и перпендикулярно (σ_3) к направлению скольжения, рассчитаны следующим образом [4]:

$$\sigma_1 = K + L, \quad \sigma_3 = K - L$$

Здесь

$$K = \frac{1}{2}\left[\frac{d_\theta + d'_\theta - 2d_o}{d_o} \cdot \frac{E}{(1+\nu)\sin^2\theta - 2\nu}\right],$$

$$L = \frac{d_o - d'_\theta}{d_o} \cdot \frac{E}{(1+\nu)\sin^2\theta},$$

d_Θ – межплоскостное расстояние при скольжении рентгеновских лучей параллельно направлению трения; d'_Θ – то же при скольжении рентгеновских лучей перпендикулярно направлению трения; d_o – межплоскостное расстояние исходных фрикционных материалов (определяется формулой Вульфа-Брегга); E – модуль упругости композиции; ν – коэффициент Пуассона.

Результаты расчетов приведены в табл.1

Таблица 1

Числовые значения остаточных напряжений

Материал	Остаточные напряжения, ГПа	
	σ_1	σ_3
На основе смолы	8,752	-6,36
На основе каучука	7,297	-7,083

Комбинированное	10,189	-9,732

Таким образом, для всех материалов в направлении трения действуют остаточные растягивающие напряжения, а перпендикулярно к направлению трения – сжимающие. При этом, сжимающие напряжения по абсолютному значению меньше растягивающих. Такое напряженное состояние поверхностных слоев – следствие их ориентации по направлению скольжения и она приводит к растрескиванию поверхности по направлению трения. В тонких поверхностных слоях действуют очень большие напряжения, превышающие предел прочности материала при срезе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Погосян А.К., Сысоев П.В., Меликсетян Н.Г и др.Фрикционные композиты на основе полимеров. – Минск. Информтрибо, 1992.- 218 с.
2. Погосян А. К., Меликсетян Н. Г., Ламбарян Н. А. Высокотемпературное разрушение поверхностных слоев фрикционных материалов /Труды 7-го Международного Симпозиума по фрикционным изделиям и материалам «ЯРОФРИ-2008». –
3. Ярославль, 2008. http://www.tiir.ru/ ГОСТ 31341-2007 Колодки, диски и барабаны тормозные транспортных средств. Общие технические требования, правила приемки и методы испытаний http://www.gosstandart.gov.by/BDD_gosstand_2.php
4. Чичинадзе А.В., Синайский В.М., Браун Э.Д., Суворов А.В. Применение рентгеновского анализа для прогнозирования износоустойчивости углеродных фрикционных композиционных материалов без проведения фрикционных испытаний // Заводская лаборатория. – М., 2001. - Том 67. – №6. - С. 30-32.

Сведения об авторах:
Погосян Альберт Князевич
Член- корр. НАН РА, д.т.н., проф.
Государственный инженерный университет Армении
Адрес: г. Ереван, ул.Теряна 105.Тел. (+374 10) 58-61-82
E-mail: pogosian@seua.am
Меликсетян Норик Галустович
д. т. н, доц., Ванадзорский филиал
Государственного Инженерного Университета Армении
Адрес: г. Ванадзор ул. Шинарарнери 12.
Тел. (+374 322) 4-73-74
E-mail: n_meliksetyan@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКИ

Погосян Д.М.

Ереван, Армения

В работе рассматривается задача устойчивости возмущенного движения стержня, нагруженного следящей силой, при двух различных граничных условиях. Найдены критические значения сил, при которых имеют место дивергентная и флаттерная неустойчивости. Формальное решение задачи путем приравнивания нулю определителя системы уравнений, выражающих граничные условия через произвольные постоянные общего интеграла дифференциального уравнения изгиба, приводит к результату о невозможности потери устойчивости стержня при любой его длине. Для правильного решения задачи следует ввести силы инерции или силы диссипации.

1.Пусть конец $x = 0$ вертикального стержня имеет упругое закрепление – перемещения отсутствуют, а изгибающий момент пропорционален тангенсу угла наклона стержня. На другом конце $x = l$ стержня изгибающий момент равен нулю и приложены следящая сжимающая нагрузка P, а также сосредоточенная масса m.

В предположении, что масса стержня и силы сопротивления пренебрежимо малы, уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид (1.1)

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1}$$

где $w(x,t)$ – прогиб стержня.

Граничные условия в предположении наличия диссипативной силы в опоре стержня имеют вид

$$x = 0: \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \text{¢}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \text{¶}1\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0 \tag{1.2}$$

$$x = l: \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.3}$$

$$\text{¢} > 0, \quad \text{¶}1 > 0 \tag{1.4}$$

¢ — коэффициент, характеризующий упругие свойства опоры; ¶1– коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства в опоре.

Справедливость неравенств (1.4) следует из условия устойчивости возмущенного движения стержня при отсутствии следящей силы P .

В работе [1] исследована задача устойчивости стержня при $¶1 = 0$, $¢ = 0$, что соответствует условию жесткого защемления конца *x=0*, а в работе [4] при $¶1 = 0$.

Отыскивая решение задачи устойчивости (1.1) – (1.3) в виде

$$w = f\left(z\right)e^{ªt}, \quad z = \frac{x}{l} \tag{1.5}$$

приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f^{(IV)}(z) + k^2 f''(z) = 0 \tag{1.6}$$

$$z = 0: \quad f\left(z\right) = 0, f'\left(z\right) - \tilde{¢} f''\left(z\right) + ¶1ª f'\left(z\right) = 0 \tag{1.7}$$

$$z = 1: \quad f''\left(z\right) = 0, f'''\left(z\right) = ª^2 \quad f\left(z\right) \tag{1.8}$$

где $k^2 = \frac{P}{EJ} l^2, \quad = \frac{m}{EJ} l^3, \tilde{¢} = \frac{¢}{l}$. (1.9)

Подставляя общее решение уравнения (1.6)

$$f\left(z\right) = C_1 + C_2 z + C_3 \sin\left(kz\right) + C_4 \cos\left(kz\right)$$

в граничные условия (1.7), (1.8), получаем следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных $C_i \neq 0,\ i = \overline{1,4}$:

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0 \\ \left(¶1ª + 1\right) * C_2 + \left(¶1ª + 1\right) k * C_3 + \tilde{¢} k^2 * C_4 = 0 \\ C_3 * \sin\left(k\right) + C_4 * \cos\left(k\right) = 0 \\ \frac{ª^2}{k^3} * C_1 + \frac{ª^2}{k^3} * C_2 + \left(\frac{ª^2}{k^3} \sin\left(k\right) + \cos\left(k\right)\right) * C_3 \\ + \left(\frac{ª^2}{k^3} \cos\left(k\right) - \sin\left(k\right)\right) * C_4 = 0 \end{cases}$$

Отсюда, приравнивая нулю детерминант системы (1.9), получаем следующее характеристическое уравнение:

$$a_0 а^3 + a_1 а^2 + a_2 а + a_3 = 0 \qquad (1.10)$$

где

$$a_0 = \left(\sin(k) - k\cos(k)\right)¶1, \quad a_1 = \left(1 + k^2 \tilde{¢}\right)\sin(k) - k\cos(k),$$

$$a_2 = ¶1 \frac{k^3}{}, \quad a_3 = \frac{k^3}{} \qquad (1.11)$$

В соответствии с неравенствами (1.4), из выражений (1.11) следует, что

$$a_2 > 0, \qquad a_3 > 0 \qquad (1,12)$$

Исследуем поведение корней уравнения (1.10) с помощью алгебраического критерия устойчивости Рауса-Гурвица. Согласно критерию Рауса–Гурвица, в соответствии с соотношениями (1.10), (1.12), границами области устойчивости стержня в пространстве его параметров являются гиперповерхности

$$\Delta_1 = a_1 = 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0, \quad \Delta_3 = a_3\left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right) = 0 \qquad (1.13)$$

в предположении, что $a_0 \neq 0$.

Из условий (1.13) получаем критическое значение следящей силы

$$P_* = \frac{®^2}{l^2} EJ$$

P_* приводит к флаттерной неустойчивости.

Заметим, что значение P_* не зависит от m, ¢ и ¶1. Более того, P_* меньше критического значения, полученного при ¶1 = 0 в работе [4]. Это означает, что наличие диссипативной силы приводит к эффекту дестабилизации: возмущенное движение приобретает характер колебаний с возрастающими амплитудами (флаттерные колебания), а исходное состояние равновесия становится неустойчивым.

Можно показать, что при условии $a_0 = \left(\sin\left(k\right) - k\cos\left(k\right)\right)¶1 = 0$ диссипативная сила стабилизирует возмущенное движение стержня: исходное равновесное положение стержня устойчиво при всех P, m, $¢ > 0$ и $¶1 > 0$.

При $¢ \to 0$ характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$\left(ª¶1+1\right)\left(ª^2 * \left(\sin\left(k\right) - k\cos\left(k\right)\right) + \frac{k^3}{\;}\right) = 0 \tag{1.14}$$

$$ª^2 = -\frac{k^3}{\left(\sin\left(k\right) - k\cos\left(k\right)\right)} \tag{1.14}$$

откуда получаем критическое значение следящей силы

$$P_* = \frac{\left(4.493\right)^2}{l^2} EJ$$

P_* приводит к флаттерной неустойчивости.

2. Пусть конец $x = 0$ вертикального стержня имеет упругое закрепление – перемещения отсутствуют, а изгибающий момент пропорционален тангенсу угла наклона стержня. На другом конце $x = l$ стержня изгибающий момент равен нулю и приложены следящая сжимающая нагрузка P и , а также сосредоточенный инерционный момент I .

В предположении, что масса стержня и силы сопротивления пренебрежимо малы, уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид (2.1)

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{2.1}$$

где $w(x,t)$ - прогиб стержня.

Граничные условия в предположении наличия диссипативной силы в опоре стержня имеют вид

$$x = 0: \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - ¢\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ¶1\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = 0 \tag{2.2}$$

$$x = l: \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \qquad EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \tag{2.3}$$

$$¢ > 0, \quad ¶1 > 0 \tag{2.4}$$

¢ -коэффициент, характеризующий упругие свойства опоры; ¶1– коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства в опоре.

Справедливость неравенсв (2.4) следует из условия устойчивости возмущенного движения стержня при отсутствии следящей силы P .

В работе [1] исследована задача устойчивости стержня при $¶1 = 0$, $¢ = 0$, что соответствует условию жесткого защемления конца x=0, а в работе [4] при $¶1 = 0$.

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, приравнивая детерминант системы алгебраических уравнений нулю, получаем характеристическое уравнение (2.5):

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0 \\ (¶1ª + 1) * C_2 + (¶1ª + 1)k * C_3 + \tilde{¢}k^2 * C_4 = 0 \\ C_3 * \cos(k) - C_4 * \sin(k) = 0 \\ C_2 * ª^2¥ + C_3 * \left(ª^2 * k¥\cos(k) - k^2\sin(k)\right) \\ -C_4 * \left(ª^2 k¥ \sin(k) + k^2\cos(k)\right) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

где $k^2 = \frac{P}{EJ}l^2$, $¥ = -\frac{I}{EJ}l^2$, $\tilde{¢} = \frac{¢}{l}$.

$$a_0 ª^3 + a_1 ª^2 + a_2 ª + a_3 = 0 \tag{2.6}$$

где

$$a_0 = ¥¶1\sin(k), \quad a_1 = ¥\left(k\tilde{¢}\cos(k) + \sin(k)\right), \quad a_2 = ¶1k, \quad a_3 = k \tag{2.7}$$

В соответствии с неравенствами (2.4), из выражений (2.7) следует, что

$$a_2 > 0, \qquad a_3 > 0 \tag{2.8}$$

Иследуем поведение корней уравнения (2.6) с помощью алгебраического критерия устойчивости Рауса-Гурвица. Согласно критерию Рауса-Гурвица, в соответствии с соотношениями (2.6), (2.8), границами области устойчивости стержня в пространстве его параметров являются гиперповерхности

$$\Delta_1 = a_1 = 0, \qquad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0, \qquad \Delta_3 = a_3\left(a_1 a_2 - a_0 a_3\right) = 0 \tag{2.9}$$

в предположении, что $a_0 \neq 0$.

Из условий (2.9) получаем критическое значение следящей силы

$$P_* = \frac{®^2}{4l^2} EJ$$

P_* приводит к флаттерной неустойчивости.

Заметим, что значение P_* не зависит от m, ¢ и ¶1. Более того P_* меньше критического значения, полученного при $¶1 = 0$ в работе [4]. Это означает, что наличии диссипативной силы приводит к эффекту дестабилизации: возмущенное движение приобретает характер колебаний с возрастающими амплитудами (флаттерные колебания), а исходное состояние равновесия становится неустойчивым.

Можно показать, что при условии $a_0 = ¥¶1\sin(k) = 0$, диссипативная сила стабилизирует возмущенное движение стержня: исходное равновесное положение стержня устойчиво при всех P, m, $¢ > 0$ и $¶1 > 0$.

При $¢ \to 0$ характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$(ª¶1+1)(ª^2¥\sin(k)+k) = 0 \qquad (2.10)$$

$$ª^2 = -\frac{k}{¥\sin(k)} \qquad (2.11)$$

откуда получаем критическое значение следящей силы

$$P_* = \frac{®^2}{l^2} EJ,$$

приводящее к флаттерной неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.:1961, Изд. Физматлит, 337с.
2. Чжунь (K.R. Chun). Собственные колебания балки с упругим закреплением на одном конце и другим свободным концом.//Прикладная механика (Тр. америк.общ.инженеров-механиков) 1972. Изд. Мир, № 4, с.298-299.
3. Ржаницын А.Р. Консольный стержень, нагруженный следящей силой//Изд. НАН Армении. Механика. 1985, т.38, №5, с.33-44.
4. Цатурян А.Е. Поперечные колебания вертикального стержня под воздействием следящей нагрузки.

Сведения об авторе:

Погосян Диана Мнацакановна аспирант Института механики НАН РА

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В.

Краснодар, Россия

Эффективный метод построения матриц-символов интегральных уравнений динамических задач для слоистых сред, предложенный в работе [1] и обобщенный на случай разрывных граничных условий на стыках слоев в [2, 3], применен к решению задачи о вибрации упругой полуограниченной слоистой среды, содержащей множественные неоднородности типа плоских жестких включений. Получены рекуррентные формулы, позволяющие эффективно вычислять элементы матриц-символов Грина, порождаемых этими задачами, что является ключевым моментом для дальнейшего решения поставленной задачи.

Пусть колебания пакета слоев вызваны вибрацией плоских жестких включений, расположенных в $\tilde{N}$ уровнях по глубине среды. Пакет состоит из N упругих плоскопараллельных слоев с жестко защемленной нижней и свободной верхней границами и занимает объем $-\infty < x, y < +\infty$, $-H \le z \le 0$, $H = 2h_1 + 2h_2 + ... + 2h_N$. Границы раздела физико-механических параметров слоев расположены в плоскостях $z = z_k = -2\sum_{m=1}^{k} h_m \quad (k = 1,2,..., N-1)$. Включения занимают области $\Omega_{p(k)}$ в плоскостях $z = \tilde{z}_k = -2\sum_{m=1}^{p(k)} h_m$, $p(k)$ – номер границы раздела слоев, содержащей k-тое включение $(k = 1,2,...,\tilde{N})$. Если включения расположены на всех стыках слоев, то $\tilde{N} = N - 1$. Для включения, находящегося внутри какого-либо слоя, следует ввести условную границу раздела и параметры прилегающих к включению слоев положить равными.

Задача определения неизвестных скачков векторов напряжений на границах включений $\Delta\mathbf{t}_{p(k)}(x, y)$ сводится к решению системы интегральных уравнений (СИУ) [1 – 3]

$$\int\limits_{¢_1}\int\limits_{¢_2} \mathbf{K}(\sim,\ \ ,\mu)\mathbf{Q}(\sim,\ \ )e^{-i(\sim x+\ \ y)}d\sim d\ \ = f(x,y),\ (x,y)\in\mathbf{\Omega}. \qquad (1)$$

Компонентами многомерного вектора $f(x, y) = \{\mathbf{w}^0_{p(1)}, \mathbf{w}^0_{p(2)}, ..., \mathbf{w}^0_{p(\tilde{N})}\}$ являются векторы перемещений, заданные на границах включений, а компонентами вектора $\mathbf{Q} = \{\Delta\mathbf{T}_{p(1)}, ..., \Delta\mathbf{T}_{p(\tilde{N})}\}$ – трансформанты Фурье векторов $\Delta\mathbf{t}_{p(k)}(x,y)$. Носителем каждой вектор-функции $\Delta\mathbf{t}_{p(k)}(x,y)$ является соответствующая область из $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}=\{\Omega_{p(1)},\Omega_{p(2)},...,\Omega_{p(\tilde{N})}\}$. Так как области $\Omega_{p(k)}$ расположены в разных плоскостях, то матрица-символ ядра $\mathbf{K}(\sim,\ \ ,\mu)$ системы (1), в отличие от СИУ традиционных контактных задач, является блочной

$$\mathbf{K}(\sim,\ \ ,\mu)=\left\|\mathbf{K}_{ij}\right\|_{i,j=1}^{\tilde{N}},\ \mathbf{K}_{ij}(\sim,\ \ )=\left\|\mathbf{K}_{mn}^{ij}\right\|_{m,n=1}^{3}.$$

Матрицы-функции $\mathbf{K}_{ij}(\sim,\ \ )$ методом, детально изложенным в [1–3], получены в форме

$$\mathbf{K}_{ij}=\begin{cases}\mathbf{G}_{Np(i)}^{-1}, & i=j,\\ \mathbf{K}_{p(i)}^{-}\mathbf{R}_{p(i)p(j)}^{-}\left(\mathbf{K}_{p(j)}^{-}\right)^{-1}\mathbf{G}_{Np(j)}^{-1}, & i<j,\\ \mathbf{K}_{N-p(i)}\mathbf{R}_{p(i)p(j)}\mathbf{K}_{N-p(j)}^{-1}\mathbf{G}_{Np(j)}^{-1}, & i>j.\end{cases}\tag{2}$$

Здесь $\mathbf{G}_{Np(k)}$ $\left(k=1,2,...,\tilde{N}\right)$ – матрицы, характеризующие положение включений в среде:

$$\mathbf{G}_{Np}=\left[\mathbf{K}_{p}^{-}\left(h_1,h_2,...,h_p\right)\right]^{-1}-\left[\mathbf{K}_{N-p}\left(h_{p+1},h_{p+2},...,h_N\right)\right]^{-1},\tag{3}$$

$\mathbf{K}_{p}^{-}$ – матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью,

$\mathbf{K}_{N-p}$ – матрица Грина пакета $(N-p)$ слоев на жестком основании.

Матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}_{km}^{-}$ даются формулами

$$\mathbf{R}_{km}=(-1)^{(k-m)}\prod_{i=k}^{m+1}\mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}(h_i)\mathbf{B}_{+}(-h_i),$$

$$\mathbf{R}_{km}^{-}=\prod_{i=k+1}^{m}\mathbf{\Phi}_{i}^{-1}(h_1,h_2,...,h_i)\mathbf{B}_{-}(h_i),$$

а матрицы $\mathbf{K}_m$, $\mathbf{K}_m^{-}$, $\mathbf{\Phi}_m$, $\mathbf{F}_m$ определяются из рекуррентных соотношений

$$\mathbf{F}_1(h_N)=\mathbf{B}_{-}(-h_N),$$

$$\mathbf{F}_{k+1}(h_{N-k})=\mathbf{B}_{-}(-h_{N-k})-\mathbf{K}_k(-h_{N-k+1}),\ k=1,2,...,N-1,$$

$$\mathbf{K}_n(h_{N+1-n},...,h_N)=\mathbf{B}_{+}(h_{N+1-n})-\mathbf{B}_{-}(h_{N+1-n})\mathbf{F}_n^{-1}\mathbf{B}_{+}(-h_{N+1-n}),$$

$$\mathbf{\Phi}_1=0,\ \mathbf{K}_1^{-}(h_1)=\mathbf{B}_{-}(-h_1),\ n=1,2,...,N,$$

$$\mathbf{\Phi}_m=\mathbf{K}_{m-1}^{-}(h_1,h_2,...,h_{m-1})-\mathbf{B}_{+}(h_m),\ m=2,3,...,N,$$

$$\mathbf{K}_m^{-}(h_1,...,h_m)=\mathbf{B}_{-}(-h_m)+\mathbf{B}_{+}(-h_m)\mathbf{\Phi}_m^{-1}(h_1,...,h_m)\mathbf{B}_{-}(h_m).$$

Вспомогательные матрицы $\mathbf{B}_{\pm}$ введены в [1]. Для изотропных упругих сред все приведенные матрицы имеют структуру, присущую матрицам-символам Грина полуограниченных сред без дефектов, и зависят от параметров преобразования Фурье $\sim$, , частоты гармонических колебаний μ , а также физико-механических параметров (плотности $\circ_k$, модуля сдвига $«_k$, коэффициента Пуассона $\neg_k$) слоев, полутолщины h_k которых указаны в качестве аргументов, $k = 1,2,...,N$.

Полученное в виде произведения матриц представление (2) эффективно для проведения анализа элементов и построения определителя блочной матрицы-символа $\mathbf{K}$ ядра СИУ, допускает простую интерпретацию результатов. Определитель матрицы-символа ядра СИУ (1) получен в виде

$$\det \mathbf{K}(\sim, \ ,\mu) = \det \mathbf{G}^{-1}_{Np(\tilde{N})} \prod_{k=\tilde{N}-1}^{1} \det \mathbf{G}^{-1}_{p(k+1)p(k)} . \qquad (4)$$

Соотношения (2) – (4) позволяют исследовать различные аспекты динамики полуограниченных слоистых сред при произвольном количестве и расположении в них дефектов типа плоских включений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (11-08-00135, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-3765.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246с.
2. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Влияние жестких включений на волноводные свойства пакета упругих слоев // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №1. с.45–51.
3. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. К исследованию волноводных свойств пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // Изв. РАН. МТТ. 2009. №3. С.55–65.

Сведения об авторах:

Пряхина Ольга Донатовна, Кубанский государственный университет, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем, профессор, д-р физ.-мат. наук, (861) 219-96-03, адрес: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, donna@kubsu.ru.

Смирнова Алла Васильевна, Кубанский государственный университет, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем, профессор, д-р физ.-мат. наук, (861) 219-96-03, адрес: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, donna@kubsu.ru.

Самойлов Максим Викторович, Кубанский государственный университет, аспирант кафедры интеллектуальных информационных систем, (861) 219-96-03, адрес: 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149, yt-56@mail.ru.

ВЛИЯНИЕ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ, ЗАДАННЫХ НА ДУГОВОЙ ЧАСТИ КОНТУРА КРУГОВОГО СЕКТОРА, НА ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ГЛАДКОГО КОНТАКТА НА РАДИАЛЬНЫХ СТОРОНАХ. ЧАСТЬ II

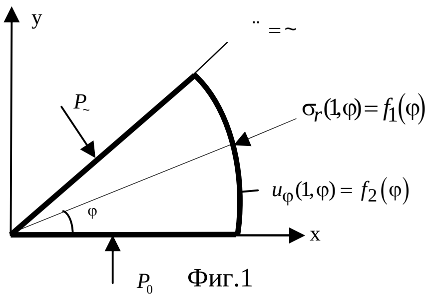
Саргсян А.М.

Ереван, Армения

Исследуется плоское напряженное состояние кругового сектора с единичным радиусом и произвольным углом раствора α $(0 < ~ < 2®)$, когда на дуговой части контура заданы нормальное напряжение и окружное перемещение, а на радиальных сторонах осуществляется условие соприкасания с жестким штампом без трения .

Замкнутое решение задачи получено с помощью метода Фурье. Установлено, что при стремлении угла раствора сектора к ® или 2® , хотя порядок особенности напряжений стремится к –1, коэффициенты при такой особенности стремятся к нулю в условиях общего нагружения дуговой части границы сектора. Между тем, в работах [1,2,3] при исследовании упругого равновесия кругового сектора, когда на дуговой части контура заданы нормальные и касательные напряжения, было показано, что эти коэффициенты конечны и отличны от нуля. Поэтому, с точки зрения предотвращения хрупкого разрушения сектора, принятые в данной работе граничные условия на границе $r = 1$ физически более приемлемы, чем принятые в [1, 2, 3] условия.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для однородного кругового сектора (фиг. 1), когда на его границе заданы следующие условия:



Фиг.1

$$ ²_{r¨}(r,0) = 0, \quad u_{¨}(r,0) = 0, \quad (1) $$

$$ ²_{r¨}(r,~) = 0, \quad u_{¨}(r,~) = b_0 r, \quad (2) $$

$$ \begin{aligned} ±_r(1,¨) &= f_1(¨), \\ u_{¨}(1,¨) &= f_2(¨), \end{aligned} \quad (3) $$

$$ f_2(0) = 0, \quad f_2(~) = b_0. \quad (4) $$

Упругое состояние кругового сектора определяется решением бигармоческого уравнения.

Учитывая граничные условия (2), решение бигармонического уравнения представим в виде

$$ \Phi(r,¨) = r^{ª+1}\left[AS_{¨}^{+} + BC_{¨}^{+} + CS_{¨}^{-} + DC_{¨}^{-}\right] + B_0 r^2 \ln r \ , \quad (5) $$

где A, B, C, D – постоянные интегрирования, B_0 и ª – произвольные параметры, $S_{¨}^{\pm} = \sin(ª \pm 1)¨$, $C_{¨}^{\pm} = \cos(ª \pm 1)¨$.

Выражения компонентов напряжений через функции Φ имеют вид

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \theta^2}, \ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right). \tag{6}$$

Используя уравнения состояний, уравнения Коши и соотношения (5), (6), для перемещений $u_\theta(r,\theta)$ получим

$$Eu_\theta(r,\theta) = r^\lambda\left[-A\lambda^+\nu^+C_\theta^+ + B\lambda^+\nu^+S_\theta^+ - C\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C_\theta^- + D\left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)S_\theta^-\right] + 4B_0\theta r, \tag{7}$$

где $\nu^+ = \nu + 1$, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Определяя B_0 из условий $4\alpha B_0 = Eb_0$ и удовлетворяя граничным условиям (1) – (2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования A, B, C, D

$$\begin{gathered} \lambda^+A + \lambda^-C = 0, \quad \lambda^+\nu^+A + \left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C = 0, \\ \lambda^+C_\alpha^+A - \lambda^+S_\alpha^+B + \lambda^-C_\alpha^-C - \lambda^-S_\alpha^-D = 0, \\ \lambda^+\nu^+C_\alpha^+A - \lambda^+\nu^+S_\alpha^+B + \left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)C_\alpha^-C - \left(\lambda^-\nu^+ + 4\right)S_\alpha^-D = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Из первых двух уравнений (8) вытекает, что $A = C = 0$, а из двух последних уравнений получим

$$\sin(\lambda + 1)\alpha \cdot \sin(\lambda - 1)\alpha = 0. \tag{9}$$

Корни уравнения (9) действительные и простые

$$\lambda_k = \omega_0 k + 1, \quad \tilde{\lambda}_n = \omega_0 n - 1, \quad \omega_0 = \pi/\alpha, \ \lambda_k > 0, \ \tilde{\lambda}_n > 0. \tag{10}$$

Условия $\lambda_k > 0$, $\tilde{\lambda}_n > 0$, в зависимости от величины угла раствора сектора α, ограничивает пределы изменения k и n , а именно:

1. для $0 < \alpha < 2\pi$, $(k = 0,1,2,\ldots)$, $(n = 2,3,4,\ldots)$,
2. для $0 < \alpha < \pi$, $(k = 0,1,2,\ldots)$, $(n = 1,2,3,\ldots)$, (11)
3. для $\pi < \alpha < 2\pi$, $(k = -1,0,1,\ldots)$, $(n = 2,3,4,\ldots)$.

Первый случай рассмотрен в работе [4], где было показано, что функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ удовлетворяют ограничению

$$-\tilde{f}_{11}\left(\omega_0\nu^+ + 4\right) + \tilde{f}_{21}^*(1 + \omega_0)(2 - \omega_0)E = 0, \quad f_{21}^* = \tilde{f}_{21} - b_0/\omega_0, \tag{12}$$

$$\tilde{f}_{11} = \int_0^\alpha f_1(\theta)\cos\omega_0\theta\, d\theta, \quad \tilde{f}_{21} = \int_0^\alpha f_2(\theta)\sin\omega_0\theta\, d\theta,$$

которое является условием малонапряженности окрестности вершины сектора [5]. Здесь рассматриваются последние два случая.

Функции напряжений Эри для этих случаев принимают вид

$$2.\Phi = D_0 r^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k r^{\alpha_k+1} + B_k r^{\tilde{\alpha}_k+1}\right]\cos\lambda_0 k\theta + B_0 r^2 \ln r, B_0 = b_0\, E/4\lambda$$

$$3.\Phi = D_{-1} r^{2-\lambda_0}\cos\lambda_0\theta + D_0 r^2 + D_1 r^{2+\lambda_0}\cos\lambda_0\theta + \qquad (13)$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k r^{\alpha_k+1} + B_k r^{\tilde{\alpha}_k+1}\right]\cos\lambda_0 k\theta + B_0 r^2 \ln r.$$

С помощью (6), (7), (13) для напряжений и перемещения u_θ будем иметь

$$2.\left\{\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{matrix}\right\} = D_0\left\{\begin{matrix}2\\2\\0\end{matrix}\right\} + B_0\left\{\begin{matrix}(2\ln r+1)\\(2\ln r+3)\\0\end{matrix}\right\} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k(\lambda_0 k+1)\left\{\begin{matrix}(2-\lambda_0 k)\\(2+\lambda_0 k)\\ \lambda_0 k\end{matrix}\right\} r^{\lambda_0 k} +\right.$$

$$\left.+B_k\lambda_0 k(\lambda_0 k-1)\left\{\begin{matrix}-1\\1\\1\end{matrix}\right\} r^{\lambda_0 k-2}\right]\left\{\begin{matrix}\cos\lambda_0 k\theta\\ \cos\lambda_0 k\theta\\ \sin\lambda_0 k\theta\end{matrix}\right\}, Eu_\theta = 4B_0 r\theta + \qquad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k\left(\lambda_0 k\neg^{+}+4\right) r^{\lambda_0 k+1} + B_k\lambda_0 k\neg^{+} r^{\lambda_0 k-1}\right]\sin\lambda_0 k\theta + a\cos\theta - b\sin\theta + dr.$$

$$3.\left\{\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{matrix}\right\} = D_{-1}(1-\lambda_0)\left\{\begin{matrix}(2+\lambda_0)\cos\lambda_0\theta\\(2-\lambda_0)\cos\lambda_0\theta\\ \lambda_0\sin\lambda_0\theta\end{matrix}\right\} r^{-\lambda_0} + D_0\left\{\begin{matrix}2\\2\\0\end{matrix}\right\} +$$

$$+D_1(1+\lambda_0)\left\{\begin{matrix}(2-\lambda_0)\cos\lambda_0\theta\\(2+\lambda_0)\cos\lambda_0\theta\\ \lambda_0\sin\lambda_0\theta\end{matrix}\right\} r^{\lambda_0} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k(\lambda_0 k+1)\left\{\begin{matrix}(2-\lambda_0 k)\\(2+\lambda_0 k)\\ \lambda_0 k\end{matrix}\right\} r^{\lambda_0 k} +\right. \qquad (14')$$

$$\left.+B_k\lambda_0 k(\lambda_0 k-1)\left\{\begin{matrix}-1\\1\\1\end{matrix}\right\} r^{\lambda_0 k-2}\right]\left\{\begin{matrix}\cos\lambda_0 k\theta\\ \cos\lambda_0 k\theta\\ \sin\lambda_0 k\theta\end{matrix}\right\} + B_0\left\{\begin{matrix}(2\ln r+1)\\(2\ln r+3)\\0\end{matrix}\right\},$$

$$Eu_\theta = D_{-1} r^{1-\lambda_0}\sin\lambda_0\theta\left[\lambda_0\neg^{+}-4\right] + D_1\left(\lambda_0\neg^{+}+4\right) r^{\lambda_0+1}\sin\lambda_0\theta + 4B_0 r\theta +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\sim_0 k\neg^{+}+4\right)r^{\sim_0 k+1}+B_k\sim_0 k\neg^{+}r^{\sim_0 k-1}\right]\sin\sim_0 k\ddot{} + a\cos\ddot{} - b\sin\ddot{} + dr$$

из граничных условий (1) и (2) следует, что $a=b=d=0$.

Удовлетворяя условиям (3), для определения D_k и B_k получи

$$2.\begin{cases} 2D_0+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k\left(\sim_0 k+1\right)\left(2-\sim_0 k\right)-B_k\sim_0 k\left(\sim_0 k-1\right)\right]\cos\sim_0 k\ddot{} = \\ = f_1(\ddot{}),\, 4B_0\ddot{} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[D_k\left(\sim_0 k\neg^{+}+4\right)+B_k\sim_0 k\neg^{+}\right]\sin\sim_0 k\ddot{} = Ef_2(\ddot{}), \end{cases}$$

(15)

$$3.\begin{cases} D_{-1}\left(1-\sim_0\right)\left(2+\sim_0\right)\cos\sim_0\ddot{} + 2D_0+B_0+D_1\left(1+\sim_0\right)\left(2-\sim_0\right)\cos\sim_0\ddot{} + \\ +\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\sim_0 k+1\right)\left(2-\sim_0 k\right)+B_k\sim_0 k\left(\sim_0 k-1\right)\right]\cos\sim_0 k\ddot{} = f_1(\ddot{}), \\ D_{-1}\sin\sim_0\ddot{}\left(\sim_0\neg^{+}-4\right)+D_1\left(\sim_0\neg^{+}+4\right)\sin\sim_0\ddot{} + 4B_0\ddot{} + \\ +\sum_{k=2}^{\infty}\left[D_k\left(\sim_0 k\neg^{+}+4\right)+B_k\sim_0 k\neg^{+}\right]\sin\sim_0 k\ddot{} = Ef_2(\ddot{}) \end{cases} \quad (15')$$

Умножая первые два уравнения (15) и (15′) на $\cos\sim_0 m\ddot{}$ $(m=0,1,2,\ldots)$, а вторые – на $\sin\sim_0 m\ddot{}$ $(m=1,2,3,\ldots)$ и интегрируя по $\ddot{}$, находим

$$2.\ \ 2D_0+B_0=\frac{1}{\sim}\int_0^{\sim} f_1(\ddot{})d\ddot{},\ D_k=\frac{\tilde{f}_{1k}\neg^{+}+\tilde{f}^{*}_{2k}\left(\sim_0 k-1\right)}{\sim\left[\neg^{+}+2\left(\sim_0 k-1\right)\right]},\ \ \tilde{f}^{*}_{2k}=\tilde{f}_{2k}-\frac{b_0}{\sim_0}\frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

$$B_k=\frac{-\tilde{f}_{1k}\left(\sim_0 k\neg^{+}+4\right)+\tilde{f}^{*}_{2k}\left(\sim_0 k+1\right)\left(2-\sim_0 k\right)}{\sim\sim_0 k\left[\neg^{+}+2\left(\sim_0 k-1\right)\right]}, \quad (16)$$

$$3.\quad D_{-1}=\frac{2}{\sim}\frac{\tilde{f}_{11}\left(\sim_0\neg^{+}+4\right)\sim_0-\tilde{f}_{21}\left(1+\sim_0\right)\left(2-\sim_0\right)E}{2\sim_0\left[8-\left(5+\neg\right)\sim_0^2\right]}, \quad (16')$$

$$D_1=\frac{2}{\sim}\frac{-\tilde{f}_{11}\left(\sim_0\neg^{+}-4\right)\sim_0+\tilde{f}_{21}\left(1-\sim_0\right)\left(2+\sim_0\right)E}{2\sim_0\left[8-\left(5+\neg\right)\sim_0^2\right]},$$

$2D_0+B_0, D_k$ и B_k имеют вид (16), однако здесь $(k=2,3,4,\ldots)$.

Таким образом, решение поставленных выше задач получено в виде сходящихся степенных рядов (14), (14′), неизвестные коэффициенты которых определяются в явном виде (16), (16′).

Исследуем поведение напряжений вблизи угловой точки сектора.

2. $0 < \sim < ®$. Как видно из (14), в условиях общего нагружения дуговой части границы сектора, напряжения при $r \to 0$ имеют степенную особенность (напряжения стремятся к бесконечности) типа $r^{\sim_0 k-2}$, если $\sim > ®/2$. В зависимости от величины угла $\sim$ порядок особенности изменяется в пределах $-1 < \sim_0 k - 2 < 0,\ (k = 1)$. Коэффициенты при особенности в общем случае отличны от нуля, но когда $\sim \to ®$, хотя порядок особенности напряжений стремится к –1, эти коэффициенты, благодаря наличию в них множителя $(\sim_0 k - 1)$, стремятся к нулю. Тогда в выражениях для напряжений (14) исчезают члены с неинтегрируемыми особенностями. Если же между заданными функциями $f_1(¨)$ и $f_2(¨)$ имеет место соотношение

$$-\tilde{f}_{11}\left(\sim_0 ¬^{+} + 4\right) + \tilde{f}^{*}_{21}\left(1+\sim_0\right)\left(2-\sim_0\right)E = 0,\ f^{*}_{21} = \tilde{f}_{21} - b_0/\sim_0 \qquad (17)$$

то, как следует из (16), коэффициент $B_1 = 0$ для любого значения $\sim$. Т.е., в окрестности угловой точки сектора отсутствует особенность напряжений. Следовательно, соотношение (17) является условием малонапряженности окрестности вершины сектора [4,5].

3. $® < \sim < 2®$. Здесь в условиях общего нагружения границы $r = 1$, напряжения при $r \to 0$ всегда имеют особенность того или иного порядка в зависимости от величины $\sim$. Причем, особенности напряжений обусловлены как первыми членами содержащими множители $r^{-\sim_0}$, так и соответствующими членами рядов с множителями $r^{\sim_0 k-2}$. При этом, порядки особенности напряжений могут меняться в пределах $-1 < -\sim_0 < -1/2,\ ® < \sim < 2®$; $-1 < \sim_0 k - 2 < 0,\ ® < \sim < 2®,\ k = 2$; $-0,5 < \sim_0 k - 2 < 0$, $3®/2 < \sim < 2®$, $k = 3$.

Коэффициенты при этих особенностях не равны нулю одновременно.

При выполнении условий (17) решение задачи совпадает с решением, приведенным в работе [4].

Когда $\sim \to ®$, коэффициент при $r^{-\sim_0}$ становится равным нулю и в разложениях (14′) отсутствуют члены с неинтегрируемыми особенностями r^{-1}. Аналогичная ситуация имеет место и для степенной особенности $r^{\sim_0 k-2}$, когда $\sim \to 2®$ при $k = 2$.

Полученные в данной работе результаты о поведении напряжений в окрестности вершины сектора при $\sim \to ®$ и $\sim \to 2®$ существенно отличается от тех, которые были получены в работах [1,2,3], где на границе $r = 1$ заданы нормальные и касательные напряжения. В этих работах было показано, что коэффициенты при степенной особенности типа $r^{-1+£}$ ($£ \to 0$ при $~ \to ®$ или $~ \to 2®$) в общем случае конечны и вообще отличны от нуля. И поэтому, с точки зрения предотвращения хрупкого разрушения, граничные условия (3) в данной работе физически более приемлемы, чем принятые в работах [1,2,3] граничные условия.

Работа выполнена в рамках гранта МОН РА 11-2с450.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Упругое равновесие кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Актуальные проблемы механики сплошной среды (Труды международной конференции, посвященной 95–летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна). Ереван, 2007. С. 368–372.
2. Саргсян А.М. Об упругом равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. (Труды VI международной конференции, сентябрь 21–26, Горис–Степанакерт,). Ереван, 2008.456 с.
3. Саргсян А.М. О равновесии кругового сектора при граничных условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Изв. НАН Армении, Механика. 2010. Т.63. №4. С. 31–37.
4. Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий, заданных на дуговой части контура кругового сектора на поведение напряжений в условиях гладкого контакта на радиальных сторонах.// Актуальные проблемы механики сплошной среды (сборник научных трудов международной конференции, октябрь 4–8, Дилижан, 2010. Т.2. С.116–119.
5. Чобанян К.С.Напряжения всоставных упругих телах. Ереван. Изд-во АН АрмССР,1987.338 с.
6. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under antiplane and plane deformations.// Modern problems of deformable bodies mechanics (collection of papers, vol. 1). Yerevan, 2005. 282p.
7. Саргсян А.М. Об особенности напряжений в одной задаче теории упругости для клина.// Изв. НАН Армении Механика. 2008. Т. 61. N1. С.48–53.

Сведения об авторе:

Саргсян Азат Мкртычевич – к.ф.м.н., ведущий научный сотрудник Ин-та механики НАН Армении
Адрес: 0019–Ереван, пр. маршала Баграмяна 24 б.,
тел. 58-60-54,
E-mail: azat-sargsyan@mail.ru

БЕСКОНТАКТНАЯ ВИБРОАКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА И ФРАКТОДИАГНОСТИКА ФЛАТТЕРА РАБОЧИХ КОЛЁС КОМПРЕССОРОВ

Сачин В.М., Туманов Н.В.

Москва, Россия

Флаттер (динамическая аэроупругая неустойчивость) является наиболее опасным типом аэроупругих колебаний рабочих колес (РК) компрессоров. В настоящей работе рассмотрены некоторые методы бесконтактной виброакустической диагностики флаттера (БВАДФ) и приведены примеры их применения – как при безопасном уровне колебаний, так и при интенсивных колебаниях, приводящих к образованию усталостных трещин в лопатках РК. В последнем случае анализ методами БВАДФ проводится в сочетании с электронно-микроскопическим анализом изломов (фрактодиагностикой), что обеспечивает надёжное определение причины разрушения и достоверную реконструкцию его развития. Результаты таких комплексных исследований также приведены в настоящей работе.

Методы БВАДФ базируются на закономерностях флаттера РК как волнового процесса [1-2]. В системе координат, связанной с РК, флаттер поворотно-симметричного РК при связанных колебаниях по форме с m узловыми диаметрами и круговой частотой μ_m происходит в виде волны перемещений лопаток, бегущей в направлении вращения колеса с угловой скоростью μ_m/m. Это приводит к возмущению окружного распределения статического давления потока вблизи РК – появляется дополнительная волна давления, которая воздействует на элементы статора (корпус компрессора, лопатки направляющих аппаратов), вызывая соответствующие волны перемещений и деформаций. В неподвижной системе координат угловая скорость указанных волн превышает угловую скорость флаттерной волны μ_m/m в рабочем колесе на величину угловой скорости последнего μ_p. Поскольку число m пространственных периодов волн не изменяется при переходе от связанной с РК системы координат к неподвижной, частота генерируемых флаттером диагностических сигналов (ДС), фиксируемая установленными на статоре датчиками (пульсаций давления, вибраций или вибродеформаций корпуса и т.д.), $\mu_{Gm}=m(\mu_m/m+\mu_p)=\mu_m+m\mu_p$.

При отклонении РК от поворотной симметрии флаттер с частотой μ_i описывается суперпозицией вперед и назад бегущих волн. В этом случае наряду с основным ДС на частоте μ_{Gm}, которая соответствует числу диаметров m превалирующей вперед бегущей волны, статорные датчики фиксируют также побочные ДС на частотах $\mu_{Gi}\pm j\mu_p$; где $j=0, 1, 2,\ldots,(s-1+¢)/2$; $¢=1$ при четном и $¢=0$ при нечетном числе s лопаток в РК.

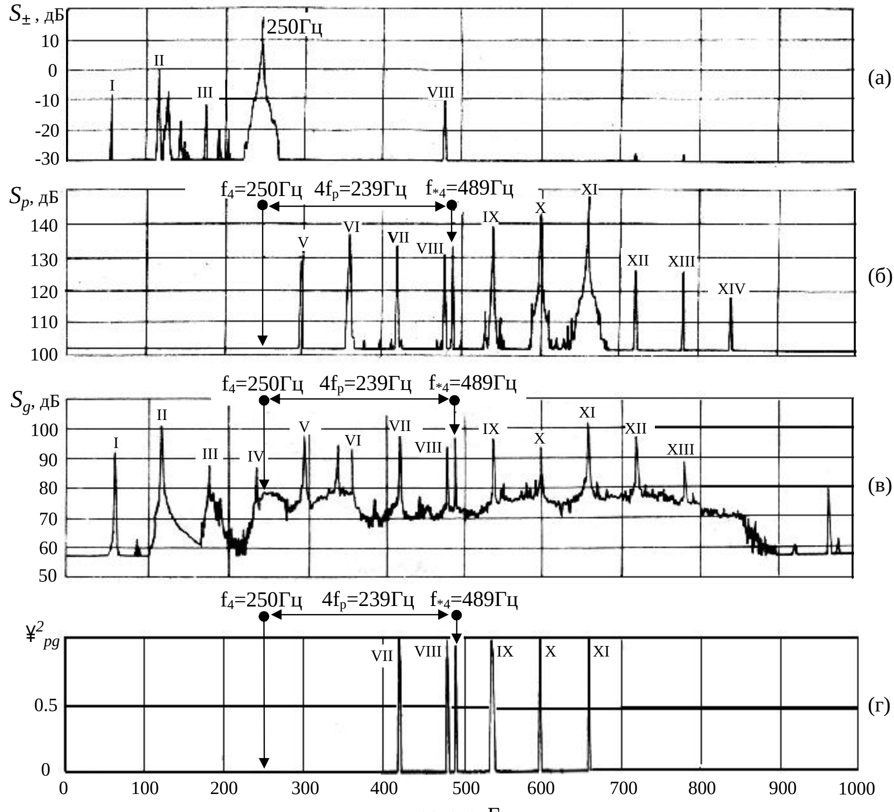


Рис.1. Спектральные плотности мощности (СПМ) динамических процессов на режиме флаттера РК вентилятора с безопасным уровнем вибронапряжений (а – вибронапряжения в лопатке РК, б – пульсации статического давления потока перед РК, в – вибрации корпуса вентилятора) и функция когерентности между пульсациями и вибрациями (нормализованная взаимная СПМ этих процессов) (г) (римские цифры – номера роторных гармоник)

На рис.1 приведены результаты БВАДФ бандажированного (с кольцевым поясом упругих связей) РК вентилятора авиадвигателя. Флаттер с безопасным уровнем вибрационных напряжений (амплитуда вибронапряжений в лопатке РК $\pm_v=15$МПа) происходил с частотой $f_4=250$Гц по форме с $m=4$ (рис.1а). Как видно, в спектрах пульсаций статического давления перед РК (рис.1б) и виброускорений корпуса вентилятора (рис.1в) хорошо выделяются ДС на диагностической частоте $f_{G4}=f_4+4f_p=489$Гц. Отсутствие побочных ДС означает близость РК к строгой поворотной симметрии. Значение функции когерентности между пульсациями и вибрациями (рис.1г) на диагностической частоте составляет *0.98*, что свидетельствует о линейной связи ДС пульсаций и вибраций.

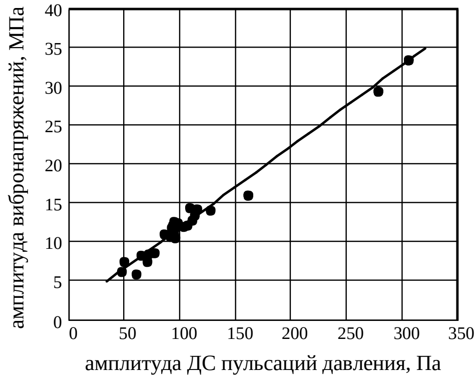


Рис.2. Зависимость «амплитуда вибронапряжений – амплитуда ДС пульсаций давления»

Методы БВАДФ позволяют также оценивать амплитуду вибронапряжений $\pm_v$ в РК при флаттере. Для этого необходимо измерить амплитуду ДС (например, пульсаций давления) p_v и использовать предварительно определенную калибровочную зависимость между $\pm_v$ и p_v. Такая зависимость показана на рис.2 (экспериментальные точки, полученные при флаттере РК вентилятора в процессе стендовых и летных испытаний авиадвигателя, и линия регрессии): коэффициент корреляции равен *0.99*, что означает возможность надёжного бесконтактного измерения и линейного прогнозирования величины $\pm_v$ по измеренным значениям амплитуды ДС пульсаций.

Наряду с ранней диагностикой флаттера при безопасном уровне вибронапряжений методы БВАДФ применяются для диагностики интенсивного флаттера с разрушающим уровнем вибронапряжений. На рис.3 приведены результаты диагностики такого флаттера РК высоконапорного вентилятора с консольными широкохордными лопатками (диагностика проводилась на основании анализа записей виброакустических процессов в окрестности РК). В спектрах пульсаций статического давления над РК (рис.3а) и вибраций корпуса вентилятора (рис.3б) доминируют диагностические компоненты с частотой *963*Гц (кратность $K=6.7$ по отношению к частоте вращения ротора вентилятора $f_p=144$Гц), превышающей частоту колебаний лопатки $f=531$Гц на $3f_p$, что соответствует флаттеру с превалирующим числом диаметров $m=3$. Кроме того, в спектрах имеются менее интенсивные компоненты кратностью *3.7*, *4.7*, *5.7*, *7.7*, *8.7* и *9.7*, отвечающие побочным ДС, частота которых отличается от частоты основного ДС на величину, кратную частоте вращения ротора. Эти компоненты обусловлены динамической неоднородностью (отклонением от поворотной симметрии) РК в процессе интенсивных колебаний. Поскольку на исследованном режиме все тензодатчики на лопатках РК вышли из строя, максимальная амплитуда вибронапряжений $\pm_{vmax}$ в лопатках оценивалась с использованием значений **1)** максимальной амплитуды ДС пульсаций на этом режиме ($p_{vmax}=15$КПА) и **2)** коэффициента диагностической чувствительности

$°=±_v/p_v=6\cdot 10^4$ (величина ° была определена на одном из предыдущих режимов флаттера с меньшими значениями $±_v$); тогда $±_{vmax}=°\ p_{vmax}=900$МПа.

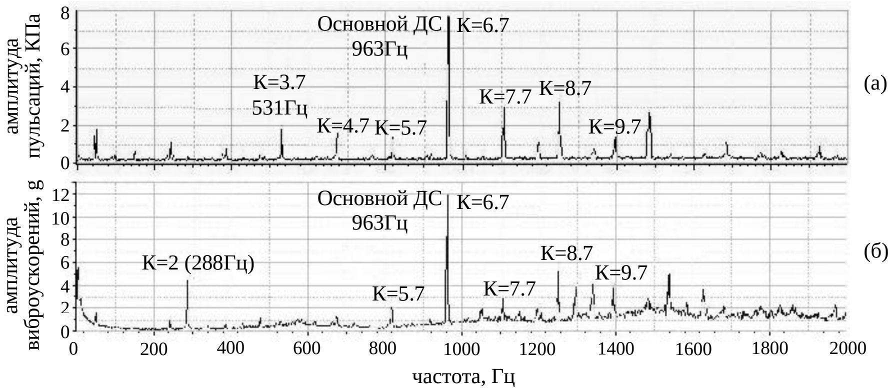


Рис.3. Спектры амплитуд пульсаций статического давления над РК вентилятора (а) и вибраций корпуса вентилятора (б) на режиме флаттера РК с разрушающим уровнем напряжений

Уровень и продолжительность действия разрушающих вибронапряжений оцениваются также с использованием электронно-микроскопического фрактографического анализа [3]. Как видно на рис.4, вблизи очага разрушения лопатки РК вентилятора (при длине трещины $l≈1.2$мм, отсчитываемой от входной кромки лопатки) выявляются усталостные бороздки со средним шагом $S=1$мкм. Так как шаг бороздок равен продвижению трещины в цикле нагружения и связан с размахом в этом цикле коэффициента интенсивности напряжений аK, то общее количество бороздок и их шаг вблизи очага разрушения характеризуют период роста усталостной трещины и уровень вибронапряжений при её зарождении. Поскольку поля бороздок со средним шагом $S≈1.5$мкм располагаются на поверхности излома до $l≈20÷25$мм, соответствующий период роста трещины $t=l/Sf=25÷31$с, что согласуется с продолжительностью интенсивного флаттера с $±_{vmax}=900$МПа (около 30с), установленной при БВАДФ.

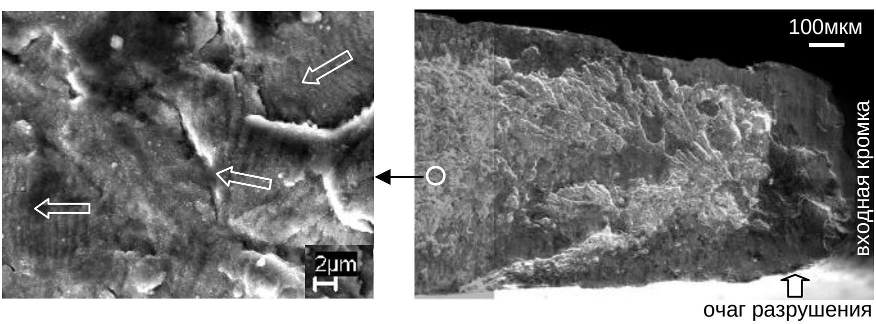


Рис.4. Поверхность разрушения лопатки РК вентилятора вблизи очага разрушения и усталостные бороздки со средним шагом *S=1*мкм на расстоянии *1.2*мм от входной кромки (контурные стрелки – локальные направления

(а) (б)

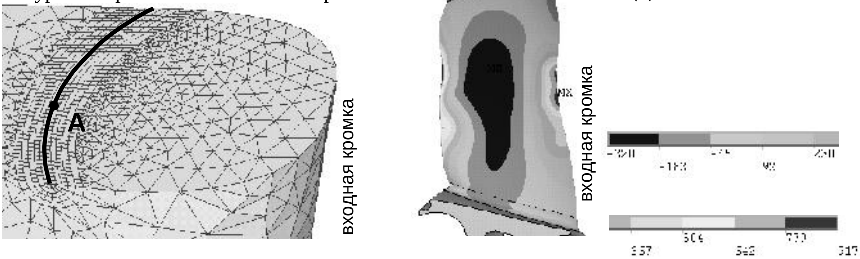


Рис.5. Фрагмент конечно-элементной модели лопатки РК вентилятора с трещиной *1.2*мм (а) и реконструированное распределение вибронапряжений при зарождении трещины [МПа] (б)

Расчётно-фрактографический метод оценки уровня максимальных вибронапряжений $\pm_{vmax}$ при зарождении трещины заключается в следующем:

- проводится моделирование напряженного состояния лопатки с трещиной при колебаниях по той форме, по которой реализовался флаттер, при этом фронт расчётной трещины проходит через т.А – место измерения ближайших к очагу разрушения усталостных бороздок (рис.4 и 5а);
- по зависимости *S*(а*K*) при *S=1*мкм вычисляется значение а*K* в т.А и определяется соответствующая ему амплитуда колебаний лопатки, затем при колебаниях лопатки без трещины с этой амплитудой находится $\pm_{vmax}$.

Определённая по такой методике величина $\pm_{vmax}=917$МПа (рис.5б) практически совпадает с приведенными выше данными БВАДФ.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сачин В.М. Некоторые особенности аэроупругих колебаний рабочих колёс турбомашин // Аэроупругость лопаток турбомашин. Вып.1. М.: ЦИАМ. 1981. С. 267-287.
2. Сачин В.М., Туманов Н.В., Шатохин А.Г. Бесконтактная вибродиагностика флаттера рабочих колёс компрессоров // Аэроупругость лопаток турбомашин. Вып.4. М.: ЦИАМ, 1987. С.195-206.
3. Сачин В.М., Туманов Н.В., Лаврентьева М.А., Черкасова С.А. Комплексная фрактодиагностика флаттера рабочих колёс компрессоров авиадвигателей.//Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2011 (в печати).

Сведения об авторах

Сачин Владимир Михайлович – кандидат технических наук, начальник сектора Центрального института авиационного моторостроения (ФГУП «ЦИАМ им. П.И.Баранова»), Москва.

Туманов Николай Ваганович – кандидат технических наук, начальник сектора ЦИАМ. E-mail: tumanov@rtc.ciam.ru

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ОТ ЛОКАЛЬНОЙ РАВНОМЕРНОЙ НАГРУЗКИ К СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ВО ВТОРЫХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ПРОГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Сейранян С.П.

Ереван, Армения

Обсуждается предельный переход в компонентах решения Навье [1] для локально нагруженной на прямоугольной площадке равномерным давлением прямоугольной свободно опертой пластины. Устремлением сторон площадки к нулю при постоянной результирующей силе получены предельные значения для вторых частных производных от прогиба по переменным x и y. Доказана их непрерывность в замкнутом прямоугольнике пластины с проколотой точкой приложения сосредоточенной силы как функций двух переменных. Установлено, что двукратное частное дифференцирование и предельный переход от локальной нагрузки к сосредоточенной перестановочны.

Введение. В краевых задачах механики встречаются парадоксы, когда на-рушается физически обусловленная непрерывная зависимость решений от параметров задачи. Таковыми являются, например, парадокс Циглера [2] и парадокс Бабушки – Сапонджяна [3]. Поэтому решение той или иной задачи [4], полученное из ограниченных соображений предельным путем, требует детального матанализа. Так решение для прогиба свободно опертой прямоугольной пластины под сосредоточенной силой [1] установленно Навье предельным переходом в им же полученном решении для прогиба той же, но локально нагруженной по прямоугольнику равномерным поперечным давлением пластины без требований существования предельных значений прочих величин НДС пластины с сохранением их физико-геометрических свойств.

В представляемой работе ограничиваемся исследованием предельного пере-хода от локально-распределенной назрузки к сосредоточенной в выражениях для всех вторых частных производных от вышеупомянутого решения Навье для прогиба, анализом предельных величин. Прежде автором систематически исследован предельный переход в первых частных производных [5].

1. Исходные выражения для для вторых частных производных от прогиба локально нагруженной пластины.

Вторые частные производные от прогиба записываются в виде [5], [6]

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{s}}\,\partial \mathrm{y}^{2-\mathrm{s}}}=\frac{1}{\Delta\xi\,\Delta\eta}\sum_{\mathrm{m}=1}^{\infty}\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{w}^{*}_{\mathrm{mn}}\sin\lambda_{\mathrm{m}}\xi\;\sin\lambda_{\mathrm{m}}\;\Delta\xi/2\,\frac{\partial^{\mathrm{s}}\sin\lambda_{\mathrm{m}}\mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{s}}}\,\frac{\partial^{2\text{-}\mathrm{s}}\chi_{n}(y)}{\partial \mathrm{y}^{2\text{-}\mathrm{s}}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i,j=0}^{1}(-1)^{i+j}\psi_s(\lambda_1(x+(-1)^i\xi+(-1)^j\Delta\xi/2),y),\ s=0,1,2;\ (x,y)\in G \qquad (1.1)$$

Здесь для текущих координат, множества их изменения, параметров и ин-дексированных переменных приняты те же обозначения, что и в [5] ,

$$\chi_n(y)=\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\sin\mu_n\,\Delta\eta/2, \qquad (1.2)$$

$$\psi_s(l,y)=-\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w^*_{mn}\lambda_1^s\,\partial^{2-s}\chi_n(y)/\partial^{2-s}y\ \partial^s\sin ml/\partial^s l\Big)\ /(\Delta\xi\Delta\eta),$$

$$w^*_{mn}=B/(\lambda_m\mu_n(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2),\ B=16P/(Dab),\ \ s=0,1,2. \qquad (1.3)$$

2. Предельный переход в выражениях для вторых частных производ-ных от прогиба нагруженной по прямоугольнику пластины.

С учетом сходимости коэффициентов к нулю внешних сходящихся на $[a,b]$ тригонометрических рядов (**ТР**) [7] в (1.3)[6] и ограничения [6]

$$x\neq\xi\pm\Delta\xi/2 \qquad (2.1)$$

ТР в (1.3) преобразованием Абеля (**ПА**) [8] преобразуются к виду

$$\psi_s(l,y)=\Big[\lambda_1^s\cos l/2\sum_{n=1}^{\infty}w^*_{1n}\mu_n^{2-s}\chi_n(y)+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E^{(s)}_{mn}\chi_n(y)\cos(m-0.5)l\Big]/$$
$$/\big(2\Delta\xi\Delta\eta\sin l/2\big),\ s=0,2 \qquad (2.2)$$

$$\psi_1(l,y)=\Big[\lambda_1\sin l/2\sum_{n=1}^{\infty}w^*_{1n}\mu_n\chi^*_n(y)+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E^{(1)}_{mn}\chi^*_n(y)\sin(m-0.5)l\Big]/$$
$$/\big(2\Delta\xi\Delta\eta\sin l/2\big), \qquad (2.3)$$

где

$$E^{(k)}_{mn}=(w^*_{mn}\lambda_m^k-w^*_{m-1,n}\lambda_{m-1}^k)\mu_n^{2-k},\ \ k=0,1,2; \qquad (2.4)$$

$$\chi^*_n(y)=\cos\mu_n y\ \sin\mu_n\eta\ \sin\mu_n\Delta\eta/2 \qquad (2.5)$$

Далее подставляя в (2.4) величины w^*_{mn}, имеем

$$E^{(0)}_{mn}=-B\lambda_1\mu_n\{\Delta^2_{mn}+2(\lambda_1^2-3\lambda_1\lambda_m+2\lambda_m^2)\Delta_{mn}+\lambda_1[\lambda_1^2(\lambda_1-5\lambda_m)+$$
$$+4\lambda_m^2(2\lambda_1-\lambda_m)]\}/(\lambda_m\lambda_{m-1}\Delta^2_{mn}\Delta^2_{m-1,n}),\ E^{(1)}_{mn}=B\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_m)\times$$
$$\times[2\Delta_{mn}+\lambda_1(\lambda_1-2\lambda_m)]/(\Delta^2_{mn}\Delta^2_{m-1,n}),E^{(2)}_{mn}=\lambda_1\lambda_m w^*_{mn}+\lambda_{m-1}E^{(1)}_{mn}/\mu_n,$$
$$\Delta_{mn}=\lambda_m^2+\mu_n^2$$

затем с применением неравенства (1.2) в [6] приходим к оценкам

$$\left|E^{(0)}_{mn}\right|\le O\big(\mu_n/(\lambda_m^2\Delta^2_{mn})\big)\le B_1/(\lambda_m^{2\gamma+2}\mu_n^{3-2\gamma})\ \Big|_{\gamma=1/4}=B_1/(\lambda_m^{2\cdot5}\mu_n^{2\cdot5}),$$
$$\left|E^{(1)}_{mn}\right|=O\big(\lambda_m/\Delta^3_{mn}\big)\le B_2/(\lambda_m^{3\gamma-1}\mu_n^{6-3\gamma})\ \Big|_{\gamma=7/6}=B_2/(\lambda_m^{2\cdot5}\mu_n^{2\cdot5}),$$

$$\left|E_{mn}^{(2)}\right| \le \lambda_1 \lambda_m w_{mn}^{*} + \lambda_m \left|E_{mn}^{(1)}\right| / \mu_n \le B_4 \Big/ (\lambda_m^{2\gamma} \mu_n^{5-2\gamma}) \Big|_{\gamma=5/4} + B_2 \Big/ (\lambda_m^{3\gamma-2} \mu_n^{7-3\gamma}) \Big|_{\gamma=5/4} =$$

$$= B_3 \Big/ (\lambda_m^{2\cdot 5} \mu_n^{2\cdot 5}) \qquad (2.6)$$

Здесь $B_k > 0$ – некоторые константы.

С использованием (2.2), (2.3) преобразуем входящие в (1.1) разности

$$\Lambda(x \pm \xi, \Delta\xi) = \sum_{i=0}^{1} \psi_s(\lambda_1 (x \pm \xi + (-1)^i \Delta\xi/2), y) = \Big[\lambda_1^s \Lambda_1 (x \pm \xi, \Delta\xi) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}^{*} \mu_n^{2-s} \chi_n(y)/\Delta\eta + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(s)} \chi_n(y)/\Delta\eta \, \Lambda_m (x \pm \xi, \Delta\xi)\Big] /$$

$$/ [2 \sin[\lambda_1 (x \pm \xi + \Delta\xi/2)/2] \sin[\lambda_1 (x \pm \xi - \Delta\xi/2)/2]], \; s = 0, 2; \qquad (2.7)$$

$$\Omega(x \pm \xi, \Delta\xi) = \sum_{i=0}^{1} \psi_1(\lambda_1 (x \pm \xi + (-1)^i \Delta\xi/2), y) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(1)} \chi_n^{*}(y)/\Delta\eta \times$$

$$\times \Omega_m (x \pm \xi, \Delta\xi) / [2 \sin[\lambda_1 (x \pm \xi + \Delta\xi/2)/2] \sin[\lambda_1 (x \pm \xi - \Delta\xi/2)/2]], \qquad (2.8)$$

где величины Λ_m, Ω_m приводятся к виду

$$\Lambda_m(x \pm \xi, \Delta\xi) = \Big\{\lambda_{m-1} \Big[\sin[\lambda_m (x \pm \xi) + \lambda_{m-1} \Delta\xi/2] - \sin[\lambda_m (x \pm \xi) - \lambda_{m-1} \times$$

$$\times \Delta\xi/2] \Big] / (\lambda_{m-1} \Delta\xi) - \lambda_m \Big[\sin[\lambda_{m-1}(x \pm \xi) + \lambda_m \Delta\xi/2] - \sin[\lambda_{m-1}(x \pm \xi) -$$

$$- \lambda_m \Delta\xi/2] \Big] / (\lambda_m \Delta\xi)\Big\} / 2, \; m = 1, 2, \qquad (2.9)$$

$$\Omega_m(x \pm \xi, \Delta\xi) = \Big\{\lambda_m \Big[\cos[\lambda_{m-1}(x \pm \xi) + \lambda_m \Delta\xi/2] - \cos[\lambda_{m-1}(x \pm \xi) - \lambda_m \times$$
$$\times \Delta\xi/2] / (\lambda_m \Delta\xi) - \lambda_{m-1} \Big[\cos[\lambda_m (x \pm \xi) + \lambda_{m-1} \Delta\xi/2] - \cos[\lambda_m (x \pm \xi) - \lambda_{m-1} \times$$

$$\times \Delta\xi/2] / (\lambda_{m-1} \Delta\xi)\Big\} / 2, \; m = 2, 3, \ldots \qquad (2.10)$$

Представления (2.9), (2.10) с применением к центральным разностям в них формулы конечных приращений Лагранжа [7] дают оценки

$$\left| \Lambda_m (x \pm \xi, \Delta\xi) \right| \le (\lambda_{m-1} + \lambda_m)/2 \le \lambda_m, \; m = 1, 2, \ldots; \qquad (2.11)$$

$$\left| \Omega_m (x \pm \xi, \Delta\xi) \right| \le (\lambda_m + \lambda_{m-1})/2 \le \lambda_m, \; m = 2, 3, \ldots \qquad (2.12)$$

Одновременно из (2.9), (2.10) непосредственно следует, что.

$$\lim_{\Delta\xi \to 0} \Lambda_m (x \pm \xi, \Delta\xi) = [\lambda_{m-1} \cos\lambda_m (x \pm \xi) - \lambda_m \cos\lambda_{m-1} (x \pm \xi)]/2 \qquad (2.13)$$

$$\lim_{\Delta\xi \to 0} \Omega_m (x \pm \xi, \Delta\xi) = [\lambda_{m-1} \sin\lambda_m (x \pm \xi) - \lambda_m \sin\lambda_{m-1} (x \pm \xi)]/2 \qquad (2.14)$$

Неравенства (2.6) и (2.11), (2.12) позволяют получить следующие оценки для общих членов повторных рядов в (2.7), (2.8):

$$\left| E_{mn}^{(s)} \chi_n(y) / \Delta\eta \Lambda_m(x \pm \xi, \Delta\xi) \right| \le \mu_n / 2 \left| E_{mn}^{(s)} \right| \left| \sin(\mu_n \Delta\eta / 2) / (\mu_n \Delta\eta / 2) \right| \times$$

$$\times \left| \Lambda_m (x \pm \xi, \Delta\xi) \right| < (B_1 + B_3) / (2 \lambda_m^{1.5} \mu_n^{1.5}),\ s = 0, 2; \qquad (2.15)$$

$$\left| E_{mn}^{(1)} \chi_n^*(y) / \Delta\eta \Omega_m(x \pm \xi, \Delta\xi) \right| \le \mu_n / 2 \left| E_{mn}^{(2)} \right| \left| \sin(\mu_n \Delta\eta / 2) / (\mu_n \Delta\eta / 2) \right| \times$$

$$\times \left| \Omega_m (x \pm \xi, \Delta\xi) \right| < B_2 / (2 \lambda_m^{1.5} \mu_n^{1.5}) \qquad (2.16)$$

Из (2.15) и (2.16) видно, что в (2.7) и (2.8) простые ряды в повторных с ин-дексом суммированя n мажорируются числовым сходящимся рядом, что приводит к их равномерной сходимости относительно $\Delta\eta$ ([7], n^0 430). Далее существуют конечные пределы их общих членов

$$\lim_{\Delta\eta \to 0} E_{mn}^{(s)} \chi_n (y) / \Delta\eta = \mu_n / 2 E_{mn}^{(s)} \sin \mu_n y \sin \mu_n \eta,\ s = 0, 2 \qquad (2.17)$$

$$\lim_{\Delta\eta \to 0} E_{mn}^{(1)} \chi_n^* (y) / \Delta\eta = \mu_n / 2 E_{mn}^{(1)} \cos \mu_n y \sin \mu_n \eta \qquad (2.18)$$

Значит, в силу теоремы 4 ([7], n^0 433) в данных рядах допустимы предель-ные переходы под знаками суммирования. Получаем

$$\lim_{\Delta\eta \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(s)} \chi_n(y) / \Delta\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n / 2 E_{mn}^{(s)} \sin \mu_n y \sin \mu_n \eta < \infty,\ s = 0, 2; \qquad (2.19)$$

$$\lim_{\Delta\eta \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(1)} \chi_n^*(y) / \Delta\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n / 2 E_{mn}^{(1)} \cos \mu_n y \sin \mu_n \eta < \infty \qquad (2.20)$$

Но с применением (2.15), (2.16) приходим к мажорантам и для ординарных рядов с индексом m в повторных рядах в (2.7) и (2.8)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(s)} \chi_n(y) / \Delta\eta \Lambda_m(x \pm \xi, \Delta\xi) \right| \le (B_1 + B_3) / (2 \lambda_m^{1.5}) \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{1.5} < \infty, s = 0, 2 \qquad (2.21)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(1)} \chi_n(y) / \Delta\eta \Omega_m (x \pm \xi, \Delta\xi) \right| \le B_2 / (2 \lambda_m^{1.5}) \sum_{n=1}^{\infty} 1 / \mu_n^{1.5} < \infty \qquad (2.22)$$

откуда следует и их равномерная сходимость, но уже относительно обоих $\Delta\xi, \Delta\eta$. Далее существуют конечные двойные пределы и их общих членов, что следует из (2.13), (2.19) и (2.14), (2.20). Поэтому при любом законе стрем-ления $\Delta\xi, \Delta\eta$ к нулю применима теорема 4 ([7], n^0 433), что дает

$$\lim_{\substack{\Delta\xi \to 0 \\ \Delta\eta \to 0}} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(s)} \chi_n(y) / \Delta\eta \Lambda_m (x \pm \xi, \Delta\xi) = 0.25 \sum_{m=2}^{\infty} [\lambda_{m-1} \cos \lambda_m (x \pm \xi) -$$

$$- \lambda_m \cos \lambda_{m-1} (x \pm \xi)] \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn}^{(s)} \mu_n \sin \mu_n y \sin \mu_n \eta < \infty,\ s = 0, 2 \qquad (2.23)$$

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}^{(1)}\chi_n^*(y)/\Delta\eta\,\Omega_m(x\pm\xi,\Delta\xi)=0.25\sum_{m=2}^{\infty}[\lambda_{m-1}\sin\lambda_m(x\pm\xi)-$$

$$-\lambda_m\sin\lambda_{m-1}(x\pm\xi)]\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}^{(1)}\mu_n\cos\mu_n y\sin\mu_n\eta\ <\infty \qquad (2.24)$$

Оценим теперь общий член простого ряда в (2.7). Имеем

$$\left|w_{1n}^*\mu_n^{2-s}\chi_n(y)/\Delta\eta\right|=B\mu_n^{3-s}/[2\lambda_1\mu_n(\lambda_1^2+\mu_n^2)^2]\left|\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\times\right.$$

$$\left.\times\sin\mu_n\Delta\eta/2/(\mu_n\Delta\eta/2)\right|\le B/(2\lambda_1\mu_n^{s+2}),\ \ s=0,2 \qquad (2.25)$$

Тогда названный простой ряд мажорируется числовым сходящимся рядом,
что приводит к его равномерной сходимости относительно параметра $\Delta\eta$ ([7], n^0 430). Кроме того, существует конечный предел

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}w_{1n}^*\mu_n^{2-s}\chi_n(y)/\Delta\eta=w_{1n}^*\mu_n^{3-s}/2\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\ \lim_{\Delta\eta\to 0}(\sin\mu_n\Delta\eta/2/$$

$$/(\mu_n\Delta\eta/2)=w_{1n}^*\mu_n^{3-s}/2\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta \qquad (2.26)$$

Значит ([7], n^0 433),

$$\lim_{\Delta\eta\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}^*\mu_n^{2-s}\chi_n(y)/\Delta\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\Delta\eta\to 0}[w_{1n}^*\mu_n^{2-s}\chi_n(y)/\Delta\eta]=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}^*\mu_n^{3-s}\times$$

$$\times\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta<\infty,\ s=0,2 \qquad (2.27)$$

Перейдем, наконец, к двойному предельному переходу в (2.7), (2.8) при $\Delta\xi,\Delta\eta\to 0$. Так как $0<\xi<a$, $0\le x\le a$, то $\lambda_1(x+\xi)/2\in(0,\pi)$ и предельные значения знаменателей в (2.7), (2.8), если при ξ принят знак плюс, отличны от нуля. Когда же при ξ выбран знак минус, потребуем, чтобы

$$x\ne\xi\,. \qquad (2.28)$$

Тогда $\lambda_1(x-\xi)/2\in[-\pi/2,0)\bigcup(0,\pi/2]$ и пределы знаменателей в (2.7), (2.8) по-прежнему отличны от нуля. Отметим, что при условии (2.28) нера-венства (2.1) при достаточно малых $\Delta\xi$, а значит и (2.7), (2.8) сохраняют си-лу. Поэтому вводя множества $G^{(+\xi)}=G$, $G^{(-\xi)}=G\setminus\{x=\xi\}$ и выполняя предельный переход с учетом (2.13) (при m=1), (2.23), (2.24) и (2.27), находим

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\Lambda(x\pm\xi,\Delta\xi)=\Big[-\lambda_1^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}^*\mu_n^{3-s}\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta+\sum_{m=2}^{\infty}[\lambda_{m-1}\times$$

$$\times\cos\lambda_m(x\pm\xi)-\lambda_m\cos\lambda_{m-1}(x\pm\xi)]\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}^{(s)}\mu_n\ \sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\Big]/$$

$$/[\,8\sin^2(\lambda_1(x\pm\xi)/2)\,]<\infty,\ s=0,2;\ (x,y)\in G^{(\pm\xi)}, \quad (2.29)$$

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\Omega(x\pm\xi,\Delta\xi)=\Big[\sum_{m=2}^{\infty}[\lambda_{m-1}\sin\lambda_m(x\pm\xi)-\lambda_m\sin\lambda_{m-1}(x\pm\xi)]\sum_{n=1}^{\infty}E_{mn}^{(1)}\times$$

$$\times\mu_n\cos\mu_n y\sin\mu_n\eta\Big]/[\,8\sin^2(\lambda_1(x\pm\xi)/2)\,]<\infty,\ \ (x,y)\in G^{(\pm\xi)} \quad (2.30)$$

Далее в (2.29), (2.30) при суммировании по m допустим переход к суммиро-ванию слагаемых, ибо ряды с членами-слагаемыми сходятся, к чему приходим с учетом (2.6). Поэтому с приведением также к единым повторным **ТР** имеем

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\Lambda(x\pm\xi,\Delta\xi)=\Big[-\lambda_1^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}^{*}\mu_n^{3-s}\sin\mu_n y\ \sin\mu_n\eta-\lambda_2\cos\lambda_1(x\pm\xi)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}E_{2n}^{(s)}\mu_n\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda_{m-1}E_{mn}^{(s)}-\lambda_{m+1}E_{m+1,n}^{(s)}]\,\mu_n\cos\lambda_m(x\pm\xi)\times$$

$$\times\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\Big]/\Big[8\sin^2[\lambda_1(x\pm\xi)/2]\Big]<\infty,\ s=0,2;\ (x,y)\in G^{(\pm\xi)}, \quad (2.31)$$

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\Omega(x\pm\xi,\Delta\xi)=\Big[-\lambda_2\sin\lambda_1(x\pm\xi)\sum_{n=1}^{\infty}E_{2n}^{(1)}\mu_n\cos\mu_n y\sin\mu_n\eta+$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda_{m-1}E_{mn}^{(1)}-\lambda_{m+1}E_{m+1,n}^{(1)}]\mu_n\sin\lambda_m(x\pm\xi)\cos\mu_n y\sin\mu_n\eta\Big]/$$

$$/\Big[8\sin^2[\lambda_1(x\pm\xi)/2\Big]<\infty,\ (x,y)\in G^{(\pm\xi)} \quad (2.32)$$

Затем выражения (2.31), (2.32) упрощаются, ибо с применением (2.4) имеем

$$[\lambda_{m-1}E_{mn}^{(k)}-\lambda_{m+1}E_{m+1,n}^{(k)}]\mu_n=-[w_{m+1,n}^{*}\lambda_{m+1}^{k+1}-2w_{mn}^{*}\lambda_m^{k+1}+w_{m-1,n}^{*}\lambda_{m-1}^{k+1}]\mu_n^{3-k},$$

$$\lambda_2E_{2n}^{(k)}\mu_n=(\lambda_2^{k+1}w_{2n}^{*}-2\lambda_1^{k+1}w_{1n}^{*})\mu_n^{3-k},\ \ k=0,1,2 \quad (2.33)$$

Если также принять во внимание, что с применением неравенства (1.2) в [5]

$$\left|w_{mn}^{*}\lambda_m^{s+1}\mu_n^{3-s}\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\right|\le w_{mn}^{*}\lambda_m^{s+1}\mu_n^{3-s},\ \ s=0,2 \quad (2.34)$$

$$\left|w_{mn}^{*}\lambda_m^{2}\mu_n^{2}\cos\mu_n y\sin\mu_n\eta\right|\le w_{mn}^{*}\lambda_m^{2}\mu_n^{2}, \quad (2.35)$$

$$\mathrm{w}_{\mathrm{mn}}^{*}\lambda_m^{k+1}\mu_{\mathrm{n}}^{3\text{-}\mathrm{k}}\le 4C[\lambda_m^{k}\mu_{\mathrm{n}}^{2\text{-}\mathrm{k}}/(\lambda_m^{2\gamma}\mu_n^{4-2\gamma})]\Big|_{\gamma=k/2+1/4}=4C/(\lambda_m^{0\cdot 5}\mu_{\mathrm{n}}^{1\cdot 5}),\ k=0,1,2, \quad (2.36)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\lambda_m^{s+1}\mu_n^{3-s}\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\right|\le 4C/\lambda_m^{0\cdot 5}\sum_{n=1}^{\infty}1/\mu_{\mathrm{n}}^{1\cdot 5}<\infty,\ s=0,2 \quad (2.37)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^{*}\lambda_{m}^{2}\mu_{n}^{2}\cos\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta\right| \le 4C/\lambda_{m}^{0.5}\sum_{n=1}^{\infty}1/\mu_{n}^{1.5}<\infty \qquad (2.38)$$

и ряды под знаком модуля в (2.37), (2.38) сходятся, а их суммы при $m\to\infty$ стремятся к нулю, то (2.31), (2.32) двукратным **ПА** [9] преобразуются к виду

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\Lambda(x\pm\xi,\Delta\xi)=\frac{1}{8\sin^{2}[\lambda_{1}(x\pm\xi)/2]}\Big[-\lambda_{1}^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}^{*}\mu_{n}^{3-s}\sin\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta+$$
$$+\cos\lambda_{1}(x\pm\xi)\Big(2\lambda_{1}^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}^{*}\mu_{n}^{3-s}\sin\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta-\lambda_{2}^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{2n}^{*}\mu_{n}^{3-s}\sin\mu_{n}y\times$$
$$\times\sin\mu_{n}\eta\Big)-\sum_{m=2}^{\infty}\Big(\lambda_{m+1}^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{m+1,n}^{*}\,\mu_{n}^{3-s}\sin\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta-2\lambda_{m}^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\,\mu_{n}^{3-s}\times$$
$$\times\sin\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta+\lambda_{m-1}^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}w_{m-1,n}^{*}\,\mu_{n}^{3-s}\sin\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta\Big)\cos\lambda_{m}(x\pm\xi)\Big]=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\,\lambda_{m}^{s+1}\mu_{n}^{3-s}\sin\mu_{n}y\sin\mu_{n}\cos\lambda_{m}(x\pm\xi)<\infty,\ s=0,2, \qquad (2.39)$$

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\Omega(x\pm\xi,\Delta\xi)=\frac{1}{8\sin^{2}[\lambda_{1}(x\pm\xi)/2]}\Big[\sin\lambda_{1}(x\pm\xi)\Big(-\lambda_{2}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}w_{2n}^{*}\mu_{n}^{2}\cos\mu_{n}y\times$$
$$\times\sin\mu_{n}\eta+2\lambda_{1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}w_{1n}^{*}\mu_{n}^{2}\cos\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta\Big)-\sum_{m=2}^{\infty}\Big(\lambda_{m+1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}w_{m+1,n}^{*}\,\mu_{n}^{2}\cos\mu_{n}y\times$$
$$\times\sin\mu_{n}\eta-2\lambda_{m}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\,\mu_{n}^{2}\cos\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta+\lambda_{m-1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}w_{m-1,n}^{*}\,\mu_{n}^{2}\cos\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta\Big)\times$$
$$\times\sin\lambda_{m}(x\pm\xi)\Big]=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\lambda_{m}^{2}\mu_{n}^{2}\cos\mu_{n}y\sin\mu_{n}\eta\,\sin\lambda_{m}(x\pm\xi)<\infty,$$
$$(x,y)\in G^{(\pm\xi)} \qquad (2.40)$$

Отсюда, подставляя в (1.1) (2.7) и (2.8) и переходя к двойному пределу в обеих частях полученных равенств, а также с учетом конечности пределов (2.39) и (2.40) объединяя оба повторных **ТР** в единый сходящийся повторный **ТР**, приходим к обобщающей формуле

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\frac{\partial^{2}w(x,y)}{\partial x^{k}\partial y^{2-k}}=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\lambda_{m}\,\mu_{n}\,\frac{\partial^{k}\sin\lambda_{m}x}{\partial x^{k}}\,\frac{\partial^{2-k}\sin\mu_{n}y}{\partial x^{2-k}}\sin\lambda_{m}\xi\times$$
$$\times\sin\mu_{n}\eta,\ k=0,1,2;\ (x,y)\in G^{(-\xi)} \qquad (2.41)$$

Покажем теперь, что в повторных рядах в (2.41) допустима перестановка порядка суммирования. С учетом (2.6) оценим общие члены в повторных рядах в (2.31), (2.32). Имеем

$$\left|[\lambda_{m-1}E_{mn}^{(s)}-\lambda_{m+1}E_{m+1,n}^{(s)}]\,\mu_n\cos\lambda_m(x\pm\xi)\sin\mu_n y\sin\mu_n\eta\right|\le\lambda_m\left|E_{mn}^{(s)}\right|\mu_n+$$

$$+\lambda_{m+1}\left|E_{m+1,n}^{(s)}\right|\mu_n\le 2(B_1+B_3)/(\lambda_m^{1\cdot 5}\mu_n^{1\cdot 5}),\ s=0,2; \quad (2.42)$$

$$\left|[\lambda_{m-1}E_{mn}^{(1)}-\lambda_{m+1}E_{m+1,n}^{(1)}]\mu_n\sin\lambda_m(x\pm\xi)\cos\mu_n y\sin\mu_n\eta\right|\le\lambda_m\left|E_{mn}^{(1)}\right|\mu_n+$$

$$+\lambda_{m+1}\left|E_{m+1,n}^{(1)}\right|\mu_n\le 2B_2/(\lambda_m^{1\cdot 5}\mu_n^{1\cdot 5}) \quad (2.43)$$

Оценки (2.42), (2.43) показывают, что замена в повторных рядах в (2.31), (2.32) общих членов их модулями приводит к сходящимся рядам. Поэтому переставляя в них порядка суммирования ([7] , n^0 393) и далее с учетом (2.33) и сходимости в (2.31), (2.32) простых рядов-слагаемых с индексом n группируя ряды в единый сходящийся ряд и примененяя двукратное **ПА** для **ТР,** приходим к (2.39), (2.40), но с измененным порядком суммирования.

Здесь двукратное **ПА** применяется к простым **ТР** с индексом m, что допус-тимо, ибо из (2.34) – (2.36) следует сходимость их коэффициентов к нулю [9].

Наконец, приходим к (2.41), но с переставленным порядком суммирования

$$\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\eta\to 0}}\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^k\partial y^{2-k}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}w_{mn}^{*}\lambda_m\,\mu_n\,\frac{\partial^k\sin\lambda_m x}{\partial x^k}\,\frac{\partial^{2-k}\sin\mu_n y}{\partial x^{2-k}}\sin\lambda_m\xi\times$$

$$\times\sin\mu_n\eta,\ k=0,1,2;\ (x,y)\in G^{(-\xi)} \quad (2.44)$$

Убедимся теперь, что формула (2.41) справедлива и на множестве $G^{(-\eta)}$. Действительно, в исходном повторном **ТР** (1.1) возможна перестановка порядка суммирования, ибо ряд, составленный из модулей его членов, сходится. Поэтому переставляя порядок суммирования и повторяя те же рассуждения, что и при выводе формулы в (2.44) с точностью до обозначений, приходим к формуле (2.41) и в $G^{(-\eta)}$. Отсюда, (2.41) верна в $G^{\xi\eta}=G\setminus(\xi,\eta)$.

Замечание. Нетрудно видеть, что в правой части (2.41) имеем дважды част-но формально почленно продифференцированный в $G^{\xi\eta}$ повторный ряд ре-шения Навье для прогиба при сосредоточенной нагрузке ([1], (133)). Но дан-ный ряд для прогиба суммированием внутреннего ряда допускает представ-ление ординарным дважды частно почленно непрерывно дифференцируемым в $G^{(-\eta)}$ рядом ([1], (145)). Далее почленно дважды дифференцируется по y и внутренний ряд (133). Значит, в (2.41) двукратное дифференцирование в $G^{(-\eta)}$ можно вынести за знаки суммирования, причем ряд в (2.41) непрерывен в $G^{(-\eta)}$. Аналогично в (2.44), отправляясь от (133) с измененным порядком суммирования, приходим к вынесению дифференцирования за знаки суммирования и непрерывности ряда в $G^{(-\xi)}$. Итак, в $G^{\xi\eta}$ двукратное частное дифференцирование по x и y и предельный переход от локальной нагрузки к сосредоточенной, последовательно приложенные к прогибу, перестановочны и сохраняют непрерывность.Парадокс отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки.– Пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
2. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций.–М.:Мир, 1971,192с.
1. 3.Сапонджян О.М. Изгиб тонких упругих плит.–Ереван: Айастан, 1975,436с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1965,433с.
4. Сейранян С.П. О предельном переходе от локально распределенной равномерной нагрузки к сосредоточенной в выражениях для компонент градиента прогиба прямоугольной свободно опертой пластины // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды II международной конференции, г. Дилиджан, Армения, 4 – 8 октября. Т 2, 2010, с. 146 – 150.
5. Сейранян С.П. Об одном решении Навье для частично нагруженной прямоугольной пластины // Вестник Томского гос.– унта. Математика и механика. 2009, № 1(5), с. 82 –95.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.– М.: Физматлит, тт. 2, 3, 2008, 1690с.
7. Бари Н.К. Тригонометрические ряды.– М., Физматгиз, 1961, 936с.
8. Сейранян С.П. Ускорение сходимости в задаче об изгибе прямоугольной
2. изотропной пластины поперечной силой // Изв. НАН РА, Механика, 2001, т.
3. 54, № 1, с. 48 – 55.

Сведения об авторе:

Сейранян Сурен Паруйрович – к. ф.– м. н., с.н.с. Института механики НАН РА. Адрес: Ереван, пр. Баграмяна 24б, ИМ НАН РА.
Тел. (374 10) 54 28 38.
E-mail: seysuren@yahoo.com.

К ВОПРОСУ О ПАРНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Симонян А. М , Саноян Ю.Г., Тухова А.И.

Ереван, Армения

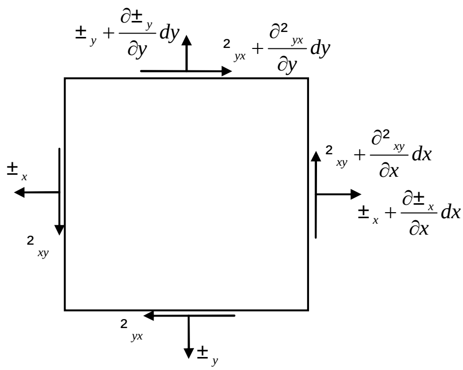
Как известно [1], из условия равновесия элемента принимается так называемый закон о парности касательных напряжений, который записывается так:

$$2_{ij} = 2_{ji}\,, \qquad (1)$$

где *i* и *j* – взаимно-перпендикулярные направления, первый индекс соответствует нормали сечения, на котором касательное напряжение действует, второй–направлению.

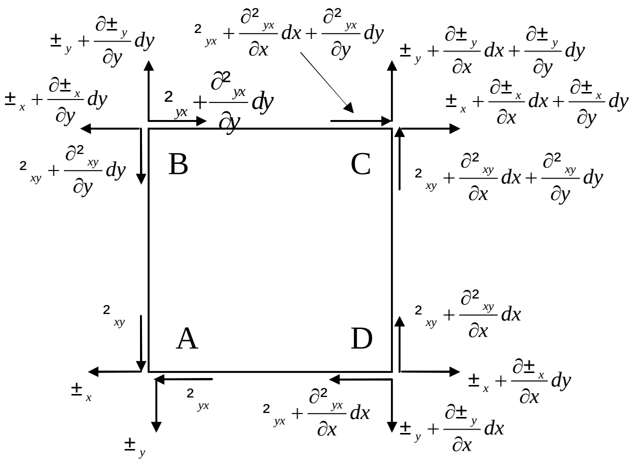
Однако в случае действия на одну из сторон прямого угла некоторой распределённой касательной нагрузки при отсутствии нагрузки на другую сторону того же угла получается заведомое нарушение (1) в угловой точке, что представляется парадоксом.

Рассмотрим плоское напряжённое состояние при пренебрежении объёмными силами.



Фиг. 1.

Вместо обычно принимаемой схемы распределения напряжений (фиг. 1) в элементе *dxdy*, где фактически принимается изменение σ_x и τ_{xy} лишь в направлении *x*, σ_y и τ_{xy} – лишь в направлении *y*, примем более точную схему распределения напряжений (фиг. 2), где в точке *A* действуют напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx} в точках B, C, D – соответствующие напряжения с приращениями.



Фиг. 2.

Будем считать, что на каждой из сторон элемента все напряжения изменяются по линейному закону. Рассматривая равновесие этого элемента, запишем равенство суммы проекций, действующих на него сил, на ось x нулю:

$$-\pm_x dy - \frac{1}{2}\frac{\partial \pm_x}{\partial y} dydy + \pm_x dy + \frac{\partial \pm_x}{\partial x} dxdy + \frac{1}{2}\frac{\partial \pm_x}{\partial y} dydy - {}^{2}{}_{yx} dx - ,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial {}^{2}{}_{yx}}{\partial x} dxdx + {}^{2}{}_{yx} dx + \frac{\partial {}^{2}{}_{yx}}{\partial y} dydx + \frac{1}{2}\frac{\partial {}^{2}{}_{yx}}{\partial x} dxdx = 0$$

откуда получим

$$\frac{\partial \pm_x}{\partial x} + \frac{\partial {}^{2}{}_{yx}}{\partial y} = 0, \qquad (2)$$

что совпадает с общепринятым дифференциальным уравнением равновесия. Точно так же получим уравнение

$$\frac{\partial \pm_y}{\partial y} + \frac{\partial {}^{2}{}_{xy}}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

из условия равенства нулю суммы моментов, действующих на элемент сил относительно точки C, получим

$$-\sigma_x dy\frac{dy}{2}-\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\frac{dy}{2}\frac{dy}{3}+\sigma_x dy\frac{dy}{2}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy\frac{dy}{2}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\frac{dy}{2}\frac{dy}{3}+$$
$$+\sigma_y dx\frac{dx}{2}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}dx\frac{dx}{2}\frac{dx}{3}-\sigma_y dx\frac{dx}{2}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dydx\frac{dx}{2}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}dx\frac{dx}{2}\frac{dx}{3}+$$
$$+\tau_{xy}dydx+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\frac{dy}{2}dx-\tau_{yx}dxdy-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx\frac{dx}{2}dy=0$$

После сокращения получим

$$\tau_{xy}-\tau_{yx}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dy+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dx-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right). \qquad (4)$$

Из равенства (4) можно заключить, что нарушение закона парности касательных напряжений возможно лишь при устремлении производных от каких либо напряжений по координате к бесконечности в окрестности рассматриваемой точки, при этом, сами напряжения не обязательно должны быть неограниченно велики. Во всех же остальных точках закон парности касательных напряжений соблюдается. В качестве иллюстраций рассмотрим две задачи.

1.Квадрат со сторонами *a* подвержен действию касательных нагрузок на горизонтальных сторонах:

на верхней $\tau_{yx}(x,a)=-\tau_0\left(2x/a-1\right)$, на нижней $\tau_{yx}(x,0)=\tau_0\left(2x/a-1\right)$.

Остальные нормальные и касательные напряжения на краях пластины равны нулю:

$$\sigma_{x,}(0,y)=\tau_{xy}(0,y)=\sigma_{x,}(a,y)=\tau_{xy}(a,y)=0,\ \sigma_y(x,0)=\sigma_y(x,0)=0. \qquad (5)$$

Для функции Эри примем следующее выражение:

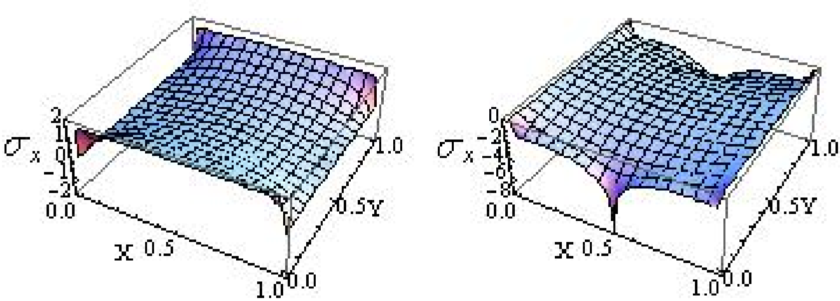
$$\chi(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\Big\{A_n\left[\left(x-a\right)sh\lambda_n x+xsh\left(\lambda_n\left(x-a\right)\right)\right]\sin\lambda_n y+$$
$$B_n\left(\left(y-a\right)sh\lambda_n x+ysh\lambda_n\left(y-a\right)\right)\sin\lambda_n x\Big\} \qquad (6)$$

где $\lambda_n=\pi n/a$.

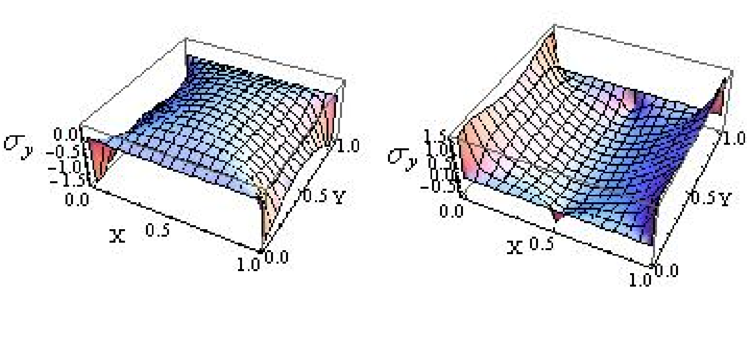
Выражение (6) тривиально удовлетворяет краевым условиям (5) для нормальных напряжений, кроме того, в силу симметрии задачи, достаточно удовлетворить только двум краевым условиям: $\tau_{yx}(x,0)=-\tau_0\left(2x/a-1\right)$ и $\tau_{yx}(0,y)=0$. Подставляя в эти условия выражение (6), разлагая соответствующие члены в тригонометрический ряд и приравнивая суммы коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях нулю, получаем линейную систему из 2N членов для определения A_n и B_n. На фиг. 3, 4 и 5 слева приведены пространственные графики для σ_x/τ_0 , σ_y/τ_0, и τ_{xy}/τ_0. Как можно заключить из их рассмотрения, в угловых точках, где априори нарушается закон парности касательных напряжений, все напряжения имеют неограниченные производные, хотя и ограниченные значения.

2. Квадрат со сторонами *a* подвержен действию касательных нагрузок на горизонтальных сторонах: на верхней $\tau_{yx}(x,a)=-\tau_0$ при 0<x<a/2 и $\tau_{yx}(x,a)=\tau_0$ при a/2<x<a, а на нижней $\tau_{yx}(x,0)=\tau_0$ при 0<x<a/2 и $\tau_{yx}(x,0)=-\tau_0$ при a/2<x<a. Для функции Эри принято то же выражение (6). Осуществляя те же операции, которые описаны выше, определяем A_n и B_n, а затем все напряжения, пространственные графики σ_x/τ_0 , σ_y/τ_0, и τ_{xy}/τ_0 приведены справа на фиг. 3,4 и 5.

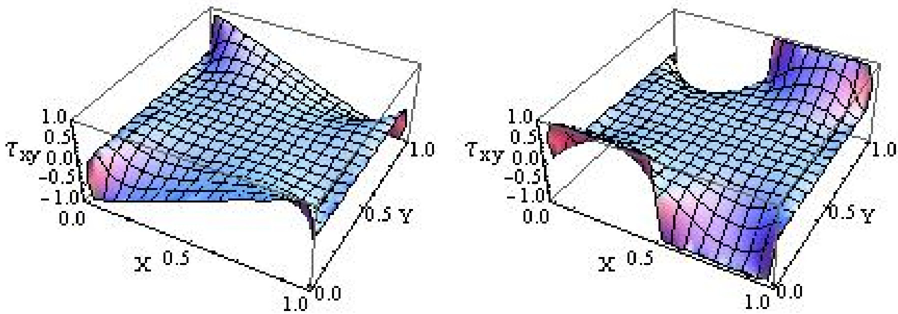
Как можно заключить из рассмотрения графиков, в точках *(0,0), (0,a), (a,0), (a,a),* на графиках слева и в точках *(0,0), (0,a), (a,0), (a,a), (a/2,0), (a/2,a)* на графиках справа, где закон парности не соблюдается, напряжения имеют неограниченные производные, хотя их значения ограничены.



Фиг. 3



Фиг. 4.



Фиг. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М. Наука. 1979. 560 с.

Сведения об авторах:

Симонян Арег Михайлович
Д.т.н., вед.н.с. Институт механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Баграмяна, 24^{б}
Тел.: (+374410)52-48-52
E-mail: simonyanareg@mail.ru

Саноян Юрий Геворкович
К.ф.-м.н.,старший научный сотрудник
Институт механики НАН РА, г. Ереван
Тел. (+374 10) 541319.
E-mail: yusanoyan@mechins.sci.am

Тухова Анна Ивановна
Инженер,
E-mail: ralfdog@bk.ru

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО ТРЕЩИНУ

Симонян А.Р.
Ереван, Армения

Рассмотрим антиплоское напряженное состояние ортотропного пространства, содержащего трещину, на берегах которой заданы условия смешанного типа.

Пусть упругое составное пространство, состоящее из двух разнородных полупространств, изготовленных из ортотропных материалов, по плоскости соединения ослаблено магистральной трещиной L, на участках $L^{(+)}$ и $L^{(-)}$ верхнего и нижнего берегов которой заданы касательные напряжения $\tau_0^{\pm}(x)$, а на остальной части верхнего и нижнего берегов $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ заданы смещения $w^{(\pm)}(r)$ и равнодействующие действующих там напряжений.

Необходимо определить напряженно-деформированное состояние в составном полупространстве вблизи трещины.

Снабдив индексами 1 и 2 характерные величины соответственно верхнего и нижнего полупространства, поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи:

$$W_1(x,0)=W_2(x,0),\ \tau_{yz}^{(1)}(x,0)=\tau_{yz}^{(2)}(x,0) \quad (x\notin L) \tag{1.1a}$$

$$\begin{aligned} &W_1(x,0)=w_0^{(+)}(x) \quad (x\in S^+)\\ &W_2(x,0)=w_0^{(-)}(x) \quad (x\in S^-)\\ &\tau_{yz}^{(1)}(x,0)=\tau_0^{(+)}(x) \quad (x\in L^+)\\ &\tau_{yz}^{(2)}(x,0)=\tau_0^{(-)}(x) \quad (x\in L^-) \end{aligned} \tag{1.1b}$$

Заметим, что функции перемещения $W_j(x,y)$, каждая в области своего определения, удовлетворяют уравнению [1]

$$c_{55}^{(j)}\frac{\partial^2 W_j(x,y)}{\partial x^2}+c_{44}^{(j)}\frac{\partial^2 W_j(x,y)}{\partial y^2}=0$$

и связаны с компонентами напряжений по формулам

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,y) = c_{44}^{(j)} \frac{\partial W_j(x,y)}{\partial y} \quad (j=1,2)$$

Для построения решения граничной задачи (1.1) введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} w(x) &= W_1(x,0) - W_2(x,0) \\ \tau(x) &= \tau_{yz}^{(1)}(x,0) - \tau_{yz}^{(2)}(x,0) \end{aligned} \qquad (x \in L) \qquad (1.2)$$

описывающие раскрытие трещины и скачок напряжений, действующих на берегах трещины. Далее, при помощи обобщеного преобразования Фурье определим компоненты напряжений, действующих в плоскости контакта в обоих полупространствах и смещений точек этих плоскостей через введенные функции скачков. Получим

$$\begin{aligned} W_1'(x,0) &= \frac{\alpha_2 c_{44}^{(2)}}{\Delta} w'(x) - \frac{1}{\pi\Delta} \int_L \frac{\tau(s)ds}{s-x} \\ W_1'(x,0) &= -\frac{\alpha_1 c_{44}^{(1)}}{\Delta} w'(x) - \frac{1}{\pi\Delta} \int_L \frac{\tau(s)ds}{s-x} \\ \tau_{yz}^{(1)}(x,0) &= \frac{\alpha_1 c_{44}^{(1)}}{\Delta} \tau(x) + \frac{\alpha_1\alpha_2 c_{44}^{(1)} c_{44}^{(2)}}{\pi\Delta} \int_L \frac{w'(s)ds}{s-x} \\ \tau_{yz}^{(2)}(x,0) &= -\frac{\alpha_2 c_{44}^{(2)}}{\Delta} \tau(x) + \frac{\alpha_1\alpha_2 c_{44}^{(1)} c_{44}^{(2)}}{\pi\Delta} \int_L \frac{w'(s)ds}{s-x} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

$$\left(\alpha_j = \sqrt{c_{55}^{(j)} / c_{44}^{(j)}}, \quad \Delta = \alpha_1 c_{44}^{(1)} + \alpha_2 c_{44}^{(2)} \right)$$

Используя представление (1.3), удовлетворим условиям (1.1b). В итоге для определения функций $w'(x)$ и $\tau(x)$ получим систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$
\begin{cases}
w'(x)-\dfrac{1}{®ª_2c_{44}^{(2)}}\displaystyle\int_L\frac{²(s)ds}{s-x}=\dfrac{\Delta}{ª_2c_{44}^{(2)}}\left(w_0^+(x)\right)', & \left(x\in S^+\right)\\
w'(x)+\dfrac{1}{®ª_2c_{44}^{(2)}}\displaystyle\int_L\frac{²(s)ds}{s-x}=-\dfrac{\Delta}{ª_1c_{44}^{(1)}}\left(w_0^-(x)\right)', & \left(x\in S^-\right)\\
²(x)+\dfrac{ª_2c_{44}^{(2)}}{®}\displaystyle\int_L\frac{w'(s)ds}{s-x}=\dfrac{\Delta}{ª_1c_{44}^{(1)}}²_0^{(+)}(x), & \left(x\in L^+\right)\\
²(x)-\dfrac{ª_1c_{44}^{(1)}}{®}\displaystyle\int_L\frac{w'(s)ds}{s-x}=-\dfrac{\Delta}{ª_2c_{44}^{(2)}}²_0^{(-)}(x), & \left(x\in L^-\right)
\end{cases}
\qquad (1.4)
$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы (1.4). После нахождения функций $w'(x)$ и $²(x)$, нетрудно определить как раскрытие трещины, так и коэффиценты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. Очевидно, что для однозначного определения искомых функций систему (1.4) нужно рассматривать совместно с соответствующими условиями, которые будут приведены при исследовании конкретных задач.

Рассмотрим два случая поставленной задачи:

а) В первом случае пусть области $L^{(\pm)}$ и $S^{(\pm)}$ таковы, что $L^{(\pm)}=S^{(\mp)}$, т.е. на противоположных участках берегов трещины заданы разные условия.

В этом случае для решения системы сингулярных интегральных уравнений (1.4) умножим третье и четвертое уравнения этой системы на $\pm¬$ и просуммируем соответственно со вторым и первым уравнениями. Получим

$$
¨_\pm(x)\mp\frac{q}{®}\int_L\frac{¨_\pm(s)}{s-x}ds=f_\pm(x) \qquad \left(x\in L^{(-)}\right)
$$

$$
¨_\pm(x)\pm\frac{1}{®q}\int_L\frac{¨_\pm(s)}{s-x}ds=g_\pm(x) \qquad \left(x\in L^{(+)}\right)
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\text{¨}_{\pm}(x) = w'(x) \pm \text{¬²}(x),\ f_{\pm}(x) = \frac{\Delta}{\text{a}_2 c_{44}^{(2)}}\left[\left(w_0^{+}(x)\right)' \mp \text{¬²}_0^{-}(x)\right]$$

$$g_{\pm}(x) = -\frac{\Delta}{\text{a}_1 c_{44}^{(1)}}\left[\left(w_0^{-}(x)\right)' \pm \text{¬²}_0^{+}(x)\right]$$

$$\text{¬} = \frac{1}{\sqrt[4]{c_{44}^{(1)} c_{44}^{(2)} c_{55}^{(1)} c_{55}^{(2)}}}, \qquad q = \sqrt[4]{\frac{c_{44}^{(1)} c_{55}^{(1)}}{c_{44}^{(2)} c_{55}^{(2)}}}$$

Используя соотношения $L^{(+)} \cup L^{(-)} = L^{(+)} \cup S^{(+)} = L$, систему (1.4) можно переписать в виде отдельных уравнений :

$$\text{¨}_{\pm}(x) \pm \frac{\text{«}(x)}{\text{®}} \int_L \frac{\text{¨}_{\mp}(s)}{s - x} ds = F_{\pm}(x) \qquad (x \in L) \qquad (1.5)$$

$$F_{\pm}(x) = \begin{cases} f_{\pm}(x) & x \in L^{(-)} \\ g_{\pm}(x) & x \in L^{(+)} \end{cases}, \quad \text{«}(x) = \begin{cases} q & x \in L^{(-)} \\ -\dfrac{1}{q} & x \in L^{(+)} \end{cases}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае решение поставленной задачи свелось к решению двух отдельных сингулярных интегральных уравнений с коэффициентом, имеющим скачок в точках перемены типа граничных условий на трещине. Решения же этих уравнений общеизвестны и приведены в монографии [2]. Это означает, что при таких условиях можно построить замкнутое решение поставленной задачи. Заметим, что после определения функций $\text{¨}_{\pm}(x)$ легко можно найти функции $w'(x)$ и $\text{²}(x)$ по формулам

$$w'(x) = \frac{1}{2}\left[\text{¨}_{+}(x) + \text{¨}_{-}(x)\right],\ \text{²}(x) = \frac{1}{2\text{¬}}\left[\text{¨}_{+}(x) - \text{¨}_{-}(x)\right] \qquad (1.6)$$

б) Во втором случае учитывается, что на противоположно расположенных друг к другу участках берегов трещины заданы условия одинакового типа, т.е $L^{(+)} = L^{(-)}$ и $S^{(+)} = S^{(-)}$. Заметим, что в этом случае на участках $L^{(\pm)}$ заданы напряжения и, следовательно, задан скачок напряжений $\text{²}(x)$, а на участках $S^{(\pm)}$ заданы смещения и, следовательно, задана функция $w'(x)$. Кроме того, легко проверить, что уравнения (1.4) линейно зависимы и определяющее уравнение поставленной задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{S^+} \dfrac{\tau(s)\,ds}{s-x} = Q_1(x) \qquad (x \in S^+) \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{L^+} \dfrac{w'(s)\,ds}{s-x} = Q_2(x) \quad (x \in L^+) \end{cases} \tag{1.7}$$

где

$$Q_1(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{L^+} \frac{\tau(s)\,ds}{s-x} + \mu_2 c_{44}^{(2)} w'(x) - \Delta\left(w_0^+(x)\right)'$$

$$Q_2(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{S^+} \frac{w'(s)\,ds}{s-x} - \frac{1}{\mu_2 c_{44}^{(2)}}\tau(x) + \Delta\neg\,{}^2\tau_0^{(+)}(x)$$

Следовательно, в этом случае система определяющих интегральных уравнений (1.4) распадается на два отдельных интегральных уравнения первого рода, допускающих замкнутые решения.

В качестве иллюстрации приведем решение задачи в случае, когда на плоскости стыка имеются тонкое жесткое включение и трещина, заполняющие соответственно интервалы $(-a,0)$ и $(0,a)$. При этом предполагается, что на берега трещины действуют равномерно распределенные нагрузки интенсивности τ_0. В этом случае система (1.7) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-a}^{0} \dfrac{\tau(s)\,ds}{s-x} = 0 \qquad\qquad (-a < x < 0) \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{0}^{a} \dfrac{w'(s)\,ds}{s-x} = \Delta\neg\,{}^2\tau_0(x) \quad (0 < x < a) \end{cases} \tag{1.8}$$

При этом, имеют место также условия равновесия включения и непрерывность смещений в концевых точках трещины:

$$\int\limits_{-a}^{0} \tau(s)\,ds = 0, \qquad \int\limits_{0}^{a} w'(s)\,ds = 0 \tag{1.9}$$

Решения (1.8), удовлетворяющее условиям (1.9), даются формулами:

$$² \left(x\right) = 0, \quad w'\left(x\right) = -\frac{\Delta¬^{2}\left(2x-a\right)}{2\sqrt{x\left(a-x\right)}} \quad \left(0 < x < a\right) \tag{1.10}$$

откуда

$$w\left(x\right) = \Delta¬^{2}\sqrt{x\left(a-x\right)} \quad \left(0 < x < a\right) \tag{1.11}$$

В заключении покажем, что в частном случае, когда пространство однородное, т.е $ª_1 c_{44}^{(1)} = ª_2 c_{44}^{(2)} = ª c_{44} = \sqrt{c_{44}c_{55}}$, решение поставленной задачи можно построить в замкнутом виде при любых условиях на берегах трещины. Действительно, если ввести в рассмотрение кусочно-аналитические функции $\Omega_j\left(z\right) \quad \left(j = 1,2\right)$ по формулам

$$\Omega_j\left(z\right) = \frac{1}{2®i}\int_L \frac{²\left(s\right) + k_j w'\left(s\right)}{s-z}ds \tag{1.12}$$

$$\left(k_j = \left(-1\right)^j k, \;\; k = iª c_{44}, \;\; j = 1,2\right)$$

то, используя известные формулы Племеля-Сохоцкого [2], систему определяющих интегральных уравнений (1.4) можно записать в виде задачи Римана для двух функций

$$\begin{cases} \Omega_1^{+} = ¬_1\left(x\right)\Omega_2^{-}\left(x\right) + F_{+}\left(x\right) \\ \Omega_2^{+} = ¬_2\left(x\right)\Omega_1^{-}\left(x\right) + F_{-}\left(x\right) \end{cases} \quad \left(x \in L\right) \tag{1.13}$$

которая допускает замкнутое решение [3].

Здесь $\Omega_j^{\pm}\left(x\right)$–значения функций $\Omega_j^{\pm}\left(z\right)\left(j = 1,2\right)$ на верхнем и нижнем берегах разреза L, а функции $¬_j\left(x\right)$ и $F_{\pm}\left(x\right)$ даются формулами

$$¬_1\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \in L^{(+)} \\ -1 & x \in S^{(+)} \end{cases} \qquad ¬_2\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \in L^{(-)} \\ -1 & x \in S^{(-)} \end{cases}$$

$$F_{\pm}(x)=\begin{cases} 2i\text{ª}c_{44}\left(w_0^{\pm}(x)\right)' & x\in S^{(\pm)} \\ 2\text{²}_0^{\pm}(x) & x\in L^{(\pm)} \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи об антиплоском напряженном состоянии однородного ортотропного пространства, содержащего на одном из главных направлении ортотропии трещину, на берегах которой заданы условия любого типа, сводится к решению задачи Римана для двух функций (1.9) с кусочно-постоянными коэффициентами, допускающими замкнутое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640с.
3. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. // ПММ.1962.Т.26,Вып.5,С.907-912.

Сведения об авторе:

Симонян Артур Рафикович – соискатель Института механики НАН РА

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ В ТРЕХМЕРНОЙ ДИФРАКЦИИ ВОЛН ПРИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ КОЛЕБАНИЯ

Сумбатян М.А

Ростов-на-Дону,Россия

Для исследования высокочастотных процессов в сплошных средах применяются асимптотические методы типа лучевого метода, метода виртуальных источников и другие [1,2]. Для отражения от произвольной гладкой поверхности известна формула для амплитуды волны, выпущенной из источника x_0, пришедшей в приемник x, и отразившейся один раз от такого препятствия. Для краткости приведем эту формулу лишь в скалярном случае и лишь для абсолютно твердой поверхности [3]:

$$p_{ray} \sim \frac{\exp\left[ik\left(L+L_0\right)\right]}{\sqrt{\left(L+L_0\right)^2 + 2LL_0\left(L+L_0\right)\left(k_1 \sin^2 \quad + k_2 \sin^2 \sim\right)\big/\cos¥ + 4L^2L_0^2K^2}}$$

где $k-$ волновое число. В эту формулу входят главные кривизны поверхности в точке отражения, направляющие косинусы вектора распространения фронта волны в декартовой системе, образованной двумя главными направлениями кривизны и нормалью, а также расстояния до точки отражения от источника и от приемника.

Оценим точность этого выражения. С этой целью выпишем амплитуду давления в рассеянном поле в точке приема $x=(x_1,x_2,x_3)$ в виде дифракционного интеграла Кирхгофа–Гюйгенса [4], взятого по «освещенной» части поверхности S^+:

$$p^{sc}(x) = \int_{S^+} p(y)\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial n_y}dS = \int_{S^+} 2p^{inc}(y)\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial n_y}dS, \qquad (1)$$

где функция Грина $\Phi(y,x) = e^{ik|y-x|}/4® \,|\, y-x \,|$. Здесь также учтено, что в зоне «света» $p(y) = 2p^{inc}(y)$, $y=(y_1,y_1,y_1)\in S^+$. Оценка интеграла (1) производится методом стационарной фазы [5]. Оказывается, что для N–мерного интеграла, взятого по некоторой области $\Omega \in R^N$, при k → ∞, главный член асимптотики определяется вкладом от стационарной точки, которая совпадает с точкой «зеркального» отражения и дает основной вклад, предсказываемый лучевым методом. Однако существует еще и вклад от границы $\partial\Omega$ области Ω [5]:

$$\int\limits_{\Omega} f(y)e^{ikg(y)}dy \sim \left(\frac{2®}{k}\right)^{N/2} \exp\left[ikg(y^*) + \frac{®i}{4}\operatorname{sgn} g''_{yy}(y^*)\right]\frac{f(y^*)}{\left|\det g''_{yy}(y^*)\right|^{1/2}} +$$

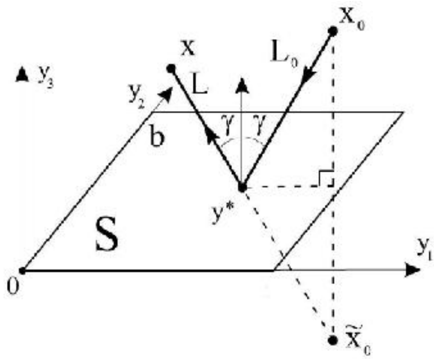
$$+ F_{\partial\Omega}(k), \quad k \to \infty; \quad y = (y_1,...,y_N), \qquad dy = dy_1,...,dy_N, \tag{2}$$

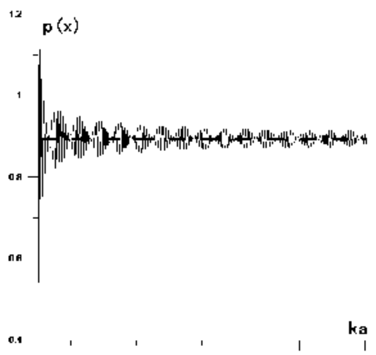
где y^* обозначает стационарную точку, в которой

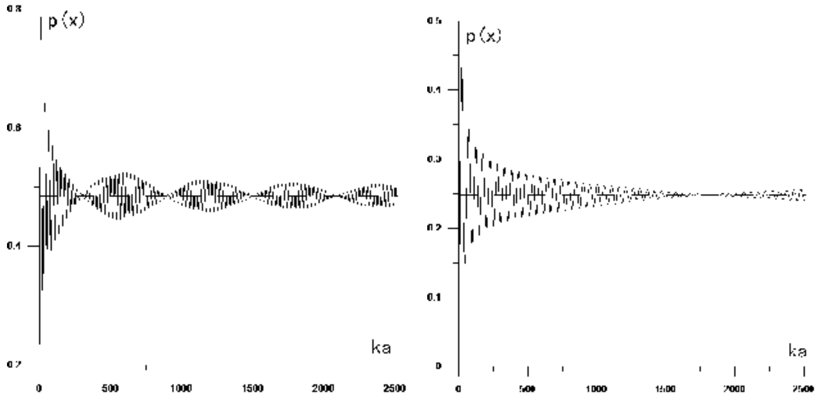
$$\frac{\partial g(y^*)}{\partial y_1} = \cdots = \frac{\partial g(y^*)}{\partial y_M} = 0, \tag{3}$$

а g''_{yy} – Гессиан функции g: $\quad g''_{yy} = \left\{\frac{\partial^2 g}{\partial y_m \partial y_«}\right\}, \qquad m, « = 1,...,M$.

Пример 1. Отражение от прямоугольной пластинки

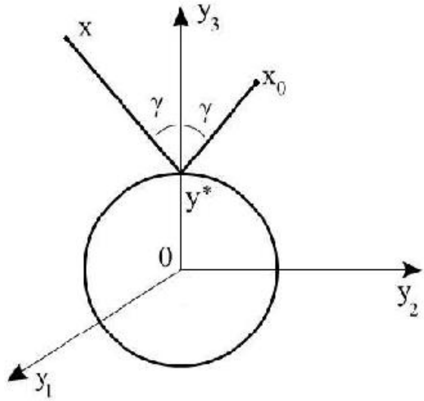


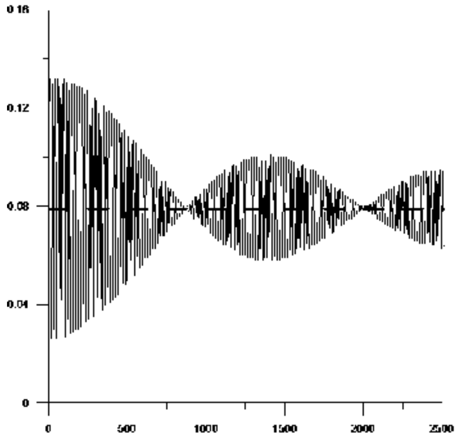




Главный член асимптотики при k → ∞ дается первым членом в правой части формулы (2), если в нем вычислить все входящие туда величины. Он соответствует простому зеркальному отражению $p^{sc}(x) \sim \exp[ik(L_0 + L)]/(L_0 + L)$ и может быть также получен простым методом мнимого источника. В данном случае мнимый источник $\tilde{x}_0$ является образом реального источника x_0 и расположен симметрично относительно отражающей плоскости. Выше представлены графики зависимости модуля отраженного давления $p^{sc}(x)$ от безразмерной частоты для квадратной пластинки размером $a \times a$ и различных углов падения. Пунктирная линия соответствует лучевому решению $|\, p^{sc}(x)| = 1/(L_0 + L)$ и, очевидно, не зависит от частоты. Сплошная линия соответствует прямому численному расчету дифракционного интеграла (1). Из графиков видно, что отклонение точного значения дифракционного интеграла от значения, предсказанного главным членом асимптотики, действительно уменьшается, однако очень медленно. Т.е. при практических расчетах даже для значений порядка $ka \sim 2500$ относительная величина погрешности может достигать 10%.

Пример 2. Отражение от сферы радиуса a





Здесь главный член, соответствующий первому слагаемому правой части (1):

$$p^{sc}(x) \sim \frac{\cos\text{¥}\; e^{ik\left(L+L_0\right)}}{LL_0\sqrt{\left(2\frac{\cos\text{¥}}{a}+\frac{1}{L}+\frac{1}{L_0}\right)\left[2\frac{\cos\text{¥}}{a}+\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{L_0}\right)\cos^2\text{¥}\right]}} \quad (4)$$

также совпадает с классическим лучевым приближением, приведенным в самом начале работы. Пример прямого расчета дифракционного интеграла, приведенный выше, также показывает, что погрешность главного члена асиптотики, который и в этом примере изображен пунктирной линией, остается очень высокой даже для очень больших значений частоты. Для сферического отражателя погрешность заметно выше, чем для плоского, достигая значений порядка 15% для $ka \sim 2500$.

Усиление результатов: 2-й член асимптотики

Для повышения точности асимптотического представления следует взять следующий после главного член асимптотики при k → ∞. В большинстве случаев он определяется вкладом граничной кривой в (2):

$$F_{\partial\Omega}(k) = \frac{1}{ik}\int_{\partial\Omega}\frac{f(y)}{\left|\nabla g(y)\right|^2}\frac{\partial g}{\partial n_y}e^{ikg(y)}d\text{±} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k\to\infty \qquad (5)$$

Применительно к задаче дифракции для плоской отражающей поверхности оценка (2) приобретает вид:

$$p^{sc}(x) \sim \frac{e^{ik\left(L+L_0\right)}}{L+L_0} - \frac{\text{¸}}{2\text{®}}\int_{l}\frac{\partial g/\partial n_y}{\left|\nabla g(y)\right|^2}\frac{e^{ikg(y)}}{\text{·}^2(y)\text{¨}(y)}dl + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k}\right), \quad k\to\infty \qquad (6)$$

где

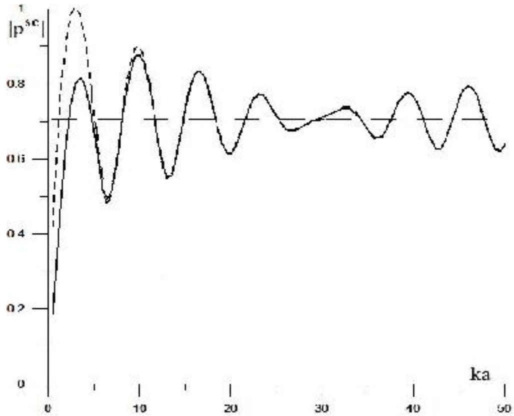
$$x_0 = (\text{¶}_0, \text{¦}_0, \text{¸}_0), \quad x = (\text{¶}, \text{¦}, \text{¸}), \quad \text{·}(y) = [(y_1 - \text{¶})^2 + (y_2 - \text{¦})^2 + \text{¸}]^{1/2},$$

$$\text{¨}(y) = [(y_1 - \text{¶}_0)^2 + (y_2 - \text{¦}_0)^2 + \text{¸}_0]^{1/2}, \quad g = \text{¨} + \text{·}$$

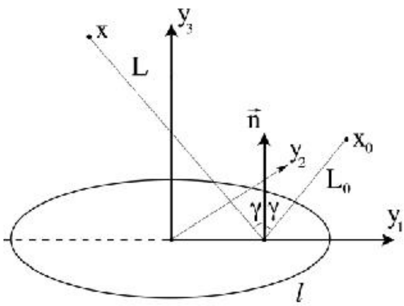
Теперь оценка криволинейного интеграла в (6) зависит от наличия стационарных точек фазовой функции $g(y)$ на граничной кривой l. Так, для прямоугольной пластинки таких точек 4, по одной на каждой стороне прямоугольника. Тогда вклад от граничного контура представляется суммой четырех интегралов вида $I_h, h=1,...,4$, причем каждый из них имеет порядок $O(1/\sqrt{k})$ при k → ∞. В итоге получаем:

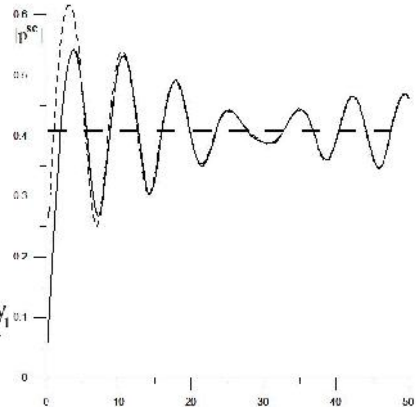
$$p^{sc} \sim \frac{e^{ik\left(L+L_0\right)}}{L+L_0} - \frac{\text{¸}}{2\text{®}}\sum_{h=1}^{4} I_h(k) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k}\right), \quad k\to\infty \qquad (7)$$

Аналогичная ситуация имеет место и для отражателя в виде плоской круговой области. Следующий график показывает типичный случай расчета для квадрата, в котором учет 2-го члена в виде вклада от границ существенно



улучшает точность асимптотического представления – погрешность менее 1% имеет место уже при ka >10. Наконец, приведем еще типичный график в случае кругового отражателя. В обоих случаях сплошная кривая –точный расчет, а штриховая – по формуле (7).





ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
2. Cremer L., Muller H.A. Principles and Applications of Room Acoustics, Vol. 1,2. — Applied Science: London, 1982.

3. McNamara D.A.M., Pistorius C.W.I., Malherbe J.A.G., Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction. — Artech House: Norwood, 1990.
4. Sumbatyan M.A., Scalia A. Equations of Mathematical Diffraction Theory. — CRC Press: Boca Raton, Florida, 2005.
5. Федорюк М.В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

Сведения об авторе:

Сумбатян Межлум Альбертович
Южный федеральный университет,
Факультет математики, механики и компьютерных наук
Заведующий кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики
Доктор физ.-мат. наук, профессор
Дом. тел.: +7(863)2476756, сот. тел.: +7-928-1397067
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а, мехмат ЮФУ.
sumbat@math.rsu.ru

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ СОПРЯЖЕННЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ЦИЛИДРИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

Терзян С.А., Минасян М.А.
Ереван, Армения

Рассматривается осесимметричная контактная задача для двух сопряженных друг с другом по цилиндрической поверхности полых цилиндров конечной длины. Цилиндры находятся в полном контакте друг с другом по всей боковой поверхности за исключением участков торцевых зон, в которых напряжения равны нулю. Предполагается, что задача симметрична относительно плоскости, перпендикулярной к оси цилиндров и проходящей через середину их высоты (рис.1).

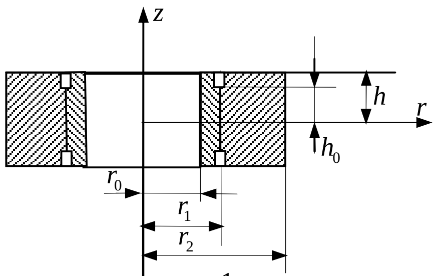


рис.1

Задача решается для каждого полого цилиндра в отдельности, а затем удовлетворяются условия контакта [1,2].

При решении задачи должны быть удовлетворены следующие граничные условия:

$$\tau_{rz}^{(j)}(r,0)=0, \quad u_z^{(j)}(r,0)=0, \quad (r_{j-1}<r<r_j), \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(j)}\left(r_{2(j-1)},z\right)=0, \quad \sigma_r^{(j)}\left(r_{2(j-1)},z\right)=f_{2(j-1)}(z), \quad (0<z<h), \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz}^{(j)}(r,h)=\psi_j(r), \quad \sigma_z^{(j)}(r,h)=t_j(r), \quad (r_{j-1}<r<r_j), \tag{1.3}$$

и условия контакта:

$$\tau_{rz}^{(1)}(r_1,z)=\tau_{rz}^{(2)}(r_1,z), \qquad (0<z<h) \tag{1.4}$$

$$\sigma_r^{(1)}(r_1,z)=\sigma_r^{(2)}(r_1,z), \qquad (0<z<h) \tag{1.5}$$

$$u_r^{(1)}(r_1,z)=u_r^{(2)}(r_1,z), \; u_z^{(1)}(r_1,z)=u_z^{(2)}(r_1,z), \; (0\le z\le h_0), \tag{1.6}$$

Бигармонические функции для каждого из двух цилидров ищем в виде [3]:

$$\Phi^{(j)}(r,z)=z\left(D_j\ln r+A_jr^2+B_jz^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{E_k^{(j)}I_0(\lambda_kr)+F_k^{(j)}K_0(\lambda_kr)+\right.$$
$$\left.+\lambda_kr\left[G_k^{(j)}I_1(\lambda_kr)+H_k^{(j)}K_1(\lambda_kr)\right]\right\}\sin\lambda_kz+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k^{(j)}\operatorname{sh}\mu_k^{(j)}z+\mu_k^{(j)}zD_k^{(j)}\operatorname{ch}\mu_k^{(j)}z\right]W_0^{(j)}\left(\mu_k^{(j)}r\right) \tag{1.7}$$
$$(j=1,2);\quad (0<z<h);\quad \left(r_{j-1}\le r\le r_j\right)$$

Здесь $I_n(\lambda_kr), K_n(\lambda_kr),\ (n=0,1)$ – функции Бесселя n-ого порядка от мнимого аргумента, $\lambda_k=k\pi/h$, $W_n^{(j)}\left(\mu_k^{(j)}r\right)$ функции Вебера, где $\mu_k^{(j)}$ – положительные корни уравнения $W_1^{(j)}\left(\mu_k^{(j)}r_{j-1}\right)=0$.

2. При выборе функций напряжений в виде (1.7) граничные условия (1.1) удовлетворяются автоматически. Для определения коэффициентов разложений (1.7) предположим, что контактные напряжения известны:

$$\tau_{rz}^{(1)}(r_1,z)=\tau_{rz}^{(2)}(r_1,z)=\begin{cases}\tau(z), & (0<z<h_0)\\ 0, & (h_0<z<h)\end{cases}$$
$$\sigma_r^{(1)}(r_1,z)=\sigma_r^{(2)}(r_1,z)=\begin{cases}\sigma(z), & (0<z<h_0)\\ 0, & (h_0<z<h)\end{cases} \tag{2.1}$$

тогда решение этой задачи при помощи функций напряжений, с использованием известных соотношений между напряжениями и функцией напряжений и соответствующих формул обращения, сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

$$-\frac{\delta_{01}^{00}}{\Delta_p^{(1)}}\tau_p+\frac{Z_p^{(0)}}{\Delta_p^{(1)}}\left\{-\delta_{01}^{01}-\frac{1}{\Delta_p^{(1)}}\left[\lambda_pr_1\delta_{01}^{11}\delta_{01}^{00}-\lambda_pr_0\delta_{01}^{01}\delta_{01}^{01}\right]-\right.$$
$$\left.-\lambda_pr_0\Delta_p^{(1)}-\frac{2(1-\nu_1)}{\lambda_pr_0}\Delta_p^{(1)}\right\}-\frac{Z_p^{(1)}}{\Delta_p^{(1)^2}}\left[\lambda_pr_0\delta_{01}^{00}\delta_{01}^{01}-\lambda_pr_1\delta_{01}^{10}\delta_{01}^{00}\right]=f_p^{(0)}-$$
$$-\frac{2(-1)^p}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^{(1)}W_0^{(1)}\left(\mu_k^{(1)}r_0\right)}{\mu_k^{(1)^2}+\lambda_p^2}\psi_k^{(1)}-\frac{4\lambda_p^2(-1)^p}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^{(1)}W_0^{(1)}\left(\mu_k^{(1)}r_0\right)}{\left(\mu_k^{(1)^2}+\lambda_p^2\right)^2}X_k^{(1)}$$

$$\mathrm{X}_p^{(1)}\operatorname{cth}\mu_p^{(1)}h-\psi_p^{(1)}\operatorname{cth}\mu_p^{(1)}h+\frac{\mu_p^{(1)}h}{\operatorname{sh}^2\mu_p^{(1)}h}\mathrm{X}_p^{(1)}=t_p^{(1)}-\frac{1}{\Delta_p\left(\mu_p^{(1)}\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda_k}{\lambda_k^2+\mu_p^{(1)^2}}\times$$

$$\times\left\{r_1W_0^{(1)}\left(\mu_p^{(1)}r_1\right)\left[\tau_k+\frac{2\mu_p^{(1)}Z_k^{(1)}}{\lambda_k^2+\mu_p^{(1)^2}}\right]-r_0W_0^{(1)}\left(\mu_p^{(1)}r_0\right)\frac{2\mu_p^{(1)^2}Z_k^{(0)}}{\lambda_k^2+\mu_p^{(1)^2}}\right\}\tag{2.2}$$

В (2.2) введены неизвестные, связанные с постоянными разложений (1.7)

$$\left(\mu_p^{(i)}\right)^3D_p^{(i)}\operatorname{sh}\mu_p^{(i)}h=\mathrm{X}_p^{(i)},\quad \lambda_p^3\left[G_p^{(1)}I_1^{(0)}+H_p^{(1)}K_1^{(0)}\right]=Z_p^{(0)},$$
$$\lambda_p^3\left[G_p^{(1)}I_1^{(1)}+H_p^{(1)}K_1^{(1)}\right]=Z_p^{(1)},\qquad (i=1,2)\tag{2.3}$$

и введены обозначения:

$$\tau_p=\frac{2}{h}\int_0^h\tau(z)\sin\lambda_pzdz,\qquad \sigma_p=\frac{2}{h}\int_0^h\sigma(z)\cos\lambda_pzdz,$$

$$\psi_p^{(j)}=\frac{1}{\Delta_p\left(\mu_p^{(j)}\right)}\int_{r_{j-1}}^{r_j}r\psi_j(r)W_1^{(j)}\left(\mu_p^{(j)}r\right)dr,$$
$$f_p^{(2(j-1))}=\frac{2}{h}\int_0^h f_{2(j-1)}(z)\cos\lambda_pzdz,\tag{2.4}$$

$$t_p^{(j)}=\frac{1}{\Delta_p\left(\mu_p^{(j)}\right)}\int_{r_{j-1}}^{r_j}rt_j(r)W_0^{(j)}\left(\mu_p^{(j)}r\right)dr$$

$$\Delta_p\left(\mu_p^{(j)}\right)=\left[r_1^2W_0^{(j)^2}\left(\mu_p^{(j)}r_1\right)-r_{2(j-1)}^2W_0^{(j)^2}\left(\mu_p^{(j)}r_{2(j-1)}\right)\right]\frac{(-1)^{i-1}}{2}$$

$\tau_p,\sigma_p,\psi_p^{(i)},t_p^{(1)},f_p^{2(j-1)}$ – коэффициенты соответствующих разложений граничных функций, где

$$I_n^{(i)}=I_n\left(\lambda_kr_i\right);\quad K_n^{(i)}=K_n\left(\lambda_kr_i\right);\quad \delta_{ij}^{lm}=I_i^{(l)}K_j^{(m)}+K_i^{(l)}I_j^{(m)},$$
$$\Delta_p^{(1)}=I_1^{(1)}K_1^{(0)}-I_1^{(0)}K_1^{(1)};\quad \Delta_p^{(2)}=I_1^{(2)}K_1^{(1)}-I_1^{(1)}K_1^{(2)}$$

3. Для определения неизвестных контактных напряжений $\tau(z),\sigma(z)$ $(0<z<h_0)$, удовлетворяем условиям равенства перемещений (1.6) на поверхности контакта, которые в итоге приводят к сингулярному

интегральному уравнению с ядром Гильберта второго рода относительно комплексной комбинации неизвестных напряжений [4]

$$p(\mathrm{v})-\frac{\nu'' i}{2\pi\nu'}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(u)\operatorname{ctg}\frac{u-\mathrm{v}}{2}du=c(\mathrm{v}),\ (-\alpha_0<\mathrm{v}<\alpha_0) \qquad (3.1)$$

где

$$p(\mathrm{v})=\sigma\left(\frac{h}{\pi}\mathrm{v}\right)+i\tau\left(\frac{h}{\pi}\mathrm{v}\right);\quad \alpha_0=\frac{\pi}{h}h_0$$

$$c(\mathrm{v})=\frac{1}{\nu'}\left[R_0^{(2)}+R^{(2)}\left(\frac{h}{\pi}\mathrm{v}\right)+iR_0^{(1)}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(2)}\cos k\mathrm{v}+i\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}\sin k\mathrm{v}$$

$$\nu'=(1-2\nu_1)-(1-2\nu_2)G;\ \ \nu''=2(1-\nu_1)+2(1-\nu_2)G;\ \ G=\frac{G_1}{G_2} \qquad (3.2)$$

Правая часть (3.1) есть регулярная функция, в которое помимо неизвестных основных бесконечных систем входит и неизвестное интегрального уравнения. Обращением главной части, сингулярное уравнение (3.1) приводится к виду [2,5]

$$p(\mathrm{v})=Mc(\mathrm{v})+\frac{Nz(\mathrm{v})}{2\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\frac{c(\tau)d\tau}{z(\tau)\sin\frac{\tau-\mathrm{v}}{2}}-\gamma(\mathrm{v}) \qquad (3.3)$$

Здесь

$$\gamma(\mathrm{v})=2Nz(\mathrm{v})\left(\frac{iP_0\operatorname{ch}\pi\gamma\operatorname{sh}\alpha_0\gamma}{4\pi N}\sin\frac{\mathrm{v}}{2}-\frac{P_0\operatorname{ch}\pi\gamma\operatorname{sh}\alpha_0\gamma}{4\pi N}\cos\frac{\mathrm{v}}{2}\right)$$

$$M=\frac{\nu'^2}{\nu'^2-\nu''^2},\quad N=\frac{i\nu'\nu''}{\nu'^2-\nu''^2}, \qquad (3.4)$$

$$z(\mathrm{v})=\left(\sin\frac{\alpha_0-\mathrm{v}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\gamma}\left(\sin\frac{\mathrm{v}+\alpha_0}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\gamma};\gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{(3-4\nu_2)G+1}{3-4\nu_1+G}$$

где P_0 – интеграл контактного нормального давления.

Для замыкания системы осталось определить коэффициенты Фурье неизвестных напряжений τ_p,σ_p, для определения которых из (3.3), после некоторых преобразований получим следующие бесконечные системы:

$$\pi\sigma_p=R_0C_{0p}^{(2)}+\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(2)}C_{kp}^{(2)}+i\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}S_{kp}^{(2)}+L_p^{(2)}\left[R(\mathrm{v})\right]-\gamma_p^{(2)} \qquad (3.5)$$

$$\pi\tau_p = R_0 C_{0p}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} C_{kp}^{(1)} + i \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} S_{kp}^{(1)} + L_p^{(1)}\left[R(\mathrm{v})\right] - \gamma_p^{(1)}$$
$$(p = 1, 2, \ldots)$$

где

$$C_{kp}^{(2)} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} L\left[\cos k\mathrm{v}\right] \cos p\mathrm{v} d\mathrm{v}, \quad S_{kp}^{(2)} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} L\left[\sin k\mathrm{v}\right] \cos p\mathrm{v} d\mathrm{v} \tag{3.6}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$L_p^{(2)}\left[R(\mathrm{v})\right] = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} L\left[R(\mathrm{v})\right] \cos p\mathrm{v} d\mathrm{v}, \quad \gamma_p^{(2)} = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \gamma(\mathrm{v}) \cos p\mathrm{v} d\mathrm{v}$$
$$(p = 1, 2, \ldots)$$

$$L\left[F(\mathrm{v})\right] = \frac{iNz(\mathrm{v}) \operatorname{sh}\left(\alpha_0 \gamma + i\frac{\mathrm{v}}{2}\right)}{\operatorname{ch} \pi\gamma} F(\mathrm{v}) + \frac{Nz(\mathrm{v})}{2\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{F(\tau) - F(\mathrm{v})}{z(\tau) \sin \frac{\tau - \mathrm{v}}{2}} d\tau$$

Коэффициенты с верхним индексом (1) получаются из (3.6) умножая коэффициенты из (3.6) на $-i$, и заменяя в интегралах $\cos p\mathrm{v}$ на $\sin p\mathrm{v}$.

Доказана, что совокупность полученных бесконечных систем (2.2) и (3.5) квазвполне регулярна.

Из полученных формул видно, что напряжения у начала трещины имеют особенность корневого порядка с осциллирующим множителем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баблоян А.А., Тоноян В.С. Об одной задаче для полого конечного цилидра.// Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1970. Т.25. №2.
2. Мкртчян А.М., Терзян С.А. Контактная задача для частично заделанного прямоугольника с учетом сцепления. // Изв. АН Арм.ССР, Механика.1988. Т.XLI. №2.
3. Абрамян Б.Л. Некотрые задачи равновесия круглого цилидра.// Докл. Арм.ССР, Т.26. №2. 1958.
4. Чибрикова А.И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. /Уч. записки Казанского ун-та, т.122, кн.3, 1962.
5. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев:.Наукова Думка, 1978.

Сведения об авторах:

Терзян Саркис Арутюнович – к.ф. м.н., тел. 077 340432,
E-mail: sat_and_21@yahoo.com, **Минасян М.А.** – Инст. механики НАН РА

ПЕРСПЕКТИВЫ СОЗДАНИЯ ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ

Хачикян А.С.
Ереван, Армения

Происходящие в мире изменения возможно приведут к тому, что геотермальная энергия наряду с солнечной энергией станет одним из главных альтернативных источников обеспечения электричеством в мире, особенно для таких стран, как Армения. Здесь обсуждаются возможные перспективы создания геотермальных электростанций (ГТЭС) и проблемы механики в этом направлении.

<u>Геотермальная энергия</u>. Эксплуатация геотермальных источников воды имеет давние традиции. Энергия горячих источников используется для горячего водоснабжения, а также для создания ГТЭС [1]. При температуре воды в источнике до $100^0 C$ ее применяют для горячего водоснабжения, а при температуре около $200^0 C$ выгодно создание электростанции. Первая в мире ГТЭС была создана в Лордерелло в 1904г. Установленные в мире мощности на 2009г. составили 10,5 тыс. МВт. Половина из этого количества в США и на Филиппинах, в России 82 МВт. В Исландии 25% потребностей страны покрывается за счет геоэлектричества. Однако ресурсы выходящей на поверхность Земли горячей воды ограничены, ее параметры низкие и распространены они весьма неравномерно по поверхности Земли. Интерес представляют также большие запасы энергии горячих сухих пород на относительно небольшой глубине в районах с действующим вулканизмом. Однако технологии их эксплуатации пока не разработаны. Между тем температурный градиент с глубиной Земли оценивается как $0.03^0 C$/м в среднем. На глубине 7-20 км ожидаются температуры в $200-600^0 C$, а в районах с положительным отклонением градиента температуры еще больше.

На Кольской сверхглубокой скважине отмечалось $230^0 C$ на глубине 11 км, но это относительно холодная плита и ожидались там более низкие температуры. На современных теплоэлектростанциях применяется пар с температурой более $500^0 C$ при давлении 23 МПа. Удобные для использования в ГТЭС энергия находится на глубинах 7-20 км, которые и перспективны для их постройки.

В принципе, имеются другие возможности превращения разности температур в электричество, например термопара. Но сейчас этот процесс имеет низкий коэффициент превращения.

<u>Принципиальная схема ГТЭС</u>. Отличительной особенностью глубинных флюидов, состоящих, в основном, из воды, является их засоренность

механическими примесями и растворенными веществами, газами. Некоторые из этих веществ и газов вредные и нежелательно их оставлять на поверхности земли. Могут быть среди них и полезные вещества. Поэтому предполагается в основном двухконтурная схема ГТЭС. Первый контур включает нижний (глубокий) теплообменник, трубопроводы, верхний теплообменник, фильтры-сепараторы, нагнетательные насосы. Второй контур включает верхний теплообменник, турбину и генератор электрического тока. Флюид, разогретый в нижнем теплообменнике, подается в верхний теплообменник, где разогревает воду во втором контуре, проходит по необходимости через фильтры-сепараторы и насосами качается обратно в нижний теплообменник. Вода, разогретая во втором теплообменнике, подается на турбину и охлаждаясь, возвращается во второй теплообменник. Второй контур традиционен для всех теплоэлектростанций и его разработка также традиционна. Все составные части первого контура – нижний теплообменник, верхний теплообменник, трубопроводы, фильтры-сепараторы, насосы подлежат принципиально новой разработке. Эти разработки содержат много инженерных и научных проблем. Важнейшей из них является разработка нижнего теплообменника.

Исскуственный нижний теплообменник. Для построения исскуственного нижнего теплообменника допустим на глубине 10 км пробурена горизонтальная скважина длиной 10 км и диаметром 0.5-1.0 м. Оценим количество тепловой энергии, которую можно извлечь посредством теплообмена из скалистых пород этой скважины.Теплопроводность пород известна по образцам, извлеченным на Кольской сверхглубокой скважине. Самая оптимистическая оценка дает не более нескольких сотен киловатт мощности. Чтобы набрать мощность одного блока Армянской атомной электростанции (400 МВт), нужно пробурить несколько тысяч таких скважин, что не выглядит реалистичным.

Другим способом создания исскуственного нижнего теплообменника может быть образование взрывом (например атомным) большой полости разрыхленных трещиноватых пород, проницаемых для флюидов, что аналогично нахождению таких естественных полостей.

Естественный нижний теплообменник. Для построения естественного нижнего теплообменника необходимо наличие естественного бассейна пористой, трещиноватой среды, с проницаемостью для флюидов, достаточных размеров. С одной стороны бассейна производится отбор горячих флюидов, в другую сторону бассейна закачивается отработанный (охлажденный) флюид. Наличие таких естественных бассейнов с необходимым минимальным размером определяет работоспособность и долговечность всей системы. На разведанных глубинах первых нескольких километров известны заполненные водой такие бассейны. На более высоких глубинах такие данные неизвестны. По данным Кольской сверхглубокой скважинеэы пористость и трещиноватость пород увеличивается, начиная с 4.5 км. Попытаемся оценить минимально необходимый размер нужного бассейна. Естественная потеря Земли теплоты составляает 70 мВт/м^2 [2]. Это означает, что с поверхности 100×100 км^2 потери составят 700 МВт. Отбор такой энергии с 10^4 км^2 поверхности не скажется заметно на окружающую среду. Такую поверхность можно считать максимально вовлеченной в процесс при отборе 700 МВт мощности. Приближенная оценка показывает, что порода $20 \times 20 \times 20$ км^3 при охлаждении на $100^0 C$ выделит тепловую энергию, достаточную для работы ГТЭС мощностью 500 МВт на несколько десятков лет. Это означает, что при излишке температуры пород на $100^0 C$ выше рабочих температур, такие размеры бассейна достаточны. Такой излишек температуры можно получить, увеличением глубины скважины на 3 км.

Не касаясь множества инженерно-технических проблем при разработке ГТЭС, из которых самым важным является разработка усовершенствованных методов бурения (бурение составляет основную расходную часть постройки ГТЭС), отметим научные проблемы механики при разработке такой ГТЭС.

– Прежде всего для обеспечения условий выполнения полного теплового расчета нижнего (глубокого) теплообменника сконструирование с этой целью различных моделей процессов в нижнем теплообменнике и получение точных решений задач теплопроводности в стационарном и нестацоинарном постановках. Также моделирование и решение задач теплопродности (изоляции) скважин и трубопроводов.

– Исследование прочности скалистых пород бассейнов при вариациях давления и температур при высоком давлении и температур.

– Вопросы разведки необходимых бассейнов с проницаемостью для флюидов. Здесь должны быть задействованы все виды разведки – сейсмические, электрические и др.

– Вопросы прочности и надежности рабочих материалов и инструментов в условиях высоких температур и давления.

– Вопросы сепарации механических частиц и фильтрации вредных примесей.

– Вопросы осадкообразования и борьба с ним в обеих теплообменниках и в трубопроводах, где из-за вариаций давления и температуры, может наступить ухудшение проницаемости флюидов, закупоривание пор от трещин.

Последствия. При двухконтурной схеме работы ГТЭС влияние на окружающую среду при нормальной работе станции минимально. Некоторую опасность представляют случайные выбросы. При частичных обвалах в нижнем теплообменнике можно пользоватся запасной скваженой. Однако при обильном осадкообразовании может наступить полное прекращение проницаемости флюидов и прекращение работы станции. К этому могут привести также большие обвалы вследствие потери прочности скалистых пород.

Сейсмобезопасность. С точки зрения теплогазодинамической модели землетрясений [3] они возникают вследствие проникновения в верхние горизонты флюидов под большим давлением с нижних горизонтов. Нижний теплообменник с вариациями температуры и давления может служить удобным инициатором для срабатывания этого механизма. Этот вопрос также нуждается в дополнительном исследовании.

Энергетическая ценность подземных флюидов на рассматриваемых глубинах уже сравнима с нефтью и антрацитом, уступая им всего в несколько раз и во всех случаях заслуживает особого внимания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Берман, Б.Ф.МАврицкий Геотермальная энергия, 1978, с. 416.
2. Д.Теркот, Дж.Шуберт. Геодинамика. 1 т. М.: Мир. 1985. с. 374.
3. А.С.Пономарев Теплогазодинамическая модель коровых землетрясений Изв. АН СССР “Физика Земли” N 10, 1990, с.100-112.

Сведения об авторе:

Хачикян Альберт Серобович
К.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник
Института механики НАН РА
Пр. Маршала Баграмяна 24 Б, Ереван, Армения, 0019
Тел. (37410) 56-81-88 (раб.), 74-02-89 (дом.)
E-mail: albert@mechins.sci.am

ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В КРИСТАЛЛАХ С ДИСЛОКАЦИЯМИ И КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ.

Шекоян А.В.
Ереван, Армения

Пусть в полубесконечной однородной анизотропной среде, принадлежащей к гексагональной или тетрагональной кристаллическим сингониям, вдоль оси шестого или четвертого порядка распространяется нелинейная упругая волна. Следует отметить, что такие оси есть и в других кристаллических сингониях, например, в кубичных кристаллах. В среде имеется дислокационная сеть, удовлетворяющая всем условиям, описанным в работах [1,2]. Плоскость $x_3 = 0$ совпадает с границей среды, причем на границе $u_1 = u_2 = 0$, а в ее ограниченной области $u_3 \neq 0$, где u_1 и u_2 – поперечные смещения, u_3 –продольное. При этом, всюду имеет место условие $|u_{1,2}| \ll |u_3|$, то есть образовываются квазипродольные волны, когда доминирует продольная волна. Тогда малые эффекты диссипации, дисперсии, нелинейность и дислокационное смещение в основных порядках не будут давать вклада в уравнениях для поперечных смещений u_1 и u_2, а будут фигурировать только в уравнении для продольного смещения u_3 [3].

Следуя статьям [4,5], уравнения для ультразвуковой волны и смещения ξ_i дислокации можем написать в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \tag{1}$$

$$A \frac{\partial \xi_i}{\partial t^2} + B \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i \tag{2}$$

где тензор напряжений σ_{ik} и сила f_i действующая на дислокацию, определяются соотношениями

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}}, \quad f_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \tag{3}$$

F – свободная энергия единицы объема кристалла, u_{ik} –тензор деформации. В уравнении (2) A и B постоянные коэффициенты, характеризующие массу и затухание дислокации.

Свободная энергия F имеет вид:

$$F=\frac{1}{2}c_{ijkl}u_{ij}u_{kl}+\frac{1}{2}\lambda_{ik}\xi_i\xi_k+\frac{1}{2}\beta_{ijkl}\left(b_i\xi_j+b_j\xi_i\right)u_{kl}+\frac{1}{3!}Q_{iklmpq}u_{ik}u_{lm}u_{pq}+$$

$$+\frac{1}{3!}\gamma_{ikl}\xi_i\xi_k\xi_l+\frac{1}{3}q_{ijklpq}\left(b_i\xi_j+b_j\xi_i\right)\left(b_k\xi_l+b_l\xi_k\right)u_{pq}, \qquad (4)$$

где c_{iklm}, Q_{iklmpq} тензоры линейной и нелинейной упргости, b_i –компонента вектора Бюргерса, β_{ijkl}, q_{ijklpq} –тензоры линейного и нелинейного акустодислокационного взаимодействия, λ_{ik} и γ_{ikl} –тензоры линейной и нелинейной „жесткости” дислокаций.

Используя соотношения (3) и (4), из (1) и (2) получим следующие уравнения:

$$\rho\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2}=\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_{1,2}\partial x_3}+c_{44}\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x_{1,2}^2}, \qquad (5)$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+c_{44}\Delta_{\perp}u_3+$$

$$+c_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\left(3c_{33}+Q_{333}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial \xi}{\partial x_3}+\beta b\frac{\partial \xi}{\partial x_3} \qquad (6)$$

$$A\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}+B\frac{\partial \xi}{\partial t}=\lambda\xi+b\beta\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=\frac{1}{2}b\beta\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2+\frac{1}{2}\gamma\xi^2+\frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \qquad (7)$$

Так как колебание дислокаций происходит в одной плоскости, уравнение (7) написано в одномерном приближении. Другие компоненты имеют более высокий порядок малости.

В уравнении (6) первое нелинейное слагаемое обусловлено физической и геометрической нелинейностями, а в уравнении (7) первое нелинейное слагаемое геометрической нелинейностью, второе–дислокационной, а последнее–акустодислокационным взаимодействием.

Наличие дисперсии и диссипации дает возможность искать решение в системы (5)-(7) в виде квазимонохроматической волны в следующем виде [3,6–8]:

$$\left(u_i,\xi\right)=\frac{1}{2}\Big\{\left[u_{0i}\left(x_i\right),\xi_0\left(x_i\right)\right]\exp\left[i\left(kx_3-\omega t\right)\right]+$$

$$+\left[u'_{0i}\left(x_i\right)\xi'_0\left(x_i\right)\right]\exp\left[2i\left(kx_3-\omega t\right)\right]+\left[u''_{0i},\xi''_0\right]+k.c.\Big\}, \qquad (8)$$

где $\omega = \omega_1 + i\alpha$ –комплексная частота, α –коэффициент поглощения акустической волны, k –волновое число, u_{0i} и ξ_0 –медленно меняющиеся комплексные амплитуды первой гармоники, штрихованные величины – второй гармоники, а дважды штрихованные – свободные члены.

Поступая аналогично, как в статьях [3,6–8], можно получить уравнения для амплитуды первой гармоники, линейной дисперсии и коэффициента поглощения:

$$\left(P_1 + iP_2\right)\Delta_\perp u_{03} + 2ik\frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = \left(T_1 + iT_2\right)\left|u_{03}\right|^2 u_{03}, \qquad (9)$$

$$\omega_1 = k\mathrm{v}_0\left[1 - \frac{\beta^2 b^2\left(A_0\omega_0^2 + \lambda\right)}{2c_{33}\left[\left(A\omega_0^2 + \lambda\right)^2 + \omega_0^2 B^2\right]}\right],$$

$$\alpha = \frac{k^2\beta^2 b^2 B}{2\rho\left[\left(A\omega_0^2 + \lambda\right)^2 + \omega_0^2 B^2\right]}, \omega_0 = k\mathrm{v}_0,$$

$$\Delta_\perp \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \mathrm{v}_0^2 = \frac{c_{33}}{\rho}$$

Коэффициенты уравнения (9) имеют следующий вид:

$$P_1 = \frac{1}{c_n}\left[c_{44} - \frac{k^2\left(c_{13} + c_{44}\right)^2}{k^2 c_{44} - \omega_1^2\rho}\right] \quad c_n = c_{33}\left[1 - \frac{b^2\beta^2}{2c_{33}\left(A\omega_1^2 + \lambda\right)}\right]$$

$$P_2 = \frac{2\omega_1\alpha\rho\left(c_{13} + c_{44}\right)^2}{c_n\left(k^2 c_{44} - \omega_1^2\rho\right)}$$

$$T_1 = M_1\left(M_2 - M_3 M_4\right) + M_5 M_4,$$

$$T_2 = 2M_1\omega_0 B\left(M_2 - M_3 M_4\right) + \frac{2\omega_0^2 A + \lambda}{\omega_0^2 A + \lambda} B M_5 M_4$$

$$M_1 = \frac{k^2 n\left(\omega_0^2 A + \lambda\right)}{16 c_n \beta^4 b^4}, \quad M_2 = -\frac{n}{2} + \frac{2b^4\beta^2 q}{3}, \quad M_3 = \frac{2b\beta}{9\omega_0^2 A\left(\omega_0^2 A + \lambda\right)},$$

$$n = 3c_{33} + Q_{333}, \quad M_4 = -\frac{n\left(\omega_0^2 A + \lambda\right)}{4\beta b} - \frac{b\beta}{4} + \frac{k^2\gamma b^2\beta^2}{4} + \frac{q^2 b^3\beta}{3\left(\omega_0^2 A + \lambda\right)},$$

$$M_5 = \frac{4k^2 b^3\beta}{27c_n\omega_0^2 A\left(\omega_0^2 A + \lambda\right)}$$

Из коэффициентов T_1 и T_2 видно, что слагаемые, где присутствует величина n, обусловлены упругой нелинейностью. Слагаемое $\frac{b\beta}{4}$ обусловлено геометрической нелинейностью. Когда интенсивность ультразвуковой волны мала, так что упругая и геометрическая нелинейности не проявляются, то величины n и $\frac{b\beta}{4}$ надо полагать нулями и коэффициенты T_1 и T_2, обусловленные дислокационной нелинейностью, упрощаются. В данной дифракционной задаче свободные члены в (8)– малые более высокого порядка [10].

Наличие коэффициента T_2, обусловленного нелинейным поглощением, существенно влияет на устойчивость и фокусирование ультразвуковой волны [8,9]. Наличие оператора $\Delta_\perp$ обусловливается дифракцией пучка.

Условие устойчивости модуляционной ультразвуковой волны имеет вид [8,9] $\operatorname{Im} k_3' \geq 0 \;\; \left(x_3 > 0\right)$, где k_3'–волновое число ультразвуковой волны модуляции. Из анализа выражения для k_3' следует, что если

$$2P_2 k_\perp^2 + 2a_1^2 T_2 \geq 0, \quad \text{то} \quad \text{при} \quad k_\perp\left(P_1^2 + P_2^2\right) + a_1^2\left(3P_2T_2 + 2P_1T_1\right) > 0$$

имеет место устойчивость, а при обратном знаке последнего неравенства– неустойчивость, a_1–амплитуда модуляционной волны.

Уравнение (8) в рамках теории узких пучков [6–8], дает возможность исследовать фокусирование. Например, если исходный фронт плоский, то самофокусировки будет, если $f'\left(0\right) = -\frac{1}{2}T_2 a_0^2 k^{-1} < 0$, что будет при $T_2 > 0,\;\; a_0$–амплитуда при $x_3 = 0$.

Таким образом, ограничиваясь квадратичной нелинейностью в исходных уравнениях, выведено трехмерное уравнение (9) для комплексной амплитуды первой гармоники с кубичной нелинейностью. Наличие кубичной нелинейности обусловлено взаимодействием первой и второй гармоник. Итак, уравнением (9) можно описать процессы самовоздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труелл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972.
2. Гранато А., Люкке К. В кн. „Физическая акустика", т.III, часть А, М.: Изд. Мир, 1969, с.261-318.
3. Шекоян А.В. // Изв. АН Арм ССР, Физика, 1988, т.23, №5, с.283-288.
4. Бурлак Г.Н., Островский И.В. // Письма ЖТФ, 1997, т.23, №18, с.69-74.
5. Ерофеев В.И. // Письма в ЖТФ, 2008 т.34, №4.
6. Шекоян А.В. // Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1982, т.35, №5, с.27-37.
7. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. // Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1981, т.34, №3, с.3-17.
8. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. // Акустический журнал, 1999, т.45, №2, с.149-156.

Сведения об авторе:

Шекоян Ашот Вазгенович
Институт механики Национальной Академии Наук Армении,
старший научный сотрудник, кандидат физ.мат. наук,
тел. (010) 56 85 69
Ереван–0019, Армения, пр. Маршала Баграмяна 24б,
e-mail: ashotshek@mechins.sci.am

КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО СЖАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЫ

Шекян Г.Г., Геворкян В.Р.

Ереван, Армения

При изучении колебаний винтовой цилиндрической пружины, как правило пружина заменяется эквивалентной балкой. Однако многими авторами отмечаны ряд явлений, которые не могут быть обяснены этой приближенной теорией [1,2], предполагающей замены пружину эквивалентной балкой [2].

В настоящей статье изучается малые колебания цилиндрической пружины, которая рассматривается как тонкий криволинейный стержень с круговым поперечным сечением.

Пусть цилиндрическая пружина поджата осевой силой после чего концы ее жестко закреплены. Рассмотрим виток винтовой пружины как тонкий криволинейный стержень, поперечные сечения, которого располагаются на некоторой пространственной кривой, называемой упругой линией. Будем считать упругую линию нерастижимой а координаты точек характеризуется длиной дуги s, отсчитываемой от ее начало.

Введем трехгранник Френе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, где орты совпадают по направлению с нормалью, бинормалью и касательной к упругой линии.

Система дифференциальных уравнений, описывющих вынужденные малые колебания пружины около статической равновесии будет иметь вид [2,3,4].

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_x}{\partial s} + qP_z + a_0 P_y + P_{z_0} q - P_{y_0} a + F_x = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial P_y}{\partial s} + a_0 P_x - p_0 P_z + P_{x_0} a - P_{z_0} p + F_y = \rho S \frac{\partial^2 \text{v}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial P_z}{\partial s} + p_0 P_x - q_0 P_x + P_{y_0} p - P_{x_0} q + F_x = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M_x}{\partial s} + q_0 M_z - a_0 M_y + M_{z_0} q - M_{y_0} a + P_x = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} J_x\\
&\frac{\partial M_y}{\partial s} + a_0 M_x - p_0 M_z + M_{x0} a - M_{z_0} p + P_x = \rho \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} J_y
\end{aligned} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial s} + p_0 M_y - q_0 M_x + pM_{y0} - aM_{x_0} p = \rho \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} J_z$$

где

$$Ap = M_x; \quad Aq = M_y; \quad Ca = M_z \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\beta = \frac{\partial u}{\partial s} + q_0 W - a_0 V; \quad p = \frac{\partial u}{\partial s} + q_0 \gamma - a_0 \beta, \\ -\alpha = \frac{\partial u}{\partial s} + a_0 u - p_0 W; \quad q = \frac{\partial \beta}{\partial s} + a_0 \alpha - p_0 \gamma, \\ \frac{\partial W}{\partial s} + p_0 V - q_0 u = 0; \quad a = \frac{\partial \gamma}{\partial s} + p_0 \beta - q_0 \alpha.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь неизвестные величины $P_x,\, P_y,\, P_z,\, M_x,\, M_y,\, M_z$ являются проекциями на орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ после статической деформации той части внутренних сил, которые появляются при колебаниях; p, q, a –проекции изменения главного вектора кривизны упругой линии при колебаниях; u, v, w –проекции смещения; α, β, γ –малые углы поворота трехгранника при колебаниях; $F_x(\rho, t),\, F_y,\, F_z$ –внешние силы, отнесенные к единице длины упругой линии; ρ –плотность.

Уравнения (1.1) и (1.2) могут быть получены варированием шести уравнений равновесия стержня [1] около состояния статической равновесия [3]:

$$\begin{gathered}p_0 = 0, \quad q_0 = \frac{\cos^2\delta}{R}, \quad a_0 = \frac{\sin\delta \cdot \cos\delta}{R}, \\ M_{x_0} = 0, \quad M_{y_0} = A\left(\frac{\cos^2\delta}{R} - \frac{\cos^2\delta_0}{R_0}\right), \\ M_{z_0} = C \cdot \left(\frac{\sin\delta \cdot \cos\delta}{R} - \frac{\sin\delta_0 \cdot \cos\delta_0}{R_0}\right), \\ P_{x_0} = 0, \quad P_{y_0} = \left(M_{z_0}\cos\delta - M_{z_0}\sin\delta\right)\frac{\cos\delta}{R}, \quad P_{z_0} = P_{y_0} \cdot \operatorname{tg}\delta\end{gathered} \tag{1.5}$$

где R_0 и δ_0 – радиус и угол подъема витка пружины до деформации, а R и δ –после деформации.

$$A = E \cdot J_x,\ C = \frac{EJ_z}{2(1+\nu)},\ J_x = \frac{\pi \cdot r^4}{2},\ s = \pi \cdot r^2,\ J_z = \frac{\pi \cdot r^4}{2} \quad (1.6)$$

где E –модуль Юнга, ν –коэффициент пуассона, r –радиус сечения проволки.

Сжимающая продольная сила P и скручивающий момент M, действующие на торец пружины, находятся из соотношений [3,5]

$$\begin{aligned} &M \cdot \sin\delta - PR \cdot \cos\delta = M_{z_0}, \\ &M \cdot \cos\delta + PR \cdot \sin\delta = M_{y_0}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

а изменение высоты пружины $\Delta H = H_0 - H_u$ угол ее закручивания $\Delta\theta$ определяется по формулам

$$\begin{aligned} &\Delta H = l\left(\sin\delta_0 - \sin\delta\right), \\ &\Delta\theta = l\left(\frac{\cos\delta}{R} - \frac{\cos\delta_0}{R_0}\right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где l –длина упругой линии.

Рассмотрим два вида сжатия пружины силой P: свободное сжатие, при котором $M = 0$ и $\Delta\theta \neq 0$, и стесненное сжатие, при котором торцевым виткам не дают поварачиваться $-\Delta\theta = 0$ и $M \neq 0$.

Считая стержень тонким, пренебрегая инерционными членами систему (1.1)–(1.4) можно привести к виду

$$\begin{cases} A_{11}\gamma + A_{12}V + A_{13}W = 0 \\ A_{12}\gamma + A_{22}V + A_{23}W = JS\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - F_x \end{cases} \quad (1.9)$$

$$A_{13} + A_{23}V + A_{33}W = \rho S\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{1}{q_0^2}\cdot\frac{\partial^4 W}{\partial s^2 \partial t^2}\right) - F_z + \frac{1}{q_0}\frac{\partial F_x}{\partial s},$$

где A_{ij} –некоторые линейные операторы дифференцирования по s с постоянными коэффициентами.

Для пружин с жестко–заделанными кольцами, с учетом (1.4) при $p_0 = 0$ имеем

$$\gamma = 0,\quad \text{v}=\frac{\partial \text{v}}{\partial s} = 0,\quad W = \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0,\quad s = 0,\quad s = l \qquad (1.10)$$

Производя разделение переменных в системе (1.9), при $F_x = F_y = $
$= F_z = 0$, получим

$$A_{11}\gamma(s) + A_{12}V(s) + A_{13}W(s) = 0,$$

$$A_{12}\gamma(s) + A_{22}V(s) + A_{23}W(s) = -\rho S\omega^2 V(s),$$

$$A_{13}\gamma(s) + A_{23}V(s) + A_{33}W(s) = -\rho S\omega^2 \left[W(s) - \frac{1}{q_0^2}\frac{d^2W}{ds^2}\right], \qquad (1.11)$$

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \qquad (1.12)$$

где

$$\gamma(t) = \gamma(s)\cdot T(t), \mathrm{v}(s,t) = \mathrm{v}(s)\cdot T(t), \quad W(s,t) = W(x)\cdot T(t), \qquad (1.13)$$

ω^2 –собственные числа γ_k, v_k, w_k –собственные функции, удовлетворяющие условиям (1.10).

Используя условия ортогональности

$$\int_0^l \left(\mathrm{V}_k \cdot V_n + W_k W_n + \frac{1}{q_0^2}\frac{dW_k}{ds}\cdot\frac{dW_n}{ds}\right)ds = 0, \quad \omega_k^2 \neq \omega_n^2, \qquad (1.14)$$

находим общее решение системы (1.9)

$$\gamma(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(s)\cdot T_k(t), \quad \mathrm{v}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(s)\cdot T_k(t)$$

$$W(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty}W_k(s)\cdot T_k(t), \qquad (1.15)$$

где

$$T_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = \frac{\int_0^l \left[F_y \mathrm{V}_k + \left(F_z - \frac{1}{q_0}\frac{\partial F_x}{\partial s}\right)W_k\right]ds}{\rho\cdot S\int_0^l \left[\mathrm{V}_k^2 + W_k^2 + \frac{1}{q_0^2}\left(\frac{dW_k}{ds}\right)^2\right]ds}, \qquad (1.16)$$

Таким образом задача сводится к определению собственных чисел и собственных функций системы.

Определение собственных чисел и собственных функций по (1.11) в общем случае приводит к практически невыполнимым вычислениям. По этому воспользуемся приближенным методом интегрирования дифференциальных уравнений. Предположим, что угол подъема витка пружины δ мал, а число витков n велико. Введем малый параметр

$$\mu = tg\delta \tag{1.17}$$

и пусть n имеем порядок $1/\mu$.

На основании соотношений (1.5) a_0 и M_{z0} имеют порядок μ, а величина q_0–порядок единицы по сравнению с μ. Обозначим $M_{z0}/(M \cdot q_0) = b$ и рассмотрим два случая сжатия пружины.

В случае свободного сжатия

$$M_{y0} = -\mu^2 b \cdot q_0, \quad \Delta H / H_0 = b/(b^2 - c) + (\mu^2).$$

В случае стесненного сжатия

$$M_{y_0} = -\mu^2 \cdot q_0 A\left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{b}{c}\right) + 0(\mu^4), \qquad \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{b}{b-c} + 0(\mu^2)$$

В обоих случаях величина M_{y0} имеет порядок μ^2. Поэтому, чтобы рассматривать оба случая вместе, положим

$$M_{y0} = \mu^2 \cdot q_0 \cdot a.$$

Перейдем к безразмерной переменной s_1

$$S_1 = q_0 s, \quad l_1 = q_0 l$$

Тогда уравнения (1.11) примут вид

$$\begin{aligned} &A_{11} \cdot \gamma_1 + A_{12} \cdot V + A_{13} \cdot W = 0, \\ &A_{12} \cdot \gamma_1 + A_{22} \cdot V + A_{23} \cdot W = -\mu^2 \lambda^2 v, \\ &A_{13} \cdot \gamma_1 + A_{23} \cdot V_{(s)} + A_{33} \cdot W = -\mu^2 \lambda^2 (1 - p^2) W, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где $\lambda^2 = \rho \cdot S \cdot \omega^2 / \mu^2 q_0$, $\quad p = d/ds_1$, $\quad \gamma_1 = \gamma / q_0$,

$$A_{11} = Cp^2 - A + a\mu^2, \quad A_{12} = (A + C) p^2 - \mu^2 (A + ap^2) - \mu^4 (A + ap^2) +$$

$$+\mu^4 a; \quad A_{22} = -Ap^4 + Cp^2 + \mu^2 (6A - 2b - a) p^2 - \mu^4 (A + ap^2) + \mu^6 a;$$

$$A_{13} = \mu\left[(2A + C) p^2 + A\right] - \mu^3 (2ap^2 + a), \quad A_{23} = \mu\left[(b - 4A) p^4 +\right.$$

$$\left. + (c - A + b) p^2\right] + \mu^3\left[(4A - b - a) p^2 + A\right] - \mu^5 (2ap^2 + a),$$

$$A_{33} = Ap^6 + 2Ap^4 + Ap^2 + M^2\left[\left(-6A + 2b\right)p^4 + \right.$$

$$\left. + \left(-6A + C + 2b\right)p^2 - A\right] + \mu^4\left[ap^4 + \left(A + a\right)p^2 + a\right] - \mu^6 ap^2.$$

(В дальнейшем величины $s_1,\ l_1,\ \gamma_1$ будем обозначать просто $s,\ l,\ \gamma$).

Величину λ^2 представим в виде ряда по μ

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \ldots \qquad (1.18)$$

Можно показать, что уравнение (1.8) имеет восемь корней вида $p = \pm i + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots$ и четыре корня вида $p = \mu\eta_1 + \mu^3\eta_3 + \ldots$. Принимая во внимание фундаментальную систему решений уравнений (1.18), будем искать в виде:

$$\gamma\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\gamma_{ik},\ \mathrm{V}_i\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k \mathrm{v}_{ik};\ \ W_i\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k W_{ik},\ \ i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.19)$$

$$\gamma_i\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\gamma_{ik}\cos l_x + \gamma_{ik}\sin l_z\right), V_i\left(s\right) = \sum\mu^k\left(\overline{\mathrm{V}}_{ik}\cos l_x + \overline{\overline{V}}_2\sin l_z\right)$$

$$W_i\left(s\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(\overline{W}_k\cos s + \overline{\overline{W}}_{ik}\sin s\right), \qquad (1.20)$$

где $\gamma_{ik}, \mathrm{v}_{ik}, W_{ik}, i = 1, 2, 3, 4; \overline{\gamma}_{ik}, \overline{\mathrm{v}}_{ik}, \overline{W}_{ik}, \overline{\overline{\gamma}}_{ik}, \overline{\overline{\mathrm{v}}}_{ik}, \overline{\overline{W}}_{ik}, i = 5, 6, \ldots 12,$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ – медленно меняющиеся функции s или функции величин z, где $z = \mu s$. Обозначим $z_0 = \mu \cdot l$.

Для определения функции (1.19) в уравнениях (1.18) перейдем к переменной z. Тогда

$$-A\gamma + \mu AW + \left[C\gamma'' + a\gamma + \left(A + C\right)\mathrm{v}'' - A\mathrm{v}\right]\mu^2 + 0\left(\mu^3\right) = 0;$$

$$\left(A + C\right)\gamma'' - A\gamma + C\mathrm{v}'' + \lambda_0^2\mathrm{v} + \mu\left[\lambda_1\mathrm{v} + \left(C - 3A + b\right)W'' + AW\right] +$$

$$+\mu^2\left[-a\gamma'' + a\gamma - A\mathrm{v}'' + \left(6A - 2b - a\right)\mathrm{v}'' + \left(\lambda_2 - A\right)\mathrm{v}\right] + 0\left(\mu^3\right) = 0;$$

$$AW'' + \lambda_0^2 W + \mu\left[2\left(A + C\right)\gamma'' + \left(\alpha C - 2A + b\right)\mathrm{v}'' + \lambda_1 W\right] + \mu^2 \times$$

$$\times\left[2AW^{IV} + \left(2c - 4A + 2b\right)W'' - \lambda_0^2 W'' + \lambda_2 W\right] + 0\left(\mu^3\right) = 0.$$

Подставляя в эти уравнения ряды (1.19), при $k = 0$ получим четыре линейно–независимых решения

$$\gamma_{10}=0; \mathrm{v}_{10}=\cos\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{c}}z; W_{10}=0; \gamma_{30}=0;\ \mathrm{v}_{30}=0, \mathrm{W}_{30}=\cos\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{A}}z;$$
$$\gamma_{20}=0; \mathrm{v}_{20}=\sin\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{c}}z; W_{20}=0; \gamma_{40}=0; \mathrm{v}_{40}=0, W_{40}=\sin\sqrt{\frac{\lambda_0^2}{A}}z; \tag{1.21}$$

функции γ_{ik}, v_{ik}, W_{ik}, $i=1,2,3,4,\ k>0$ определяются из неоднородных уравнений

$$\gamma_{ik}=f_{ik},\quad CV''_{ik}+\lambda_0^2 V_{ik}=g_{ik},\quad AW''+\lambda_0^2 W_{ik}=h_{ik}$$

где f_{ik}, g_{ik}, h_{ik} зависят от величин $\gamma_{ij}, V_{ij}, W_{ij}$ с $j<k$.

Для определения функции γ_{ik}, v_{ik}, W_{ik}, $i=5,6,...,12,\ k=0,1,2,...$ после подстановки (1.20) в (1.8) и приравнивания коэффициенты при одинковых степенях μ будем иметь:

$$-(A+C)\gamma_k+a\gamma_{k-2}-C\gamma''_{k-2}+2C\gamma'_{k-1}-(A+C)V_k+(A+C)\times$$
$$\times V''_{k-2}+(a-A)V_{k-2}+2(A+C)V'_{k-1}-(A+C)W_{k-1}+2(2A+C)\times$$
$$\times W'_{k-2}-2AV'_{k-3}+(2A+C)W''_{k-3}+aW_{k-3}+F(k-3)=0$$
$$A\gamma''_{k-2}-A\gamma_{k-2}+2A\gamma'_{k-1}-2a\gamma'_{k-3}+5A\gamma'_{k-2}+(2b-5A+\lambda_0 V_{k-2})+$$
$$+\lambda_1 V_{k-3}+2A\gamma'_{k-1}+(12A-4b)V'_{k-3}-4AV''_{k-3}+(19A-5b)W'_{k-3}+$$
$$+(b-3A)W_{k-3}+(6A-2b)W'_{k-2}+F(k-3)=0$$
$$2A\gamma''_{k-2}+4A\gamma'_{k-1}+(20A-5b)\gamma''_{k-2}+(b-2A)V_{k-2}+$$
$$+(8A-2b)V'_{k-1}+4AW''_k+2\lambda_0^2 W_{k-1}+2\lambda_1 W_{k-2}-12AW''_{k-2}+ \tag{1.22}$$
$$+(8A-4b-2\lambda_0^2)W'_{k-2}+F(k-2)=0$$

(В этих уравнениях индекс i пропущен, а штрихами обозначены производные по z, через $F(n)$ обозначены слагаемые с индексами меньшими n, имеющие неявный вид.

Тогда общее решение системы (1.18) можно представить в виде [4]

$$\gamma(s)=\sum_{i=1}^{4}C_i\gamma_i(z)+\sum_{i=1}^{4}\left(\overline{C}_i\gamma_{i-4}(s)+\overline{\overline{C}}\gamma_{i+8}(s)\right),$$

$$V(s)=\sum_{i=1}^{4}C_iV_i(z)+\sum_{i=1}^{4}\left(\overline{C}_iV_{i-4}(s)+\overline{\overline{C}}V_{i+8}(s)\right), \qquad (1.23)$$

$$W(s)=\sum_{i=1}^{4}C_iW_i(z)+\sum_{i=1}^{4}\left(\overline{C}_iW_{i-4}(s)+\overline{\overline{C}}W_{i+8}(s)\right).$$

Если потребовать, чтобы (1.23) удовлетворяло условиям (1.10), для определения постоянных $C_i, \overline{C}_i, \overline{\overline{C}}_i$, $i=1,2,3,4$ получим систему двенадцати линейных однородных уравнений. Для существования ненулевых решений необходимо, чтобы определитель этой системы Δ был равен нулю. При $\mu=0$ определить Δ разлагается на произведение $\Delta=\Delta_1\cdot\Delta_2\times$ $\times\Delta_3^2\cdot\Delta_4^2$, где $\Delta_1=\sin\sqrt{\lambda_0/C}\cdot z_0$, $\Delta_2=\sin\sqrt{\lambda_0/A}\cdot z_0$,

$$\Delta_3=\frac{(2A-b)B}{2AB^2+\lambda_0^2}\cdot\sin\frac{Bz}{2}\cdot\cos\frac{az_0}{2}-\frac{(2A-b)a}{2Aa^2-\lambda_0^2}\cdot\operatorname{ch}\frac{Bz_0}{2}\cdot\sin\frac{az_0}{2},$$

$$\Delta_4=\frac{(2A-b)B}{2AB^2+\lambda_0^2}\cdot\operatorname{ch}\frac{Bz}{2}\cdot\sin\frac{az_0}{2}+\frac{(2A-b)a}{2Aa^2-\lambda_0^2}\cdot\operatorname{sh}\frac{Bz_0}{2}\cdot\cos\frac{az_0}{2}. \qquad (1.24)$$

Учитывая (1.22), нетрудно понять, что уравнения $\Delta_1=0$ и $\Delta_2=0$ дают частоты продольных и крутильных колебаний, эквивалентные пружине бруса.

Уравнение $\Delta_3=0$ дает частоты колебания бруса с защемленными концами с четным числом полуволн, а $\Delta_4=0$ – с нечетным числом полуволн.

Разложение корней ω_k уравнения $\Delta_{(\omega,\mu)}=0$ в ряд по μ показывает, что рассмотрение эквивалентного бруса вместо пружины дает погрешности порядка μ^2 при определении частот продольных и крутильных колебаний. Каждой из частот поперечных колебаний, эквивалентных пружине бруса, соответствуют две частоты колебаний пружины, отличающиеся от нее на величину порядка μ. Этот факт раздвоения частот поперечных колебаний был обнаружен и экспериментально также другими авторами.

Сравнение результатов численных расчетов проведенным методом последовательных приближенной показывает, что если частота возмущающей силы не лежит вблизи ни от одной из частот собственных колебаний, то рассмотрение эквивалентного пружине бруса дает относительную погрешность порядка μ. При вычислении давления на опору, с некоторыми оговорками все же возможно использование эквивалентного бруса вместо пружины, если имеем чисто продольные колебания.

Во всех остальных случаях замена пружины эквивалентным брусом приводит к большим погрешностям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении. М. Машгиз, 1982. 685с.
2. Хвингия М.В., Мгалоблишвили Д.Б. Динамическая устойчивость цилиндрических пружин. Тбилиси: Изд. Груз. Пи., 1966, 218с.
3. Товстик П.Е. Асимптотические методы интегрирования уравнений колебаний пружины// Вестник ЛГУ. 1962. Вып. 2, №7, с.119-134.
4. Чернышев А.А. Нелинейная теория упругих деформаций цилиндрических пружин//Сб. „Расчеты на прочность" вып.3, Мосгиз, 1958, с.142-145.
5. Шекян Г.Г. Распределения давления по опорной поверхности кольцевго видка цилиндрической винтовой пружины сжатия. Сб. трудов международной н.т. конференции „Технологии и техники автоматизации – 2009„ Ереван. 2010, с.133–136.

Сведения об авторах:

Шекян Гамлет Гургенович
Д.т.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА, профессор
Тел: (+37410)351135

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВАЛ-КОЛОДКА

Шекян Л.А.

Ереван, Армения

В рамках линейной теории упругости рассматривается плоская контактная задача о прижатии равномерно вращающегося вокруг своей оси упругого цилиндра (вала) двумя одинаковыми и симметрично распределенными штампами, к которым прикреплен тонкий упругий слой, обладающий большими фрикционными свойствами.

Упругие перемещения граничных точек цилиндра методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [1,2] выражены через действующие в области трения неизвестные нормальные и касательные контактные напряжения, а упругие перемещения граничных точек слоев выражены через эти напряжения, согласно модели Винклера [3]. На основании известной модели [4], учитывается также износ трущихся поверхностей слоев.

Принимая кулоновский закон трения, задача сведена относительно действующих в области трения нормальных контактных напряжений к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна. Исследование этого уравнения проведено на основании принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций. Выяснено, что существует область изменения характерных параметров задачи, где решение полученного уравнения можно найти методом последовательных приближений. Получено приближенное аналитическое решение задачи.

1.**Постановка задачи и вывод основных уравнений**.

Пусть равномерно вращающейся вокруг своей оси упругий цилиндр 1 (рис.1) с модулем сдвига μ_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 вдавливается двумя одинаковыми и симметрично распределенными неподвижными штампами 3, которые подкрепленны тонкими упругими дугообразными слоями 2, изготовленными из фрикционных материалов.

Требуется определить законы распределения действующих между цилиндром и слоями контактных напряжений, меру взаимного сближения штампов, а также величину вращающего момента цилиндра.

Пользуясь известным методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили о представлении решения плоской задачи теории упругости [1], радиальные упругие перемещения $u_{1r}(\theta)$ его граничных точек выражаются формулой [2]:

$$u_{1r}(\theta)=\frac{\kappa+1}{4\pi\mu}R\int_L p(\varphi)\ln 2\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|d\varphi+\frac{\kappa-1}{8\mu}R\int_L \tau(\varphi)\,\mathrm{sgn}(\theta-\varphi)d\varphi-R\int_L p(\varphi)K^{(1)}(\theta-\varphi)d\varphi- \qquad (1)$$

$$-R\int_L \tau(\varphi)K^{(2)}(\theta-\varphi)d\varphi+\frac{R}{2\pi\mu}\int_L p(\varphi)\cos(\theta-\varphi)d\varphi,\qquad \theta\in[-\alpha,\alpha],$$

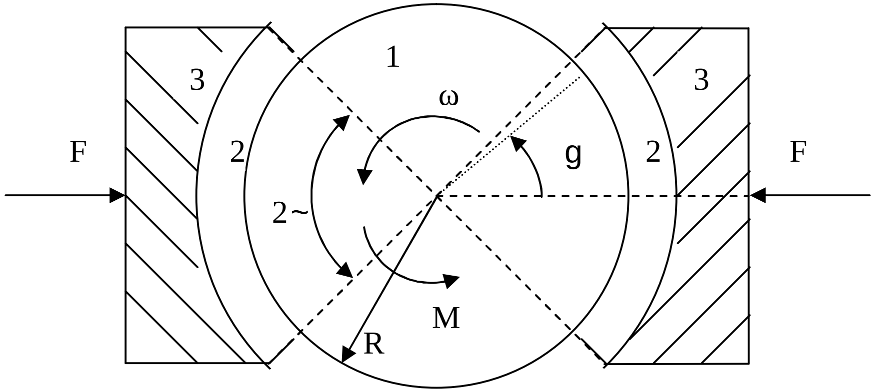


Рис. 1.

ãäå

$$K^{(1)}(z)=\frac{¡+1}{4®«_1}K_{11}(z)+\frac{¡-1}{8®«_1}K_{12}(z)\,,\quad K_{12}(z)=(®\,\mathrm{sgn}\,z-z)\sin z\,,$$

$$K^{(2)}(z)=\frac{¡+1}{4®«_1}K_{21}(z)+\frac{¡-1}{8®«_1}K_{22}(z)-\frac{¡-1}{8®«_1}z\,,\quad K_{21}(z)=\sin z\ln\left|2\sin\frac{z}{2}\right|\,,\qquad(2)$$

$$K_{22}(z)=-2(®\,\mathrm{sgn}\,z-z)\sin^2\frac{z}{2}\,,\ L=\left[-\sim,\sim\right]\cup\left[®-\sim,®+\sim\right].$$

Здесь $¡=\left(3-4¬_1\right)$ - при толстом цилиндре (плоская деформация) и $¡=(3-¬_1)/(1+¬_1)$ - при тонком цилиндре (диск, обобщенно плоское напряженное состояние), $p(g)$ и $²(g)$ – действующие в зоне трения, соответственно, нормальные и касательные контактные напряжения, $2\sim$ – угол захвата штампа (колодки).

По условиям задачи, функции $u_{1r}(g)$, $p(g)$ и $²(g)$ - периодичные функции с периодом $®$:

$$p(®\pm g)=p(\pm g),\quad ²(®\pm g)=²(\pm g),\quad u_E(®\pm g)=u_E(\pm g).\qquad(3)$$

Вследствие упругих деформаций слоев, их граничные точки, находящиеся в контактной области, получают некоторые упругие радиальные перемещения $u_{2r}(g)$. Будем считать, что эти перемещения в каждой точке контактной области пропорциональны действующему в данной точке нормальному контактному напряжению [3],

$$u_{2r}(\gamma) = \alpha_1 p(\gamma)\,,\ \gamma \in [-\varepsilon;\varepsilon] \cup [\pi-\varepsilon;\pi+\varepsilon]\,, \tag{4}$$

где α_1 – коэффициент, зависящий от физических и геометрических параметров слоев [3]

$$\alpha_1 = (1-2\nu_2)h/2(1-\nu_2)G_2\,. \tag{5}$$

Здесь G_2 и ν_2 – соответственно, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала слоев, h – толщина слоев.

В зоне трения, вследствие износа трущихся поверхностей, граничные точки фрикционных слоев, кроме упругих радиальных перемещений $u_{2r}(\gamma)$, получают некоторые дополнительные радиальные перемещения $u_W(\gamma)$. Скорость этих перемещений $\partial u_W/\partial t$, согласно экспериментальным данным [4], в каждой точке контактной области может быть выражена степенной функцией:

$$\frac{\partial u_W}{\partial t} = \alpha_2 [p(\gamma)]^m (\omega R)^n\,,\ \gamma \in [-\varepsilon;\varepsilon] \cup [\pi-\varepsilon;\pi+\varepsilon]\,, \tag{6}$$

где α_2 – коэффициент пропорцональности, t –время, ω –угловая скорость цилиндра, $1 \le m < 3$, $n \approx 1$.

Предполагается также, что нормальные и касательные контактные напряжения связаны между собой кулоновским законом трения:

$$\tau(\gamma) = f_1 p(\gamma)\,,\gamma \in [-\varepsilon;\varepsilon] \cup [\pi-\varepsilon;\pi+\varepsilon]\,, \tag{7}$$

где f_1 –коэффициент трения между цилиндром и фрикционным слоем.

При решении задачи воспользуемся также условиям равновесия цилиндра и штампов:

$$R\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[p(\theta)\cos\theta - \tau(\theta)\sin\theta]d\theta = F\,, \tag{8}$$

$$2R^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\tau(\theta)d\theta = M\,, \tag{9}$$

где F и M – соответственно, внешняя сжимающая сила и вращающий момент, отнесенные на единицу длины цилиндра.

Условие контакта задачи будет:

$$[-u_{1r}(\gamma) + u_{2r}(\gamma) + u_W(\gamma)]/\cos\gamma = \delta\,,\ \gamma \in [-\varepsilon;\varepsilon]\,, \tag{10}$$

где 2δ - мера взаимного сближения штампов.

Теперь, введя безразмерные величины

$$¢_0 = ¢/R,\quad p_0(g) = ª_1 p(g)/R,\ (-\sim \le g \le \sim) \qquad (11)$$

и на основании (1), (4) (6) и (7) функции $u_{1r}(g)$, $u_{2r}(g)$ и $u_W(g)$, выразив через $¢_0$ и $p_0(g)$, из условия (10) получим относительно $p_0(g)$ следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$p_0(g) = A_1\left[p_0(g), ¢_0, g\right], (-\sim \le g \le \sim) \qquad (12)$$

где

$$A_1\left[p_0(g), ¢_0, g\right] = \left[u_{1r}(g) - u_W(g)\right]/R + ¢_0 \cos g\ . \qquad (13)$$

Условия равновесия (8) и (9), на основании (7) и (11), принимают, соответственно, вид

$$F_0 = \int_{-\sim}^{\sim} \left(\cos ¨ - f_1 \sin ¨\right) p_0(¨) d¨\ , \qquad (14)$$

$$M_0 = 2\int_{-\sim}^{\sim} p_0(¨) d¨\ , \qquad (15)$$

где F_0 и M_0 – безразмерные величины, характеризующие сжимающую силу и вращающий момент, соответствено:

$$F_0 = ª_1 \cdot F/R^2\ ,\ M_0 = ª_1 \cdot M/\left(R^3 \cdot f_1\right). \qquad (16)$$

Таким образом, решение задачи сведено к определению $p_0(g)$, $¢_0$ и M_0 из нелинейного интегрального уравнения (12) и из условий (14) и (15).

2.Исследование системы уравниний (12), (14) и (15).

Прежде чем получить решение системы нелинейных уравнений (12), (14) и (15), заметим, что заданная безразмерная сила F_0 входит только в соотношение (14), а неизвестный безразмерный момент M_0- в (15). Учитывая этот факт, временно считаем, что величина F_0 неизвестная, но при этом известна величина безразмерного жесткого перемещения штампов $¢_0$. Тогда система нелинейных уравнений (12), (14) и (15) будет иметь наиболее удобный вид для определения $p_0(g)$, F_0 и M_0. При этом, нелинейное интегральное уравнение (12) можно рассматривать отдельно для определения $p_0(g)$, после чего, из соотношения (14) и (15) непосредственно определить F_0 и M_0, соответственно.

Нелинейное интегральное уравнение (12) будем решать методом последовательных приближений, а исследование его сходимости будем проводить на основании принципа сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций.

Пусть, C – пространство всех непрерывных на отрезке $-\sim \leq g \leq \sim$ функций $X = \{x(g)\}$ с чебышевской метрикой

$$° (X_1, X_2) = \max_{-\sim \leq g \leq \sim} \left| x_1(g) - x_2(g) \right|, \tag{17}$$

где $X_i = \{x_i(g)\}$ $(i = 1; 2)$ – два произвольных элемента из C. Пусть, далее, $S[O, R]$ –замкнутый шар в C с центром $O = \{0\}$ и с некоторым радиусом R. Расмотрим в $S[O, R]$ некоторый оператор $Y = A(X)$, задаваемый формулой

$$y(g) = A_1[x(g), ¢_0, g], \tag{18}$$

где $Y = \{y(g)\}$, $° (X, O) \leq R$.

Нетрудно убедиться, что, если $X \in S[O, R]$, то, т.е. функция $y(g)$ тоже непрерывная на отрезке $-\sim \leq g \leq \sim$, при этом выполняется неравенство $° (Y, O) \leq ¥$, где

$$¥ = \max_{-\sim \leq g \leq \sim} \left| A_1[x(g), ¢_0, g] \right|, \; X \in S[O, R]. \tag{19}$$

Следовательно, если $¥ \leq R$, то оператор $A(X)$ отображает в себе замкнутый шар $S[O, R]$. Далее, на основании (1), (2), (6), (12) и (13), аналогично [5], убедимся, что для двух произвольных элементов X_1 и X_2 из $S[O, R]$ имеет место неравество

$$° [A(X_1), A(X_2)] \leq £ \cdot ° (X_1, X_2), \tag{20}$$

где $£$ -некоторое положительное число, зависящее от физических и геометрических параметров задачи. Из формулы (18) следует, что если характерные параметры задачи и принятый радиус R такие, что $¥ \leq R$ и $0 < £ < 1$, то оператор $A(X)$ в замкнутом шаре $S[O, R]$ имеет некоторую неподвижную точку X^*, т.е. существует такой элемент $X^* \in S[O, R]$, для которого $X^* = A(X^*)$. Элемент X^*, являющийся решением уравнения (12) в замкнутом шаре $S[O, R]$ единственный, к которому стремится по метрике

(17) последовательность элементов $X_0, X_1, X_2 ...$, полученная, исходя из любого начального элемента $X_0 \in S[O, R]$ итерационными формулами

$$X_n = A(X_{n-1}), (n = 1,\ 2,\ 3...) . \qquad (21)$$

Теперь, принимая $X_0 = \{0\}$ в качестве нулевого приближения и учитывая (18) и (21), решение уравнения (12) в первых двух приближениях будет

$$\begin{gathered} p_0^{(1)}(\text{g}) = x_1(\text{g}) = \text{¢}_0 \cdot \cos\text{g}, (-\sim \le \text{g} \le \sim), \\ p_0^{(2)}(\text{g}) = x_2(\text{g}) = A_1[\text{¢}_0 \cdot \cos\text{g}, \text{¢}_0, \text{g}]. \end{gathered} \qquad (22)$$

При этом, на основании (14) и (15) для последовательных приближений F_0 и M_0 будем иметь

$$\begin{gathered} F_0^{(i)} = \int_{-\sim}^{\sim} (\cos \text{¨} - f_1 \sin \text{¨}) p_0^{(i)}(\text{¨}) d\text{¨}, \\ M_0^{(i)} = 2\int_{-\sim}^{\sim} p_0^{(i)}(\text{¨}) d\text{¨}, \quad (i = 1,2,...). \end{gathered} \qquad (23)$$

Наконец, отметим, что полученное таким образом значение F_0 по заданному значению ¢_0 устанавливается зависимостью между F_0 и ¢_0, которую можно трактовать как зависимоть ¢_0 от F_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707с.
2. Мхитарян С.М., Торосян Ф.С. О контактном взаимодействии кругового диска и бесконечной пластины с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцевым покрытием // Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т.31. №5. С.3-19.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
4. Трение, изнашивание и смазка. Справочник. Кн. 1. М.: Наука, 1978. 400с.
5. Мхитарян С.М., Шекян Л.А. Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т.30. №3. С.15-32.

Сведения об авторе:

Шекян Лаврентий Арамович - Канд. физ.-мат. наук, доцент Гос. инженерного университета Армении, кафедра прикладной механики

Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна 105

Тел: (+37410)39 89 01; (+37499)28 34 40; , E-mail: lshekyan@mail.ru

THE SOLUTION OF SOME EXTREMELY PROBLEMS IN ECONOMICS BY METHODS OF LINEAR AND NONLINEAR WAVE DYNAMICS

Bagdoev A.G., Safaryan Yu.S., Karapetyan D.R.
Yerevan, Armenia. Goris, Armenia

In modern science the most important problems represent considerations of unsteady irreversible processes in physics, biology, economy, psychology of personality, where there are, after loss of stability of linear solution for leading parameter of processes in bifurcation points, on empiric curves of processes, abrupt transitions from latent slow variation regions of parameters to almost deterministic large variation regions of parameters. The last ones we describe by nonlinear diffusion equations for probabilities. Using their solutions in form of probabilities shock waves together with empiric data for 3 characteristic parameters of 12 countries, i.e. for 36 curves of economic parameters, we propose model of prediction of economic crisis. The same methods can be used in model of prediction of earthquakes. Also we solved nonlinear variant of known linear equation ,,Black- Sholes’’ for options on market, obtained analytical and numerical solutions of them in cases of pure shock waves, neglecting term with volatility, as well as, for full nonlinear diffusion mentioned equation and constructed tables for options. These investigations allow describe mentioned processes more accurately than by linear theory, essentially in extremely regions.

1. APPLICATION OF METHODS OF NONLINEAR WAVE DYNAMICS TO THE EXTREMAL PROBLEM OF FORECASTING OF ECONOMICAL CRISIS

In forecasting of world financial crisis, including for the debiting market of the USA, it is necessary to consider as major factors: long financing of economics emissions and consecutive increase in debt burden; the big rupture between financial of emissions and real economic sector; speculative activity of banks [1]. Epicenter of world financial crisis was the debt market of the USA, but it doesn’t mean that the crisis reasons are connected only with it.

In the present article the method of nonlinear wave dynamics [2,3] of the account of nonlinear term in the diffusive equation, natural to rather strong changes of processes and its solution, is applied to examination of extremely regions of large values of parameters and their variations for typical economical curves. The tables of capitalization of bonds of the markets resulted in article [1] of some the countries on the preparation of an economic crisis 2008 are used, and also tables of internal and external price debts. Thus these figures, same under the form, for calculations are necessary to use only their inclinations on linear and nonlinear parts of strong changes, therefore for 12 countries and three parameters of economy the detailed numerical solution by means of 36 curves and formulae of nonlinear wave dynamics [2,3] on nonlinear parts is done. One must note that the most informative [4],[1] is examination of summary curve $x(t) = (x_1{}^2 + x_2^2 + ... + x_{36}^2)^{1/2}$ representing modulus of vector $x_i(t)$, i=1,2,.....36 of mentioned 3 parameters of 12 countries.

There are investigated linear part (1995; 2005) year and nonlinear part (2005; 2007) year on time t on graph of summary parameter $x(t)$ and by corresponding inclinations of graph x (t), representing shock wave of probability [2,3]

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0 + \frac{\text{¥}}{2} P' \qquad (1.1)$$

where a_0 are values of inclination of graph on linear part, on nonlinear part we can using (1.1) and inclination of $\frac{dx}{dt}$, obtain $\text{¥}, P'$. Besides for nonlinear region is used model solution [2,3] on shock wave in last region

$$P' = A\sqrt{y_1}, \sqrt{y_1} = -\frac{4a_0}{9\text{¥}A} + \sqrt{\left(\frac{4a_0}{9\text{¥}A}\right)^2 + \frac{2t}{3}}, t = \frac{x}{a_0 + \text{¥}A\sqrt{y_1}} \qquad (1.2)$$

where A=const, $P'(x,t) = P - P_0$, P is probability on shock wave in last region on new time t year, which is connected with usual time t by t -2005 year.

For concreteness here is used model of boundary conditions [2,3] $P'(0,t) = A\sqrt{t}$ and solution on shock wave (1.2), which for large values of nonlinearity $\frac{\text{¥}A}{a_0}$, approximately yields solution

$$P' = A\sqrt{\frac{2t}{3}}, \quad t > 0, t < 2year \qquad (1.2)$$

where in nonlinear region instead of $t - 2005year$ is used new denotation for time as t.

Then from (1.1) ,(1.2) and graph of $x(t)$ in nonlinear region (0;2) year we can obtain

$$A = \frac{9\sqrt{3}}{50} \qquad (1.3)$$

where in 2007 year, i.e. $t = 2$ is assumed that there is rather determinative process,

$$P \approx 0.86, \quad P' \approx 0.36 \tag{1.4}$$

Then from (1.2), (1.3) one can obtain time of crisis formation.

$$P=1, \quad P'=1-P_0, \quad P_0=1/2, \; P'=1/2, \; t=(3+\frac{7}{8})year \tag{1..5}$$

which corresponds in former time value

$$2005year+(3+7/8)year=(2008+7/8)year$$

i.e. known time of world economic crisis formation. By the way for strong shocks from (1.1), also using above-mentioned values of inclinations of graph $x(t)$ nonlinear parts $\frac{dx}{dt}=3252mlrd.d/y.$ yields value of nonlinear coefficient.

$$¥=18.066\frac{mlrd.d.}{y.} \tag{1.6}$$

Model of shock waves (1.1),(1.2) we also applied to Dow Jones curve [1], on its part of extremely large decreasing of curve and obtained value of nonlinear coefficient

$$¥=16.000\frac{mlrd.d.}{y.} \tag{1.7}$$

which is in rather well correlation with (1.6), and time of crisis formation is anew given by (1.5)

Mentioned model of prediction of time of formation of extremely regions of processes can be applied also to problem of generation of earthquakes [5], pandemics [3], abrupt formation of fag-T4 [3], transition to superconductivity [6], Shlegle's transitions in semiconductors [6], in problem of Universe formation [3].

2. THE SOLUTION OF EQUATION OF "BLACK-SHOLES" TAKING INTO ACCOUNT NONLINEARITY AND DIFFUSION

In articles [2,3] the nonlinearity account in the known equation of dynamics of options [7] is given, calculations of shock waves are considered in [2,3] and solution of full problem about final conditions for options [7] are made in [2,3].

Equation Black-Sholes [7] in a linear problem

$$\frac{\partial u}{\partial t}=ru-rx\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}v^2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

where option u there is a purchase possibility that by comparing with §1 is similar to probability, from stocks x, and in logarithmic variable lnx, r – speed of returning of stocks in the shifted position or speed of risk [7], $v^2=b$ speed of returning of stocks in the general set.

Having made replacement $\frac{u}{c} = \mathrm{V}e^{z}, \frac{x}{c} = e^{z}$ [2,3], where c - constant setting the minimum value of x in the matured time $t = t^{*}$ condition [7], it is possible to receive the equation

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2}, \quad a_0 = r + \frac{1}{2} b \tag{2.2}$$

that under the form coincides with a variable of a sign and with the linear equations of diffusion for Markov processes [2,3] with a direct trend.

It is possible to consider nonlinearity of speed of a wave and to write down the equation for reverse time $t' = t^{*} - t$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t'} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\left(a_0 + \text{¥}\mathrm{V}\right) + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z^2} \tag{2.3}$$

where ¥ there is a factor of nonlinearity which, as well as it is possible to find from curves for specific graphs of dynamics of the prices [2,3]. The initialy condition for matured time $t' = 0$ [7].

$$V(z,0) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ 1 - e^{-z}, z > 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Obtained in [2,3], [9] solution of the equation (2..5), using (2.6), under conditions (2.7) is

$$\sqrt{bt'}\,\frac{\text{¥}}{b} V(z,t') = -\frac{e^{\frac{x^2}{2}} + \int_0^{\infty} (\text{¡} - \text{¶}) \exp\left\{\frac{-\text{¥}}{b}(-\sqrt{bt'}\text{¶} + 1 - e^{-\sqrt{bt'}\text{¶}}) - \frac{(\text{¡} - \text{¶})^2}{2}\right\} d\text{¶}}{\int_{\text{¡}}^{\infty} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz' + \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{-\text{¥}}{b}\left(-\sqrt{bt'}\text{¶} + 1 - e^{-\sqrt{bt'}\text{¶}}\right) - \frac{(\text{¡} - \text{¶})^2}{2}\right\} d\text{¶}} \tag{2.5}$$

In calculations for simplifying denotations in (2.5) and in tables instead of $\frac{z}{\sqrt{bt'}}$ is written z, $\text{¡} = z + \frac{\left(1 + \frac{b}{2r}\right)\sqrt{rt'}}{\sqrt{\frac{b}{r}}}$

On formula (2.8) are carried out calculations for values of constants { γ /r=1 b/r= 1}and results for $\sqrt{bt'}\,\frac{\text{¥}V}{b}$ are given in table 1.

Table 1. γ /r=1 b/r= 1

bt' / z	0.3	0.5	0.7	1
-5	0	0	0	0
-1	0.0817095	0.181216	0.310287	0.540828
-0.6	0.121196	0.252588	0.408948	0.660623
-03	0.167632	0.328211	0.50314	0.758914
0	0.217621	0.401033	0.584701	0.832782
0.3	0.267291	0.465616	0.650066	0.885105
0.6	0.313387	0.519316	0.699695	0.920986
1	0.353943	0.562016	0.736206	0.945316
5	0.52804	0.699472	0.833502	0.999087

By the way, for linear case solution of a problem will be [7]

$$V\left(Z,t'\right)=\frac{1}{\sqrt{2®}}\int_0^\infty\left(1-e^{-\sqrt{bt'}¶}\right)e^{-\frac{(¡-¶)^2}{2}}d¶ \qquad (2.6)$$

what can be obtained also assuming $¥=0$ from (2.5).

Calculations of $V(z,t')$ by (2.6) give taken in table 2 corresponding solution of linear “Black-Sholes” equation

Table 2. , $¥/r=0, b/r=1$

bt' / z	0.3	0.5	0.7	1
-5	0	0	0	0.000118
-1	0.593005	0.728803	0.83642	0.95985
-0.6	0.873876	1.01647	1.11808	1.2203
-0.3	1.20725	1.33438	1.41189	1.47299

0	1.57428	1.66083	1.69707	1.7015 4
0.3	1.95202	1.97481	1.95676	1.8959 1
0.6	2.31871	2.2603	2.18077	2.0528 7
1	2.65788	2.50827	2.3657	2.1744 9
5	4.35724	3.48225	2.97331	2.5004 1

Before comparison of values of options given by table 1 for nonlinear theory solution (2.5), with linear theory values given by table 2 resulting by calculation by (2.6) we bring analogous comparison from [8].

In [8] are brought graphs of options from typical times for 3 mounts for 3 variants of approach to statistical investigation of economical processes for 50 firms. They are given on Fig.1-Fig.3.

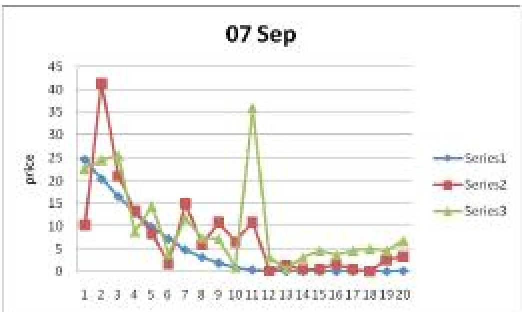


fig.1

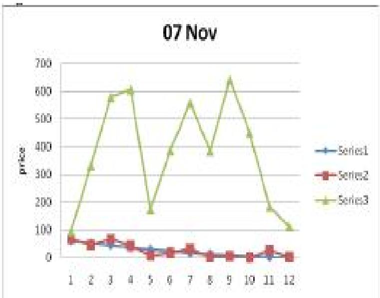


fig.2

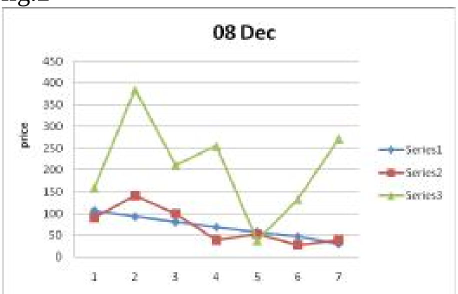


fig.3

On Fig.1,2 and 3 Series 1-market last option prices
Series 2-MC prices, calculated by using classical maximum-likelihood method
Series 3-MC prices, calculated by using linear Black-Sholes formula.

As it followed from Fig. 1,2,3 volatility calculated by using classical maximum-likelihood method better represent market prices than volatility calculated by using linear Black-Sholes formula.

As it is mentioned above the solid lower lines of fig. fig..1-3, representing experimental curves for market processes on 50 firms, are essentially distinguished from upper lines on Fig.Fig.1-3 obtained by linear theory “Black-Sholes”. We compare theirs results with our results on calculated options by nonlinear theory (2.5) table 1. and by linear theory “Black-Sholes” (2.6) table 2.

We can consider our tables as wandering process of option on market, for example table 1 gives values of $\sqrt{bt'}\frac{\text{¥}}{b}V$ in case $\frac{\text{¥}}{r}=1$, $\frac{b}{r}=1$, $\frac{u}{c}=Ve^{z\sqrt{rt'}}$; then in examination of almost brownian process along line $z=0{,}3$ in new denotation, where $\frac{z}{\sqrt{bt'}}=0{,}3$ corresponds to z as former variable, we can obtain for example for $rt' = 0,3; rt' = 1$ moments of $t' = t^{*} - t$ respectively $rt' = 0,3;\ \sqrt{rt'}\ V = 0,27;\ V == 0,6;\quad rt' = 1;\ V = 0,9$.

At the same time in linear solution “Black-Sholes” (2.6) from table 2 one has for V in line $z = 0,3$:

$$rt' = 0,3; V \approx 2;,\ rt' = 1;\ V = 2;$$

As it is seen also for other lines z from table 1 and table 2. nonlinear solution for options is almost 3 times less then linear in accordance to Fig.Fig.1-3. That is for chosen values of $\frac{¥}{b} = 1$ nonlinear solution of table 1 gives rather well approximation to experimental data. Thus our nonlinear solution (2.5) for appropriate nonlinear coefficients ¥ allow well describe the real processes on markets by improved “Black-Sholes” solutions.

So we see that our nonlinear improvement of linear theory of options gives rather well description of practical curves of market [8].

REFERENCES

1. Pogosyan S.O.Reasons of a world economic crisis//Information technology and management. 2008. №8. p.p.197-202.
2. Bagdoev A.G., Vardanyan S.V., Karapetyan D.R., Martirosyan G. A. Analytical and numerical investigations of dynamic processes in economics by methods of wave dynamics//Applied econometrica . 2009. ³1 (13). pp.50-69.
3. Bagdoev A.G., Safaryan Yu.S., Nurijanyan V.N., Nersisyan G.G., Armenakyan A.E. Research of Stochastic Processes By The Methods of Linear and Nonlinear Waves Dinamics http://www.armic.am/modules.php?name=News&file=view&news_id=261
4. Mazur I.I. and. Moldavinov O. I. //Introduction in engineering ecology. M: "Nauka", 1989..375. p
5. Khachyan E.. Applied seismology. Ed.. NAS RA. 2008. 492p.
6. Haken H.. Sinergetics. M "Mir", 1980.
7. Black Fisher, Scholes Myron. The pricing of options and corporative liabilities. The journal of political Economy, 1973.v.81, N3.
8. Ioffe Mark, About Black-Sholes formula, volatility, implied volatility and math. statistics. // 866 United Nations Plaza, Suite 566 New York, NY 10017. www.egartech.com

1. Lighthill M.J. Viscousity effects in sound waves of finite amplitudes //Surveys in Mechanics G.I. Taylor 70-th Aniversary. 1956. pp.250–351.

<u>Information about authors:</u>

Bagdoev A.G.
Corresponding – member NAS RA, Institute of Mechanics NAS Armenia, chief sci. researcher. E-mail: bagdoev@mechins.sci.am
Yu.S. Safaryan
Rector of Goris State University, Armenia
e-mail: safaryan@rambler.ru
D.R. Karapetyan
Goris State University, Armenia
e-mail:karapetyandiana @rambler.ru

THE INVESTIGATION OF PROBLEMS OF HEALING OF FRACTURES BY INJECTION OF FLUIDS WITH INCLUSIONS IN VARIOUS THERMOELASTIC MEDIA

Bagdoev A.G., Martirosyan G.A., Martirosyan A.N., Dinunts A.S., Davtyan A.V.

Yerevan, Armenia. Goris, Armenia

The problem of semi–infinite fracture in thermo elastic plane, when there is current of fluid with inclusions, entering in crack at initial moment $t = 0$, is considered. These problems are especially important for study of process of narrowing of fracture due to action of crystallite inclusions in camphor -oil and in analogically by mathematical treatment problem of building up of fracture by inclusions in camphor- oil in corresponding problems of technology in Laboratory of Institute of Mashinovedenia, Pushkino, Moscow region., 2007 Internet, and in problems of healing of geothermal fracture by mixture with silica cristallines [1,7,8]. In plane x, y equation of fracture boundary is $y = \pm b_1(x,t)$, $b_1(x,t) = b_0 + U_y(x,y,t), y \approx 0$, where thickness $2b_1$ is small and later is taken only upper sign, and is solved problem for $y \ge 0$, due to symmetry. U_x, U_y are components of displacements in elastic media.

Let the temperature T of elastic plane and fluid are approximately the same, denoting by T_0 constant initial value of T, by $q = {}^{\circ}{}_f \mathrm{v} b_0$ the current of entering fluid in fracture, v–fluid velocity along x axis of crack, ${}^{\circ}{}_f$ –density of fluid, i_0 – constant diffusion current of inclusions along y axis, which is supposed known, $¥ = \frac{\partial c}{\partial T}$ which also supposed constant, by K let us denote constant coefficient of building up of fracture surface, than using equation in [1], of narrowing of fracture surface on account of stresses term, one obtains

$$ {}^{\circ}{}_s \frac{\partial b_1}{\partial t} = q¥ \frac{\partial T}{\partial x} - K±_{yy} - i_0 H(x) H(t) \qquad (1) $$

The fracture equation $y = b_0 + U_y(x,0,t), 0 < x < \infty$.

In [9] is solved by method of integral transformations Laplace on t and Fourier on x , solution of obtained from boundary condition Winner-Hopf equation, inversion of transformation in Smirnov-Sobolev form effective solution of problem neglecting the thermo conductivity. Separately one can solve problem almost same as in [1], on account of thermo conductivity, but neglecting of elastic stresses and after summation of solutions obtain

$$V = x\,\mathrm{Re}\frac{\frac{ii_0}{\pi\rho_s\bar{\bar{a}}}\frac{\bar{a}}{b}}{\sqrt{\frac{K_3}{\bar{a}}-1}\sqrt{\frac{K_2+K_3}{\bar{a}}}}\int_0^{\frac{\bar{a}t}{x}}\frac{\sqrt{1-\alpha'}\left(\frac{\bar{a}t}{x}-\alpha'\right)\left(\frac{\bar{a}}{b}-\alpha'\right)d\alpha'}{(\alpha'-\alpha_1)(\alpha'-\alpha_2 i)\alpha' G^-(\alpha')} -$$

$$-\frac{8¥C_1 k}{3°_s c_{pf}\sqrt{®a_1^{\ 2}}}t^{\frac{3}{2}}, b = b_0 + V \qquad (2)$$

$$G^-(\alpha) = Exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_1^{\frac{\bar{a}}{b}} arctg\frac{\frac{1}{b^2\bar{\bar{a}}}\sqrt{\zeta^2-1}+\frac{2}{\bar{\bar{a}}^4}(K_2-K_3)\zeta^2\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\frac{\bar{\grave{a}}^2}{b^2}-\zeta^2}}{\frac{1}{\bar{a}^4}\left(K_3(\zeta^2-1)-K_2\zeta^2\right)\left(2\zeta^2-\frac{\bar{\grave{a}}^2}{b^2}\right)}\frac{d\zeta}{\zeta-\alpha}\right\} \qquad (3)$$

$$\xi = \frac{\mathrm{c_p}-\mathrm{c_v}}{\mathrm{c_v l}}\frac{\mathrm{vb_0}\gamma\rho}{\alpha\rho_\mathrm{s}}, \quad K_2 = \frac{K\left(\bar{a}^2-2b^2\right)°}{°_s}+¶, \quad K_3 = \frac{K\bar{a}^2}{°_s}+¶,$$

$\pm a_1, \pm a_2 i$ are real and imagine roots of Releigh function [2]. The calculations by (2), (3) for $\frac{i_0}{°_s\bar{\bar{a}}} = \frac{1}{10^7}$, $\bar{a} = 10^5\frac{cm}{\sec}$ $\frac{\bar{a}}{b} = \sqrt{3}; K_2 = 0,8; K_3 = 0,3;$ $\alpha_{1,3} = \pm 0.9814; \alpha_{2,4} = \pm 2.736i$ give graph of Fig. 1

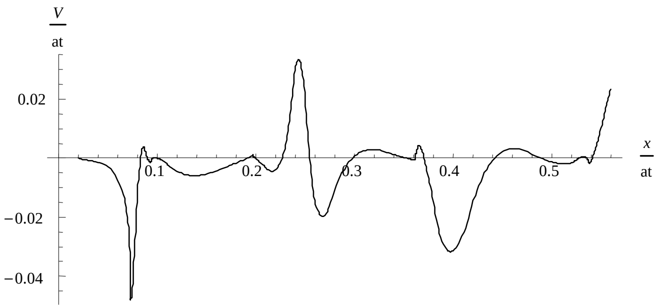


Fig. 1. Dimensionless vertical displacements of fracture's surfaces

and healing of fracture is stimulated as by temperature conductivity parameter a_1^2, $a_1 = \sqrt{\dfrac{k}{°_m c °_m}}$, as by thermo elasticity stresses and diffusion parameter i_0, for last case graph is done by fig.1.

Then [1] condition of healing of fracture yields is $b = 0$, and from (2), (3) one obtains equation for $\overline{a}t$, which can be solved numerically for given formerly constants $\dfrac{i_0}{°_s \overline{a}}$, $\dfrac{K_3}{\overline{a}}$, ¥ , and given $\dfrac{x}{\overline{a}t}$. Furthermore we shall use formula (2), (3) in calculations of dependence of time t from coordinate x of fracture's healing process.

For example one can consider case of thermal fracture in soils [5] where one has constants

$$¥ = 10^{-5} K^{-1}, \qquad °_m = 3 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}, \qquad °_s = 2{,}5 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3},$$

$$c_{pm} = 10^3 J / kgK,$$

$$c_{Pf} = 4 \cdot 10^3 \frac{J}{kgK}, \ \overline{a} = 10^5 \frac{cm}{\sec}$$

for biological media and approximately for geothermal crack in thermo-elastic media, J,K are Jowl and Kelvin units.

There are carried out calculations for following constants:

1. For water-like fluids, injecting into crack, thermo-conductive coefficient[5]

$$k = \frac{1}{2} \frac{kkal}{m \cdot hour\, grad} = \frac{20}{36} \frac{J}{m \cdot \sec grad}, \quad °_m \cdot c_{pm} = 3 \cdot 10^6 \frac{J}{m^3 K}, \quad K \approx 300 grad,$$

then coefficient of temperature conductivity a_1 is $a_1^2 = \dfrac{k}{°_m c_{pm}} \approx \dfrac{1}{2} 10^{-4} \dfrac{m^2}{\sec}$, $a_1 \approx \dfrac{2}{300} \dfrac{m}{\sec^{1/2}}$. One can for rate of increasing of temperature in time on boundary fluid-elastic massive C_1 take two variants, $C_1 = 10^3 grad/\sec$, $10^5 grad/\sec$, i.e. $C_1 \cdot a_1 = 20/3 \ m \cdot grad / \sec^{3/2}$, $C_1 a_1 = 2000/3 m \cdot grad / \sec^{3/2}$. These two variants relates to biological and geothermal cracks closing.

Using Fig.1. one can for negative part of V values obtain for any values of $\frac{x}{\bar{a}t}$ values of $\frac{V}{\bar{a}t}$, and since $\bar{a} = 10^5$ equation $b_0 + V = 0$ yields. Then one, for example, can consider following variants in case $b_0 = 0{,}1cm$, using Fig.1

a) $\frac{x}{\bar{a}t} = 0.064$, $\frac{V}{\bar{a}t} = -0.0108831$, $t = 0.0000918856\sec$, $x = 0.588068cm$

b) $\frac{x}{\bar{a}t} = 0.136$, $\frac{V}{\bar{a}t} = -0.00586324$, $t = 0.000170554\sec$, $x = 2.31954cm$

c) $\frac{x}{\bar{a}t} = 0.262$, $\frac{V}{\bar{a}t} = -0.0177721$, $t = 0.000056268\sec.$, $x = 1.47422cm$

e) $\frac{x}{\bar{a}t} = 0.397$, $\frac{V}{\bar{a}t} = -0.0317016$, $t = 0.0000315441\sec.$, $x = 1.2523cm$

whence one can in plane x,t construct graph of process of healing. More detail solution of (3.5), where $b = 0$, give for case 1. following graphs x from t for different b_0 for $C_1 = 10^3$, $b_0=10^{-5}$

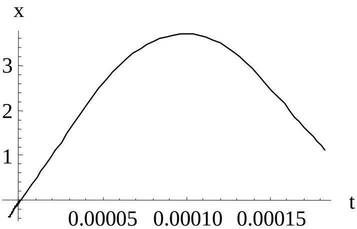


Fig.2 Time t and coordinate x dependence curve of crack healing for $b_0 = 10^{-5} cm$

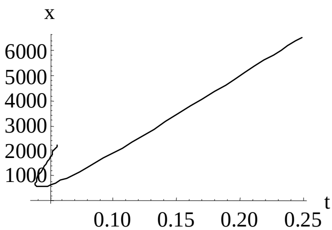


Fig.3 Time t and coordinate x dependence curve of crack healing for $b_0 = 0.1cm$.

2. For metal-like fluids, as aluminum at high temperatures, $\overline{a} \approx 10^5 \frac{cm}{\sec}$, and thermo-conductivity [5] $k = 200 \frac{kkal}{m \cdot hour \cdot grad}$, $a_1 = \frac{4}{3} \frac{m}{\sec^{1/2}}$, and anew $C_1 = 10^3 grad/\sec$, $10^5 grad/\sec$, there are two variants for technological cracks.

For case 2. graphs for $b_0 = 10^{-5};0,1;1\ cm$ are almost same as case 1. Using method of nonlinear wave dynamics [3] one can on mentioned graphs, representing mean curves of healing processes and in the same time shock waves of probabilities of stochastic processes, use the equation $\frac{dx}{dt} \approx \frac{¥}{2} P'$, where $P' = P - P_0$, P is probability and $P_0 \approx \frac{1}{2}$. Since for macroscopic cracks considered in this paper one can assume processes $x(t)$ as almost deterministic one can assume on direct lines of microscopic sizes of width of crack of Fig.2 and macroscopic sizes of width of crack of Fig.3 $P = 1$ $P' = \frac{1}{2}$ and from graphs one can obtain $\frac{dx}{dt} = 0.397 \cdot 10^5$, $¥P'/2 = 0.397 \cdot 10^5$, $¥ = 1.588 \cdot 10^5 \frac{cm}{\sec}$. The same results are true for all mentioned other graphs with direct lines. And for curve-linear part of line Fig.2 approximately $\frac{dx}{dt} = 0.136 \cdot 10^5$ and $P' = \frac{5}{16}$ i.e. for mentioned values of x,t on Fig.2 for microscopic crack curve where $b_0 = 10^{-5} cm$, process of healing of crack is more chaotic. The used here method of shock waves of probability in examination of curves of process of healing of crack can be applied to inverse processes of generation of macroscopic crack by examination of curves of process of transition from small micro and mezo cracks to macro crack [6].

REFERENCES

1. Gliko A.O. Influence of process of sediment of solid phase from hydrothermal mixture on healing of system of plane-parallel cracks", VI

Intern. Conference Problems of dynamics of interactions of deformable media, Goris- Stepanakert, 2008, pp. 170-177 (in Russian).

2. Martirosyan A.N. “Mathematical investigations of insteady linear boundary problems for continua”, Yerevan, Ed. “Zangak-97” 2007, p.244 (in Russian).
1. Bagdoev A.G., Kerobyan Kh V., Nurijanyan A.V., Martirosyan G.A., Bagdasaryan E.D., Safaryan A.S. “The nonlinear waves methods application to stochastic multiparameters problems in informatics and biological processes”, Information Technologies and management, 2008, No8, pp.9-38.
3. Koshliakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M “The equations in partial derivatives of mathematical physics” Ed. “Vishaya Shkola” M. 1970.p.709 (in Russian).
2. 5.Ebert G.. “Handbook on physics”, Phys.-math. lit. M., 1963 p.552 (in Russian).
3. 6. Panin V.E.. “Synergetic principles of physical mesomechanics’’. 2000. Vol.3, N6, pp 15-36 (in Russian).
4. 7. Lowell R.P. Cappellen P.V. and Germanovich N. Silica precipitation in fractuces and the evolution of permeability in hydrothermal upflow zones. //Science. 1993, Vol. 260. pp192-194.
5. 8. Ghassemi A. and Kumar S. Changes in fracture aperture and fluid pressure due to thermal stress and silica dissolution/ precepitation indused by heat extraction from subsurface rocks.//Geothermics. Vol.36. Issue 2. pp115-140.
6. 9. Bagdoev A.G., Martirosyan A.N., DinuntsA.S., Davtyan A.V. The solution of problems og closing of crack in theroelastic media and of stamps on halfplane in presence of wear. The proceedings of International Conference. Topical Problems of Continuum Mechanics, Dilijan, Armenia, 2010, p. 242-247.

Information about authors:

Bagdoev A.G., Corresponding – member NAS RA, Institute of Mechanics NAS Armenia, chief sci. researcher. E-mail: bagdoev@mechins.sci.am

Martirosyan G.A., Candidate of biological sciences, Institute of Mechanics NAS Armenia

Martirosyan A.N., Professor, Doctor of phys.- math. sciences, chief of High Math. Dept. of Goris State University
Tel: (0284)23638, 22048, (0.93)192465,
E-mail: dinunts2007@rambler.ru

Dinunts A.S., Candidate of phys.- math. sciences, High Math. Dept. of Goris State University

Davtyan A.V., Master’s Degree of High Math. Dept. of Goris State University

PROPAGATION OF LOVE WAVES IN A FUNCTIONALLY GRADED PIEZOELECTRIC MATERIAL (FGPM) LAYER SYSTEM

Manukyan G.A., Manukyan N.K.,Manukyan Z.K.
Yerevan, Armenia, Burlington ,VT, USA

In this paper theoretical study the propagation of Love waves in a layered structure consisting of two different homogenous piezoelectric materials, an upper layer and a substrate. A functionally graded piezoelectric material (FGPM) buffer layer is in between the upper layer and the substrate. We employ the power series technique to solve the governing differential equations with variable coefficients. The influence of the gradient coefficients of FGPM and the layer thicknesses on the dispersion relations, the electro-mechanical coupling factor, and the stress distributions of Love waves in this structure are investigated.

1. Introduction: The problem of Love wave propagation in a FGPM layered composite system is solved analytically.The power series technique, a method with high precision and extensive applicability, is employed to solve the governing equations.The dispersion relation of Love waves are obtained, and the effect of gradient coefficients of FGPM and the geometrical dimensions of the layers upon the dispersion relations, the electromechanical coupling factor, and the stress distributions of Love waves in this structure are quantified.

We demonstrate that the low gradient coefficient raises the significant variation of the phase velocity within a certain range of ratios of upper layer thickness to equivalent thickness. The electro-mechanical coupling factor can be increased when the equivalent thickness equals one or two wavelengths, and the discontinuity of the interlaminar stress can be eliminated by the FGPM buffer layer. The theoretical results set guidelines not only for the design of high-performance surface acoustic wave (SAW) devices using the FGPM buffer layer, but also for the measurement of material properties in such FGPM layered structures using Love waves.Du et al. (2007) reported an analytical solution for Love waves in an FGPM layer that is bonded to a semi-infinite homogeneous solid wherein all the material properties vary with the same exponential function. Collet et al. (2006) analyzed Bleustein–Gulyaev (B–G) waves in FGPM structures wherein all the material parameters vary proportionally to the same inhomogeneous function. Cao et al. (2008b) studied the propagation behavior of horizontal shear waves in a FGPM plate using Airy equations and Airy functions.Salah et.al(2010) studied Love waves in FGPM by stiffness matrix method. However, both the WKB method and the use of special functions have limitations: while the former can be used only at high frequencies, the latter can fit only special cases.

2.Statement of the problem: In the present study we consider the propagation of Love waves in a three-layer FGPM composite structure, as shown in Fig. 1. The top layer and the bottom substrate are made of two different kinds of transversely isotropic piezoelectric materials, designated as materials I and II. The top layer has thickness h_1, and its upper surface is traction free. For SAW devices, the thickness

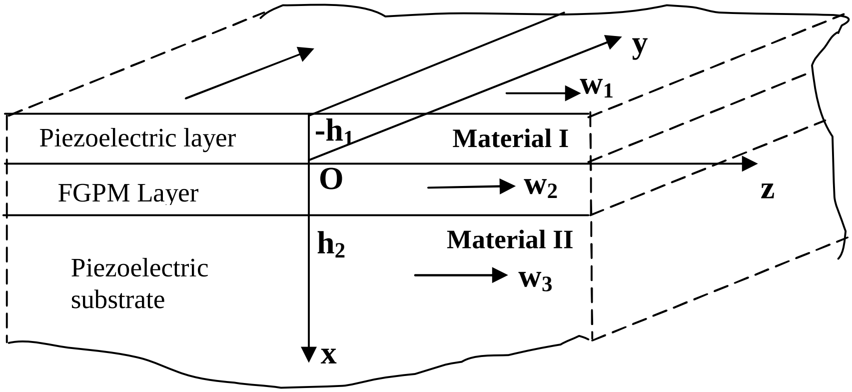


Fig.1. FGPM Layered structure and cartesian coordinates.

of the substrate is typically much greater than those of other layers, and hence it is assumed here that the substrate can be treated as a half-space. The middle layer, which acts as a buffer layer with thickness h_2, is taken to be a functionally graded material compounded by materials I and II. The coordinate system o–xyz is chosen such that the z-axis is directed along the poling direction perpendicular to the x–y plane; and the x-axis points down into the substrate (Fig. 1). The mechanical and electrical properties of the functionally graded material vary continuously along the x-axis direction. Without loss of generality, it is further assumed that the Love waves propagate in the positive direction of the y-axis.

The piezoelectric constitutive equations can be expressed as

$$\pm_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k, \;\; D_j = e_{jkl} S_{kl} + \pounds_{jk} E_k, \tag{1}$$

where $\pm_{ij}$ and S_{kl} are the stress and strain tensors, D_j and E_k are the electrical displacement and the electrical field intensity and $c_{ijkl}, e_{kij}, \pounds_{jk}$ are the elastic, piezoelectric and dielectric coefficients, respectively. For the FGPM buffer layer, the relevant material properties vary continuously along the thickness direction, i.e., they are functions of the x-axis.

The motion equation and the electrical displacement equilibrium equation are given by

$$\pm_{ij,j} = {}^\circ \ddot{u}_i, \;\; D_{i,i} = 0, \tag{2}$$

where ρ is the mass density and u , is the component of mechanical displacement in the ith direction. The comma followed by the subscript i indicates space differentiation with respect to the corresponding coordinate, x, and the dot ‘‘•” represents time differentiation, and the repeated index in the subscript implies summation with respect to that index.
The relation between the mechanical displacement and the strain components is as follows:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{3}$$

According to the quasi-static Maxwell’s equation, the relation between the electrical intensity and the electrical potential is

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \tag{4}$$

where ϕ is the electrical potential function.

Let u , v and w denote the mechanical displacement components. For Love waves propagating in the FGPM layered structure along the y-axis in the positive direction, as shown in Fig. 1, the mechanical displacement components and the electrical potential can be expressed as

$$u = v = 0, w = w(x, y, t), \phi = \phi(x, y, t). \tag{5}$$

Let w_1 and ϕ_1 denote the mechanical displacement and the electrical potential in the upper layer, respectively. The governing equations for Love waves propagating in the upper layer $(-h_1 < x < 0)$ can be expressed as

$$c_{44}^{(1)}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial y^2}\right) + e_{15}^{(1)}\left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2}\right) = \rho^{(1)}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \tag{6}$$

$$e_{15}^{(1)}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial y^2}\right) - \varepsilon_{11}^{(1)}\left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{7}$$

where the ,,$^{(1)}$,, symbol is used to denote the parameters associated with the upper layer material.

Similarly, representing the mechanical displacement and the electrical potential in the FGPM buffer layer by w_2 and ϕ_2, respectively, we can obtain the governing equations in the FGPM layer $(0 < x < h_2)$:

$$c_{44}^{(2)}(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+\frac{\partial w_2}{\partial y^2})+e_{15}^{(2)}(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2})+c_{44}'^{(2)}\frac{\partial w_2}{\partial x}+e_{15}'^{(2)}\frac{\partial w_2}{\partial x}=\rho^{(2)}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2},$$

$$e_{15}^{(2)}(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{\partial w_1}{\partial y^2})-\varepsilon_{11}^{(2)}(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2})+e_{15}'^{(2)}\frac{\partial w_2}{\partial x}-\varepsilon_{11}'^{(2)}\frac{\partial w_2}{\partial x}=0 \quad (8)$$

where the superscript ,$'$, indicates space differentiation with respect to the x-coordinate and ,,$^{(2)}$,, symbol is used to denote the parameters associated with the FGPM layer material.

Finally, the governing equations in the piezoelectric substrate $(x > h_2)$ are derived as

$$c_{44}^{(3)}(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}+\frac{\partial w_3}{\partial y^2})+e_{15}^{(3)}(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2})=\rho^{1}\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2}, \quad (9)$$

$$e_{15}^{(3)}(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}+\frac{\partial w_3}{\partial y^2})-\varepsilon_{11}^{(3)}(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2})=0 \quad (10)$$

where w_3 and φ_3 are the mechanical dispalacment and the electrical potential in the substrate, and the symbol ,,$^{(3)}$,, is used to denote the parameters associated with the substrate material.

The electrical potential φ_0 in the air above the upper layer should satisfy the Laplace equation, i.e. for $x < -h_1$:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}=0 \quad (11)$$

For Love waves propagation in FGPM layered structure considered here, the following boundary conditions and interface continuity conditions should be satisfied:

1. Traction free boundary condition: $\tau_{xz}(-h_1, y) = 0$ at $x = -h_1$
2. Electrical boundary conditions: $D_{x1}()-h_1, y) = D_{x0}(-h_1, y),$
3. Along the interfaces between the upper layer and the FGPM layer, and between the FGPM layer and substrate, the stress, mechanical dispalasment, electrical potential and electrical dispalacment are all continous:
4. The attenuation conditions for Love waves at $x \to \pm\infty$ are

$$\ddot{}_3 \to 0,\ w_3 \to 0 \quad \text{as} \quad x \to +\infty, \quad \ddot{}_0 \to 0 \quad \text{as} \quad x \to -\infty.$$

In the above equation the subscripts 0,1,2 and 3 are used to denote the mechanical and electrical quantitiews in the air, upper layer, the FGPM layer and the substrate, respectively.

3.Solution of the problem and nomerical results: For Love waves propagation in the FGPM layered structure described above, the solutions of the governing equations can be expressed as

$$w_j(x,y,t) = W_j(x)\exp[ik(y-ct], \tag{12}$$

$$\ddot{}_j(x,y,t) = \Phi_{j(x)} \exp[ik(y-ct], \tag{13}$$

where $i=\sqrt{-1}$, j(1,2,3) respresents the j th layer, $k = 2®/ª$ is the wave number (ª being the wavelegth), c is the phase velocity and $W_j(x)$ and $\Phi_j(x)$ are the amplitudes of the mechanical dispalacment and the electrical potential that are to be solved, respectively.

For numerical analysis with the theoretical model developed above , the FGPM middle layer is taken as a functionally graded composite componended by materials I and II, with their volume fractions varying along the thickness direction and the top and bottom surfaces of the FGPM layer identical to those of material I and II in the FGPM layer can be described as

$$f_1 = 1 - \frac{1-\exp(px/h)}{1-\exp(p)}, \quad f_2 = \frac{1-\exp(px/h)}{1-\exp(p)} \tag{1.8}$$

where p is the gradient coefficient. The variations of f_1 and f_2 with depth x/h are plotted for values of p from -1 to 10 i fig.2. It can be seen that the volume fraction of material I (f_1) increases and that of material II (f_2) decreases when the gradient coefficient p is increased and f_1 and f_2 are linear functions of x/h, when $p=0$. The parameters associated with the FGPM composite are described as $g(x) = g^{(1)} f_1(x) + g^{(2)} f_2(x)$ where g represents the elastic, piezoelectric, dielectric and other coefficients of the FGPM composite, and $g^{(1)}$ and $g^{(2)}$ represent the corresponding parameters of materials I and II, respectively.In order to express the wave propagation properties in the same averege thickness

of the material I, H, as $H = h_0 + \int_0^{h_1} f_1(x)dx$

The influence of the gradient coefficient, p, and the thikness of the upper layer h_1, on the propagation properties of Love waves in a structure having the same equivalent thickness, i.e. $H = 0.0005m$, is discussed below. With the value of H fixed, the thinner the upper layer (h_1). The thicker the FGPM layer (h_1) becomes. PZT-2 and ZnO are chosen as materials I and II, respectively, with

	c_{44} (GPa)	° (kg/m^3)	e_{15} (C/m^2)	£$_{11}$ (F/m)	£$_{0}$ (F/m)
PZT-2 (I)	22.2	7.600*10^{3}	9.80	44.6*10^{-10}	8.854*10^{-12}
ZNO (II)	42.3	5.665*10^{3}	0.48	6.70*10^{-11}	8.854*10^{-12}

It has been established that if the material parameters of the FGPM layer very slowly, i.e., if $\left|\left[g^{(1)} - g^{(2)}\right] / g^{(1)}\right| < 1$, then all the numerical results satisfy the convergence criterion. Numerical examples indicate that the propagation properties in the FGPM composite structure are not only determined by the gradient coefficient and the thikness of the FGPM layer, but also by the electrical boundary conditions and the equivalent thicknesss.On of hand, the FGPM layer acts as a buffer layer and can avoid the stress discountinuity of the interface; a lower gradient coefficient and a suitable ratio of the top layer thickness to the FGPM layer thickness can improve the electro-mechanical coupling factor of the system. On the other hand, by combining the relation between wave number and gradient coefficient with the variations in Love wave velocities, a theoretical foundation can be provided for characterizing the material gradient coefficient through experimental measurements.

REFERENCES

1. Cao, X., Jin, F., Wang, Z., 2008b. Theoretical investigation on horizontally shear waves in a functionally gradient piezoelectric material plate. Advanced Materials Research, 707–712.
2. Collet, B., Destrade, M., Maugin, G.A., 2006. Bleustein–Gulyaev waves in some functionally graded materials. European Journal of Mechanics – A/Solids 25, 695–706.
3. Du, J., Jin, X., Wang, J., Xian, K., 2007. Love wave propagation in functionally graded piezoelectric material layer. Ultrasonics 46, 13–22.

4. Liu, J., Cao, X.S., Wang, Z.K., 2007. Propagation of Love waves in a smart functionally graded piezoelectric composite structure. Smart Materials and Structures 16,13–24.
5. Li, X.Y., Wang, Z.K., Huang, S.H., 2004. Love waves in functionally graded piezoelectric materials. International Journal of Solids and Structures 41, 7309–7328.

Information about authors:

Gohar Aslan Manukyan
Cand.phys.-math. sci. Institute of Mechanics NAS of Armenia
Adress: Gr.Artzruny 10/4,Yerevan Armenia, 0012
E-mail: avetisus@yahoo.com

Narine Kliment Manukyan
PhD, Univercity of Vermont,USA
Adress: Burlington, VT,USA
E-mail: narulka22000@gmail.com

Zarine Kliment Manukyan
PhD YSU, Yerevan, Armenia, Alek Manukyan 1.
E-mail: zarulka88000@yahoo.com

TO NONLINEAR DYNAMICAL PROSSECES FOR SOME THIN-WALLED DEFORMABLE STRUCTURES

Tamaz S.Vashakmadze

Tbilisi, Georgia

1.Union form for some nonlinear problems of continuum mechanics

In the work [1] there were suggesting an union form of three-dimensional (respect to spatial coordinates) nonlinear dynamical systems of partial differential equations(PDE) which contains as particular cases Navier-Stokes' equations, nonlinear systems of PDE theory of elasticity. By this presentation we prove that nonlinear appearances, observed in problems of solid mechanics, may be detected in the Navier-Stokes' type equations and vice versa. For this case the basic system of PDE has the following form:

$$\text{°}\,\frac{D_\Gamma^2 u}{Dt^2} = f-(1-\Gamma)\nabla p+\nabla\left[(1+\nabla u)\text{²}\,\right], \tag{1}$$

where ° is a density, p is pressure, $v=\left(v_1,v_2,v_3\right)^T$ is vector of velocities, f is known volume forces, D/Dt is total or convective derivative, ² is stress tensor, $u=\left(u_1,u_2,u_3\right)^T$ denotes displacement vector,

$$\partial u/\partial t=v, \nabla=\left(\partial_1,\partial_2,\partial_3\right)^T=\text{grad},$$

$$\frac{D_\Gamma^2 u}{Dt^2}=\begin{cases}\partial^2 u/\partial t^2, \Gamma=1\\ Dv/Dt, \Gamma=0\end{cases}.$$

Newton's type law for viscous flow and Hooke's generalized law for solid structures may be rewrite in the common form:

$$\text{²}=\left[\left(1-\Gamma\right)\frac{\partial}{\partial t}+\Gamma\right]A_\Gamma\cdot\text{£}\ ,(0\le\Gamma\le 1), \tag{2}$$

where symmetric matrix A_Γ corresponds to fluids, if Γ = 0 and – to solid media if Γ =1.

For conditions of conservation of mass or equations of continuity we have:

$$\left[(1-\Gamma)\partial_t+\Gamma\right]B_\Gamma\left[\text{£}\right]=0\ , \tag{3}$$

2. Nonlinear dynamical processes for some piezo-electric and electrically thin-walled anisotropic elastic structures

2.1. Elastic structures

The well-known two-dimensional von Kármán equations for nonlinearly elastic plates represent the most essential part of the main manuals in theory of elasticity. In spite of this in 1978 Truesdell expressed an idea about neediness of

"Physical Soundness" of von Kármán system. This circumstance generated the problem of justification of von Kármán system. Afterwards this problem is studied by many authors, but with most attention it was investigated by Ciarlet [3].In particular, he wrote: "the von Kármán equations may be given a full justification by means of the leading term of a formal asymptotic expansion"[3, p.368]. This result obviously is not sufficient for a justification of "Physical Soundness" of von Kármán system as representations by asymptotic expansions is dissimilar: leading terms are only coefficients of power series without any physical meaning.

Based on the [7], the method of constructing such anisotropic inhomogeneous 2D nonlinear models of von Kármán-Mindlin-Reissner (KMR) type for binary mixture of porous, piezo and viscous elastic thin-walled structures with variable thickness is given, by means of which terms take quite determined "Physical Soundness". The corresponding variables are quantities with certain physical meaning: averaged components of the displacement vector, bending and twisting moments, shearing forces, rotation of normals, surface efforts. In addition the corresponding equations are constructed taking into account the conditions of equality of the main vector and moment to zero. By choosing parameters in the isotropic case from KMR type system (having a continuum power) the system as one of the possible models is obtained. The given method differs from the classical one by the fact, that according to the classical method, one of the equations of represents one of *Saint-Venant*'s compatibility conditions, i.e. it's obtained on the basis of geometry and not taking into account the equilibrium equations. This remark is essential for dynamical problems. Further for isotropic and generalized transversal elastic plates in linear case from KMR the unified representation for all 2D BVP (considered in terms of planar expansions and rotations) is obtained.

Using methodology of [7], from ch.1 we present the following nonlinear systems of KMR type:

$$\left(D\Delta^2 + 2h°\partial_{tt} - 2DE^{-1}(1+³)°\partial_{tt}\Delta\right)w =$$
$$=\left(1-\frac{h^2(1+2¥)(2-³)}{3(1-³)}\Delta\right)\left(g_3^{+} - g_3^{-}\right) + 2h\left(1-\frac{2h^2(1+2¥)}{3(1-³)}\Delta\right)[w, ¨] +$$
$$+h\left(g_{~,~}^{+} - g_{~,~}^{-}\right) - \int_{-h}^{+h}\left(tf_{~,~} - \left(1-\frac{1}{1-³}\Delta\left(h^2-t^2\right)\right)f_3\right)dt, \qquad (4)$$

$$\left(\Delta^2 - \frac{1-¬^2}{E}\,°\Delta\partial_{tt}\right)^{\cdot\cdot} = -\frac{E}{2}[w,w] + \frac{¬}{2}\left(\Delta - \frac{2°}{E}\partial_{tt}\right)\left(g_3^+ + g_3^-\right) + \frac{1+¬}{2h} f_{\sim,\sim} \tag{5}$$

The systems type (4) - (5) are 2D system of refined theories with control parameters ¥ . By choosing ¥ we got all well-known refined theories and from other -some new ones. We below remark two properties:

(A). The second equation of von Kármán classical system corresponding to (5) even in dynamical case has the form $\Delta^{2\,\cdot\cdot} = -o.5E[w,w]$ while a dynamical part of first equation has a same with (4) form. Such structure of von Kármán classical system gives the possibility using methods of Harmonic Analyses.

The (4)-(5) systems describe new nonlinear wave processes and it's evident that for them there aren't sufficient to application only Furier Analysis technique.

The new dynamical members are: $\Delta\partial_{tt}{}^{\cdot\cdot}$ and $\partial_{tt}\left(g_3^+ - g_3^-\right)$.First of them corresponds to Rayleigh-Lamb waves acting in a middle surface of elastic structures.

(B). By using for simplicity the typical relations as $\partial_{11}\varphi = \overline{\sigma}_{12}$, $\partial_{12}{}^{\cdot\cdot} = -±_{12}$, $\partial_{22}\,\varphi = \overline{\sigma}_{11}$, the first expression may be rewritten in the following form:

$$\Delta[w,{}^{\cdot\cdot}] = ±_{\sim}\,\partial_{\sim}\,\Delta w + \partial_{\sim}\,\Delta ±_{\sim} + 2±_{\sim\,,¥}\,\partial_{\sim\,,¥}\,. \tag{6}$$

Calculate and analysis by these expressions of a symbolical determinant show that the characteristic form of systems type (4), (5) may be positive, negative or zero numbers as well as an arbitrary continuous function of x, y. Here we must remark that $ED' = 4(1+2¥)(1+¬)D$, as so if $\{f\}$ denotes physical dimension of value f, it's evident $\{\Delta^2 w\} = \{\Delta[w,{}^{\cdot\cdot}/E]\}$.

As is well known, the direct way of constricting Boussinesq, Burgers, Korteweg-de Vries, Kadomtsev-Petviashvili, Dorodnitsin's equations and other well-known systems describe turbulent flows, one and two dimensional solitons in fluids and continuum plasma physics, shock waves are given in substantial number of works(see ,for instance, [8,9],). The same member present in (1) (when $\Gamma = 1$) as we prove by (7). In another way term of the form $\Delta[u,{}^{\cdot\cdot}]$ appear in Navier – Stokes type equations, when $\Delta u \neq 0$. Thus we prove that nonlinear phenomena observed in problems of solid mechanics can be detected in the Navier – Stokes' type equations and vice versa.

Thus, the first summand of (6) may be defining the nonlinear wave processes for static cases. The structure of the third summand obviously corresponds to 2D soliton type solutions of Corteveg- de Vries or Kadomtsev-Petviashvili kind.

2.1.Refined Theories for Piezo-Electric and Elacrically Conductive Elastic Plates

The method of preliminary sections we apply, for example, for piezo-electric and electrically conductive anisotropic elastic plates. type for binary mixture of porous, piezo and viscous elastic thin- type for binary mixture of porous, piezo and viscous elastic thin- type for binary mixture of porous, piezo and viscous elastic thin- type for binary mixture of porous, piezo and viscous elastic thin- for binary mixture of porous, piezo and viscous for binary mixture of porous, piezo and viscous for binary mixture of porous, piezo and viscous type for binary mixture of porous, piezo and viscous type for binary mixture of porous, piezo and viscous

For the sake of clarity and simplicity we restrict our consideration here to the linear boundary value problem with constant thickness (see [5]):

$$\pm_{ij,j} = f_i, \;\; div\, D = 0, \pounds_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \; E = \text{grad}\text{¤}, \quad x \in \Omega_h,$$

$$\pm_{3i}\,|_{S^{\pm}} = g_i^{\pm}, \quad D_3\,|_{S_1^{\pm}} = d_3^{\pm}, \quad \text{¤}\,|_{S_2^{\pm}} = v_0^{\pm}, \quad \text{l}[\text{u},\text{¤}] = g \;\;, \; x \in S$$

Here σ, ε, u stand for the stress strain tensors and for displacement vector respectively, D is an electrical induction vector, E means a tension of electrical field, φ stands for electrical potential.

The use of some results of section 2 of [7] for this case will be set forth below.

The scheme constructing of exact nonlocal representations for this case is similar to considerations of subsection 2.2 [7] for linear case taking into account the boundary conditions on $S^{\pm}$ with respect to D_3 or φ.In the first case we have:

$$\frac{2h^3}{3} p_{11}\Delta^2 u_3^* = \frac{e_{15}h^2}{3b_{44}}(1+2\text{¥})p_{11}\Delta^2\Phi_1 + g_3^+ - g_3^- -$$
$$-\int_{-h}^{h} f_3 dt + h(g^+_{\sim,\sim} - g^-_{\sim,\sim}) - \int_{-h}^{h} tf_{\sim,\sim}\,dt + (1+2\text{¥})\frac{h^2}{3b_{44}}\times \qquad (7)$$
$$\times\left[(b_{44}p_{13} - p_{11})\Delta(g_3^+ - g_3^-) + b_{44}^{-1}p_{14}\Delta(d_3^+ - d_3^-) + p_{11}\int_{-h}^{h}\Delta f_3 dt\right] +$$
$$+ R_8(u_3^*;\text{¥}).$$

From the equation div D = 0, we deduce

$$\ell_{11} + b_{44}^{-1}e_{15}^{2})\Delta\Phi_1 = b_{44}^{-1}e_{15}^{2}\left(g_3^{+} - g_3^{-} - \int_{-h}^{h} f_3 dt \right) - (d_3^{+} - d_3^{-}) + R_8(\Phi_1)$$

From above system gives the system of differential equations with respect to u_3^h, $Q_{\sim}^h$, Φ_1^h. Choosing γ respectively we get refined theories in a wide sense , which correspond to plate bending equations for the elastic case. For γ = -0.5 follow models of [5].Other systems of differential equations, appropriate for extension (compression) of a plate are the following:

$$b_{66}\Delta\overline{u}_{+} + (p_{11} + b_{66}) grad\ div\, \overline{u}_{+} =$$

$$= (2\mathrm{h})^{-1}\left[\int_{-h}^{h} f_{+}dt - (g_{+}^{+} - g_{+}^{-}) - \int_{-h}^{h} grad(p_{11} \pm_{33} - p_{14}D_3)dt \right] \tag{8}$$

The mathematical models for dynamical case follow immediately from above systems if the given right-side part we change by $F + \partial_t\left(^\circ\partial_t u, -B, D\right)^T$.

In particular, from (7) follows the summand describing Rayleigh-Lamb waves. The dynamical members of type $\Delta\partial_{tt}\ddot{}$ of (5) follow from (8), since this equation gives immediately the second equation of KMR type systems.

REFERENCES

1. T.Vashakmadze, To governing systems of equations of continuum mechanics. J. Georgian Geophysical Society, Issue A, vol. 9A, Tbilisi, 2005, 118-120.
2. C.Fletcher, Computitional Teqniqus for Fluid Dinamics, 2, Springer Verlag, 1988.
3. P.Ciarlet, Matamatical Elasticity, Vol.1: Three Dimentional Elastisity, North Holland, 1997.
4. S. Kaliski, J. Petykievich, Dynamical equations of motion and solving functions for elastic and inelastic anisotropic bodies in the magnetic field. Proc. Vibr. Prob. Pol. Acad. Sci., N 2, 1959, 17-35.
5. V.Parton, B. Kudriavtsev, Electromagnetoelasticity of piezoelactric and electrically conductive solids.M.: Nauka, 1988 (in Russian).
6. D.Ambartsumian, G. Bagdasarian, M. Belubekian, Magnetoelasticity of thin plates and shells, M.: Nauka, 1977 (in Russian).

7. T.Vashakmadze, The Theory of Anisitripic Elastic Plates, Kluwer, 1999.
8. M. Ablovitz, H. Segur, Solitons and the inverse scatterin transprots, SIAM, 1981.
9. A.Newel, Solitons in mathematics and physics, SIAM, 19859. A. Newel, Solitons in mathematics and physics, SIAM, 1985.

<u>Information about author:</u>

Vashakmadze Tamaz Sergi.
Javakhishvili Tbilisi State University,VIAM,Emeritus-Professor, Head of Departament, ,Professor,doctor Phys.-Math..Sci., Phone.: 23-09-18(h), Georgia,0162,Tbilisi,I.Chavchavadze Av.75/3/,
E-mail: tamazvashakmadze@yahoo.com

INCULCATION OF THE RIGID CYLINDER INTO INITIALLY ELASTIC HALF–SPACE

Vantsyan A.A., Al–Nuaimi I.J.

Armenia, Iraq

To dynamic penetration of the rigid sharped or deformable indenters numerous works are devoted [1,2]. In [3] the problem of penetration as in absence as in presence of discharge currents was considered.

By analytical and experimental methods the essentially influence of the discharge currents on the stress–strain state of the target and indenter was showed. Fact about essentially increase of the defense properties of the targets by finite thickness in the presence of discharge currents also indicated in [3].

In the present work the stress–strain state in the half–space and the stress state in the rigid cylinder (stamp) at static inculcation of the rigid cylinder into primary elastic half–space is investigated. The rigid cylinder by finite size, by length – l and radius R with initial velocity $v_{oz} = 10^{-4}$ m/sec inculcate into half –space. All points placed on the cylinder surface are moved on the perpendicular direction of he target surface by same velocity $v(z)$, which determined in start of the solution.

Anadvisabile overloaded the present work by known equations of conservation of the mass, motions and energy quantity, also the relations of the stress and strain, Mizes equation, expression of full energy and the others relations, which are used in [2,3] is soloed in the presence given work for k an assumption rigidity of the inculcating cylinder and absence of discharge current, the stress–strain state in the indenter and half–space are determined.

The scheme of the problem is bring on the fig.1. The problem was solved at the following initial and boundary conditions:

initial conditions – $t = 0$

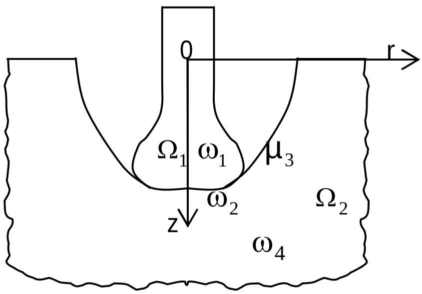


Fig. 1

$$\sigma_{rr}(r,z,0) = \sigma_{zz}(r,z,0) = \sigma_{rz}(r,z,0) = 0$$

$\rho(r,z,0) = \rho_0$ – initial density

$\varepsilon(r,z,0) = 0$ –inner energy

$$v(r,z,0) = \begin{cases} v_0 & \text{at} \quad (r,z) \in \Omega_1 \\ 0 & \text{at} \quad (r,z) \in \Omega_2 \end{cases}$$

$$u(r,z,0)=0 \quad \text{at} \quad (r,z)\in\Omega_1\cup\Omega_2$$

boundary conditions:

$$\sigma_{nn}=\sigma_{n\tau}=0 \quad \text{at} \quad (r,z)\in\omega_1\cup\omega_3$$

$$u=\text{v}=0 \quad \text{at} \quad (r,z)\in\omega_4$$

carried out automatically on the ω_4–which one can take great, respected for the infinite model). On the ω_2 $u_n^+=u_n^-$. $u_\tau^+=u_\tau^-$ or $u_r^+=u_r^-$ $u_z^+=u_z^-$ which corresponded conditions for displacements and velocities vectors continuous on the contact surface. The quantities, indicated by symbol „+” correspondent to solution from indenter side, and by symbol „–” to solutions from half–space side.

By application of markers method the stress–strain state and place of the plasticity front in the half–space and the stress state in the inculcating cylinder was determined.

On the figures 2÷7 are brought the graphs of the stress was mentioned through ○ and positive values through ○. Dependence from around radius introduce the following marks

○	$\sim -6\pm_s$	○	$\sim -1.2\pm_s$
○	$\sim -4\pm_s$	∘	$\sim -\pm_s$
○	$\sim -2\pm_s$	∘	$\sim -0.25\pm_s$

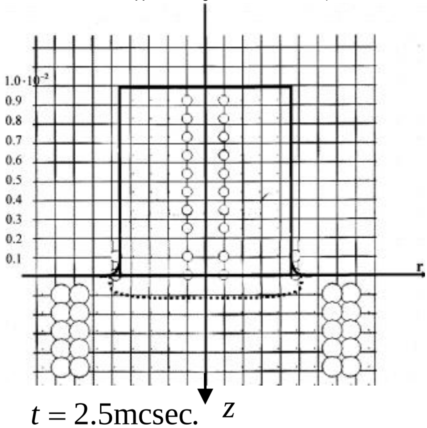
where τ_s is yield limit of the half–space material.

○ –indicated negative, ●–positive stresses.

By doted lines indicated the plasticity front. The numerical calculations was carried out for the value of constants taking from [3].

Analyze the graphs on the fig.2÷7 we can come to the conclusion, that under stamp the values of the stresses always are limited, and the maximal values in the half–space obtained at $r\approx R$.

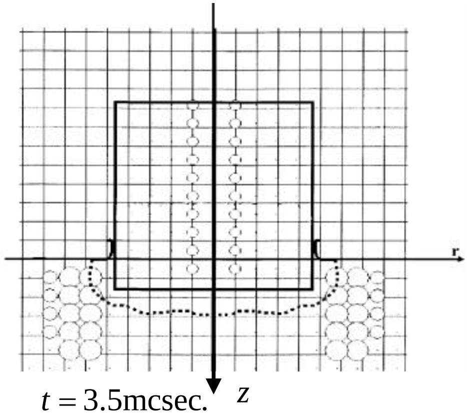
Stamp– σ_{rr}, $v_0 = 10^{-4}$ m/sec.



$t = 2.5$mcsec.

Fig. 2

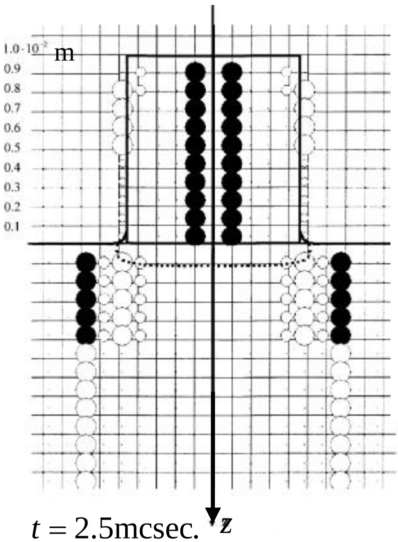
Stamp– σ_{rr}, $v_0 = 10^{-4}$ m/sec.



$t = 3.5$mcsec.

Fig. 3

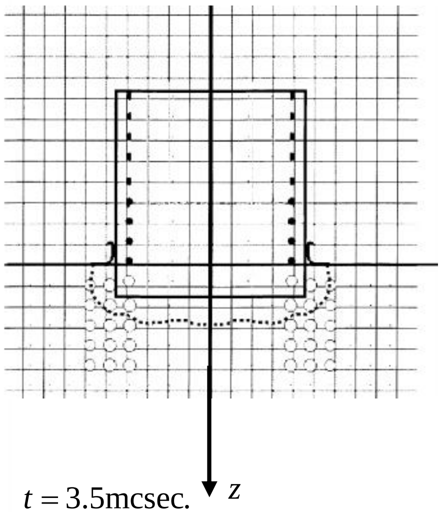
Stamp σ_{rr}, $v_0 = 10^{-4}$ m/sec.



$t = 2.5$mcsec.

Fig. 4

Stamp– σ_{rr}, $v_0 = 10^{-4}$ m/sec.



$t = 3.5$mcsec.

Fig. 5

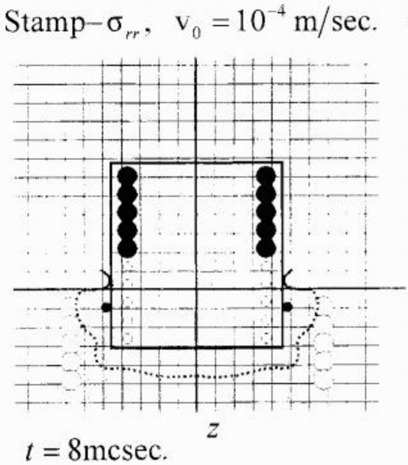


Fig.6

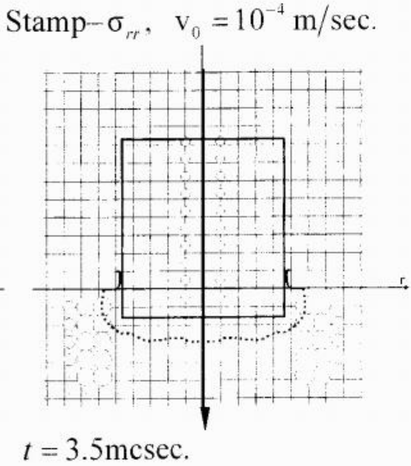


Fig. 7

REFERENCES

1. Vantsyan A.A. The influence of the electromagnetic fields and anisotropic properties of media in the dynamic processes on continuum media. Pross. „Gitutun" NAS AR, Yerevan 2004, 224p.
2. Vantsyan A.A., Hovsepyan D.Ch. Perforation of metallic plate by deformable indenter in the presence of discharge currant. Pross. VI international conference „The problem of dynamics of interaction of deformable media" Goris–Stepanakert 2008, pp 140–150.
3. Vantsyan A.A., Hovsepyan D.Ch. The dynamic interaction of the deformable indenter and target in the presence of discharge currant. Yerevan, 2010, 300p.

Information about autors:
Vantsyan A.A.
Doc.phys.math.sci.professor
Tel. 561523, 242365   (093)524501
E–mail vantsyan@mechins.sci.am
Al–Nuaimi I.J.
(09)3662443 (070)7662443

ACDIRAQ@yahoo.com

СОДЕРЖАНИЕ